

**UNIVERSITAT
JAUME·I**

Programa de Doctorado en Ciencias
Escuela de Doctorado de la Universitat Jaume I

**Estudio de transformaciones temporales
para la mejora de algoritmos numéricos y
semianalíticos en el movimiento orbital.**

Memoria presentada por Vicente Agost Gómez para optar
al grado de doctor por la Universitat Jaume I.

Doctorando:
Vicente Agost Gómez

Director:
José Antonio López Ortí

Castelló de la Plana, septiembre 2020.



Programa de Doctorado en Ciencias
Escuela de Doctorado de la Universitat Jaume I

**Estudio de transformaciones temporales
para la mejora de algoritmos numéricos y
semianalíticos en el movimiento orbital.**

Memoria presentada por Vicente Agost Gómez para optar
al grado de doctor por la Universitat Jaume I.

Doctorando:
Vicente Agost Gómez

Director:
José Antonio López Ortí

Castelló de la Plana, septiembre 2020.

José Antonio López Ortí, catedrático de universidad de Matemática Aplicada de la Universidad Jaume I de Castellón,

CERTIFICO

que Vicente Agust Gómez ha realizado bajo mi dirección el presente trabajo, el cual constituye la memoria para optar al grado de doctor.

Asimismo, autorizo la presentación de la memoria ante la Universidad Jaume I de Castellón para que prosiga con los trámites correspondientes.

Y para que así conste a efectos legales, presento esta tesis y firmo digitalmente el presente certificado.

Fdo.: José Antonio López Ortí.

Esta tesis se presenta en la modalidad de compendio de publicaciones. Los títulos y toda la información requerida sobre ellas se detalla a continuación.

1. **Título:** A note on the use of the generalized *Sundman* transformations as temporal variables in celestial mechanics.

Autoría: José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera.

Revista: International Journal of Computer Mathematics. Vol. 89, No. 3, febrero 2012, 433–442.

Editorial: Taylor & Francis

DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2011.611502>

Factor de impacto: ▲ 2012: 173 de 247 → 0.542

▲ 2018: 116 de 254 → 1.196

-
2. **Título:** An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using *Sundman* generalized variables.

Autoría: José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera.

Revista: Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 75, 2015, 403–411.

Editorial: Elsevier

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2014.06.011>

Factor de impacto: ▲ 2015: 55 de 254 → 1.328

▲ 2018: 47 de 254 → 1.883

-
3. **Título:** A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion.

Autoría: José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera.

Revista: Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 318, 2017, 479–490.

Editorial: Elsevier

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>

Factor de impacto: ▲ 2017: 49 de 252 → 1.632

▲ 2018: 47 de 254 → 1.883

Esta memoria dispone de la aceptación de los coautores de las publicaciones que el doctorando presenta como tesis y su renuncia expresa a presentarlas como parte de otra tesis doctoral. Los documentos de renuncia se presentan en el Anexo I.



A mi familia...



Agradecimientos

No es fácil cuantificar el tiempo dedicado a una tesis doctoral, pero no es poco. Es un tiempo que lleva asociado análisis, investigación y observación en forma de esfuerzo, aprendizaje, perseverancia y paciencia. Es por eso que a lo largo de todo el proceso han surgido innumerables ocasiones en las que un gesto o unas palabras de ánimo han sido más importantes de lo que parecen para poder mantener la ilusión y seguir adelante. Estas líneas de reconocimiento y gratitud van dedicadas a todas esas personas que han estado ahí.

Esta tesis está en formato de compendio de publicaciones y, por tanto, esta memoria recoge los artículos ya publicados por las empresas editoriales Elsevier y Taylor & Francis. Elsevier es la mayor editorial de literatura científica del mundo; es una empresa de análisis de información global que asiste a instituciones y profesionales en el progreso de la ciencia, cuidados avanzados en materia de salud. Taylor & Francis es una editorial de libros y revistas académicas de reconocido prestigio a nivel internacional. A sendas editoriales quiero agradecerles la posibilidad de poder incluir en esta memoria los artículos que en su momento fueron publicados en sus revistas.

También quiero dar las gracias a todos los miembros del departamento de matemáticas y en especial a mi director de tesis y compañero de charlas, José Antonio López, todo el esfuerzo y tiempo dedicado; siempre ha estado abierto a ayudarme y a seguir una buena línea de investigación. Sin su apoyo, esta tesis no habría podido salir adelante, no sólo por todos los recursos que ha dedicado, sino también por la paciencia y buen trato que ha tenido siempre conmigo.

Asimismo, quiero agradecer a los coautores de los artículos, José Antonio López y Miguel Barreda, quienes, de buena fe, han aceptado ceder parte de su trabajo en pro de esta tesis doctoral.

Finalmente, quiero agradecer a mi pareja, a mis hijas y a mis padres toda la serenidad, calma y entereza que han infundido en mí. A ellos, y de todo corazón, quiero hacerles partícipes de toda la ilusión que he puesto en este proyecto.

El agradecimiento debe quedar en la memoria por siempre.



Índice general

1. Introducción	1
2. El problema de dos cuerpos	11
2.1. Introducción	11
2.2. La integral de las áreas	14
2.3. Ecuación de la órbita relativa	16
2.4. Integral de la energía	18
2.5. Movimiento elíptico	19
2.6. Movimiento hiperbólico	25
2.7. Movimiento parabólico	29
2.8. Órbita en el espacio	31
2.8.1. La esfera celeste	31
2.8.2. Órbita en el espacio	33
2.9. Determinación de los elementos a partir de la posición y la velocidad	37
3. Desarrollos en serie	41
3.1. Introducción	41
3.2. Desarrollo de $\sin kE$ y $\cos kE$	42
3.3. Desarrollo de $\left(\frac{a}{r}\right)^m$ y $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m$	43

3.4. Desarrollos de <i>Hansen</i>	45
3.5. Inversión de series	48
3.6. Procesador de series de <i>Poisson</i>	54
4. Movimiento perturbado	61
4.1. Introducción	61
4.2. Ecuación general de la teoría de perturbación	66
4.3. Teoría de perturbación	69
4.3.1. Ecuación fundamental de la teoría de perturbación	69
4.3.2. Ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	72
4.3.3. Pequeñas excentricidades y pequeñas inclinaciones	74
5. Integración de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	81
5.1. Introducción	81
5.2. Desarrollo en serie de la función de perturbación.	100
5.3. Desarrollo de las derivadas de las coordenadas cartesianas respecto de los elementos keplerianos.	101
5.4. Desarrollo del inverso de la distancia.	104
5.5. Métodos semianalíticos	108
5.6. Consideraciones finales	111
6. Estudio analítico de la familia de anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	113
6.1. Introducción	113
6.2. Anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	115
6.3. Desarrollos analíticos en el problema de dos cuerpos mediante anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	121
6.4. Aplicación a la integración de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	124

6.5. Artículo: A note on the use of the generalized <i>Sundman</i> transformations as temporal variables in celestial mechanics	129
7. Teorías planetarias analíticas mediante el uso de anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	141
7.1. Introducción	141
7.1.1. Métodos analíticos	143
7.1.2. Métodos numéricos	144
7.1.3. Anomalías generalizadas	145
7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	149
7.3. Integración analítica de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i> mediante el uso de anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	155
7.4. Artículo: An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using <i>Sundman</i> generalized variables	157
8. Familias biparamétricas de transformaciones temporales en el problema de dos cuerpos	169
8.1. Introducción	169
8.1.1. Anomalías simétricas	172
8.1.2. Familia biparamétrica	177
8.2. Desarrollos en serie	181
8.3. Aplicación a la minimización de errores en la integración numérica	183
8.4. Artículo: A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion	185
9. Conclusiones y perspectivas	201
9.1. Conclusiones	201
9.2. Perspectivas	204

10. Bibliografia	205
ANEXO I. Documentos de aceptación de los coautores	215

Capítulo 1

Introducción

Astronomía es un término que proviene del vocablo latino *astronomía* y de las raíces griegas *aster*, estrella, y *nomos*, orden; es una ciencia conocida desde la antigüedad cuyo objetivo es el estudio de los astros. Con el paso del tiempo, esta ciencia ha ido extendiendo su estudio a una gran cantidad de aspectos tales como la posición y el movimiento de los astros o su estructura interna y ha dado lugar a varias vertientes de conocimiento de las que cabe mencionar la astronomía fundamental, la astrofísica o la cosmología.

Por astronomía fundamental, también llamada astronomía matemática, se entiende la astronomía esférica, cuyo objeto es el estudio de un sistema de referencia espacio-temporal lo más preciso y lo más inercial posible. Es importante puntualizar que en mecánica clásica un sistema inercial es aquel en el que las ecuaciones del movimiento planetario no incluyen términos rotacionales; en relatividad general un sistema inercial equivale a un observador situado en el infinito.

Englobada dentro de la astronomía matemática también se encuentra la astronomía de posición, estrechamente relacionada con la astronomía esférica, cuyo objetivo es determinar la posición y el movimiento de los astros.

Los astros pueden ser clasificados en dos grupos fundamentales. Por un lado, las estrellas y los objetos extragalácticos y, por otro, los planetas u objetos errantes. En los primeros la posición del objeto permanece prácticamente constante para el observador, mientras que en los segundos la posición varía de forma apreciable en el tiempo. En esta segunda categoría también se incluye a la Luna, al resto de los satélites naturales y artificiales, a los asteroides y a los cometas.

Las primeras teorías que estudiaban el movimiento de los planetas eran puramente cinemáticas pues únicamente pretendían describir el movimiento desde un punto de vista geométrico sin prestar atención a las causas de por qué se producía. Es este aspecto destacan las aportaciones realizadas en la Grecia clásica por *Aristarco de*

Samos [9], quien, bajo una oposición a la visión geocéntrica defendida por *Aristóteles*, propuso la teoría heliocéntrica. Siglos más tarde, en pleno apogeo del Imperio romano, el astrónomo griego *Ptolomeo* [105] fundamentará las teorías geocéntricas expuestas por *Aristóteles*; en ellas tratará de resolver dos grandes problemas del movimiento planetario: la retrogradación de los planetas y su aumento de brillo, y la distinta duración de las revoluciones orbitales.

No será hasta el inicio de la Edad Moderna cuando se propongan nuevas teorías significativas en el campo de la astronomía. La revolución en el pensamiento que supuso el humanismo y el Renacimiento se traslada a todos los ámbitos de conocimiento. Los nuevos enfoques de la ciencia nutren sus investigaciones en la Antigüedad y se recuperan y perfeccionan las hipótesis planteadas en la Grecia clásica.

En esta época vieron la luz los trabajos de *Copérnico* [34], en los que se daba coherencia al modelo heliocéntrico. Años más tarde, *Galileo* [47] consolida la defensa de los estudios de *Copérnico* y realiza avances muy significativos en los objetos utilizados para el estudio de los cuerpos celestes. El anteojo de *Galileo* o los espejos de *Newton* son ejemplos de este desarrollo con el que se incrementa de modo notable la precisión de las posiciones observadas. Además, se ponen al alcance de la vista objetos que hasta entonces eran completamente desconocidos como, por ejemplo, los satélites de Júpiter¹ o los anillos de Saturno. Estas aportaciones ponen de manifiesto el perfeccionamiento de la óptica.

Hacia finales del siglo XVI vieron la luz las mediciones y trabajos de *Tycho Brahe* [122], [123]; este astrónomo y escritor danés aporta una teoría híbrida geocéntrica y heliocéntrica.

Con los resultados anteriores, las teorías cinemáticas acerca del movimiento de los planetas no eran capaces de explicar con suficiente precisión el movimiento planetario. *Kepler* [61], con la precisión requerida de la época, estableció que la órbita de Marte debía ser elíptica y que el área barrida por el radio-vector que une el Sol y Marte era proporcional al tiempo empleado en barrerla. Posteriormente comprobó que esta ley también se cumplía para los demás planetas y verificó que en todos ellos el cubo de los semiejes es proporcional al cuadrado de los periodos orbitales. De este modo se establecen las conocidas *leyes de Kepler*, aún de carácter cinemático.

En esta época se producen dos hechos trascendentes para la ciencia: el establecimiento de las leyes de la mecánica y el descubrimiento de la ley de gravitación universal, sendos debidos principalmente a *Newton* [100]. En su obra «*Astronomía de posición*» y en un lenguaje moderno *Teodoro Vives* [128] resume los fundamentos de la dinámica newtoniana en siete axiomas y, tras ellos, lleva a cabo un interesante análisis. Se presenta la transcripción de los mencionados axiomas:

¹Galileo, basándose en sus observaciones, fue quien descubrió los cuatro primeros satélites o lunas de Júpiter. Actualmente reciben el nombre de Ío, Europa, Ganímedes y Calisto.

1. Introducción

1. Existe realmente un espacio absoluto tridimensional de métrica euclídea.
2. El espacio es homogéneo y, por consiguiente, isótropo y de extensión infinita.
3. Existe realmente un tiempo absoluto uniforme.
4. Principio de inercia: un cuerpo material aislado permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (Galileo).
5. Ley fundamental de la dinámica o ecuación del movimiento: la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo material es igual al producto de su masa por la aceleración, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
6. Principio de acción y reacción: a toda acción ejercida por una fuerza sobre una partícula material aislada corresponde en cada instante una reacción producida por una fuerza igual y de sentido contrario.
7. Ley de gravitación universal: dos partículas materiales se atraen con una fuerza proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

También en esta época se desarrolló el cálculo diferencial por parte de *Newton* [100] y *Leibnitz*, [68] quien utilizó una notación más parecida a la actual. Estos hechos determinaron el nacimiento de la mecánica celeste, pues desde entonces es posible plantear el estudio del movimiento de un cuerpo como una ecuación diferencial $m \ddot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Debido a esto, dada una fuerza², \vec{F} , una posición inicial, $\vec{r}(t_0)$, y una velocidad inicial, $\dot{\vec{r}}(t_0)$, en un instante t_0 es posible obtener $\vec{r}(t)$, esto es, una explicación del movimiento debido a sus causas (leyes de gravitación).

En los siglos XVII y XVIII prosigue el desarrollo de la mecánica. *Leibniz*, con los conceptos de trabajo y fuerza viva o energía cinética, introdujo la idea de lo que más tarde se conocerá como mecánica analítica. Posteriormente, destacan los trabajos de *Euler*, quien estudió el movimiento de un sólido rígido, o de *d'Alembert*, quien introdujo el principio de los trabajos virtuales.

Lagrange, a principios del siglo XIX, fundamentó la mecánica analítica [66], la cual introduce un tratamiento alternativo al newtoniano, pero más fácil de manejar desde un punto de vista matemático. También es debido a *Lagrange* el método de variación de constantes para la resolución de ecuaciones diferenciales. La mecánica analítica tuvo un fuerte desarrollo en los siglos XIX y XX; se escribieron numerosas obras clásicas de entre las que queremos destacar [129]. Posteriormente vio la luz la mecánica hamiltoniana moderna, la cual transforma la mecánica en pura geometría [10].

También son de destacar los trabajos de *Jacobi* y de *Poisson*. Sobre el primero son de

²Se asume que \vec{F} es una fuerza de gravitación.

especial interés sus aportes sobre funciones elípticas, la ecuación de *Hamilton–Jacobi* o el método de transformaciones canónicas. *Poisson* realizó avances significativos sobre teorías planetarias, especialmente sobre la estabilidad del sistema solar, postula que hasta segundo orden de perturbación en las masas, los semiejes mayores no contienen términos seculares; también introduce los corchetes de *Poisson*, con los que logra dotar de una estructura geométrica a la variedad de fases. Sus memorias sobre mecánica celeste llegaron a despertar gran interés por parte de *Lagrange*, en particular la obra «*Sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*», de la cual llegó a manuscibir una copia.

La mecánica celeste dio un salto de calidad con el trabajo de *Laplace* —podría casi afirmarse que fue obra suya— quien escribió a principios del siglo XIX una obra casi enciclopédica de cinco tomos llamada *Mécanique Céleste*. *Lagrange* estudió el problema de tres cuerpos obteniendo condiciones de equilibrio y, fruto del método de variación de constantes, formuló las conocidas ecuaciones planetarias de *Lagrange*, que son de enorme importancia en el estudio del movimiento perturbado. *Delaunay* estudió el movimiento de la Luna. *Le Verrier*, basándose en las discrepancias entre las posiciones observadas y calculadas de Urano y aplicando la teoría de perturbación encontró la supuesta órbita que debía seguir el planeta que provocaba dichas discrepancias. *Galle*, siguiendo las indicaciones que le envió por carta *Le Verrier*, encontró el planeta Neptuno con una posición bastante próxima a la predicha por *Le Verrier*; este hecho fue un notable triunfo de la mecánica celeste. A la par de los resultados de *Le Verrier* y *Galle*, y sin conocimiento de la investigación de estos, otro matemático y astrónomo, *J. Couch Adams*, también predijo la existencia del aún desconocido Neptuno ayudándose únicamente de herramientas matemáticas.

En el siglo XIX el desarrollo de la mecánica celeste generó un gran desarrollo del análisis matemático, series de potencias, series de *Fourier*, variable compleja, funciones especiales, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y un largo etcétera. Directa o indirectamente casi todos las grandes mentes matemáticas del siglo XIX trabajaron total o parcialmente en mecánica celeste siendo en dicho siglo la cátedra de mecánica celeste la más prestigiosa de las facultades matemáticas.

Como hito significativo en siglo XIX cabe destacar otra obra monumental, «*Traité de mécanique céleste*» de *François Tisserand* [120], que recoge de un modo casi exhaustivo el trabajo de una gran cantidad de autores del siglo; el trabajo está escrito con una notación unificada e incluyendo numerosas aportaciones propias que aparecen diluidas en la obra.

También en el siglo XIX destaca el trabajo de *Simon Newcomb*; entre otras muchas aportaciones aborda el estudio de la precesión y la nutación con métodos para obtener teorías planetarias, lo cual significó una gran aportación a la astronomía esférica y a la mecánica celeste.

1. Introducción

Tras la prematura muerte de *Tisserand*, *Poincaré* ocupó la cátedra de mecánica celeste de la universidad de París. Éste desarrolló un conjunto de nuevas técnicas basadas en la geometría y la topología para el estudio de problemas relacionados con la mecánica celeste. Estos novedosos métodos están descritos en la obra «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*» [104]. Una de las conclusiones de *Poincaré* es la no convergencia de las series obtenidas en la teoría de perturbación, las cuales son realmente desarrollos asintóticos, aspecto que no impide que sean de enorme utilidad, pero incapaces de describir a muy largo plazo el movimiento en el sistema solar. De este modo vieron la luz los métodos cualitativos en ecuaciones diferenciales. *Poincaré* también estudió el problema de fluidos en rotación. El estudio de los problemas de cuerpos en rotación es un problema interesante y puede consultarse, entre otras obras, en [44], [60], [61], [62], [63], [82] o [129]; no obstante, el estudio de este fenómeno no es objeto de esta memoria.

La aparición de la teoría de la relatividad y de mecánica cuántica, así como del álgebra abstracta y del análisis funcional, relegaron durante algún tiempo a la mecánica celeste clásica a un segundo plano.

Pese a la aparición de nuevas disciplinas la mecánica celeste prosiguió su evolución a lo largo del siglo XX. El descubrimiento de los ordenadores electrónicos propició un avance de enorme magnitud en todo lo que se refiere a análisis numérico pues la capacidad de cálculo de estas máquinas sobrepasaba, ya desde sus inicios, las posibilidades de cálculo por cualquier otro método, capacidad que no ha hecho más que crecer hasta la actualidad. Este hecho provocó una revolución en mecánica celeste porque trabajos como la simple determinación de una órbita elíptica a partir de tres observaciones, por ejemplo, mediante el método de *Gauss*, paso de requerir semanas de cálculo a realizarse en unos instantes. El cálculo electrónico permitió la construcción de teorías planetarias muy precisas mediante la integración de las ecuaciones del movimiento perturbado, bien en forma vectorial a partir de la segunda ley de *Newton*, bien a partir de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Esto también es aplicable al movimiento de la Luna, asteroides, cometas, satélites artificiales y naturales y demás objetos espaciales.

Así mismo, con la invención de los ordenadores surgieron los primeros lenguajes para cálculo simbólico, aunque estos eran lentos e ineficientes en problemas de gran tamaño relacionados con mecánica celeste. El tratamiento analítico del movimiento planetario requiere el desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en series de *Fourier* y, dentro de este problema, el desarrollo del inverso de la distancia entre dos planetas; estos cálculos constituyen uno de los mayores retos de la mecánica celeste y estos primeros lenguajes simbólicos resultaron absolutamente ineficientes para manejar problemas de tal magnitud.

El principal tipo de objetos que aparece en las teorías analíticas del movimiento planetario son las llamadas series de *Poisson*. Aunque estas series tienen varias representaciones, en esta memoria se van a considerar expresiones de la forma

$$\sum A x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \cos(n_1 y_1 + \cdots + n_p y_p + b), \quad (1.1)$$

donde $A, b \in \mathbb{R}$; $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$; $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}$ y $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$. En las series de *Poisson* las variables i_1, \dots, i_n reciben el nombre de variables espaciales y las variables n_1, \dots, n_p se denominan variables angulares.

Dentro de las series de *Poisson* son particularmente interesantes en mecánica celeste aquellas que toman la forma particular

$$\sum A t^m \cos(k_1 M_1 + \cdots + k_p M_p + b), \quad (1.2)$$

donde t representa el tiempo y las variables angulares vienen representadas por M_1, \dots, M_p , que son las anomalías medias de los planetas. A tal efecto, es importante mencionar que estas anomalías medias pueden sustituirse por longitudes medias u otras variables que se definirán con posterioridad.

Como se ha comentado, tanto las teorías analíticas como las semianalíticas producen ya, en primer orden de perturbación, soluciones en la forma de serie de *Poisson* y para el manejo de tales objetos se comenzó a construir un software especializado llamado procesador de series de *Poisson*. Una aproximación inicial obtuvo un diseño del procesador en lenguaje Fortran, pero la herramienta final está implementada en el lenguaje de programación multiparadigma C++. Su historia se introduce de modo sucinto a continuación.

Las series de *Poisson* pueden estar constituidas por miles de términos y por tanto la aritmética asociada a estas series conlleva una cantidad enorme de operaciones. En general, va a ser necesario desplegar una plataforma de cálculo que permita alcanzar altas precisiones; no es difícil encontrar problemas que requieran precisiones cercanas a 10^{-12} o 10^{-13} unidades astronómicas. Si un problema requiere de altas precisiones, las soluciones deben ser sustituidas en los segundos miembros de las ecuaciones para abordar el segundo orden de perturbación y así sucesivamente, lo que requiere el manejo de complicadas expresiones siempre bajo la forma de series de *Poisson*. Es preciso realizar operaciones aritméticas y funcionales, siendo necesario para ello desplegar un enorme esfuerzo de cálculo.

Con el objetivo de solventar estas dificultades, *Broucke* [19], [21], entre otros, sugirió la idea de construir procesadores automáticos que proporcionaran de un modo fácil las implementaciones de dichas operaciones. Dichos procesadores fueron los llamados procesadores de series de *Poisson*, los cuales se escribieron, en un principio, en FORTRAN y posteriormente en otros lenguajes diferentes. Los lenguajes de tipo imperativo son los más eficientes desde el punto de vista computacional, pues están pensados para datos cuya estructura es relativamente simple y enfocados a lograr eficiencia algorítmica. El principal problema que presentan los lenguajes de tipo

1. Introducción

imperativo es que una vez programado el núcleo del procesador, su posterior uso resulta farragoso para el programador porque no proporciona un envoltorio adecuado para datos y operaciones.

Una segunda vía es el uso de los llamados lenguajes simbólicos. Estos lenguajes ofrecen una programación que se puede implementar de un modo más natural: basta igualar un símbolo a una serie de *Poisson*, extender la definición de las funciones usuales a dichos símbolos y operar con ellos. En la actualidad existen grandes paquetes comerciales, tales como MAPLE, Mathematica o Maxima, pero desgraciadamente su eficiencia computacional está aún muy lejos del mínimo deseable para problemas que involucran series de *Poisson*, por lo que de momento tampoco parece aconsejable su uso, excepto en el caso de problemas muy sencillos.

La tercera vía consistiría en el uso de un lenguaje de programación orientado a objetos que además resulte eficiente desde el punto de vista computacional, tal es el caso de los lenguajes FORTRAN2003 y C++. En este caso el procedimiento a seguir consiste en la construcción de una clase, o módulo en el caso de FORTRAN, que maneje como objetos las series de *Poisson*, siendo éstas listas o vectores de términos de *Poisson*, los cuales, a su vez, son clases cuyos miembros son la amplitud A , el exponente del tiempo m , los coeficientes angulares n_1, \dots, n_N , y la fase b , tal y como se observa en (1.2). Las clases incorporan métodos, esto es, funciones que permiten manipular los objetos y poder así realizar operaciones numéricas y funcionales; a través de estos métodos se pueden sobrecargar los operadores³ habituales '+', '*'... y funciones estándar seno, coseno, etcétera. La utilización de un procesador escrito de esta manera es, por una parte, fácil de manejar por el usuario pues presenta la ventaja de escritura de los lenguajes simbólicos y, por otra parte, la eficiencia funcional de los lenguajes C++ o FORTRAN⁴.

En el presente trabajo el procesador se ha desarrollado en el lenguaje C++, pues es de uso común y existen de él versiones de compiladores libres tales como las de GNU, implementadas en los sistemas LINUX. Finalmente, para comprobar la eficiencia de dicho procesador se procede al estudio de algunos problemas de movimiento del sistema solar.

Uno de los problemas de mayor envergadura que aparecen en mecánica celeste es el

³A grandes rasgos, la sobrecarga de operadores es una técnica de programación que soportan determinados lenguajes que permite redefinir los operadores habituales. La mayoría de los operadores como la suma, resta, multiplicación o división pueden ser reprogramados para trabajar con tipos de datos definidos por el usuario. La acción a realizar depende de los argumentos que recibe el operador. Una de las ventajas de esta técnica es la claridad a la hora de escribir código o la reutilización de éste, pero sus ventajas más destacables son la sencillez en la implementación de tipos no estándar definidos por el usuario y permitir así que esos tipos de datos se comporten como tipos de datos fundamentales.

⁴Se hace referencia al lenguaje de alto nivel FORTRAN en su versión 90 o posterior ya que versiones anteriores no permitían la utilización de características tan ventajosas como el uso de clases (MODULE) o sobrecarga de operadores.

estudio del movimiento de los planetas y satélites del sistema solar. La resolución de este problema se puede abordar desde dos puntos de vista.

Por un lado, se propone un enfoque numérico, es decir, la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento del sistema. Cabe destacar, entre otros autores, las obras [49], [116], [126], [127]. Este método da lugar a las teorías planetarias numéricas, las cuales han sido estudiadas por numerosos autores entre los que se podría citar a *Standish* [99], *Pitjeva* [103] o *Fienga* [43]. Estas teorías alcanzan un alto grado de precisión, pero no muestran de modo fácil la evolución de las constantes de movimiento del problema de dos cuerpos —que se introducirá en detalle a continuación—, siendo necesario para ello el posterior análisis armónico de las soluciones.

Una segunda aproximación consiste en el desarrollo analítico del segundo miembro de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en serie de *Fourier* —que se estudiarán en profundidad en capítulos posteriores— de las anomalías medias de cada par de planetas; después proceder a la integración de las mismas por el método de perturbación. Para lograr tal fin es necesario un profundo conocimiento acerca de la teoría analítica del problema de dos cuerpos [120], [24], [53]. La principal dificultad que aparece al desarrollar la función de perturbación es lograr un desarrollo lo suficientemente preciso del inverso de la distancia entre planetas. Esto puede hacerse mediante desarrollos literales o bien mediante aproximaciones funcionales en forma de doble serie de Fourier a dicha inversa, logradas mediante una iteración funcional.

El primer método conduce a las teorías analíticas del movimiento y se cita como exponentes representativos a *Tisserand* [120] y a *Hagihara* [53]; el segundo método lleva a las aproximaciones semianalíticas, *Chapront* [30], *Bretagnon* [16].

Tanto las teorías analíticas como semianalíticas producen, ya en primer orden de perturbación, soluciones en la forma de series de *Poisson* (1.1), esto es, como se estudiará posteriormente, sumas de términos de la forma

$$At^m \cos(k_1 M_1 + \dots + k_N M_N + b),$$

como ya se introdujo en (1.2).

En esta introducción se ha procedido a dar de modo sucinto una visión histórica de la mecánica celeste describiéndose, de un modo más generalista, los problemas que van a ser tratados en este trabajo. La memoria correspondiente a esta tesis doctoral sigue el formato de tesis por compendio de publicaciones, la cual contiene como núcleo los artículos [76], [78] y [80]. De estos, los dos últimos se encuentran en el primer cuartil de la lista JCR en los años respectivos.

En el capítulo segundo se expone de un modo preciso el bien conocido problema de dos cuerpos; este problema constituye la base de los métodos perturbativos y en él

1. Introducción

se aborda el estudio del movimiento elíptico, parabólico e hiperbólico si bien este trabajo está enfocado al primero.

El capítulo tercero aborda el estudio de los desarrollos en serie de las magnitudes fundamentales del problema de dos cuerpos; estos desarrollos son la base de las teorías analíticas del movimiento planetario. Este capítulo también aborda los problemas de inversión de series y de construcción de un procesador de series de *Poisson* el cual será básico para poder realizar los cálculos en los capítulos posteriores.

En los capítulos cuarto y quinto se plantea el estudio del movimiento perturbado. El movimiento de un planeta puede considerarse, en primera aproximación, como un problema de dos cuerpos, Sol-planeta, sobre el que actúa como fuerza perturbadora, mucho menor que la solar, la atracción de los otros planetas. En primer lugar se describe la ecuación general de la teoría de la perturbación y a partir de ella se obtienen las ecuaciones para los elementos perturbadores; en el caso de un potencial de perturbación conservativo toman la forma de las llamadas ecuaciones planetarias de *Lagrange*. También en este capítulo se aborda el estudio del desarrollo en serie del potencial perturbador para lo cual es necesario analizar el desarrollo del inverso de la distancia. Finalmente se hace una introducción de los métodos semianalíticos.

En el capítulo sexto se lleva a cabo un estudio analítico de la familia de anomalías generalizadas de *Sundman*, Ψ_α . Se obtienen los desarrollos analíticos en función de cualquier anomalía de la familia. La integración respecto al tiempo se complica cuando las variables angulares difieren de las anomalías o longitudes medias y a tal efecto es necesario un procedimiento alternativo; en este capítulo se diseña un algoritmo iterativo para llevar a cabo la mencionada integración. Este apartado finaliza con un artículo, [76], titulado «A note on the use of the generalized *Sundman* transformations as temporal variables in celestial mechanics».

En el capítulo séptimo se expone, en primer lugar, el desarrollo de la función de perturbación dependiente de las anomalías generalizadas de *Sundman* tomando como base los desarrollos del capítulo anterior y haciendo especial énfasis en el desarrollo del inverso de la distancia y de la inversión de la ecuación de *Kepler*. Como verificación de todas las operaciones se utiliza el par Júpiter-Saturno para el que se muestran los resultados obtenidos en primer orden de perturbación usando distintas anomalías de la familia de *Sundman* como variables temporales. Para la realización de los cálculos se ha utilizado el procesador de series de *Poisson* propio desarrollado a tal efecto. El capítulo finaliza con el artículo, [78], titulado «An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using *Sundman* generalized variables».

En el octavo capítulo se estudia una familia biparamétrica de anomalías, $\Psi_{\alpha,\beta}$. Esta familia es de especial interés porque si se utilizan los valores adecuados de los parámetros α y β , la familia engloba a las anomalías clásicas, todo el conjunto de anomalías generalizadas de *Sundman*, a la anomalía elíptica, a la longitud de arco

regularizada, etcétera. Junto a esta familia, Ψ , se estudian los métodos a través de los cuales se pueden obtener los desarrollos en serie de *Fourier* de las principales magnitudes del problema de dos cuerpos en función de Ψ para, de este modo, posibilitar su uso en métodos analíticos. Se estudia la integración de un caso límite de excentricidad — $e = 0,97$ — de manera que en la integración numérica se puede comparar la precisión obtenida en función de la anomalía usada. También se estudian los valores del par α, β que minimizan los errores de integración en una revolución. Además, con el objetivo de verificar la robustez de la metodología utilizada, se aborda finalmente el estudio de un problema perturbado, concluyendo el capítulo con el artículo [80] que se adjunta titulado «A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion».

En el capítulo noveno se ultima el trabajo realizado presentando las principales conclusiones y planteando las posibles perspectivas de nuevas líneas de investigación.

Capítulo 2

El problema de dos cuerpos

Contenido

2.1. Introducción	11
2.2. La integral de las áreas	14
2.3. Ecuación de la órbita relativa	16
2.4. Integral de la energía	18
2.5. Movimiento elíptico	19
2.6. Movimiento hiperbólico	25
2.7. Movimiento parabólico	29
2.8. Órbita en el espacio	31
2.8.1. La esfera celeste	31
2.8.2. Órbita en el espacio	33
2.9. Determinación de los elementos a partir de la posición y la velocidad	37

2.1. Introducción

El problema de dos cuerpos es un problema ampliamente conocido de la mecánica celeste que ha sido bien estudiado desde la antigüedad. Dada la finalidad de esta memoria, se va a realizar un enfoque propedéutico para poder después avanzar con más profundidad; se introducirán únicamente sus características fundamentales. Para un conocimiento más profundo se recomienda la consulta de las referencias [24], [53], [89], [120]¹.

¹En el campo de Mecánica Celeste de entre todas las obras citadas puede considerarse el *Traité de Mécanique Céleste* —Tratado de Mecánica Celeste— del autor *F.F. Tisserand* como una obra

El problema de dos cuerpos puede enunciarse como el estudio del movimiento de dos puntos materiales de masas m_1 y m_2 cuya posición en un sistema inercial viene dada por los radios vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 bajo la acción de sus fuerzas gravitatorias mutuas. Si se establece que $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, la fuerza con la que m_1 es atraído por m_2 viene

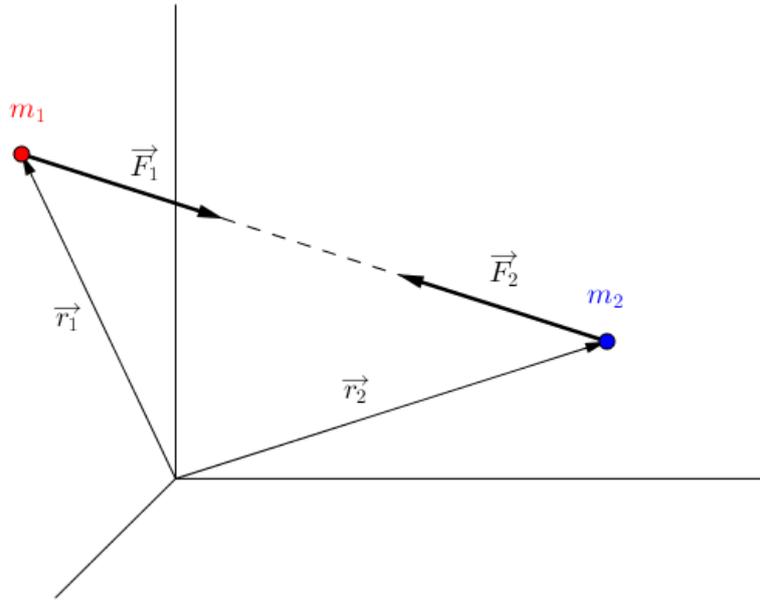


Figura 2.1: Problema de dos cuerpos.

dada por

$$\vec{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.1)$$

y, análogamente, la fuerza con la que m_2 es atraído por m_1 viene dada por

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (2.2)$$

Si se supone, sin pérdida de generalidad, que $m_1 > m_2$, se llamará primario a m_1 y secundario a m_2 .

Por otro lado, atendiendo a la segunda ley de *Newton* se tiene que

de consulta referente, la cual es aún en la actualidad citada en numerosos libros de esta disciplina. Su obra, un compendio de cuatro tomos, fue reeditada por la editorial francesa *Jacques Gabay* en la colección *Les Grands classiques Gauthier-Villars* en 1990. En la dirección de Internet <https://archive.org/details/traitemecanique00tissrich/page/n5> puede encontrarse una versión digital completa del tomo primero de esta obra antológica.

2. El problema de dos cuerpos

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1, \quad (2.3)$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2. \quad (2.4)$$

Igualando las expresiones (2.1) y (2.3) se obtiene que

$$\ddot{\vec{r}}_1 = +G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.5)$$

y, del mismo modo, para la fuerza \vec{F}_2 , igualando las expresiones (2.2) y (2.4), se obtiene

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r}. \quad (2.6)$$

Con esto y sabiendo que

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

derivando

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$$

y sustituyendo los resultados obtenidos en (2.5) y (2.6) se llega a

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Ahora, factorizando la expresión anterior se obtiene que

$$\ddot{\vec{r}} = -G (m_1 + m_2) \frac{1}{r^3} \vec{r}$$

y de aquí la denominada *ecuación del movimiento relativo*

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad (2.7)$$

donde $\mu = G (m_1 + m_2)$ es una constante.

Una vez introducido el problema de dos cuerpos se enuncia la integral de las áreas y sus consecuencias. Se obtiene la ecuación de la órbita relativa del cuerpo de menor masa respecto al primario y los tipos de órbita según la excentricidad. A continuación, se introducen las ecuaciones características del movimiento elíptico, hiperbólico y parabólico y su relación con la anomalía verdadera y excéntrica; se deducen las relaciones entre éstas para establecer la ecuación de *Kepler*, que relaciona la anomalía media con la anomalía excéntrica.

El capítulo continúa con una breve explicación sobre los elementos más importantes relacionados con la esfera celeste y una sucinta introducción a los diversos sistemas de referencia. Se caracteriza la órbita en el espacio en base a los seis elementos orbitales —conceptos clave para el resto de esta memoria— y se realiza el paso de las coordenadas en el plano orbital al sistema de referencia espacial para la posición y la velocidad.

El capítulo concluye con un procedimiento para determinar los elementos orbitales asociados a la órbita de un astro en movimiento elíptico conocidos el punto donde se encuentra y las componentes de la velocidad en una determinada época.

2.2. La integral de las áreas

La expresión (2.7), llamando $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, se puede reescribir como

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, si se calcula la derivada de $\vec{r} \wedge \vec{v}$ y se tiene en cuenta (2.8), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{v}) &= \frac{d}{dt} (\vec{r}) \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d}{dt} (\vec{v})}_{\dot{\vec{v}}} \\ &= \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \wedge \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) \\ &= \frac{-\mu}{r^3} \underbrace{(\vec{r} \wedge \vec{r})}_{\vec{0}} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

es decir

2. El problema de dos cuerpos

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{0}.$$

Si se integra esta última expresión, se tiene

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{C}, \quad (2.9)$$

que se conoce como *la integral de las áreas*. La constante vectorial, \vec{C} , que aparece en el proceso de integración recibe el nombre de *constante de las áreas* y es equivalente a tres constantes escalares.

Para entender el significado de esta constante es necesario recordar que el área del triángulo cuyos lados vienen representados por \vec{r} , $\vec{r} + d\vec{r}$ y $d\vec{r}$, puede expresarse de forma genérica de la forma

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge d\vec{r}).$$

Se define *velocidad areolar* como la derivada con respecto al tiempo del área barrida por el radio vector por unidad de tiempo

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge d\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{C}, \quad (2.10)$$

que indica que la constante de las áreas es el doble de la velocidad areolar, $\vec{C} = 2\dot{\vec{A}}$. El módulo de \vec{C} es $C = |\vec{C}| = 2\frac{dA}{dt}$, siendo $\frac{dA}{dt}$ la razón de cambio a la cual el área es barrida.

Si se integra la relación (2.10), se tiene que

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{C}t + \vec{K},$$

que constituye la segunda ley de *Kepler*: las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales [61].

2.3. Ecuación de la órbita relativa

Para deducir la ecuación de la órbita que sigue en secundario en torno al primario se parte de la integral de las áreas (2.9). Si se toma dicha expresión y se multiplican ambos miembros por \vec{r}' , se tiene que

$$\left(\vec{r}' \wedge \vec{v}'\right) \cdot \vec{r}' = \vec{C}' \cdot \vec{r}' = 0,$$

que indica que el cuerpo secundario describe una órbita plana en torno al primario. Para obtener la ecuación de la órbita se parte del cálculo de la derivada de $\vec{v}' \wedge \vec{C}'$. Sabiendo que $\vec{r}' \cdot \vec{r}' = r^2$, si se deriva esta expresión se obtiene $2r\dot{r} = 2\vec{r}' \cdot \vec{v}'$ y de aquí se deduce que $r\dot{r} = \vec{r}' \cdot \vec{v}'$. Con esto y (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{v}' \wedge \vec{C}') &= \dot{\vec{v}}' \wedge \vec{C}' \\ &= \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r}'\right) \wedge \vec{C}' \\ &= \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r}'\right) \wedge (\vec{r}' \wedge \vec{v}') \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left[\vec{r}' \wedge (\vec{r}' \wedge \vec{v}')\right] \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left[(\vec{r}' \cdot \vec{v}') \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{v}'\right] \\ &= -\mu \left[\frac{r\dot{r} \vec{r}' - r^2 \vec{v}'}{r^3}\right] \\ &= \mu \left[\frac{r \vec{v}' - \dot{r} \vec{r}'}{r^2}\right] \\ &= \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}'}{r}\right). \end{aligned}$$

Integrando esta última expresión se obtiene

$$\vec{v}' \wedge \vec{C}' = \mu \left(\frac{\vec{r}'}{r} + \vec{e}'\right), \quad (2.11)$$

donde la constante vectorial de integración se denota por $\mu \vec{e}'$ y se define como el vector *Laplace-Runge-Lenz*.

Si ahora se calcula C^2 y se tiene en cuenta la integral obtenida en (2.11), se obtiene

$$C^2 = \vec{C}' \cdot \vec{C}' = (\vec{r}' \wedge \vec{v}') \vec{C}' = \vec{r}' \cdot (\vec{v}' \wedge \vec{C}') = \vec{r}' \cdot \mu \left(\frac{\vec{r}'}{r} + \vec{e}'\right) = \mu(r + \vec{r}' \cdot \vec{e}')$$

2. El problema de dos cuerpos

y tomando

$$p = \frac{C^2}{\mu}$$

se tiene finalmente que

$$p = r + \vec{r} \cdot \vec{e}, \quad (2.12)$$

que es la *ecuación de la órbita relativa* del secundario girando en torno al primario. p y \vec{e} son constantes y $p = \frac{C^2}{\mu}$ representa el parámetro de la cónica que sigue la órbita.

Si se considera el producto escalar $\vec{r} \cdot \vec{e} = r \cdot e \cdot \cos V$, siendo r y e los módulos de \vec{r} y \vec{e} , y V el ángulo entre ellos, se verifica

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}. \quad (2.13)$$

Esta expresión representa la ecuación polar focal de una cónica, siendo (r, V) las coordenadas polares referidas al sistema cuyo origen coincide con el primario y donde los ángulos se miden a partir de la dirección \vec{e} en el sentido del movimiento.

En la ecuación anterior p representa el parámetro de la cónica y e la excentricidad y según los valores de ésta, pueden presentarse los casos que aparecen en la Tabla (2.1).

caso	tipo de cónica
$e = 0$	circunferencia
$0 < e < 1$	elipse
$e = 1$	parábola
$e > 1$	hipérbola

Tabla 2.1: Tipos de cónica según su excentricidad.

Puesto que nuestro estudio se restringe al movimiento elíptico, se verifica, además, que $p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$. Por otra parte, si se considera T el periodo de la órbita, la velocidad areolar, \dot{A} , viene dada por

$$\dot{A} = \frac{\pi ab}{T} \quad (2.14)$$

y se se tiene que

$$C = 2\dot{A} = \frac{2\pi ab}{T},$$

pero también

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{\left(\frac{2\pi ab}{T}\right)^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\frac{b^2}{a} T^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

de donde se puede deducir que los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores (2.15). Este resultado constituye la tercera ley de *Kepler* [61],

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (2.15)$$

2.4. Integral de la energía

Partiendo de la ecuación del movimiento relativo (2.7), multiplicando ambos miembros por \vec{v} e integrando el resultado obtenido se llega a la conclusión de que el problema de dos cuerpos satisface la relación

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (2.16)$$

donde h es una constante; dicha ecuación recibe el nombre de *integral de la energía*, siendo h la constante de energía. Mediante manipulaciones algebraicas, la integral de la energía puede escribirse en función de C y e como

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{C^2} (e^2 - 1) \quad (2.17)$$

y esta ecuación nos permite clasificar la órbita en función de la constante h . Así, para los distintos valores de h se tienen las siguientes opciones:

2. El problema de dos cuerpos

valor de h	excentricidad	tipo de órbita
$h < 0$	$e < 1$	elíptica
$h = 0$	$e = 1$	parabólica
$h > 0$	$e > 1$	hiperbólica

Tabla 2.2: Tipos de órbita según su energía.

2.5. Movimiento elíptico

A continuación se va a estudiar el movimiento elíptico. Este movimiento constituye un caso particularmente importante del problema de dos cuerpos, pues todos los planetas tienen este tipo de movimiento. El objeto de este estudio es, por una parte, conocer la nomenclatura habitual utilizada en este problema y, por otra, disponer de un conjunto de fórmulas suficiente para determinar de modo completo la posición del secundario con respecto al primario. Dado el fin de esta sección se omiten las demostraciones, las cuales pueden encontrarse, por ejemplo, en los trabajos de *Brower y Clemence* [24], *Danby* [35], *Roy* [108], *Hagihara* [53], *Tisserand* [120], *Battin* [12], *Boccaletti y Pucacco* [15].

La introducción de ciertos ángulos o anomalías, como la anomalía excéntrica o la anomalía verdadera, hace que las ecuaciones de los movimientos de los astros se simplifiquen enormemente.

Para llevar a cabo el estudio se considera la Figura (2.2) y sobre ella se definen los siguientes elementos:

- O. Primario.** Cuerpo primario situado en uno de los focos de la elipse.
- Q. Secundario.** Cuerpo secundario situado sobre la elipse que se mueve con movimiento levógiro —en sentido contrario a las agujas del reloj—.
- C. Centro.** Es el centro de la elipse que describe la órbita.
- V. Anomalía verdadera.** Es el ángulo $V = \widehat{POQ}$ formado por el radio vector del astro \overrightarrow{OQ} y la dirección del periastro¹ \overrightarrow{OP} .
- E. Anomalía excéntrica.** Es el ángulo $E = \widehat{PCQ'}$ formado por el radio $\overrightarrow{CQ'}$

¹El periastro o también llamado periapsis es el punto en una órbita elíptica en el que la distancia entre el primario y el secundario es mínima. Si se considera el Sol como cuerpo primario, recibe el nombre de perihelio y en el caso de la Tierra se denomina perigeo.

El caso contrario, es decir, el punto en el que la distancia entre el primario y el secundario es máxima, el punto recibe el nombre de apoastro o apoapsis y en el caso de tratarse del Sol o la Tierra, afelio o apogeo, respectivamente.

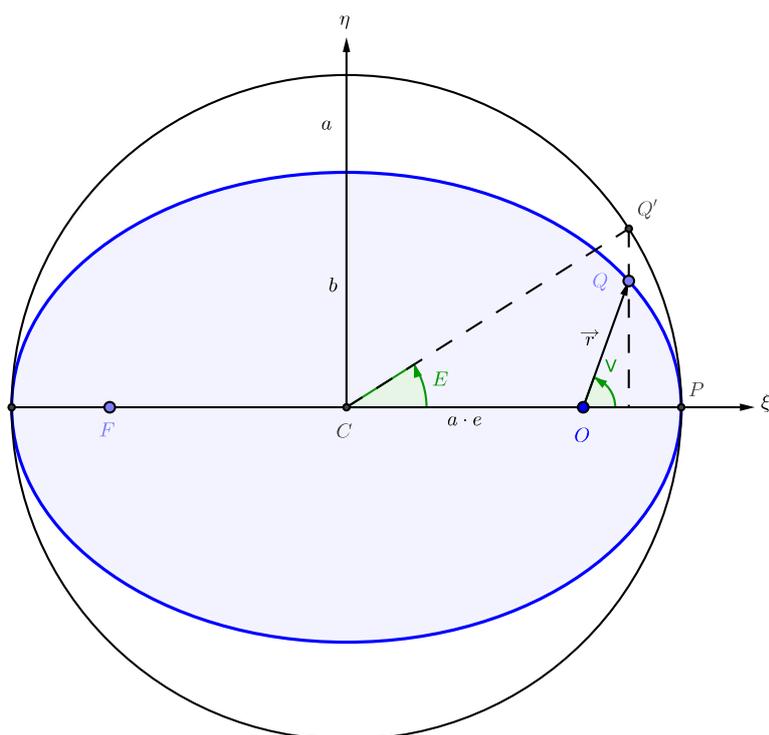


Figura 2.2: Movimiento elíptico.

siendo Q' la intersección con el círculo principal de la elipse de la normal por Q al semieje mayor, y la dirección del periastro¹ \overrightarrow{CP} .

M. Anomalía media. Es el ángulo M descrito con vértice en el foco O en sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro¹, por un astro ficticio que gira alrededor del primario con velocidad angular constante igual al movimiento medio, dado por $n = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el periodo orbital.

$$M = n(t - t_0),$$

donde t_0 es la época de paso por el periastro.

Si se considera el sistema de referencia cartesiano $R[O; \{\xi, \eta\}]$ con origen en el primario, las coordenadas del secundario, Q , es este sistema son

$$\begin{cases} \xi = r \cos V, \\ \eta = r \sin V \end{cases} \quad (2.18)$$

A la vista de la Figura (2.2), si se toma Q_1 como la proyección de Q sobre el eje ξ ,

2. El problema de dos cuerpos

se tiene que

$$\overline{CQ_1} = \overline{CO} + \overline{OQ_1} \implies \overline{OQ_1} = \overline{CQ_1} - \overline{CO}$$

y teniendo en cuenta que $\overline{CQ_1} = a \cos E$ y $\overline{CO} = ae$ se tiene deduce que

$$\xi = \overline{OQ_1} = a \cos E - ae.$$

Se tiene también que

$$\frac{a \sin E}{\eta} = \frac{\overline{Q_1Q'}}{\overline{Q_1Q}} = \frac{a}{b}$$

y de aquí

$$\eta = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Con esto se obtienen las coordenadas de Q en función de la anomalía excéntrica

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e), \\ \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{cases} \quad (2.19)$$

Además, si se tienen en cuenta las relaciones (2.18) y (2.19), se obtiene

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\ &= [r \cos V]^2 + [r \sin V]^2 \\ &= [a(\cos E - e)]^2 + [a\sqrt{1 - e^2} \sin E]^2 \\ &= a^2 [\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E] \\ &= a^2 [1 + e^2 - 2e \cos E - e^2(1 - \cos^2 E)] \\ &= a^2 [1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E] \\ &= a^2 (1 - e \cos E)^2, \end{aligned}$$

de donde se deduce la ecuación que determina el valor del radio vector conocida la anomalía excéntrica

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.20)$$

Si se parte de la equivalencia entre las ecuaciones (2.18) y (2.19), se tiene

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = a(\cos E - e), \\ \eta = r \sin V = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \quad (2.21)$$

y de aquí se puede llegar a la relación entre la anomalía verdadera y excéntrica

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.22)$$

Por otra parte, la conexión entre las anomalías media y excéntrica viene dada por la *ecuación de Kepler*.

$$M = E - e \sin E. \quad (2.23)$$

El procedimiento para obtener la ecuación de *Kepler* [2], [33], [102], [114] puede orientarse de forma geométrica —basado en equivalencias de áreas de ciertas regiones en la Figura (2.2)— o de forma analítica. El punto de partida para seguir el procedimiento analítico es la relación (2.22), que conecta las anomalías E y V entre sí; a continuación será necesario introducir M para terminar eliminando V de la ecuación original.

En primer lugar, como se ha comentado, se toman derivadas en (2.22) y se tiene que

$$\frac{dV}{2 \cos^2 \frac{V}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{dE}{2 \cos^2 \frac{E}{2}}. \quad (2.24)$$

Si se suman miembro a miembro la primera ecuación de (2.21) y (2.20), resulta

$$r(1 + \cos V) = a(\cos E - e + 1 - e \cos E).$$

Si se aplican los resultados trigonométricos adecuados y se factoriza el segundo miembro, se obtiene

2. El problema de dos cuerpos

$$\begin{aligned}2r \cos^2 \frac{V}{2} &= a(1-e)(1+\cos E) \\ r \cos^2 \frac{V}{2} &= a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}.\end{aligned}$$

Si se sustituye este resultado en (2.24) y se simplifica, se tiene que

$$\frac{dV}{2a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{dE}{2 \cos^2 \frac{E}{2}}$$

y de aquí

$$dV = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{a(1-e)}{r} dE = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} dE = \frac{b}{r} dE. \quad (2.25)$$

En segundo lugar, la expresión de la integral de las áreas en coordenadas polares toma la forma

$$r^2 \frac{dV}{dt} = C, \quad (2.26)$$

pero dado que $C = 2\dot{A}$ (2.10), si se integra esta expresión, se obtiene, sabiendo que el periodo, T , es la duración de una revolución del planeta P en su órbita, que $CT = 2A$. A continuación, si se tiene en cuenta que el área de la elipse es πab , se llega a que $CT = 2\pi ab$ y de aquí, conocida la relación $n = \frac{2\pi}{T}$, se deduce que $C = nab$. Si este valor obtenido de C se sustituye en (2.26), el resultado es

$$r^2 \frac{dV}{dt} = nab \implies \frac{1}{ab} r^2 dV = n dt \quad (2.27)$$

Si se integra la expresión (2.27) y se tiene en cuenta que $n(t-t_0)$ es la definición de la anomalía media, M , se llega a

$$M = \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV \quad (2.28)$$

y si se sustituye en (2.28) el resultado obtenido en (2.25), se tiene que

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV \\
 &= \frac{1}{ab} \int_0^E r^2 \frac{b}{r} dE \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^E r dE \\
 &= \int_0^E (1 - e \cos E) dE \\
 &= E - e \sin E,
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

que constituye la ecuación de *Kepler*, $M = E - e \sin E$, expuesta en (2.23).

Si bien las soluciones numéricas no son objeto de esta memoria, sí que se considera interesante destacar que en el caso del movimiento elíptico, donde $0 \leq e < 1$, la ecuación de *Kepler* puede resolverse numéricamente mediante un método de iteración de punto fijo [119] a través de la recurrencia

$$\begin{cases} E_0 = M \\ E_{n+1} = M + e \sin E_n \end{cases}$$

Es importante reparar en que el algoritmo es convergente. Para verificar este resultado, dados M y e , basta tomar E como una función $E = \varphi(E)$, de forma que $\varphi(E) = M + e \sin E$. Se tiene que $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua y derivable con

$$\frac{d\varphi(E)}{dE} = e \cos E$$

y, por tanto

$$\left| \frac{d\varphi(E)}{dE} \right| = |e \cos E| < e < 1.$$

Este resultado convierte a φ en una función contractiva y, por tanto, existe un único punto fijo; ese punto fijo que obtiene el algoritmo es la solución de la ecuación de *Kepler*.

2.6. Movimiento hiperbólico

En el caso del movimiento hiperbólico la órbita que describe el secundario, P , en torno al primario, O , es hiperbólica y su ecuación polar focal viene dada por la expresión

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}, \quad (2.30)$$

donde e es la excentricidad, $e > 1$ por tratarse de una órbita hiperbólica, p el parámetro de la cónica introducido en (2.12), y V la anomalía verdadera.

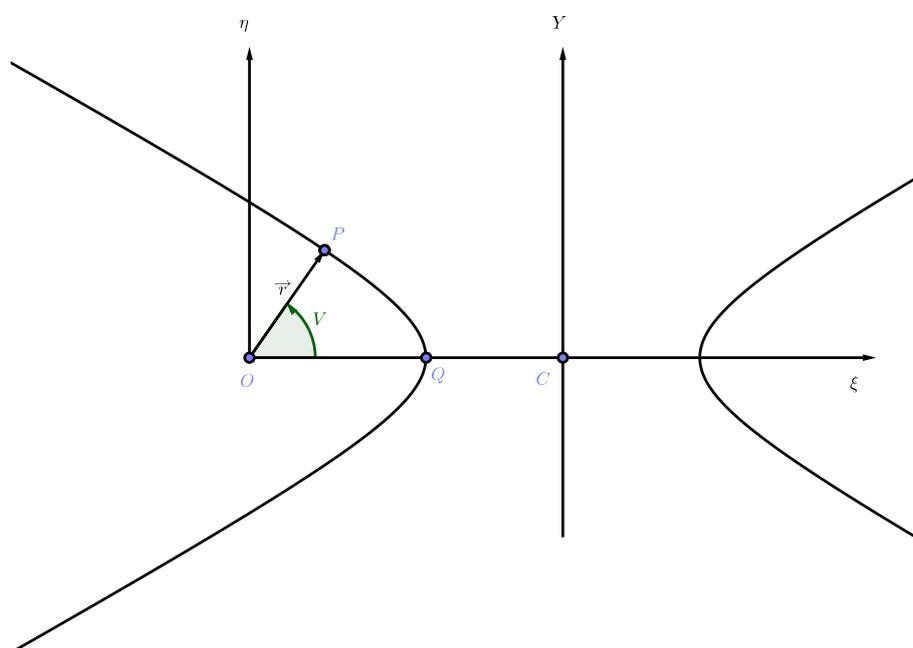


Figura 2.3: Movimiento hiperbólico.

Si se establece el sistema de coordenadas (ξ, η) como en la Figura (2.3), se puede obtener la posición del secundario en la órbita en función de la anomalía verdadera como

$$\begin{cases} \xi = r \cos V, \\ \eta = r \sin V. \end{cases} \quad (2.31)$$

Parametrizando la rama izquierda de la hipérbola respecto al parámetro F , se tiene que

$$\begin{cases} x = -a \cosh F, \\ y = b \sinh F, \end{cases} \quad (2.32)$$

donde F hace referencia al parámetro de la hipérbola, $F \in]-\infty, +\infty[$, $a = QC$ hace referencia al semieje principal de la hipérbola y $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ es el semieje imaginario.

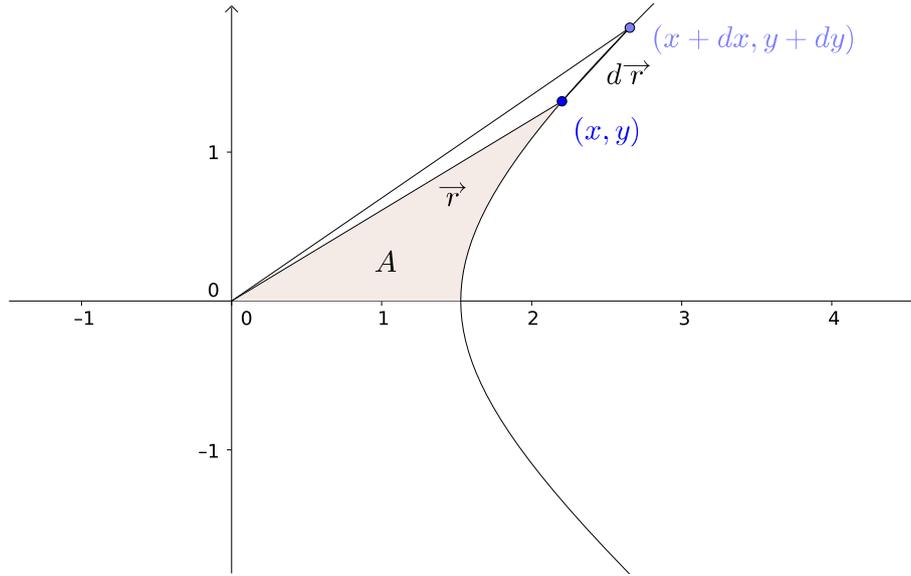


Figura 2.4: Interpretación del parámetro F de la hipérbola.

Una interpretación geométrica sencilla del parámetro F es la que se expone a continuación [12]. A la vista de la Figura (2.4) y habida cuenta que $\vec{r} = (x, y)$ y $d\vec{r} = (dx, dy)$ es posible obtener el área resaltada, A , a partir de la expresión

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}| = \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (xdy - ydx).$$

Si se considera, sin pérdida de generalidad, una hipérbola equilátera unitaria y se cambian sus coordenadas cartesianas, x e y , por sus correspondientes parametrizaciones, $x = \cosh F$ e $y = \sinh F$, y dx , dy por sus correspondientes derivadas, $dx = \sinh F dF$, $dy = \cosh F dF$, se tiene que

$$dA = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cosh F & \sinh F \\ \sinh F dF & \cosh F dF \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\cosh^2 F - \sinh^2 F) dF = \frac{1}{2} dF.$$

De la relación $dA = \frac{1}{2} dF$ se obtiene, integrando, que $F = 2A$.

2. El problema de dos cuerpos

En la Figura (2.5) las coordenadas (ξ, η) del astro P se expresan en función del parámetro F como

$$\begin{cases} \xi = ae - a \cosh F, \\ \eta = b \sinh F \end{cases} \quad (2.33)$$

y para determinar el radio vector r se llega a la relación

$$r = a(e \cosh F - 1). \quad (2.34)$$

Para poder conocer la relación entre el parámetro de la hipérbola, F , y la anomalía verdadera, V , se calcula, por un lado

$$r + \xi = 2r \cos^2 \frac{V}{2}, \quad (2.35)$$

pero también

$$r + \xi = 2a(e - 1) \cosh^2 \frac{F}{2}. \quad (2.36)$$

Por otro lado

$$r - \xi = 2r \sin^2 \frac{V}{2} \quad (2.37)$$

y también

$$r - \xi = 2a(e + 1) \sinh^2 \frac{F}{2}. \quad (2.38)$$

Por tanto, si se calcula el cociente de las expresiones (2.37) y (2.35), y el de (2.38) y (2.36), se obtiene la relación buscada

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2}. \quad (2.39)$$

Ahora, una vez más partiendo de la integral de las áreas $C = \sqrt{\mu p}$ se definen n y M como se hizo en el movimiento elíptico, aunque sin la interpretación del movimiento medio o anomalía media

$$M = n(t - t_0).$$

Para terminar, realizando las operaciones necesarias se llega a la ecuación equivalente a la ecuación de *Kepler* para el movimiento hiperbólico

$$M = e \sinh F - F, \quad (2.40)$$

cuya solución numérica se obtiene análogamente a (2.23) mediante un método iterativo de punto fijo. Para asegurar la convergencia del método, simplemente se reescribe (2.40) como

$$F = \varphi(F) = \operatorname{arg} \sinh \left(\frac{F + M}{e} \right)$$

y teniendo en cuenta que $e > 1$ por tratarse de un movimiento hiperbólico, se tiene que

$$|\varphi'(F)| = \left| \frac{1}{\sqrt{e^2 + (F + M)^2}} \right| < 1,$$

que es una condición suficiente para la convergencia.

La otra rama de la hipérbola corresponde al movimiento repulsivo; este movimiento es menos interesante en mecánica celeste, sin embargo, en casos como el movimiento relativo de dos cargas eléctricas del mismo signo se podría parametrizar la rama exterior de la hipérbola mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = ae + a \cosh F, \\ \eta = r \sin V = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F \end{cases} \quad (2.41)$$

y siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior se puede obtener la relación entre la anomalía verdadera y el parámetro F

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (2.42)$$

y también la relación entre la anomalía media y F

$$M = e \sinh F + F. \quad (2.43)$$

2.7. Movimiento parabólico

Para estudiar el movimiento parabólico se parte de la ecuación de la órbita relativa.

Considerando la ecuación en (2.13) y haciendo en ella $e = 1$ se obtiene la relación

$$r = \frac{p}{1 + \cos V}. \quad (2.44)$$

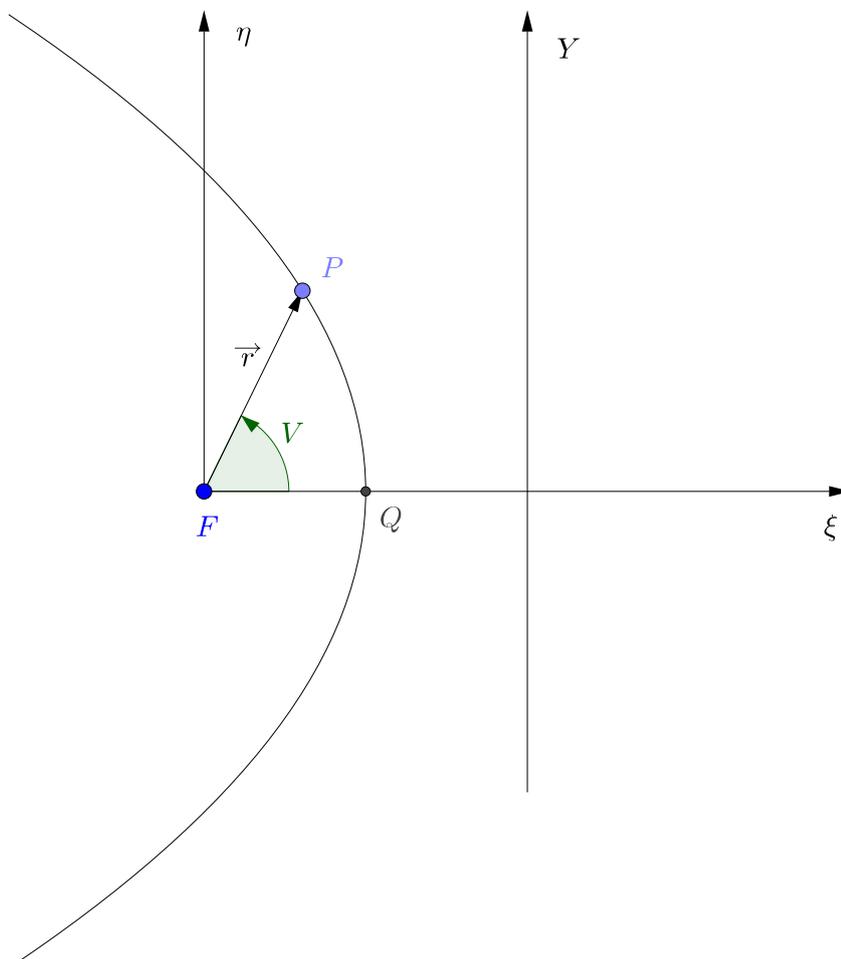


Figura 2.5: Movimiento parabólico.

Realizando manipulaciones trigonométricas, se puede escribir $1 + \cos V$ como $2 \cos^2\left(\frac{V}{2}\right)$ y, a la vista de la figura (2.5), tomando q como la distancia del foco al periastro, $q = \overline{FQ}$, se puede reescribir la ecuación (2.44) como

$$r = \frac{2q}{1 + \cos V} = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{V}{2}\right)}.$$

De aquí se obtienen las ecuaciones del cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = q \left(1 - \tan^2 \frac{V}{2}\right), \\ \eta = r \sin V = 2q \tan \frac{V}{2}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Si se tiene en cuenta la integral de las áreas (2.9), que en el movimiento parabólico no existe movimiento medio y se aplica el cambio trigonométrico $s = \tan \frac{V}{2}$, se llega a la ecuación de *Barker*, que conecta la anomalía verdadera V con el tiempo t del movimiento parabólico,

$$\sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} \left(s + \frac{s^3}{3}\right) = t - T_0. \quad (2.46)$$

Para determinar s en función del tiempo hay que resolver una ecuación cúbica cuyas soluciones vienen dadas por

$$s = 2 \cot(2\gamma),$$

donde

$$\gamma = \operatorname{arccot} \left(\sqrt[3]{\tan \frac{\beta}{2}} \right)$$

y

$$\beta = \arctan \left(\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T_0) \right).$$

Finalmente, deshaciendo el cambio trigonométrico que conducía a la ecuación de *Barker*, se tiene que

$$V = 2 \arctan s.$$

2.8. Órbita en el espacio

2.8.1. La esfera celeste

Poder ubicar los objetos celestes en el firmamento ha sido siempre motivo de fascinación; hoy en día es una necesidad ineludible. A tal fin y como herramienta astronómica de posición se utiliza una esfera imaginaria con centro situado en el observador y de radio arbitrario sobre la que se proyectan todos los objetos. Sobre esta esfera ficticia, que recibe el nombre de *esfera celeste*, se definen muchos conceptos elementales. Sobre algunos de estos conceptos se va a realizar una introducción sucinta para facilitar el entendimiento del texto que se expone a continuación.

La Tierra gira en torno a su eje de rotación y todos los objetos celestes giran —desde el punto de vista del observador— alrededor de dos puntos fijos. Esos dos puntos, denominados *polo norte y polo sur celestes*, son la intersección de la línea imaginaria del eje de rotación y la esfera celeste. El eje imaginario que une los polos norte y sur es conocido comúnmente como eje del mundo.

El punto de la esfera celeste que se encuentra encima de la posición del observador se denomina *zenit*² y el punto diametralmente opuesto a éste recibe el nombre de *nadir*. El meridiano que contiene el zenit se denomina *meridiano local*.

En astronomía de posición se utilizan diversos sistemas de referencia. Sobre estos existen numerosas referencias entre las cuales se pueden destacar los textos clásicos y ampliamente conocidos de *Robin M. Green* [50], *W.M. Smart* [114] o *Woolard & Clemence* [131], y también trabajos publicados en lengua española de *Teodoro Vives* [128], *Juan José de Orús* [102], Alberto Abad [3] o *Álvaro López* [85].

1 Coordenadas horizontales.

Se considera el sistema de referencia $OXYZ$, donde O es la posición del observador situado en la Tierra, OZ el eje que sigue la dirección contraria a la fuerza de la gravedad, \vec{g} , y el plano OXY —también conocido como horizonte astronómico— es el plano perpendicular a OZ que pasa por el observador.

Establecido el sistema de referencia, destaca el cardinal norte, N , como la intersección de éste con el meridiano local; el cardinal sur, S , en la dirección opuesta; y los cardinales este, E , y oeste, O .

En la esfera celeste se denomina *horizonte* a la intersección del plano OXY con con la esfera; los círculos menores paralelos al horizonte reciben el nombre de *almucantaras*.

²cenit,cénit; zénit.

El ángulo que forma la proyección sobre el horizonte medido desde el cardinal sur³ en sentido horario se conoce con el nombre de *azimut*⁴ y suele representarse por la letra a ; la otra coordenada —la *altura*, h — es el ángulo medido desde el horizonte hasta la posición del astro, siguiendo una línea imaginaria que lo conduzca hasta el zenit. Debido al uso de altura y azimut estas coordenadas también se conocen como coordenadas altazimutales.

2 Coordenadas ecuatoriales horarias.

Son las coordenadas más sencillas para un observador situado en la Tierra y en rotación. Se utiliza como plano XY de referencia el Ecuador terrestre y como punto de inicio para realizar las medidas se toma el punto de intersección entre el Ecuador y el meridiano local. El sistema de coordenadas ecuatoriales horarias viene dado por (H, δ) , donde H representa el ángulo horario, esto es, el ángulo medido desde el punto de intersección hasta la proyección de la dirección sobre el Ecuador. Por otro lado, la declinación, δ , representa el ángulo que forma la dirección con el Ecuador —medido en positivo si se encuentra en el hemisferio norte y en negativo si está en el sur—.

3 Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas.

Se define el plano de la eclíptica como el plano medio de la órbita del baricentro Tierra–Luna alrededor del Sol; desde el punto de vista del observador es aproximadamente el plano por el cual se mueve el Sol alrededor de la Tierra. Sobre la esfera celeste se denomina eclíptica al círculo resultante de la intersección de dicho plano con la esfera celeste. En la eclíptica cabe destacar el equinoccio vernal o punto Aries —cuya representación habitual viene dada por Υ —; el punto Cáncer, $\♋$, correspondiente al solsticio de verano; el punto Libra, $\♎$, correspondiente al equinoccio de otoño; y el punto Capricornio, correspondiente al solsticio de invierno y cuya representación suele ser el símbolo $\♏$.

Se define tiempo sidéreo como el ángulo horario del punto Aries. En este sistema de referencia, el eje OX se toma como $O\Upsilon$; OZ es la dirección del polo norte; y OY se toma formando un triedro directo.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas son (α, δ) que reciben el nombre de ascensión recta y declinación, respectivamente. La ascensión recta, α , es el ángulo que forma la proyección de la dirección sobre el Ecuador y el punto Aries medido desde este último.

Este sistema de coordenadas es el más comúnmente utilizado para construir catálogos estelares.

³La importancia del sistema geodésico ha llevado a que en lugar de utilizar el punto cardinal sur como inicio del azimut se utilice el norte.

⁴acimut.

2. El problema de dos cuerpos

4 Coordenadas eclípticas.

Estas coordenadas toman el sistema $OXYZ$, donde OX es la dirección del punto Aries; $OZ \equiv O\Pi$, donde Π es el polo de la eclíptica situado en el hemisferio tal que $\delta > 0$ y Π' su opuesto; y OY de modo que el triedro $OXYZ$ sea directo.

Las coordenadas eclípticas son (λ, β) , donde λ representa la longitud celeste y β la latitud celeste. Por un lado, λ es el ángulo medido sobre la eclíptica entre Υ y la proyección sobre ésta de una dirección. Por otro lado, β es el ángulo que forma la dirección con la eclíptica.

En los estudios relativos al movimiento del Sistema Solar suele utilizarse este último sistema de coordenadas eclípticas, por tanto, al hacer referencia a coordenadas espaciales, de no indicarse otra cosa, se entenderá que se está trabajando en coordenadas eclípticas.

La relación entre los diversos sistemas puede determinarse, bien mediante ángulos de *Euler*, bien mediante las fórmulas de *Bessel* de la trigonometría esférica.

Finalmente, según la elección del origen, las coordenadas también pueden clasificarse como topocéntricas, geocéntricas, heliocéntricas, etc. También existen otros sistemas de coordenadas, como las coordenadas galácticas o las coordenadas planetográficas, que no se considerarán en este estudio.

2.8.2. Órbita en el espacio

Sean O, X, Y, Z los ejes espaciales y O', ξ, η, ζ los ejes definidos, $\overrightarrow{O\xi}$ por la dirección del periastro, $\overrightarrow{O\zeta}$ por la dirección de \vec{C} y $\overrightarrow{O\eta}$ de modo que el triedro O, ξ, η, ζ sea directo.

Para describir la geometría de la órbita en el espacio y con la Figura (2.6) como referencia se definen las siguientes cantidades:

- i es el ángulo entre Z y ζ , dicho de otro modo, i es el ángulo que forma el plano de la eclíptica y el plano orbital.
- ω es el llamado argumento del periastro y representa el ángulo que va desde el nodo ascendente, N , hasta el periastro.
- Ω recibe el nombre de longitud del nodo ascendente e indica el ángulo desde una dirección de referencia, punto Aries, a la dirección del nodo ascendente.

La ubicación del secundario en el espacio está determinada, por una parte, por su posición en su órbita, y por otra, por la posición de la órbita en el espacio.

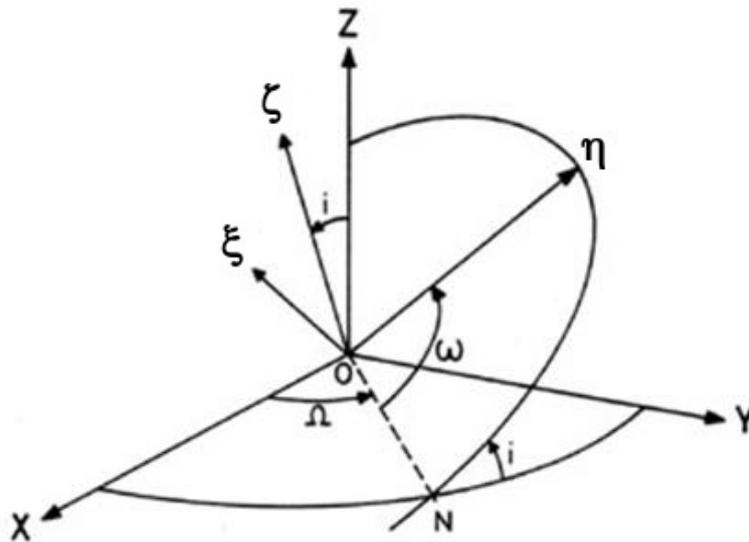


Figura 2.6: órbita en el espacio.

La ubicación del secundario en su órbita depende a su vez del tamaño y geometría de ésta, lo que queda determinado por su semieje, a , y su excentricidad, e . Para determinar su posición en su órbita se requiere, además, conocer un dato dinámico, como por ejemplo, un instante de paso por el periastro o bien la anomalía media en una época inicial t_0 . La posición de la órbita en el espacio queda determinada por su plano orbital (Ω, i) y por la orientación de la elipse en su plano orbital ω .

Así pues, la órbita en el espacio que describe un cuerpo viene determinada por seis elementos, llamados *elementos orbitales o keplerianos*: \mathbf{a} , \mathbf{e} , \mathbf{i} , $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\omega}$ y \mathbf{M} . Suele referirse a los elementos a , e e i como elementos métricos, mientras que Ω , ω y M se denominan elementos angulares.

Se define como longitud del periastro a $\bar{\omega} = \omega + \Omega$ y como longitud media a $l = M + \bar{\omega}$. Con estas nuevas variables se evitan problemas en caso de anularse e o i [24].

En el sistema asociado al plano orbital se verifica que

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = a(\cos E - e), \\ \eta = r \sin V = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \zeta = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

y el paso al sistema $\{X, Y, Z\}$ se efectúa con la matriz de rotación R definida por

2. El problema de dos cuerpos

$$R = R_3(-\Omega) \cdot R_1(-i) \cdot R_3(-\omega),$$

donde $R_1(\alpha)$ representa una rotación del ángulo α alrededor del eje OX , $R_2(\alpha)$ una rotación del mismo ángulo alrededor de OY y $R_3(\alpha)$ alrededor de OZ .

Esta matriz R suele representarse como

$$R = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

de forma que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

De modo explícito, las componentes de R vienen dadas por

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \\ \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i, \\ \\ R_x &= \sin \Omega \sin i, \\ R_y &= -\cos \Omega \sin i, \\ R_z &= \cos i. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Finalmente, para determinar la posición del secundario en su órbita se necesita un dato temporal. Si se toma t_0 —que representa la época de paso por el periastro—, se obtiene $M = n(t - t_0)$; si se toma como dato temporal M_0 —que representa la anomalía media en la época inicial t_0 —, se tiene que $M = M_0 + n(t - t_0)$.

Respecto a la velocidad, partiendo de (2.47) y derivando el resultado es

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a \sin(E) \dot{E}, \\ \dot{\eta} = a\sqrt{1-e^2} \cos(E) \dot{E}, \\ \dot{\zeta} = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Por otro lado, si se deriva la ecuación de *Kepler*

$$E - e \sin E = M = n(t - T_0),$$

se obtiene

$$(1 - e \cos E) \dot{E} = n$$

y de aquí, despejando \dot{E} se tiene que

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}.$$

Si se utiliza este resultado en (2.51), es posible reescribir las coordenadas de la velocidad como

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\frac{an \cos E}{1 - e \cos E}, \\ \dot{\eta} = \frac{an\sqrt{1-e^2} \cos E}{1 - e \cos E}, \\ \dot{\zeta} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

y, por tanto, la velocidad espacial \vec{v} viene dada por la terna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

donde R es la matriz de rotación expuesta en (2.48).

2.9. Determinación de los elementos a partir de la posición y la velocidad

Se considera el vector de posición, \vec{r} , del secundario respecto al primario; $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ su velocidad y $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica en un sistema de coordenadas genérico. La representación de sendos vectores respecto a la base elegida es

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3.\end{aligned}\tag{2.54}$$

A partir de estas magnitudes se puede determinar

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\end{aligned}$$

y según la expresión de la integral de las áreas en (2.9) y teniendo en cuenta que en coordenadas polares $dA = \frac{1}{2}r^2 dV$, se tiene que

$$r^2 \dot{V} = 2\dot{A}$$

y como $C = 2\dot{A}$, se tiene que

$$r^2 \dot{V} = \sqrt{\mu p}.$$

En el sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) , \vec{C} toma la forma

$$\vec{C} = C\vec{u}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix},$$

mientras que en el sistema de coordenadas espacial es

$$\vec{C} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \sin i \sin \Omega \\ -C \sin i \cos \Omega \\ C \cos i \end{pmatrix}.$$

Partiendo de (2.9) se puede escribir

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix}$$

e igualando ambos resultados se obtiene

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = C \sin i \sin \Omega, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = -C \sin i \cos \Omega, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = C \cos i. \end{cases} \quad (2.55)$$

Si se supone C conocida, como $i \in [0, \pi]$, el coseno en la última ecuación determina el valor de la inclinación, i . Obtenido i , el valor de Ω también se puede determinar a partir de las dos primeras ecuaciones.

Partiendo de la relación en (2.17) se puede reescribir el valor de la constante C como

$$C^2 = (\vec{r} \wedge \vec{v})^2$$

y por las propiedades del producto vectorial se tiene que

$$C^2 = r^2 v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2.$$

De aquí, igualando este resultado con el valor conocido de $C = \sqrt{\mu p}$ se puede despejar p

$$p = \frac{1}{\mu} [r^2 v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2].$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación polar focal de la órbita

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V},$$

reescribiéndola como

$$e \cos V = \frac{p}{r} - 1 \quad (2.56)$$

2. El problema de dos cuerpos

y derivando ambos miembros

$$-e \sin V \dot{V} = -\frac{p}{r^2} \dot{r},$$

se tiene que

$$-e \sin V r^2 \dot{V} = -p \dot{r},$$

pero $r^2 \dot{V} = C = \sqrt{\mu p}$ y, por tanto,

$$-e \sin V \sqrt{\mu p} = -p \dot{r}$$

y de aquí

$$e \sin V = \frac{p}{\sqrt{\mu p}} \dot{r} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \dot{r}. \quad (2.57)$$

Combinando las ecuaciones (2.56) y (2.57) para eliminar el seno y el coseno se llega a la expresión

$$e^2 = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \frac{p}{\mu} (\dot{r})^2, \quad (2.58)$$

que permite determinar el valor de la excentricidad.

En este punto, conocido el valor de e , es posible obtener los valores de $\sin V$ y $\cos V$ de (2.56) y (2.57) y a partir de estos determinar la anomalía verdadera, V . Conocida V se puede utilizar la relación en (2.22) para determinar E y por último utilizar la ecuación de *Kepler* en (2.23) para obtener la anomalía media, M .

Para poder determinar el valor del semieje mayor, a , conviene hacer uso de la relación $p = a(1 - e^2)$ ya que p y e son valores ya conocidos.

Para la determinación de ω se parte de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_3(-\Omega) R_1(-i) R_3(-\omega) \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix},$$

se desarrolla el producto matricial

$$\begin{cases} x = r \left[\cos \Omega \cos(\omega + V) - \sin \Omega \sin(\omega + V) \cos i \right], \\ y = r \left[\sin \Omega \cos(\omega + V) + \cos \Omega \sin(\omega + V) \cos i \right], \\ z = r \sin(\omega + V) \sin i \end{cases}$$

y se observa que de la última igualdad se puede obtener el valor de $\sin(\omega + V)$. Para obtener el valor de $\cos(\omega + V)$ basta observar que $x \cos \Omega + y \sin \Omega = r \cos(\omega + V)$. Ahora, conocidos seno y coseno es posible determinar la suma $\omega + V$ y, por tanto, el valor de ω .

Capítulo 3

Desarrollos en serie

Contenido

3.1. Introducción	41
3.2. Desarrollo de $\sin kE$ y $\cos kE$	42
3.3. Desarrollo de $\left(\frac{a}{r}\right)^m$ y $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m$	43
3.4. Desarrollos de <i>Hansen</i>	45
3.5. Inversión de series	48
3.6. Procesador de series de <i>Poisson</i>	54

3.1. Introducción

A continuación se procede a exponer de modo explícito los desarrollos en serie de las principales magnitudes que aparecen en el problema de dos cuerpos para, de este modo, tener la base teórica para la construcción de los algoritmos y programas que más tarde se abordarán. Se obtienen los desarrollos de $\sin kE$, $\cos kE$, E , las potencias de $\frac{r}{a} - 1$ y $\frac{a}{r}$, y las expresiones de $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mV$ y $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mV$; todas ellas como funciones dependientes de la excentricidad y de la anomalía media.

Únicamente se pretende presentar los desarrollos y no profundizar en sus deducciones, pues éstas pueden encontrarse, entre otros, en [24], [53] y [120], cuya lectura, sobre todo de este último, es recomendable si se desea profundizar en el conocimiento de los desarrollos analíticos asociados del problema de dos cuerpos.

El capítulo finaliza con un algoritmo de inversión de series y la descripción del procesador de series de *Poisson* diseñado para manejar los desarrollos obtenidos.

3.2. Desarrollo de $\sin kE$ y $\cos kE$

En primer lugar, resulta conveniente obtener los desarrollos explícitos de las expresiones $\sin kE$ y $\cos kE$ en función de la anomalía media, M . Como ya se vio en (2.23), la ecuación de *Kepler* relaciona la anomalía media, M , y la anomalía excéntrica, E , mediante la ecuación

$$E - e \sin E = M.$$

Esta relación, según asegura el teorema de la función inversa, determina E como función de M , $E = E(M)$, puesto que $M = M(E)$ y $0 < e < 1$, $\frac{dM}{dE} \neq 0$.

Por otra parte, $E - M = e \sin E$ y las funciones $\sin kE$ y $\cos kE$ son funciones de clase C^1 y 2π periódicas, por lo tanto, admiten los desarrollos en serie siguientes

$$\begin{aligned} \sin kE &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m^k \cdot \sin mM, \\ \cos kE &= a_0^k + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^k \cdot \cos mM, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0^k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos kE \, dM, \\ a_m^k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kE \cos mM \, dM \quad (m = 1, \dots, \infty), \\ b_m^k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin kE \sin mM \, dM \quad (m = 1, \dots, \infty). \end{aligned}$$

Estas integrales se pueden desarrollar en base a las funciones de *Bessel* [4]

$$\sin kE = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k}{m} \left[J_{m-k}(me) + J_{m+k}(me) \right] \sin mM, \quad (3.1)$$

$$\cos kE = -\frac{e}{2} \delta_{1,k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k}{m} \left[J_{m-k}(me) - J_{m+k}(me) \right] \cos mM, \quad (3.2)$$

3. Desarrollos en serie

donde $\delta_{1,k}$ representa la función delta¹ de *Kronecker*.

Las funciones de *Bessel* [4], [120] vienen definidas explícitamente como

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

y satisfacen las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x), \\ J'_n(x) &= -\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata se puede obtener la anomalía excéntrica en función de la anomalía media

$$E = M + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e}{m} \left[J_{m-1}(m e) + J_{m+1}(m e) \right] \sin m M \quad (3.3)$$

o de forma equivalente

$$E = M + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m} J_m(m e) \sin m M.$$

3.3. Desarrollo de $\left(\frac{a}{r}\right)^m$ y $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m$

En este apartado se va a exponer de modo somero el cálculo de los desarrollos de una potencia natural arbitraria de las magnitudes $\frac{a}{r}$ y $\left(\frac{r}{a} - 1\right)$, las cuales aparecen en numerosas expresiones relativas al problema de dos cuerpos.

Antes de proseguir la exposición resulta conveniente introducir los llamados números de *Cauchy* [120]. Sean j, q enteros no negativos, p un entero cualquiera y m un número natural. Llamamos número de *Cauchy* $N_{-p,j,q}$ al coeficiente de grado p del desarrollo de la expresión

¹La función delta de *Kronecker* se define como $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^j \left(x - \frac{1}{x}\right)^q.$$

Los números de *Cauchy* satisfacen la relación

$$N_{-p,j,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } -p + j + q = 0 \\ 0 & \text{si } -p + j + q < 0 \text{ o impar.} \end{cases}$$

También se verifican las relaciones

$$N_{-p,0,q} = (-1)^{\frac{q-p}{2}} \binom{q}{\frac{p+q}{2}},$$

$$N_{-p,j+1,q} = N_{-p+1,j,q} + N_{-p-1,j,q}.$$

El desarrollo de $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m$ viene dado [120] por

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^m = \frac{1}{2}C_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)} \cos kM, \quad (3.4)$$

donde

- $C_0^{(2m)} = 2 \binom{2m}{m} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}$
- $C_0^{(2m+1)} = 2 \binom{2m+2}{m+1} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m+1}$
- $C_n^{(m)} = (-1)^m \frac{2m}{n} \left(\frac{e}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N_{-n,m-1,k+1} \left(\frac{ne}{2}\right)^k, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Por otra parte, el desarrollo de $\left(\frac{r}{a}\right)^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, viene dado por

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-m} = \frac{1}{2}G_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(m)} \cos kM, \quad (3.5)$$

3. Desarrollos en serie

donde

$$\begin{aligned} \blacksquare G_0^{(m)} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-1)_k}{k!k!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2k} \\ \blacksquare G_n^{(m)} &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{m^q}{q!} \left(\frac{e}{2}\right)^{j+q} \frac{(m-1)_j}{j!} N_{-n,j,q} \end{aligned}$$

y $(x)_k$ representa el símbolo de *Pochhammer*, que puede calcularse como

$$(x)_k = x(x-1) \cdots (x+k-1).$$

La ecuación del centro, $V - M$, se puede obtener a partir del desarrollo de $\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}$ y su expresión resulta

$$V - M = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)} \frac{\sin kM}{k}. \quad (3.6)$$

3.4. Desarrollos de *Hansen*

Para abordar el problema de los dos cuerpos también resulta interesante contar con el desarrollo de las funciones $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mV$ y $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mV$ o su forma compleja equivalente².

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(\sqrt{-1}mV).$$

Esta última expresión puede desarrollarse mediante las llamadas funciones de *Hansen* de la excentricidad como

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(\sqrt{-1}mV) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m}(e) \exp(\sqrt{-1}kM)$$

²Nótese que en este apartado $\sqrt{-1}$ hace referencia a la unidad imaginaria; esta nomenclatura es necesaria porque la inclinación de la órbita, como es habitual en mecánica celeste, está representada por la letra i y podría llevar a confusión. Asimismo, como la excentricidad y la función exponencial de base natural también pueden confundirse, se ha optado por la utilización de la expresión "exp()" para hacer referencia a la función exponencial y mantener e para la expresión habitual de la excentricidad.

y, ya que $\exp(\sqrt{-1}mV) = \cos mV + \sqrt{-1} \sin mV$, se tiene que

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(\sqrt{-1}mV) = \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mV + \sqrt{-1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mV.$$

A partir de aquí se llega a las expresiones

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mV = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,m}(e) \sin kM, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mV = \frac{B_0^{n,m}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{n,m}(e) \cos kM \quad (3.8)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m}(e) \exp(\sqrt{-1}kM) &= \frac{B_0^{n,m}}{2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{n,m}(e) \cos kM + \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,m}(e) \sin kM = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B_0^{n,m}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{n,m}(e) \frac{\exp(\sqrt{-1}kM) + \exp(-\sqrt{-1}kM)}{2} + \\ + \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{n,m}(e) \frac{\exp(\sqrt{-1}kM) - \exp(-kM)}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Si se define $B_{-k}^{n,m} = B_k^{n,m}$ y $A_{-k}^{n,m} = -A_k^{n,m}$ se puede escribir la expresión anterior como

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{B_k^{n,m}}{2} e^{ikM} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A_k^{n,m}}{2} \exp(\sqrt{-1}kM) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A_k^{n,m} + B_k^{n,m}}{2} \exp(\sqrt{-1}kM)$$

y de aquí

3. Desarrollos en serie

$$X_k^{n,m} = \frac{A_k^{n,m} + B_k^{n,m}}{2},$$

$$X_{-k}^{n,m} = \frac{B_k^{n,m} - A_k^{n,m}}{2}.$$

El cálculo de $X_0^{n,m}(e)$ puede efectuarse como sigue. Sean

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

$$X_0^{n,m} = (1 + \beta^2)^{-n-1} \alpha_0,$$

donde

$$\alpha_0 = (-1)^m \beta^m \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n+m+1}{m+s} \binom{n-m+1}{s} \beta^{2s}$$

o también por

$$X_0^{n,m}(e) = (-1)^m \frac{\beta^m}{(1 + \beta^2)^{n+1}} \frac{(n+2)(n+3) \cdots (n+m+1)}{m!} \cdot F(m-n+1, -n-1, m+1, \beta^2),$$

donde F es la función hipergeométrica [4]

$$\begin{aligned} F(a; b; c; x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{(a+i)(b+i)}{c+i} \right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a+k-1}{k} \binom{b+k-1}{k}}{\binom{c+k-1}{k}} x^k. \end{aligned}$$

Los valores de $X_k^{n,m}(e)$, con $k \neq 0$, se pueden determinar como

- si $k - m > 0$,

$$X_k^{n,m} = (-1)^{k-m} (1 + \beta^2)^{-n-1} \beta^{k-m} \sum_{s=0}^{\infty} P_{k-m+s} Q_s \beta^{2s}$$

- si $k - m < 0$,

$$X_k^{n,m} = (-1)^{m-k} (1 + \beta^2)^{-n-1} \beta^{m-k} \sum_{s=0}^{\infty} P_s Q_{m-k+s} \beta^{2s}$$

- si $k = m$, puede utilizarse cualquiera de las dos fórmulas anteriores con $\nu = \frac{\beta e}{2\beta}$

$$P_r = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{n-m+1}{s} \frac{\nu^{r-s}}{(r-s)!},$$

$$P_0 = 1,$$

$$Q_r = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{n+m+1}{s} \frac{(-\nu)^{r-s}}{(r-s)!} = \sum_{s=0}^r \binom{n+m+1}{s} \frac{\nu^{r-s}}{(r-s)!}.$$

Estos desarrollos constituyen la base de lo que será el procesador kepleriano.

3.5. Inversión de series

Para introducir este punto, se observa que se han obtenido diversos desarrollos de varias expresiones en función de la anomalía media, M , pero en diversas ocasiones puede resultar conveniente disponer de la serie inversa, es decir, M en función de otra anomalía. Este desarrollo de la serie inversa ha sido estudiado en profundidad por *Lagrange* [67], [87] y *Deprit* [36].

En casos sencillos, como en el caso $y = x + \varepsilon g(y)$, la inversión $y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x)$ puede ser obtenida mediante el desarrollo en serie de *Lagrange* [67], [87], el cual permite la inversión de funciones holomorfas alrededor de un punto donde su derivada no sea nula.

Sin embargo, el desarrollo de *Lagrange* no es aplicable cuando se pretende invertir una expresión tal como

3. Desarrollos en serie

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_n(y),$$

ya que el exponente en ε no es la unidad. En este caso, *Deprit*, en su artículo «Note on *Lagrange's* inversion formula» [36], desarrolla un algoritmo para invertir la serie bajo ciertas condiciones. Dicho procedimiento se describe de forma sucinta a continuación.

Sea una ecuación de la forma

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_n(y); \quad (3.9)$$

conocidos x , y y ε , se supone que se puede obtener un valor de y , al que se llamará $y(x, \varepsilon)$, de modo que

$$y(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_n(y(x, \varepsilon)) \quad (3.10)$$

esto es

$$y(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y_{0,n}(x), \quad (3.11)$$

donde $\phi_n(y(x, \varepsilon))$ es desarrollable en ε . Si se considera la función auxiliar

$$F(y, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,0}(y) \quad (3.12)$$

y si se sustituye en (3.11), se convierte en

$$F^*(y, \varepsilon) \equiv F(y(x, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{0,n}(x) \quad (3.13)$$

El procedimiento obtiene por inducción la secuencia de coeficientes, $(F_{0,n})_{n \geq 0}$, que aparece en (3.13) en base a las secuencias $(\phi_n)_{n \geq 1}$ y $(F_{n,0})_{n \geq 0}$. Por simplicidad y minimización de errores se puede cambiar el problema por el siguiente:

1) Generar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) \quad (3.14)$$

admitiendo que (3.11) es una solución para la condición inicial $y = x$ cuando $\varepsilon = 0$.

Nótese que para la solución $y(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y_{0,n}(x)$ se tiene que

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x),$$

donde, integrando, se llega a

$$y = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x).$$

2) Las soluciones $y(x, \varepsilon)$ en (3.14) que satisfacen la condición inicial $y = x$ para $\varepsilon = 0$ definen una transformación $(x, \varepsilon) \rightarrow y$.

Si se deriva la ecuación (3.9) respecto a ε y se tiene en cuenta que y es función de ε se obtiene

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d\phi_n}{dy} \frac{dy}{d\varepsilon} \quad (3.15)$$

y si se agrupa por el factor $\frac{dy}{d\varepsilon}$ se tiene que

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d}{dy} \phi_n\right) \frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.16)$$

Si se sustituye $\frac{dy}{d\varepsilon}$ por su valor en (3.14) se tiene

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d}{dy} \phi_n\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.17)$$

operando

3. Desarrollos en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d}{dy} \phi_n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n+r}}{n!r!} \frac{d}{dy} \phi_n W_{r+1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.19)$$

Introduciendo el cambio de variable $m = n + r$ se tiene que $n = m - r$ y el doble sumatorio puede expresarse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\varepsilon^m}{m!} \frac{m!}{(m-r)!r!} \frac{d}{dy} \phi_{m-r} W_{r+1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.20)$$

o equivalentemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(y) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\varepsilon^m}{m!} \binom{n}{m} \frac{d}{dy} \phi_{m-r} W_{r+1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_{n+1}(y) \quad (3.21)$$

Si se identifican los coeficientes de las potencias de ε en ambos miembros, se obtienen las siguientes igualdades para las primeras potencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = \phi_1, \\ W_2 = \phi_2 + \binom{1}{0} W_1 \frac{d}{dy} \phi_1, \\ W_3 = \phi_3 + \binom{2}{0} W_1 \frac{d}{dy} \phi_2 + \binom{2}{1} W_2 \frac{d}{dy} \phi_1, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.22)$$

y en general

$$W_{n+1} = \phi_{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d}{dy} \phi_{n-m} \quad (3.23)$$

se llega, pues, a la siguiente relación de recurrencia, que permite construir la ecuación diferencial a la que se hace referencia en (3.14)

$$\begin{cases} W_1 = \phi_1 \\ W_{n+1} = \phi_{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d}{dy} \phi_{n-m} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

La última parte del procedimiento de inversión es calcular la secuencia de coeficientes $(F_{0,n})_{n \geq 0}$. Para ello, si se deriva la expresión (3.13), se obtiene

$$\frac{dF^*}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \quad (3.25)$$

y es posible calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n+1,0} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d}{dy} F_{n,0} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d}{dy} F_{n-m,0} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Además, en la expresión de $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ en (3.26) los coeficientes $F_{n,1}$ se pueden obtener con

$$F_{n,1} = F_{n+1,0} + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d}{dy} F_{n-m,0} \quad (3.27)$$

y mediante un proceso de inducción se pueden encontrar los coeficientes de

$$\frac{d^p F}{d\varepsilon^p} = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,p} \quad (3.28)$$

y las soluciones de (3.14) se obtienen a partir de las relaciones

$$F_{n,p} = F_{n+1,p-1} + \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{0 \leq m \leq n} \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d}{dy} F_{n-m,p-1} \quad (3.29)$$

Haciendo $\varepsilon = 0$ se obtiene

3. Desarrollos en serie

$$\frac{d^p}{d\varepsilon^p} F(y) = F_{0,p}(x) \quad (3.30)$$

y de la serie de *Taylor*

$$F^*(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left. \frac{d^n F}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0} \quad (3.31)$$

se obtiene que

$$F^*(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{0,n}(x) \quad (3.32)$$

A modo de conclusión se considera importante recalcar que, aunque no es el único, este procedimiento estudiado por *Deprit* es importante para obtener las magnitudes con las que se trabaja habitualmente en el problema de dos cuerpos. En general, se conoce el valor de la anomalía Ψ_α como desarrollo en serie de la anomalía excéntrica, E , es decir, se tiene que

$$\Psi_\alpha = E - \sum_{n=0}^{\infty} e^n \phi_n(E)$$

y se pretende obtener E y desarrollos en los que interviene E —como $\sin E$ o $\cos E$ — en función de Ψ , esto es

$$E = \Psi_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{J}_n(\Psi_\alpha),$$

$$\sin E = \sin \Psi_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{Q}_n(\Psi_\alpha)$$

o

$$\cos E = \cos \Psi_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{K}_n(\Psi_\alpha),$$

donde \mathcal{J} , \mathcal{Q} y \mathcal{K} son funciones que determina el método.

Análogamente, conocida la relación entre la anomalía media, M , y Ψ_α

$$\Psi_\alpha = M + \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{H}_n(E),$$

se necesita el procedimiento de inversión de series para obtener la ecuación de *Kepler*

$$M = \Psi_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} e^n \mathcal{T}_n(\Psi_\alpha),$$

donde, otra vez, \mathcal{T} es una función que determina el método.

3.6. Procesador de series de *Poisson*

Manejar las series de *Poisson* de forma manual es impensable y utilizar ordenadores para su cálculo es complicado, no solamente por el coste computacional y la cantidad de operaciones que se deben llevar a cabo, sino también por la nomenclatura utilizada. En el siglo XIX el astrónomo francés *Charles E. Delaunay* (1816-72) determinó el paralaje horizontal de la Luna; para ello, dedicó muchos años de su vida a la realización de los cálculos necesarios. En aquellos tiempos y en aquellas condiciones de trabajo el interés por la mecánica celeste entró en declive ya que cualquier nuevo resultado estaba ligado a la infranqueable barrera del coste operacional. No fue hasta finales del siglo XX, con el surgimiento de la era digital y el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, cuando el campo de la mecánica celeste volvió a florecer. En 1971, *André Deprit* (1926-2006) volvió a realizar los cálculos de su antecesor, Delaunay, con una precisión más alta y en tal solo medio mes. A partir de entonces la informática, gracias a la aparición de nuevas tecnologías y nuevos materiales, empezó a desarrollarse de forma vertiginosa y, si bien a inicios de la década de los 90 la potencia de cálculo era de unas decenas de miles de FLOPS³, hoy en día una consola de juegos, una tarjeta gráfica o simplemente un procesador, al alcance de cualquier usuario, puede sostener decenas de TFLOPS⁴.

Con el auge de la potencia de cálculo y fruto de la necesidad se han programado muchos procesadores de series de *Poisson*. Se han desarrollado desde la aparición de los ordenadores modernos [1], [13], [19], [20], [57], [96]; cada uno de ellos basado

³FLOPS, es un acrónimo de operaciones en coma flotante por segundo, del inglés *floating point operations per second*; es una medida de rendimiento de los ordenadores. Los FLOPS son especialmente importantes en cálculos científicos porque estos suelen requerir de muchas operaciones en coma flotante.

⁴TFLOPS, teraFLOPS; equivale a 10^{12} FLOPS

3. Desarrollos en serie

en sus necesidades y sus niveles de exigencia. A la par que con las series de *Poisson* el manejo de funciones esféricas también es complicado y a tal efecto se pueden construir procesadores basados en estas funciones como puede verse, entre otros, en [6], [7], [56], [88] o [93].

Como parte del trabajo realizado en esta tesis doctoral se ha implementado una herramienta para manejar estas series —un procesador de series de *Poisson*— siguiendo dos pilares fundamentales. Por un lado, se ha buscado el mayor grado de comodidad para el programador; se trata a las series como una entidad sobre la que poder realizar cualquier operación habitual. Así pues, desde el punto de vista del programador, es tan sencillo multiplicar dos series de *Poisson* como multiplicar dos números enteros. Por otro lado, se ha diseñado el procesador para alcanzar una precisión determinada a priori por el programador y que puede llegar a ser inferior a 10^{-16} para los cálculos efectivos. A tal efecto se ha implementado una clase en el lenguaje de programación orientado a objetos C++ con el objetivo de gestionar todas las necesidades requeridas. Las características propias del lenguaje ocultan al usuario del programa los detalles de implementación y toda la complejidad que lleva implícita la operatoria de las series. El núcleo de este procesador está disponible en la dirección

http://mecanicaceleste.uji.es/spoisson/poisson_vector.h

Desde un punto de vista puramente nomenclatural, la notación para el diseño de las operaciones en el procesador puede ser prefija, postfija o infija. La primera —que también recibe el nombre de notación polaca— es debida al matemático *Lukasiewicz* [86], cuya característica distintiva es la posición de los operadores a la izquierda de sus operandos. La segunda —también conocida por notación polaca inversa— fue relanzada por *Dijkstra* [38] a principios de los años 60; los operadores se colocan a la derecha de sus operandos. Finalmente, la notación infija —la notación habitual que utiliza paréntesis para establecer el orden de las operaciones— es la que se ha elegido para la programación del procesador.

Una serie de *Poisson* es —como ya se expuso en (1.2)— una suma de términos de la forma

$$A t^m \cos(n_1 M_1 + \dots + n_N M_N + b),$$

donde $A, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$. Las variables M_k se conocen como variables angulares y t representa el tiempo.

Para poder trabajar de forma cómoda y, sobre todo, eficiente con este tipo de expresiones se debe ser extremadamente cuidadoso con el diseño y utilización de las estructuras de datos ya que, por un lado, un procesador de series de *Poisson* va

a tratar con un número muy elevado de operaciones y, por otro lado, no es difícil encontrarse con series compuestas por miles de términos.

Para el diseño del procesador a nivel de algoritmos y de estructura de datos se han seguido los principios fundamentales de la ingeniería del software. Por un lado, la ocultación de la información, es decir, los detalles de las funciones y las estructuras de datos se ocultan para hacerlas inaccesibles a otras partes del programa; por otro lado, la abstracción de datos —las propiedades lógicas de los datos o las funciones están separadas de su implementación—. Esto último permite manipular los datos del programa observando únicamente su representación lógica, sin tener que preocuparse por su ubicación física. La elección del lenguaje utilizado ha sido consecuencia de este diseño descendente de las estructuras de datos ya que, como se ha mencionado anteriormente, la velocidad de cálculo era un objetivo a conseguir y, a tal efecto, la forma de almacenar los datos en la memoria del ordenador es un factor crítico. En general, los lenguajes de programación de alto nivel incorporan estructuras de datos que ocultan la representación o ubicación física de los datos en memoria, pero esta forma de trabajar tan cómoda no es una justificación para olvidar cómo realmente funciona el sistema de almacenamiento. Saber cómo funciona este proceso permite tomar decisiones sobre si conviene elegir una estructura de datos como la clase *vector* o la clase *lista*. Conocer cómo se implementan a bajo nivel los vectores es un factor de impacto crítico sobre la eficiencia del procesador.

El procesador de series de *Poisson* trabaja con una tolerancia preestablecida por el programador; éste puede indicar el número de cifras decimales de precisión con las que necesita trabajar.

Internamente, el procesador de series de *Poisson*, trata cada serie como una sucesión de términos de *Poisson* almacenados contiguamente en memoria. A su vez, un término de *Poisson* viene implementado por una clase en C++ cuyos miembros son una amplitud, el exponente de la variable temporal, n variables angulares y una variable de fase.

Sobre la mencionada clase están implementados todos los métodos necesarios para dar respuesta a las necesidades del programador y aprovechando las características del lenguaje se han sobrecargado las operaciones básicas reprogramándolas para adaptarlas a las series de *Poisson*.

Si \mathcal{SP} es una serie de *Poisson*, las operaciones seno y coseno de una serie de *Poisson* están definidas en base a la definición analítica del seno y del coseno como desarrollo en serie de potencias. Así pues, para calcular $\sin(\mathcal{SP})$ o $\cos(\mathcal{SP})$ se toman las series de potencias

3. Desarrollos en serie

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y se sustituye en ellas la variable x por la serie \mathcal{SP} .

Siguiendo la misma operatoria, para el resto de funciones que se han implementado en el procesador de series de *Poisson* se tiene que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad -1 < x \leq 1,$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad -1 < x < 1.$$

Como las operaciones de suma de series, producto de series, producto de una serie por un escalar, y potencia de una serie han sido definidas con anterioridad dentro del cuerpo del procesador se pueden implementar las funciones seno y coseno en base a estas operaciones ya conocidas. Para diseñar la función, conocida la precisión necesaria, se obtiene primero el número de términos de la serie que harán falta para obtener el seno o el coseno con un error aceptable. A continuación, se calcula cada uno de los términos de *Poisson* necesarios y se suman.

Se han realizado diversas pruebas para comprobar la precisión del procesador y se ha diseñado un algoritmo para evaluar dicha precisión consistente en dos etapas. En primer lugar, a partir de una serie de *Poisson* \mathcal{SP} con dos variables angulares establecidas a priori, M_1 y M_2 , se calculan —utilizando las funciones básicas implementadas en el procesador— las series de *Poisson* que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} \sin_sp &= \sin(\mathcal{SP}), & r2_sp &= \sqrt{1 + \mathcal{SP}}, \\ \cos_sp &= \cos(\mathcal{SP}), & r3_sp &= \sqrt[3]{1 + \mathcal{SP}}, \\ exp_sp &= e^{\mathcal{SP}}, & r4_sp &= \sqrt[4]{1 + \mathcal{SP}}, \\ inv_sp &= \frac{1}{1 + \mathcal{SP}}, & log_sp &= \log(1 + \mathcal{SP}). \end{aligned}$$

En segundo lugar, se construye una matriz de 1000x1000 posiciones; cada elemento o nodo tiene asociado el par $(M_1, M_2) = (\frac{\pi i}{1000}, \frac{\pi j}{1000})$ tomando $i, j = 0, 1, \dots, 999$; para cada nodo se obtienen dos números: el valor de \mathcal{SP} utilizando una función del procesador desarrollada para calcular el valor numérico de una serie de *Poisson* evaluada en un punto [$vsp = valor(\sin(\mathcal{SP}), 1.0, M)$] y el valor de la correspondiente función con $valor(\sin_sp, 1.0, M)$. Se toma como estimación del error el mayor de los valores absolutos de las diferencias. La tabla siguiente muestra las estimaciones del error para las distintas funciones así como los tiempos empleados en dichas evaluaciones. Las mediciones se han repetido para distintos valores de tolerancia 10^{-8} , 10^{-12} y 10^{-16} . La última columna muestra el número de términos de la serie de *Poisson* correspondiente.

Es importante aclarar la idea que subyace bajo los términos de tolerancia y precisión en el ámbito del procesador de series de *Poisson*. Los tipos de datos de los lenguajes de programación, y en particular C++ por ser el utilizado en este trabajo, tienen una limitación respecto a la aritmética decimal. Sin ayuda de librerías especializadas y a costa de un alto consumo computacional, no pueden almacenar las cifras decimales significativas necesarias y se producen errores de redondeo. En el procesador se utiliza el término tolerancia y hace referencia a aquel valor de la amplitud en una serie de *Poisson* a partir del cual los términos con menor amplitud son despreciados o considerados nulos. Por otro lado, la idea de precisión hace referencia a la cantidad de cifras decimales significativas que se quiere alcanzar en los cálculos.

En las tablas que se muestran a continuación la columna cuya cabecera es —error máximo— representa la mayor diferencia de valores obtenida para cada nodo de la matriz de posiciones. La columna de cabecera —tiempo— indica el tiempo que ha invertido el ordenador PC en realizar los cálculos necesarios para obtener todos los nodos de la matriz anteriormente descrita. La columna —términos— indica la cantidad de términos que ha sido necesario asignar a la serie de *Poisson* para alcanzar la tolerancia preestablecida. Nótese que los tiempos invertidos en el cálculo son para 10^6 nodos de la malla. También debe tenerse en cuenta que dichos cálculos se han efectuado utilizando variables de tipo *long double*, lo cual es obviamente más costoso que cuando se utiliza el tipo de datos *double*, que es lo habitual. Por tanto, el tiempo real de cálculo es bastante menor.

⁵Las mediciones de los tiempos que aparecen en esta columna han sido tomadas sobre un ordenador PC Intel®Core™i7-4770 CPU@3.40 GHz x8 y 32 Gib de memoria de trabajo. El compilador utilizado ha sido GNU C++, versión 7.3.0 sobre Ubuntu 18.04.1 LTS (64 bits) y los flags de compilación `-std=c++17 -O3`

3. Desarrollos en serie

operación	error máximo	tiempo ⁵ (s)	términos
$\sin(\mathcal{SP})$	$6,59663 \cdot 10^{-10}$	11.3420	42
$\cos(\mathcal{SP})$	$4,14401 \cdot 10^{-9}$	6.4151	26
$e^{\mathcal{SP}}$	$2,99218 \cdot 10^{-9}$	13.7813	55
$\sqrt{1 + \mathcal{SP}}$	$1,76532 \cdot 10^{-9}$	63.0493	233
$\sqrt[3]{1 + \mathcal{SP}}$	$3,23707 \cdot 10^{-9}$	22.8810	91
$\sqrt[4]{1 + \mathcal{SP}}$	$3,42417 \cdot 10^{-9}$	23.6843	93
$\log(1 + \mathcal{SP})$	$3,57912 \cdot 10^{-9}$	23.3532	92
$\frac{1}{1 + \mathcal{SP}}$	$3,22818 \cdot 10^{-9}$	45.8468	175

Tabla 3.1: Error máximo cometido para una tolerancia de 10^{-8} .

operación	error máximo	tiempo ⁵ (s)	términos
$\sin(\mathcal{SP})$	$1,44631 \cdot 10^{-13}$	27.5965	96
$\cos(\mathcal{SP})$	$2,70234 \cdot 10^{-13}$	17.0851	63
$e^{\mathcal{SP}}$	$2,46538 \cdot 10^{-13}$	34.8375	125
$\sqrt{1 + \mathcal{SP}}$	$1,41098 \cdot 10^{-13}$	240.735	740
$\sqrt[3]{1 + \mathcal{SP}}$	$3,13249 \cdot 10^{-13}$	82.04	300
$\sqrt[4]{1 + \mathcal{SP}}$	$2,41906 \cdot 10^{-13}$	87.6697	316
$\log(1 + \mathcal{SP})$	$2,38733 \cdot 10^{-13}$	87.5784	317
$\frac{1}{1 + \mathcal{SP}}$	$2,43660 \cdot 10^{-13}$	156.915	510

Tabla 3.2: Error máximo cometido para una tolerancia de 10^{-12} .

operación	error máximo	tiempo ⁵ (s)	términos
$\sin(\mathcal{SP})$	$1,7537 \cdot 10^{-17}$	49.72	186
$\cos(\mathcal{SP})$	$1,98951 \cdot 10^{-17}$	30.5355	117
$e^{\mathcal{SP}}$	$2,81893 \cdot 10^{-17}$	64.264	230
$\sqrt{1 + \mathcal{SP}}$	$2,55736 \cdot 10^{-17}$	549.719	1630
$\sqrt[3]{1 + \mathcal{SP}}$	$3,24176 \cdot 10^{-17}$	208.18	703
$\sqrt[4]{1 + \mathcal{SP}}$	$3,48029 \cdot 10^{-17}$	213.721	719
$\log(1 + \mathcal{SP})$	$3,4586 \cdot 10^{-17}$	215.517	724
$\frac{1}{1 + \mathcal{SP}}$	$3,62124 \cdot 10^{-17}$	330.199	1078

Tabla 3.3: Error máximo cometido para una tolerancia de 10^{-16} .

Capítulo 4

Movimiento perturbado

Contenido

4.1. Introducción	61
4.2. Ecuación general de la teoría de perturbación	66
4.3. Teoría de perturbación	69
4.3.1. Ecuación fundamental de la teoría de perturbación	69
4.3.2. Ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	72
4.3.3. Pequeñas excentricidades y pequeñas inclinaciones	74

4.1. Introducción

Existen diversos tipos de problemas perturbados. La no esfericidad de la Tierra, por ejemplo, induce perturbaciones sobre la órbita de un satélite artificial en torno a ella; el rozamiento de un satélite con las capas altas de la atmósfera también produce pequeñas perturbaciones sobre su trayectoria. En lo que se refiere a esta memoria, dado que el estudio analítico se quiere enfocar al caso de teorías planetarias se hará especial hincapié en un caso particular del problema de $n + 1$ cuerpos denominados por los subíndices $0, 1, \dots, n$ en el que la masa del primario, m_0 , es mucho mayor respecto al resto.

El movimiento de los planetas alrededor del Sol y el movimiento de los satélites alrededor de sus respectivos planetas pueden considerarse, en una primera aproximación, como un problema de dos cuerpos, cuya solución viene dada por los seis elementos orbitales constantes como se vio en el punto 2.8.2. El problema perturbado puede considerarse como el problema de dos cuerpos descrito anteriormente sobre el que actúan unas fuerzas de perturbación de orden considerablemente menor

que la atracción del primario producidas por las atracciones mutuas de los cuerpos secundarios, provocando que los elementos orbitales pasen a depender del tiempo.

El método que usualmente se sigue para resolver este tipo de problemas es la teoría de perturbación; ésta consiste en sustituir los elementos constantes en el problema de dos cuerpos por funciones del tiempo de modo que se satisfagan las ecuaciones diferenciales del sistema completo. Este método es conocido como el método de *Lagrange* de variación de constantes [51], [124].

En lo que respecta a esta memoria, se considerará, como se ha dicho con anterioridad, un sistema formado por $n + 1$ cuerpos puntuales de masas $m_0, m_1 \dots m_n$ de modo que $m_i \ll m_0$ con $i = 1 \dots n$.

Si se supone un sistema inercial de origen O y se consideran las masas $m_0, m_1 \dots m_n$ situadas, respectivamente, en los puntos $p_0, p_1 \dots p_n$, las ecuaciones del movimiento vendrán dadas, para el primario, por

$$\ddot{\overrightarrow{OP_0}} = G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\overrightarrow{P_0P_j}}{|\overrightarrow{P_0P_j}|^3} \quad (4.1)$$

y para los n cuerpos restantes por

$$\ddot{\overrightarrow{OP_i}} = G \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\overrightarrow{P_iP_j}}{|\overrightarrow{P_iP_j}|^3}. \quad (4.2)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse utilizando la notación $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{P_0P_i}$ y $\overrightarrow{r_{ij}} = \overrightarrow{P_iP_j}$ y así, se tiene

$$\ddot{\overrightarrow{OP_0}} = G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\overrightarrow{r_j}}{r_j^3} \quad (4.3)$$

y

$$\ddot{\overrightarrow{OP_i}} = G \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\overrightarrow{r_{ij}}}{r_{ij}^3} = -Gm_0 \frac{\overrightarrow{r_i}}{r_i^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\overrightarrow{r_{ij}}}{r_{ij}^3}. \quad (4.4)$$

Restando (4.3) de (4.4), y teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{r_i}$, se tiene que

4. Movimiento perturbado

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}}_i &= \left[-Gm_0 \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right] - \left[G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right] \\
 &= \left[-Gm_0 \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right] - \left[Gm_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right] \\
 &= \left[-G(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] + \left[Gm_0 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{m_0} \left\{ \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right\} \right] \\
 &= -\mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \underbrace{G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left\{ \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right\}}_{\vec{F}_i},
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde puede observarse que la primera parte de la expresión corresponde a la ecuación del movimiento relativo en el problema de dos cuerpos (2.7) y la segunda lo convierte en un problema de dos cuerpos perturbado por la fuerza \vec{F}_i .

Ahora bien, $\vec{F}_i = \nabla_i \mathcal{R}_i$, ya que \mathcal{R}_i viene dado por

$$\mathcal{R}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right), \tag{4.6}$$

que desarrollado queda

$$\mathcal{R}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right)$$

y

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \mathcal{R}_i &= \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial z_i} \vec{k} \\
 &= G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \vec{i} + \\
 &+ G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} - \frac{y_j}{r_j^3} \right) \vec{j} + \\
 &+ G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} - \frac{z_j}{r_j^3} \right) \vec{k} + \\
 &= G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por simplicidad, en el caso de dos cuerpos orbitando alrededor de un primario de masa, m_0 , mucho mayor que los secundarios se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_1 &= Gm_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{(r')^3} \right), \\
 \mathcal{R}_2 &= Gm_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $\Delta = |r_{ij}|$ representa la distancia entre los cuerpos m_1 y m_2 y \vec{r} y \vec{r}' son los radios vectores de los cuerpos 1 y 2, respectivamente.

De (4.5) y bajo el supuesto de dos cuerpos orbitando al primario de mayor masa se puede deducir que

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \tag{4.9}$$

donde el recuadro indicaría un problema de dos cuerpos y $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ —dependiente de la posición y velocidad del cuerpo 1 y del tiempo— sería la fuerza perturbadora que lo convierte en un problema completo. Análogamente, para el cuerpo 2 se tendría

4. Movimiento perturbado

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}^j} = -\frac{\mu'}{(r')^3} \vec{r}^j + \vec{F}^j(\vec{r}^j, \dot{\vec{r}}^j, t). \quad (4.10)$$

Como se ha indicado al principio de esta introducción, el problema de los dos cuerpos queda bien resuelto tras determinar el valor de seis constantes denominadas *elementos orbitales* definidas en el punto 2.8.2. Estas constantes determinan la posición y la velocidad de los secundarios, m_1 y m_2 , con respecto al primario, m_0 :

$$\begin{aligned} x &= x(a, e, i, w, \Omega, M_0, t), & \dot{x} &= \dot{x}(a, e, i, w, \Omega, M_0, t), \\ y &= y(a, e, i, w, \Omega, M_0, t), & \dot{y} &= \dot{y}(a, e, i, w, \Omega, M_0, t), \\ z &= z(a, e, i, w, \Omega, M_0, t), & \dot{z} &= \dot{z}(a, e, i, w, \Omega, M_0, t). \end{aligned}$$

En el caso del problema de dos cuerpos perturbado, esos pequeños cambios introducidos por la fuerza \vec{F} van a generar variaciones en distintos elementos como la excentricidad, el plano orbital o el semieje mayor de la órbita.

La teoría de perturbación engloba una serie de métodos para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que el problema plantea. Como ya se vio en su momento, todos los elementos obtenidos al resolver el problema de dos cuerpos son constantes y para llegar a una solución del problema perturbado se utiliza el método de variación de constantes de *Lagrange* [51], [124]. El método consiste en sustituir cada elemento por su correspondiente función del tiempo:

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow a(t), & w &\longrightarrow w(t), \\ e &\longrightarrow e(t), & \Omega &\longrightarrow \Omega(t), \\ i &\longrightarrow i(t), & M_0 &\longrightarrow M_0(t). \end{aligned}$$

Los nuevos elementos reciben el nombre de *elementos osculadores* y todos los resultados del problema de los dos cuerpos siguen siendo válidos simplemente cambiando los elementos orbitales por sus correspondientes elementos osculadores.

A modo de resumen, en este capítulo se aborda el estudio del movimiento perturbado de un problema de dos cuerpos. La base del método de resolución es como se indica a continuación. La posición del secundario en el problema de dos cuerpos queda completamente determinada por sus elementos; estos, salvo la anomalía media, son constantes en el tiempo. La anomalía media viene dada por $M(t_0) + n(t - t_0)$, donde n es el movimiento medio y es constante. Para abordar el estudio del movimiento perturbado se procederá mediante el método de variación de constantes de *Lagrange*, apareciendo de este modo los llamados elementos osculadores, dependientes del tiempo. A través de estos elementos el movimiento perturbado se expresa con

4.2. Ecuación general de la teoría de perturbación

la mismas fórmulas que en el caso no perturbado y sus valores vendrán dados por las llamadas ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Finalmente, se abordará el estudio de métodos que permitan obtener aproximaciones analíticas a la solución de dichas ecuaciones.

A continuación se expondrá dicho proceso con suficiente detalle como para determinar las manipulaciones formales que será necesario tener en cuenta a la hora de abordar la construcción de la clase *Poisson* en el procesador. Para un conocimiento mas profundo convendría consultar [53], [69] o [120].

4.2. Ecuación general de la teoría de perturbación

Sea $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_6)$ un conjunto de elementos orbitales; las ecuaciones que rigen el movimiento en un problema de dos cuerpos resultan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\mu \frac{x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\mu \frac{y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\mu \frac{z}{r^3}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Si se sustituye $\vec{\sigma}$ por $\vec{\sigma}(t)$ debe satisfacerse la ecuación del movimiento perturbado

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

y por consiguiente, se tendrá que

4. Movimiento perturbado

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{y},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{z},$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x},$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y},$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}.$$

Por otro lado, las parciales respecto al tiempo son solución del problema no perturbado; se verifica (4.11) y se dan las relaciones

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \sum_{j=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \sum_{j=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned}$$

que forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales donde las incógnitas son $\frac{d\sigma_j}{dt}$.

Con el objetivo de obtener las *ecuaciones planetarias* —y poder así relacionar los elementos orbitales con el tiempo— se introducen los corchetes de *Lagrange*. Se define el corchete de *Lagrange* de σ_i y σ_j como la expresión:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial z}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_i}. \quad (4.12)$$

4.2. Ecuación general de la teoría de perturbación

Realizando las modificaciones algebraicas adecuadas se llega a la expresión

$$\sum_{j=1}^6 [\sigma_j, \sigma_k] \frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_k}.$$

Matricialmente, pues, los elementos osculadores satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} [\sigma_1, \sigma_1] & [\sigma_2, \sigma_1] & \cdots & [\sigma_6, \sigma_1] \\ [\sigma_1, \sigma_2] & [\sigma_2, \sigma_2] & \cdots & [\sigma_6, \sigma_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\sigma_1, \sigma_6] & [\sigma_2, \sigma_6] & \cdots & [\sigma_6, \sigma_6] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_1}{dt} \\ \frac{d\sigma_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_6}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $[\sigma_i, \sigma_j] = -[\sigma_j, \sigma_i]$ y $[\sigma_i, \sigma_i] = 0$, para la determinación de las ecuaciones planetarias será necesario calcular 15 corchetes de *Lagrange*. Además, se verifica que $\frac{\partial}{\partial t}[\sigma_i, \sigma_j] = 0$, lo que equivale a decir que los corchetes de *Lagrange* no dependen del tiempo más que a través de los elementos osculadores. Al no depender del tiempo pueden ser evaluados en el punto de la órbita que resulte más conveniente.

Las ecuaciones planetarias se pueden desarrollar para el caso general en el que la fuerza perturbadora sea o no conservativa, pero también calculando los corchetes de *Lagrange* de los elementos. El primer procedimiento nos llevaría a las ecuaciones de *Gauss* y de éstas, en el caso conservativo, se deducen las ecuaciones de *Lagrange*, como se verá en la siguiente sección.

4.3. Teoría de perturbación

En mecánica celeste la teoría de perturbación tiene como objetivo encontrar soluciones a problemas que, debido a su complejidad, no pueden ser resueltos de forma analítica exacta, pero son próximos por problemas integrables, cuya solución general depende de cierto número de constantes. En el problema que se presenta, el movimiento de una masa sometida a la atracción solar y a la atracción de otros cuerpos menores puede modelarse en primera aproximación como un problema de dos cuerpos —cuya solución viene dada por sus seis elementos orbitales— mientras que el resto de masas producen pequeñas perturbaciones en el movimiento, como ya se ha comentado con anterioridad. Para determinar dichas perturbaciones se sustituyen los elementos correspondientes al problema de dos cuerpos por unas funciones del tiempo llamadas elementos osculadores. Estos elementos representan las pequeñas variaciones que los otros cuerpos producen en las órbitas keplerianas correspondientes al problema de dos cuerpos.

Los elementos osculadores se determinan mediante el método de variación de constantes y en el caso en que las fuerzas perturbativas deriven de un potencial constituyen las llamadas ecuaciones planetarias de *Lagrange*.

La integración de estas ecuaciones no puede abordarse, en general, de un modo directo, siendo necesario proceder por aproximaciones sucesivas. Para esto es necesario obtener los desarrollos en serie de *Fourier* de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de las anomalías medias de los cuerpos perturbado y perturbador.

4.3.1. Ecuación fundamental de la teoría de perturbación

Sea el problema perturbado expresado por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} + F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} + F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} + F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \end{array} \right.$$

donde la fuerza perturbadora puede depender, además de la posición, de la velocidad y del tiempo; si se considera que los parámetros $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ están biunívocamente relacionados con los elementos $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ y se expresan las ecuaciones anterior-

res en función de dichos elementos, se obtienen las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_a(a, e, i, \omega, \Omega, M, t), & \frac{d\omega}{dt} &= F_\omega(a, e, i, \omega, \Omega, M, t), \\ \frac{de}{dt} &= F_e(a, e, i, \omega, \Omega, M, t), & \frac{d\Omega}{dt} &= F_\Omega(a, e, i, \omega, \Omega, M, t), \\ \frac{di}{dt} &= F_i(a, e, i, \omega, \Omega, M, t), & \frac{dM}{dt} &= F_M(a, e, i, \omega, \Omega, M, t). \end{aligned}$$

Estas son las expresiones de las derivadas de los elementos osculadores.

Según *Levallois* [69], el problema perturbado debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. Si $\vec{F} = 0$ los elementos a, e, i, ω, Ω son constantes y por tanto

$$\frac{dM}{dt} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \longrightarrow M = \sigma + nt, \quad \sigma = M(0) = n(0 - t_0)$$

Si se denotan los elementos del problema no perturbado por la terna de elementos $(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0)$, se tiene que

$$a = a_0, e = e_0, i = i_0, \omega = \omega_0, \Omega = \Omega_0, M(t) = M_0(t).$$

2. Si \vec{F} es pequeña, la solución se buscará como

$$a = a_0 + \delta a, e = e_0 + \delta e, i = i_0 + \delta i, \omega = \omega_0 + \delta \omega, \Omega = \Omega_0 + \delta \Omega, M = M_0 + \delta M,$$

donde los incrementos son cantidades pequeñas que recibirán el nombre de perturbaciones.

3. Si en un instante t desapareciese la fuerza de perturbación, el movimiento seguiría en la elipse cuyos elementos coincidirían con los valores que tenían los elementos osculadores en el momento en que cesa la perturbación y seguiría una órbita kepleriana.
4. En el movimiento perturbado la posición y la velocidad se expresan en función de los elementos con las mismas fórmulas que en el problema de dos cuerpos sin más que cambiar los elementos por los elementos osculadores.

Partiendo de estos principios [69] es posible obtener las ecuaciones planetarias de *Gauss*, cuya expresión puede verse en (4.13).

¹La figura (4.1) ha sido parcialmente extraída del tomo IV, página 118, del libro titulado «Géodésie Générale» de *J. Levallois* y *J. Kovalevsky* [69].

4. Movimiento perturbado

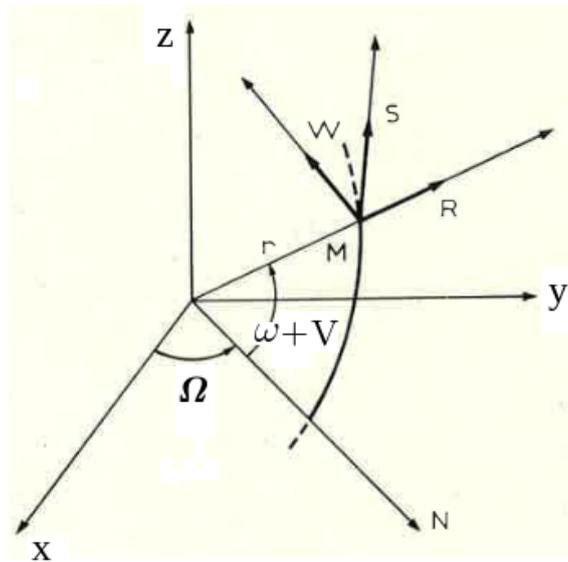


Figura 4.1: Descomposición de la fuerza perturbadora¹.

Si se tiene un problema de dos cuerpos perturbado por una fuerza, \vec{F} , cuyas componentes en el sistema de ejes del dibujo (ver Figura 4.1) son R —a lo largo de radio-vector—, S —perpendicular al radio-vector dentro de la órbita— y W —perpendicular a las dos anteriores—, entonces la variación de los elementos keplerianos con respecto al tiempo viene dada por el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin V R + (1 + e \cos V) S \right], \\
 \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\sin V R + (\cos E + \cos V) S \right], \\
 \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + V)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\
 \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-R \cos V + \left(1 + \frac{1}{1+e \cos V} \right) \sin V S \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{r \cos i \sin(\omega + V)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W \right], \\
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + V)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\
 \frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[R \left(\frac{-2e}{1+e \cos V} + \cos V \right) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos V} \right) S \sin V \right].
 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

4.3.2. Ecuaciones planetarias de *Lagrange*

En la mayoría de los problemas concernientes al movimiento en el sistema solar las fuerzas perturbativas derivan de un potencial \mathcal{R} , siendo, por tanto, conservativas. En este caso, es preferible reescribir las ecuaciones de *Gauss* en términos del potencial perturbador, como puede consultarse en los libros [69] y [120], de donde se obtienen las llamadas ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Estas ecuaciones proporcionan la variación temporal de los elementos en función de ellos mismos y del potencial perturbador, \mathcal{R} .

El problema perturbado es, como se ha visto anteriormente, un problema de dos cuerpos sobre el que intervienen una serie de fuerzas perturbadoras. Para obtener la solución del problema completo a partir de la del problema de dos cuerpos se utiliza el método de variación de constantes obteniéndose, en el caso de fuerzas conservativas, $\vec{F} = \nabla \mathcal{R}$, las llamadas ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Para los elementos $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ y el potencial perturbador \mathcal{R} estas ecuaciones toman la forma

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}.
 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

A modo de reseña, la aparición del término n fuera de senos o cosenos debe entenderse como una forma abreviada de referirse a $\sqrt{\mu}a^{\frac{3}{2}}$.

En la última ecuación puede observarse que el término n introduce una componente de no linealidad. Con el objetivo de expresar las ecuaciones de forma lineal, se puede realizar el cambio de variable $\sigma = M - nt$. De este modo se tiene que $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}$ y $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dM}{dt} - n$ y las ecuaciones planetarias de *Lagrange* pueden expresarse matricialmente con ayuda de la matriz antisimétrica $L_{\vec{\sigma}}$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ \sigma \end{bmatrix} = L_{\vec{\sigma}} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \right]^t, \quad (4.15)$$

donde $L_{\vec{\sigma}}$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{na} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} & \frac{1-e^2}{na^2e} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} & \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} & \frac{-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{na} & -\frac{1-e^2}{na^2e} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la cual únicamente depende de los llamados elementos métricos, a , e e i .

4.3.3. Pequeñas excentricidades y pequeñas inclinaciones

En las ecuaciones planetarias de *Lagrange* aparecen la excentricidad, e , y el seno de la inclinación, i , como factores en diversos denominadores. Cuando estas variables e o i se aproximan a cero los denominadores de muchos términos crecen indefinidamente y esto puede suponer un inconveniente. Para evitar esta contrariedad se realizan los cambios de variables que se muestran a continuación.

Pequeñas excentricidades

Para el caso de pequeñas excentricidades los cambios a realizar son

$$\begin{cases} \eta = e \sin \omega, \\ \varphi = e \cos \omega, \\ \lambda = M + \omega \end{cases} \quad (4.16)$$

y se tienen las siguientes derivadas

4. Movimiento perturbado

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial\eta}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial\omega} \frac{d\omega}{dt} = \sin\omega \frac{de}{dt} + e \cos\omega \frac{d\omega}{dt}, \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} \frac{d\omega}{dt} = \cos\omega \frac{de}{dt} - e \sin\omega \frac{d\omega}{dt}, \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dM}{dt} + \frac{d\omega}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Con el objetivo de expresar las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de las nuevas variables, el siguiente paso es calcular las parciales $\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial e}$, $\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\omega}$, $\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial M}$ en función de η , φ y λ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial e} &= \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial e} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial e} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial e} = \sin\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} + \cos\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi}, \\
 \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\omega} &= \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\omega} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial\omega} = e \cos\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} - e \sin\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda}, \\
 \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial M} &= \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial M} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial M} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial M} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Para los elementos a , i y Ω se toman las ecuaciones planetarias de *Lagrange* (4.14) y en las ecuaciones correspondientes a $\frac{da}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ y $\frac{d\Omega}{dt}$ se sustituyen las parciales obtenidas en (4.18). Las derivadas de estos elementos quedarán expresadas como

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left(e \cos\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} - e \sin\omega \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial i}.
 \end{aligned} \right. \tag{4.19}$$

Para los nuevos elementos, se parte de (4.17) y se sustituyen las derivadas $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ y $\frac{dM}{dt}$ por sus expresiones en (4.14). Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= \sin \omega \left[\frac{de}{dt} \right] + e \cos \omega \left[\frac{d\omega}{dt} \right] = \sin \omega \left[\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right] \\
 &\quad + e \cos \omega \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= \cos \omega \left[\frac{de}{dt} \right] - e \sin \omega \left[\frac{d\omega}{dt} \right] = \cos \omega \left[\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right] \\
 &\quad - e \sin \omega \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt} = \left[\frac{dM}{dt} \right] + \left[\frac{d\omega}{dt} \right] = \left[n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right],
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

y reemplazando las parciales $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}$ por sus expresiones en (4.18) se llega a

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \omega}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} - \frac{e \cos \omega \cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + \frac{e \sin \omega \cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \left(\sin \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + \cos \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} \right) - \\
 &\quad - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}.
 \end{aligned} \right. \tag{4.21}$$

Finalmente, las ecuaciones completas una vez aplicado el cambio quedan expresadas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}, \\
 \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left(e \cos \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} - e \sin \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \right) \\
 \quad - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\eta}{dt} = -\frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \omega}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} - \frac{e \cos \omega \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{e\sqrt{1-e^2} \cos \omega}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + \frac{e \sin \omega \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \left(\sin \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + \cos \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} \right) - \\
 \quad - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}.
 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Pequeñas inclinaciones

Por otro lado y procediendo de forma análoga, para evitar el problema en caso de pequeñas inclinaciones se usan las variables

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p = \tan i \sin \Omega, \\
 q = \tan i \cos \Omega, \\
 \bar{\omega} = \Omega + \omega.
 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Las correspondientes derivadas son

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \frac{di}{dt} + \tan i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial q}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \frac{di}{dt} - \tan i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Las parciales $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}$ en función de p , q y $\bar{\omega}$ son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial i} = \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q}, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Omega} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \Omega} = \tan i \cos \Omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} \\
 &\quad - \tan i \sin \Omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Para obtener los elementos a , e y M se toman las ecuaciones planetarias de *Lagrange* (4.14) y en las ecuaciones correspondientes a $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ y $\frac{dM}{dt}$ se sustituyen las parciales obtenidas en (4.25). Las derivadas de estos elementos quedarán expresadas como

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}.
 \end{aligned} \right. \tag{4.26}$$

Para los nuevos elementos, se parte de (4.24) y se sustituyen las derivadas $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ y $\frac{d\Omega}{dt}$ por las expresiones que aparecen en (4.14). Se tiene que

4. Movimiento perturbado

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \left[\frac{di}{dt} \right] + \tan i \cos \Omega \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] = \\
 &= \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \left[\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right] \\
 &\quad + \tan i \cos \Omega \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \left[\frac{di}{dt} \right] - \tan i \sin \Omega \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] = \\
 &= \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \left[\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right] \\
 &\quad - \tan i \sin \Omega \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\
 \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] + \left[\frac{d\omega}{dt} \right] = \\
 &= \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right] + \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right].
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Finalmente, sustituyendo las parciales $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}$ por sus expresiones calculadas en (4.25) y simplificando se tiene que

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^3 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} - \frac{\sin \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^3 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} - \frac{\cos \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\cos \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} + \frac{\sin \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}.
 \end{aligned} \right. \tag{4.28}$$

Para finalizar, las nuevas ecuaciones completas una vez aplicado el cambio quedan expresadas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \\
 \frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^3 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} - \frac{\sin \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^3 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} - \frac{\cos \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
 \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\cos \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} + \frac{\sin \Omega \tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}.
 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Capítulo 5

Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

Contenido

5.1. Introducción	81
5.2. Desarrollo en serie de la función de perturbación.	100
5.3. Desarrollo de las derivadas de las coordenadas cartesianas respecto de los elementos keplerianos.	101
5.4. Desarrollo del inverso de la distancia.	104
5.5. Métodos semianalíticos	108
5.6. Consideraciones finales	111

5.1. Introducción

La integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* que se definen en (4.14) es un problema clásico en mecánica celeste. En este capítulo se va a exponer una breve introducción a este tema, pero para un estudio más exhaustivo se recomienda consultar [120].

Como situación de partida se considera un cuerpo primario y otros dos cuerpos —cuyas masas son mucho menores que la masa de éste— de modo que en una primera aproximación cada uno de ellos sigue un movimiento kepleriano con respecto al primario; constituyen, pues, dos problemas de dos cuerpos cuyas órbitas elípticas quedan definidas por los elementos $\vec{\sigma} = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ y $\vec{\sigma}' = (a', e', i', \Omega', \omega', M')$, respectivamente.

Inicialmente, estos elementos, salvo M y M' , son constantes. Por un lado, $M = M_0 + nt$ y $M' = M'_0 + n't$, donde M_0 y M'_0 son las anomalías medias en el instante inicial. Por otro lado, n y n' son los movimientos medios de los problemas de dos cuerpos correspondientes a los problemas primario–cuerpo1 y primario–cuerpo2.

Como es conocido, esta primera aproximación no es exacta porque los cuerpos 1 y 2 se atraen mutuamente e introducen cierta perturbación en el sistema; esto hace que todos los elementos que definen las órbitas $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ y $(a', e', i', \Omega', \omega', M')$ dependan de t . Así, se tiene que en el problema perturbado los elementos varían con el tiempo y en un instante t se tienen los elementos $(a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), M(t))$ y $(a'(t), e'(t), i'(t), \Omega'(t), \omega'(t), M'(t))$, que reciben el nombre de elementos osculadores. En $M(t)$ y $M'(t)$ se considera la variación de $M_0(t)$ y $M'_0(t)$ además de la variación inducida en n y n' por a y a' .

Estos elementos osculadores fueron obtenidos por *Lagrange* [120] a partir del método de variación de constantes de modo que la variación de estos con respecto al tiempo, como ya se vio en el punto (4.15), puede escribirse en forma matricial como

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = L_{\vec{\sigma}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vec{\sigma}}, \quad (5.1)$$

donde $L_{\vec{\sigma}}$ es la matriz introducida en (4.15); es una matriz que depende únicamente del semieje mayor de la órbita, a , de la excentricidad, e , y de la inclinación, i .

Para $\vec{\sigma}'$ se obtienen ecuaciones similares

$$\frac{d\vec{\sigma}'}{dt} = L'_{\vec{\sigma}'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \vec{\sigma}'}, \quad (5.2)$$

y ambas se deben integrar conjuntamente, en particular para órdenes de perturbación mayores que uno.

Por otra parte, la variación de los elementos con respecto al tiempo es pequeña, pues es del orden de $\frac{m_i}{m_0}$ siendo m_0 la masa del primario que es absolutamente dominante y, por tanto

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \delta_1 a_0 + \dots, \\ e(t) &= e_0 + \delta_1 e_0 + \dots, \\ i(t) &= i_0 + \delta_1 i_0 + \dots, \\ \Omega(t) &= \Omega_0 + \delta_1 \Omega_0 + \dots, \\ \omega(t) &= \omega_0 + \delta_1 \omega_0 + \dots, \\ M(t) &= M_0 + \delta_1 M_0 + \dots \end{aligned}$$

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

Las cantidades $\delta_1 a_0$, $\delta_1 e_0$, $\delta_1 i_0$, $\delta_1 \Omega_0$, $\delta_1 \omega_0$ y $\delta_1 M_0$ se denominan perturbaciones de primer orden de a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 , ω_0 y M_0 , respectivamente. Otros términos de orden k de la masa perturbadora de la forma $\delta_k a_0$, $\delta_k e_0$, $\delta_k i_0$, $\delta_k \Omega_0$, $\delta_k \omega_0$ y $\delta_k M_0$ se denominan perturbaciones de k -ésimo orden.

El método que se sigue para integrar las ecuaciones planetarias de *Lagrange* es el de las iteraciones sucesivas de *Picard* [48] [51], [124]; en primer lugar, se aproximan los segundos miembros por el valor que tomarían si se sustituyen los elementos keplerianos.

La integración que debe hacerse en las distintas iteraciones es en la forma inicial de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* y no es posible realizarla directamente mediante cuadraturas. Para poder llevar a cabo esta integración es necesario obtener el desarrollo de \mathcal{R} en forma de serie de *Fourier* en las anomalías medias $M = M_0 + nt$ y $M' = M'_0 + n't$ obteniéndose, como se verá en secciones posteriores, un desarrollo integrable de la forma

$$\mathcal{R} = \sum C \cos D, \quad (5.3)$$

donde $C = C(a, a', e, e', i, i')$ es una función que depende de los semiejes mayores de las órbitas, de las excentricidades y de las inclinaciones del cuerpo 1 y del cuerpo 2 y $D = sM + s'M' + k\Omega + k'\Omega' + j\omega + j'\omega'$, donde $s, s', k, k', j, j' \in \mathbb{Z}$. Así pues

$$\mathcal{R} = \sum_{\substack{s, s'=1 \\ j, j'=1 \\ k, k'=1}}^{\infty} C(a, a', e, e', i, i') \cos \left[s \underbrace{(nt + M_0)}_M + s' \underbrace{(n't + M'_0)}_{M'} + k\Omega + k'\Omega' + j\omega + j'\omega' \right]. \quad (5.4)$$

Obviamente, en los cálculos reales la serie (5.4) será truncada en un punto en el que se alcance suficiente aproximación.

El cálculo de las derivadas parciales de este potencial, \mathcal{R} , con respecto a los elementos e , i , Ω , ω y M_0 , nótese que $\frac{\partial}{\partial M_0} = \frac{\partial}{\partial M}$, no presenta dificultades. Estas derivadas tendrán una forma similar a la de \mathcal{R} sustituyendo en algunos casos las funciones seno por coseno.

Sin embargo, la derivada con respecto al semieje a presenta el siguiente problema:

Sea $D = s(nt + M_0) + s'(n't + M'_0) + k\Omega + k'\Omega' + j\omega + j'\omega'$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \sum C \cos D \\
 &= \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial a} \cos D - C \sin D \frac{\partial D}{\partial a} \right\} \\
 &= \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial a} \cos D - C \sin D \frac{\partial D}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial a} \right\} \\
 &= \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial a} \cos D - C \sin D s t \frac{\partial n}{\partial a} \right\}.
 \end{aligned}$$

La derivada parcial $\frac{\partial n}{\partial a}$ se determina a partir de la relación $n^2 a^2 = cte$. Se tiene entonces que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} = \sum \frac{\partial C}{\partial a} \cos D - t \frac{dn}{da} \sum s C \sin D. \quad (5.5)$$

En la expresión anterior puede verse que t aparece fuera de las funciones trigonométricas y este hecho supone un grave inconveniente porque hará crecer t indefinidamente y, por tanto, las variaciones que sufrirán los elementos en los segundos miembros de las ecuaciones planetarias en las que aparezca $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$ no se podrá asegurar que permanezcan pequeñas.

Para eliminar este problema y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \sum C (-\sin D) \frac{\partial D}{\partial M} = - \sum C s \sin D \frac{\partial D}{\partial M},$$

se observa que (5.5) puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} = \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) + t \frac{dn}{da} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \quad (5.6)$$

donde el símbolo $()$ indica que en la expresión $\sum C \cos D$ no se derivan los cosenos con respecto al semieje.

Si se sustituye (5.6) en la ecuación planetaria de *Lagrange* correspondiente al elemento M , resulta, siendo $M = nt + \sigma$, que

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\
 &= -\frac{2}{na} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} t \frac{dn}{da} \right] - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\
 &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} t \frac{dn}{da} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ahora bien, sabiendo que $\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}$, se tiene que

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{da} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \frac{dn}{da}, \tag{5.8}$$

por tanto se puede reescribir (5.7) como

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) - t \frac{dn}{dt} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$$

y de aquí

$$\frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}. \tag{5.9}$$

La observación del primer término de (5.9) lleva a introducir un nuevo elemento, ε , mediante la relación

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt},$$

la cual, integrando entre 0 y t, resulta en la expresión

$$\varepsilon - \varepsilon(0) = \sigma - \sigma(0) + \int_0^t t \frac{dn}{dt} dt.$$

Esta última integral, teniendo en cuenta que $\varepsilon(0) = \sigma(0) = M(0)$, se puede desallorar por partes

$$\varepsilon = \sigma + nt - \int_0^t n dt$$

y de aquí

$$M = \varepsilon + \int_0^t n dt = \sigma + nt. \quad (5.10)$$

El cambio de variable en las series es sencillo, pues bastará cambiar $nt + \sigma$ por $\int n dt + \varepsilon$. Por otra parte se tiene que $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon}$ con lo que las ecuaciones planetarias serán las mismas sin más que realizar los cambios

$$\begin{aligned} \sigma &\longmapsto \varepsilon, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} &\longmapsto \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Con estas nuevas variables no aparece t fuera de senos y cosenos con lo que se elimina el inconveniente planteado en (5.5). También es habitual el uso de la notación $\rho = \int n dt$ y así $n = \frac{d\rho}{dt}$.

En la sucesiva explicación de este punto, y a fin de no recargar la notación utilizada, cuando aparezca la expresión $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$, se asumirá $\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right)$.

Con la nueva variable, ε , introducida y para simplificar el proceso de integración se van a considerar únicamente dos planetas, cuerpo-1 y cuerpo-2, que se denotarán por P y P' . Una vez introducido el cambio expuesto en (5.10), para integrar las ecuaciones planetarias y poder determinar los elementos keplerianos será necesario integrar el sistema de 12 ecuaciones simultáneas que se muestra en (5.12). Es importante mencionar que las ecuaciones que componen el sistema no se pueden desacoplar; esto es debido a que los potenciales \mathcal{R} y \mathcal{R}' dependen de los elementos de los dos planetas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon} - \dots \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \dots \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \dots \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \dots \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{da'}{dt} = \frac{2}{n'a'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \varepsilon'} \\ \frac{de'}{dt} = \frac{1-(e')^2}{n'(a')^2 e'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \varepsilon'} - \dots \\ \frac{di'}{dt} = \frac{\cos i'}{n'(a')^2 \sqrt{1-(e')^2} \sin i'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \omega'} - \dots \\ \frac{d\omega'}{dt} = \frac{\sqrt{1-(e')^2}}{n'(a')^2 e'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial e'} - \dots \\ \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{1}{n'(a')^2 \sqrt{1-(e')^2} \sin i'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial i'} \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{2}{n'a'} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial a'} - \dots \end{array} \right. \quad (5.12)$$

En estas ecuaciones $\mathcal{R} = \sum C \cos D$ y $\mathcal{R}' = \sum C' \cos D'$; nótese que $D = D'$, pero $C' = C'(a, a', e, e', i, i')$ es distinta a C .

Los segundos miembros de las ecuaciones expuestas en (5.12), teniendo en cuenta el desarrollo de \mathcal{R} indicado en (5.3), son cantidades pequeñas, pues C y C' engloban las masas m y m' de los planetas P, P' , que son pequeñas en comparación con la del primario; por tanto, se buscarán

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \dots + \delta_k a_0 + \dots, \\ a' &= a'_0 + \delta_1 a'_0 + \delta_2 a'_0 + \dots + \delta_k a'_0 + \dots, \\ &\vdots \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_2 \varepsilon_0 + \dots + \delta_k \varepsilon_0 + \dots, \\ \varepsilon' &= \varepsilon'_0 + \delta_1 \varepsilon'_0 + \delta_2 \varepsilon'_0 + \dots + \delta_k \varepsilon'_0 + \dots, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde los valores $a_0, a'_0, \dots, \varepsilon_0, \varepsilon'_0$ son constantes obtenidas a partir de la observación mediante las técnicas de observación de órbitas y $\delta_1 a_0, \dots, \delta_k a_0, \dots, \delta_k \varepsilon'_0$ son cantidades de orden k en m y en m' .

Para la integración del sistema (5.12) también se debe obtener una expresión adecuada de

$$n = \boxed{n_0} + \boxed{\delta_1 n_0} + \boxed{\delta_2 n_0} + \dots \quad (5.14)$$

Para ello se procederá de la manera indicada a continuación.

Partiendo de la dependencia entre el movimiento medio y el semieje, $n = \sqrt{\mu} a^{-3/2}$, se verificarán las relaciones

$$\begin{aligned} n_0 &= \sqrt{\mu} a_0^{-3/2} \\ n_0 + \delta_1 n_0 &= \sqrt{\mu} (a_0 + \delta_1 a_0)^{-3/2} \\ n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 &= \sqrt{\mu} (a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0)^{-3/2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.15)$$

De la primera igualdad en (5.15) se obtiene directamente

$$\boxed{n_0} = \sqrt{\mu} a_0^{-3/2}. \quad (5.16)$$

En la segunda igualdad, si se desarrolla en serie de *Taylor* el binomio $(a_0 + \delta_1 a_0)^{-3/2}$ y se toman los términos de orden 1, se tiene que

$$\begin{aligned} n_0 + \delta_1 n_0 &= \sqrt{\mu} (a_0 + \delta_1 a_0)^{-3/2} \\ &= \sqrt{\mu} a_0^{-3/2} \left(1 + \frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^{-3/2} \\ &= \underbrace{\sqrt{\mu} a_0^{-3/2}}_{n_0} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right) \\ &= n_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right) \\ &= n_0 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} n_0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

y, por tanto, simplificando se obtiene que

$$\boxed{\delta_1 n_0} = -\frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} n_0 \quad (5.18)$$

Para obtener $\delta_2 n_0$ se parte de la tercera ecuación de (5.15) y, siguiendo el mismo procedimiento, se desarrolla el trinomio en serie de *Taylor* descartando los términos de orden distinto a 2. Así, se tiene que

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\begin{aligned}
 n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 &= \sqrt{\mu} (a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0)^{-3/2} \\
 &= \sqrt{\mu} a_0^{-3/2} \left[1 + \frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} \right]^{-3/2} \\
 &= \underbrace{\sqrt{\mu} a_0^{-3/2}}_{n_0} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} \right) + \frac{15}{8} \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2 \right] \\
 &= n_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} - \frac{3}{2} \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8} \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2 \right] \\
 &= n_0 - \underbrace{\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_1 a_0}{a_0}}_{\delta_1 n_0} - \frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8} n_0 \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

para el término $\delta_2 n_0$ se tendrá que

$$n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 = n_0 + \delta_1 n_0 - \frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8} n_0 \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2$$

y simplificando se obtiene

$$\boxed{\delta_2 n_0} = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8} n_0 \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2. \tag{5.20}$$

Este proceso se repite hasta obtener el orden que sea requerido. Para finalizar, las expresiones calculadas en (5.16), (5.18) y (5.20) se sustituyen en (5.15) y se obtiene el desarrollo completo de n .

También será necesario el desarrollo

$$\rho = \rho_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_2 \rho_0 + \cdots + \delta_k \rho_0 + \cdots$$

y se tendrá que

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= \int_0^t n_0 dt = n_0 t \\
 \delta_1 \rho_0 &= \int_0^t \delta_1 n_0 dt \\
 &\vdots \\
 \delta_k \rho_0 &= \int_0^t \delta_k n_0 dt,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde $\delta_k \rho_0$ es de orden k en las masas.

Siguiendo los mismos procedimientos, se obtienen los desarrollos correspondientes a las magnitudes n' y ρ' .

Para continuar con el proceso de integración se consideran en la función del potencial perturbador $\mathcal{R}(a, e, \dots, a', e', \dots, \varepsilon')$ únicamente cantidades de primer orden, es decir, se sustituirán las cantidades constantes $a_0, e_0, \dots, \varepsilon'_0$ por sus perturbaciones correspondientes de primer orden, $\delta_1 a_0, \delta_1 e_0, \dots, \delta_1 \varepsilon_0$. Así, quedará

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_0 &= \mathcal{R}(a_0, e_0, \dots, a'_0, e'_0, \dots, \varepsilon'_0) = \sum C_0 \cos D_0, \\
 \mathcal{R}'_0 &= \mathcal{R}'(a_0, e_0, \dots, a'_0, e'_0, \dots, \varepsilon'_0) = \sum C'_0 \cos D'_0,
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde

$$\begin{aligned}
 D_0 &= s(n_0 t + \varepsilon_0) + s'(n'_0 t + \varepsilon'_0) + k\Omega_0 + k'\Omega'_0 + j\omega + j'\omega'_0, \\
 C_0 &= C_0(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0), \\
 D'_0 &= D_0, \\
 C'_0 &= C'_0(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0).
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Con esto, las ecuaciones planteadas en (5.12) para el planeta P quedarán de la forma

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta_1 a_0}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0}, \\ \frac{d\delta_1 e_0}{dt} = \frac{1 - e_0^2}{n_0 a_0^2 e_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0} - \frac{\sqrt{1 - (e_0)^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0}, \\ \frac{d\delta_1 i_0}{dt} = \frac{\cos i_0}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} - \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0}, \\ \frac{d\delta_1 \omega_0}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial e_0} - \frac{\cos i_0}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0}, \\ \frac{d\delta_1 \Omega_0}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0}, \\ \frac{d\delta_1 \varepsilon_0}{dt} = -\frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial a_0} - \frac{1 - e_0^2}{n_0 a_0^2 e_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial e_0} \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Para continuar, por claridad y con el objetivo de ilustrar el método se van a considerar únicamente las perturbaciones correspondientes a a_0 y Ω_0 ; para el resto de elementos se procede de forma análoga.

Nótese que en este caso los segundos miembros de las ecuaciones planteadas en (5.24) son funciones conocidas de t , por tanto, integrando entre 0 y t se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 a_0 = \frac{2}{n_0 a_0} \int \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0} dt \\ \delta_1 \Omega_0 = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \int \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} dt \\ \vdots \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Si se sigue un procedimiento análogo para el planeta P' , se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 a'_0 = \frac{2}{n'_0 a'_0} \int \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial \varepsilon'_0} dt \\ \delta_1 \Omega'_0 = \frac{1}{n'_0 (a'_0)^2 \sqrt{1 - (e'_0)^2} \sin i'_0} \int \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial i'_0} dt \\ \vdots \end{array} \right. \quad (5.26)$$

Desde un punto de vista analítico, todas las cuadraturas dependen en realidad de una sola, pues

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial a_0} dt &= \frac{\partial}{\partial a_0} \int \mathcal{R}_0 dt \\
 \int \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} dt &= \frac{\partial}{\partial \Omega_0} \int \mathcal{R}_0 dt \\
 &\vdots \\
 \int \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial a'_0} dt &= \frac{\partial}{\partial a'_0} \int \mathcal{R}'_0 dt \\
 \int \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial \Omega'_0} dt &= \frac{\partial}{\partial \Omega'_0} \int \mathcal{R}'_0 dt \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

En este punto del proceso de integración es importante señalar que \mathcal{R}_0 y \mathcal{R}'_0 son funciones muy complicadas de $a_0, e_0, \dots, \varepsilon'_0$ y del tiempo. Por ese motivo, para integrar las ecuaciones (5.25) y (5.26) se puede proceder por métodos numéricos, pero con ello se pierde información sobre el conocimiento analítico del movimiento. Por ello, en las teorías planetarias se recurre a los desarrollos analíticos de \mathcal{R}_0 y \mathcal{R}'_0 mediante series trigonométricas. Así, se tiene que las parciales respecto a los elementos de los dos planetas son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0} &= - \sum s C_0 \sin D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial \varepsilon'_0} &= - \sum s' C'_0 \sin D'_0, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial i_0} &= \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial i'_0} &= \sum \frac{\partial C'_0}{\partial i'_0} \cos D'_0, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \omega_0} &= - \sum j C_0 \sin D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial \omega'_0} &= - \sum j' C'_0 \sin D'_0, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Omega_0} &= - \sum k C_0 \sin D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial \Omega'_0} &= - \sum k' C'_0 \sin D'_0, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial a_0} &= \sum \frac{\partial C_0}{\partial a_0} \cos D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial a'_0} &= \sum \frac{\partial C'_0}{\partial a'_0} \cos D'_0, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial e_0} &= \sum \frac{\partial C_0}{\partial e_0} \cos D_0, & \frac{\partial \mathcal{R}'_0}{\partial e'_0} &= \sum \frac{\partial C'_0}{\partial e'_0} \cos D'_0,
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

donde C_0, C'_0 y $D_0 = D'_0$ son de la forma indicada en (5.23).

Sustituyendo los desarrollos obtenidos en (5.27) en (5.25) y en (5.26) se tiene que

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\begin{cases} \delta_1 a_0 = -\frac{2}{n_0 a_0} \sum \left\{ s C_0 \int \sin D_0 dt \right\}, \\ \delta_1 \Omega_0 = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2 \sin i_0}} \sum \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \int \cos D_0 dt \right\}, \\ \vdots \end{cases} \quad (5.28)$$

Es fácil reparar en que las ecuaciones escritas no contienen más que las cuadraturas $\int \sin D_0 dt$ y $\int \cos D_0 dt$, y, teniendo en cuenta la expresión de D_0

$$\begin{aligned} \int \sin D_0 dt &= -\frac{\cos D_0}{s n_0 + s' n'_0}, \\ \int \cos D_0 dt &= \frac{\sin D_0}{s n_0 + s' n'_0}; \end{aligned} \quad (5.29)$$

sustituyendo (5.29) en (5.28) se tiene para finalizar que

$$\begin{cases} \delta_1 a_0 = \frac{2}{n_0 a_0} \sum s C_0 \frac{\cos D_0}{s n_0 + s' n'_0}, \\ \delta_1 \Omega_0 = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2 \sin i_0}} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \frac{\sin D_0}{s n_0 + s' n'_0}, \\ \vdots \end{cases} \quad (5.30)$$

Estos resultados constituyen la solución en primer orden de perturbación del sistema planteado en (5.12). Se tiene, pues, que la solución es de la forma

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \cdots + \delta_k a_0 + \cdots, \\ a' &= a'_0 + \delta_1 a'_0 + \delta_2 a'_0 + \cdots + \delta_k a'_0 + \cdots, \\ &\vdots \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_2 \varepsilon_0 + \cdots + \delta_k \varepsilon_0 + \cdots, \\ \varepsilon' &= \varepsilon'_0 + \delta_1 \varepsilon'_0 + \delta_2 \varepsilon'_0 + \cdots + \delta_k \varepsilon'_0 + \cdots \end{aligned} \quad (5.31)$$

En (5.30) cada término $C_0 \cos D_0$ del desarrollo de \mathcal{R}_0 da lugar a los términos correspondientes en la perturbación de los elementos —que en astronomía se suelen llamar desigualdades—. Como se analizará a continuación con mayor detalle, estas desigualdades se clasifican en periódicas, seculares y de largo periodo.

Desigualdades periódicas

En el caso de $sn_0 + s'n'_0 \neq 0$ se tendrá una desigualdad de periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{sn_0 + s'n'_0}$$

o, si se escribe

$$T_0 = \frac{2\pi}{n_0}, \quad T'_0 = \frac{2\pi}{n'_0},$$

se tiene

$$\frac{1}{T_1} = \frac{s}{T_0} + \frac{s'}{T'_0};$$

puesto que los coeficientes C_0 disminuyen muy deprisa con s y s' —si las excentricidades son pequeñas, las series anteriores son rápidamente convergentes— no aparecerán, en principio, desigualdades significativas. El caso en que $|sn_0 + s'n'_0|$ resulte una cantidad muy pequeña distinta de cero, dará lugar a términos de periodo muy largo que se estudiará posteriormente.

Desigualdades seculares

Cuando $sn_0 + s'n'_0 = 0$, en el desarrollo de \mathcal{R} aparecen términos que tienen la forma $\bar{D}_0 = s\varepsilon_0 + s'\varepsilon'_0 + k\Omega_0 + k'\Omega'_0 + j\omega_0 + j'\omega'_0$, es decir, términos en los que no aparece el tiempo, por tanto

$$\int \sin \bar{D}_0 dt = t \sin D_0,$$

$$\int \cos \bar{D}_0 dt = t \cos D_0.$$

Si se consideran los términos en los que no aparece el tiempo, la suma de todos ellos no es función de M y, por tanto, considerando que $\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial M_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0}$, se tiene que $\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varepsilon_0} = 0$. Con esto se observa que en primer orden de perturbación se tiene que la derivada del semieje menor con respecto al tiempo no contiene términos en los que no aparece t

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\begin{aligned}\delta_1 a_0 &= 0, \\ \delta_1 \Omega_0 &= \frac{t}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0, \\ &\vdots\end{aligned}$$

donde el sumatorio depende de los índices k, k', j, j' . Esto conduce al importante resultado debido a *Laplace*, el cual establece que en primer orden de perturbación el semieje, a , no contiene desigualdades seculares.

Respecto al movimiento medio, se tiene

$$\delta_1 n_0 = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_1 a_0}{a_0} = 0$$

La ausencia de desigualdades seculares en el semieje y movimiento medio en primer orden constituye el teorema de invariabilidad de semiejes y movimientos medios [120].

Desigualdades de largo periodo

En el caso de que la igualdad $sn_0 + s'n'_0 = 0$ sólo se verifique en el supuesto de que $s = s' = 0$, es decir, en el caso en que $\frac{n_0}{n'_0}$ no sea racional, se tendrá que $\frac{n_0}{n'_0}$ podrá aproximarse tanto como se quiera a un racional. Este hecho puede dar lugar a cantidades $sn_0 + s'n'_0$ pequeñas con respecto a las cantidades n_0, n'_0 , lo cual da lugar a periodos $T_1 = \frac{2\pi}{sn_0 + s'n'_0}$ muy grandes en comparación con T_0 o T'_0 .

Estas desigualdades juegan un importante papel en las teorías planetarias causando importantes perturbaciones, sobre todo en la longitud media. La longitud media, l , es $l = \rho + \varepsilon + \bar{\omega}$ y, al igual que el resto de elementos, se puede aproximar por

$$l = l_0 + \delta_1 l_0 + \delta_2 l_0 + \dots,$$

donde

$$\begin{aligned}l_0 &= n_0 t + \varepsilon_0 + \bar{\omega}_0, \\ \delta_1 l_0 &= \delta_1 \rho_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_1 \bar{\omega}_0, \\ \delta_2 l_0 &= \delta_2 \rho_0 + \delta_2 \varepsilon_0 + \delta_1 \bar{\omega}_0, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta (5.21), (5.29) y (5.30), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \rho_0 &= \int \delta_1 n_0 \, dt \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int \delta_1 a_0 \, dt \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int \left(\frac{2}{n_0 a_0} \sum s C_0 \frac{\cos D_0}{sn_0 + s'n'_0} \right) dt \\
 &= -\frac{3}{a_0^2} \sum \frac{s C_0}{sn_0 + s'n'_0} \int \cos D_0 \, dt \\
 &= -\frac{3}{a_0^2} \sum \frac{s C_0}{(sn_0 + s'n'_0)^2} \sin D_0.
 \end{aligned}$$

Se observa que en la perturbación de $\delta_1 \rho_0$ —y por tanto también en la de $\delta_1 l_0$ — aparece el pequeño denominador $sn_0 + s'n'_0$ al cuadrado, lo que hace que $\delta_1 \rho_0$ sea una cantidad más grande. Éste es uno de los principales problemas de la teoría de perturbación.

Un modo de buscar los pequeños denominadores consiste en desarrollar $\frac{n_0}{n'_0}$ en fracción continua y considerar las sucesiones de numeradores y denominadores de las sucesiones reducidas $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ $\{s'_1, s'_2, \dots, s'_n, \dots\}$, donde los s'_k son los numeradores de las reducidas y s_k los denominadores cambiados de signo.

Si para lograr cantidades pequeñas respecto a n_0, n'_0 es preciso tomar s, s' muy grandes (en valor absoluto), las desigualdades respectivas serán pequeñas, pues los numeradores C_0 serán pequeños. Si, por el contrario, hay relaciones próximas a cero para s y s' pequeños, habrá importantes desigualdades de largo periodo.

Desigualdades de segundo orden y superiores

Las desigualdades que se obtienen en primer orden no son, por lo general, suficientes para obtener una teoría planetaria de suficiente precisión; para solucionar este problema es necesario establecer las perturbaciones de segundo u órdenes superiores o, al menos, las más importantes de éstas.

En esta memoria únicamente se pretende hacer una aproximación superficial a las teorías de órdenes superiores; para una lectura más en profundidad se recomienda la consulta de las obras [53], [120].

La teoría de segundo orden se construye siguiendo los siguientes pasos.

Si se parte de la solución por aproximaciones que se introdujo en (5.13), se tiene

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

que las soluciones en segundo orden de perturbación buscadas serán de la forma recuadrada

$$\begin{aligned}
 \boxed{a} &= a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \cdots + \delta_k a_0 + \cdots, \\
 \boxed{a'} &= a'_0 + \delta_1 a'_0 + \delta_2 a'_0 + \cdots + \delta_k a'_0 + \cdots, \\
 &\vdots \\
 \boxed{\varepsilon} &= \varepsilon_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_2 \varepsilon_0 + \cdots + \delta_k \varepsilon_0 + \cdots, \\
 \boxed{\varepsilon'} &= \varepsilon'_0 + \delta_1 \varepsilon'_0 + \delta_2 \varepsilon'_0 + \cdots + \delta_k \varepsilon'_0 + \cdots
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Para ilustrar el método se va a considerar, a modo de ejemplo, la ecuación asociada al nodo ascendente, Ω , por tanto se tendrá que

$$\Omega = \Omega_0 + \delta_1 \Omega_0 + \delta_2 \Omega_0 + \cdots + \delta_k \Omega_0 + \cdots, \tag{5.33}$$

donde Ω_0 es la solución para Ω correspondiente al problema no perturbado de dos cuerpos, $\delta_1 \Omega_0$ son los términos en primer orden en las masas perturbadoras, $\delta_2 \Omega_0$ los de segundo y el resto son los correspondientes a los órdenes superiores. Se tiene que, en general, Ω es una función de los elementos $\vec{\sigma}$ y $\vec{\sigma}'$ y del tiempo, y la ecuación planetaria correspondiente a Ω puede escribirse como

$$\frac{d\Omega}{dt} = F(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}', t),$$

por tanto, cambiando Ω por su expresión en (5.33), se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\Omega_0 + \delta_1 \Omega_0 + \delta_2 \Omega_0 + \cdots + \delta_k \Omega_0 + \cdots \right) = F(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}', t), \tag{5.34}$$

Como primera aproximación se consideran en (5.34) únicamente los términos de primer orden en las masas, se tiene que

$$\frac{d}{dt} (\delta_1 \Omega_0) = F(\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}'_0, t), \tag{5.35}$$

donde $\vec{\sigma}_0$ y $\vec{\sigma}'_0$ son los elementos keplerianos asociados a los astros P y P' .

Si se integra (5.35), se obtiene $\delta_1 \Omega_0$ y con esta solución se consigue $\Omega = \Omega_0 + \delta_1 \Omega_0$, que supone una mejor aproximación a Ω que el valor inicial de Ω_0 .

El segundo paso es considerar en (5.34) los términos de segundo orden; se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\delta_1\Omega_0) + \frac{d}{dt}(\delta_2\Omega_0) = F(\vec{\sigma} + \delta_1\vec{\sigma}, \vec{\sigma}' + \delta_1\vec{\sigma}', t), \quad (5.36)$$

donde $\vec{\sigma} + \delta_1\vec{\sigma}$ es una forma abreviada de escribir las expresiones resaltadas en (5.31).

En (5.36) se debe expresar F de la forma

$$F(\vec{\sigma} + \delta_1\vec{\sigma}, \vec{\sigma}' + \delta_1\vec{\sigma}', t) = F(\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}'_0, t) + F_1(\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}'_0, t),$$

de forma que F_1 englobe a los términos de segundo orden en las masas. La expresión de F_1 será

$$\begin{aligned} F_1(\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}'_0, t) &= F_1(a_0, \dots, \varepsilon_0, a'_0, \dots, \varepsilon'_0, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{(a_0, \dots, \varepsilon_0, a'_0, \dots, \varepsilon'_0)} \delta_1 a_0 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \Big|_{(a_0, \dots, \varepsilon_0, a'_0, \dots, \varepsilon'_0)} \delta_1 \varepsilon_0 + \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial a'} \Big|_{(a_0, \dots, \varepsilon_0, a'_0, \dots, \varepsilon'_0)} \delta_1 a'_0 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'} \Big|_{(a_0, \dots, \varepsilon_0, a'_0, \dots, \varepsilon'_0)} \delta_1 \varepsilon'_0. \end{aligned}$$

El último paso para obtener $\delta_2\Omega_0$ es integrar la ecuación

$$\frac{d\delta_2\Omega_2}{dt} = F_1(\vec{\sigma}_0, \vec{\sigma}'_0, t). \quad (5.37)$$

Nótese que para realizar la integración es conveniente realizar los productos de los desarrollos de las parciales de F respecto a los elementos y las perturbaciones de primer orden de los elementos $\delta_1 a_0, \dots, \delta_1 \varepsilon'_0$ para así expresar el segundo miembro en una forma cómoda para la integración. Conviene resaltar que en una teoría de segundo orden aparece un inconveniente añadido; pueden surgir términos en $\delta_1\Omega_0, \delta_1\omega_0, \dots$, donde las amplitudes contengan expresiones de la forma At^m y $A't^{m'}$, los

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

cuales únicamente son pequeños en un determinado intervalo temporal y la serie de *Taylor* únicamente converge para valores pequeños de $\delta_1\rho_0, \dots, \delta_1e_0, \dots, \delta_1\rho'_0, \dots, \delta_1\omega'_0$. Estas series en cuyos coeficientes aparecen explícitamente potencias de t son las llamadas series de *Poisson*.

El intervalo para el que es útil el procedimiento comprende varios miles de años, lo cual es suficiente para las necesidades actuales de la astronomía.

Resolviendo (5.37) se han conseguido las soluciones en segundo orden de perturbación que se encuentran recuadradas en (5.32).

Este proceso de integración sucesiva se repite hasta llegar al orden de perturbación deseado.

Las teorías planetarias *VSOP87*¹ [16] hacen uso de hasta sexto orden, pero existen otras teorías más precisas de hasta octavo, décimo o incluso de órdenes superiores de perturbación en las masas.

En este apartado introductorio se han descrito las técnicas básicas y procedimientos utilizados en la integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*, indicando especialmente en el primer orden de perturbación. En la sección 5.2 se va a exponer con mayor grado de detalle el modo de obtener el desarrollo en forma de *Fourier* de los segundos miembros de dichas ecuaciones. Va a ser necesario transformar varios tipos de expresiones. Por un lado, los coeficientes de las parciales del potencial perturbador —que como se ha visto en esta introducción pasan a ser términos dependientes del tiempo en el problema completo—; por otro lado, las propias parciales del potencial perturbador 5.3 —para las que serán necesarios los desarrollos de *Hansen* estudiados previamente en el punto 3.4—; y para finalizar, el inverso de la distancia 5.4. Este último es un problema clásico en mecánica celeste; el desarrollo analítico del inverso de la distancia entre dos astros, el cual es uno de los procesos más dificultosos en cuanto a complejidad computacional. Sobre él, y como punto final del presente capítulo, se introduce un método alternativo a la obtención de dicho desarrollo, pero esta vez haciendo uso de métodos semianalíticos para conseguir aproximaciones funcionales en forma de doble serie de *Fourier*; será el punto 5.5.

¹*VSOP87* es una teoría planetaria analítica construida por *P. Bretagnon* y *G. Francou*. Las siglas *VSOP* hacen referencia a variaciones seculares de las órbitas planetarias; en su versión 87, los autores mejoran sustancialmente los resultados expuestos en una versión previa. Los archivos *VSOP87* contienen las soluciones analíticas correspondientes al movimiento de los planetas del Sistema Solar y del par Tierra–Luna. Actualmente existen versiones más modernas y con mayor precisión.

5.2. Desarrollo en serie de la función de perturbación.

En este apartado se aborda con detalle el conjunto de técnicas que permite el desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Como puede verse, en el segundo miembro de las ecuaciones descritas en (4.14) aparece repetidamente el término $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vec{\sigma}}$, donde \mathcal{R} representa el potencial perturbador y $\vec{\sigma}$ un elemento genérico

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \right], \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \right] - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right], \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right] - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right], \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \right] - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \right], \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right] - \frac{1-e^2}{na^2e} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \right]. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

Para estudiar la variación temporal de los elementos $\vec{\sigma}$ de un planeta P deben desarrollarse las derivadas respecto de los elementos de P del potencial perturbador, \mathcal{R} , que se introdujo en (4.6), el cual viene dado por la expresión

$$\mathcal{R} = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{(r')^3} \right),$$

donde Δ es la distancia entre el planeta P y el planeta perturbador P' y $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}' = (x', y', z')$ los vectores de posición del secundario y de la masa perturbadora, respectivamente.

En la función de perturbación sólo aparecen los elementos de P a través de las coordenadas (x, y, z) , por lo tanto, el cálculo de las derivadas parciales de \mathcal{R} respecto de un elemento genérico σ_i se efectuará como

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma_i}. \quad (5.39)$$

Con ello, dados dos planetas P y P' es necesario, en primer lugar, obtener los valores de las derivadas de las coordenadas cartesianas para después proceder al desarrollo de éstas; en segundo lugar, se necesitará obtener el desarrollo de las derivadas parciales del potencial perturbador con respecto a las coordenadas para proceder así a su desarrollo.

Las derivadas del potencial perturbador con respecto a las coordenadas viene dadas por la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} = G m' \left(\frac{x'_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{x'_i}{(r')^3} \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (5.40)$$

donde x_i denota x, y, z según el valor de i . Para desarrollar esta última expresión, además de utilizar los resultados obtenidos para desarrollos en el problema de dos cuerpos, se requiere desarrollar el inverso de la distancia.

En los siguientes epígrafes se aborda el desarrollo de los distintos términos para el caso de tomar elementos keplerianos $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ y $(a', e', i', \Omega', \omega', M')$ para ambos planetas, así como del desarrollo del inverso de la distancia.

5.3. Desarrollo de las derivadas de las coordenadas cartesianas respecto de los elementos keplerianos.

Como ya se vio anteriormente, para la obtención del desarrollo de la función de perturbación en función de los elementos resulta necesaria la evaluación de las derivadas de las coordenadas cartesianas en función de dichos elementos. Tomando como variable angular la anomalía verdadera, dichas coordenadas vienen expresadas como:

$$\begin{aligned} x &= P_x r \cos V + Q_x r \sin V, \\ y &= P_y r \cos V + Q_y r \sin V, \\ z &= P_z r \cos V + Q_z r \sin V, \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.3. Desarrollo de las derivadas de las coord. cartes...

donde P_x , P_y y P_z vienen dadas por (2.50). De modo más explícito.

$$\begin{aligned}
 x &= (\cos \Omega \cos \omega - \cos i \sin \Omega \sin \omega) r \cos V + \\
 &\quad + (-\cos \Omega \sin \omega - \cos i \sin \Omega \cos \omega) r \sin V, \\
 y &= (\sin \Omega \cos \omega - \cos i \cos \Omega \sin \omega) r \cos V + \\
 &\quad + (-\sin \Omega \sin \omega - \cos i \cos \Omega \cos \omega) r \sin V, \\
 z &= \sin i \sin \omega r \cos V + \sin i \cos \omega r \sin V.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Para calcular las derivadas se procede según Levallois [69]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos V; \quad \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{ae \sin V}{\sqrt{1-e^2}} \\
 \frac{\partial V}{\partial e} &= \sin V \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^3} \right); \quad \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2},
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

de donde operando se obtiene

$$\frac{\partial(r \cos V)}{\partial e} = -a - \frac{r \sin^2 V}{1-e^2}; \quad \frac{\partial(r \sin V)}{\partial M} = \frac{r \sin V \cos V}{1-e^2} \tag{5.44}$$

$$\frac{\partial(r \cos V)}{\partial M} = -\frac{a \sin V}{\sqrt{1-e^2}}; \quad \frac{\partial(r \sin V)}{\partial M} = \frac{a(e + \cos V)}{\sqrt{1-e^2}} \tag{5.45}$$

a partir de lo cual se obtienen los desarrollos indicados.

Las derivadas buscadas respecto al semieje mayor, a , son

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}; \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a}; \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a}.} \tag{5.46}$$

Las derivadas respecto a la excentricidad, e , son

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial e} &= \left(-a - \frac{r \sin^2 V}{1 - e^2} \right) P_x + \frac{r \sin V \cos V}{1 - e^2} Q_x, \\
 \frac{\partial y}{\partial e} &= \left(-a - \frac{r \sin^2 V}{1 - e^2} \right) P_y + \frac{r \sin V \cos V}{1 - e^2} Q_y, \\
 \frac{\partial z}{\partial e} &= \left(-a - \frac{r \sin^2 V}{1 - e^2} \right) P_z + \frac{r \sin V \cos V}{1 - e^2} Q_z.
 \end{aligned}
 \tag{5.47}$$

Respecto a la inclinación, i son

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega; \quad \frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega; \quad \frac{\partial z}{\partial i} = z \cotg i.
 \tag{5.48}$$

Respecto a la longitud del nodo ascendente, Ω , son

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y; \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = -x; \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0.
 \tag{5.49}$$

Respecto al argumento del periastro, ω

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \omega} &= -P_x r \sin V + Q_x r \cos V, \\
 \frac{\partial y}{\partial \omega} &= -P_y r \sin V + Q_y r \cos V, \\
 \frac{\partial z}{\partial \omega} &= -P_z r \sin V + Q_z r \cos V
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

y finalmente, respecto a la anomalía media, M , son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial M} &= -\frac{a \sin V}{\sqrt{1-e^2}} P_x + \frac{a(e + \cos V)}{\sqrt{1-e^2}} Q_x, \\
 \frac{\partial y}{\partial M} &= -\frac{a \sin V}{\sqrt{1-e^2}} P_y + \frac{a(e + \cos V)}{\sqrt{1-e^2}} Q_y, \\
 \frac{\partial z}{\partial M} &= -\frac{a \sin V}{\sqrt{1-e^2}} P_z + \frac{a(e + \cos V)}{\sqrt{1-e^2}} Q_z.
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

Para desarrollar estas cantidades en serie trigonométrica de la anomalía media basta con recurrir a las fórmulas de *Hansen* (3.7) y (3.8), las cuales proporcionan las expresiones $\sin V$ y $\cos V$ en función de la anomalía media, M .

5.4. Desarrollo del inverso de la distancia.

El desarrollo del inverso de la distancia es también un problema clásico en mecánica celeste. Muchos autores han contribuido con nuevos métodos y puntos de vista; entre otros, puede consultarse [5], [23], [44], [53],[64], [69] o [120]. En este trabajo, y a modo de resumen, se explicitan dos primeras aproximaciones y el método que se seguirá.

Si se tiene en cuenta la expresión del potencial perturbador que se introdujo en (4.6), puede verse que en su fórmula aparece el inverso de la distancia que separa los planetas P y P' . Esta expresión debe desarrollarse en forma de serie de potencias.

Sean \vec{r} y \vec{r}' los radio vectores el planeta P y del astro perturbador P' , y sea Ψ el ángulo comprendido entre ellos, el coseno de Ψ viene dado por

$$\cos \Psi = \frac{x x' + y y' + z z'}{r r'}.
 \tag{5.52}$$

El inverso de la distancia entre P y P' , al que denotará por $\frac{1}{\Delta}$, viene dado en función de r , r' y $\cos \Psi$ por

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2r r' \cos \Psi}}.
 \tag{5.53}$$

El desarrollo de esta última expresión se puede abordar analíticamente mediante varios procedimientos; un primer método consiste en desarrollar en serie de Taylor

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \Psi \right]^i, & r > r' \\ \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left[\left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos \Psi \right]^i, & r < r' \end{cases} \quad (5.54)$$

lo cual, además de comportar un grado elevado de complejidad, requiere de la condición

$$\left| \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \Psi \right| < 1, \quad \forall \Psi.$$

Un segundo método, para el que se obtiene un desarrollo más compacto, es el siguiente. Se considera

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Psi), & r > r', \\ \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \Psi), & r < r', \end{cases} \quad (5.55)$$

donde $P_n(x)$ representa el polinomio de *Legendre* de grado n .

Los desarrollos anteriores son válidos cuando se puede garantizar que la relación $r > r'$ o $r < r'$ se mantiene durante el movimiento. Desgraciadamente existen casos —como en el caso del par Neptuno–Plutón o las órbitas de ciertos asteroides— en los que dicha relación no se mantiene.

Una tercera aproximación al problema —que puede resolver el problema anterior— es el método de *Laplace*, para lo cual se introduce, en primer lugar, la función auxiliar

$$\Phi(a, a', \Psi) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a')^2 - 2a a' \cos \Psi}}. \quad (5.56)$$

Sea $\alpha = \begin{cases} \frac{a}{a'}, & a < a' \\ \frac{a'}{a}, & a > a' \end{cases}$ y sea la función

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi)^{\frac{k}{2}}}, \quad (5.57)$$

de forma que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + (a')^2 - 2a a' \cos \Psi}} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi}} = \frac{1}{a} \Xi(a, a', 1).$$

Esta última función, (5.57), es una función continua, derivable, y $2 - \pi$ periódica en Ψ , por tanto admite un desarrollo en serie de *Fourier* en la forma

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \frac{b_{\frac{k}{2}}^{(0)}(\alpha)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{\frac{k}{2}}^{(m)}(\alpha) \cos m\Psi. \quad (5.58)$$

Las funciones $b_{\frac{k}{2}}^{(m)}(\alpha)$ con $m > 0$ reciben el nombre de coeficientes de *Laplace*, de los cuales se va a obtener a continuación una expresión analítica.

Si se define $b_{\frac{k}{2}}^{(-m)} = b_{\frac{k}{2}}^{(m)}$, $\forall m > 0$, se tiene

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} b_{\frac{k}{2}}^{(m)}(\alpha) \cos m\Psi. \quad (5.59)$$

Si se considera $z = \exp(\sqrt{-1}\Psi)$, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi}} &= \left[1 + \alpha^2 - \alpha (z + z^{-1}) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

La función $\Xi(\alpha, \Psi, k)$ es una función holomorfa excepto en $z = 0$, $z = \alpha$, y $z = \frac{1}{\alpha}$, por tanto existen valores $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ de modo que $\alpha < k_1 < 1 < k_2 < \frac{1}{\alpha}$ de manera que la rama de la función $\Xi(\alpha, \Psi, k)$ que toma valor uno cuando $\alpha = 0$, y a la que se hará referencia de ahora en adelante únicamente como $\Xi(\alpha, \Psi, k)$, es holomorfa en el anillo del plano complejo

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < k_1 \leq |z| \leq k_2\}.$$

El anillo D contiene la circunferencia cerrada $\gamma = \{z = \exp(\sqrt{-1}\Psi) : \Psi \in [0, 2\pi]\}$ y por ello la función $\Xi(\alpha, \Psi, k)$ es desarrollable en serie de *Laurent* en dicho anillo. Así, se tiene el desarrollo

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\frac{k}{2}}^{(m)}(\alpha) z^m. \quad (5.61)$$

Por otra parte, desarrollando directamente la función

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = (1 - \alpha z)^{-\frac{k}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{k}{2}},$$

se tiene que

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{k}{2}}{r} \alpha^r z^r \right] \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{-\frac{k}{2}}{s} \alpha^s z^{-s} \right]. \quad (5.62)$$

Operando e introduciendo los símbolos de *Pochhammer*

$$\begin{aligned} (p)_0 &= 1, \\ (p)_s &= p(p+1) \cdots (p+s-1), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\Xi(\alpha, \Psi, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{\frac{k}{2}}{|n|} (1)_{|n|} \alpha^{|n|} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})_s (\frac{k}{2} + |n|)_s}{(1)_s (|n| + 1)_s} \alpha^{2s} \right] z^n, \quad (5.63)$$

por tanto, para $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ se tiene

$$b_r^{(n)}(\alpha) = 2 \frac{(r)_n}{(1)_n} \alpha^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+n)_s (r)_s}{(1)_s (n+1)_s} \alpha^{2s}, \quad (5.64)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que función hipergeométrica [4] viene dada por

$$\begin{aligned} F(a; b; c; x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{(a+i)(b+i)}{c+i} \right] \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a+k-1}{k} \binom{b+k-1}{k}}{\binom{c+k-1}{k}} x^k, \end{aligned}$$

se tiene que

$$b_s^{(n)}(\alpha) = 2 \frac{\binom{s}{n}}{\binom{1}{n}} \alpha^n F(s, s+n, n+1, \alpha^2). \quad (5.65)$$

Con esto, para el desarrollo del inverso de la distancia debe evaluarse en primer lugar $\cos \Psi$, el cual viene dado por

$$\cos \Psi = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r r'} = M_1 \begin{bmatrix} \cos V \\ \sin V \\ 0 \end{bmatrix} \cdot M_2 \begin{bmatrix} \cos V' \\ \sin V' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

donde $M_1 = R_3(-\Omega) \cdot R_1(-i) \cdot R_3(-\omega)$ y $M_2 = R_3(-\Omega') \cdot R_1(-i') \cdot R_3(-\omega')$. El desarrollo de $\cos \Psi$ se consigue sustituyendo en la expresión anterior los valores de $\sin V$, $\cos V$, $\sin V'$ y $\cos V'$ por sus desarrollos en serie trigonométrica de las anomalías medias M , M' lo cual se consigue a través de las fórmulas de *Hansen* estudiadas en (3.7) y (3.8).

Para obtener los valores de $\cos n\Psi$ se utiliza la recurrencia

$$\cos n\Psi = 2 \cos \left[(n-1)\Psi \right] \cos \Psi - \cos \left[(n-2)\Psi \right]. \quad (5.67)$$

Finalmente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = \Phi(r, r', \cos \Psi) &= \Phi(a, a', \cos \Psi) + \frac{\partial}{\partial a} \Phi(a, a', \cos \Psi)(r-a) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial a'} \Phi(a, a', \cos \Psi)(r'-a') + \dots \end{aligned} \quad (5.68)$$

En esta expresión deben ser sustituidos $\left(\frac{r}{a} - 1\right)^k$ y $\left(\frac{r'}{a'} - 1\right)^k$ por sus desarrollos ya obtenidos en el punto 3.3.

5.5. Métodos semianalíticos

Un procedimiento alternativo para el desarrollo del inverso de la distancia mediante un algoritmo iterativo basado en la iteración de *Newton-Raphson* para ecuaciones fue propuesto por *Kovalevsky* [64]. Este procedimiento consiste en aplicar la iteración de *Newton*

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.69)$$

la cual, bajo ciertas condiciones de signo y continuidad en las derivadas de f , converge a la solución [8] [101], [106], [121]. Nótese que en cada iteración se obtienen aproximaciones funcionales, no aproximaciones numéricas.

El valor inicial de partida para el algoritmo para el cálculo de Δ^2 viene dado por

$$\Delta^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \Psi. \quad (5.70)$$

Si se sustituyen en esta ecuación las expresiones de r , r' y $\cos \Psi$ por sus desarrollos en serie trigonométrica de las anomalías medias —cabe recordar que r y r' pueden ser desarrollados recurriendo al procedimiento de *Hansen*—, se obtiene el desarrollo de Δ^2 .

Si se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2} - \Delta^2$, se aplica la iteración (5.69) obtenida mediante el método de *Newton* y se toma $\left(\frac{1}{\Delta}\right)_k$ como el valor de la k -ésima iteración en la resolución de la ecuación $f(x) = 0$, entonces se obtiene la llamada fórmula de *Kovalevsky* [30], [64], dada por

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)_{k+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k^3 \Delta^2. \quad (5.71)$$

La elección de una buena aproximación inicial no es un aspecto trivial, pues la convergencia del algoritmo puede depender de ella. Para valores próximos a la solución el algoritmo no tiene por qué presentar problemas de convergencia. Es importante, pues, tomar una aproximación inicial adecuada; en nuestro caso, en el supuesto de contar con excentricidad e inclinación relativa entre los planos orbitales pequeñas, el problema equivale a tomar órbitas circulares y coplanarias y, a tal efecto, *Laplace* [120] obtuvo el desarrollo expuesto en (5.72) y solucionó el problema de la elección de la aproximación inicial en el caso de las teorías planetarias.

En el caso de no cumplirse las condiciones anteriores, para garantizar que la función $f(x) = \Delta^2 - \frac{1}{x^2}$ sea decreciente y el signo de la misma y de su segunda derivada sean negativos, bastaría tomar como aproximación inicial un número positivo menor que el inverso de las distancias mínimas que puede haber entre los planetas; así, bastaría tomar un x_0 de modo que $0 \leq x_0 = \left(\frac{1}{\Delta}\right)_0 < \min \left\{ \frac{1}{\Delta} \right\} \leq \frac{1}{|a-a'|}$.

El caso objeto de estudio de esta tesis se centra en el intervalo $[0, 1[$ para la excentricidad. Para el caso particular excentricidad nula todas las anomalías coinciden

con M y la órbita es circular. Para el caso $e = 1$ la órbita deja de ser elíptica y las ecuaciones planetarias de *Lagrange* no pueden utilizarse en esta forma. Además, se puede demostrar [120] que los desarrollos obtenidos dejan de ser convergentes para excentricidades iguales o superiores a $0,662743419\dots$ y, por tanto, si fuese el caso, sería necesario buscar otras alternativas².

Así pues, en el supuesto de excentricidades e inclinaciones relativas pequeñas —que es el caso que se trata—, se puede tomar como aproximación inicial

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)_0 = \frac{1}{a'} \left[\frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\alpha) \cos j\Psi \right], \quad (5.72)$$

donde $b_{p/2}^{(j)}$ son los coeficientes de *Laplace*, que vienen representados por la expresión

$$b_{p/2}^{(j)} = 2 \frac{\left(\frac{p}{2}\right)_j}{(1)_j} F \left[\frac{p}{2}, \frac{p}{2} + j, j + 1; \alpha^2 \right],$$

en la que F representa la función hipergeométrica y $(x)_j$ el símbolo de Pochhammer; $\alpha = \frac{a}{a'}$ con $a' > a$ siendo a y a' los semiejes de las órbitas.

La condición de parada del algoritmo viene dada por

$$\left\| \left(\frac{1}{\Delta}\right)_{k+1} - \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k \right\|_1 < \varepsilon,$$

donde $\|\cdot\|_1$ representa la norma 1 y ε una cantidad pequeña y prefijada de antemano, habitualmente menor a 10^{-10} .

Respecto al criterio de parada, nótese que en cada iteración se obtiene una aproximación funcional en forma de desarrollo en serie doble de *Fourier* por lo que la convergencia debe ser evaluada por alguna norma. Se ha escogido la norma 1 con criterio conservador, aunque ésta podría sustituirse por la norma 2 con lo que se aceleraría de algún modo la convergencia. En el caso del cálculo del inverso de la distancia entre dos planetas, alrededor de cinco iteraciones son suficientes para lograr precisiones de al menos 10^{-12} unidades astronómicas. El aumento de las iteraciones supondría un coste computacional que, en el caso del procesador de series de *Poisson*, se puede asumir sin problema por su diseño.

²Las excentricidades de los planetas del Sistema Solar no superan el valor de 0,25 y son valores con los que los desarrollos son siempre convergentes.

5. Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

Este método semianalítico resulta muy adecuado si se dispone de un procesador de series de *Poisson* [1], [57], [96].

5.6. Consideraciones finales

En este capítulo se han planteado y se han resuelto las ecuaciones planetarias de *Lagrange*; la solución de estas ecuaciones, en forma de desarrollos analíticos, proporciona el valor de los elementos osculadores de los planetas en el contexto de un problema de dos cuerpos bajo la acción de unas fuerzas perturbadoras. En el proceso de resolución ha sido necesario desarrollar la función de perturbación y extenderla en base a las derivadas de las coordenadas cartesianas y de las derivadas de éstas respecto a los elementos keplerianos. Además ha sido necesario obtener el desarrollo del inverso de la distancia.

Los desarrollos de las derivadas de las coordenadas cartesianas respecto a los elementos keplerianos viene dadas respecto a la anomalía verdadera; para obtener estos desarrollos respecto a la anomalía media ha sido necesario utilizar las funciones de *Hansen*. El aspecto que se plantea a partir de ahora es analizar si las anomalías habituales utilizadas hasta el momento son las deseables o existe la posibilidad de encontrar anomalías que proporcionen desarrollos más compactos y de mayor eficiencia. En los siguientes capítulos se estudiarán unas familias de anomalías que resuelven esta cuestión.

Capítulo 6

Estudio analítico de la familia de anomalías generalizadas de *Sundman*

Contenido

6.1. Introducción	113
6.2. Anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	115
6.3. Desarrollos analíticos en el problema de dos cuerpos mediante anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	121
6.4. Aplicación a la integración de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	124
6.5. Artículo: A note on the use of the generalized <i>Sundman</i> transformations as temporal variables in celestial mechanics	129

6.1. Introducción

Según introduce *Paul E. Nacozy* (1969) [94] en su trabajo sobre «Anomalías parciales y sus aplicaciones», los desarrollos en serie generados para cuerpos con órbitas muy excéntricas son demasiado complejos y tienen una convergencia lenta porque la fuerza perturbadora es demasiado oscilante. En 1856 *P. Hansen* [55] introduce el método de las anomalías parciales para facilitar los desarrollos, aunque sin ofrecer una demostración. La idea era dividir la órbita en sectores de forma que en cada uno de ellos se pudiera trabajar con una variable independiente y conseguir que en los puntos de unión las superposiciones sean suaves. Con esto se consigue una más rápida convergencia de los desarrollos respecto a las anomalías parciales, aunque lamentablemente la convergencia respecto a la anomalía media sigue siendo lenta. En

la década de 1870 *H. Gylden* [52] introduce modificaciones en el método y consigue mejorar la convergencia de los desarrollos respecto a la anomalía media, pero a costa de introducir funciones elípticas y una mayor segmentación de la órbita. Después de las aportaciones de *Gylden* se utilizó el método de las anomalías parciales para realizar diversos cálculos: *Von Asten* (1872) [11] compara una aplicación parcial del método con una integración numérica sobre dos arcos; *Callandreau* (1882) [29] utiliza treinta observaciones para comprobar la fiabilidad del método, pero utiliza un intervalo que no llega a una vuelta completa; *Bholin* (1888) [14] aplica el método a un periodo de diez años, pero compara el resultado con sólo una observación al final del intervalo; *Hansen* [94] estudia el caso del cometa *Enke* perturbado por la Tierra y provee de un ejemplo completo que asegura la validez del método.

Nacozy [94] describe la transformación de *Sundman*

$$dt = r d\tau, \quad (6.1)$$

introducida por éste en 1912 para regularizar el origen en el problema de tres cuerpos. Esta transformación temporal está definida para toda la órbita y es la base para los denominados métodos de regularización analítica del paso de integración; también es de gran interés en el estudio analítico del problema de dos cuerpos.

Una extensión natural de la transformación de *Sundman* es la transformación generalizada de *Sundman* [58], [59], [125], la cual está definida, como es bien conocido, mediante la expresión

$$dt = C_\alpha r^\alpha d\tau_\alpha,$$

donde τ_α es la nueva variable, C_α es una constante, α un parámetro y r el radio vector.

En los apartados siguientes y partiendo de esta transformación se abordará el estudio de una familia de anomalías relacionadas, así como sus propiedades analíticas para su uso en el estudio de problemas perturbados derivados del de dos cuerpos.

También se inicia un estudio de la definición de las anomalías generalizadas de *Sundman*, Ψ_α , a partir de las transformaciones anteriormente descritas.

En el apartado 6.2 se relaciona Ψ_α con la anomalía excéntrica y se obtiene el valor de Ψ_α como desarrollo en forma de serie de *Fourier* de la anomalía excéntrica, E . Es importante mencionar que este desarrollo puede reordenarse siguiendo las potencias de la excentricidad, e .

En el apartado 6.3 se describe el proceso de obtención de las principales magnitudes que aparecen en el desarrollo analítico del problema de dos cuerpos, en particular

6. Estudio analítico de las anomalías generalizadas de *Sundman*

E , $\sin E$, $\cos E$, $\frac{r}{a}$ y $\frac{a}{r}$. Esto se logra, bien mediante el método de inversión de series de *Deprit*, bien mediante un algoritmo codificado en Mathematica desarrollado a tal fin. Como consecuencia de lo anterior se tiene el desarrollo de la anomalía media en función de Ψ_α , o dicho de otro modo, la ecuación de *Kepler*, resultado básico en mecánica celeste.

En 6.4 se estudia la integración analítica de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*. A tal efecto, se requiere, en primer lugar, la inversión de la ecuación de *Kepler* y el posterior desarrollo de un algoritmo iterativo para poder realizar la integración respecto al tiempo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias cuando estas se expresan en función de $\Psi_{1,\alpha}$ y $\Psi_{2,\alpha}$, siendo éstas las anomalías generalizadas de *Sundman* correspondientes al secundario y a la masa perturbadora, respectivamente. Nótese que cuando se estudia el movimiento de la masa perturbadora simplemente se invierten los papeles de $\Psi_{1,\alpha}$ y $\Psi_{2,\alpha}$.

Esta breve introducción corresponde al artículo [76] «A note on the use of the generalized *Sundman* transformations as temporal variables in celestial mechanics», que es la base del desarrollo del presente capítulo.

6.2. Anomalías generalizadas de *Sundman*

El objetivo de este apartado es definir una familia de anomalías, que se denominarán anomalías generalizadas de *Sundman*, a partir de la transformación definida anteriormente en la introducción. A continuación se estudiará la relación entre la nueva anomalía y las anomalías excéntrica y media.

$$dt = C_\alpha r^\alpha d\tau_\alpha, \quad (6.2)$$

donde τ_α es una nueva variable temporal que se relaciona con el tiempo, t , a través de $Q(r, \alpha) = C_\alpha r^\alpha$. Q recibe el nombre de función de partición y depende de un parámetro α y del radio vector, r .

La anomalía media, M , está relacionada con el tiempo, t , mediante $M = n(t - t_0)$, donde t_0 denota la época de paso por el periastro. Si se deriva la expresión anterior se tiene que $dM = ndt$ y de aquí

$$dM = K_\alpha r^\alpha d\Psi_\alpha, \quad (6.3)$$

donde Ψ_α es la llamada anomalía generalizada de *Sundman* de parámetro α y K_α

es una constante para hacer equivalentes (6.2) y (6.3).

Para que Ψ_α sea una anomalía debe cumplir ciertas condiciones. En primer lugar, Ψ_α debe ser una función \mathcal{C}^1 de M y estrictamente creciente, esto es, $\frac{d\Psi_\alpha}{dM} > 0$. En otras palabras, debe ser un cambio de parámetro admisible en la elipse. Además, debe verificarse que $\Psi_\alpha = 0$ cuando $M = 0$, $\Psi_\alpha = \pi$ cuando $M = \pi$ y $\Psi_\alpha = 2\pi$ cuando $M = 2\pi$.

Si se toma la ecuación (6.3) y se tiene en cuenta, por una lado, que $r = a(1 - e \cos E)$ y, por otro, la ecuación de *Kepler*, $M = e - e \sin E$, se deduce que

$$\underbrace{(1 - e \cos E)dE}_{dM} = K_\alpha r^\alpha d\Psi_\alpha = K_\alpha a^\alpha (1 - e \cos E)^\alpha d\Psi_\alpha \quad (6.4)$$

y por tanto, reordenando, se obtiene que

$$a^{-\alpha}(1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE = K_\alpha d\Psi_\alpha.$$

Es obvio que Ψ_α y E también coinciden en 0 , π y 2π y si se integran ambos lados de la igualdad entre 0 y 2π , se tiene que

$$\int_0^{2\pi} a^{-\alpha}(1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE = K_\alpha \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Psi_\alpha}_{2\pi},$$

de donde se deduce que

$$K_\alpha = \frac{a^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE. \quad (6.5)$$

Para obtener la integral del segundo miembro, y más en general para obtener $\Psi_\alpha(E)$, es conveniente, en primer lugar, desarrollar $(1 - e \cos E)^{1-\alpha}$ en serie de *Fourier*. Este desarrollo va a ser siempre posible porque $1 - e \cos E > 0$, pues $0 \leq e < 1$. Para ello es más cómodo recurrir a la variable compleja. Si se considera $z = \exp(\sqrt{-1}E)$, entonces se tiene que

$$1 - e \cos E = 1 - e \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{1}{2z} (2z - ez^2 - e).$$

Si se resuelve la ecuación

$$2z - ez^2 - e = 0,$$

se tiene que

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4e^2}}{-2e} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - e^2}}{2e} = \begin{cases} z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} \\ z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \end{cases}.$$

Es evidente que $0 < z_1$ y $1 < z_2$ y, por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2z}(ez - ez^2 - e) &= \frac{-e}{2z}(z - z_1)(z - z_2) \\ &= \frac{-e}{2} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) z_2 \left(\frac{z}{z_2} - 1\right) \\ &= \frac{e}{2} z_2 \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte $dz = \sqrt{-1} \exp(\sqrt{-1}E)dE$ y de aquí

$$dE = \frac{dz}{\sqrt{-1}z}.$$

Con todo esto, el integrando $(1 - \cos E)^{1-\alpha}$ en (6.5) queda expresado de la forma

$$\frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{1-\alpha},$$

donde

$$\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1-\alpha}{k} \left(\frac{z_1}{z}\right)^k \quad (6.6)$$

y

$$\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{1-\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{1-\alpha}{s} \left(\frac{z}{z_2}\right)^s. \quad (6.7)$$

Es importante puntualizar que ambos desarrollos son convergentes pues $\left|\frac{z_1}{z}\right| < 1$ y $\left|\frac{z}{z_2}\right| < 1$. Sustituyendo en $(1 - e \cos E)^{1-\alpha}$ los desarrollos binomiales anteriores se obtiene el desarrollo en serie de *Laurent* de $(1 - e \cos E)^{1-\alpha}$.

Téngase en cuenta que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, pues, por tratarse de una ecuación de segundo grado, se tiene que $z_1 z_2 = \frac{-e}{-e} = 1$. Además,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1 - e^2})(1 + \sqrt{1 - e^2})}{e(1 + \sqrt{1 - e^2})} \\ &= \frac{1 - (1 - e^2)}{e(1 + \sqrt{1 - e^2})} \\ &= \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \end{aligned}$$

que es una forma más adecuada para calcular z_1 cuando los valores de la excentricidad, e , son pequeños.

Con todo lo expuesto se ha escrito el integrando en (6.5) como

$$(1 - e \cos E)^{1-\alpha} = \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{1-\alpha}$$

y si en esta igualdad se sustituyen los desarrollos de obtenidos en (6.6) y (6.7) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} &= \\ &= \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1-\alpha}{k} \left(\frac{z_1}{z}\right)^k \right] \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{1-\alpha}{s} \left(\frac{z}{z_2}\right)^s \right], \end{aligned}$$

que, reordenando los sumatorios, puede reescribirse como

$$(1 - e \cos E)^{1-\alpha} = \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{k+s} \binom{1-\alpha}{k} \binom{1-\alpha}{s} \frac{z_1^k}{z_2^s} z^{s-k} \right].$$

Si se llama $N = s - k$, se puede expresar de la siguiente forma

$$(1 - e \cos E)^{1-\alpha} = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^N \binom{1-\alpha}{k} \binom{1-\alpha}{N+k} \frac{z_1^k}{z_2^{N+k}}}_{S_N} \right] z^N \quad (6.8)$$

y si llamamos S_N a la expresión indicada en (6.8), se obtiene que

$$(1 - e \cos E)^{1-\alpha} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} S_N z^N. \quad (6.9)$$

En (6.9) se observa que S_N es una serie de potencias que procede de un coseno y, por tanto, por razones de simetría, se cumple que $S_N = S_{-N}$. Con esta igualdad se puede deducir que

$$S_N z^N + S_{-N} z^{-N} = S_N z^N + S_N z^{-N} = 2S_N \frac{z^N + z^{-N}}{2} = 2S_N \cos(NE).$$

Si se tiene este resultado en cuenta, se puede reescribir la expresión en (6.9) como

$$(1 - e \cos E)^{1-\alpha} = S_0 + 2 \sum_{N=1}^{+\infty} S_N \cos(NE). \quad (6.10)$$

Partiendo de (6.5), para obtener K_α únicamente se tiene en cuenta el valor de S_0 porque al integrar el resto de términos aparece $\cos(NE)$ con $N \in \mathbb{N}^+$ y

$$\int_0^{2\pi} S_N \cos(NE) dE = S_N \int_0^{2\pi} S_N \cos(NE) dE = \frac{S_N}{N} \left[\sin(NE) \right]_0^{2\pi} = 0. \quad (6.11)$$

El valor de S_0 puede obtenerse de la expresión de S_N en (6.8) haciendo $N = 0$:

$$S_N = \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^N \binom{1-\alpha}{k} \binom{1-\alpha}{N+k} \frac{z_1^k}{z_2^{N+k}},$$

$$S_0 = \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} z_2^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1-\alpha}{k}^2 \frac{z_1^k}{z_2^k}. \quad (6.12)$$

6.2. Anomalías generalizadas de *Sundman*

Para continuar, si se introduce el cambio $\bar{K}_\alpha = K_\alpha a^\alpha$ se aprecia que \bar{K}_α depende solamente de e . Teniendo en cuenta (6.10), se puede escribir

$$\bar{K}_\alpha d\Psi = \left(S_0 + 2 \sum_{N=1}^{+\infty} S_N \cos(NE) \right) dE, \quad (6.13)$$

de donde, integrando, se obtiene

$$\int_0^\Psi d\Psi = \frac{1}{\bar{K}_\alpha} \int_0^E \left(S_0 + 2 \sum_{N=1}^{+\infty} S_N \cos(NE) \right) dE,$$

$$\Psi = \frac{S_0}{\bar{K}_\alpha} E + 2 \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{S_N}{N\bar{K}_\alpha} \sin(NE).$$

En esta última expresión el cociente $\frac{S_0}{\bar{K}_\alpha}$ puede simplificarse, ya que si se toman integrales en (6.13) y se tiene en cuenta (6.11), se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \bar{K}_\alpha d\Psi = \int_0^{2\pi} \left(S_0 + 2 \sum_{N=1}^{+\infty} S_N \cos(NE) \right) dE \implies$$

$$\implies \underbrace{\bar{K}_\alpha \int_0^{2\pi} d\Psi}_{2\pi} = S_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} dE}_{2\pi} + 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sum_{N=1}^{+\infty} S_N \cos(NE) \right) dE}_0$$

$$\implies 2\pi \bar{K}_\alpha = 2\pi S_0$$

$$\implies \frac{S_0}{\bar{K}_\alpha} = 1.$$

Finalmente, se obtiene la igualdad

$$\Psi_\alpha = E + \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{2S_N}{N\bar{K}_\alpha} \sin(NE), \quad (6.14)$$

que relaciona la familia de anomalías de *Sundman*, Ψ_α , directamente con la anomalía excéntrica, E . Nótese que el cociente $\frac{2S_N}{N\bar{K}_\alpha}$ es una expresión de orden $O(e^n)$, como puede verse en la sección cuarta de [76].

Los valores de los coeficientes de (6.14) están explicitados en [76].

6.3. Desarrollos analíticos en el problema de dos cuerpos mediante anomalías generalizadas de *Sundman*

Esta sección tiene por objetivo la obtención del desarrollo en serie de las principales magnitudes que aparecen en el problema de dos cuerpos en función de las anomalías generalizadas de *Sundman* para su posterior uso en el estudio de teorías planetarias analíticas. Con el fin de hacer más cómoda la notación se prescindirá del subíndice α al hacer referencia a las variables.

Cuando se trata de invertir una expresión de tipo $\Psi = E + e g(E)$ el procedimiento a seguir podría ser la utilización de la fórmula de inversión de *Lagrange* y el desarrollo inverso obtenido sería de la forma

$$E = \Psi + \sum_{n=1}^{+\infty} e^n b_n(\Psi).$$

Sin embargo, en el caso que se presenta en esta memoria se dispone de un desarrollo de la forma

$$\Psi = E + \sum_{n=1}^{+\infty} e^n g_n(E), \tag{6.15}$$

donde (6.15) es el desarrollo obtenido en (6.14) ordenado siguiendo las potencias de la excentricidad, e . Para este desarrollo la fórmula de inversión de series de *Lagrange* no es de aplicación porque (6.15) no presenta la forma $\Psi = E + e g(E)$. Afortunadamente, este problema fue estudiado por *Deprit* [36], quien desarrolló un algoritmo a través de la inversión de la función anterior para obtener de forma analítica las magnitudes necesarias. Así, conforme a dicho algoritmo se tiene el desarrollo inverso a (6.15) en la forma

$$E = \Psi + \sum_{n=1}^{+\infty} e^n h_n(\Psi) \tag{6.16}$$

y

$$F(E) = F(\Psi) + \sum_{n=1}^{+\infty} e^n v_n(\Psi), \quad (6.17)$$

donde F es una función analítica arbitraria. Evidentemente, si F es la identidad, la expresión (6.17) se convierte en (6.16).

El algoritmo de *Deprit* proporciona las expresiones analíticas de $h_n(\Psi)$ y $v_n(\Psi)$ en función de g_n . Así, si se toma F como la función seno, se obtiene $\sin E$ como desarrollo de la excentricidad, e , y la anomalía Ψ como

$$\sin E = \sin \Psi + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(e) \sin n\Psi, \quad (6.18)$$

donde $s_n(\Psi)$, como se ha comentado, es una función que proporciona el algoritmo.

La ecuación de *Kepler*, $M = E - e \sin E$, se presenta en la forma

$$M = \Psi + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(e) \sin n\Psi, \quad (6.19)$$

donde $\alpha_n(\Psi)$, al igual que ocurre con las funciones anteriores, depende de $g_n(E)$.

Un método alternativo a la utilización del algoritmo de *Deprit* es la obtención de dichas expresiones mediante un programa de cálculo simbólico. Un código completo que podría ser adecuado a este fin, que por su corta extensión se expone a continuación, ha sido desarrollado en Mathematica.

```

1 SK[e_, α_, EE_, m_] :=
2   SK[e, α, EE, m] =
3   Integrate[
4   Normal[
5   Series[(1 - e*Cos[EE]) ^ (1 - α), {e, 0, m}]],
6   {EE, 0, 2 π}]/(2 π);

```

```

1 SKE[e_, α_, EE_, m_] :=
2   SKE[e, α, EE, m] =
3   Integrate[
4   Normal[
5   Series[(1 - e*Cos[EE]) ^ (1 - α), {e, 0, m}]],
6   EE];

```

6. Estudio analítico de las anomalías generalizadas de *Sundman*

```
1  InvSK[e_, α_, m_] :=
2    Normal[
3    Series[1/SK[e, α, m], {e, 0, m}]]];
```

```
1  FE[e_, α_, EE_, m_] :=
2    FE[e, α, EE, m] =
3    Normal[
4    Series[
5    InvSK[e, α, m] * SKE[e, α, EE, m], {e, 0, m}]]];
```

```
1  DF[e_, α_, EE_, m_] :=
2    DF[e, α, EE, m] =
3    Normal[
4    Series[EE - FE[e, α, EE, m], {e, 0, m}]]];
```

```
1  EF[e_, α_, F_, 0] = F
2
3  EF[e_, α_, F_, m_] :=
4    EF[e, α], F, m] =
5    Expand[
6    TrigReduce[
7    Normal[
8    Series[
9    Expand[F + DF[e, α], EE, m] /.
10   EE -> EF[e, α], F, m - 1]], {e, 0, m}]]];
```

El seno de la anomalía excéntrica E en función de Ψ se puede calcular como

```
1  SE[e_, α_, F_, m_] :=
2    SE[e, α, F, m] =
3    Normal[
4    Series[Sin[EF[e, α, F, m]], {e, 0, m}]]
```

Y la anomalía media, M , conectada con E a través de la ecuación de *Kepler*, quedará expresada en función de Ψ mediante

```
1  EF[e, α, F, 4] - e*SE[e, α, F, 3]
```

Estos códigos proporcionan las principales cantidades que intervienen en el problema de los dos cuerpos como desarrollos analíticos exactos hasta orden m en la excen-

6.4. Aplicación a la integración de las ecuaciones planetarias

tricidad, e , en forma de series de *Fourier* en Ψ para cualquier valor arbitrario de α . En el artículo [76] desarrollado en este capítulo puede verse un ejemplo de estos desarrollos de hasta cuarto orden.

La principal ventaja de este algoritmo frente a los desarrollos obtenidos por el método de *Deprit* es la sencillez a la hora de realizar la programación. El algoritmo en *Mathematica* no proporciona el desarrollo con la misma ordenación que el método de *Deprit*; el método de *Deprit* proporciona en cada iteración, n , la función que multiplica a e^n , mientras que el algoritmo en *Mathematica* devuelve las funciones que hacen de coeficientes de las expresiones de $\sin ne$, lo que supone una agrupación totalmente distinta.

El siguiente paso, después de haber obtenido todos los desarrollos de los elementos necesarios, es sustituirlos en los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* (5.38). Para cada elemento genérico, σ , el segundo miembro de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* puede expresarse teniendo en cuenta las expresiones (5.38)–(5.51) y los desarrollos obtenidos mediante los algoritmos descritos en *Mathematica* anteriormente en este apartado como

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} A_{k_1} \cdots A_{k_N} t^{m_{k_1, \dots, k_N}} \cos(k_1 \Psi_1 + \cdots + k_N \Psi_N + \phi_{k_1, \dots, k_N}). \quad (6.20)$$

Nótese que para obtener (6.20) hacen falta —además de los desarrollos relativos a la anomalía excéntrica— los de $\sin V$ y $\cos V$, los cuales pueden obtenerse fácilmente a partir de (2.18)–(2.20).

6.4. Aplicación a la integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

Como puede observarse, cuando se tenga que integrar la expresión (6.20) respecto al tiempo será necesario desarrollar integrales del tipo

$$\int_{t_0}^t \cos(k_1 \Psi_1 + \cdots + k_N \Psi_N) dt \quad (6.21)$$

y, a tal efecto, será necesario manipular algebraicamente algunos resultados. Nótese que en la integral se ha prescindido del término independiente ϕ_{k_1, \dots, k_N} dado que no afecta a la integración.

6. Estudio analítico de las anomalías generalizadas de *Sundman*

Para evaluar la integral (6.21) se parte de la ecuación de *Kepler* (2.23) como una función que depende de la anomalía Ψ y de e

$$M_i = \Psi_i + \sum_{s=1}^{\infty} T_s(e_i) \sin s\Psi_i \quad (6.22)$$

y si se toman derivadas en la igualdad anterior, se llega a la expresión

$$\begin{aligned} dM_i &= d\Psi_i + \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i d\Psi_i \\ &= \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i \right] d\Psi_i. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta que la anomalía media es $M_i = n_i t$ y su derivada respecto al tiempo $dM_i = n_i dt$, se tiene que

$$n_i dt = \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i \right] d\Psi_i$$

y si se aplica el operador $\sum_{i=1}^N k_i$ a ambos miembros de la igualdad, se llega a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N k_i n_i dt &= \sum_{i=1}^N k_i \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i \right] d\Psi_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N k_i d\Psi_i}_{d\eta} + \sum_{i=1}^N k_i \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i d\Psi_i. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Si se toma $\sum_{i=1}^N k_i \Psi_i = \eta$ y se divide la igualdad por $\sum_{i=1}^N k_i n_i$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{d\eta}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \sum_{s=1}^{\infty} s T_s(e_i) \cos s \Psi_i d\Psi_i \\
 &= \frac{d\eta}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i h_i(\Psi_i)}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} d\Psi_i,
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

donde

$$h_i = O(e_i) = \sum_{s=1}^{\infty} s T_s(e_i) \cos s \Psi_i.$$

Se considera, ahora, la integral

$$\int_{t_0}^t \cos \underbrace{(k_1 \Psi_1 + \dots + k_N \Psi_N)}_{\eta} dt = \int_{t_0}^t \cos \eta dt$$

y se sustituye la diferencial dt por la expresión obtenida en (6.25)

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \cos \eta dt &= \int_{t_0}^t \cos \eta \left[\frac{d\eta}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i h_i(\Psi_i)}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} d\Psi_i \right] \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{\cos \eta d\eta}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} + \int_{t_0}^t \cos \eta \sum_{i=1}^N \frac{k_i h_i(\Psi_i)}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} d\Psi_i \\
 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \int_{t_0}^t \cos \eta d\eta + \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \int_{t_0}^t \cos \eta \sum_{i=1}^N k_i h_i(\Psi_i) d\Psi_i.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Para continuar es necesario cambiar la variable de integración y expresar $d\Psi$ en función de t . Para ello se despeja $d\Psi_i$ en la ecuación (6.23) y se obtiene

$$d\Psi_i = \frac{dM_i}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i}. \quad (6.27)$$

Nótese que en el denominador la norma de $\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i$ es pequeña para pequeños valores de e_i , pues la función $T_s(e_i)$ es de orden s en e_i . Por ello es posible desarrollar el denominador de la fracción anterior en serie de potencias y de este modo se puede escribir $d\Psi_i$ como

$$\begin{aligned} d\Psi_i &= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i \right]^r dM_i \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P_r(e_i) \cos r\Psi_i dM_i \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P_r(e_i) \cos r\Psi_i n_i dt. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Obsérvese que en la segunda línea de la expresión (6.28) se ha llevado a cabo una sustitución y se ha cambiado $(-1)^r \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i) \cos s\Psi_i \right]^r$ por $P_r(e_i) \cos r\Psi_i$. Este cambio es posible gracias al desarrollo de dicha expresión por el procesador de series de *Poisson* [77] descrito en la sección 3.6.

Si se retoma a la expresión en (6.26), ya es posible realizar el cambio de variable

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \cos \eta dt &= \int_{t_0}^t \cos (k_1\Psi_1 + \dots + k_N\Psi_N) dt = \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \int_{t_0}^t \cos \eta d\eta + \frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \int_{t_0}^t \cos \eta \sum_{i=1}^N k_i h_i(\Psi_i) d\Psi_i \\ &= \underbrace{\frac{\sin \eta}{\sum_{i=1}^N k_i n_i}}_A + \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^N k_i n_i} \int_{t_0}^t \cos \eta \sum_{i=1}^N k_i h_i(\Psi_i) \sum_{r=1}^{\infty} P_r(e_i) \cos r\Psi_i n_i dt}_B \end{aligned} \quad (6.29)$$

y el problema se reduce a la integración sucesiva de términos tal y como se muestra a continuación.

6.4. Aplicación a la integración de las ecuaciones planetarias

Como puede verse en (6.29), la integral queda dividida en dos sumandos y, para explicar el proceso, se hará referencia al primero, A , como parte ya integrada y al segundo, B , como parte pendiente de integrar. Se observa que B puede escribirse como la suma de N integrales y éstas, a su vez, al ser integradas en una segunda fase quedan divididas de nuevo en dos sumandos de forma que uno ya está integrado y el otro queda pendiente de integración. Esta forma de trabajar constituye un proceso iterativo que terminará cuando la norma de la parte pendiente de integrar sea menor que cierto valor suficientemente pequeño tomado arbitrariamente. La integral final se obtendrá como la suma de todas las partes integradas que han sido calculadas en el proceso.

Por último, al igual que la integral planteada en (6.21), también pueden aparecer integrales del tipo

$$\int_{t_0}^t t^m \cos(k_1\Psi_1 + \dots + k_N\Psi_N) dt, \quad (6.30)$$

la cual, a través del método de integración por partes y un proceso de reducción del exponente m en t , puede transformarse en una integral del tipo (6.21) tal y como se muestra a continuación.

Se considera la integral

$$I_m = \int_{t_0}^t t^m \cos(k_1\Psi_1 + \dots + k_N\Psi_N) dt; \quad (6.31)$$

se lleva a cabo un proceso de integración por partes y se obtiene

$$I_m = \left[t^m \int \cos(k_1\Psi_1 + \dots + k_N\Psi_N) dt \right]_{t_0}^t - m \int_{t_0}^t t^{m-1} \left[\int \cos(k_1\Psi_1 + \dots + k_N\Psi_N) dt \right] dt, \quad (6.32)$$

donde se observa que el minuendo es una integral del tipo expuesto en (6.21), fácilmente integrable, mientras que el sustraendo, aplicando iterativamente (6.29), se convierte en una suma de integrales del tipo (6.30) en la que el exponente de t está disminuido en una unidad. El proceso se repite hasta que el exponente correspondiente a t sea 0.

6.5. Artículo: A note on the use of the generalized *Sundman* transformations as temporal variables in celestial mechanics

A continuación se adjunta el artículo «A note on the use of the generalized *Sundman* transformations as temporal variables in celestial mechanics» [75] publicado por la editorial *Taylor & Francis* en febrero del año 2012.

Se agradece a dicha editorial las facilidades concedidas para poder incluir el citado artículo en esta tesis doctoral.

El artículo que se presenta a continuación tiene por objetivo construir un conjunto de integradores semi-analíticos basados en la anomalía generalizada de *Sundman*. Se detalla el proceso seguido para la obtención del desarrollo de la anomalía generalizada de *Sundman* partiendo de las anomalías excéntrica y media. También se obtiene la ecuación de *Kepler* y los desarrollos de la anomalía excéntrica, sin E y $\cos E$ en función de la anomalía generalizada.

Para poder manejar los desarrollos ha sido necesaria la programación de un procesador de series de *Poisson*. Esta herramienta ha sido implementada para poder llevar a cabo las operaciones más comunes con las series y mantener, a su vez, la funcionalidad y eficiencia requeridas.

A note on the use of the generalized Sundman transformations as temporal variables in celestial mechanics

José A. López Ortí*, Vicente Agust Gómez and Miguel Barreda Rochera

Departamento de Matemáticas, Universidad Jaume I, Avenida Sos Baynat s/n, 12071 Castellón, Spain

(Received 1 October 2010; revised version received 7 March 2011; accepted 2 August 2011)

The main aim of this paper is to build up a set of semi-analytical integrators based on the use of a class of anomalies defined by means of a generalized Sundman transformation. The integrators are based on the developments of the mean anomaly and the vector radius according to the new anomaly. To manipulate these developments, a Poisson series processor called *poison.h* has been used. This processor has been written as a C++ class and it contains a set of methods to manage the most common arithmetic and functional operations with these objects.

Keywords: celestial mechanics; planetary theories; algorithms; orbital mechanics; perturbation theory; computational algebra

2010 AMS Subject Classifications: 70F05; 70F10; 70F15; 70M20

1. Introduction

A classical problem in celestial mechanics is the study of the planetary motion, the solutions of which are the so-called planetary theories. These theories can be classified, according to the used integration method, into analytical, semi-analytical and numerical theories.

In certain cases, the numerical theories can be improved by using time transformations defined by means of $dt = g(r) d\tau$, where r is the radius vector of the planet. The use of these transformations can improve the uniformity of the distribution of the orbit of the points defined by $\tau_i = \tau_0 + ih$ and, in certain cases, may improve the variance of local truncation errors [13].

Analytical methods may also present convergence problems when they are applied to bodies with high eccentricities. To solve this problem, Hansen introduced a new set of temporal variables known as partial anomalies, and with these variables, we can obtain developments that are rapidly convergent. This method was extended by Nacozy [12].

In order to regularize the three-body problem, Sundman [15] introduced the transformation $dt = Cr d\tau$. This transformation can be extended as $dt = C_\alpha r^\alpha d\tau$, and it is known as the generalized Sundman transformation. Besides the most common anomalies, for $\alpha = 0$ and $C_0 = 1/n$, we have the mean anomaly M ; for $\alpha = 1$ and $C_1 = \sqrt{(a/\mu)} \tau$, we have the eccentric anomaly E ; and

*Corresponding author. Email: lopez@mat.uji.es

for $\alpha = 2$ and $C_2 = (1/\sqrt{\mu a(1 - e^2)})\tau$, we have the true anomaly V . Nacozy [13] introduced a new anomaly in this class defined by $\alpha = 3/2$ and $C_{3/2} = 1/\sqrt{\mu}$, and this anomaly is called the intermediate anomaly; in this case, the formulas of the two-body problem can be written in closed form [13]. The mean of the quantities a, e, n, μ is the usual one in the two-body problem [2,6].

Other families of anomalies were introduced by Ferrándiz *et al.* [5] by means of $g(r) = r^{3/2}/\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 r}$; these families include the elliptic anomaly [3].

The motion of a body in the solar system is completely defined by the value of its elements [2,6,16]. These values are given by the planetary Lagrange equations [8]:

$$\frac{d\vec{\sigma}_i}{dt} = \vec{f}_i(\vec{\sigma}_1, \dots, \vec{\sigma}_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

The analytical and semi-analytical theories involve the management of the Fourier and Poisson series and the appropriate techniques to develop the inverse of the distance between two planets according to the chosen anomaly [1,7,9,10,14].

In this paper, a general technique to use these temporal variables in analytical and semi-analytical methods will be developed. To achieve this purpose, in Section 2, the concept of the generalized anomaly of Sundman is defined; in this section, the generalized anomaly is connected to the eccentric anomaly, and through this development, we obtain the Kepler equation by inversion, and from this equation, we obtain the most common developments.

In Section 3, we explain the base of the development and the integration of the planetary equations of Lagrange. This problem involves two tasks; in the first place, it is necessary to obtain the development of the radius vector according to the selected anomaly, and in the second place, it is necessary to build up a set of analytical integrators to be used to deal with each Sundman generalized anomaly.

In Section 4, a set of practical examples of basic developments are presented; the series are truncated in fourth order in the eccentricity. These developments are necessary to obtain the analytical development of inverse of the distance between two planets and the cosines of the angle between the vector radii of the two planets.

In Section 5, we analyse the main conclusions of this work.

2. The family of the Sundman generalized anomalies

Let us define the generalized anomaly as $\Psi = \Psi(M)$, where $\Psi(M)$ satisfies that $\Psi(M)$ is a 2π periodic function of M , $d\Psi/dM > 0$, $\Psi(-M) = -\Psi(M)$, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(2\pi) = 2\pi$. Let $dt = C_\alpha r^\alpha d\tau$ be a Sundman transformation of parameter α . From this transformation, we define the Sundman generalized anomaly of parameter α as a variable Ψ_α connected to M by means of

$$\Psi_\alpha = K_\alpha \int_0^M r^{-\alpha} dM, \quad \text{where } K_\alpha = 2\pi \left[\int_0^{2\pi} r^{-\alpha} dM \right]^{-1}. \quad (2)$$

In the next developments, the subindex α will be omitted.

To connect Ψ to M , we can take account of the relation

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (3)$$

and then we can proceed as follows:

$$\Psi = K \int_0^M a^{-\alpha} (1 - e \cos E)^{-\alpha} dM, \quad (4)$$

where M is connected to E through the Kepler equation

$$E - e \sin E = M, \tag{5}$$

and from this equation, we have $dM = (1 - e \cos E) dE$, and so

$$\Psi = K \int_0^E a^{-\alpha} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE. \tag{6}$$

To evaluate this integral, it is interesting to develop the function $(1 - e \cos E)^{1-\alpha}$ as the Fourier series according to the eccentric anomaly E . Let us define a new complex variable $z = \exp(\sqrt{-1}E)$ and let $g_\alpha(e, z)$ be the generating function defined by

$$g_\alpha(e, z) = \left[1 - e \frac{z + z^{-1}}{2} \right]^{1-\alpha}. \tag{7}$$

In the next developments, the subindex α will be omitted:

$$g(e, z) = \frac{1}{2^{1-\alpha}} z^{\alpha-1} [2z - ez^2 - e]^{1-\alpha}. \tag{8}$$

Let $z_1 = (1 - \sqrt{1 - e^2})/e$ and $z_2 = (1 + \sqrt{1 - e^2})/e$ be the roots of the equation $ez^2 - 2z + e = 0$. These roots, in the case of the elliptic motion, are in \mathbb{R} and satisfy $0 < z_1 < 1 < z_2$. After some algebraic manipulation, we get

$$g(e, z) = \frac{1}{2^{1-\alpha}} (z_2)^{\alpha-1} \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{1-\alpha}. \tag{9}$$

In the previous equation, $|z_1/z| < 1$ and $|z/z_2| < 1$. For this reason, we can develop $g(e, z)$ in the series as

$$g(e, z) = (z_2)^{\alpha-1} \frac{e^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \binom{1-\alpha}{s} (-1)^s \frac{z_1^s}{z^s} \right] \left[\sum_{p=0}^{\infty} \binom{1-\alpha}{p} (-1)^p \frac{z^p}{z_2^p} \right], \tag{10}$$

and this equation can be rewritten as

$$g(e, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(e) z^m, \tag{11}$$

where

$$g_m(e) = (-1)^m \sum_{p=0}^{\infty} \binom{1-\alpha}{p} \binom{1-\alpha}{m+p} z_2^{2p} \quad \text{if } m \leq 0, \quad g_m(e) = g_{-m}(e) \quad \text{if } m < 0. \tag{12}$$

To compute K , we have

$$K = 2\pi a^\alpha \left[\int_0^{2\pi} r^{-\alpha} dM \right]^{-1} = 2\pi \left[a^{-\alpha} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE \right]^{-1} = \frac{2a^\alpha}{g_0(e)}. \tag{13}$$

The value of K can be obtained directly by integration:

$$K = a^\alpha \left\{ (1 - e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{e-1}\right) + (1 + e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{1+e}\right) \right\}^{-1}, \tag{14}$$

where $F(a, b, c; z)$ is the hypergeometric function. The functions $g_m(e)$ satisfy the recurrence formula

$$e(1 - \alpha + m)g_m(e) - 2(m - 1)g_{m-1}(e) + (3 - \alpha - m)g_{m-2} = 0, \quad (15)$$

$$g_0(e) = (1 - e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{e-1}\right) + (1 + e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{1+e}\right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} g_1(e) = & (1 - e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{e-1}\right) + (1 + e)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 1; \frac{2e}{1+e}\right) \\ & - \frac{(1 + e)^{1-\alpha}}{1 + e} (1 + e + 4e(1 - \alpha)) F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 2; \frac{2e}{e-1}\right) \\ & - \frac{(1 - e)^{1-\alpha}}{e - 1} (e - 1 + 4e(1 - \alpha)) F\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1, 2; \frac{2e}{e+1}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Let us define $G_m(e, z) = Ka^\alpha g_m(e, z)$, functions g_m satisfy the same recurrence and for $m = 0, 1$. The generalized anomaly is connected to the eccentric anomaly through the equation

$$\Psi = G_0(e)E + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} G_s(e) \sin sE. \quad (18)$$

The eccentric anomaly E is connected to the mean anomaly M through the classical development [16]

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{k} [J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke)] \sin kM, \quad (19)$$

and the functions $\sin mE$ and $\cos mE$ are given by the well-known relations [16]

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} (J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)) \sin kM, \quad (20)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \quad (21)$$

$$\cos mE = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} (J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)) \cos kM, \quad m > 1, \quad (22)$$

where $J_k(x)$ are the first-kind Bessel functions. Replacing Equations (19) and (20) in Equation (18), we obtain

$$\Psi = M + \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s(e, \alpha) \sin sM, \quad (23)$$

where

$$\Psi_k = \frac{e}{k} [J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke)] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{k} G_s(e) (J_{k-s}(ke) + J_{k+s}(ke)), \quad s = 1, 2, \dots \quad (24)$$

To obtain the Kepler equation (it is the development of M according to Ψ), the inversion of Equation (23) is necessary:

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(y). \quad (25)$$

In the particular case $y = x + \varepsilon\psi(y)$, this problem can be solved through the Lagrange inversion formulas [16]:

$$F(x) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \right|_{y=x} [\psi(y)^n F'(y)], \quad (26)$$

and the particular case of $F(y) = y$ can be solved by

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \right|_{y=x} [\psi(y)^n]. \quad (27)$$

This problem is a particular case of the more general problem of the inversion of a function $F(y)$, where

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \varphi_n(y). \quad (28)$$

This problem can be solved by using the Deprit inversion algorithm [4]; a resume of this algorithm is as follows:

$$y(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y_{0,n}(x). \quad (29)$$

This algorithm obtains the development of an analytical function $F(y)$ as

$$F(y, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,0}(y), \quad (30)$$

and from this, $F^*(x, \varepsilon)$ is defined as

$$F^*(x, \varepsilon) = F(y(x, \varepsilon)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,0}(y), \quad (31)$$

and the development

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}, \quad (32)$$

where W_n are defined by

$$W_1 = \varphi_1, \\ W_{n+1} = \varphi_{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} W_{m+1} \frac{d\varphi_{n-m}}{dy}.$$

To use the Deprit algorithm, it is necessary to develop Ψ as

$$M = \Psi + \sum_{s=1}^{\infty} e^s g_s(M), \quad (33)$$

where $g_s(M)$ are the Fourier series in M . From this algorithm, we get the Kepler equation

$$M = \Psi + \sum_{s=1}^{\infty} H_s(e) \sin s\Psi. \quad (34)$$

3. Semi-analytical integrators based on the generalized Sundman anomalies

To integrate the Lagrange planetary equations, it is necessary to develop the second member of these equations as a Poisson series according to the selected anomalies.

Brumberg [3] defined a Poisson series of type (s, l) as a mathematical object defined as

$$S = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_s=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=-\infty}^{\infty} C_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_l} x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} \exp((j_1 y_1 + \cdots + j_l y_l) \sqrt{-1}), \quad (35)$$

where $C_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_l}$ are real or complex numbers and $\Phi_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_l}$ are real numbers. The variables (x_1, \dots, x_s) are called power variables and the variables (y_1, \dots, y_l) are called angular variables.

The second member of the Lagrange planetary equations can be developed as

$$\frac{d\vec{\sigma}_i}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=-\infty}^{\infty} C_i^{j_1, \dots, j_l} t^k \cos(j_1 \Psi_1 + \cdots + j_l \Psi_l + \Phi_{j_1, \dots, j_l}), \quad (36)$$

where t is the time and Ψ_i is the anomaly of the body i . To arrange these developments, it is necessary to develop the radius vector according to the selected anomaly. To achieve this purpose, it is interesting to obtain the development of E , $\sin E$ and $\cos E$ in the Fourier series of the generalized anomaly. Obtaining these quantities from Equation (18) using the inversion Deprit algorithm is suitable.

To integrate the Lagrange planetary equations, the evaluation of the quantities is necessary:

$$\int_{t_0}^t \cos(j_1 \Psi_1 + \cdots + j_l \Psi_l + \Phi_{j_1, \dots, j_l}) dt. \quad (37)$$

This process is immediate if the mean anomalies M_1, \dots, M_k are used in the developments. In the other case, the process is more difficult.

Let Ψ_i be an anomaly connected with M_i through the Kepler equation

$$M_i = \Psi + \sum_{k=0}^{\infty} H_k(e) \cos k\Psi, \quad (38)$$

and from this equation, we get

$$n_i dt = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} k H_k(e_i) \sin k\Psi_i \right) d\Psi_i, \quad (39)$$

where n_i is the mean motion of the body i . From this equation, we get

$$d\Psi_i = n_i \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} T_k(e_i) \sin k\Psi_i \right) dt. \quad (40)$$

Let us define $\xi = j_1 \Psi_1 + \cdots + j_l \Psi_l$, then

$$dt = \frac{1}{j_1 n_1 + \cdots + j_l n_l} d\xi + \left(\sum_{s=1}^l \frac{j_s n_s h(e_s, \Psi_s)}{j_1 n_1 + \cdots + j_l n_l} \right) dt, \quad (41)$$

where

$$h(e_s, \Psi_s) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k K_k(e_s) \sin k\Psi_s \right] \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} T_k(e_s) \sin k\Psi_s \right]. \quad (42)$$

Note that the functions $h_s(e_s)$ are almost of the first order in e_s ; for this reason, the method can be applied as an iterative method.

4. Examples of basic developments

To illustrate what has been discussed in the previous sections, a particular case has been developed. Due to space constraints, the developments have been truncated in the fourth order in eccentricities. The operations described in the previous sections involve a hard management of the Poisson series. For this purpose, we can use a new C++ class developed by the authors called `poisson.h` [11]. This processor uses the Poisson series in the trigonometric form.

The most important features of the class `poisson.h` are as follows: the main public methods of `poisson.h`, which are the arithmetic operations $+$, $-$, $*$, pow ; the extension of the most common functions \sin , \cos , \exp , \dots to be evaluated over Poisson series [3]; and functional operations as Taylor developments and series inversion procedures based on the Lagrange and Deprit methods [4]. The operators and common functions have been overloaded in order to be more user friendly. For more details, see [11].

Let Ψ be a generalized Sundman anomaly of parameter α . The constant K_α is given by

$$K_\alpha = 1 + \frac{1}{4}e^2(\alpha - \alpha^2) + \frac{1}{64}e^4(3\alpha^4 - 10\alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha) + O(e^5). \quad (43)$$

This anomaly is connected to the eccentric anomaly through

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha = E &+ \left(-\frac{1}{8}e^3\alpha^3 + \frac{e^3\alpha^2}{2} - \frac{3e^3\alpha}{8} + e\alpha - e \right) \sin(E) \\ &+ \left(-\frac{1}{48}e^4\alpha^4 + \frac{e^4\alpha^3}{12} - \frac{e^4\alpha^2}{24} - \frac{e^4\alpha}{48} + \frac{e^2\alpha^2}{8} - \frac{e^2\alpha}{8} \right) \sin(2E) \\ &+ \left(\frac{e^3\alpha^3}{72} - \frac{e^3\alpha}{72} \right) \sin(3E) + \left(\frac{e^4\alpha^4}{768} + \frac{e^4\alpha^3}{384} - \frac{e^4\alpha^2}{768} - \frac{e^4\alpha}{384} \right) \sin(4E) + O(e^5). \end{aligned} \quad (44)$$

The development of Ψ_α according to M is given by

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha = M &+ \left(-\frac{1}{8}e^3\alpha^3 + \frac{3e^3\alpha^2}{8} - \frac{3e^3\alpha}{8} - \frac{e^3}{4} + e\alpha \right) \sin(M) \\ &+ \left(-\frac{1}{48}e^4\alpha^4 + \frac{e^4\alpha^2}{12} - \frac{11e^4\alpha}{48} - \frac{e^4}{6} + \frac{e^2\alpha^2}{8} + \frac{3e^2\alpha}{8} \right) \sin(2M) \\ &+ \left(\frac{e^3\alpha^3}{72} + \frac{e^3\alpha^2}{8} + \frac{17e^3\alpha}{72} \right) \sin(3M) \\ &+ \left(\frac{e^4\alpha^4}{768} + \frac{3e^4\alpha^3}{128} + \frac{95e^4\alpha^2}{768} + \frac{71e^4\alpha}{384} \right) \sin(4M) + O(e^5). \end{aligned} \quad (45)$$

The Kepler equation is given by

$$\begin{aligned} M = \Psi &+ \left(\frac{3e^3\alpha^3}{16} - \frac{9e^3\alpha^2}{16} + \frac{3e^3\alpha}{8} - e\alpha \right) \sin(\Psi) \\ &+ \left(-\frac{23}{144}e^4\alpha^4 + \frac{5e^4\alpha^3}{8} - \frac{25e^4\alpha^2}{36} + \frac{11e^4\alpha}{48} + \frac{3e^2\alpha^2}{8} - \frac{3e^2\alpha}{8} \right) \sin(2\Psi) \\ &+ \left(-\frac{29}{144}e^3\alpha^3 + \frac{7e^3\alpha^2}{16} - \frac{17e^3\alpha}{72} \right) \sin(3\Psi) \\ &+ \left(\frac{289e^4\alpha^4}{2304} - \frac{55e^4\alpha^3}{128} + \frac{1127e^4\alpha^2}{2304} - \frac{71e^4\alpha}{384} \right) \sin(4\Psi) + O(e^5). \end{aligned} \quad (46)$$

To develop the second member of the Lagrange planetary equations according to the new anomaly, first it is necessary to obtain the developments of the $\sin E$ and $\cos E$ with respect to the new anomaly. For this purpose, we can use the Deprit algorithm:

$$\begin{aligned}
 E = & \Psi + \left(\frac{3e^3\alpha^3}{16} - \frac{3e^3\alpha^2}{4} + \frac{11e^3\alpha}{16} - \frac{e^3}{8} - e\alpha + e \right) \sin(\Psi) \\
 & + \left(-\frac{23}{144}e^4\alpha^4 + \frac{61e^4\alpha^3}{72} - \frac{13e^4\alpha^2}{9} + \frac{133e^4\alpha}{144} - \frac{e^4}{6} + \frac{3e^2\alpha^2}{8} - \frac{7e^2\alpha}{8} + \frac{e^2}{2} \right) \sin(2\Psi) \\
 & + \left(-\frac{29}{144}e^3\alpha^3 + \frac{3e^3\alpha^2}{4} - \frac{133e^3\alpha}{144} + \frac{3e^3}{8} \right) \sin(3\Psi) \\
 & + \left(\frac{289e^4\alpha^4}{2304} - \frac{743e^4\alpha^3}{1152} + \frac{2855e^4\alpha^2}{2304} - \frac{1213e^4\alpha}{1152} + \frac{e^4}{3} \right) \sin(4\Psi) + O(e^5), \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin E = & \left(\frac{127e^4\alpha^4}{2304} - \frac{293e^4\alpha^3}{1152} + \frac{731e^4\alpha^2}{2304} - \frac{71e^4\alpha}{576} \right. \\
 & \left. + \frac{e^4}{192} - \frac{3e^2\alpha^2}{16} + \frac{5e^2\alpha}{16} - \frac{e^2}{8} + 1 \right) \sin(\Psi) \\
 & + \left(\frac{2e^3\alpha^3}{9} - \frac{3e^3\alpha^2}{4} + \frac{25e^3\alpha}{36} - \frac{e^3}{6} - \frac{e\alpha}{2} + \frac{e}{2} \right) \sin(2\Psi) \\
 & + \left(-\frac{7}{32}e^4\alpha^4 + \frac{67e^4\alpha^3}{64} - \frac{431e^4\alpha^2}{256} + \frac{273e^4\alpha}{256} - \frac{27e^4}{128} \right. \\
 & \left. + \frac{5e^2\alpha^2}{16} - \frac{11e^2\alpha}{16} + \frac{3e^2}{8} \right) \sin(3\Psi) \\
 & + \left(-\frac{31}{144}e^3\alpha^3 + \frac{3e^3\alpha^2}{4} - \frac{125e^3\alpha}{144} + \frac{e^3}{3} \right) \sin(4\Psi) \\
 & + \left(\frac{361e^4\alpha^4}{2304} - \frac{869e^4\alpha^3}{1152} + \frac{1567e^4\alpha^2}{1152} - \frac{2507e^4\alpha}{2304} + \frac{125e^4}{384} \right) \sin(5\Psi) + O(e^5), \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos E = & \frac{e\alpha}{2} - \frac{e}{2} - \frac{1}{16}e^3\alpha^3 + \frac{e^3\alpha^2}{4} - \frac{3e^3\alpha}{16} \\
 & + \left(\frac{215e^4\alpha^4}{2304} - \frac{553e^4\alpha^3}{1152} + \frac{1699e^4\alpha^2}{2304} - \frac{217e^4\alpha}{576} \right. \\
 & \left. + \frac{5e^4}{192} - \frac{5e^2\alpha^2}{16} + \frac{11e^2\alpha}{16} - \frac{3e^2}{8} + 1 \right) \cos(\Psi) \\
 & + \left(\frac{5e^3\alpha^3}{18} - e^3\alpha^2 + \frac{19e^3\alpha}{18} - \frac{e^3}{3} - \frac{e\alpha}{2} + \frac{e}{2} \right) \cos(2\Psi) \\
 & + \left(-\frac{1}{4}e^4\alpha^4 + \frac{79e^4\alpha^3}{64} - \frac{537e^4\alpha^2}{256} + \frac{375e^4\alpha}{256} \right. \\
 & \left. - \frac{45e^4}{128} + \frac{5e^2\alpha^2}{16} - \frac{11e^2\alpha}{16} + \frac{3e^2}{8} \right) \cos(3\Psi) \\
 & + \left(-\frac{31}{144}e^3\alpha^3 + \frac{3e^3\alpha^2}{4} - \frac{125e^3\alpha}{144} + \frac{e^3}{3} \right) \cos(4\Psi)
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{361e^4\alpha^4}{2304} - \frac{869e^4\alpha^3}{1152} + \frac{1567e^4\alpha^2}{1152} - \frac{2507e^4\alpha}{2304} + \frac{125e^4}{384} \right) \cos(5\Psi) + O(e^5). \quad (49)$$

In conclusion, we show an integrator for a term in the form $\cos(2\Psi_1 - 3\Psi_2 + \Phi)$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \cos(2\Psi_1 - 3\Psi_2 + \Phi) dt &= \frac{1}{2n_1 - 3n_2} \sin(2\Psi_1 - 3\Psi_2 + \Phi) \Big|_{t_0}^t \\ &+ \frac{2n_1}{2n_1 - 3n_2} \int_{t_0}^t \cos(2\Psi_1 - 3\Psi_2) h(e_1, \Psi_1, \alpha) dt \\ &- \frac{3n_1}{2n_1 - 3n_2} \int_{t_0}^t \cos(2\Psi_1 - 3\Psi_2) h(e_2, \Psi_2, \alpha) dt, \quad (50) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} h(e, \Psi, \alpha) &= -\frac{e^2\alpha^2}{2} + \frac{3e^4\alpha^4}{32} - \frac{9e^4\alpha^3}{16} + \frac{3e^4\alpha^2}{32} + \left(\frac{3e^3\alpha^3}{16} - \frac{21e^3\alpha^2}{16} + \frac{3e^3\alpha}{8} - e\alpha \right) \cos(\Psi) \\ &+ \left(-\frac{1}{9}e^4\alpha^4 + \frac{7e^4\alpha^3}{8} - \frac{31e^4\alpha^2}{18} + \frac{11e^4\alpha}{24} + \frac{e^2\alpha^2}{4} - \frac{3e^2\alpha}{4} \right) \cos(2\Psi) \\ &+ \left(-\frac{5}{48}e^3\alpha^3 + \frac{9e^3\alpha^2}{16} - \frac{17e^3\alpha}{24} \right) \cos(3\Psi) \\ &+ \left(\frac{31e^4\alpha^4}{576} - \frac{13e^4\alpha^3}{32} + \frac{557e^4\alpha^2}{576} - \frac{71e^4\alpha}{96} \right) \cos(4\Psi) + O(e^5). \quad (51) \end{aligned}$$

5. Concluding remarks

This paper has extended the most usual formulas of two-body problem in order to arrange an analytical development of the equations of perturbed motion. These formulas include the development of the generalized anomaly according to the eccentric and mean anomalies, the Kepler equation and the expansion of the $\sin E$ and $\cos E$ according to the generalized anomaly.

An algorithm to construct integrators to be used in the analytical and semi-analytical planetary theories has been developed. These integrators can be used as an iterative method, where the order of residuals in eccentricities increase in one unit in each iteration.

The process described above is a suitable algorithm to construct a set of semi-analytical integrators using an extended class of anomalies as temporal variables. The use of the C++ class `poisson.h` allows the management of the equations; the kernel of this class is available if it is required.

Acknowledgements

This research has been partially supported by Grant GV/2009/027 from the Generalitat Valenciana and Grant P1-061455.01/1 from Bancaja.

References

- [1] P. Bretagnon and G. Francou, *Variations seculaires des orbites planetaires. Théorie VSOP87*, Astron. Astrophys. 114 (1988), pp. 69–75.
- [2] D. Brower and G.M. Clemence, *Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, 1965.

- [3] V.A. Brumberg, *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [4] A. Deprit, *A note on Lagrange's inversion formula*, *Celestial Mech.* 20 (1979), pp. 325–327.
- [5] J.M. Ferrándiz, S. Ferrer, and M.L. Sein-Echaluze, *Generalized elliptic anomalies*, *Celestial Mech.* 40 (1987), pp. 315–328.
- [6] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
- [7] J. Kovalewsky, *Introduction to Celestial Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1967.
- [8] L.L. Levallois and J. Kovalewsky, *Geodesie Generale*, Vol. 4, Eyrolles, Paris, 1971.
- [9] J.A. López and M. Barreda, *A formulation to obtain semi-analytical planetary theories using true anomalies as temporal variables*, *J. Comput. Appl. Math.* 204 (2007), pp. 77–83.
- [10] J.A. López, M. Barreda, and J. Artes, *Integration algorithms to construct semi-analytical planetary theories*, *WSEAS Trans. Math.* 6 (2006), pp. 609–614.
- [11] J.A. Lopez, V. Agost, and M. Barreda, *A new C++ Poisson series processor*, Proceedings of International Conference on Computational Methods in Science and Engineering ICCMSE, Rodhos, Greece, 2009.
- [12] P. Nacozy, *Hansen method of partial anomalies: An application*, *Astron. J.* 74 (1969), pp. 544–550.
- [13] P. Nacozy, *The intermediate anomaly*, *Celestial Mech.* 16 (1977), pp. 309–313.
- [14] J.L. Simon, *Computation of the first and second derivatives of the Lagrange equations by harmonic analysis*, *Astronom. Astrophys.* 17 (1982), pp. 661–692.
- [15] K. Sundman, *Memoire sur le probleme des trois corps*, *Acta Math.* 36 (1912), pp. 105–179.
- [16] F.F. Tisserand, *Traité de Mecanique Celeste*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

Capítulo 7

Teorías planetarias analíticas mediante el uso de anomalías generalizadas de *Sundman*

Contenido

7.1. Introducción	141
7.1.1. Métodos analíticos	143
7.1.2. Métodos numéricos	144
7.1.3. Anomalías generalizadas	145
7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i>	149
7.3. Integración analítica de las ecuaciones planetarias de <i>Lagrange</i> mediante el uso de anomalías generalizadas de <i>Sundman</i>	155
7.4. Artículo: An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using <i>Sundman</i> generalized variables	157

7.1. Introducción

Las teorías planetarias tienen como objetivo explicar el movimiento de los cuerpos celestes, naturales o artificiales, que componen el Sistema Solar. Dicho estudio puede abordarse en general como un problema de dos cuerpos tomando el Sol como primario y un planeta como secundario, el planeta como primario y un satélite como secundario, la Tierra como primario y un satélite artificial como secundario, etcéte-

ra, sobre el que actúan como perturbaciones las fuerzas gravitatorias debidas a los otros cuerpos.

El problema de dos cuerpos es un problema completamente integrable cuya solución viene dada por una cónica en cuyo foco principal se encuentra el primario siendo una elipse en el caso periódico y una parábola o una hipérbola —rama próxima al foco principal— en el caso de no retorno. Este movimiento es generalizable al caso repulsivo —como puede ser el caso de dos cargas eléctricas— siendo en este caso el movimiento hiperbólico sobre la otra rama de la hipérbola. Como ya se vio en el apartado (2.8.2), el problema de dos cuerpos queda totalmente determinado mediante el valor de seis constantes generalmente conocidas como elementos orbitales; existen diversas formas de referirse a estos elementos y en esta memoria se ha adoptado el conjunto III de *Brower and Clemence* [24], representado por $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ y al que se hace referencia en innumerables ocasiones.

La integración de estos problemas ha sido abordada tradicionalmente mediante métodos analíticos; estos se basan en sustituir los elementos del problema de dos cuerpos por seis funciones del tiempo llamadas elementos osculadores, y cuyos valores se obtienen mediante el método de variación de constantes de *Lagrange*. La aparición en el siglo XX de los ordenadores electrónicos impulsó de modo notable los métodos numéricos, los cuales fueron aplicados con profusión a los problemas de movimiento orbital mediante la integración de las ecuaciones de movimiento, generalmente en este caso referidas directamente a coordenadas y velocidades. Además, los métodos numéricos de integración proporcionan en general buenas soluciones; son robustos y mediante técnicas de paso variable se adaptan bien a casi todos los problemas. Una visión general de los métodos numéricos aplicados en mecánica celeste —incluyendo los simplécticos— puede encontrarse, entre otros, en *Hairer* [54].

El objeto principal del presente capítulo consiste en abordar el estudio de métodos basados en el uso de ciertas familias de anomalías dependientes de uno o varios parámetros, que permitan mejorar las técnicas de integración utilizadas en el estudio de problemas ligados al movimiento orbital, tanto en el caso de la teoría de satélites como en el caso de las teorías planetarias del sistema solar. Esta memoria está enfocada al estudio de técnicas de integración de ecuaciones de movimiento basadas en coordenadas intrínsecas tales como las ecuaciones planetarias de *Lagrange*.

En el caso del estudio del movimiento de un satélite, los métodos numéricos suelen presentar, para el caso de un paso de integración constante, mayores errores en la región del perigeo. Esto se debe, entre otras causas, a que al tomar una partición regular en el tiempo, las posiciones del satélite correspondientes a dichos tiempos no están repartidas de modo uniforme en la órbita, resultando una mayor concentración de puntos en la parte de la órbita en que menor es la velocidad del secundario, lo cual constituye una casuística contraria a la deseable. Esta problemática se presenta en mayor grado cuanto mayor es la excentricidad de la órbita.

7. Teorías planetarias analíticas

También en el caso de métodos analíticos resulta problemático abordar el estudio de objetos cuya excentricidad orbital es elevada —como puede ser el caso de determinados asteroides, cometas en general o el planeta enano Plutón—, pues los desarrollos obtenidos resultan excesivamente complicados.

A la vista de lo expuesto, el problema del movimiento planetario en el Sistema Solar puede ser abordado, bien mediante aproximaciones analíticas a las ecuaciones de movimiento, bien mediante métodos numéricos de integración.

7.1.1. Métodos analíticos

Hasta el año 1960, la solución completa de este problema fue estudiada únicamente de modo analítico construyéndose sucesivas teorías las cuales fueron refinándose para ajustarse a las observaciones astronómicas.

La construcción de teorías planetarias analíticas es un problema clásico en el ámbito de la mecánica celeste, el cual ha sido abordado por numerosos autores entre los que destacan *Laplace*; *Leverrier* [70], [71] o *Newcomb* [97], [98]; y más recientemente por *Chapront* [30]; *Bretagnon* [17], [18]; *Krasinsky* [65] o *Simon* [112]; esta relación no pretende ser ni mucho menos exhaustiva.

Los métodos analíticos están basados en la teoría de perturbación, esto es, se considera en primer lugar un problema de dos cuerpos para el sistema formado por el Sol y cada planeta —el cual se resuelve mediante la determinación de los elementos orbitales de cada planeta— y a continuación se estudia la evolución temporal de estos. Esa evolución, como es sabido, viene dada por las ecuaciones planetarias de *Lagrange* y estas ecuaciones se integran mediante el método de perturbación. Para este propósito, es necesario obtener expresiones integrables en el segundo miembro de las ecuaciones de Lagrange, lo cual se logra utilizando los desarrollos clásicos del problema de dos cuerpos [5], [22], [23], [53], [120], mediante lo cual se obtienen los desarrollos en serie de *Poisson* de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* [15], [90], [120].

La mayor dificultad que presentan los métodos analíticos reside en la obtención del desarrollo en serie del inverso de la distancia entre los distintos cuerpos que intervienen en el problema. Tales desarrollos pueden obtenerse mediante métodos analíticos a partir de desarrollos literales del segundo miembro de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* hasta el orden deseado, en este sentido cabe destacar las obras de *Brouwer y Clemence* [23], y de *Hagihara* [53]; desarrollos más recientes han sido obtenidos por *Abbu-el-Atta* [5].

Un método alternativo para obtener aproximaciones funcionales al inverso de la distancia son los llamados métodos semi-analíticos, siendo el más representativo de estos el método iterativo de *Kovalevsky* [64]. Dicho método —tal y como se

introdujo en el punto 5.5— está basado en una fórmula iterativa, la cual proporciona una sucesión de iteraciones que converge al inverso de la distancia requerido. Este método proporciona aproximaciones al inverso de la distancia tan precisas como sea necesario. Las aproximaciones anteriores pueden ser obtenidas, bien en forma de serie de *Fourier* respecto de las anomalías de los planetas considerados, bien como serie trigonométrica en función explícita del tiempo. Dentro de estas líneas están las teorías planetarias semianalíticas del IMCCE —antes Bureau des longitudes—, las cuales son la base de las efemérides planetarias de dicho instituto. Dentro de estas teorías cabe destacar las teorías *VSOP82* y *VSOP87* de *Bretagnon* [17], [18], y las más recientes [90], [91], [111], entre las que destaca la *VSOP2000* [92].

7.1.2. Métodos numéricos

Los métodos numéricos se basan en la integración de las ecuaciones de movimiento en coordenadas, las cuales deben incluir necesariamente a la totalidad de los planetas, la Luna, y las ecuaciones del movimiento de rotación Tierra–Luna. Recientemente, para mejorar la precisión de estas teorías se incluye en la integración simultánea, además de los cuerpos anteriores, un amplio conjunto de asteroides.

La introducción del cálculo electrónico impulsó los primeros intentos de obtener teorías del movimiento del sistema solar mediante integración numérica, destacando en este sentido, el trabajo de *Eckert* [39]. En dicha investigación se calcularon por primera vez las coordenadas de los cinco planetas exteriores para un intervalo temporal de cuatrocientos años mediante técnicas de integración numérica.

Dentro de los métodos numéricos cabe destacar que la primera teoría completa, si bien limitada, fue obtenida por *Oesterwinter y Cohen* [32] en 1972 para el intervalo 1911–1973. A partir de esta época, con objeto de dar apoyo a la navegación espacial, *Williams, Standish, Folkner* o *Newhall* —[130], [99], [115], [45]— desarrollaron, entre otros, en el Jet Propulsion Laboratory del Instituto Tecnológico de California un conjunto de teorías relacionadas con diversas efemérides planetarias y lunares: DE102, DE200, DE431, etc.

Experimentos realizados en el espacio y la introducción de nuevas técnicas observacionales —tales como determinación de distancias mediante radar, determinaciones de la distancia lunar mediante láser, interferometría VLBI, etc.— contrastaron que la precisión de las efemérides planetarias clásicas no era compatible con la precisión de las observaciones, siendo por tanto necesario el desarrollo de nuevas teorías del movimiento planetario.

En la actualidad, las teorías numéricas más importantes son las teorías DE403, desarrolladas por *Williams, Standish, Folkner* y otros [98] en las que se basan las efemérides del JPL; las teorías EPM, desarrolladas por *Krasinsky y Pitjeva* [103] en el Instituto de Astronomía Aplicada de San Petesburgo (IAA), utilizadas para

7. Teorías planetarias analíticas

el cálculo de las efemérides del IAA; y también las teorías INPOP, desarrolladas recientemente en el Instituto de Mecánica Celeste y Calculo de Efemérides (IMCCE) del Bureau des Longitudes por *Laskar* y otros [43]. Finalmente, indicar que en este centro, IMCCE, también se están desarrollando en la actualidad nuevas teorías analíticas.

Por otra parte, los métodos numéricos proporcionan directamente tablas de valores para las coordenadas planetarias y también indirectamente para los elementos planetarios, siendo éstos susceptibles de análisis armónico. De este modo, los elementos pueden ser obtenidos como desarrollos en serie, bien en función del tiempo, bien con respecto a combinaciones lineales de anomalías.

7.1.3. Anomalías generalizadas

Tanto los métodos analíticos como los numéricos presentan inconvenientes y dificultades. Por un lado, el uso de métodos analíticos y semianalíticos presenta —debido a la necesidad de obtener desarrollos precisos— inconvenientes cuando la excentricidad de las órbitas es elevada. Por otra parte, los métodos numéricos producen mayores errores en la zona del periastro, problema que se acrecienta también cuando la excentricidad es grande.

Una posible solución a estos problemas es la elección de una adecuada variable temporal. En este sentido, *Hansen* [94] en 1856 introdujo el concepto de anomalías parciales, de modo que según en qué región de la órbita se encontrase el cuerpo, los desarrollos se realizarían según una anomalía u otra. Esta línea fue perfeccionada por *Gylden* en 1870, *Von Asten* en 1872, *Callandraeau* en 1882, *Bohlin* en 1888 entre otros. *Nacozy* en 1969 [94] siguiendo el método de *Hansen* obtuvo una solución para el cometa *Encke* cuya excentricidad tiene valor $e = 0,84$, siendo ésta validada para un intervalo de cincuenta años mediante su comparación con la obtenida aplicando un método de integración numérica para perturbaciones generales. También *Skripnichenko* [113] utilizó el método de las anomalías parciales de *Hansen* para el cálculo de perturbaciones en el movimiento planetario.

En el año 1912, *Sundman* [94], con objeto de regularizar el punto $r = 0$ en las ecuaciones de movimiento, introdujo una transformación $dt = Cr ds$ en la variable temporal. *Nacozy* [95] (1977) introdujo el concepto de transformación generalizada de *Sundman* dada por $dt = Cr^n ds$, estudiando el caso particular $n = \frac{3}{2}$ e introduciendo a partir de éste el concepto de anomalía intermedia.

Con el uso de la anomalía intermedia como variable de integración se consiguió una mejor distribución de los errores de truncamiento local de los métodos de integración numérica, principalmente cuando la excentricidad era elevada. Es importante destacar que esta familia de anomalías incluye las anomalías media, M , excéntrica, E , y verdadera, V , las cuales corresponden a los valores del parámetro $n = 0$, $n = 1$

y $n = 2$, respectivamente.

También resulta de interés un conjunto de trabajos en los que se introduce una nueva variable temporal llamada anomalía elíptica. Esta anomalía no forma parte de la familia generalizada de *Sundman*. *Ferrándiz* en 1987 [41] introdujo una nueva familia de transformaciones biparamétrica en las que se incluyen otras anomalías. Más recientemente, *Floría* en 1995 [42] conecta la anomalía intermedia con las llamadas funciones universales introducidas por *Stumpf* [117], así llamadas por ser independientes del tipo de órbita (elíptica, parabólica o hiperbólica). *Fukushima* [46] introdujo la anomalía antifocal para el estudio del movimiento en el caso de bajas excentricidades.

A partir de los anteriores estudios, como resultado del trabajo realizado se pretende definir una serie de funcionales que midan la calidad de la integración, como el valor máximo del error de truncamiento local o la varianza de dicho error local a lo largo de la órbita. Estas funciones dependen por una parte del integrador y por otra de la anomalía elegida como variable temporal.

En este sentido es importante mencionar algunos resultados previos obtenidos por diversos autores. Para el caso de la familia generalizada de *Sundman* puede consultarse [76]; en el caso de la familia de anomalías naturales [81]; y en el caso de las anomalías definidas por una familia de transformaciones geométricas [79]. En este último se obtiene el valor del parámetro que optimiza los errores de integración y se analiza la validez de los valores obtenidos; esto se consigue estudiando diversos problemas perturbados con el objetivo de contrastar la bondad de los resultados obtenidos. El autor de esta tesis [80] ha estudiado una familia bi-paramétrica de transformaciones que engloba a las anomalías de *Sundman*, a la longitud de arco regularizada de *Brumberg*, a la anomalía elíptica definida por *Brumberg* y *Fukushima*, etc. El estudio en profundidad de esta familia se presentará en el siguiente capítulo.

Respecto a los métodos analíticos y semianalíticos es necesario indicar de nuevo que su calidad depende fundamentalmente de la precisión obtenida en los desarrollos del inverso de la distancia, siendo éste uno de los principales problemas cuando las excentricidades de las órbitas no se pueden considerar próximas a cero. En este sentido cabe destacar el trabajo de *Williams* [130], el cual aborda el desarrollo del inverso de la distancia Neptuno-Plutón utilizando anomalías excéntricas como variables temporales en lugar de los clásicos desarrollos en anomalías medias; con esta técnica consiguió recortar la longitud de las series.

También en este sentido, y con propósitos similares, destacan los trabajos de *Brumberg* [27], *Fukushima* [26], [28] y *Chapront*, [31] entre otros, los cuales abordan el estudio del problema mediante el uso de las llamadas anomalías elípticas en los desarrollos. También se ha estudiado el uso de anomalías verdaderas como argumentos temporales en los desarrollos [72], [73], [74], [75], [83], obteniendo como resultado también desarrollos más compactos. Siguiendo la misma línea de investi-

7. Teorías planetarias analíticas

gación, también se ha estudiado de modo analítico el movimiento planetario usando anomalías generalizadas de *Sundman* como variables temporales [78] consiguiéndose interesantes resultados.

Asimismo, debe indicarse que la integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en los distintos órdenes de perturbación no resulta complicada cuando ésta se efectúa respecto a anomalías medias, siendo en este caso el mayor problema los pequeños denominadores. Desgraciadamente, éste no es el caso cuando son utilizadas otras anomalías, pues además del problema de los pequeños denominadores, deben obtenerse métodos de integración apropiados. Para resolver este problema, *Brumberg* propuso un método iterativo para abordar la integración en el caso del uso de la anomalía elíptica como variable de integración. Este método ha sido utilizado por [83], primero aplicado a nivel teórico a una anomalía arbitraria, y luego aplicado a la familia generalizada de *Sundman* [84]. Es, por tanto, necesaria su aplicación a otras familias y para tal fin deben obtenerse los desarrollos analíticos en las distintas anomalías, en particular la ecuación de *Kepler*, y los desarrollos del radio vector y de las coordenadas.

El manejo de los desarrollos que resultan de lo expuesto en los puntos anteriores es una tarea muy ardua y únicamente puede ser abordada con la precisión que requieren los cálculos si se dispone de una herramienta que permita el manejo de estos objetos —series de *Fourier* y las más generales series de *Poisson*— que aparecen en el proceso. En este sentido, una gran diversidad de autores —*Broucke* [20], *Rom* [107], *Abad y San Juan* [1], *Deprit* [37], *Ivanova* [57], *Navarro* [96], etc.— han desarrollado diversas herramientas que reciben el nombre genérico de procesadores de series de *Poisson* o PSP. Siguiendo la misma dinámica de trabajo, para el desarrollo de esta tesis ha sido necesario el desarrollo y uso de un PSP que incluya operaciones aritméticas con series de *Poisson*, cálculo de funciones elementales —seno, coseno, logaritmo, exponencial, etc.— con tales objetos, y operaciones funcionales tales como desarrollos en serie de *Taylor*, inversión de series, e integración temporal de series. Dicho procesador, del que se dispone una versión adecuada a la anomalía verdadera, debe ser adaptado a las nuevas familias siguiendo un método similar al usado por *López* [78].

Para terminar el presente capítulo se llevará a cabo la implementación en un caso real del uso de las transformaciones introducidas en el capítulo anterior. Para ello, se construirá una teoría analítica del movimiento perturbado del par Júpiter–Saturno. La elección de estos dos astros no es fortuita, más bien todo lo contrario, ya que el par contiene una de las principales desigualdades que aparecen en el sistema solar, pues la relación entre las anomalías medias de Júpiter, n_J , y Saturno, n_S , satisface de modo muy aproximado la relación $5n_S - 2n_J = 0$. Este hecho, que en sí es una complicación, puede ser de gran ayuda a la hora de validar los resultados obtenidos; de este modo, se contrastan resultados obtenidos en situaciones en las que, debido a la relación anterior, podrían producir errores.

A modo de ejemplo se procederá a integrar las ecuaciones planetarias de *Lagrange* (4.14) en primer orden de perturbación usando como variable temporal anomalías de la familia generalizada de *Sundman* y mostrándose las desigualdades correspondientes a los semiejes mayores de Júpiter y Saturno para las anomalías Ψ_α con valores de α de 0,5; 1,0; 1,5 y 2,0. Con el objetivo de contrastar los resultados obtenidos con equivalentes calculados por *Chapront* [30] también se obtendrá la integración para $\alpha = 0$ de modo que pueda constatarse la bondad del método dada la coincidencia de resultados.

Para abordar este trabajo van a ser necesarios una serie de requerimientos. En primer lugar, será necesario obtener los desarrollos analíticos de x , y , y z para ambos planetas. Para continuar será necesario obtener el desarrollo analítico de $\cos \gamma$, siendo γ el ángulo que forman los radio vectores Sol–Júpiter y Sol–Saturno. El siguiente paso será calcular el inverso de la distancia $\frac{1}{\Delta}$ entre ambos planetas. Luego se desarrollarán los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de las anomalías arbitrarias Ψ_α y Ψ'_α ; la primera para Júpiter y la segunda para Saturno. Para terminar se procederá a la integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*.

7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*

Las ecuaciones planetarias de *Lagrange* (4.14) determinan la solución del problema de dos cuerpos perturbado por potenciales conservativos; como ya se vio en capítulos anteriores, las variaciones de los elementos respecto al tiempo toman la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{array} \right.$$

y en todas ellas puede observarse que aparecen las derivadas parciales del potencial perturbador respecto a los elementos keplerianos así como los elementos a , e e i . Nótese que en 4.3.2 ya se hizo el cambio necesario para eliminar la componente de no linealidad.

En el capítulo 5 se describió de forma genérica el proceso de integración de estas ecuaciones, las manipulaciones previas necesarias, y la discusión de sus soluciones. En este capítulo se pretende usar como variable temporal la recientemente introducida anomalía generalizada de *Sundman*, Ψ_α , cuyos principales desarrollos han sido obtenidos en el capítulo anterior.

Este proceso de integración respecto a la nueva variable es complicado, pues es necesario el desarrollo del potencial perturbador, el cálculo del inverso de la distancia —el cual se obtiene mediante el algoritmo de *Kovalevsky* tomando como base el desarrollo de Δ^2 — y los desarrollos de $\sin E$ y $\cos E$, todos ellos en función de la anomalía Ψ_α . A continuación se describirá este proceso con más detalle.

Antes de introducir la integración de las ecuaciones anteriores, se debe tener en cuenta que Ψ_α es una función de α , $\Psi_\alpha = \Psi(\alpha)$, y cada uno de los planetas tiene

7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias

asociada una anomalía y un parámetro α independientes. Así, se tendrá que para el primer planeta, $\Psi_{1,\alpha_1} = \Psi_1(\alpha_1)$, para el segundo planeta $\Psi_{2,\alpha_2} = \Psi_2(\alpha_2)$, etc. Por simplicidad se ha tomado que $\alpha_1 = \alpha_2$, pero no sería complicado extender el estudio al caso en el que las anomalías no coincidan. Además, en este capítulo —en aras de una mejor lectura y comprensión del texto— se va a prescindir de subíndice α cuando se hace referencia a Ψ_α . Así, $\Psi_i = \Psi_i(\alpha_i)$ y de forma genérica $\Psi = \Psi(\alpha)$.

Para poder llevar a cabo el proceso de integración se requiere expresar los segundos miembros de las ecuaciones planetarias como desarrollos en serie de *Fourier* en función de la nueva anomalía. Este proceso de integración se introdujo en el apartado 6.4 y su aplicación a (4.14) tiene como resultado una teoría planetaria en base a Ψ .

Para desarrollar los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de la anomalía de la familia de *Sundman* debe procederse, en primer lugar, a la obtención del desarrollo en serie de *Fourier* de las cantidades $\sin E$ y $\cos E$ en función de Ψ . A tal efecto, se cuenta, por una parte, con un estudio teórico de cómo realizar tales desarrollos; este proceso aparece detallado en el capítulo 6.

Por otra parte, se cuenta con un procesador de series de *Poisson*, que permite la obtención de los desarrollos del capítulo anterior en forma semianalítica. Este procesador es capaz de alcanzar órdenes muy altos en la excentricidad gozando por ello de altísima precisión. Desgraciadamente, los algoritmos construidos con *Mathematica* y en caso de requerirse muy altas precisiones no son lo suficientemente eficientes debido a su lentitud.

Con el objetivo de precisar el lenguaje utilizado, cuando se hace referencia a desarrollos semianalíticos se habla de aquellos desarrollos en los que los coeficientes de las series de *Fourier* —los cuales dependen de los elementos métricos— aparecen de forma numérica; además, las expresiones analíticas de los ángulos y la fase, dependientes de Ω y ω , se mantienen dentro de los cosenos en forma literal.

A partir del desarrollo de E , dado por (6.14) es posible obtener, mediante el algoritmo de *Deprit* u otro procedimiento alternativo, los correspondientes valores de E , $\sin E$ y $\cos E$ como desarrollos en serie de *Fourier* tomando como variable Ψ ,

$$E = \Psi + \sum_k H_k \cos(k\Psi + b_k), \quad (7.1)$$

$$\cos E = \sum_k A'_k \cos(k\Psi + b'_k), \quad (7.2)$$

$$\sin E = \sum_k A_k \cos(k\Psi + b_k), \quad (7.3)$$

7. Teorías planetarias analíticas

donde $b_k = \frac{3\pi}{2}$ y $b'_k = 0$, siendo de este modo posible obtener las coordenadas en el plano orbital en función de la nueva anomalía en la forma que utiliza el procesador de series de *Poisson*.

Para determinar los desarrollos de las coordenadas del secundario en el plano orbital basta con sustituir los desarrollos anteriores en (2.47)

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e), \\ \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \zeta = 0, \end{cases}$$

en forma de serie de *Fourier*.

Como nota aclaratoria es importante mencionar que debido a la estructura del procesador de series de *Poisson* que hemos construido, las series de *Fourier* no se manejan en su forma habitual $a_k \cos k\Psi + b_k \sin k\Psi$, sino en su forma amplitud-fase equivalente, $A_k \cos(k\Psi + \beta_k)$.

A partir de los valores (ξ, η, ζ) es posible obtener los desarrollos en serie de *Fourier* de las coordenadas orbitales $\vec{r} = (x, y, z)$ como

$$\vec{r} = R_3(-\Omega) \cdot R_1(-i) \cdot R_3(-\omega),$$

donde $R_k(\theta)$ representa la matriz de rotación de ángulo θ en torno al k -ésimo eje.

También es necesario el cálculo de r y $\frac{1}{r}$. El primero de ellos es sencillo dado que $r = a(1 - e \cos E)$. Para obtener el segundo basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cos^k E,$$

y dado que el desarrollo de $\cos E$ es conocido, es posible obtener, mediante el procesador de series de *Poisson*, $\frac{1}{r}$ en función de Ψ con la precisión que se requiera.

Por otra parte, la ecuación de *Kepler* se expresa de modo sencillo en función de Ψ sin más que reemplazar en ella E y $\sin E$ por sus desarrollos, obteniéndose

$$M = \Psi + \sum_k K_k \cos(k\Psi + b_k). \quad (7.4)$$

Finalmente, mediante la inversión de la ecuación de *Kepler* obtener

7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias

$$\Psi = M + \sum_k S_k \cos(kM + b_k), \quad (7.5)$$

ecuación necesaria para realizar la integración cuando se expresan las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de Ψ_1, \dots, Ψ_N .

Además, de forma alternativa es posible obtener los desarrollos explícitos de $\frac{a}{r}$ y $\frac{r}{a}$ haciendo referencia a la anomalía biparamétrica, $\Psi_{\alpha,\beta}$, que se introducirá en el capítulo siguiente. Para ello no hay más que anular el segundo parámetro en las ecuaciones (41) y (42) del artículo adjunto [80] para obtener $\Psi = \Psi_{\alpha,0}$. A modo de ejemplo, estos desarrollos —hasta tercer orden en la excentricidad y después de hacer la sustitución $\beta = 0$ — quedan como

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} = & 1 + \frac{\alpha}{2}e^2 + \left[e - \left(\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{19}{16}\alpha + \frac{1}{8} \right) e^3 \right] \cos \Psi + \\ & + \left[1 - \frac{\alpha}{2}e^2 \right] \cos 2\Psi + \left[\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{19}{16}\alpha + \frac{91}{8} \right] e^3 \cos 3\Psi \end{aligned} \quad (7.6)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = & 1 + \frac{1-\alpha}{2}e^2 - \left[e - \left(\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{11}{16}\alpha + \frac{3}{8} \right) e^3 \right] \cos \Psi + \\ & + \left[\frac{\alpha-1}{2}e^2 \right] \cos 2\Psi + \left[\frac{-5}{16}\alpha^2 + \frac{11}{16}\alpha - \frac{3}{8} \right] e^3 \cos 3\Psi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Del mismo modo, se pueden obtener el resto de los desarrollos involucrados en el problema de dos cuerpos tomando las ecuaciones (37)–(40) del mencionado artículo

$$\begin{aligned} E = & \Psi + \left[(1-\alpha)e + \left(\frac{3}{16}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{11}{16}\alpha - \frac{1}{8} \right) e^3 \right] \sin \Psi + \\ & + \left[\frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{7}{8}\alpha + \frac{1}{2} \right] e^2 \sin 2\Psi - \\ & - \left[\frac{29}{144}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{133}{144}\alpha - \frac{3}{8} \right] e^3 \sin 3\Psi, \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned}
 \sin E = & \left[1 + \left(-\frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{5}{16}\alpha - \frac{1}{8} \right) e^2 \right] \sin \Psi + \\
 & + \left[\frac{(1-\alpha)e}{2} + \left(\frac{2}{9}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{25}{36}\alpha - \frac{1}{6} \right) e^3 \right] e^3 \sin 2\Psi + \\
 & + \left[\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{11}{16}\alpha + \frac{3}{8} \right] e^2 \sin 3\Psi + \\
 & + \left[-\frac{31}{144}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{125}{144}\alpha + \frac{1}{3} \right] e^3 \sin 4\Psi,
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}
 \cos E = & \frac{\alpha-1}{2}e - \left[\frac{\alpha^2}{4} + \frac{3}{16}\alpha + \frac{\alpha^3}{16} \right] e^3 + \\
 & + \left[1 - \left(\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{11}{16}\alpha + \frac{3}{8} \right) e^2 \right] \cos \Psi + \\
 & + \left[\frac{1-\alpha}{2}e + \left(\frac{5}{18}\alpha^3 - \alpha^2 + \frac{19}{18}\alpha - \frac{1}{3} \right) e^3 \right] \cos 2\Psi + \\
 & + \left[\frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{11}{16}\alpha + \frac{3}{8} \right] e^2 \cos 3\Psi + \\
 & + \left[\frac{-31}{144}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{125}{144}\alpha + \frac{1}{3} \right] e^3 \cos 4\Psi
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

y la ecuación de *Kepler*

$$\begin{aligned}
 M = \Psi_\alpha + & \left[-\alpha e + \left(\frac{3}{16}\alpha^3 - \frac{9}{16}\alpha^2 + \frac{3\alpha}{8} \right) e^3 \right] \sin \Psi + \\
 & + \left[\frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{3}{8}\alpha \right] e^2 \sin 2\Psi + \\
 & + \left[\frac{-29}{144}\alpha^3 + \frac{7}{16}\alpha^2 - \frac{17}{72}\alpha \right] e^3 \sin 3\Psi.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

En el caso que nos atañe, estas técnicas se aplicarán —a modo de test— a dos planetas: Júpiter y Saturno, dado que en este caso aparecen importantes desigualdades.

7.2. Desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias

El cálculo de las derivadas parciales del potencial perturbador respecto a un elemento genérico σ se realiza a partir de la expresión (5.39). En la descomposición de las parciales de \mathcal{R} intervienen las coordenadas orbitales y esto hace que deban calcularse dos tipos de parciales. Por un lado, las parciales de \mathcal{R} respecto a x , y y z —recuadradas en 7.12— y, por otro, las parciales de las coordenadas orbitales respecto a los elementos —recuadradas en (7.13)—.

Respecto a las primeras,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} = \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z}} \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \quad (7.12)$$

—como ya se introdujo en (5.40)— toman la forma

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} = G m' \left(\frac{x'_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{x'_i}{(r')^3} \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

y en ellas puede observarse la necesidad de calcular el desarrollo del inverso de la distancia entre los dos planetas. El desarrollo de $\frac{1}{\Delta}$ se obtiene aplicando el algoritmo de *Kovalesvsky* [64] y la semilla o punto inicial del proceso iterativo es

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

cuyo desarrollo en función de las anomalías Ψ y Ψ' correspondientes a ambos planetas puede obtenerse mediante el uso del procesador de series de *Poisson* a partir de las ya conocidas (x, y, z) y (x', y', z') .

El valor de $\frac{1}{\Delta}$ debe calcularse con precisión muy alta y este objetivo se logra mediante el uso del procesador de series de *Poisson*. Este cálculo, cabe destacar, se realiza de modo muy eficiente. En la Tabla 3 del artículo adjunto [78] se presentan las distintas iteraciones que ha necesitado el algoritmo junto con el error cometido para cada valor del parámetro α .

Las parciales de las coordenadas orbitales respecto a los elementos,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \boxed{\frac{\partial x}{\partial \sigma}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} \boxed{\frac{\partial y}{\partial \sigma}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \boxed{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}, \quad (7.13)$$

vienen detalladas por las fórmulas (5.46)–(5.51), pero en ellas puede observarse que aparecen las expresiones de $\sin V$ y $\cos V$ y se precisa obtener los desarrollos con

respecto a Ψ . Para realizar este cambio, partiendo de las ecuaciones (2.18) y (2.19), se tiene que

$$\cos V = \frac{a}{r}(1 - e \cos E) \quad (7.14)$$

y

$$\sin V = \frac{a}{r}\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (7.15)$$

Los desarrollos de $\cos V$ y $\sin V$ se obtienen simplemente reemplazando en (7.14) y (7.15) los desarrollos de $\frac{a}{r}$, $\cos E$ y $\sin E$ ya obtenidos anteriormente.

Con todos los desarrollos de las parciales $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ y del inverso de la distancia es posible obtener los desarrollos en serie de *Fourier* de $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}$ y los desarrollos de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*. Después de este proceso, las ecuaciones quedan preparadas para su posterior integración.

7.3. Integración analítica de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* mediante el uso de anomalías generalizadas de *Sundman*

La integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* se puede realizar de modo casi inmediato cuando se utilizan las anomalías medias como variables temporales; en este caso, los segundos miembros de las ecuaciones (4.14) vienen dados como suma de términos de la forma

$$A \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2 + b)$$

y puesto que $M_1 = M_1(0) + n_1 t$ y $M_2 = M_2(0) + n_2 t$ se tiene que, si $k_1 n_1 + k_2 n_2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} & \int A \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2 + b) dt = \\ & \int A \cos\left((k_1 n_1 + k_2 n_2)t + k_1 M_1(0) + k_2 M_2(0) + b\right) dt = \\ & \frac{A}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \cos\left(k_1 M_1 + k_2 M_2 + b - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

7.3. Integración analítica de las ecuaciones planetarias

En el caso de ser $k_1 n_1 + k_2 n_2 = 0$, el correspondiente término es una constante.

Cuando la constante de integración no es la anomalía media el problema es más complicado. En este caso se procede a integrar usando la técnica expuesta en la sección 5, «Integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*».

En el caso de trabajar con planetas la excentricidad suele ser pequeña y a partir de la ecuación de *Kepler* (7.4)

$$M = \Psi + \sum_k K_k \cos(k\Psi + b_k),$$

derivando se obtiene

$$dM = d\Psi + \sum_k T_k \cos(k\Psi + b'_k) d\Psi,$$

donde los valores b_k y b'_k son los definidos en la sección anterior.

Por tanto

$$dM = \left[1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} T_k(e) \cos k\Psi}_T \right] d\Psi = [1 + T] d\Psi.$$

Finalmente, si se despeja $d\Psi$, se obtiene

$$d\Psi = \frac{dM}{1 + T} = [1 - T + T^2 - T^3 + \dots] dM$$

(7.17)

y puesto que e es pequeña, T también lo es y bastan unos pocos términos del desarrollo (7.17) para obtener $d\Psi$. Esto es fácilmente abordable mediante el uso del procesador de series de *Poisson*.

En el artículo que sigue se muestra de un modo práctico la utilización de las técnicas descritas al par Júpiter–Saturno y se muestran de modo explícito los coeficientes de la ecuación de *Kepler* para distintos valores de Ψ_α (Tabla 2) y las amplitudes en primer orden de perturbación de los términos de característica, $|k_1 + k_2|$, 0 y 3 para los semiejes de Júpiter y de Saturno.

En base a todos los cálculos que se han llevado a cabo, pueden concluirse varios aspectos. Por un lado, se pone de manifiesto que la elección de la anomalía adecuada dentro de la familia de *Sundman* puede suponer una mejora importante a la hora de aplicar algoritmos semianalíticos; este hecho es debido a que una buena elección del parámetro α conlleva una disminución en el número de términos de las series, lo que se traduce en desarrollos más compactos —en particular en el caso del inverso de la distancia—. A su vez, este hecho implica una evaluación de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* más asequible. Finalmente, la elección adecuada de α también permite obtener series más compactas sin perder precisión en las desigualdades relativas a términos que contienen pequeños denominadores —aspecto de gran importancia—.

Debe entenderse que la introducción de esta nueva anomalía no pretende proporcionar la forma de escoger la más adecuada de entre todas las disponibles —este hecho se podría llevar a cabo probando para qué valores de Ψ_1 y Ψ_2 es más corto el desarrollo del inverso de la distancia, que es el mayor escollo en una teoría planetaria—, sino demostrar que además de las anomalías medias —ampliamente utilizadas— o de las anomalías elípticas que usa *Brumberg*, la familia generalizada de anomalías de *Sundman* también se puede usar en el desarrollo de teorías planetarias analíticas.

En el artículo que sigue se muestra de modo práctico la aplicación de estas técnicas para $\Psi_1(\alpha)$, $\Psi_2(\alpha)$; esto se podría generalizar a $\Psi_1(\alpha_1)$, $\Psi_2(\alpha_2)$, si bien esto último no se hace.

7.4. Artículo: An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using *Sundman* generalized variables

A continuación y para finalizar este capítulo se incluye el artículo «An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using *Sundman* generalized variables» [78]. El citado artículo fue publicado en la revista *Journal of Computational and Applied Mathematics* en junio del año 2014.

Se agradece a dicha editorial las facilidades otorgadas para poder incluir artículos de esta revista en esta tesis doctoral.

En el artículo se hace referencia a la dificultad que supone construir teorías analíticas sobre el movimiento planetario sometido a una fuerza perturbativa y cómo se pueden definir éstas con la ayuda de un procesador de series de *Poisson*. Los desarrollos utilizados en la construcción de las teorías dependen de la anomalía elegida como variable temporal; el artículo describe un algoritmo que utiliza anomalías arbitrarias englobadas dentro de la familia de *Sundman* y deja patente que la eficiencia de los

7.4. Artículo: An improved algorithm to develop semi-analytical...

algoritmos semianalíticos está directamente relacionada con la correcta elección del parámetro α en Ψ_α . También se muestra que la cantidad de términos necesarios en las series de *Poisson* depende de α y por tanto una buena elección del parámetro se conlleva la obtención de desarrollos más compactos.

Para probar el algoritmo se han realizado ejemplos numéricos sobre la pareja de planetas Júpiter y Saturno; se han obtenido, en primer orden de perturbación, los semiejes mayores de sus órbitas en un problema de dos cuerpos perturbado y se muestran los resultados obtenidos para diversos valores del parámetro α .

Para llevar a cabo esta simulación se han utilizado los elementos proporcionados por [109].



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational and Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cam

An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized variables



José A. López-Ortí*, Vicente Agost-Gómez, Miguel Barreda-Rochera

Departamento de Matemáticas, Universidad Jaume I, Av Sos Baynat s/n 12071 Castellón, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 August 2013

Received in revised form 21 May 2014

MSC:

70F05

70F10

70F15

70M20

Keywords:

Celestial mechanics

Planetary theories

Algorithms

Orbital mechanics

Perturbation theory

Computational algebra

ABSTRACT

One of the main problems in celestial mechanics is the construction of analytical theories of planetary motion. The most common solution of this problem is arranged by means of Poisson series developments. These developments depend on the selection of the anomaly to be used as temporal variable. In this paper we develop an improved algorithm in order to use arbitrary anomalies included in the family of the generalized Sundman anomalies as temporal variables.

© 2014 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

One of the main problems in celestial mechanics is the study of the motion of the main bodies of the solar system. Its solutions are the so-called planetary theories. To obtain these solutions there are two main ways:

- The numerical methods, based on the integration by the appropriate numerical methods of the differential equation of the motion.
- The analytical and semi-analytical theories, based on the integration of the differential equations through the solution of the well known two-body problem and using the perturbation theory.

Let $OXYZ$ be the mean heliocentric ecliptic coordinate system for the epoch J2000. Let $\sigma = (a, e, i, \omega, \Omega, M)$ be the third set of elements of Brower [1] defined by the semi-major axis a and eccentricity e of the ellipse, the Euler angles of the orbital plane, consisting of the argument of the ascending node Ω , the argument of the perihelion ω and the mean anomaly $M = n(t - t_0) + \varepsilon$, where n is the mean motion and t_0 the osculating epoch and ε the mean anomaly in the osculating epoch. To study the two-body problem it is convenient to use the true anomaly V and the eccentric anomaly E [2].

The coordinates of the secondary with respect to the primary in the orbital plane are given by [2]

$$\mathbf{r}_{orb} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

* Corresponding author. Tel.: +34 964728382.

E-mail address: lopez@mat.uji.es (J.A. López-Ortí).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2014.06.011>

0377-0427/© 2014 Elsevier B.V. All rights reserved.

where the radius vector r is given by [2]

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos V} = a(1 - e \cos E). \tag{2}$$

The eccentric anomaly is connected to the mean anomaly through the Kepler equation [3]

$$E - e \sin E = M \tag{3}$$

and the true anomaly V is connected to the mean anomaly M by the equation of the center [3]

$$V = M + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(e) \sin kM, \tag{4}$$

where the coefficients $C_k(e)$ are defined in [3].

The spatial coordinates $(x, y, x)^t$ of the secondary with respect to the primary are given by

$$\mathbf{r} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\mathbf{r}_{orb}, \tag{5}$$

where $R_k(\theta)$ is the matrix rotation of angle θ around the k axis.

In the two-body problem, the elements a, e, i, Ω, ω and the mean motion n are constant. The solution of the perturbed motion is the same but replacing the constant elements by the osculating elements $a(t), \dots, \omega(t)$, and $\sigma(t)$. The value of the osculating elements can be obtained by the integration of the Lagrange planetary equations [2]

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\text{ctg } i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \tag{6}$$

σ is a new variable defined by means of the equation:

$$M = \sigma + \int_{T_0}^t n dt \tag{7}$$

and it coincides with ε in the case of the unperturbed motion. R is the disturbing potential $R = \sum R_i$ due to the disturbing bodies $i = 1, \dots, N$. This one is defined as [2]

$$R = \sum_{k=1}^N Gm_k \left[\left(\frac{1}{\Delta_k} \right) - \frac{x \cdot x_k + y \cdot y_k + z \cdot z_k}{r_k^3} \right], \tag{8}$$

where $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ are the coordinates of the secondary and the disturbing body with respect to the primary, Δ_k is the distance between the secondary and the disturbing body k , and m_k the mass of the k th body.

The Lagrange planetary equations are appropriate to integrate the perturbed motion by means of analytical or semi-analytical methods. To use analytical methods it is necessary to develop the second member of the Lagrange planetary equations as Fourier series of the selected anomalies with literal developments of the coefficients [3,4,1,5]. The semi-analytical methods use numerical values for the amplitudes of the Fourier series.

By integrating these developments we obtain the Poisson series [3,6]. One of the main problems of the analytical and the semi-analytical methods is the slow convergence rate of the development of the inverse of the distance between the bodies (i, j) , that implies the use of very long developments.

In the year 1856 Hansen, in order to improve the convergence rate of the series to describe the motion of the comet Encke ($e \approx 0.84$), introduced the concept of partial anomalies. This method improves its convergence using two new anomalies Ψ_1 and Ψ_2 depending on the region of the orbit that is occupied by the secondary [7].

In the year 1870 Gylden suggested that if we used the elliptical anomaly [6] as temporal variable we could improve the properties of the integration methods.

Based on a temporal transformation $dt = Crd\tau$ introduced by Sundman in order to regularize the origin in the three-body problem, Nacozy [8] introduced a new family of transformations $dt = Cr^\alpha d\tau$ called generalized Sundman transformation. This family includes the mean anomaly M ($\alpha = 0, C = n = \sqrt{a^3/\mu}$), the eccentric anomaly E ($\alpha = 1, C = n = \sqrt{a^3/\mu}$), the true anomaly V ($\alpha = 2, C = 1/\sqrt{\mu a(1 - e^2)}$) and the Nacozy intermediate anomaly u for $\alpha = 3/2$. The use of these variables improves the convergence properties of the numerical methods.

In this paper we extend the algorithm used by Chapront in order to use the generalized Sundman anomalies as temporal variables in the semi-analytical methods of integration. This algorithm involves the development of the most common quantities of the two-body problem as Fourier series of the new anomaly, the development of the inverse of the distance between every couple of planets (i, j), the expansion of the second member of the planetary equations of Lagrange and the integration of the Lagrange planetary equations through an appropriate iterative technique.

In Section 2 we define the family of Sundman generalized anomalies ψ_α and we obtain an analytical equation to connect the anomaly Ψ_α to the eccentric anomaly E . In this section we study the development of the main quantities of the two bodies problem as Fourier series of Ψ_α .

In Section 3 we apply the previous results to develop the inverse of the distance between two bodies using an iterative algorithm based on the Kovalevsky method and subsequently, we obtain the development of the second member of the Lagrange Planetary equations according to an arbitrary anomaly in the generalized Sundman family.

In Section 4 an iterative integration formula to integrate the second member of the Lagrange planetary equations is developed.

In Section 5 a set of numerical examples, using generalized Sundman anomalies, are developed.

In Section 6 the main conclusions of this paper are presented.

2. The Sundman generalized anomaly

Let us define $dM = K(e, \alpha)r^\alpha d\Psi_\alpha$ as a generalized Sundman transformation where $\Psi_\alpha(M)$ is a 2π periodic function in M satisfying $\Psi_\alpha = M$ when $M = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ and $\Psi(-M) = -\Psi(M)$, and $dM/d\Psi_\alpha > 0$. The value of $K(e, \alpha)$ is given by

$$K(e, \alpha) \int_0^{2\pi} d\Psi_\alpha = \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} dM = E = a^{-\alpha} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} dE \tag{9}$$

$$K(e, \alpha) = a^{-\alpha} \left\{ (1 - e)^p F\left(\frac{1}{2}, -p, 1; \frac{2e}{e - 1}\right) + (1 + e)^p F\left(\frac{1}{2}, -p, 1; \frac{2e}{1 + e}\right) \right\} \tag{10}$$

where $p = 1 - \alpha$ and $F(a, b, c; z)$ is the hypergeometric function.

The generalized Sundman anomaly is connected to the eccentric anomaly by

$$\Psi_\alpha = G_0(e, \alpha)E + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} G_s(e, \alpha) \sin sE; \tag{11}$$

for details see [9]. The eccentric anomaly and the functions $\sin sE$ and $\cos sE$ can be developed according to the mean anomaly through the use of the Bessel series [2,3] and from them we can obtain the development

$$\Psi_\alpha = M + \sum_{s=0}^{\infty} H_s(e, \alpha) \sin sM. \tag{12}$$

The value of the functions $H_s(e, \alpha)$ are specified in [9].

To manage the most common quantities involved in the two-body problem it is necessary to obtain the development of E, M (generalized Kepler equation), $\cos E, \sin E, r$ and $1/r$ as Fourier series developments according to the variable Ψ_α . For this purpose we can rewrite (11) and (12) as power series of eccentricity e and then we apply the Deprit algorithm [10]; this algorithm extends the Lagrange series inversion method. From these developments it is suitable to obtain the orbital and spatial coordinates of the secondary as Fourier series according to Ψ_α .

Using this method we obtain from (12) the generalized Kepler equation

$$M = \Psi_\alpha + \sum_{s=0}^{\infty} T_s(e, \alpha) \sin \Psi_\alpha \tag{13}$$

and from (11) the developments of $\sin kE, \cos kE, r, 1/r$ as Fourier series with respect to Ψ_α . For details see [9].

From these developments we can obtain the developments of

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = \sqrt{1 - e^2}, \quad r = a(1 - e \cos E), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e \cos E)} \tag{14}$$

and so the orbital coordinates of the secondary (x, y, z) .

An alternative way to obtain these developments for an arbitrary function $f(E) \in \mathcal{C}^1[0, 2\pi]$ is the direct computation of the coefficients of the Fourier series through a numerical quadrature method.

3. Development of the disturbing potential and its derivatives

Let \mathbf{r} and \mathbf{r}' be the vector radii of the body and the perturbing body. To develop the second member of the planetary Lagrange equations as double Fourier series of the anomalies it is necessary to develop the partial derivatives $\partial R/\partial\sigma$. For this purpose we proceed [2,11,4] as

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\sigma} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\sigma}. \tag{15}$$

For the third set of elements of Brouwer the partial derivatives of the coordinates (x, y, z) with respect to the elements are given in [2]. The values $\partial R/\partial x_i$ are given by

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = GM(1 + m') \left[\frac{x'_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{x'_i}{r'^3} \right]. \tag{16}$$

The main difficulty to obtain these quantities is to obtain the development of the inverse of the distance $1/\Delta$ between the two planets. To evaluate this distance we can proceed using the Kovalevsky algorithm [12,13]:

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)_{k+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k^3 \Delta^2 \tag{17}$$

where the k index denotes the number of the iteration. An appropriate first approximation [3] can be

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)_0 = \frac{1}{a'} \left[b_{1/2}^{(0)}(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\alpha) \cos jS \right], \tag{18}$$

where $\alpha = a/a'$, and $b_{p/2}^{(j)}$ are the Laplace coefficients [3], and S the angle between the vector radii \mathbf{r} and \mathbf{r}' , and

$$b_{p/2}^{(j)} = \frac{(p/2)_j}{(1)_j} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} + j, j + 1; \alpha^2\right) \tag{19}$$

where F is the Hypergeometric function and $(s)_j$ is the Pochhammer symbol.

The values of $\cos jS$ can be computed from the iteration formula

$$\cos nS = 2 \cos((n - 1)S) \cos S - \cos((n - 2)S), \tag{20}$$

where

$$\cos S = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}{r r'}. \tag{21}$$

The quantity $\cos S$ can be developed as Fourier series from the previous developments of the spatial vector radii \mathbf{r} and \mathbf{r}' according to Ψ_α . In the next developments we assume that the parameter α has been selected and the subindex i denotes the number of the planet and α will be omitted.

The use of Kovalevsky iteration formula requires a very highly precise development for the quantity $\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ [13].

Using these techniques we can develop the second member of the Lagrange planetary equations (5) for a generic element σ_i in the form

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{k_1,k_2,m} t^m \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2,m}), \tag{22}$$

where $A_{i,j}$ and $B_{i,j}$ are real quantities and k_1, k_2, m are integers $m \geq 0$. The second member of Eq. (22) is a Poisson series, where each term of the series is a Poisson term. To guarantee the uniqueness of the representation of a generic Poisson term

$$A_{k_1,k_2,\dots,k_M,m} t^m \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + \dots + k_M\Psi_M + B_{k_1,k_2,\dots,k_M,m}) \tag{23}$$

in the case $|k_1| + \dots + |k_M| \neq 0$ we choose $B_{k_1,k_2,\dots,k_M,m} \in [0, 2\pi[$ so that $A_{k_1,k_2,\dots,k_M,m} > 0$ and the first $k_i \neq 0$ must be positive. In the case of $k_1 = k_2 = \dots = k_M = 0$, we include in the amplitude $A_{k_1,k_2,\dots,k_M,m}$ the value of $\cos B_{k_1,k_2,\dots,k_M,m}$ so that $B_{k_1,k_2,\dots,k_M,m} = 0$.

In the first order of perturbation the exponent m is 0. To evaluate the planetary equation corresponding to da/dt it is necessary to take into account the Chapront considerations on the initial values of a and n [13].

4. Integration algorithms

To integrate the Lagrange planetary equation in its developed form (22) it is necessary to evaluate the integrals

$$\int_{t_0}^t \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2}) dt. \tag{24}$$

For this purpose we have for $i = 1, 2$ the developments of the Kepler equation

$$M_i = \Psi_i + \sum_{s=1}^{\infty} T_s(e_i, \alpha) \sin s\Psi_i \tag{25}$$

where the functions $T_s(e_i, \alpha)$ can be evaluated by analytical methods [9].

To integrate the generic term $\cos(k_1\Psi_{\alpha_1} + k_2\Psi_{\alpha_2} + B_{k_1,k_2})$ we can proceed by differentiating (25)

$$n_i dt = dM_i = d\Psi_i + \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i, \alpha) \cos s\Psi_i \right] d\Psi_i \tag{26}$$

and from them

$$dt = \frac{d(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2)}{(k_1n_1 + k_2n_2)} + \frac{k_1}{(k_1n_1 + k_2n_2)} \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_1, \alpha) \cos s\Psi_1 \right] d\Psi_1 + \frac{k_2}{(k_1n_1 + k_2n_2)} \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_2, \alpha) \cos s\Psi_2 \right] d\Psi_2. \tag{27}$$

From (26) we obtain

$$d\Psi_i = n_i dt \left[\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p S_i^p \right] = n_i \left[\sum_{s=0}^{\infty} P_s(e_i, \alpha) \cos s\Psi_i \right] dt, \tag{28}$$

where $S_i = \sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i, \alpha) \cos s\Psi_i$.

Replacing in (27) we obtain

$$dt = \frac{d(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2)}{(k_1n_1 + k_2n_2)} + \frac{k_1n_1h_1(e_1, \Psi_1) + k_2n_2h_2(e_2, \Psi_2)}{(k_1n_1 + k_2n_2)} dt, \tag{29}$$

where

$$h_i(e_i, \Psi_i) = \left[\sum_{s=1}^{\infty} sT_s(e_i, \alpha) \cos s\Psi_i \right] \left[\sum_{s=0}^{\infty} P_s(e_i, \alpha) \cos \Psi_i \right], \quad i = 1, 2. \tag{30}$$

Functions $T_s(e_i, \alpha)$ satisfy the d'Alembert property. For this reason (29) can be used as an iterative formula, increasing the order in the eccentricities for the residual term by one in each iteration [14,15].

From (29) we have

$$\int \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2}) dt = \frac{1}{k_1n_1 + k_2n_2} \cos \left(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2} - \frac{\pi}{2} \right) + \int \frac{k_1n_1h_1(e_1, \Psi_1) + k_2n_2h_2(e_2, \Psi_2)}{k_1n_1 + k_2n_2} \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2}) dt. \tag{31}$$

In the case of the integration of a Poisson term with $m > 0$ we can proceed through integration by parts

$$\int t^m \cos(k_1\Psi_{\alpha_1} + k_2\Psi_{\alpha_2} + B_{k_1,k_2}) dt = t^m \int \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2}) dt - m \int t^{m-1} \left[\int \cos(k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + B_{k_1,k_2}) dt \right] dt. \tag{32}$$

Note that the two integrals included in the second member are the same and it is a Poisson series with $m = 0$.

Table 1
Planetary elements for Jupiter and Saturn.

Planet	a	k	h
Jupiter	5.2042662908	0.0469877116	0.0130817658
Saturn	9.5820161867	0.0003336009	0.0557224686
	q	p	λ
Jupiter	-0.0086968779	0.0198660071	0.8727430950
Saturn	-0.0020729462	0.0111943279	0.5999772955

Table 2
Coefficients c_i of Kepler equation.

α	$\sin \Psi$	$\sin 2\Psi$	$\sin 3\Psi$	$\sin 4\Psi$	$\sin 5\Psi$
0.5	-0.0242409359	-2.204541e-4	-3.8613e-6	-8.87e-8	-2.4e-9
1.0	-0.0484979255	0.000000e-4	0.0000e-6	0.00e-8	0.0e-9
1.5	-0.0727549189	6.619681e-4	-5.6518e-6	4.47e-8	-3.e-10
2.0	-0.0969958510	1.7647287e-3	-3.80567e-5	8.656e-7	-2.02e-8

Table 3
Number of terms of the inverse of the distance developments.

k	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2.0$	err
1	1064	911	754	613	504	3.2e-2
2	1196	1051	912	775	772	6.0e-3
3	1234	1114	992	911	912	2.2e-4
4	1140	988	862	851	852	3.1e-7
5	1151	988	884	858	862	3.4e-12

5. Numerical examples

To test the method a set of numerical examples in the first order of perturbation has been computed. For this purpose we select the couple Jupiter–Saturn to test the algorithm.

The orbital elements (Table 1) were taken from Simon [16] in order to compare our values for $\alpha = 0$ with the respective ones given by Chapront [17]. The initial osculation epoch is J2000 and the planetary masses were taken according to the IAU 1976 constants. These elements are connected with the third set of elements of Brower [1], where $\bar{\omega} = \Omega + \omega$, $k = e \cos \bar{\omega}$, $h = e \cos \bar{\omega}$, $q = \gamma \cos \Omega$, $p = \gamma \sin \Omega$, $\lambda = M + \bar{\omega}$ and $\gamma = \sin i/2$. The management of common developments used in Celestial mechanics is a very hard task, so it is convenient to use an appropriate special software package called Poisson Series Processor (PSP) [18,6,19]. In this paper the PSP used was the C++ class “Poisson.h” developed by the authors. This processor series contains the most common arithmetic operations +, -, *, ..., function evaluation sin, cos, exp, ..., etc.

Table 2 shows the five first terms c_i of the development of the Kepler $M = \Psi + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin i\Psi$ equation of Jupiter for several values of α .

Table 3 shows the length of the series and the difference between two iterations of the inverse of the distance for couple Jupiter–Saturn for several values of the parameter α . The error of each iteration err_k has been estimated by means $err_k = \|(1/\Delta)_k - (1/\Delta)_{k-1}\|_1$, where $\|\cdot\|_1$ is the norm in L_1 .

Tables 4 and 5 show, in arcsec, the main amplitude terms, A and A' , of characteristic $|k_1+k_2| = 0$ and 3 in the development of the major-semiaxis a of Jupiter and Saturn for the couple Jupiter–Saturn for the values of $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Values of A and A' , for $\alpha = 0.0$ coincide with the ones obtained by Chapront [17].

Tables 6 and 7 show the convergence of the integrator applied to the planetary equations of a_j and a_s for the couple Jupiter–Saturn.

6. Concluding remarks

So as to test the algorithm, the problem of the calculation of the first order perturbations of the semiaxes for the couple Jupiter–Saturn has been used.

The use of appropriate anomalies in the generalized Sundman family can be applied to improve the efficiency of semi-analytical algorithms.

The length of the series depends on the anomalies used as temporal variables. An appropriate choice of the anomaly in the generalized Sundman family of anomalies can be allowed to have more compact developments in the inverse of the distance, and so it allows one to simplify the evaluation of the second member of the Lagrange planetary equations.

The coefficients of the terms containing small divisors, as shown in the $2n_1 - 5n_2$ case for the couple Jupiter–Saturn, can be determined with a higher level of precision for each value of α .

Table 4
Amplitude of terms of characteristic $|k_1 + k_2| = 0$ for Jupiter and Saturn semiaxis in arcsec.

k_1	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.0$	
	A	A'	A	A'	A	A'	A	A'
1	42.734	6960.092	43.064	6971.697	43.444	6978.382	43.852	6980.115
2	144.434	659.008	146.500	676.374	148.201	691.597	149.526	704.492
3	65.652	299.688	66.920	307.842	67.851	314.429	68.424	319.222
4	31.213	142.577	32.141	148.088	32.809	152.505	33.211	155.793
5	15.202	69.503	15.855	73.173	16.312	76.011	16.563	77.968
6	7.515	34.393	7.959	36.802	8.264	38.599	8.417	39.713
7	3.752	17.187	4.046	18.744	4.247	19.892	4.344	20.570
8	1.885	8.646	2.076	9.635	2.206	10.362	2.267	10.775
9	0.952	4.369	1.073	4.989	1.156	5.445	1.194	5.695
10	0.482	2.214	0.557	2.598	0.610	2.881	0.634	3.033
11	0.244	1.124	0.291	1.359	0.324	1.534	0.338	1.626
12	0.124	0.572	0.153	0.714	0.173	0.821	0.182	0.876
13	0.063	0.291	0.080	0.376	0.093	0.441	0.098	0.475
14	0.032	0.148	0.042	0.199	0.050	0.238	0.053	0.258
15	0.016	0.075	0.022	0.105	0.027	0.129	0.029	0.141
16	0.008	0.038	0.012	0.056	0.015	0.070	0.016	0.077
17	0.004	0.019	0.006	0.030	0.008	0.038	0.009	0.043
18	0.002	0.010	0.003	0.016	0.004	0.021	0.005	0.023
19	0.001	0.005	0.002	0.008	0.002	0.011	0.003	0.013
20	0.001	0.003	0.001	0.005	0.001	0.006	0.001	0.007
21	0.000	0.001	0.001	0.002	0.001	0.003	0.001	0.004
22	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.002	0.000	0.002
23	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001
24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001

Table 5
Amplitude terms of characteristic $|k_1 + k_2| = 3$ for Jupiter and Saturn semiaxis in arcsec.

k_1	k_2	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.0$	
		A	A'	A	A'	A	A'	A	A'
2	-5	50.746	572.892	50.528	569.362	49.671	559.056	48.209	542.256
3	-6	1.333	12.767	1.002	10.173	0.862	9.451	1.131	12.810
4	-7	0.710	6.017	0.486	4.450	0.326	3.237	0.223	2.384
5	-8	0.455	3.520	0.290	2.426	0.174	1.597	0.100	1.012
1	-4	0.376	4.853	0.466	4.522	1.002	10.820	1.788	19.958
6	-9	0.306	2.210	0.187	1.461	0.105	0.904	0.054	0.526
7	-10	0.206	1.415	0.123	0.911	0.066	0.538	0.031	0.288
0	3	0.185	2.382	0.411	4.546	0.677	7.432	0.978	10.830
8	-11	0.138	0.908	0.081	0.575	0.042	0.328	0.019	0.165
9	-12	0.091	0.581	0.053	0.363	0.027	0.203	0.011	0.097
10	-13	0.060	0.369	0.035	0.229	0.017	0.125	0.007	0.058
11	-14	0.039	0.233	0.022	0.144	0.011	0.078	0.004	0.035
12	-15	0.025	0.145	0.014	0.090	0.007	0.048	0.003	0.021
13	-16	0.016	0.090	0.009	0.056	0.004	0.030	0.002	0.013
14	-17	0.010	0.056	0.006	0.035	0.003	0.018	0.001	0.008
2	1	0.010	0.052	0.010	0.060	0.010	0.068	0.012	0.072
15	-18	0.006	0.034	0.004	0.021	0.002	0.011	0.001	0.005
1	2	0.006	0.239	0.008	0.286	0.012	0.300	0.014	0.275
3	0	0.005	0.116	0.008	0.105	0.017	0.098	0.031	0.202
16	-19	0.004	0.021	0.002	0.013	0.001	0.007	0.000	0.003
4	-1	0.003	0.311	0.006	0.052	0.017	0.089	0.047	0.296
5	-2	0.002	0.003	0.004	0.017	0.012	0.071	0.038	0.217
17	-20	0.002	0.013	0.001	0.008	0.001	0.004	0.000	0.002
6	-3	0.002	0.003	0.002	0.011	0.009	0.056	0.033	0.191
7	-4	0.001	0.002	0.001	0.007	0.007	0.042	0.026	0.153
18	-21	0.001	0.008	0.001	0.005	0.000	0.003	0.000	0.001
8	-5	0.001	0.002	0.001	0.004	0.005	0.029	0.020	0.116
9	-6	0.001	0.002	0.000	0.002	0.003	0.020	0.015	0.084
19	-22	0.001	0.005	0.000	0.003	0.000	0.002	0.000	0.000
10	-7	0.001	0.001	0.000	0.001	0.002	0.013	0.010	0.059
20	-23	0.000	0.003	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	0.000
11	-8	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.009	0.007	0.041
12	-9	0.000	0.001	0.000	0.000	0.001	0.006	0.005	0.027
13	-10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.003	0.018
14	-11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.002	0.012

(continued on next page)

Table 5 (continued)

k_1	k_2	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.0$	
		A	A'	A	A'	A	A'	A	A'
15	-12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.008
16	-13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.005
17	-14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.003
21	-24	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
22	-25	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
23	-26	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18	-15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002
19	-16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
20	-17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001

Table 6
 $\|residual\|_1$ and n terms of residual for Jupiter semiaxes.

n_{it}	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.50$		$\alpha = 2.0$		$\alpha = 2.5$	
1	2.50e-07	380	4.56e-07	357	6.39e-07	371	8.15e-07	373	1.01e-06	378
2	3.06e-08	298	9.46e-08	315	1.66e-07	330	2.45e-07	345	3.61e-07	358
3	5.49e-09	219	3.30e-08	271	8.06e-08	293	1.36e-07	317	2.03e-07	335
4	7.39e-10	139	9.27e-09	220	3.59e-08	256	8.69e-08	283	1.68e-07	305
5	8.30e-11	82	2.03e-09	158	1.13e-08	213	3.43e-08	250	7.79e-08	274
6			4.59e-10	109	3.67e-09	163	1.40e-08	205	3.66e-08	239
7			1.07e-10	94	1.24e-09	125	6.00e-09	167	1.85e-08	193
8			2.40e-11	72	4.21e-10	122	2.69e-09	142	1.02e-08	157
9					1.38e-10	113	1.11e-09	143	4.96e-09	149
10					4.70e-11	96	4.88e-10	140	2.60e-09	154
11					1.50e-11	66	2.06e-10	134	1.28e-09	161
12							9.20e-11	120	6.89e-10	158
13							3.90e-11	102	3.42e-10	151
14							1.80e-11	87	1.84e-10	140
15									9.20e-11	123
16									5.00e-11	113
17									2.70e-11	101
18									1.80e-11	99
19									1.40e-11	97
20									1.40e-11	98
21									1.30e-11	98
22									1.30e-11	96
23									1.20e-11	98

Table 7
 $\|residual\|_1$ and n terms of residual for Saturn semiaxes.

n_{it}	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.50$		$\alpha = 2.0$		$\alpha = 2.5$	
1	3.27e-06	462	6.18e-06	433	9.06e-06	451	1.21e-05	461	1.53e-05	469
2	3.16e-07	373	1.04e-06	387	1.99e-06	413	3.13e-06	426	4.49e-06	442
3	4.63e-08	283	3.01e-07	337	8.07e-07	376	1.51e-06	395	2.37e-06	414
4	5.20e-09	206	6.71e-08	290	2.66e-07	335	6.53e-07	361	1.25e-06	385
5	5.71e-10	130	1.42e-08	229	8.01e-08	288	2.45e-07	326	5.41e-07	353
6	6.60e-11	89	3.24e-09	168	2.63e-08	236	1.01e-07	288	2.58e-07	316
7			7.58e-10	133	9.01e-09	186	4.43e-08	238	1.35e-07	277
8			1.72e-10	120	2.99e-09	164	1.91e-08	199	7.06e-08	234
9			3.90e-11	92	1.00e-09	156	8.14e-09	182	3.57e-08	205
10					3.37e-10	145	3.49e-09	183	1.81e-08	199
11					1.15e-10	129	1.52e-09	176	9.31e-09	204
12					3.90e-11	94	6.57e-10	169	4.83e-09	205
13					1.40e-11	81	2.87e-10	157	2.48e-09	204
14							1.26e-10	138	1.29e-09	199
15							5.70e-11	138	6.66e-10	188
16							2.70e-11	129	3.51e-10	181
17							1.40e-11	110	1.87e-10	172
18									1.04e-10	170
19									6.20e-11	171

The management of these developments can be obtained by using a Poisson series processor. The performance of the algorithm is good for the interesting values of α , that is, the ones contained in the interval $[0, 2]$; for values of $\alpha \geq 2.5$ the convergence rate decreases. The kernel of processor "Poisson.h" is available under the terms of General Public License (GPL) version 3.

Acknowledgment

This research has been partially supported by Grant P1-1B2012-47 from Universidad Jaume I of Castellón.

References

- [1] D. Brower, G.M. Clemence, *Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, 1965.
- [2] J.J. Levallois, J. Kovalevsky, *Géodésie Générale*, Eyrolles, Paris, 1971.
- [3] F. Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [4] H. Hagihara, *Celestial Mechanics*, MIT Press, Cambridge MA, 1970.
- [5] N. Abu-El-Ata, J. Chapront, Développements analytiques de l'inverse de la distance en mécanique céleste, *Astronom. Astrophys.* 38 (1975) 57–66.
- [6] V.A. Brumberg, *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [7] P. Nacozy, Hansen's method of partial anomalies: an application, *Astron. J.* 74 (1969) 544–550.
- [8] P. Nacozy, The intermediate anomaly, *Celest. Mech.* 16 (1977) 309–313.
- [9] J.A. López, V. Agost, M. Barreda, A note on the use of the generalized Sundman transformations as temporal variables in celestial mechanics, *Int. J. Comput. Math.* 89 (2012) 433–442.
- [10] A. Deprit, A note on lagrange's inversion formula, *Celest. Mech.* 20 (1979) 325–327.
- [11] R. Broucke, C. Smith, Expansion of the planetary disturbing function, *Celest. Mech.* 4 (1971) 490–499.
- [12] J. Kovalevsky, *Introduction to Celestial Mechanics*, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1967.
- [13] J. Chapront, P. Bretagnon, M. Mehl, Une formule pour élevés dans les problèmes planétaires, *Celest. Mech.* 11 (1975) 379–399.
- [14] J.A. López, M.J. Martínez, F.J. Marco, Computational tools to construct semi-analytical planetary theories, *International Journal of Computer Mathematics* 86 (2008) 497–508.
- [15] J.A. López, M.J. Martínez, F.J. Marco, A formulation to obtain semi-analytical integration algorithms based on the use of several kinds of anomalies as temporal variable, *Planet. Space Sci.* 56 (2008) 1862–1868.
- [16] J.L. Simon, P. Bretagnon, J. Chapront, Francou.G. Chapront-Touzé, J. Laskar, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the moon and the planets, *Astron. Astrophys.* 282 (1994) 663–683.
- [17] J. Chapront, J.L. Simon, Planetary theories with the aid of the expansions of the elliptic functions, *Celest. Mech.* 68 (1996) 171–188.
- [18] T. Ivanova, A new echeloned Poisson series processor (epsp), *Celest. Mech.* 80 (2001) 167–176.
- [19] J.F. Navarro, J.M. Ferrándiz, A new symbolyc processor for the earth rotation, *Celest. Mech.* 82 (2002) 243–263.

Capítulo 8

Familias biparamétricas de transformaciones temporales en el problema de dos cuerpos

Contenido

8.1. Introducción	169
8.1.1. Anomalías simétricas	172
8.1.2. Familia biparamétrica	177
8.2. Desarrollos en serie	181
8.3. Aplicación a la minimización de errores en la integración numérica	183
8.4. Artículo: A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion	185

8.1. Introducción

Como se ha visto en capítulos anteriores, la relación del movimiento con el tiempo en el problema de los dos cuerpos es, en general, un problema difícil, pues requiere la determinación de las coordenadas del sistema en un instante genérico t . Más sencillo es el estudio en coordenadas polares, es decir, utilizando como variables el radio vector y la anomalía verdadera.

La relación del radio vector con la anomalía verdadera viene dada por la ecuación polar focal de la elipse (2.13) o la cónica en la que se produce el movimiento. En esta

ecuación aparece la anomalía verdadera¹, V , la cual está relacionada con el tiempo a través de la segunda ley de *Kepler* o integral de las áreas (2.9).

En mecánica celeste, como ya se ha expuesto en numerosas ecuaciones, el tiempo suele sustituirse por la anomalía media $M = n(t - t_0)$, donde t_0 es una época de paso por el periastro.

La relación entre M y V , o ecuación del centro, no es fácil de manejar salvo para valores de la excentricidad, e , muy pequeños y por ello se introdujo en la teoría clásica una variable intermedia, E . Esta variable se denomina anomalía excéntrica² y ya ha sido definida con anterioridad (2.2).

Estas dos variables están relacionadas con la anomalía media a través de

$$dM = \left(\frac{r}{a}\right) dE \quad (8.1)$$

y

$$dM = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} dV, \quad (8.2)$$

es decir, a través de transformaciones del tipo

$$dM = K_\alpha r^\alpha d\Psi_\alpha, \quad (8.3)$$

donde K_α se determina a partir de la relación

$$2\pi = K_\alpha \int_0^{2\pi} r^\alpha d\Psi_\alpha.$$

Para el caso en el que $\Psi = M$ se tiene que $\alpha = 0$ y $K_0 = 1$; en el caso de ser $\Psi = E$ se tiene que $\alpha = 1$ y $K_1 = \frac{1}{a}$; y en el caso de $\Psi = V$ se tiene que $\alpha = 2$ y $K_2 = \frac{1}{a^2\sqrt{1-e^2}}$.

El uso del tiempo ordinario en la integración numérica presenta inconvenientes cuando e es alta, pues si se usan intervalos iguales, debido a la integral de las áreas, la

¹Es también común referirse a la anomalía verdadera como f .

²Es también común referirse a la anomalía excéntrica como g .

8. Familia biparamétrica

concentración de puntos en la órbita es muy baja en la región del periastro y muy alta en la del apoastro, siendo en la primera mucho más rápido el movimiento que en la última.

Este problema se puede solucionar utilizando como variable temporal la anomalía excéntrica o, mejor aún, la anomalía verdadera.

Nacozy [95], siguiendo un método similar al usado por *Sundman* en 1912, y con el objetivo de regularizar el origen en el problema de tres cuerpos, introduce una variable τ relacionada con el tiempo, t , por

$$dt = r^{3/2}d\tau.$$

A partir de esta relación y mediante la introducción de una constante adecuada se puede definir la denominada anomalía intermedia, Ψ

$$dM = Kr^{3/2}d\Psi,$$

la cual guarda forma similar a la ecuación (8.3).

Janin y Bond [59] generalizan la transformación anterior y definen la familia de anomalías generalizadas de *Sundman* (6.3). Esta familia ha sido introducida y estudiada con más profundidad en la sección 6.2 del capítulo 6,

$$dM = K_\alpha r^\alpha d\Psi_\alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

Estas anomalías permiten optimizar la integración numérica usando para cada valor de la excentricidad el valor de α adecuado. También es de interés el estudio de los desarrollos analíticos del problema de dos cuerpos usando como variable temporal las distintas anomalías Ψ_α en lugar de M . Este hecho proporciona para valores adecuados de α desarrollos más compactos.

Ferrándiz [41] introdujo una nueva familia de anomalías de la forma

$$dM = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{a_0 + a_1 r}} d\Psi.$$

Dentro de la familia de *Sundman* merece especial atención la anomalía excéntrica, pues es simétrica con respecto a los dos ejes de la elipse.

8.1.1. Anomalías simétricas

Anomalía elíptica

Antes de iniciar este apartado se presentan algunas identidades relacionadas con las funciones elípticas de *Jacobi* [4], [67] que pueden resultar de utilidad. Las funciones elípticas vienen definidas a partir de la integral elíptica de primera especie

$$u = F(\varphi, e) = \int_0^\varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad (8.4)$$

donde el ángulo φ se denomina amplitud

$$\varphi = \text{am}(u), \quad (8.5)$$

las funciones seno elíptico, sn; coseno elíptico, cn; y dn se definen como

$$\begin{aligned} \text{sn}(u) &= \sin(\text{am}(u)), \\ \text{cn}(u) &= \cos(\text{am}(u)), \\ \text{dn}(u) &= \sqrt{1 - e^2 \text{sn}^2(u)} \end{aligned} \quad (8.6)$$

y se verifican las propiedades

$$\begin{aligned} \frac{d\text{sn}(u)}{du} &= \text{cn}(u)\text{dn}(u), \\ 1 &= \text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u), \\ 1 &= e^2 \text{sn}^2(u) + \text{dn}^2(u). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Dentro de las distintas anomalías simétricas que se pueden utilizar para abordar el problema de dos cuerpos es de destacar la llamada anomalía elíptica; esta anomalía fue introducida por *Brumberg* y *Fukushima* [26]. A continuación se citan someramente su definición y alguna de sus características.

Si se definen el módulo como la excentricidad, la amplitud φ de las funciones elípticas mediante

$$\varphi = E + \frac{\pi}{2}$$

8. Familia biparamétrica

y se introduce la nueva variable u como

$$\varphi = \text{am}(u),$$

puede obtenerse la forma cerrada de la solución para las coordenadas orbitales ξ , η y el radio vector r en al problema de dos cuerpos en términos de funciones elípticas

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = a(\text{sn}(u) - e), \\ \eta = r \sin V = -a\sqrt{1 - e^2}\text{cn}(u) \end{cases} \quad (8.8)$$

y

$$r = a(1 - e \text{sn}(u)), \quad (8.9)$$

donde a representa el semieje mayor. La relación de u con el tiempo t viene dada por la ecuación de *Kepler* en su forma elíptica

$$\text{am}(u) + e \text{cn}(u) = M + \frac{\pi}{2}.$$

La transformación introducida por $\varphi = E + \frac{\pi}{2}$ puede ser considerada como otro intento de reconocer la idea de *Gylden* [26] de considerar la anomalía clásica — media, verdadera o excéntrica— como la amplitud elíptica de una nueva variable independiente (*Nacozy*, 1997).

La solución obtenida en (8.8)–(8.9) no es de mucho interés en sí misma, pero permite utilizar las conocidas expansiones trigonométricas de las funciones elípticas de *Jacobi* para ser aplicadas al problema perturbado de dos cuerpos.

Finalmente, con el objetivo de facilitar la construcción de desarrollos en serie de las magnitudes más comunes en el problema de dos cuerpos y dado que la variable u toma valores en el intervalo³ $[0, 4K]$ y su origen está en $E = \frac{\pi}{2}$, resulta conveniente introducir la variable $w = \frac{\pi u}{2K} - \frac{\pi}{2}$; con ello se tiene que ω tiene origen común con el resto de anomalías y recorrido en $[0, 2\pi]$. Esta nueva variable ω es conocida como anomalía elíptica.

³La expresión K en el intervalo hace referencia a la integral elíptica completa de primera especie, que se define como $K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$.

Longitud de arco regularizada

Brumberg, en el su artículo «Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits» [25], define una nueva variable temporal, s^* , relacionada con el parámetro arco de la elipse. La parametrización de la longitud de arco viene determinada por la expresión

$$\frac{ds}{dE} = \left[\left(\frac{d\xi}{dE} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dE} \right)^2 \right]^{1/2} = a(1 - e^2 \cos^2 E)^{1/2}, \quad (8.10)$$

donde, tomando como origen el pericentro, la longitud de arco viene dada por

$$s = a \left[\overline{E}(E + \pi/2, e) - \overline{E}(e) \right]$$

y $\overline{E}(\cdot)$ y $\overline{E}(\cdot)$ representan la notación estándar para las integrales elípticas completas⁴ e incompletas⁵ de segunda especie respectivamente.

A partir de aquí, teniendo en cuenta (8.10) y utilizando las funciones elípticas de *Jacobi*, *Brumberg* obtiene la relación

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dE} \frac{dE}{ds} = \frac{1}{na} \left[\frac{1 - e \cos E}{1 + e \cos E} \right]^{1/2}.$$

Para terminar, teniendo en cuenta que $r = a(1 - e \cos E)$ y con ayuda de la función de partición

$$Q = r^{1/2} \left(2\mu - \frac{\mu r}{a} \right)^{-1/2}, \quad (8.11)$$

se expresa la nueva anomalía, s^* , de forma que $s^* \in [0, 2\pi]$ como

$$dt = Q^* ds^*, \quad (8.12)$$

donde

⁴La integral elíptica completa de segunda especie es una función de una variable que se define como la integral $\overline{E}(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$.

⁵La integral elíptica incompleta de segunda especie es una función de dos variables definida por la integral $\overline{E}(x, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta} d\theta$.

8. Familia biparamétrica

$$Q^* = cQ, \quad ds^* = c^{-1}ds, \quad c = \frac{2a}{\pi}\bar{E}(e).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la integral de la energía (2.16)

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \implies \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}v^2,$$

se tiene que

$$Q(r) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left[\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2}v^2}} = \frac{1}{v}, \quad (8.13)$$

es decir, la función de partición es el inverso del módulo de la velocidad.

Anomalía antifocal

Brumberg introduce la anomalía antifocal; en una órbita elíptica con foco F y con foco vacío F' los radio vectores r y r' del secundario respecto a F y a F' verifican las relaciones

$$r + r' = 2a, \quad r' = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e \cos f'} = a(1 + e \cos g), \quad (8.14)$$

siendo E la anomalía excéntrica, f la anomalía verdadera y f' el ángulo con centro en el foco vacío que mide desde el periastro hasta el secundario.

Las coordenadas orbitales son

$$\begin{cases} \xi = r' \sin f', \\ \eta = r' \cos f' - 2ae. \end{cases} \quad (8.15)$$

De (8.14) se deduce que

$$dr + dr' = 0, \quad df' = \frac{a^2(1 - e^2) \sin f' df'}{(1 - e \cos f')^2} \quad (8.16)$$

y de (8.15) y (8.16)

$$rdf = r'df'. \quad (8.17)$$

La relación entre f' y la anomalía media M puede establecerse a través de la integral de las áreas de la que se obtiene

$$df' = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r r'}dM = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2 g}dM. \quad (8.18)$$

Anomalías naturales

López [81] define la familia de anomalías Ψ_α como

$$\Psi_\alpha = \alpha f + (1-\alpha)f', \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (8.19)$$

y demuestra, a partir de (8.18) y la relación de df con M , que

$$dM = Q_\alpha(r)d\Psi_\alpha,$$

siendo Q_α la función de partición que viene determinada por la expresión

$$Q_\alpha = \frac{1}{a^2\sqrt{1-e^2}}r \left[\frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{2a-r} \right]^{-1}. \quad (8.20)$$

Anomalía semifocal

En el caso particular en el que el parámetro α de la anomalía natural alcance el valor $\frac{1}{2}$, la anomalía natural recibe el nombre de anomalía semifocal. Se tiene que

$$\Psi_{\frac{1}{2}} = \frac{f + f'}{2}, \quad (8.21)$$

$$dM = Q_{\frac{1}{2}}(r)d\Psi_{\frac{1}{2}}, \quad (8.22)$$

donde

8. Familia biparamétrica

$$Q_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{r^2 r'}{a^3 \sqrt{1-e^2}}. \quad (8.23)$$

8.1.2. Familia biparamétrica

En esta sección se introduce una nueva familia de anomalías, $\Psi_{\alpha,\beta}$, dependiente de dos parámetros y relacionada con la anomalía media M mediante la expresión

$$dM = K_{\alpha,\beta} r^\alpha (r')^\beta d\Psi_{\alpha,\beta}, \quad (8.24)$$

donde r y r' son los radio vectores del secundario desde el primario y el foco vacío de la elipse, respectivamente. La constante $K_{\alpha,\beta}$ viene determinada por la relación

$$\begin{aligned} K_{\alpha,\beta} d\Psi_{\alpha,\beta} &= r^{-\alpha} (r')^{-\beta} dM \\ &= a^{-\alpha} (1 - e \cos E)^{-\alpha} a^{-\beta} (1 + e \cos E)^{-\beta} dM \\ &= a^{-\alpha-\beta} (1 - e \cos E)^{-\alpha} a^{-\beta} (1 + e \cos E)^{-\beta} (1 - e \cos E) dE \\ &= a^{-\alpha-\beta} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} a^{-\beta} (1 + e \cos E)^{-\beta} dE \end{aligned} \quad (8.25)$$

y de aquí

$$K_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^{-\alpha-\beta} (1 - e \cos E)^{1-\alpha} (1 + e \cos E)^{-\beta} dE. \quad (8.26)$$

Esta familia biparamétrica de anomalías es especialmente interesante porque engloba a muchas de las anomalías descritas con anterioridad. En los siguientes apartados de este capítulo se va a probar que eligiendo los valores adecuados de α y β se establece una equivalencia entre $\Psi_{\alpha,\beta}$ y las anomalías definidas en (2.2), (6.2), (6.1), (8.22), (8.12).

Anomalías generalizadas de *Sundman*

En el caso de esta anomalía la prueba es obvia, ya que basta tomar $\beta = 0$ en la expresión (8.24) para llegar al resultado deseado. Notar que este caso, como ya se ha explicado con anterioridad, comprende a la anomalía media, M , a la anomalía excéntrica, E , a la anomalía verdadera, V , y a la anomalía τ de *Sundman* en la que $\alpha = \frac{3}{2}$.

Longitud de arco regularizada

Para iniciar este apartado se considera la función de partición $Q(r)$ descrita en (8.11). Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
 Q(r) &= r^{1/2} \left(\sqrt{2\mu - \frac{\mu}{a}r} \right)^{-1} \\
 &= r^{1/2} \left(\sqrt{\mu} \sqrt{2 - \frac{r}{a}} \right)^{-1} \\
 &= r^{1/2} \mu^{-1/2} \left(\sqrt{\frac{2a-r}{a}} \right)^{-1} \\
 &= r^{1/2} \mu^{-1/2} a^{1/2} \left(\sqrt{2a-r} \right)^{-1} \\
 &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} r^{1/2} (r')^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

y por tanto, según (8.12)

$$dM = ndt = n \underbrace{\frac{2a}{\pi} \bar{E}(e) \sqrt{\frac{a}{\mu}} r^{1/2} (r')^{-1/2}}_{Q^*} ds^*.$$

Puede observarse que la anomalía por longitud de arco regularizada queda englobada dentro de la familia biparamétrica tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = -\frac{1}{2}$.

Anomalía elíptica

Por un lado, la expresión que relaciona la amplitud elíptica u con la anomalía media, M , es la ecuación de *Kepler*, que adopta la forma

$$\text{am}(u) + e \text{cn}(u) = M + \frac{\pi}{2}. \tag{8.28}$$

Por otro lado, tomando $\varphi = \text{am}(u)$ y teniendo en cuenta las definiciones y propiedades de las funciones elípticas expuestas en (8.4)–(8.7) se tiene que

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

8. Familia biparamétrica

derivando

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

e invirtiendo la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{du} &= \frac{d \operatorname{am}(u)}{du} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \operatorname{am}(u)} \\ &= \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2(u)}. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Si en la expresión (8.28) se toman derivadas, se obtiene

$$\begin{aligned} dM &= (\operatorname{dn}(u) - e \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u)) du \\ &= \operatorname{dn}(u)(1 - e \operatorname{sn}(u)) du \\ &= \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sn}^2(u)}(1 - e \operatorname{sn}(u)) du \\ &= \sqrt{(1 + e \operatorname{sn}(u))(1 - e \operatorname{sn}(u))}(1 - e \operatorname{sn}(u)) du \\ &= \sqrt{1 + e \operatorname{sn}(u)}(1 - e \operatorname{sn}(u))^{3/2} du \\ &= \frac{a^{3/2}}{a^{3/2}} \sqrt{1 + e \operatorname{sn}(u)}(1 - e \operatorname{sn}(u))^{3/2} du \\ &= \frac{r^{3/2}}{a^{3/2}} \sqrt{1 + e \operatorname{sn}(u)} du. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Para continuar se tiene que $r' = a(1 + e \cos g)$ y, según *Brumberg* [26], $\operatorname{am}(u) = g + \frac{\pi}{2}$; por tanto

$$r' = a(1 + e \operatorname{sn}(u)). \tag{8.31}$$

Si se sigue transformando la expresión obtenida en (8.30) con este resultado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 dM &= \frac{r^{3/2}}{a^{3/2}} \sqrt{1 + e \operatorname{sn}(u)} du \\
 &= a^{1/2} \frac{r^{3/2}}{a^2} (1 + e \operatorname{sn}(u))^{1/2} du \\
 &= \frac{1}{a^2} r^{3/2} (r')^{1/2} du.
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

Para finalizar, si se conecta la anomalía media con la nueva variable anteriormente mencionada $w = \frac{\pi u}{2K} - \frac{\pi}{2}$ introducida por *Brumberg* [26], se tiene que

$$dM = \frac{2K(e)}{\pi a^2} r^{3/2} (r')^{1/2} du,$$

donde puede verse que también queda englobada dentro de la familia biparamétrica con $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$.

Anomalía semifocal

Esta anomalía, introducida por *López* [81] y citada con anterioridad en esta memoria, viene definida por

$$dM = Q_{\frac{1}{2}}(r) d\Psi_{\frac{1}{2}},$$

donde Q es la función introducida en (8.20). Se puede deducir que

$$\begin{aligned}
 dM &= Q_{\frac{1}{2}}(r) d\Psi_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{r}{\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r}} \right) d\Psi_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{2r}{\frac{2a}{r(2a-r)}} \right) d\Psi_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{2r^2(2a - r)}{2a} \right) d\Psi_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{r^2 r'}{a} d\Psi_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{r^2 r'}{a^3 \sqrt{1 - e^2}} d\Psi_{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

8. Familia biparamétrica

y se observa, para finalizar, que también encaja dentro de la familia biparamétrica tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

A modo de resumen se presenta la Tabla 8.1, que incluye el nombre de la anomalía y los valores de los parámetros que la engloban dentro de la familia biparamétrica.

Anomalía	valor de α	valor de β
media	0	0
excéntrica	1	0
verdadera	2	0
<i>Nacozy</i>	$\frac{3}{2}$	0
longitud de arco	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
elíptica	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
semifocal	2	1
antifocal	1	1

Tabla 8.1: Algunas anomalías englobadas dentro de la familia biparamétrica $\Psi_{\alpha,\beta}$.

8.2. Desarrollos en serie

Al igual que se ha visto en el capítulo 6, el uso de estas anomalías requiere el desarrollo en serie de *Fourier* respecto a éstas de las magnitudes principales del problema de dos cuerpos. Estos desarrollos supondrán una base de partida para el posterior desarrollo de la función de perturbación.

A tal fin, se propone como objetivo obtener el desarrollo de la anomalía⁶ g y de las expresiones en las que ésta aparece —como $\cos g$, $\sin g$, $\frac{r}{a}$ y $\frac{a}{r}$ — en forma de serie de *Fourier* en $\Psi_{\alpha,\beta}$, así como el desarrollo de la ecuación de *Kepler*, $M = M(e, \Psi_{\alpha,\beta})$.

El método a seguir es completamente paralelo, si bien más laborioso, al seguido en el punto 6.3.

El primer lugar se obtiene el desarrollo de la nueva anomalía, $\Psi_{\alpha,\beta}$, en función de g para lo cual basta tener en cuenta las relaciones

⁶Se ha adoptado la nomenclatura g para la anomalía excéntrica porque es la forma que se eligió en su momento para referirse a ella en el artículo adjunto.

$$\begin{aligned}
 dM &= K_{\alpha,\beta} r^\alpha (r')^\beta d\Psi_{\alpha,\beta}, \\
 M &= g - e \sin g, \\
 r &= a(1 - e \cos g), \\
 r' &= a(1 + e \cos g),
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

de las cuales se puede deducir que

$$\begin{aligned}
 dM &= \frac{r}{a} dg, \\
 d\Psi_{\alpha,\beta} &= K_{\alpha,\beta}^{-1} r^{1-\alpha} (r')^{-\beta} dg \\
 &= \frac{a^{-\alpha-\beta}}{K_{\alpha,\beta}} (1 - e \cos g)^{1-\alpha} (1 + e \cos g)^{-\beta} dg.
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

El valor de $K_{\alpha,\beta}$ viene dado por (8.26) y desarrollando en serie las magnitudes $(1 - e \cos g)^{1-\alpha}$ y $(1 + e \cos g)^{-\beta}$ se llega a una expresión de la forma

$$(1 - e \cos g)^{1-\alpha} (1 + e \cos g)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} S_{\alpha,\beta} \cos kg. \tag{8.36}$$

Ahora, integrando se obtiene

$$\Psi_{\alpha,\beta} = g + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(\alpha,\beta)}(e) \sin kg. \tag{8.37}$$

Las funciones $T_k^{(\alpha,\beta)}(e)$ son de orden k en la excentricidad y, por tanto, es posible reordenar la serie como

$$\Psi_{\alpha,\beta} = g + \sum_{n=1}^{\infty} e^n \varphi_n(g) \tag{8.38}$$

y bien a partir del algoritmo de inversión de series *Deprit*, bien a partir de un algoritmo —por ejemplo en *Mathematica*— similar al descrito en el punto 6.3 bajo el epígrafe «Desarrollos analíticos en el problema de dos cuerpos mediante anomalías generalizadas de *Sundman*», puede obtenerse la serie inversa

$$g = \Psi_{\alpha,\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{\alpha,\beta}(e) \sin k\Psi_{\alpha,\beta}. \quad (8.39)$$

Análogamente se procede para conseguir $\sin g$ y $\cos g$ como series de *Fourier*. Por otro lado, la obtención de $\frac{r}{a}$ y $\frac{a}{r}$ se realiza fácilmente a partir de los desarrollos anteriores.

Para obtener la ecuación de *Kepler* basta con sustituir los desarrollos de g y $\sin g$ en función de M , basados en funciones de *Bessel*, en (8.37) y proceder a su inversión mediante el método de *Deprit*.

Los resultados, de hasta tercer orden en la excentricidad, están calculados y se presentan en el artículo anexo al capítulo; para órdenes más altos el procedimiento a seguir es el mismo.

La integración usando como variables temporales $\Psi_{\alpha,\beta}$ no se describe de nuevo porque el método a seguir es idéntico al descrito en 6.3 y 6.4.

8.3. Aplicación a la minimización de errores en la integración numérica

En esta sección se considera la forma de aplicar el estudio que se ha realizado sobre estas anomalías al caso de la integración numérica.

Es conocido que en el problema de los dos cuerpos, cuando se presentan excentricidades elevadas en el caso elíptico, es decir, próximas a la unidad, la distribución de puntos sobre la órbita correspondientes a intervalos temporales iguales es muy asimétrica. Este comportamiento es una consecuencia de la segunda ley de *Kepler*. Los puntos están muy concentrados en la zona de la órbita cercana al apoastro y muy dispersos en la región del periastro. También en el caso de excentricidades elevadas es notorio mencionar que la velocidad del cuerpo en la región del periastro es muy elevada en comparación con la región del apoastro.

La aplicación de métodos numéricos de integración utilizando el tiempo como variable independiente implica para paso constante— principalmente en el caso de excentricidades altas— una distribución de nodos muy baja en la región del periastro y muy alta en el apoastro. Esta distribución es contraria a la dinámica del sistema, la cual requeriría más nodos donde la velocidad es mayor. También hay que tener en cuenta que la concentración de nodos ha de ser mayor en las regiones de mayor curvatura (periastro y apoastro), resultando que en el periastro es donde la

8.3. Aplicación a la minimización de errores en la integración numérica

concentración de puntos es menor.

Para solventar este problema se pueden considerar tres posibles vías de actuación. En primer lugar, considerar la utilización de métodos de paso variable; en general, estos métodos proporcionan buenos resultados. Como segunda opción es posible realizar un incremento de forma notable en el número de pasos constantes, lo cual, proporciona resultados satisfactorios, pero requiere un esfuerzo computacional enorme. Por último, se puede llevar a cabo una modificación en la distribución de puntos sobre la órbita de forma más acorde con la dinámica. Esta tercera vía —que no tiene carácter excluyente con las dos anteriores— es la que se estudia en la presente memoria y es conocida como regularización analítica de paso de integración.

En este sentido se han realizado los siguientes experimentos numéricos sobre el problema de dos cuerpos tomando $\Psi_{\alpha,\beta}$ como anomalía temporal tal y como se indica en los epígrafes (43) y (44) del artículo anexo.

En referencia al artículo, en la Figura anexa (1) puede verse la representación de la distribución de 20 puntos sobre una órbita de excentricidad $e = 0,7$ para distintos valores de los parámetros α y β de la familia.

En la Tabla (1) se muestran los errores de integración en posición y velocidad tras una revolución para distintos valores de α y β asociados al satélite Heos II, cuya excentricidad es de $e = 0,9425$; el sistema se modela como un problema de dos cuerpos y para 10000 puntos igualmente espaciados en la órbita se obtienen valores de dichos errores notablemente diferentes, todos para distintos valores de α y β .

En la Tabla (2) se detallan los valores de los parámetros α y β que minimizan el error en posición tras una revolución para un satélite ficticio cuyo semieje coincide con el de Heos II y para distintos valores de la excentricidad. La Figura (2) muestra gráficamente los valores de α y β que optimizan dicho error.

Las figuras (3), (4), (5) y (6) del artículo, y (1) y (2) del *corrigendum* anexo muestran la distribución de los errores locales de integración en posición (x, y) y velocidad (v_x, v_y) en el plano orbital en los distintos puntos de la órbita; en cada paso se parte de la posición exacta calculada analíticamente con las ecuaciones del problema de dos cuerpos y comparando las posiciones analítica y numéricamente tras un paso de integración.

A continuación, en la Tabla (3) se muestra el número de pasos necesarios para alcanzar en una revolución un error en la posición del 10^{-6} km. utilizando un procedimiento de paso variable y un par de métodos *Runge-Kutta* embebidos de orden 8 y 9 con el objetivo de poder modificar el paso a partir de la estimación del error obtenida. Puede observarse que el número de pasos también se reduce para valores apropiados de α y β . En este caso, tal como afirma *Brumberg* [25], el valor del paso inicial es crítico para poder determinar el número total de pasos y se ha variado con objeto de minimizar en cada caso el número de pasos.

Finalmente, para estudiar la robustez del método se analiza un problema perturbado: el satélite Heos II en rotación alrededor de una Tierra con aplanamiento que induce el término J_2 del potencial perturbador. En este caso el problema que se plantea es la determinación del número de pasos constantes que hay que usar, según los valores de α y β , para tras 100 revoluciones obtener un error menor que 10^{-4} km. en posición utilizando un método *Runge–Kutta* de cuarto orden y un *Runge–Kutta* de octavo orden. La Tabla (4) muestra enormes diferencias según la anomalía utilizada.

8.4. Artículo: A new bi–parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion

En este apartado se presenta el artículo «A new bi–parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion» [80], que fue publicado en la revista *Journal of Computational and Applied Mathematics* en el año 2016.

Se agradece a dicha editorial las facilidades otorgadas para poder incluir artículos de esta revista en esta tesis doctoral.

El artículo recoge un enfoque analítico y numérico sobre el estudio de movimiento orbital en el problema de dos cuerpos en el sistema solar y define una nueva familia de anomalías, $\Psi_{\alpha,\beta}$, que va a permitir, por un lado, la obtención de desarrollos más compactos para utilizarse en series analíticas y, por otro, una mejora en la eficiencia de los métodos numéricos; esta eficiencia se obtiene porque en el proceso de integración se consigue una distribución más adecuada de los puntos en la órbita.

Para el caso numérico, se han estudiado los valores de los parámetros α y β que optimizan la eficiencia de los métodos numéricos y se han aplicado los resultados al estudio de un problema perturbado asociado a un satélite de alta excentricidad.

Para el caso analítico, se han obtenido los desarrollos de hasta tercer orden en la excentricidad de las magnitudes que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* en función de la nueva anomalía. Con estos desarrollos y la ayuda de un procesador de series de *Poisson* se pueden desarrollar teorías analíticas.

Se incluye también un artículo rectificativo que corrige algunas erratas incluidas por equivocación en el artículo original.

Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

Journal of Computational and Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cam

A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion



José A. López Ortí*, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera

Departamento de Matemáticas, Universidad Jaume I, Av Sos Baynat s/n 12071 Castellón, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 24 July 2015

Received in revised form 22 December 2015

MSC:

70F05

70F10

70F15

70M20

Keywords:

Celestial mechanics

Ordinary differential equations

Computational algebra

ABSTRACT

One of the fundamental problems in celestial mechanics is the study of the orbital motion of the bodies in the solar system. This study can be performed through analytical and numerical methods. Analytical methods are based on the well-known two-body problem; it is an integrable problem and its solution can be related to six constants called orbital elements. To obtain the solution of the perturbed problem, we can replace the constants of the two-body problem with the osculating elements given by the Lagrange planetary equations. Numerical methods are based on the direct integration of the motion equations. To test these methods we use the model of the two-body problem with high eccentricity.

In this paper we define a new family of anomalies depending on two parameters that includes the most common anomalies. This family allows one to obtain more compact developments to be used in analytical series and also to improve the efficiency of numerical methods because it defines a more suitable point distribution with the dynamics of the two-body problem.

© 2016 Published by Elsevier B.V.

1. Introduction

One of the most important problems in celestial mechanics is the study of the orbital motion around a central body. This problem includes the planetary theories and the study of the motion of artificial satellites around the Earth. The problem of the motion of a planet around the Sun or an artificial satellite around the Earth can be modeled by means of the second order differential equations

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} - \vec{\nabla}U + \vec{F} \quad (1)$$

where \vec{r} is the radius vector referred to the primary (the Sun in the case of a planet or the Earth in the case of an artificial satellite), G the gravitational constant, m the mass of the primary, m' the mass of the secondary (planet or artificial satellite), $\mu = G(m + m')$ the spaceflight constant, U the potential that induces the conservative perturbation forces such as the gravitational forces; and \vec{F} represents non-conservative disturbing forces such as atmospheric friction, radiation pressure, the solar wind, and others. The most important motion in the solar system can be described in its first approximation without considering the disturbing forces, as a two-body problem: Sun–planet, Earth–satellite, etc. The two-body problem is a well-known integrable problem and its solution is given by a set of the orbital elements $\vec{\sigma}$ [1–3]. The most common set of elements

* Corresponding author.

E-mail address: lopez@mat.uji.es (J.A. López Ortí).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>

0377-0427/© 2016 Published by Elsevier B.V.

is the third set of Brower and Clemence $\vec{\sigma} = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ [3], $M = n(t - t_0) + M_0$, where $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ is the mean motion and M_0 is the mean anomaly in the initial epoch.

To solve the motion problem there are two main ways: the analytical methods and the numerical methods. Analytical methods to solve the perturbed problem can be appropriate in case of the study of the planetary motion. In this case, the description of the perturbed motion can be obtained by means of the perturbation theory. This method is based on the Lagrange variation of constants and for each planet the variation of the elements is described by the Lagrange planetary equations [4]

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \tag{2}$$

where ε is a new variable defined by means of the equation:

$$M = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt. \tag{3}$$

This new variable coincides with M_0 in the case of the unperturbed motion.

The disturbing potential R due to the disturbing bodies $i = 1, \dots, N$ is given by [4]

$$R = \sum_{k=1}^N Gm_k \left[\left(\frac{1}{\Delta_k} \right) - \frac{x \cdot x_k + y \cdot y_k + z \cdot z_k}{r_k^3} \right] \tag{4}$$

where $\vec{r} = (x, y, z)$ are the coordinates of the secondary with respect to the primary and $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ the position of the k th disturbing body with respect to the primary, Δ_k is the distance between the secondary and the disturbing body k , and m_k the mass of the k -body.

Let us define the orbital coordinates (ξ, η) , where $\xi = \overline{ON}$, O is the main focus of the ellipse related to the position of the primary, N the orthogonal projection of the secondary P on the major axis of the ellipse and $\eta = \overline{NP}$. The sign of the coordinates (ξ, η) is defined by the position in its orbit; both of them are related to the true anomaly f , the secondary anomaly f' which is the angle between the secondary and the periapsis from the secondary focus of the ellipse, and g is the eccentric anomaly [3,2,1]

$$\xi = r \cos f = a(\cos g - e), \quad \eta = r \sin f = a\sqrt{1-e^2} \sin g, \tag{5}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} = a(1-e \cos g), \quad r' = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f'} = a(1+e \cos g), \tag{6}$$

where r the radius vector and $r' = 2a - r$ the radius vector of P with respect to the secondary focus of the ellipse. The eccentric anomaly g is connected with the mean anomaly M through Kepler's equation

$$M = g - e \sin g. \tag{7}$$

To solve the problem with analytical methods using the mean anomalies as temporal variables, it is necessary to obtain the analytic development of the main quantities of the two-body problem as Fourier series of the mean anomalies. These developments can be very long if the value of the eccentricity is not small. In order to improve the convergence of the series, Nacozy [5] extends the concept of partial anomalies introduced in 1856 by Hansen; these anomalies are defined in several regions of the orbit and the convergence of the series is improved by choosing an appropriate anomaly for each orbital region.

Nacozy [6] generalizes the transformation $dt = Crdr$ introduced by Sundman in 1912 to regularize the origin of the three-body problem defining a new variable, called intermediate anomaly, as $dt = \mu^{1/2} r^{3/2} d\tau$. Unfortunately, this variable

is not normalized in $[0, 2\pi]$ on the orbit. This variable can be normalized as τ^* defined by $dM = \frac{2}{\pi} \frac{K(\sqrt{-1} \sqrt{\frac{2e}{1-e}})}{\sqrt{1-e}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} d\tau^*$ where $K(x)$ is the complete elliptic integral of first kind.

Janin and Bond [7] define a new one-parametric family of anomalies Ψ_α , called Generalized Sundman anomalies, defined as $C_\alpha(e)r^\alpha d\Psi_\alpha = dM$.

Brumberg and Fukushima [8] define the elliptic anomaly w as

$$w = \frac{\pi u}{2K(e)} - \frac{\pi}{2}, \quad \text{am } u = g + \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

where $\text{am } u$ is the elliptic amplitude of Jacobi and $K(e)$ the complete elliptic integral of first kind. The orbital coordinates (ξ, η) are connected with u through the following equation

$$\xi = a(\text{sn } u - e), \quad \eta = -a\sqrt{1 - e^2}\text{cn } u, \quad (9)$$

where $\text{sn } u$ and $\text{cn } u$ are the elliptic sinus and cosinus of Jacobi. The vector radii r and r' are determined by

$$r = a(1 - e \text{sn } u), \quad r' = a(1 + e \text{sn } u). \quad (10)$$

The relationship between u and M is given by Kepler's equation

$$\text{am } u + e \text{cn } u = M + \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

Brumberg [9] defined the regularized length of arc s^* by

$$\frac{2a}{\pi} E(e) r^{1/2} (2\mu - 2hr)^{-1/2} ds^* = dt \quad (12)$$

where $E(e)$ is the complete elliptic integral of second kind, and $h = \frac{\mu}{2a}$ the integral of the energy.

López [10] defines the natural family of anomalies as a linear convex combination of the true anomaly f and the secondary anomaly f' . The radius vector r' is related to f' and g by

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f'} = a(1 + e \cos g). \quad (13)$$

In general a new anomaly, denoted in general as Ψ , is connected with the mean anomaly M through a relation in the form

$$Q(r)d\Psi = dM, \quad (14)$$

where Q is known as the partition function.

In this section, the general problem and its background have been introduced.

In Section 2, the bi-parametric family of anomalies is defined. In this section, we show that the most common anomalies used in the analytical regularization of the step size are particular cases of this family. Finally, we obtain an equation to connect the new family with the eccentric anomaly.

In Section 3, the analytical properties of this family are studied. In this sense, we obtain the developments of the most important quantities of the two-body problem according to the new anomaly. These developments are the basis to construct analytical theories of the planetary motion.

In Section 4, a set of numerical examples about the two-body problem is studied. This study includes a perturbed problem to test the robustness of the method. This section also contains a study about the performance of a variable step size integration method combined with this family of anomalies.

Finally, in Section 5 the main conclusions and remarks of these paper are presented.

2. A new bi-parametric family of anomalies

In this paper we define a new bi-parametric family of anomalies $\Psi_{\alpha,\beta}(e)$ defined by

$$C_{\alpha,\beta}(e) r^\alpha r'^\beta d\Psi_{\alpha,\beta}(e) = dM. \quad (15)$$

This family includes as a particular case the Sundman generalized anomalies (that includes M, g, f, τ^*).

In the case of the elliptic anomaly w [8], from (11) we obtain

$$(1 - e \text{sn } u) \text{dn } u \text{ du} = dM \quad (16)$$

where $\text{dn } u = \sqrt{1 - e^2 \text{sn}^2 u}$ is the elliptic function difference of amplitude of Jacobi. Replacing (10) in (16), we obtain

$$\frac{1}{K(e)a^2} r^{3/2} r'^{-1/2} dw = dM, \quad (17)$$

so, our family includes the elliptic anomaly.

In the case of the regularized length of arc s^* , multiplying (12) by the mean motion $n = \sqrt{\mu/a^3}$, replacing the value of the integral of the energy and taking into account that $r + r' = 2a$, we obtain

$$\frac{1}{a} r^{1/2} r'^{-1/2} ds^* = dM. \quad (18)$$

For this reason, the regularized length of arc s^* is a particular case of the bi-parametric family.

In the case of the secondary anomaly f' , we have

$$\frac{r r'}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} df' = dM. \tag{19}$$

In order to obtain future developments, it is interesting to connect the anomaly $\Psi_{\alpha, \beta}$ with the eccentric anomaly g

$$dM = \frac{r}{a} dE = C_{\alpha, \beta}(e) r^\alpha r'^\beta d\Psi_{\alpha, \beta}, \tag{20}$$

and taking into account (5) and (13), we have

$$a C_{\alpha, \beta} d\Psi_{\alpha, \beta} = a^{-(\alpha+\beta)} (1 - e \cos g)^{1-\alpha} (1 + e \cos g)^{-\beta} dg, \tag{21}$$

where

$$C_{\alpha, \beta} = a^{1+\alpha-\beta} K_{\alpha, \beta}, \tag{22}$$

and so, $K_{\alpha, \beta}$ is given by

$$K_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos g)^{1-\alpha} (1 + e \cos g)^{-\beta} dg. \tag{23}$$

To connect $\Psi_{\alpha, \beta}$ to g we proceed replacing $C_{\alpha, \beta}$ in (21), and integrating, we obtain

$$\Psi_{\alpha, \beta}(g) = \frac{1}{K_{\alpha, \beta}} \int_0^g (1 - e \cos g)^{1-\alpha} (1 + e \cos g)^{-\beta} dg. \tag{24}$$

3. Analytical developments

To use the new family of anomalies in analytical theories of the planetary motion it is necessary to develop the main quantities of the two-body problem as Fourier series according to the selected anomaly. These quantities involve the development of the eccentric anomaly, $\sin g$, $\cos g$, r/a , a/r and M according to the new anomaly. The development of M according to the new anomaly is known as Kepler's equation.

To develop the second member of Eq. (24) as Fourier series it is convenient to study the development of the function $G(p, e, z)$ defined as

$$G(p, e, z) = \left(1 - e \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^p = z^{-p} 2^{-p} (2z - ez^2 - e)^p, \tag{25}$$

and so,

$$G(p, e, z) = (-1)^p z^{-p} 2^{-p} e^p (z - z_1)^p (z - z_2)^p, \tag{26}$$

where $z = \exp(\sqrt{-1}g)$, $z_1(e) = (1 + \sqrt{1 - e^2})/e$ and $z_2(e) = e/(1 + \sqrt{1 - e^2})$ are the roots of the equation $2z - ez^2 - e = 0$; note that $z_1(e) = -z_1(-e)$ and $z_2(e) = -z_2(-e)$.

For $e \in] - 1, 1[$, $\exists k_1, k_2 \geq 0$ satisfying $0 < |z_2(e)| < k_1 < 1 < k_2 < |z_1(e)|$. For each constant value of $p \in \mathbb{R}$, we have that the function $G(p, e, z)$ is holomorphic in the ring

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid k_1 \leq z \leq k_2\}.$$

This ring contains the circumference of center $z = 0$ and radius one. To develop $G(p, e, z)$ as Laurent series according to z we have

$$G(p, e, z) = e^p z_1(e)^p 2^{-p} \left(1 - \frac{z}{z_1(e)}\right)^p \left(1 - \frac{z_2(e)}{z}\right)^p, \tag{27}$$

and so

$$\begin{aligned} G(p, e, z) &= e^p z_1(e)^p 2^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{z^k}{z_1(e)^k} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p}{s} \frac{z_2(e)^s}{z^s} \\ &= \frac{z_1(e)^p e^p}{2^p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{|m|+s} \binom{p}{s} \binom{p}{|m|+s} z_2(e)^{|m|+2s} \right] z^m. \end{aligned} \tag{28}$$

8. Familia biparamétrica

Let us define $K_m(p, e)$ as

$$K_m(p, e) = \frac{z_1(e)^p e^p}{2^p} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{|m|+s} \binom{p}{s} \binom{p}{|m|+s} z_2(e)^{|m|+2s}. \quad (29)$$

It is immediate that $K_m(p, e) = K_{-m}(p, e)$. Note that $K_m(p, e) = O(e^m)$. Using this definition, we have

$$G(p, e, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_m(p, e) z^m. \quad (30)$$

From this equation, we obtain

$$(1 - e \cos g)^{1-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(1 - \alpha, e) z^m, \quad (31)$$

and

$$(1 + e \cos g)^{-\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(-\beta, -e) z^m, \quad (32)$$

and so

$$aC_{\alpha,\beta} d\Psi_{\alpha,\beta} = a^{-(\alpha+\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} K_m(1 - \alpha, e) z^m \sum_{s=0}^{\infty} K_s(-\beta, -e) z^s. \quad (33)$$

Let us define $S_k(\alpha, \beta, e)$ as

$$S_k(\alpha, \beta, e) = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} K_{m-s}(1 - \alpha, e) K_s(-\beta, -e). \quad (34)$$

From this equation $C_{\alpha,\beta} = a^{-(1+\alpha+\beta)} S_0(\alpha, \beta, e) / \pi$.

Defining $T_m(\alpha, \beta, e) = S_k(\alpha, \beta, e) / S_0(\alpha, \beta, e)$ and taking into account that $z = \exp(\sqrt{-1}g)$, we obtain

$$d\Psi_{\alpha,\beta} = dg + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha, \beta, e) \cos kg, \quad (35)$$

and integrating

$$\Psi_{\alpha,\beta} = g + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(\alpha, \beta, e)}{k} \sin kg. \quad (36)$$

Using the Deprit series inversion algorithm [11], we can obtain the development of g , $\sin g$ and $\cos g$ according to $\Psi_{\alpha,\beta}$. Up to the third order in e , the most important quantities of the two-body problem are:

$$g = \Psi_{\alpha,\beta} + \left\{ (1 - \alpha + \beta)e + \left(\frac{3\alpha^3}{16} - \frac{9}{16}\alpha^2\beta - \frac{3\alpha^2}{4} + \frac{9}{16}\alpha\beta^2 + \frac{9}{8}\alpha\beta + \frac{11\alpha}{16} - \frac{3\beta^3}{16} - \frac{3\beta^2}{8} - \frac{5\beta}{16} - \frac{1}{8} \right) e^3 \right\} \sin(\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(\frac{3\alpha^2}{8} - \frac{3}{4}\alpha\beta - \frac{7\alpha}{8} + \frac{3\beta^2}{8} + \frac{5\beta}{8} + \frac{1}{2} \right) e^2 \sin(2\Psi_{\alpha,\beta}) - \left(\frac{29}{144}\alpha^3 - \frac{29}{48}\alpha^2\beta - \frac{3\alpha^2}{4} + \frac{29}{48}\alpha\beta^2 + \frac{29}{24}\alpha\beta + \frac{133\alpha}{144} - \frac{29\beta^3}{144} - \frac{11\beta^2}{24} - \frac{91\beta}{144} - \frac{3}{8} \right) e^3 \sin(3\Psi_{\alpha,\beta}) \quad (37)$$

$$\sin g = \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha\beta + \frac{5\alpha}{16} - \frac{3\beta^2}{16} - \frac{7\beta}{16} - \frac{1}{8} \right) e^2 \right\} \sin(\Psi_{\alpha,\beta}) + \left\{ \frac{(1 - \alpha + \beta)e}{2} + \left(\frac{2\alpha^3}{9} - \frac{2}{3}\alpha^2\beta - \frac{3\alpha^2}{4} + \frac{2}{3}\alpha\beta^2 + \frac{4}{3}\alpha\beta + \frac{25\alpha}{36} - \frac{2\beta^3}{9} - \frac{7\beta^2}{12} - \frac{19\beta}{36} - \frac{1}{6} \right) e^3 \right\} \sin(2\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(\frac{5\alpha^2}{16} - \frac{5}{8}\alpha\beta - \frac{11\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{9\beta}{16} + \frac{3}{8} \right) e^2 \sin(3\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(\frac{1}{3} - \frac{31}{144}\alpha^3 + \frac{31}{48}\alpha^2\beta + \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{31}{48}\alpha\beta^2 - \frac{31}{24}\alpha\beta - \frac{125\alpha}{144} + \frac{31\beta^3}{144} + \frac{13\beta^2}{24} + \frac{95\beta}{144} \right) e^3 \sin(4\Psi_{\alpha,\beta}). \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \cos g = & \frac{\alpha - \beta - 1}{2} e - \left(\frac{3}{16} \alpha \beta^2 + \frac{3}{16} \alpha^2 \beta + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3}{8} \alpha \beta + \frac{3\alpha}{16} - \frac{\beta^3}{16} - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta}{16} + \frac{1}{16} \alpha^3 \right) e^3 \\ & + \left\{ 1 - \left(\frac{5}{16} \alpha^2 - \frac{5}{8} \alpha \beta - \frac{11\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{9\beta}{16} + \frac{3}{8} \right) e^2 \right\} \cos(\Psi_{\alpha,\beta}) + \left\{ \frac{1 - \alpha + \beta}{2} e \right. \\ & + \left. \left(\frac{5\alpha^3}{18} - \frac{5}{6} \alpha^2 \beta - \alpha^2 + \frac{5}{6} \alpha \beta^2 + \frac{5}{3} \alpha \beta + \frac{19\alpha}{18} - \frac{5\beta^3}{18} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{13\beta}{18} - \frac{1}{3} \right) e^3 \right\} \cos(2\Psi_{\alpha,\beta}) \\ & + \left(\frac{5\alpha^2}{16} - \frac{5}{8} \alpha \beta - \frac{11\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{9\beta}{16} + \frac{3}{8} \right) e^2 \cos(3\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(\frac{1}{3} - \frac{31}{144} \alpha^3 + \frac{31}{48} \alpha^2 \beta \right. \\ & \left. + \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{31}{48} \alpha \beta^2 - \frac{31}{24} \alpha \beta - \frac{125\alpha}{144} + \frac{31\beta^3}{144} + \frac{13\beta^2}{24} + \frac{95\beta}{144} \right) e^3 \cos(4\Psi_{\alpha,\beta}). \end{aligned} \quad (39)$$

Replacing (37) and (38) in (7), we obtain Kepler's equation according to $\Psi_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned} M = & \Psi_{\alpha,\beta} + \left\{ (\beta - \alpha) e + \left(\frac{3\alpha^3}{16} - \frac{9}{16} \alpha^2 \beta - \frac{9\alpha^2}{16} + \frac{9}{16} \alpha \beta^2 + \frac{3}{4} \alpha \beta + \frac{3\alpha}{8} - \frac{3\beta^3}{16} - \frac{3\beta^2}{16} + \frac{\beta}{8} \right) e^3 \right\} \sin(\Psi_{\alpha,\beta}) \\ & + \left(\frac{3\alpha^2}{8} - \frac{3}{4} \alpha \beta - \frac{3\alpha}{8} + \frac{3\beta^2}{8} + \frac{\beta}{8} \right) e^2 \sin(2\Psi_{\alpha,\beta}) \\ & + \left(-\frac{29}{144} \alpha^3 + \frac{29}{48} \alpha^2 \beta + \frac{7\alpha^2}{16} - \frac{29}{48} \alpha \beta^2 - \frac{7}{12} \alpha \beta - \frac{17\alpha}{72} + \frac{29\beta^3}{144} + \frac{7\beta^2}{48} + \frac{5\beta}{72} \right) e^3 \sin(3\Psi_{\alpha,\beta}). \end{aligned} \quad (40)$$

Finally, the developments of r/a and a/r are given by

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = & 1 + \frac{1 + \beta - \alpha}{2} e^2 - \left\{ e - \left(\frac{5\alpha^2}{16} - \frac{5}{8} \alpha \beta - \frac{11\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{9\beta}{16} + \frac{3}{8} \right) e^3 \right\} \cos(\Psi_{\alpha,\beta}) \\ & + \frac{\alpha - \beta - 1}{2} e^2 \cos(2\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(-\frac{5}{16} \alpha^2 + \frac{5}{8} \alpha \beta + \frac{11\alpha}{16} - \frac{5\beta^2}{16} - \frac{9\beta}{16} - \frac{3}{8} \right) e^3 \cos(3\Psi_{\alpha,\beta}), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} = & 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} e^2 + \left\{ e - \left(\frac{5}{16} \alpha^2 - \frac{5}{8} \alpha \beta - \frac{19\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{17\beta}{16} + \frac{1}{8} \right) e^3 \right\} \cos(\Psi_{\alpha,\beta}) \\ & + \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{2} e^2 \right) \cos(2\Psi_{\alpha,\beta}) + \left(\frac{5\alpha^2}{16} - \frac{5}{8} \alpha \beta - \frac{19\alpha}{16} + \frac{5\beta^2}{16} + \frac{17\beta}{16} + \frac{91}{8} \right) e^3 \cos(3\Psi_{\alpha,\beta}). \end{aligned} \quad (42)$$

These equations are the basis of the analytical method to study of the planetary motion using $\Psi_{\alpha,\beta}$ as temporal variable. For details see [12].

4. Numerical methods

In the study of the motion of an artificial satellite with high eccentricity, the convergence of analytical methods is poor and it is preferable to use numerical methods to integrate the problem. In this case, the main inconvenience of the numerical methods with constant step size is the non-regular distribution of the points in the orbit; this strongly depends on the orbital region, and so, it is interesting to study the temporal transformations in order to obtain a more convenient distribution of the points when there is a greater concentration on the region where the velocity of the secondary is higher (apoapsis region) [13]. In general, the perturbing forces are small and so a good method to construct efficient integrators is the study of the optimal value of (α, β) that minimize the integration errors in the case of the two-body problem.

The use of an anomaly $\Psi_{\alpha,\beta}$ as integration variable allows one to obtain a more appropriate point distribution for the orbital motion. Fig. 1 shows the distribution of 20 points corresponding to the values $\Psi_{\alpha,\beta} = \pi k/20, k = 0, \dots, 19$, on the ellipse.

For each partition function Q and its associated anomaly Ψ we have that

$$\frac{d}{dt} = n \frac{d}{dM} = n \frac{d}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dM} = \frac{n}{Q} \frac{d}{d\Psi} \quad (43)$$

and so, for our family, the motion equations are:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= \frac{Q}{n} v_x, & \frac{dv_x}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= -GM \frac{Q}{n} \frac{x}{r^3} \\ \frac{dy}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= \frac{Q}{n} v_y, & \frac{dv_y}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= -GM \frac{Q}{n} \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

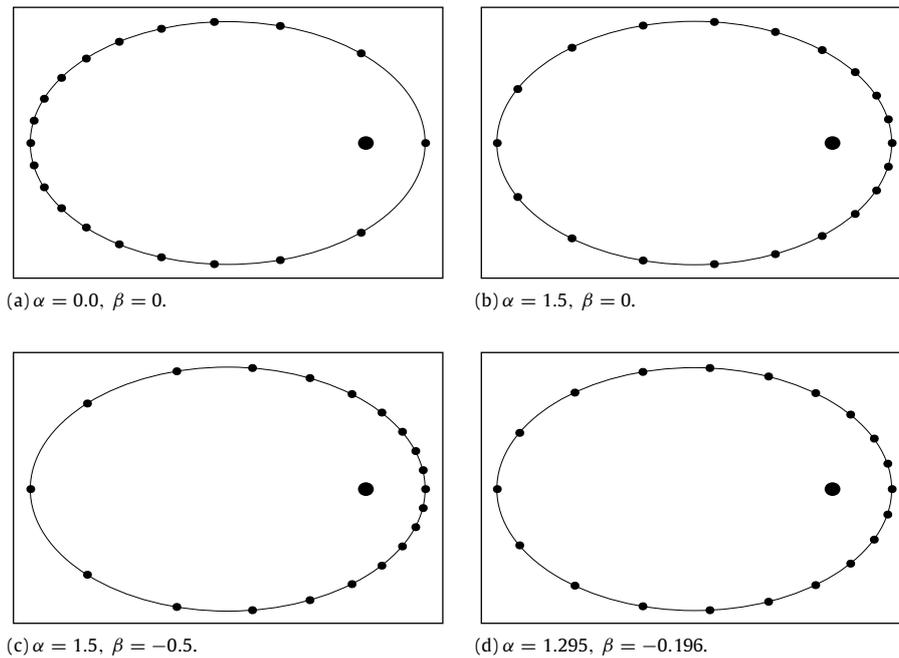


Fig. 1. Point distribution for $e = 0.7, \alpha = 0.0, 0.5, 0.75, 1.0$.

Table 1

Integration errors in position km and velocity km s^{-1} for several values of α and β in the bi-parametric for the satellite Heos II.

	M	g	τ^*	f	f'	s^*	w	$\Psi_{\alpha,\beta}$
α	0	1	1.5	2	1	0.5	1.5	1.628
β	0	0	0	0	1	-0.5	-0.5	-0.061
$\ \Delta\vec{r}\ $	9.54e00	1.12e-05	2.86e-08	9.49e-10	2.60e00	4.51e-04	1.07e-07	8.59e-11
$\ \Delta\vec{v}\ $	7.71e-03	9.01e-09	2.41e-11	3.56e-11	2.10e-03	3.64e-07	4.41e-11	7.44e-13

$$\frac{dz}{d\Psi_{\alpha,\beta}} = \frac{Q}{n} v_z, \quad \frac{dv_z}{d\Psi_{\alpha,\beta}} = -GM \frac{Q}{n} \frac{z}{r^3}, \quad (44)$$

where $Q = K_{\alpha,\beta} r^{\alpha} r'^{\beta}$ and n is the mean motion. To test the efficiency of the previous transformations we use a highly eccentric satellite, the old satellite HEOS II used by Brumberg to test the performance of its method.

The elements of this satellite are $a = 118\,363.47$ km, $e = 0.942572319$, $i = 28^\circ.16096$, $\Omega = 185^\circ.07554$, $\omega = 270^\circ.07151$, $M_0 = 0^\circ$. The period of the satellite is 4.69 days and for the Earth the spaceflight constant $GM = 3.986005 \cdot 10^5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$.

Table 1 shows the errors in position and velocity of the satellite after one revolution around the Earth. These values have been computed using a classical 4th order Runge–Kutta with 10 000 constant steps for several anomalies $\Psi_{\alpha,\beta}$ in the bi-parametric family such as $M, g, \tau^*, f, s^*, w, f'$ and $\Psi_{\alpha,\beta}$ for the optimal values of the parameters $\alpha = 1.628$ and $\beta = -0.061$. This table shows that the integration error strongly depends on the value of the parameters α and β .

Table 2 shows the values of α and β that minimize the errors in the position after one revolution of a fictitious satellite with the same semi-axis of HEOS II and eccentricities 0.0, 0.05, ..., 0.95. To obtain the pair (α, β) that minimizes the position error for each value of the eccentricity, we evaluate $\|\Delta\vec{r}\|$ on a grid defined by $\alpha_i = 0.01 \cdot i, \beta_j = 0.01 \cdot j$, for $i, j = 0, \dots, 100$, in order to get a first approximation and after that we use a gradient method to improve these values. The last columns of Table 2 contain the optimal values in the case of the Sundman family of anomalies. These errors have been computed using a classic 4th order Runge–Kutta integrator with 1000 uniform steps. In this table, we can see that the value of α where the position errors reach their minimum depends on the eccentricity.

The values of α and β where $\|\Delta\vec{r}\|$ reach its minimum can be connected to the eccentricity e by means of fifth order least square fitting-polynomials given by

$$\alpha(e) = -12.601e^5 + 40.312e^4 - 49.006e^3 + 27.948e^2 - 6.023e + 1.059 \quad (45)$$

$$\beta(e) = -16.579e^5 + 50.911e^4 - 59.682e^3 + 31.794e^2 - 5.961e - 0.569. \quad (46)$$

Fig. 2 shows the dependence between the optimal values of the parameters α, β and the eccentricity e .

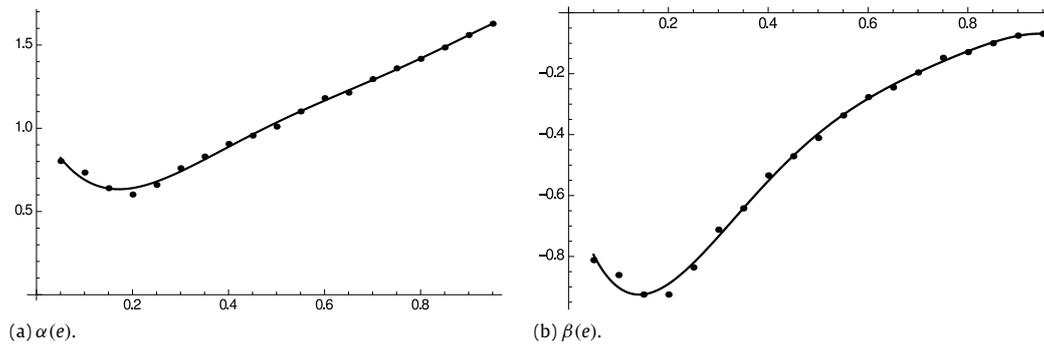


Fig. 2. Dependence of α and β parameters of e .

Table 2

Optimal values α , β for each value of e in the bi-parametric family and optimal values α_s in the Sundman family and errors in position and velocity.

e	α	β	$\ \Delta\vec{r}\ $	$\ \Delta\vec{v}\ $	α_s	$\ \Delta\vec{r}\ _s$	$\ \Delta\vec{v}\ $
0.05	8.030e-01	-8.120e-01	3.56e-07	8.50e-11	1.561	3.69e-07	5.71e-11
0.10	7.100e-01	-8.910e-01	3.50e-07	1.65e-10	1.578	3.56e-07	1.16e-10
0.15	6.400e-01	-9.250e-01	3.42e-07	2.37e-10	1.593	3.44e-07	1.79e-10
0.20	6.120e-01	-9.100e-01	3.22e-07	2.86e-10	1.606	3.31e-07	2.43e-10
0.25	6.600e-01	-8.360e-01	4.48e-07	3.20e-10	1.618	3.15e-07	3.11e-10
0.30	7.600e-01	-7.120e-01	2.51e-07	3.23e-10	1.630	2.98e-07	3.83e-10
0.35	8.030e-01	-6.420e-01	2.14e-07	3.18e-10	1.640	2.66e-07	4.50e-10
0.40	9.060e-01	-5.340e-01	1.83e-07	3.16e-10	1.650	2.50e-07	5.18e-10
0.45	9.560e-01	-4.710e-01	1.53e-07	2.96e-10	1.661	2.25e-07	5.93e-10
0.50	1.038e00	-4.110e-01	1.27e-07	2.68e-10	1.671	1.88e-07	6.57e-10
0.55	1.101e00	-3.370e-01	1.06e-07	2.64e-10	1.681	1.60e-07	7.13e-10
0.60	1.181e00	-2.770e-01	8.66e-08	2.57e-10	1.692	1.41e-07	7.60e-10
0.65	1.214e00	-2.450e-01	6.93e-08	1.74e-10	1.704	1.32e-07	7.86e-10
0.70	1.295e00	-1.960e-01	5.74e-08	1.33e-10	1.718	1.06e-07	7.77e-10
0.75	1.381e00	-1.480e-01	5.35e-08	7.48e-11	1.735	9.81e-08	6.97e-10
0.80	1.417e00	-1.290e-01	5.65e-08	2.90e-10	1.757	1.35e-07	4.65e-10
0.85	1.485e00	-1.000e-01	8.60e-08	8.95e-10	1.790	2.31e-07	1.10e-10
0.90	1.560e00	-7.500e-02	2.08e-07	2.51e-09	1.847	5.79e-07	1.66e-09
0.95	1.628e00	-6.900e-02	2.91e-06	2.69e-09	1.917	3.72e-06	9.83e-09

Figs. 3–6 show the local integration errors in the coordinates (x, y) and the velocity (v_x, v_y) in the orbital plane for a satellite moving in OXY plane and major semi-axis $a = 118\,363.47$ km and eccentricity $e = 0.7$ for several values of (α, β) . These errors have been obtained by solving for each value of $\Psi_{\alpha,\beta} = i \cdot h$, where $h = 2\pi/1000$, the equation $i \cdot h = \Psi_{\alpha,\beta}(g)$. From the value of g , we compute through the exact solution of the two-body problem the position and velocity vectors. These values are the initial conditions for the numerical integrator and we obtain the solution for the next step. To evaluate the exact local truncation errors, we compare the obtained value with the exact one calculated for the value of g given by $(i + 1)h = \Psi_{\alpha}(g)$.

To evaluate the performance of integration methods with variable step size combined with the bi-parametric family of anomalies, we use a Runge–Kutta–Fehlberg RKF8(9) method with constant step size [14] with several anomalies of this family and we compute the number of steps necessary to obtain a position error $\|\Delta\vec{r}\| \sim 10^{-6}$ km. Table 3 contains these results and has been obtained using double-precision arithmetic.

Finally, to test the robustness of the method, we study the number of fixed-size steps necessary to obtain the satellite position with a precision of 10^{-4} km after hundred periods (469 days) in a perturbed problem, using a classical Runge–Kutta method of fourth order and a Runge–Kutta method of eighth order [14].

The perturbed problem is the motion of the satellite Heos II around the Earth including the main term due to the oblateness of the Earth. The disturbing potential U that appears in (1) is given [4,15] by

$$U = J_2 GM \frac{a_E^2}{r^3} P_2(\sin \phi), \tag{47}$$

where $J_2 = 0.0010920$, $a_E = 6378.388$ km is the equatorial radius of the Earth, and ϕ the geocentric latitude of the satellite given by $\tan \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ and $P_2(x)$ is the Legendre polynomial of second order $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$. Obviously we have $\sin \phi = x/r$, and $\cos \phi = \sqrt{x^2 + y^2}/r$.

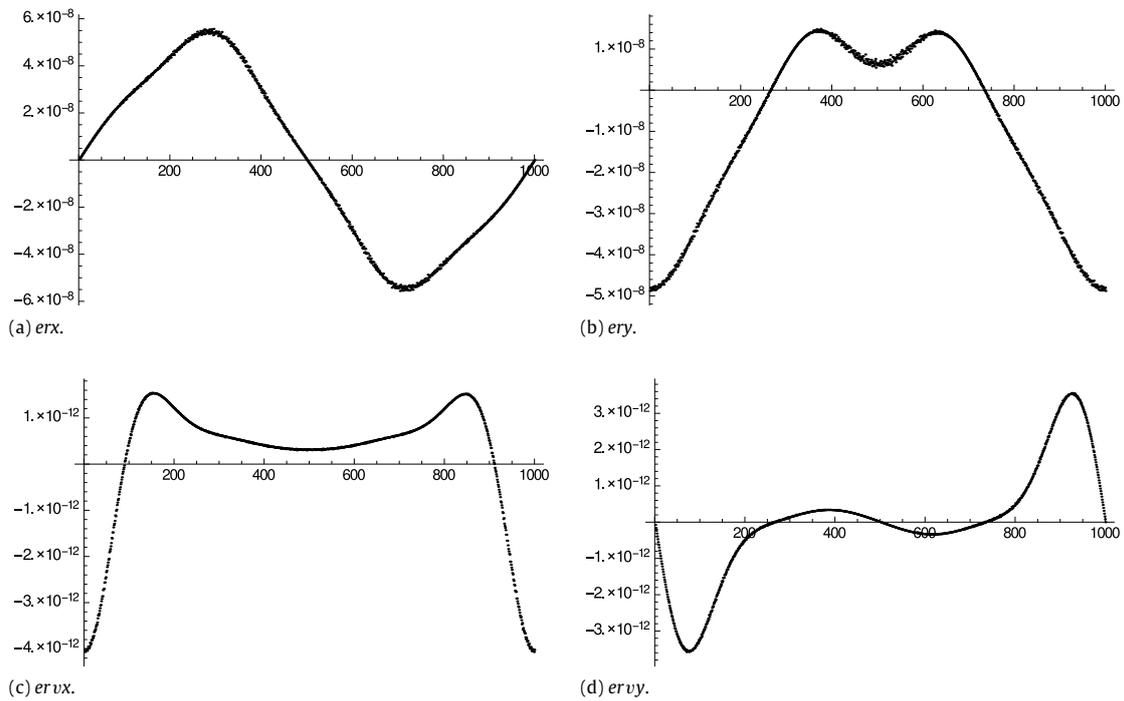


Fig. 3. Local integration errors distribution $e = 0.7$ for the Sundman anomaly $\alpha = 1.5, \beta = 0$.

Table 3

Number of steps, n , to arrange a precision $\|\Delta\vec{r}\| \sim 10^{-6}$ km using a RKF8(9) method combined with several anomalies.

	M	g	τ^*	f	f'	s^*	w	$\Psi_{\alpha,\beta}$
n	138	91	86	75	200	113	119	76
$\ \Delta\vec{r}\ $	$1.1e-6$	$1.1e-6$	$1.0e-6$	$1.0e-6$	$1.0e-6$	$1.0e-6$	$1.0e-6$	$1.0e-6$
$\ \Delta\vec{v}\ $	$0.9e-9$	$1.0e-9$	$0.9e-9$	$1.0e-9$	$0.8e-9$	$0.7e-9$	$0.7e-9$	$1.3e-9$

The perturbative forces derived of $\vec{\Phi} = -\vec{\nabla}U$ are given by:

$$\begin{aligned}
 \Phi_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -3GMJ_2 \left(\frac{a_E^2}{r^5}\right) (P_2(\sin(\phi)) + \sin \phi^2 \cos \phi) x, \\
 \Phi_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -3GMJ_2 \left(\frac{a_E^2}{r^5}\right) (P_2(\sin(\phi)) + \sin \phi^2 \cos \phi) y, \\
 \Phi_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -3GMJ_2 \left(\frac{a_E^2}{r^5}\right) (P_2(\sin(\phi))z - \sin \phi \cos \phi^3 r).
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Replacing (48) in (1), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= \frac{Q}{n} v_x, & \frac{dv_x}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= -GM \frac{Q}{n} \frac{x}{r^3} + \frac{Q}{n} \Phi_x, \\
 \frac{dy}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= \frac{Q}{n} v_y, & \frac{dv_y}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= -GM \frac{Q}{n} \frac{y}{r^3} + \frac{Q}{n} \Phi_y, \\
 \frac{dz}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= \frac{Q}{n} v_z, & \frac{dv_z}{d\Psi_{\alpha,\beta}} &= -GM \frac{Q}{n} \frac{z}{r^3} + \frac{Q}{n} \Phi_z.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Table 4 shows the number of steps necessary to obtain a precision $\|\Delta\vec{r}\| < 10^{-4}$ km after 100 revolutions using a classical Runge–Kutta method of fourth order and a Runge–Kutta of eighth order with constant step size [14] and several anomalies $\Psi_{\alpha,\beta}$.

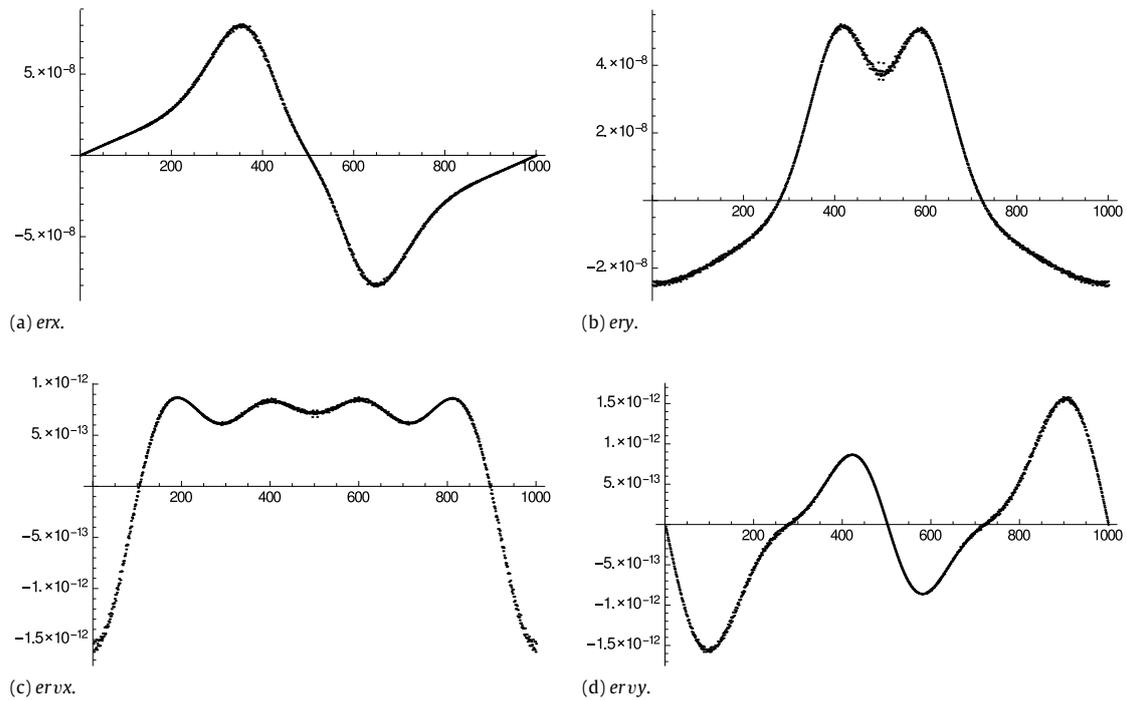


Fig. 4. Local integration errors distribution $e = 0.7$ for the optimal value in the Sundman family $\alpha = 1, 73, \beta = 0$.

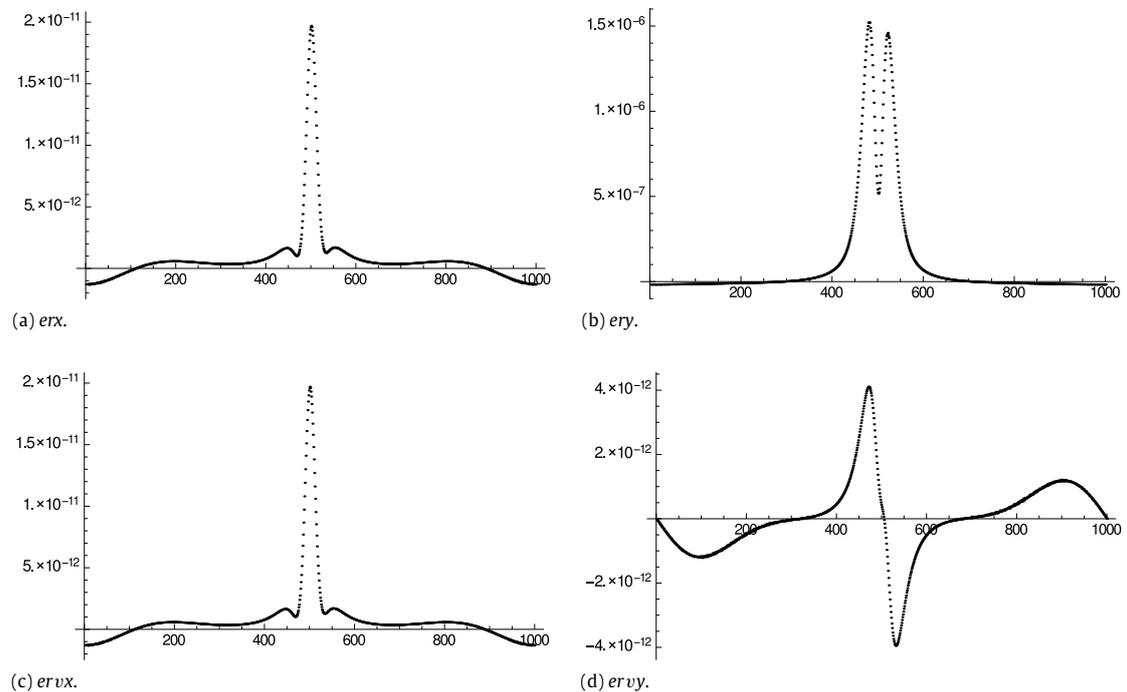


Fig. 5. Local integration errors distribution $e = 0.7$ for the elliptic anomaly $\alpha = 1.5, \beta = -0.5$.

5. Concluding remarks

The bi-parametric family of anomalies includes for $\beta = 0$ the family of generalized Sundman anomalies, and for this reason, M, g, τ^* and f . This family also includes the regularized length of arc s^* introduced by Brumberg, the elliptic anomaly

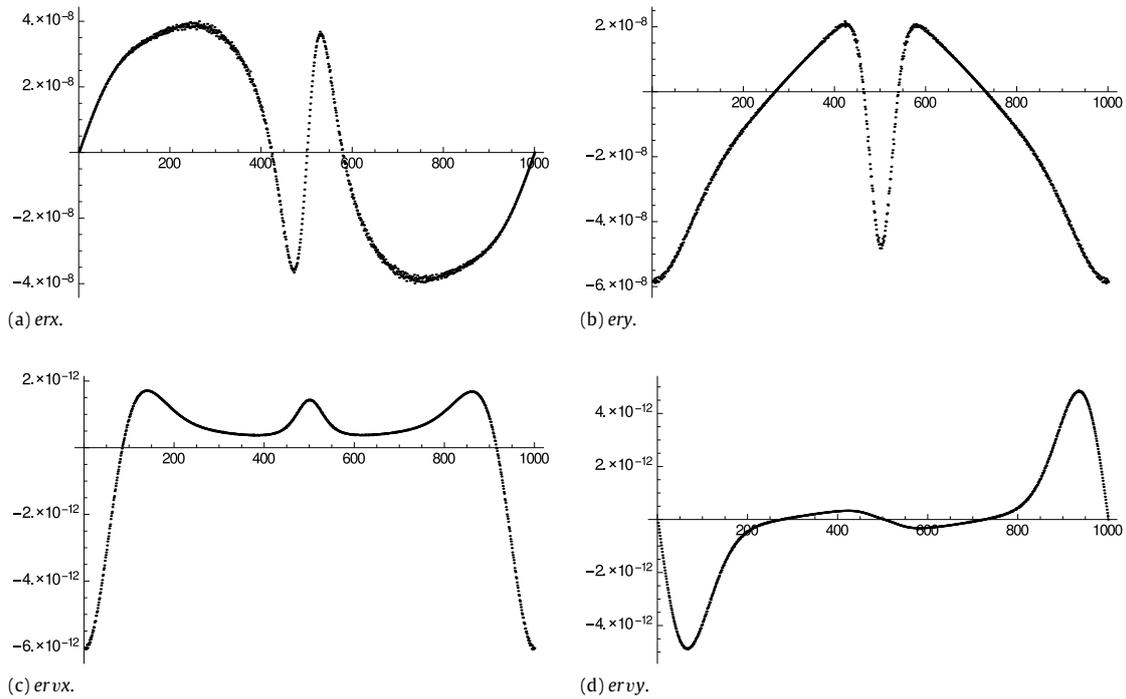


Fig. 6. Distribution of the local integration errors $e = 0.7$ for the optimal anomaly in the bi-parametric family $\alpha = 1.295, \beta = -0.196$.

Table 4

Number of steps to obtain the satellite position with $\|\Delta\vec{r}\| < 10^{-4}$ km after 100 revolutions using several anomalies.

	M	g	τ^*	f	f'	s^*	w	$\Phi_{\alpha,\beta}$
α	0	1	1.5	2	1	0.5	1.5	$\alpha(e)$
β	0	0	0	0	1	-0.5	-0.5	$\beta(e)$
RK(4)	1 102 370	388 972	276 522	251 661	938 892	451 743	264 236	231 406
RK(8)	51 193	14 387	10 987	10 378	34 803	18 085	10 481	10 286

w and the secondary anomaly f' . To study the optimal values of α and β in order to increase the performance of the numerical methods, a set of numerical experiments on the unperturbed two-body problem has been carried out.

To test the robustness of the method, a perturbed problem has been studied. From its results, we infer the goodness of the method.

This family of anomalies is appropriate to develop the most common quantities of the two-body problem. It is very important to use these anomalies in analytical theories of the planetary motion. The difference between anomalies Ψ_{α_1,β_1} and Ψ_{α_2,β_2} is of second order in the eccentricity when $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2$.

This family is also appropriate to develop analytical planetary theories. In this sense, the main quantities that appear in the development of the second member of the planetary Lagrange equations have been obtained. To develop analytical theories it is convenient to use these developments combined with a Poisson series processor.

Acknowledgments

This research has been partially supported by Grant P1-1B2012-47 from Universidad Jaume I of Castellón and Grant AICO/2015/037 of Generalitat Valenciana.

References

- [1] F. Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [2] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics. Vol. 2*, Ed. MIT Press, Cambridge MA, 1970.
- [3] D. Brower, G.M. Clemence, *Celestial Mechanics*, Ed. Academic Press, New York, 1965.
- [4] J.J. Levallois, J. Kovalevsky, *Géodésie Générale Vol. 4*, Ed. Eyrolles, Paris, 1971.
- [5] P. Nacozy, Hansen's method of partial anomalies: an application, *Astron. J.* 74 (1969) 544–550.
- [6] P. Nacozy, The intermediate anomaly, *Celestial Mech.* 16 (1977) 309–313.
- [7] G. Janin, V.R. Bond, The elliptic anomaly, NASA Technical Memorandum 58228, 1980.

8.4. Artículo: A new bi-parametric family of temporal anomalies...

- [8] E.V. Brumberg, T. Fufkushima, Expansions of elliptic motion based on elliptic functions theory, *Celestial Mech.* 60 (1994) 69–89.
- [9] E.V. Brumberg, Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits, *Celestial Mech.* 53 (1992) 323–328.
- [10] J.A. López, F.J. Marco, M.J. Martínez, A study about the integration of the elliptical orbital motion based on a special one-parametric family of anomalies, *Abstr. Appl. Anal.* 2014 (2014) Article ID 162060.
- [11] A. Deprit, A note on Lagrange's inversion formula, *Celestial Mech.* 20 (1979) 325–327.
- [12] J.A. López, V. Agost, M. Barreda, An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized variables, *J. Comput. Appl. Math.* 275 (2015) 403–411.
- [13] G. Janin, Accurate computation of highly eccentric satellite orbits, *Celestial Mech.* 10 (1974) 451–467.
- [14] E. Fehlberg, Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge–Kutta formulas with stepsize control, *Nasa Technical Report, Nasa TR R-287*, 1968.
- [15] B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, *Physical Geodesy*, Ed. SpringerWien, New York, 2005.



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational and Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cam

Corrigendum

Corrigendum to “A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion” [J. Comput. Appl. Math. 318 (2017) 479–490]



José A. López Ortí*, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera

Departamento de Matemáticas, Universidad Jaume I, Av. Sos Baynat s/n, 12071 Castellón, Spain

In the paper entitled “A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion” [1], in the equation (17) the exponent $-1/2$ of r' must be replaced by $1/2$. In the rest of the paper [1] when the elliptic anomaly ω appears must be replaced by $\Psi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$.

In the figure 5 of [1], the referenced anomaly is $\Psi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$ and the subfigures (a) and (c) are repeated, the subfigure (a) is wrong and so must be replaced by (Fig. 1):

In the page 486 of the paper [1], in the last line, the values of $\sin \phi$ and $\cos \phi$ must be replaced by $\sin \phi = z/r$ and $\cos \phi = \sqrt{x^2 + y^2}/r$, respectively.

In the table 3 of [1] the corresponding values for the elliptic anomaly $\omega = \Psi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$ are $n = 149$, $\|\Delta \vec{r}\| = 1.1e-6$, $\|\Delta \vec{v}\| = 1.28e-9$ and in table 4 [1] we have for the elliptic anomaly the values of $n = 38\,8945$ using a RK4 method and $n = 11\,989$ using a RK8 method.

Finally, the local error distribution for the elliptic anomaly ω are given in (Fig. 2).

We do apologize for the inconvenience.

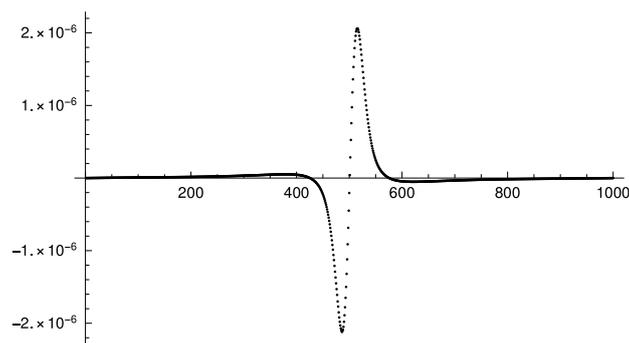


Fig. 1. (a) erx.

DOI of original article: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>.

* Corresponding author.

E-mail address: lopez@mat.uji.es (J.A. López Ortí).

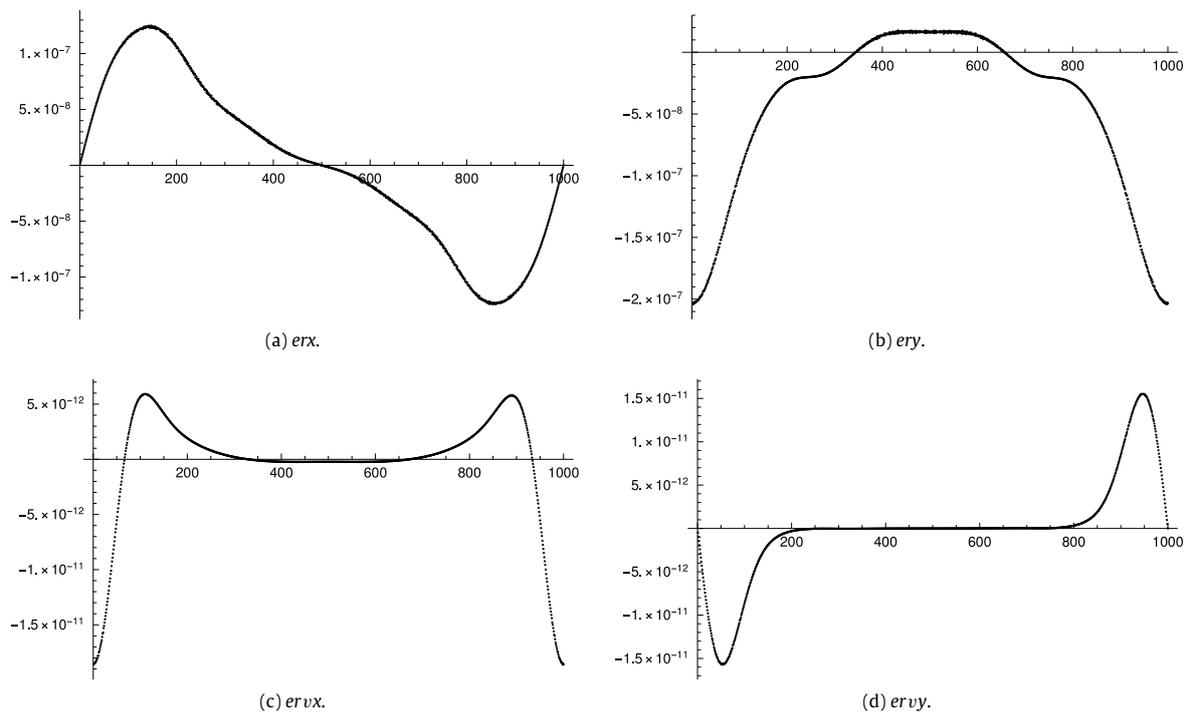


Fig. 2. Local integration errors distribution for $e = 0.7$ and the elliptic anomaly ω .

References

[1] J.A. López, V. Agost, M. Barreda, A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion, J. Comput. Appl. Math. 318 (2017) 479–490. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>.

Capítulo 9

Conclusiones y perspectivas

Contenido

9.1. Conclusiones	201
9.2. Perspectivas	204

9.1. Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis es llevar a cabo un estudio del problema de dos cuerpos bajo un punto de vista analítico. A tal efecto, se han descrito los algoritmos básicos que permiten obtener el desarrollo en serie de cualquier magnitud involucrada en el problema de dos cuerpos.

Ubicado dentro de un marco analítico, se ha realizado un estudio en detalle del problema de dos cuerpos perturbado por fuerzas gravitacionales. Este hecho implica el desarrollo de los segundos miembros de las ecuaciones planetarias de *Lagrange*, lo cual es una tarea muy laboriosa debido a la cantidad de operaciones que intervienen en el proceso. Para solventar esta dificultad, se ha desarrollado un procesador de series de *Poisson*. Esta herramienta consiste en un conjunto de clases diseñadas en el lenguaje de programación C++ que permite la representación de términos de *Poisson* y de vectores de términos de *Poisson*, siendo estos últimos una estructura de datos adecuada para representar las series de *Poisson*.

Las clases implementadas contienen los métodos para realizar diversos tipos de acciones que podrían clasificarse en tres categorías.

La primera de ellas engloba los métodos para implementar operaciones aritméticas básicas como la suma, la resta, la multiplicación o comparación de series de *Poisson*.

Estos métodos se construyen, en primer lugar, mediante funciones como `_suma()` o `_multiplica()` para posteriormente simplificar su uso mediante la sobrecarga de operadores. Con todo esto se consigue que la persona que desee incorporar series de *Poisson* en su programa pueda trabajar con ellas como entidades simples y conseguir con ello que su manejo en C++ sea muy cercano al lenguaje natural.

La segunda categoría comprende al conjunto de operaciones especiales sobre series de *Poisson*. Son funciones que toman como argumentos series de *Poisson* y devuelven como resultado otras series de *Poisson*. Las funciones seno, coseno, exponencial o la potencia de un binomio son ejemplos de este tipo de funciones. La base sobre la que se fundamentan estas funciones es la definición analítica de las mismas, la cual permite su construcción.

La última categoría incluye a las operaciones funcionales. El procesador permite realizar operaciones funcionales tales como la derivación de series, la integración, el desarrollo en serie o la inversión de series.

El procesador ha sido una herramienta de gran importancia en el proceso de obtención de los resultados, especialmente, en los últimos capítulos de esta memoria; con él es posible escribir código en C++ de modo ordinario y sencillo; permite que el manejo de las series de *Poisson* sea tan simple como la utilización de los tipos elementales habituales como los tipos numéricos `int`, `float` o `double`. El uso del procesador dota al programador de la capacidad de escribir los correspondientes códigos pensando simplemente en los algoritmos y no en los detalles de las operaciones. Esto no sólo facilita de forma muy considerable el trabajo a realizar, sino que también minimiza el riesgo de cometer errores en el proceso de producción de código.

A continuación se han introducido diversos tipos de anomalías parciales para mejorar la eficiencia en el manejo del problema de dos cuerpos. Después de una aproximación histórica al problema se define la anomalía generalizada de *Sundman* y se estudian sus características analíticas y numéricas. Se obtienen de modo explícito los desarrollos de las principales magnitudes del problema de dos cuerpos en base a esta anomalía y se expone el proceso de integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* tomando como base la nueva anomalía.

En el punto 6.3 se facilita un procedimiento alternativo para obtener los desarrollos más importantes del problema de dos cuerpos y se muestran los desarrollos del seno y coseno de la anomalía excéntrica, así como la resolución de la ecuación de *Kepler* en base a la nueva anomalía. El procedimiento para realizar la integración de las ecuaciones planetarias de *Lagrange* se puede implementar como un proceso iterativo y a tal efecto será necesaria la utilización del procesador de series de *Poisson*.

Seguidamente se aborda la construcción de un test con el objetivo de contrastar la aplicabilidad de la familia de anomalías generalizadas de *Sundman* a las teorías analíticas. La prueba consiste en el cálculo, en primer orden de perturbación, de

9. Conclusiones y perspectivas

los semiejes de los planetas Júpiter y Saturno. La anomalía elegida supone una importante mejora en la eficiencia de los cálculos ya que supone un impacto directo sobre la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar buenos resultados.

Finalmente, en el capítulo 8 se define una nueva familia de anomalías, Ψ , pero esta vez dependiente de dos parámetros. En la primera parte del capítulo se demuestra con rigor que la mayoría de las variables anteriormente estudiadas tales como las anomalías generalizadas de *Sundman*, la anomalía elíptica, la longitud de arco regularizada, la anomalía antifocal o la anomalía semifocal quedan englobadas dentro de esta familia biparamétrica. El capítulo continúa con la obtención de los desarrollos analíticos en serie de las principales magnitudes del problema de dos cuerpos en base a la nueva anomalía. En el artículo [80] adjunto se muestran los desarrollos completos de g , $\sin g$, $\cos g$, la ecuación de *Kepler*, $\frac{a}{r}$ y $\frac{r}{a}$ de hasta tercer orden en la excentricidad.

En esta memoria se ponen de manifiesto las peculiaridades asociadas a la integración numérica y el inconveniente que supone trabajar con excentricidades próximas a la unidad. En este sentido, se sugieren diversas técnicas para minimizar los posibles errores en la integración numérica. Continuando en la línea de la integración, se lleva a cabo un estudio numérico con el satélite *HEOS II*. Este objeto, de excentricidad próxima a la unidad, permanece en una órbita elíptica sobre la que se disponen 10000 puntos igualmente espaciados. Bajo estas condiciones se realiza una integración con un método clásico de *Runge-Kutta* y se observa que los valores $\alpha = 1,628$ y $\beta = -0,061$ hacen que los errores cometidos en posición y velocidad sean mínimos. Cabe mencionar aquí que la diferencia en este experimento entre la anomalía Ψ y la anomalía media, M , es, como poco, notable.

Con el objetivo de extender el resultado anterior a órbitas de diversas excentricidades, se lleva a cabo otro experimento. En este caso se toma un satélite ficticio de características similares a *HEOS II* y se obtienen los valores de α y β que minimizan el error de integración numérica con paso constante en su posición; puede apreciarse la dependencia entre los valores óptimos de los parámetros y la excentricidad. También se estudia el error de truncamiento local para diversos valores de α y β entre los que se incluyen los óptimos y los correspondientes a diversas anomalías clásicas.

En el mismo artículo [80] también se lleva a cabo un estudio sobre el número de pasos que deben darse para lograr una precisión preestablecida en la posición y la velocidad. Combina diversas anomalías y utiliza un algoritmo *Runge-Kutta-Fehlberg 8/9* [40] de paso constante para concluir que la familia biparamétrica es una de las que menos pasos requiere para alcanzar su objetivo.

En general, puede verse que la elección adecuada de los parámetros α y β de la familia supone una mejora altamente significativa no solamente en la minimización de los errores en la integración numérica, sino también en la eficiencia de los métodos utilizados.

9.2. Perspectivas

A lo largo del desarrollo de la presente memoria y del trabajo realizado en los últimos años han ido surgiendo diversas ideas y reflexiones que se pueden traducir en futuras líneas de investigación. Sin intención de profundizar o dar una descripción exhaustiva de ellas se presentan las siguientes perspectivas.

En el capítulo segundo se introduce el problema de dos cuerpos y se lleva a cabo un estudio del movimiento elíptico, hiperbólico y elíptico. Si bien es cierto que se deducen las fórmulas del movimiento y se obtienen las relaciones entre distintas anomalías en los movimientos hiperbólico y parabólico, únicamente se realiza un estudio pormenorizado del movimiento elíptico. Por ello, se pretende extender al movimiento hiperbólico las transformaciones estudiadas en el presente trabajo haciendo especial énfasis en aquellas en las que es posible obtener en forma cerrada las principales magnitudes del problema de dos cuerpos.

En los capítulos sexto y octavo se estudian las características de la familia de anomalías generalizadas de *Sundman* y de una familia biparamétrica de anomalías. Una segunda línea de investigación podría centrarse en el estudio de nuevas familias para aplicar a la resolución del problema de dos cuerpos. La intención es explorar nuevas anomalías, en la medida de lo posible de fácil interpretación geométrica, donde resulte posible resolver en forma cerrada el problema de dos cuerpos.

En numerosas ocasiones, en esta memoria se ha hecho alusión al procesador de series de *Poisson*; este procesador es una herramienta que se ha desarrollado ex profeso para hacer frente a la desmedida cantidad de operaciones que los métodos numéricos llevan inherentemente asociadas y con el objetivo de simplificar la labor del programador. El procesador no es un programa cerrado, sino que ha sido parte de un proceso constante de mejoras y ampliaciones. Por una parte, se espera poder aumentar la eficiencia del procesador mediante la incorporación de directivas para realizar operaciones en paralelo y aprovechar así toda la potencia de cálculo que ofrecen los ordenadores de hoy en día. Por otra parte, se propone extender su uso al manejo automático de series cuyos términos se correspondan a distintos órdenes de perturbación en uno o varios parámetros. Para finalizar, también se plantea la generalización del procesador de series de *Poisson* a procesadores de otro tipo de series, tales como las series de *Newman*. Estas series son desarrollos cuyos términos contienen funciones esféricas —como los polinomios de *Legendre*—, funciones asociadas de *Legendre* y armónicos esféricos, las cuales son de gran utilidad en el estudio del potencial terrestre, en la dinámica de los satélite artificiales, en geodesia y en otros campos como el estudio de configuraciones de equilibrio de cuerpos celestes en rotación uniforme y cuasiuniforme.

Bibliografía

- [1] ABAD, A.; SAN-JUAN, J.F. (1997) *PSPCLink: a cooperation between general symbolic and Poisson series processors*. Journal of Symbolic Computation, 24, 113–122.
- [2] ABAD, A. (2012) *Astrodinámica*. Ed. Prensas Universitarias de Zaragoza, España.
- [3] ABAD, A.; DOCOBO, J.A.; ELIPE, A. (2018) *Curso de astronomía, 2ED*. Ed. Prensas Universitarias de Zaragoza, España.
- [4] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc.
- [5] ABU-EL-ATA, N.; CHAPRONT, J. (1975) *Développements analytiques de l'inverse de la distance en mécanique céleste*. Astron. Astrophys. 38, 57–66.
- [6] ADAMS, J.C. (1878) *Proceedings of the Royal Society of London*. 27, 86.
- [7] ARFKEN AND WEBER (2001) *Mathematical methods for physicists*. Esclaevier Science, USA.
- [8] ARGYROS, I.K. (2004) *Newton methods*. Nova Science Publisher, Inc. New York.
- [9] ARISTARCO DE SAMOS (310–230 a.C.) *Citas de Plutarco y Arquímedes*.
- [10] ARNOLD, V.I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Ed. Springer Verlag. New York.
- [11] ASTEN, VON E. (1872) *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Petersbourg*. VIIe , Série XVIII, No. 10, 1.
- [12] BATTIN, RICHARD H. (1999) *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [13] BARTON, D. (1967) *On literal developments of lunar theory with aid of a computer*. Astronomical Journal. 72, 1281–1287.

-
- [14] BOHLIN, K. (1888) *Stockholm Observatory Publications*. 3, 1.
- [15] BOCCALETTI, D.; PUCACCO, G. (1996) *Theory of Orbits (Vol. I: Integrable Systems and Non-perturbative Methods)*. Springer.
- [16] BRETAGNON, P.; FRANCOU, G. (1988) *Variations Seculaires des Orbites Planetaires. Théorie VSOP87*. Astronomy and Astrophysics, Vol. 114, 69–75.
- [17] BRETAGNON, P. (1982) *Theory for the motion of all the planets - The VSOP82 solution*. Astronomy and Astrophysics, Vol. 114, 278–288.
- [18] BRETAGNON, P.; FRANCOU, G. (1988) *Planetary Theories in rectangular and spherical variables: VSOP87 solution*. Astronomy and Astrophysics, Vol. 202, 309–315.
- [19] BROUCKE, R.; GARTHWAITE, K. (1969) *A programming system for analytical series expansions on a computer*. Celestial Mechanics. 1, 271–284.
- [20] BROUCKE, R. (1970) *How to assemble a Keplerian processor*. Celestial Mechanics. 2, 9–20.
- [21] BROUCKE, R. (1971) *Construction of rational and negative powers of a formal series*. Communication of the ACM. 14, 32–35.
- [22] BROUCKE, R.; SMITH, G. (1971) *Expansion of the planetary disturbing function of a formal series*. Celestial Mechanics. 3, 408–426.
- [23] BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. (1961) *Methods of Celestial Mechanics*. Ed. Academic Press, New York.
- [24] BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. (1965) *Celestial Mechanics*. Ed. Academic Press, New York.
- [25] BRUMBERG, E.V. (1992) *Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits*. Celestial Mechanics. 53, 323–328.
- [26] BRUMBERG, V.A., FUFKUSHIMA, T (1994) *Expansions of Elliptic Motion based on Elliptic Functions Theory*. Celestial Mechanics. 60, 1–36.
- [27] BRUMBERG, V.A. (1995) *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*. Ed. Springer-Verlag. Berlin.
- [28] BRUMBERG, V.A.; BRUMBERG, E.V. (2001) *Elliptic anomaly in constructing long-terms and short-term dynamical theories*. Celestial Mechanics. 80, 159–166.
- [29] CALLANDREAU, O. (1982) *Annales de l'Observatoire (Impérial) de Paris. Mémoires*. XVI, A1.

- [30] CHAPRONT, J.; BRETAGNON, P.; MEHL, M. (1975) *Une Formulaire pour le calcul des perturbations d'ordres élevés dans les problèmes planétaires*. Celestial Mechanics. 11, 379–399.
- [31] CHAPRONT, J.; SIMON, J.L. (1995) *Planetary theories with the aid of the expansions of elliptic functions*. Celestial Mechanics. 73, 171–188.
- [32] COHEN, C.J.; HUBBARD, E. C.; OESTERWINTER, C. (1973) *Planetary Elements for 10,000,000 Years*. Celestial Mechanics. Vol 7, 438–448.
- [33] COLWELL, P. (1993) *Solving Kepler's Equations. Over three Centuries*. Willmann–Bell, Inc, Richmond. Virginia.
- [34] COPÉRNICO, N. (1543) *De revolutionibus orbium coelestium*.
- [35] DANBY, J.M.A. (1992) *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Ed. Atlantic Books.
- [36] DEPRIT, A. (1979) *A Note on Lagrange's Inversion Formula* Celestial Mechanics. 20, 325–327.
- [37] DEPRIT, A. (1990) *Processing Poisson series in parallel*. Journal of Symbolic Computation. Vol 10, 179–201.
- [38] DIJKSTRA, E.W. (1968) *Go To Statement Considered Harmful*. Communications of the Association for Computing Machinery (ACM). 11, 147–148.
- [39] ECKERT, W.J. (1951) *Numerical theory of five outer planets*. The Astronomical Journal. Vol 56, 38E.
- [40] FEHLBERG E.; MARSALL, G.C. (1968) *Classical Fifth, Sixth, Seventh and Eighth Runge–Kutta Formulas with Stepsize Control* NASA Technical Report R-287.
- [41] FERRÁNDIZ, J.M.; FERRER, S; SEIN–ECHALUCE, M.L. (1987) *Generalized Elliptic Anomalies*. Celestial Mechanics. 40, 315–328.
- [42] FLORÍA, L. (1995) *A universal approach to the intermediate anomaly of Keplerian motion*. Phys. A: Math. Gen. 28, 6395.
- [43] FIENGA, A.; MANCHE, H.; LASKAR, J.; GASTINEAU, M. (2008) *INOP06: a new numerical planetary ephemeris*. Astronomy and Astrophysics. 477, 315–327.
- [44] FINLAY–FRENDULICH E. (1958) *Celestial Mechanics*. Pergamon Press Inc. New York.
- [45] FOLKNER, W. M.; WILLIAMS, J. G.; BOGGS, D. H.; PARK, R. S.; KUCHYNKA, P. (2014) *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*. JPL Interplanetary Network Progress Report. 42–196.

-
- [46] FUKUSHIMA, T. (2004) *Efficient Orbit Integration by the Orbital Longitude Method Using Antifocal Anomaly*. The Astronomical Journal. 128, 1455–1464.
- [47] GALILEI, G. (1564–1642) *Le opere complete di Galileo Galilei*. Edición nacional, 20 vols. Firenze, 1890-1909.
- [48] GOURSAT, E. (1902) *Cours D'Analyse Mathématique, Volume II*. Ed. Gauthier–Villars.
- [49] GRAGG, W. B. (1965) *Repeated extrapolation to the limit in the numerical solution of ordinary differential equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis. 2, 384–403.
- [50] GREEN, R.M. (1993) *Spherical Astronomy*. Ed. Cambridge University Press.
- [51] GUZMÁN, M. (1987) *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ed. Pearson Alhambra.
- [52] GYLDÉN H. (1870) *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint Pétersbourg*. XIV, 195.
- [53] HAGIHARA, Y. (1970) *Celestial Mechanics*. Ed. MIT Press. Cambridge MA.
- [54] HAIRER, E; LUBICH, C.; WANNER, G. (2006) *Geometric Numerical Integration*. Ed. Springer. Heidelberg.
- [55] HANSEN, P. (1856) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des sciences*. 1, 121.
- [56] HOBSON, E. W. (1955) *Theory of spherical and elliptical harmonics*. New York. Chelsea.
- [57] IVANOVA, T. (2001) *A new echeloned Poisson series processor*. Celestial Mechanics. 80, 167–176.
- [58] JANIN, G. (1974) *Accurate Computation of Highly Eccentric Satellite Orbits*. Celestial Mechanics. 10, 451–467.
- [59] JANIN, G.; BOND, V. R. (1980) *The elliptic anomaly*. NASA Technical Memorandum 58228.
- [60] JARDETZKY, W. (1958) *Theorie of figures of Celestial Bodies*. Dover Publications Inc. New York.
- [61] KEPLER, J. (1609) *Astronomia Nova*. Reeditado por Green Lion Press, 2015. Santa Fe. Nuevo México. EEUU.
- [62] KOPAL, Z. (1960) *Figures of Celestial Bodies*. Univ Wisconsin Press, Madison, 1960.

- [63] KOPAL, Z. (1978) *Dynamic of Close Binary Systems*. Kluwer, Dordrecht. Holland.
- [64] KOVALEVSKY, J. (1967) *Introduction to Celestial Mechanics*. Ed. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland.
- [65] KRASINSKY, G.A.; PITJEVA, E.V.; VASILYEV, V.M.; YAGUDINA, E.I. (2002). Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences. vol. 148, 1–43.
- [66] LAGRANGE, J.L. (1788) *Mécanique analytique*. Reeditado por Jacques Gabay. Gauthier–Villars. París. 1990.
- [67] LAVRENTIEV, M.A.; SHABAT, B.V. (1987) *Métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja*. Ed. MIR.
- [68] LEIBNIZ, G.W. (1684) *Discurso de metafísica* Ed. Alizanda. Reeditado 2013.
- [69] LEVALLOIS, L.L.; J. KOVALEWSKY, J. (1971) *Geodesie Generale Vol 4*. Ed. Eyrolles. París.
- [70] LEVERRIER, U. (1862) *On the system of the planets Mercury, Venus, the Earth, and Mars*. Monthly Notices of Royal Astronomical Society. Vol 22, 257–259.
- [71] LEVERRIER, U. (1872) *Memoir on the theories of the four superior planets, Jupiter, Saturn, Uranus, and Neptune*. Monthly Notices of Royal Astronomical Society. Vol 32, 301–305.
- [72] LÓPEZ, J.A.; BARREDA, M. (2007) *A Formulation to Obtain Semi-analytical Planetary Theories Using True Anomalies as Temporal Variables*. Journal of Computational and Applied Mathematics. Num. 1, vol. 204, 77–83.
- [73] LÓPEZ, J.A.; BARREDA, M; ARTES, J. (2005) *Algorithms for the Construction of Semi-analytical Planetary Theories*. Lecture Series on Computer and Computational Sciences. 4, 340–345.
- [74] LÓPEZ, J.A.; BARREDA, M.; ARTES, J. (2006) *Integration Algorithms to Construct Semi-analytical Planetary Theories*. WSEAS Transactions on Mathematics. 6, 609–614.
- [75] LÓPEZ, J.A.; MARTÍNEZ, M.J.; MARCO, F.J. (2008) *Computational tools to construct semi-analytical planetary theories*. International Journal of Computer Mathematics. 86, 497–508.
- [76] LÓPEZ, J.A.; AGOST, V.; BARREDA M. (2012) *A Note on the Use of the Generalized Sundman Transformations as Temporal Variables in Celestial Mechanics*. International Journal of Computer Mathematics. 89, 433–442.

-
- [77] LÓPEZ, J.A.; AGOST, V.; BARREDA, M. (2013). *Algorithms to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized anomalies as temporal variables with aid of a C++ Poisson series processor*. Proceedings of the 13th International Conference on CMMSE. 3, 946–949
- [78] LÓPEZ, J. A.; AGOST, V.; BARREDA, M. (2015) *An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized variables*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 275, 403–411.
- [79] LÓPEZ, J. A.; MARCO, F. J.; MARÍNEZ, M. J. (2017) *Geometrical definition of a continuous family of time transformations generalizing and including the classic anomalies of the elliptic two-body problem*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 309, 482-492.
- [80] LÓPEZ, J. A.; AGOST, V.; BARREDA, M. (2017) *A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 318, 479–490.
- [81] LÓPEZ, J. A.; MARCO, F. J.; MARTÍNEZ, M. J. (2014) *A Study about the Integration of the Elliptical Orbital Motion Based on a Special One-Parametric Family of Anomalies*. Abstract and Applied Analysis. Volume 2014. Article ID 162060.
- [82] LÓPEZ, J.A.; LÓPEZ, A.; LÓPEZ, R. (1992) *Figures of equilibrium in close binary systems*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 17, 661–692.
- [83] LÓPEZ, J.A.; MARTÍNEZ, M.J.; MARCO, F.J. (2008) *A Formulation to Obtain Semi-analytical integration algorithms based on the use of several kinds of anomalies as temporal variables*. Planetary and Space Science. 56, 1862–1868.
- [84] LÓPEZ, J. A.; MARCO, F. J.; MARÍNEZ, M. J. (2014) *A Note on the Use of Generalized Sundman Anomalies in the Numerical Integration of the Elliptical Orbital Motion*. Abstract and Applied Analysis. Volume 2014, Article ID 6919260.
- [85] LÓPEZ, A. (2019) *Manual de astronomía esférica*. Editado por Amazon Fulfillment.
- [86] ŁUKASIEWICZ, J. (1930) *Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logics*. Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23:51–77.
- [87] MARKUSHEVICH, A.I. (1965) *Theory of functions of a complex variable*. Volume I. Ed. Prentice–Hall, Inc.
- [88] MESSIAH, A. (1962) *Clebsch–Gordan (C.-G.) Coefficients and 3j Symbols*. Appendix C.I in Quantum Mechanics. Vol. 2. Amsterdam. Netherlands (North–Holland). 1054–1060.

- [89] MIRA, J. (2008) *Introducción a los Métodos Analíticos de la Mecánica Celeste. Aspectos Computacionales*. Tesis de Master. Universidad Jaume I.
- [90] MOISSON, X. (1998) *Solar system planetary motion to third order of the masses*. *Astronomy and Astrophysics*. 341, 318–327.
- [91] MOISSON, X. (1998) *New solution for the planetary motion*. *Journées spatio-temporels 1997. Systèmes de référence spatio-temporels*, 42–45.
- [92] MOISSON, X.; BRETAGNON, P. (2001) *Analytical Planetary solution VSOP2000*. *Cel. Mech. and Dyn. Astron.* Vol. 80, 207–213.
- [93] MORITZ, H.; HOFMANN–WELLENHOF, B. (2005) *Physical Geodesy*, Ed. Springer Wien. New York.
- [94] NACOZY, P. (1969) *Hansen’s Method of Partial Anomalies: an Application*. *The Astronomical Journal*. 74, 544–550.
- [95] NACOZY, P. (1977) *The Intermediate Anomaly*. *Celestial Mechanics*. 16, 309–313.
- [96] NAVARRO, J.F.; FERRÁNDIZ, J.M. (2002) *A New Symbolic Processor for the Earth Rotation*. *Celestial Mechanics*. 82, 243–263.
- [97] NEWCOMB, S. (1891) *Development of the perturbative function and its derivatives in sines and cosines of multiples of the eccentric anomaly, and in powers of the eccentricities and inclinations*. U.S.A. Nautical Almanac Office. *Astronomical*. vol 3.
- [98] NEWCOMB, S. (1891) *A development of the perturbative function in cosines of multiples of the mean anomalies and of angles ω between the perihelia and common node and in powers of the eccentricities and mutual inclination*. U.S.A. Nautical Almanac Office. *Astronomical*. vol 5.
- [99] NEWHALL, E.M.; STANDISH, J.G.; WILLIAMS (1983) *A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries*. *Astronomy and Astrophysics*. 125, 150–167.
- [100] NEWTON, I. (1686) *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Ed. Alianza. Edición traducida, prologada y anotada por Eloy Rada. 2011.
- [101] ORTEGA, M.; RHEINBOLT, W.C. (2000) *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. SIAM. Philadelphia, EE UU.
- [102] ORÚS (DE), J.J.; CATALÀ, M.A.; NÚÑEZ DE MURGA, J. (2007) *Astronomía esférica y mecánica celeste*. Edicions Universitat Barcelona.
- [103] PITJEVA, E.V. (2005) *High-precision ephemerides of planets–EPM and determination of some astronomical constants*. *Solar System Research*. Vol 39, 202–213.

-
- [104] POINCARÉ, H. (1892) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier–Villars et fils. Paris.
- [105] PTOLOMEO, C. (s. II) *Almagesto*. Tratado de Astronomía.
- [106] RALSTON, A. (1978) *Introducción al análisis numérico*. Ed. Limusa. México.
- [107] ROM, A. (1971) *Echeloned series processor (ESP)*. *Celestial Mechanics*. vol 3, 331–345.
- [108] ROY, A.E. (2004) *Orbital Motion*. Ed. Taylor & Francis.
- [109] SIMON, J.L.; BRETAGNON, P.; CHAPRONT, J.; CHAPRONT–TOUZE, M.; FRANCOU, G.; LASKAR, J. (1994) *Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets*. *Astronomy and Astrophysics*. 282, 663–683.
- [110] >SIMON, J.L. (1982) *Computation of the first and second derivatives of the Lagrange equations by harmonic analysis*. *Astronomy and Astrophysics*. 17, 661–692.
- [111] SIMON, J.L.; FRANCOU G.; FIENGA, A.; MANCHE, H. (2013) *New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013*. *Astronomy and Astrophysics*. 557. Electronic edition A49.
- [112] SIMON, J.L. (1982) *Calcul des dérivées premières et secondes des équations de Lagrange par analyse harmonique*. *Astronomy and Astrophysics*. 175, 303–308.
- [113] SKRIPNICHENKO, V.I. (1972) *On the application of Hansen’s method of partial anomalies to the calculation of perturbations in planetary motion*. I.A.U. Symp v45, 52–54.
- [114] SMART, W.M. (1949) *Text Book on Spherical Astronomy*. Cambridge University Press. London.
- [115] STANDISH, E.M. (1998) *Time scales in JPL and CfA ephemerides*. *Astronomy and Astrophysics*. vol 336, 381–384.
- [116] STOER, J.; BULIRSCH, R. (1980) *Introduction to Numerical Analysis*. Ed. Springer–Verlag.
- [117] STUMPF, K. (1947) *Neue Formeln und Hilfstafeln zur ephemeridenrechnung*. *Astron Nachr*. vol. 275, 108.
- [118] SUNDMAN, K. (1912) *Memoire sur le probleme des trois corps*. *Acta Mathematica*. 36, 105–179.
- [119] SWERDLOW, N. M. (2000) *Notes: Kepler’s Iterative Solution to Kepler’s Equation* *Journal for the History of Astronomy*, 339.

- [120] TISSERAND, F.F. (1896) *Traité de Mécanique Céleste*. Reeditado por Jacques Gabay. Gauthier–Villars. París. 1990.
- [121] TRAUB, J.F. (1964) *Iterative methods for the solution of equations*. Prentice–Hall. N.J, EE UU.
- [122] TYCHO BRAHE (1572) *Asclemiae Instauratae Progymnasmata / Introducción a la Nueva Astronomía*. Typis inchoata Vraniburgi Daniae, absoluta Pragae Bohemiae.
- [123] TYCHO BRAHE (1577) *De Mundi Aetherei Recentioribus Phaenomenis Liber Secundus / Segundo libro sobre los fenómenos recientes en el mundo celestial*. Typis inchoatus Vraniburgi Daniae, absolutus Pragae Bohemiae. Absolvebatur typis Schumanianis, 1603.
- [124] VALDIVIA, M. (1996) *Análisis matemático III*. Ed. Universidad Nacional de Educación a distancia. Madrid.
- [125] VÉLEZ, C.E.; HILINSKI, S. (1978) *Time Transformation and Cowell's Method*. *Celestial Mechanics*. 17, 83–99.
- [126] VIGO–AGUILAR, J.; FERRÁNDIZ, J.M. (1998) *A general procedure for the adaptation of multistep algorithms to the integration of oscillatory problems*. *Siam Journal on Numerical Analysis*. 35, 1684–1708.
- [127] VIGO–AGUILAR, J.; SIMOS, T.E. (2002) *Family of twelve steps exponential fitting symmetric multistep methods for the numerical solution of the Schrödinger equation*. *Journal of Mathematical Chemistry*. 32, 257–270.
- [128] VIVES, T.J. (1971) *Astronomía de posición. Espacio y tiempo*. Ed. Alhambra, S.A.
- [129] WHITTAKER, E.T. (1947) *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*. Ed. Cambridge University Press (Reprinted in 1993). Newcastle.
- [130] WILLIAMS, C.; FLANDERN, T.; WRIGHT, E. (1987) *First order planetary perturbations with elliptic functions*. *Celestial Mechanics*. vol 40, 367–391.
- [131] WOOLARD, EDGAR W.; CLEMENCE, GERALD M. (1966) *Spherical Astronomy*. Ed. Academic Press Inc.

ANEXO I. Documentos de aceptación de los coautores

José Antonio López Ortí, como coautor doy mi **autorización** a Vicente Agost Gómez para la presentación de las siguientes publicaciones como parte de su tesis doctoral.

Relación de publicaciones:

- A note on the use of the generalized Sundman transformations as temporal variables in celestial mechanics. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. International Journal of Computer Mathematics. 2012. Taylor & Francis. <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2011.611502>
- An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized variables. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2014.06.011>
- A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>

Asimismo, **renuncio** a poder utilizar estas publicaciones como parte de otra tesis doctoral.

Y para que conste firmo el presente documento,

Lugar, fecha y firma

Todo ello, atendiendo al artículo 23 de la Normativa de los Estudios de Doctorado, regulados por el RD 99/2011, en la Universitat Jaume I (Aprobada por el Consejo de Gobierno núm. 19 de 26 de Enero de 2012, modificada por el Consejo de Gobierno núm. 29 de 27 de Noviembre de 2012 y con posterior modificación por el Consejo de Gobierno núm. 37 de 25 de Julio de 2013):

“(…)

“*Aquellas tesis doctorales que opten por la incorporación de artículos (compendio de publicaciones) deben de ajustarse, en la medida de lo posible, a la siguiente estructura: -Introducción/objetivos - Un capítulo por artículo incorporado - Discusión general de los resultados - Conclusiones. -Aceptación de los coautores de que el doctorando presente el trabajo como tesis y renuncia expresa de estos a presentarlo como parte de otra tesis doctoral.*”

Miguel Barreda Rochera, como coautor doy mi **autorización** a Vicente Agost Gómez para la presentación de las siguientes publicaciones como parte de su tesis doctoral.

Relación de publicaciones:

- A note on the use of the generalized Sundman transformations as temporal variables in celestial mechanics. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. International Journal of Computer Mathematics. 2012. Taylor & Francis. <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2011.611502>
- An improved algorithm to develop semi-analytical planetary theories using Sundman generalized variables. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2014.06.011>
- A new bi-parametric family of temporal transformations to improve the integration algorithms in the study of the orbital motion. José A. López Ortí, Vicente Agost Gómez, Miguel Barreda Rochera. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.057>

Asimismo, **renuncio** a poder utilizar estas publicaciones como parte de otra tesis doctoral.

Y para que conste firmo el presente documento,

Lugar, fecha y firma

Todo ello, atendiendo al artículo 23 de la Normativa de los Estudios de Doctorado, regulados por el RD 99/2011, en la Universitat Jaume I (Aprobada por el Consejo de Gobierno núm. 19 de 26 de Enero de 2012, modificada por el Consejo de Gobierno núm. 29 de 27 de Noviembre de 2012 y con posterior modificación por el Consejo de Gobierno núm. 37 de 25 de Julio de 2013):

“(…)

“*Aquellas tesis doctorales que opten por la incorporación de artículos (compendio de publicaciones) deben de ajustarse, en la medida de lo posible, a la siguiente estructura: -Introducción/objetivos - Un capítulo por artículo incorporado - Discusión general de los resultados - Conclusiones. -Aceptación de los coautores de que el doctorando presente el trabajo como tesis y renuncia expresa de estos a presentarlo como parte de otra tesis doctoral.*”