T MAR

Sobre la termoelasticidad de materiales simples

Memoria presentada por
Fernando Martínez Sáez
para aspirar al grado de doctor en ciencias.

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del

Dr. Ramón Quintanilla de Latorre.

Barcelona, diciembre de 1996.

Este trabajo ha sido realizado en el Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya, y no sería justo que no expresara mi agradecimiento a las compañeras y compañeros del departamento que tanto me han animado y ayudado, y en especial a J.A. Lubary. También estoy en deuda con:

Ramón que me ha guiado por los vericuetos de la termomecánica racional.

El Dr. F. Bofill por sus discursiones sobre el problema incremental en dominios no acotados para la termoelasticidad.

El Dr. D. Ieşan que me intodujo en los problemas relativos a materiales porosos.

F. Martínez

Barcelona, diciembre de 1996.

Índice de materias

Capítulo 1

Introducción

Desde que el hombre empezó a construir ha sido necesario el conocimiento del comportamiento de los materiales. Sin duda los egipcios tenían algunas reglas empíricas sobre la naturaleza de los materiales, pues en caso contrario no habrían podido erigir sus imponentes monumentos. Más tarde, tanto griegos como romanos avanzaron en el arte de la construcción, aunque la mayoría de sus conocimientos se perdieron durante la edad media y no fueron recuperados hasta el Renacimiento. En esta época vivió Leonardo da Vinci (1452–1519) quien estudió empíricamente el comportamiento de los materiales.

El primer estudio analítico publicado sobre la resistencia de materiales se encuentra en el trabajo de Galileo titulado *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue fcienze* impreso en Leida el año 1638. Hooke publica en 1678 *De Potentiâ Restitutiva*, donde estudia las propiedades elásticas de los materiales, llegando a establecer una relación lineal entre la magnitud de las fuerzas y la deformación que producen [1]. En 1744, Euler introduce el cálculo de variaciones para estudiar la forma que adoptan los cuerpos elásticos cuando están sometidos a distintas fuerzas. Otras aportaciones importantes durante el siglo XVIII fueron las de Lagrange, más en el plano teórico que práctico, y Coulomb. Ya en el siglo XIX encontramos a Young y Navier.

El origen de la teoría matemática de la elasticidad podemos situarlo a principios del siglo pasado, principalmente con el trabajo de Cauchy [7],

[1] En opinión de J.E. Marsden & T.J.R. Hugues [50], tres cosas que deben saber todos los que se inician en el estudio de la teoría de la elasticidad son que "Kirchhoff" se escribe con dos 'h', que la ley de Hooke no es un axioma y que los investigadores en elasticidad son muy testarudos, incluso cuando están equivocados.

quien introduce los conceptos de tensión y deformación. Además, deduce las ecuaciones fundamentales de una forma mucho más sencilla que como se había hecho hasta entonces. Poco antes, Fourier [29] había publicado su tratado sobre la propagación del calor. Durante el siglo XIX aparecen los trabajos de Poisson, Lamé, Green, Stokes, Piola, Kirchhoff y Saint-Venant, entre otros. El tratado de Love [49] es un magnífico compendio de la teoría clásica de la elasticidad.

Tras una época de relativo aletargamiento, a mediados de siglo el estudio de la elasticidad se reaviva, posiblemente debido a las aplicaciones tecnológicas de los nuevos materiales que aparecen. Cobran importancia el estudio de la estabilidad de láminas finas en aeronáutica, la propagación de vibraciones en cuerpos en el diseño de maquinaria industrial, la propagación de ondas en materiales no homogéneos y anisótropos en geofísica, la transmisión del calor en astronáutica, etc. Esto ha hecho que todo tipo de investigadores, ingenieros, físicos, geofísicos, matemáticos, etc., les dediquen atención.

Aunque uno pudiera pensar que la teoría de la elasticidad y conducción del calor es una materia eminentemente experimental, también destaca por su riqueza matemática.

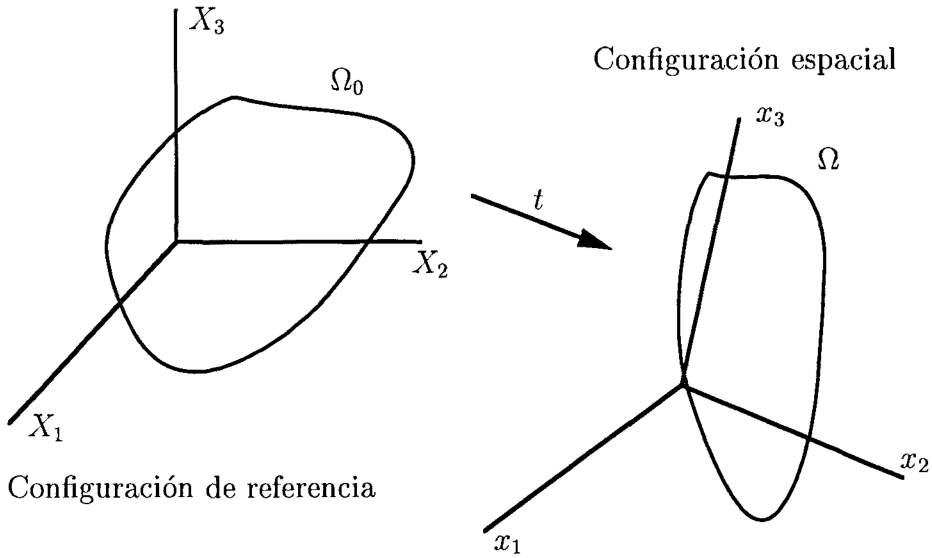
El moderno análisis funcional hace posible el estudio de la existencia, unicidad y comportamiento de las soluciones, permitiendo resolver problemas de estabilidad. El análisis numérico nos proporciona una idea bastante aproximada del comportamiento real del los materiales, posibilitando un gran avance en el diseño de estructuras. La geometría diferencial es utilizada para fundamentar rigurosamente las ecuaciones de la teoría.

Antes de acabar esta introducción, mencionar los trabajos de Timoshenko [67] y Truesdell [69], dos interesantes obras sobre la historia de la mecánica y resistencia de materiales.

1.1 Leyes básicas

Supongamos que un cuerpo ocupa en el instante $t = 0$ una región del espacio Ω_0, que llamaremos configuración de referencia, con volumen V_0 y superficie A_0. La posición de un punto $\mathbf{X}$ vendrá descrita por un sistema rectangular de coordenadas OX_K (coordenadas materiales o Lagrangianas).

La configuración espacial será la región Ω, con volumen V y superficie A, ocupada por el cuerpo en el instante t. La posición de un punto $\mathbf{x}$ vendrá descrita por un sistema rectangular de coordenadas Ox_i (coordenadas espaciales o Eulerianas).



Las ecuaciones que gobiernan la evolución de sólidos para el caso no relativista están firmemente establecidas [6, 26, 50, 71]. Estas ecuaciones se derivan a partir de cinco leyes fundamentales, postuladas independientemente de la naturaleza del material:

1. *Conservación de la masa:* La masa total del cuerpo se mantiene constante durante el movimiento:

$$\int_{V_0} \rho_0 \, dV_0 = \int_V \rho \, dV,$$

siendo ρ_0 la densidad en la configuración de referencia y ρ la densidad en la configuración espacial. Derivando respecto del tiempo, la ecuación anterior se puede escribir de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0.$$

2. *Conservación del momento lineal:* La variación del momento lineal es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo [2]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV = \mathbf{F},$$

[2]Las letras en negrita representan tensores de orden $p \geq 1$.

donde $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ es la velocidad y $\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, que la podemos descomponer en dos tipos de fuerzas, superficiales y volúmicas,

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A \mathbf{p}_{(\mathbf{n})} \, dA,$$

siendo $\mathbf{f}$ la fuerza volúmica por unidad de masa que actúa sobre el volumen V del cuerpo y $\mathbf{p}_{(\mathbf{n})}$ la fuerza superficial por unidad de área que actúa sobre la superficie A del cuerpo, dependiente del vector normal exterior $\mathbf{n}$ a la superficie. Con esta descomposición la conservación del momento lineal se puede escribir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV = \int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A \mathbf{p}_{(\mathbf{n})} \, dA.$$

3. *Conservación del momento angular:* La variación del momento angular es igual a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} \, dV = \int_V \rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \, dV + \int_A \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}_{(\mathbf{n})} \, dA.$$

4. *Conservación de la energía:* La variación de la energía cinética e interna es igual a la suma de la potencia de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo más el balance de energías que atraviesan el cuerpo:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{K} + \mathcal{U}\Big) = \mathcal{W} + \sum_i \mathcal{E}_i,$$

donde la energía cinética, $\mathcal{K}$, viene dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dV,$$

la energía interna, $\mathcal{U}$, por

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U \, dV,$$

siendo U la energía interna por unidad de masa, y la potencia de las fuerzas, $\mathcal{W}$, por

$$\mathcal{W} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_A \mathbf{p}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} \, dA,$$

siendo el resto de las energías $\mathcal{E}_i$ de muy diversa naturaleza: térmica, eléctrica, química, etc.

Si nos restringimos al caso en el que únicamente aparece energía térmica, $\mathcal{Q}$, se tiene

$$\mathcal{Q} = \int_V \rho S \, dV + \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

donde S es una fuente volúmica de calor presente en el cuerpo y $\mathbf{q}$ representa el flujo de calor que atraviesa la superficie. La ecuación de conservación de la energía queda, en este caso,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \Big(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U \Big) \, dV = \int_V \rho \big(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + S \big) \, dV + \int_A \big(\mathbf{p}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \big) \, dA.$$

5. *Variación de la entropía:* La variación de la entropía total nunca es menor que la suma del flujo de entropía que atraviesa la superficie y la producida por las fuentes volúmicas de entropía:

$$\frac{dH}{dt} \geq B + \int_A \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Usualmente se toma:

$$H = \int_V \rho \eta \, dV, \qquad B = \int_V \rho \frac{S}{T} dV, \qquad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{q}}{T},$$

siendo T la temperatura absoluta ($T > 0$). Entonces, en este caso, podemos escribir la producción de entropía

$$\Gamma \equiv \frac{dH}{dt} - B - \int_A \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

de la siguiente forma:

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \int_V \rho \eta \, dV - \int_V \rho \frac{S}{T} dV - \int_A \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA \geq 0.$$

Esta ley se puede interpretar como una restricción del tipo de materiales existentes si admitimos que todos los procesos son posibles [17], o bien, se puede interpretar como una restricción de los procesos posibles si admitimos todo tipo de materiales.

1.2 Ecuaciones constitutivas

A las ecuaciones de evolución les hemos de añadir las ecuaciones constitutivas del material, que reflejan su naturaleza y explican el hecho de que materiales con la misma geometría respondan de forma diferente a fuentes externas iguales. La diversidad de dichas ecuaciones da lugar a una gran variedad de problemas físicos y matemáticos.

Evidentemente, los modelos de ecuaciones constitutivas se han de ajustar a los datos empíricos obtenidos mediante la experimentación, pero es posible establecer restricciones previas sobre dichas ecuaciones.

Estas restricciones vienen dadas por un conjunto de axiomas cuya validez en física está bien contrastada y, en el caso de materiales termoelásticos son [25, 70]:

(i) *Causalidad*: Existen una serie de observables independientes (deformación, temperatura, ...) y otros que vienen dados por los primeros (energía libre, entropía, tensor de tensiones, flujo de calor, ...).

(ii) *Determinismo*: Las variables dependientes están determinadas, en el punto material $\mathbf{x}$ y en el instante t, por la historia de los observables independientes en todos los puntos materiales.

(iii) *Equipresencia*: Todas las variables dependientes son funciones de las mismas variables independientes.

(iv) *Objetividad*: Las ecuaciones constitutivas no dependen del sistema de referencia espacial considerado ni del origen de tiempos tomado.

Veamos ahora algunas de las consecuencias de estas asunciones sobre las ecuaciones constitutivas.

Sea $\mathbf{Q}$ un elemento del grupo de rotaciones; entonces, una transformación espacial y una traslación en el tiempo vendrán dadas por [3]

$$\bar{x}_k = Q_{kl}x_l + b_k, \qquad \bar{t} = t + a,$$
$$Q_{ik}Q_{jk} = Q_{ki}Q_{kj} = \delta_{ij}, \qquad \det Q_{ij} = 1.$$

Los axiomas anteriores, para un material termoelástico, se traducen en que toda ecuación constitutiva ha de cumplir [4]:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, t) = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, \bar{t}),$$

siendo θ la diferencia entre la temperatura absoluta T y una temperatura de referencia T_0. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas han de satisfacer

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, t) = f(\mathbf{Qx} + \mathbf{b}, \mathbf{Qx}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, t + a),$$

para todo $\mathbf{Q}$ perteneciente al grupo de rotaciones, todo vector $\mathbf{b}$ y todo escalar a. Consideremos los casos:

(a) $\mathbf{Q} = \mathbf{Id}$, $\mathbf{b} = 0$ y $t = -a$. Entonces

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, -a) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}, 0),$$

deduciéndose que las ecuaciones constitutivas no dependen explícitamente del tiempo.

(b) $\mathbf{Q} = \mathbf{Id}$, $\mathbf{x} = -\mathbf{b}$. Entonces

$$f(-\mathbf{b}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{,L}, \theta, \theta_{,L}, \mathbf{X}),$$

deduciéndose que las ecuaciones constitutivas no dependen explícitamente de $\mathbf{x}$.

Otra hipótesis usual es la invariancia de las ecuaciones constitutivas bajo grupos ortogonales de transformaciones $\{\mathbf{S}\}$ y traslaciones $\{\mathbf{B}\}$ de las coordenadas materiales:

$$\bar{X}_K = S_{KL}X_L + B_K,$$
$$S_{IK}S_{JK} = S_{KI}S_{KJ} = \delta_{IJ}, \qquad \det S_{KL} = \pm 1.$$

Si $\{\mathbf{S}\}$ es el grupo completo de rotaciones, el cuerpo es isótropo. Cuando las ecuaciones constitutivas no dependen de $\mathbf{X}$, el cuerpo es homogéneo.

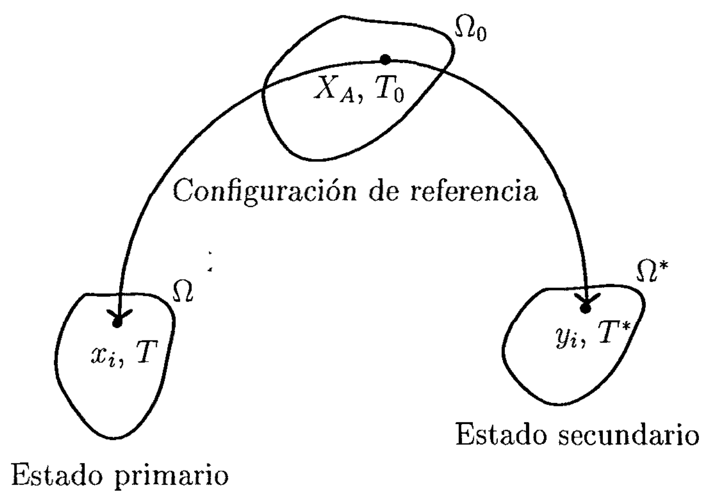
[3] Utilizaremos el convenio de sumación, según el cual subíndices repetidos indican índices sumados.

[4] Los subíndices precedidos por una coma indican denotan derivación parcial respecto de la coordenada correspondiente

1.3 Teorías incrementales

Uno de nuestros propósitos será el estudio del problema incremental, consistente en considerar las ecuaciones de evolución que rigen el comportamiento de pequeñas deformaciones superpuestas a grandes deformaciones no lineales [46].

Supongamos que un cuerpo ocupa inicialmente una región Ω_0, y consideremos dos estados actuales diferentes Ω y Ω^*, que llamaremos estado primario y estado secundario, respectivamente. Entonces, si un punto X_A de Ω_0 se despaza a un punto x_i de Ω y a un punto y_i de Ω^*, se define el desplazamiento incremental como la diferencia entre ambas cantidades, $u_i = y_i - x_i$. Análogamente, podemos definir el resto de las cantidades incrementales como diferencia de dichas cantidades en los estados primarios y secundarios.

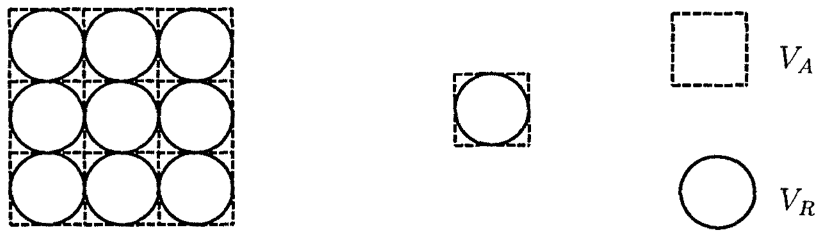


$u_i = y_i - x_i$ desplazamiento incremental
$\theta = T^* - T$ temperatura incremental

En el capítulo 2 estudiaremos las ecuaciones de la teoría incremental para la termoelasticidad, planteadas por Ieşan [35], cuando el cuerpo no es acotado, generalizando los resultados obtenidos por Navarro & Quintanilla [55] y Quintanilla [62] para dominios acotados.

1.4 Algunos tipos de materiales

En el capítulo 3 nos centraremos en el estudio de materiales porosos, compuestos por un esqueleto de material elástico y por intersticios vacíos. Un ejemplo sencillo sería un material compuesto por granos esféricos dispuesto según el gráfico



Para este material la densidad vendría dada por

$$\rho = \frac{M}{V_A},$$

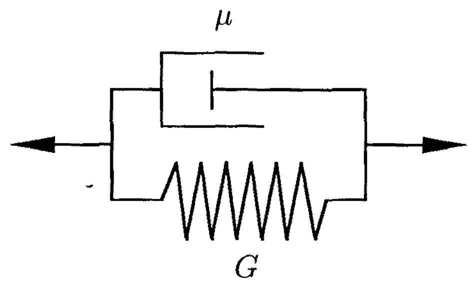
donde $M = \gamma V_R$ es la masa y γ es la densidad del grano. Sustituyendo en la densidad del material, tenemos

$$\rho = \gamma \frac{V_R}{V_A} \equiv \gamma \nu, \qquad 0 < \nu \leq 1.$$

Mediante este ejemplo, observamos que podemos descomponer la densidad como producto de dos campos escalares: γ, que depende únicamente de la naturaleza del material, y la fracción volúmica, ν, que depende de la geometría de los poros.

El siguiente paso será considerar efectos viscoelásticos. Diremos que un material es viscoelástico si exhibe propiedades tanto de materiales elásticos como de fluidos viscosos.

Un ejemplo sencillo de material viscoelástico es el modelo de Voigt, consistente en un muelle elástico y una cubeta con fluido viscoso acoplados en paralelo [2]



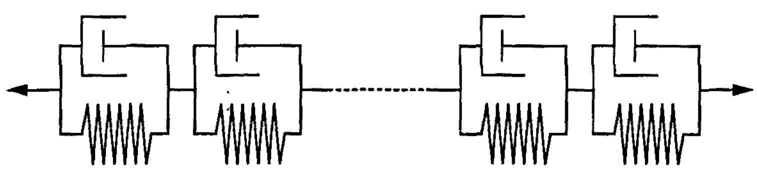
Aplicando la ley de Hooke al muelle y la ley de Newton al fluido tenemos

$$\tau(t) = G\,e(t) + \mu\dot{e}(t),$$

siendo τ la tensión, e la deformación, G el módulo de elasticidad y μ la viscosidad. Si sometemos a nuestro material a una tensión constante τ_0, la solución es

$$e(t) = \frac{\tau_0}{G}\left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu}t\right)\right].$$

Evidentemente, éste es un modelo muy sencillo. Un modelo más realista consistiría en imaginar que el comportamiento de nuestro material puede aproximarse por un conjunto de N elementos de Voigt acoplados en serie.



En este caso, el comportamiento vendría descrito por el sistema de ecuaciones

$$\tau(t) = G_n e_n(t) + \mu\dot{e}_n(t), \qquad n = 1\ldots N,$$

siendo la deformación total

$$e(t) = \sum_{n=1}^{N} e_n(t).$$

Sometiendo a nuestro material a una tensión constante τ_0, tendríamos

$$e(t) = \tau_0 \sum_{n=1}^{N} J_n \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right)\right],$$

donde $J_n = \dfrac{1}{G_n}$ y $\lambda_n = \dfrac{\mu_n}{G_n}$.

Pasando al límite $N \longrightarrow \infty$ tendríamos

$$e(t) = \tau_0 \int_0^\infty J(\lambda) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] d\lambda.$$

Definiendo

$$\varphi(t) = \int_0^\infty J(\lambda) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] d\lambda,$$

podríamos escribir la deformación como

$$e(t) = \tau_0 \varphi(t).$$

Si nos limitamos al comportamiento lineal del material podemos adoptar el principio de superposición de Maxwell, consistente en suponer que la deformación en el instante t, debida a la aplicación sucesiva de tensiones, es igual a la suma de deformaciones producidas por cada tensión independientemente. Por lo tanto, si la tensión viene dada por

$$\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ \Delta\tau_1 & t_0 \leq t < t_1, \\ \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 & t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots & \\ \Delta\tau_1 + \ldots + \Delta\tau_n & t_{n-1} \leq t < t_n, \end{cases}$$

la deformación sería,

$$e(t) = \Delta\tau_1 \varphi(t - t_0) + \Delta\tau_2 \varphi(t - t_1) + \ldots + \Delta\tau_n \varphi(t - t_{n-1}).$$

Pasando al límite obtenemos

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t - s) \frac{d\tau}{ds} ds.$$

Esta ecuación nos indica que el estado actual depende de los valores pasados de la tensión, o sea, que tenemos un material con "memoria".

1.5 Teoría de semigrupos

En la presente memoria utilizaremos la teoría de semigrupos de operadores lineales [30, 60, 65] para obtener resultados de existencia, unicidad, dependencia continua respecto de parámetros iniciales y comportamiento asintótico de soluciones para diferentes teorías lineales clásicas y no clásicas. Podemos recordar algunos resultados similares recientes como [4, 40, 41, 42, 51].

Transformaremos nuestro problema de evolución en una ecuación diferencial ordinaria, en un espacio de Hilbert H, de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + f(t), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En el caso $A(t) = A$ y $f(t) = 0$ el problema anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A\,u, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

cuya "*solución*" es

$$u(t) = e^{At}u_0.$$

Si trabajamos en un espacio de dimensión finita, e^{At} viene dado por el desarrollo en serie de potencias. Pero si el espacio es infinito dimensional existe el problema de la convergencia de la serie. La teoría de semigrupos de operadores lineales generaliza la noción de exponenciación de una matriz en el caso de problemas en espacios infinito dimensionales.

En el resto de este capítulo X denotará un espacio de Banach y $B(X)$ el espacio de operadores de X en X.

Una familia uniparamétrica $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores acotados lineales en X recibe el nombre de C_0-semigrupo o semigrupo fuertemente continuo en X si:

1. $T(0) = Id$, (Id operador identidad),

2. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad t, s \geq 0$,

3. $\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \qquad \forall x \in X$.

El generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$ es el operador A definido por

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

siendo su dominio, $\mathcal{D}(A)$, el conjunto de elementos, $x \in X$, para los cuales el límite anterior exista.

Teorema 1.1 *Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo. Entonces, existen $\omega \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad 0 \leq t < \infty.$$

En este caso diremos que $T(t)$ es un C_0-semigrupo de tipo $(M,\ \omega)$ y denotaremos por $G(X, M, \omega)$ el conjunto de generadores infinitesimales de semigrupos de tipo $(M,\ \omega)$.

Teorema 1.2 *Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador A. Entonces:*

1. *Para $x \in X$,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x.$$

2. *Para $x \in X$,*

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A),$$

$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - x.$$

3. *Para $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$T(t)x \in \mathcal{D}(A),$$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. *Para $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau.$$

Nota 1.1 *El punto 3 nos indica que* $T(t)u_0$ *es solución del problema de Cauchy (1.2).*

Teorema 1.3 *Si* A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $T(t)$ *entonces* A *es un operador lineal cerrado y su dominio* $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X.

Teorema 1.4 *Sean* $T(t)$ *y* $S(t)$ C_0*-semigrupos con generador infinitesimal* A, *entonces* $T(t) = S(t) \quad \forall t \geq 0$.

Teorema 1.5 (Hille-Yosida). *Un operador lineal* A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $T(t)$ *de tipo* (M, ω)*, si y solamente si,*

1. A *es cerrado,*
2. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,
3. *todo* $\lambda > \omega$ *pertenece al conjunto resolvente de* A *y*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diremos que un C_0-semigrupo $T(t)$ es un semigrupo cuasi-contractivo si $M = 1$ i.e. $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Si además $\omega \leq 0$ i.e. $\|T(t)\| \leq 1$, diremos que $T(t)$ es un semigrupo de contracciones.

Teorema 1.6 *Sea* $T(t)$ *un* C_0*-semigrupo en* X *tal que* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, *entonces existe una norma equivalente sobre* X *de forma que en la norma del operador correspondiente a la nueva norma sobre* X *se cumple*

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}.$$

Corolario 1.1 (Lummer-Phillips). *Sea* H *un espacio de Hilbert cuyo producto escalar denotaremos por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *y* A *un operador lineal en* H *tal que:*

(i) $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* H,

(ii) $Re\langle Ax, x\rangle \leq \omega\langle x, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$,

(iii) $\exists \lambda > \omega$ *de forma que* $\mathrm{Rango}(\lambda - A) = H$.

Entonces A genera un semigrupo cuasi-contractivo $T(t) = e^{At}$ y

$$\|e^{At}\| \leq e^{\omega t}.$$

Nota 1.2 *Si cambiamos (iii) por la condición*

(iii') $\lambda - A$ tiene rango denso,

entonces su clausura, $\bar{A}$, es el generador de un semigrupo cuasi-contractivo.

Centrémonos ahora en el problema no homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A\,u + f(t), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

siendo A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$.

Suponiendo que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ y $f \in C([0,t_0];X)$, la solución clásica es una función $u \in C^1([0,t_0];X) \cap C([0,t_0];\mathcal{D}(A))$.

Teorema 1.7 *Si u es la solución clásica de (1.3), entonces*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{1.4}$$

En el caso $u_0 \in X$ y $f \in L^1([0,t_0];X)$, (1.4) representa una función continua que recibe el nombre de solución débil (mild solution).

Teorema 1.8 *Supongamos que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ y $f \in C([0,t_0];\mathcal{D}(A))$. Si además*

$$f \in W^{1,1}([0,t_0];X) \quad ó \quad f \in L^1([0,t_0];\mathcal{D}(A)),$$

entonces la solución débil es la solución clásica.

Por último, consideremos el problema general (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + f(t), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

donde $\{A(t)\}_{0\leq t\leq t_0}$ es una familia de operadores pertenecientes al conjunto de los generadores infinitesimales de C_0-semigrupos.

Diremos que una familia de operadores $\{A(t)\}_{0\leq t\leq t_0}$ perteneciente al conjunto $G(X, M, \omega)$ es estable, en el sentido de Kato, con índices de estabilidad $\Gamma > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$, si

$$\| \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - A(t_i))^{-1} \| \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma}{\lambda_i - \omega}$$

para todo conjunto $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t_0$ y $\lambda_i > \omega$.

Teorema 1.9 *Supongamos que para todo $t \in [0, t_0]$ existe una norma $\| \cdot \|_t$ equivalente a la norma original de X, y existe una constante $c > 0$ tal que $\forall\, x \in X$ y $t, s \in [0, t_0]$ se verifica*

$$\frac{\|x\|_t}{\|x\|_s} \leq e^{c|t-s|}.$$

Entonces, si $A(t) \in G(X, 1, \omega)$ $\forall\, t \in [0, t_0]$, la familia $\{A(t)\}_{0\leq t\leq t_0}$ es estable en el sentido de Kato con índices de estabilidad $\Gamma = e^{2ct_0}$ y ω.

Teorema 1.10 *Supongamos:*

(i) $\{A(t)\}_{0\leq t\leq t_0}$ *es estable con índices de estabilidad* Γ *y* ω*,*

(ii) el dominio de $A(t)$, $\mathcal{D}(A)$, es independiente de t,

(iii) $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, $A(t)x$ es fuerte y continuamente diferenciable.

Entonces existe un único operador de evolución $T(t, s)$ definido en la región $\Delta : 0 \leq s \leq t \leq t_0$ con las propiedades:

1. $T : \Delta \longrightarrow B(X)$ *es fuertemente continuo y,*

$$\|T(t, s)\| \leq \Gamma e^{\omega(t-s)}.$$

2. $T(t, t) = I$ *y* $T(t, \tau)T(\tau, s) = T(t, s), \quad 0 \leq s \leq \tau \leq t \leq t_0.$

3. $\forall\, x \in \mathcal{D}(A), \quad T(t, s)x \in \mathcal{D}(A).$

4.
$$\frac{\partial T(t,s)}{\partial t} = A(t)T(t,s), \qquad \frac{\partial T(t,s)}{\partial s} = -T(t,s)A(s).$$

Además, si $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^1([0,t_0];X)$ y u es la solución débil:

$$u(t) = T(t,0)u_0 + \int_0^t T(t,s)f(s)\,ds,$$

entonces

$$u \in C([0,t_0];\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,t_0];X),$$

y es la solución del problema (1.1).

1.6 Comportamiento asintótico de un semigrupo de contracciones

En esta sección presentaremos una serie de resultados que nos seran útiles para el estudio del comportamiento asintótico de un semigrupo de contracciones [21].

Consideremos el problema de evolución,

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A\,u(t), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

en un espacio de Hilbert H, siendo A el generador de un semigrupo de contracciones $T(t)$ en H. Supondremos además que $A^{-1}0 = \{0\}$.

La órbita de $x \in H$ es el conjunto $\gamma(x) = \bigcup_{t\geq 0} T(t)x$. El conjunto ω-límite de x viene dado por $\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma\,(T(t)x)}$.

Teorema 1.11 *Si para algún $x \in H$, $\gamma(x)$ es precompacta en H, entonces*

1. *$\omega(x)$ es no vacío, conexo, compacto y $T(t)x \to \omega(x)$.*
2. *Existe un grupo lineal de isometrías, $\hat{T}$, definido en el subespacio cerrado de H generado por la clausura convexa de $\omega(x)$, $\bar{co}\,\omega(x)$, que coincide con T en $\bar{co}\,\omega(x)$.*

Supongamos ahora que $x \in \mathcal{D}(A)$ y que su órbita $\gamma(x)$ es precompacta en H. Sea $\hat{x} \in \gamma(x)$. El teorema 1.11 nos permite escribir

$$T(t)\hat{x} = \hat{T}(t)\hat{x} \sim \sum_k e^{i\nu_k t}\phi_k,$$

siendo $i\nu_k$ el valor propio imaginario puro asociado al vector propio ϕ_k del generador infinitesimal de $\hat{T}$, $\hat{A}$. O sea, que si $i\nu$ es valor propio asociado al vector propio ϕ, entonces, si la ecuación

$$\hat{A}\phi = i\nu\phi \tag{1.6}$$

admite únicamente la solución trivial, se tiene que $\omega(x) = \{0\}$ y, por lo tanto,

$$T(t)x \longrightarrow 0, \quad \text{si} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Por otra parte, si $y \in \overline{co}\,\omega(x)$, del teorema 1.11 se sigue que

$$\langle A\,y,\, y\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\hat{T}(t)y\right\|^2\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.7}$$

delimitándonos de esta manera el dominio del operador $\hat{A}$.

Capítulo 2

Termoelasticidad incremental

2.1 Introducción

Los primeros trabajos sobre materiales pretensionados se remontan a la década de los sesenta, cuando England & Green [24] en 1961 y Green [32] en 1962 estudian las ecuaciones que rigen el comportamiento de pequeñas deformaciones termoelásticas superpuestas a grandes deformaciones, suponiendo que el estado primario está en equilibrio y es isotermo.

En 1980 Ieşan [35] establece las ecuaciones de la termoelasticidad incremental para el caso general.

En 1982 Chiriţa [9] obtiene resultados de unicidad y dependencia continua de soluciones para dicho problema.

Posteriormente en 1984 Navarro & Quintanilla [55] establecen la existencia de soluciones para el problema de la termoelasticidad incremental bajo las hipótesis de que el dominio es acotado y el tensor de elasticidades es definido positivo.

Podemos recordar asimismo los trabajos de Quintanilla [63] sobre el comportamiento asintótico de la termoelasticidad incremental y de Quintanilla & Willians [64] sobre existencia y unicidad para la viscoelasticidad incremental.

Una importante y clarificadora monografía sobre materiales pretensionados es debida a Ieşan [39].

El propósito de este capítulo es generalizar los resultados obtenidos en [55] para el caso de dominios no acotados y tensor de elasticidades fuertemente elíptico.

El plan a seguir es, en primer lugar, establecer las ecuaciones de la teoría de materiales pretensionados. Después, utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales obtendremos resultados de existencia, unicidad y de dependencia continua para condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

2.2 Ecuaciones básicas

2.2.1 Ecuaciones de la teoría de materiales elásticos con conducción de calor

El movimiento del cuerpo estará descrito respecto de un sistema de coordenadas de ejes cartesianos OX_i $(i = 1, 2, 3)$. Denotaremos por $\mathbf{n}$ la normal exterior de la frontera $\partial\Omega_0$ de la región Ω_0. Como ya hemos indicado anteriormente, letras en negritas hacen referencia a tensores de orden $p \geq 1$, y si $\mathbf{v}$ es de orden p, escribiremos $v_{ij...k}$ (p subíndices) para las componentes de $\mathbf{v}$. Emplearemos también los convenios usuales de sumación y derivación: subíndices latinos toman los valores enteros (1,2,3), subíndices repetidos significan índices sumados, e índices precedidos por una coma denotan derivación parcial respecto a la coordenada correspondiente. Por último, la derivación parcial respecto al tiempo la indicaremos mediante puntos superpuestos.

Consideremos un cuerpo que en el instante inicial ocupa una región Ω_0 del espacio tridimensional, con frontera $\partial\Omega_0$ suficientemente regular. La configuración del cuerpo en el estado inicial será la configuración de referencia. El estado del cuerpo estará descrito respecto de la configuración de referencia y un sistema fijo de coordenadas cartesianas.

Las coordenadas de una partícula respecto de dicho sistema de coordenadas las denotaremos por X_A. Las coordenadas de una partícula en el instante t las describiremos por x_i, siendo dichas coordenadas función de t y X_A. Para un material elástico real se ha de cumplir

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right) > 0. \tag{2.1}$$

Sea V una región arbitraria de superficie A en el instante t y supongamos que V_0, con superficie A_0, es su región correspondiente en el instante inicial. Para obtener nuestras ecuaciones, postularemos la conservación de la energía en cada instante t en la forma

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{x}_i \ddot{x}_i dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \dot{U}\, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 (f_i \dot{x}_i + s) dV_0 + \int_{A_0} (p_i \dot{x}_i + q) dA_0, \tag{2.2}$$

donde U es la energía interna por unidad de masa, f_i es la fuerza volúmica por unidad de masa, p_i es la fuerza superficial ejercida sobre la superficie A pero medida por unidad de área de A_0, s es la fuente de calor por unidad de masa y tiempo, q es el flujo de calor a través de la superficie A medido por unidad de área de A_0 y ρ_0 es la densidad en la configuración de referencia.

Suponiendo la invariancia de la ecuación (2.2) bajo cambio de sistemas inerciales (i.e. $\dot{x}_i \to \dot{x}_i + v_i$), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{V_0} \rho_0 (\dot{x}_i + v_i) \ddot{x}_i dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \dot{U}\, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \big(f_i(\dot{x}_i + v_i) + s\big) dV_0 \\ + \int_{A_0} \big(p_i(\dot{x}_i + v_i) + q\big) dA_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Siendo v_i es arbitraria, se ha de verificar

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{x}_i\, dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 f_i\, dV_0 - \int_{A_0} p_i\, dA_0 = 0. \tag{2.4}$$

Por el teorema de Cauchy [34] se tiene

$$p_i = T_{Ai} n_A, \tag{2.5}$$

siendo n_A el vector normal a la superficie A_0 y T_{Ai} el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Utilizando la arbitrariedad de la región V, podemos escribir (2.4) en forma local,

$$T_{Ai,A} + \rho_0 f_i = \ddot{x}_i, \tag{2.6}$$

De forma análoga a (2.5) tenemos

$$q = Q_A n_A, \tag{2.7}$$

donde Q_A es el flujo de calor.

Sustituyendo (2.5), (2.6) y (2.7) en (2.2), y utilizando otra vez la arbitrariedad del volumen V obtenemos

$$\rho_0 \dot{U} = T_{Ai} \dot{x}_{i,A} + Q_{A,A} + \rho_0 s. \tag{2.8}$$

Si introducimos el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff

$$T_{AB} = X_{B,i}T_{Ai}, \tag{2.9}$$

entonces la conservación del momento angular se traduce en

$$T_{AB} = T_{BA}. \tag{2.10}$$

Es conveniente introducir la energía libre de Helmholtz $\Psi = U - T\eta$, donde T es la temperatura absoluta y η la entropía por unidad de masa y tiempo. Con esta notación, la ecuación (2.8) se escribe

$$\rho_0 \left(\dot{\Psi} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \right) = T_{AB}\dot{E}_{AB} + Q_{A,A} + \rho_0 s, \tag{2.11}$$

donde

$$2E_{AB} = x_{i,A}x_{i,B} - \delta_{AB}. \tag{2.12}$$

Definimos un material termoelástico como aquel cuyas ecuaciones constitutivas son del tipo

$$\begin{aligned} &\Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, T_{,A}\right), \quad T_{KL} = \hat{T}_{KL}\left(E_{AB}, T, T_{,A}\right), \\ &\eta = \hat{\eta}\left(E_{AB}, T, T_{,A}\right), \quad\ \ Q_K = \hat{Q}_K\left(E_{AB}, T, T_{,A}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Postulando la segunda ley de la termodinámica de la siguiente forma

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\eta}\, dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \frac{s}{T}\, dV_0 - \int_{A_0} \frac{q}{T}\, dA_0 \geq 0, \tag{2.14}$$

la podemos escribir en forma local, utilizando (2.7),

$$\rho_0 T\dot{\eta} - \rho_0 s - Q_{A,A} + \frac{1}{T}Q_A T_{,A} \geq 0. \tag{2.15}$$

De (2.11) podemos aislar s y sustituir en (2.15); entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas (2.13), se deduce

$$\left(T_{AB} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}} \right) \dot{E}_{AB} - \rho_0 \left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,A}} \dot{T}_{,A} + \frac{1}{T} Q_A T_{,A} \geq 0. \tag{2.16}$$

Si adoptamos la interpretación de Coleman & Noll [17] de la segunda ley de la termodinámica, que consiste básicamente en suponer que todos los procesos son posibles, limitandonos así el tipo de materiales existentes, entonces (2.16) ha de ser válido para todo $\dot{E}_{AB}$, $\dot{T}$ y $\dot{T}_{,A}$. De aquí se deduce

$$\Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T\right), \tag{2.17}$$

$$T_{AB} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \tag{2.18}$$

y

$$Q_A T_{,A} \geq 0. \tag{2.19}$$

Nota 2.1 *Las relaciones anteriores ponen de manifiesto que Ψ, T_{AB} y η no dependen del gradiente de temperatura. Además, justifican plenamente la introducción de la energía libre de Helmholtz. Por otra parte, (2.19) nos indica que $Q_K(E_{AB}, T, 0) = 0$ y por lo tanto que el flujo de calor es nulo cuando la temperatura es constante a lo largo del cuerpo.*

Considerando (2.17) y (2.18), la ecuación (2.11) se puede escribir:

$$\rho_0 T \dot{\eta} = Q_{A,A} + \rho_0 s.$$

Resumiendo, las ecuaciones básicas de la teoría son:

- la ecuación de la energía

$$\rho_0 T \dot{\eta} = Q_{A,A} + \rho_0 s, \tag{2.20}$$

- la ecuación del movimiento

$$\rho_0 \ddot{x}_i = T_{Ai,A} + \rho_0 f_i, \tag{2.21}$$

- las ecuaciones constitutivas

$$\Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T\right), \quad Q_K = \hat{Q}_K\left(E_{AB}, T, T_{,A}\right),$$

$$T_{AB} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \tag{2.22}$$

- la ecuación geométrica

$$2E_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB}. \tag{2.23}$$

2.2.2 Ecuaciones de la teoría incremental de materiales termoelásticos

Consideremos dos estados más aparte del de la configuración de referencia: el estado primario Ω y el estado secundario Ω^* e introduzcamos las cantidades incrementales (ver [46]) asociadas con las diferencias entre los estados secundario y primario. Si el punto $\mathbf{X} = [X_A]$ de Ω_0 se desplaza a $\mathbf{x} = [x_i]$ en Ω y a $\mathbf{x}^* = [x_i^*]$ en Ω^* entonces $\mathbf{u} = [u_i] = [x_i^* - x_i]$ es el desplazamiento incremental y, si T y T^* son las temperaturas absolutas asociadas con Ω y Ω^*, entonces $\theta = T^* - T$ es la temperatura incremental.

Se trata de establecer las ecuaciones, condiciones iniciales y condiciones de frontera para u_i y θ cuando conocemos el estado primario y las fuentes externas en ambos estados, suponiendo que las cantidades u_i y θ son pequeñas.

Para ello consideremos la relación

$$x_{i,A}^* = x_{i,A} + u_{i,A} = x_{i,A} + u_{i,j}x_{j,A}; \tag{2.24}$$

despreciando términos de segundo orden obtenemos

$$E_{AB}^* = E_{AB} + \frac{1}{2}\left(x_{i,B}u_{i,A} + x_{i,A}u_{i,B}\right) = E_{AB} + e_{ij}x_{i,A}x_{j,B}, \tag{2.25}$$

donde

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \tag{2.26}$$

Desarrollando por Taylor hasta primer orden tenemos [1]

$$\begin{aligned}
\Psi^* &= \hat{\Psi}\left(E_{AB}^*, T^*\right) \\
&= \hat{\Psi}\left(E_{AB} + e_{ij}x_{i,A}x_{j,B}, T + \theta\right) \\
&= \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T\right) + \frac{\partial\hat{\Psi}\left(E_{AB}, T\right)}{\partial E_{AB}}e_{ij}x_{i,A}x_{j,B} + \frac{\partial\hat{\Psi}\left(E_{AB}, T\right)}{\partial T}\theta \\
&= \Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial E_{AB}}e_{ij}x_{i,A}x_{j,B} + \frac{\partial\Psi}{\partial T}\theta.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Por lo tanto, si $\sigma = \rho_0\Psi$,

$$\frac{\partial\sigma^*}{\partial E_{KL}^*} = \frac{\partial\sigma}{\partial E_{KL}} + A_{KLMN}e_{ij}x_{i,M}x_{j,N} - \beta_{KL}\theta,$$

[1] Denotaremos por f y f^* los valores que toman las distintas magnitudes en Ω y Ω^* respectivamente.

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial T^*} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \beta_{AB} e_{ij} x_{i,A} x_{j,B} - B\theta, \tag{2.28}$$

siendo

$$A_{KLMN} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial E_{MN}}, \quad \beta_{KL} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial T}, \quad B = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2}. \tag{2.29}$$

Entonces

$$T^*_{KL} - T_{KL} = A_{KLMN} x_{i,M} u_{i,N} - \beta_{KL}\theta,$$

$$\rho_0 \eta^* - \rho_0 \eta = \beta_{MN} x_{i,M} u_{i,N} + B\theta. \tag{2.30}$$

Recordando que

$$T^*_{Ai} = x^*_{i,B} T^*_{AB} = (x_{i,B} + u_{i,B})\, T^*_{AB}, \tag{2.31}$$

y despreciando términos de orden superior, tenemos

$$\begin{aligned} T^*_{Ki} =&(x_{i,L} + u_{i,L})(T_{KL} + A_{KLMN} x_{j,M} u_{j,N} - \beta_{KL}\theta) \\ =&T_{Ki} + T_{KN} u_{i,N} + A_{KLMN} x_{i,L} x_{j,M} u_{j,N} - \beta_{KL} x_{i,L}\theta. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Definiendo

$$A_{KijN} = A_{KLMN} x_{i,L} x_{j,M}, \qquad \beta_{Ki} = \beta_{KL} x_{i,L}, \tag{2.33}$$

y

$$D_{KijN} = A_{KijN} + T_{KN}\delta_{ij}, \tag{2.34}$$

podemos escribir

$$T^*_{Ki} - T_{Ki} = D_{KijN} u_{j,N} - \beta_{Ki}\theta,$$

$$\rho_0 \eta^* - \rho_0 \eta = \beta_{Ki} u_{i,K} + B\theta. \tag{2.35}$$

Análogamente tenemos

$$Q^*_A - Q_A = H_{AMN} x_{i,M} u_{i,N} + B_A \theta + K_{AM} \theta_{,M}, \tag{2.36}$$

donde

$$H_{AMN} = \frac{\partial Q_A}{\partial E_{MN}}, \quad B_A = \frac{\partial Q_A}{\partial T}, \quad K_{AL} = \frac{\partial Q_A}{\partial T_{,L}}. \tag{2.37}$$

Utilizando la notación

$$H_{AiN} = H_{AMN} x_{i,M}, \tag{2.38}$$

podemos escribir

$$Q^*_A - Q_A = H_{AiN} u_{i,N} + B_A \theta + K_{AM} \theta_{,M}. \tag{2.39}$$

Definiendo $P_{Ki} = T^*_{Ki} - T_{Ki}$ primer tensor incremental de tensiones de Piola-Kirchhoff medido por unidad de área en Ω_0; $\gamma = \rho_0(\eta^* - \eta)$ entropía incremental medida por unidad de volumen en Ω_0; $\Phi_A = Q^*_A - Q_A$ flujo incremental de calor medido por unidad de área en Ω_0; $G_i = f^*_i - f_i$ fuerza incremental volúmica; y $R = s^* - s$ fuente incremental de calor, las ecuaciones básicas de la teoría incremental lineal son:

- la ecuación de la energía

$$T\dot{\gamma} + \rho_0 \theta \dot{\eta} = \Phi_{A,A} + \rho_0 R, \tag{2.40}$$

- la ecuación del movimiento

$$P_{Ai,A} + \rho_0 G_i = \rho_0 \ddot{u}_i, \tag{2.41}$$

- las ecuaciones constitutivas

$$\begin{gathered} P_{Ki} = D_{KijN} u_{j,N} - \beta_{Ki} \theta, \\ \gamma = \beta_{Nj} u_{j,N} + B\theta, \\ \Phi_A = H_{AjN} u_{j,N} + B_A \theta + K_{AM} \theta_{,M}. \end{gathered} \tag{2.42}$$

Nota 2.2 *Los coeficientes constitutivos, D_{KijN}, β_{Ki}, B, H_{AjN}, B_A y K_{AM} son, obviamente, funciones de la deformación y temperatura del cuerpo en el estado primario. Además poseen la siguiente propiedad de simetría*

$$D_{KijN} = D_{NjiK}. \tag{2.43}$$

2.3 Descripción del problema e hipótesis

En vista de (2.42), las ecuaciones del movimiento y de la energía se pueden expresar en función de u_i y θ. Podemos escribir

$$\begin{aligned}\ddot{u}_i =& \frac{1}{\rho_0}\Big[D_{KijN}u_{j,N} - \beta_{Ki}\theta\Big]_{,K} + G_i,\\ \dot{\theta} =& \frac{1}{BT}\left(\Big[H_{AiN}u_{i,N} + B_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}\Big]_{,A} - \rho_0\theta\dot{\eta}\right)\\ &- \frac{1}{B}\left(\beta_{Ki}\dot{u}_{i,K} + \dot{\beta}_{Ki}u_{i,K} + \dot{B}\theta\right) + S, \qquad \text{en } \Omega_0 \times [0,t_1]\end{aligned} \tag{2.44}$$

donde $S = \rho_0 R/BT$.

Consideraremos las condiciones de frontera

$$\mathbf{u} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_0 \times [0,t_1], \tag{2.45}$$

Añadiremos las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{X}), \quad \theta(\mathbf{X},0) = \theta_0(\mathbf{X}) \quad \text{en } \Omega_0 \tag{2.46}$$

siendo $\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \mathbf{v}_0(\mathbf{X}), \theta_0(\mathbf{X})$ funciones dadas.

Asumiremos que los coeficientes constitutivos son diferenciables con continuidad y sus valores son, para t fijo, medibles Lebesgue y esencialmente acotados. Además, supondremos:

(i) La densidad es estrictamente positiva

$$0 < \rho_1 \leq \text{ess.}\inf_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \leq \text{ess.}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \leq \rho_2. \tag{2.47}$$

(ii) La capacidad calorífica $B(\mathbf{X},t)$ es estrictamente positiva

$$0 < B_0 \leq \text{ess.}\inf_{\mathbf{X}\in\Omega_0} B(\mathbf{X},t) \leq \text{ess.}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} B(\mathbf{X},t) \leq B_1. \tag{2.48}$$

(iii) El tensor D_{KijN} es fuertemente elíptico, i.e. existe una constante $\epsilon > 0$ tal que

$$D_{KijN}(\mathbf{X},t)\xi_K\xi_N\lambda_i\lambda_j \geq \epsilon||\xi||^2||\lambda||^2, \tag{2.49}$$

para todo vector $\xi, \lambda \in \mathbb{R}^3$.

(iv) El tensor de conductividad térmica K_{AM} es definido positivo, i.e. existe una constante $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{T} K_{AM} \xi_A \xi_M \geq K \|\xi\|^2, \tag{2.50}$$

para todo vector $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Nota 2.3 *Las hipótesis (2.47), (2.48) y (2.50) admiten una interpretación termomecánica: la densidad, la capacidad calorífica, la energía elástica y la conducción de calor son positivas. La hipótesis (2.49) es usual en el estudio de los problemas de elasticidad ([50]). Otras observaciones correspondientes a esta hipótesis pueden verse en el apéndice de esta sección.*

2.4 Un resultado de existencia de soluciones

En esta sección usaremos los resultados de la teoría de semigrupos de operadores lineales para obtener un teorema de existencia de soluciones. Para ello transformaremos nuestro problema inicial con valores en la frontera en un problema abstracto en un espacio de Hilbert.

Denotemos $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ y sea $\mathcal{Z}$ el espacio

$$\mathcal{Z} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta); \mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0), \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), \theta \in L^2(\Omega_0)\},$$

siendo $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ el espacio usual de Sobolev [1], y $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) = [W_0^{1,2}(\Omega_0)]^3$.

Definamos los operadores:

$$\begin{aligned}
F_i(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\rho_0}\left[D_{KijN} u_{j,N}\right]_{,K}, \qquad \mathbf{F} = (F_i),\\
C_i(\theta) &= -\frac{1}{\rho_0}\left[\beta_{Ki}\theta\right]_{,K}, \qquad \mathbf{C} = (C_i),\\
L(\mathbf{u}) &= \frac{1}{BT}\Big(\left[H_{AiN} u_{i,N}\right]_{,A} - T\dot{\beta}_{iN} u_{i,N}\Big),\\
N(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{B}\beta_{Ki} v_{i,K},\\
M(\theta) &= \frac{1}{BT}\left(\left[B_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}\right]_{,A} + \left(\dot{\eta} + T\dot{B}\right)\theta\right).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Sea $\mathcal{A}$ el operador matricial, con dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta) \in \mathcal{Z} \mid \mathcal{A}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}\},$$

definido por

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Id} & 0 \\ \mathbf{F} & 0 & \mathbf{C} \\ L & M & N \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

donde **Id** es el operador identidad.

Notemos que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$ es denso en $\mathcal{Z}$, propiedad que utilizaremos más adelante.

Nuestro problema (2.44) con condiciones de frontera (2.45) y valores iniciales (2.46) se puede tranformar en el siguiente problema de evolución en el espacio de Hilbert $\mathcal{Z}$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mathcal{A}w(t) + \mathcal{F}(t), \quad w(0) = w_0, \tag{2.53}$$

donde

$$w = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta), \quad \mathcal{F} = (0, \mathbf{G}, S), \quad w_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \theta_0). \tag{2.54}$$

Es conocido (ver [68]) que, para cada t, $0 \leq t \leq t_1$, existe una constante $\hat{d}(t)$ tal que

$$||\mathbf{u}||^2_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)} \equiv \int_{\Omega_0} (D_{KijN} u_{i,K} u_{j,N} + \hat{d} u_i u_i) dV \tag{2.55}$$

es una norma equivalente a la usual de $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$. Por continuidad, podemos encontrar una constante d tal que

$$\int_{\Omega_0} (D_{KijN} u_{i,K} u_{j,N} + d u_i u_i) dV \geq C ||\mathbf{u}||^2_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}, \tag{2.56}$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$, donde $C > 0$ es constante.

Definamos en $\mathcal{Z}$ el producto escalar

$$\langle(\mathbf{u},\mathbf{v},\theta),(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*,\theta^*)\rangle_t = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(du_i u_i^* + D_{KijN}u_{i,K}u_{j,N}^* + \rho_0 v_i v_i^* + B\theta\theta^*\right)dV. \tag{2.57}$$

La norma definida por (2.57) es equivalente a la definida originalmente en $\mathcal{Z}$.

Lema 2.1 *Existe una constante positiva α tal que para todo $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, se cumple*

$$\langle \mathcal{A}w, w\rangle_t \leq \alpha\langle w, w\rangle_t. \tag{2.58}$$

Demostración. Utilizando las ecuaciones de evolución (2.44) y el teorema de la divergencia, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}w, w\rangle_t =& \frac{d}{2}\int_{\Omega_0} v_i u_i dV - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} T^{-1}K_{AM}\theta_A\theta_{,M}dV \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left\{\frac{T_{,A}H_{AiN} - \dot{\beta}_{Ni}T^2}{T^2}\theta u_{i,N}\right. \\
&\qquad + \frac{K_{AM}T_{,A} - B_M T}{T^2}\theta\theta_{,M} \\
&\qquad \left. - \frac{H_{AiN}}{T}\theta_{,A}u_{i,N} + \frac{B_A T_{,A} - \rho_0\dot{\eta}T - \dot{B}T^2}{T^2}\theta^2\right\} dV \\
\leq& \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1 m_1}{2} + \frac{\epsilon_2 m_2}{2} - K\right)\int_{\Omega_0}\theta_{,M}\theta_{,M}dV \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\epsilon_1} + m_3 + \frac{1}{2\epsilon_4}\right)\int_{\Omega_0}\theta^2 dV \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_4 m_4}{2} + \frac{1}{2\epsilon_2}\right)\int_{\Omega_0}u_{i,K}u_{i,K}dV \\
&+ \frac{d\epsilon_5}{4}\int_{\Omega_0}u_i u_i + \frac{d}{4\epsilon_5}\int_{\Omega_0}v_i v_i dV,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica, ϵ_i son constantes positivas arbitrarias, y las distintas m_i vienen dadas por

$$\begin{aligned}
m_1 &= \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0}\left|\frac{(K_{AM}T_{,A}-B_MT)(K_{BM}T_{,B}-B_MT)}{T^4}\right|,\\
m_2 &= \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0}\left|9\frac{H_{AiN}H_{AiN}}{T^2}\right|,\\
m_3 &= \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0}\left|\frac{B_AT_{,A}-\rho_0\dot{\eta}T-\dot{B}T^2}{T^2}\right|,\\
m_4^2 &= \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0}\left|\left(\frac{T_{,A}H_{AiN}}{T^2}-\dot{\beta}_{Ni}\right)\left(\frac{T_{,B}H_{BiN}}{T^2}-\dot{\beta}_{Ni}\right)\right|.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}w,w\rangle_t \leq &\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1 m_1}{2}+\frac{\epsilon_2 m_2}{2}-K\right)\int_{\Omega_0}\theta_{,M}\theta_{,M}dV\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\epsilon_1}+m_3+\frac{1}{2\epsilon_4}\right)\int_{\Omega_0}\theta^2 dV+\frac{d}{4\epsilon_5\rho_1}\int_{\Omega_0}\rho_0 v_i v_i dV\\
&+\frac{1}{2C}M_1\int_{\Omega_0}\left[D_{KijN}u_{i,K}u_{j,N}+du_iu_i\right]dV,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

donde C viene dada por (2.56) y $M_1=\max\left\{\left(\frac{\epsilon_4 m_4}{2}+\frac{1}{2\epsilon_2}\right),\frac{\epsilon_5}{2}\right\}$. Tomando ϵ_1 y ϵ_2 de forma que $\epsilon_1 m_1+\epsilon_2 m_2\leq 2K$ y

$$\alpha=\max\left\{\frac{1}{B_0}\left(\frac{m_1}{2\epsilon_1}+m_3+\frac{m_4}{2\epsilon_4}\right),\frac{1}{C}M_1,\frac{d}{2\epsilon_5\rho_1}\right\},$$

obtenemos la desigualdad (2.58).□

Lema 2.2 *Existe $\lambda_0\in\mathbb{R}$ tal que el operador $\mathcal{A}$ satisface*

$$\text{Rango}(\lambda_0\mathbf{Id}-\mathcal{A})=\mathcal{Z}. \tag{2.61}$$

Demostración. Sea $w^*=(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*,\theta^*)\in\mathcal{Z}$; hemos de demostrar que la ecuación

$$\lambda_0 w-\mathcal{A}w=w^* \tag{2.62}$$

tiene una solución $w = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Escribiendo explícitamente el sistema (2.62) tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_0 \mathbf{u} - \mathbf{v} =& \mathbf{u}^*, \\ \lambda_0 \mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{u} - \mathbf{C}\theta =& \mathbf{v}^*, \\ \lambda_0 \theta - L\mathbf{u} - N\mathbf{v} - M\theta =& \theta^*. \end{aligned} \tag{2.63}$$

De la primera ecuación podemos aislar $\mathbf{v}$ y sustituirlo en las otras, obteniendo

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 \mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{u} - \mathbf{C}\theta =& \mathbf{v}^* + \lambda_0 \mathbf{u}^*, \\ \lambda_0 \theta - L\mathbf{u} - \lambda_0 N\mathbf{u} - M\theta =& \theta^* - N\mathbf{u}^*. \end{aligned} \tag{2.64}$$

El uso de la alternativa de Fredholm [5] aplicada a $\lambda^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F}$ y la desigualdad de Gårding [50] nos permiten afirmar que dicho operador es invertible (ver [50], cap. 6) para todo $\lambda \geq \lambda^* > 0$. Por lo tanto de la primera ecuación de (2.64) tenemos

$$\mathbf{u} = (\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{v}^* + \lambda_0 \mathbf{u}^* + \mathbf{C}\theta), \tag{2.65}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación de (2.64) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_0 \theta - L(\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta) - \lambda_0 N(\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta) - M\theta \\ = \theta^* - N\mathbf{u}^* + (L + \lambda_0 N)(\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{v}^* + \lambda_0 \mathbf{u}^*). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Para estudiar si la ecuación (2.66) tiene solución, introducimos la forma bilineal en $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{\lambda_0}(\theta,\tilde{\theta}) \\ &=\langle \lambda_0 \theta - L(\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta) - \lambda_0 N(\lambda_0^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta) - M\theta,\ \tilde{\theta}\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

En el siguiente lema demostraremos que $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ (λ_0 suficientemente grande) es acotada y coercitiva. Entonces el teorema de Lax-Milgram [5] nos asegura que existe una solución $\theta \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ de la ecuación (2.66). Con lo cual podemos concluir de (2.65) la existencia de $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$ solución de (2.63). □

Lema 2.3 *Existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que la forma bilineal $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ es coercitiva y acotada en $W_0^{1,2}(\Omega_0)$.*

Demostración. Un sencillo cálculo muestra que $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ está acotada para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$.

Veamos ahora que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ es coertiva. Consecuencia del teorema de la divergencia y de la desigualdad de Hölder son las estimaciones

$$|\langle L\mathbf{u}, \theta\rangle_{L^2}| \leq R\langle(\mathbf{F} + \phi_1\mathbf{Id})\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \langle(M + \phi_2)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.68}$$

$$|\langle N\mathbf{u}, \theta\rangle_{L^2}| \leq R^*\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \langle(M + \phi_2^*)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.69}$$

donde R, ϕ_1, ϕ_2 ,R^* y ϕ_2^* son constantes positivas que dependen de los coeficientes.

A partir de (2.68) y de la acotación

$$\left\|(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda^2 - \beta},$$

para el operador $(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}$, ([50], cap. 6), tenemos

$$\begin{aligned}
&|\langle L(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), \theta\rangle| \\
&\qquad \leq R\langle(\mathbf{F} + \phi_1\mathbf{Id})(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), (\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta)\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\quad \times \langle(M + \phi_2)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad = R\langle\{(\lambda^2 + \phi_1)\mathbf{Id} - (\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})\}(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), (\lambda^2\mathbf{Id} \\
&\qquad\qquad - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta)\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \times \langle(M + \phi_2)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq R\{(\lambda^2 + \phi_1)^{\frac{1}{2}}\langle(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), (\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta)\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\quad + |\langle\mathbf{C}\theta, (\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta)\rangle_{\mathbf{L}^2}|^{\frac{1}{2}}\}\langle(M + \phi_2)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq R\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \phi_1}}{\lambda^2 - \beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}}\right\}\langle\mathbf{C}\theta, \mathbf{C}\theta\rangle_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\langle(M + \phi_2)\theta, \theta\rangle_{L^2}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce

$$|\langle L(\lambda^2\mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), \theta\rangle| \leq C^*\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \phi_1}}{\lambda^2 - \beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}}\right\}||\theta||_{W_0^{1,2}(\Omega_0)}, \tag{2.70}$$

donde $C^* > 0$ es una constante que depende de R, ϕ_i y de los coeficientes termoelásticos. De forma semejante podemos establecer

$$
\begin{aligned}
&|\langle \lambda N(\lambda^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), \theta\rangle| \\
&\quad \leq R^*|\lambda| \langle (\lambda^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta), (\lambda^2 \mathbf{Id} - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{C}\theta)\rangle^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2} \langle (M+\phi_2)\theta, \theta\rangle^{\frac{1}{2}}_{L^2} \\
&\quad \leq R^* \frac{\lambda}{\lambda^2 - \beta} (||\mathbf{C}\theta||^{\frac{1}{2}}_{L^2} \langle (M+\phi_2)\theta, \theta\rangle^{\frac{1}{2}}_{L^2} \\
&\quad \leq C^{**} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \beta} ||\theta||_{W_0^{1,2}(\Omega_0)},
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

donde $C^{**} > 0$ es constante y depende de R^*, ϕ_2^* y de los coeficientes termoelásticos.

Resumiendo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\lambda(\theta, \theta) \geq &- \left\{ C^* \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + \phi_1}}{\lambda^2 - \beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}} \right) + \frac{C^{**}\lambda}{\lambda^2 - \beta} \right\} ||\theta||_{W_0^{1,2}(\Omega_0)} \\
&+ \langle (\lambda - M)\theta, \theta\rangle_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Tomando $\lambda = \lambda_0$ suficientemente grande, podemos concluir que la forma bilineal $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ es coertiva.□

Como consecuencia de los lemas 2.1 y 2.2 podemos enunciar el teorema

Teorema 2.1 *El operador $\mathcal{A}$ genera un semigrupo cuasi-contractivo en $\mathcal{Z}$, para todo $t \in [0, t_1]$.* .

Lema 2.4 *Sea $||\cdot||_t$ la norma definida para cada $t \in [0, t_1]$ por el producto escalar (2.57). Entonces existe una constante $r > 0$ tal que*

$$
\frac{||(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)||_t}{||(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)||_s} \leq \exp(r|t - s|). \tag{2.73}
$$

Demostración. Definamos $h(t) \equiv ||\cdot||_t^2$. Derivando tenemos

$$
\dot{h}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left(\dot{D}_{KijN} u_{i,K} u_{j,N} + \dot{B}\theta^2 \right) dV. \tag{2.74}
$$

Tomando

$$
2r = \max\left(\frac{m}{C}, \frac{l}{B_0} \right),
$$

donde

$$m = \max_{t\in[0,t_1]} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{D}_{KijN}\dot{D}_{KijN}, \qquad l = \max_{t\in[0,t_1]} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{B},$$

obtenemos

$$\dot{h}(t) \leq |\dot{h}(t)| \leq 2rh(t),$$

e integrando entre s y t, obtenemos el resultado buscado.□

Consecuencia del lema 2.4 y del teorema 2.1 es:

Teorema 2.2 *La familia de operadores $\{\mathcal{A}(t), t \in [0, t_1]\}$ es estable en el sentido de Kato con constantes de estabilidad α y $\Gamma = \exp(2rt_1)$.*

Utilizando la teoría de operadores de evolución [45, 59, 30] podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.3 *Supongamos que las hipótesis (i)-(iv) se satisfacen. Supongamos también*

$$\mathbf{G} \in C^1([0, t_1], \mathbf{L}^2(\Omega_0)) \cap C^0([0, t_1], \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)),$$

$$S \in C^1([0, t_1], L^2(\Omega_0)) \cap C^0([0, t_1], W^{2,2}(\Omega_0)).$$

Entonces, para todo

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \theta_0) \in \mathcal{D}$$

existe un único

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t)) \in C^1([0, t_1], \mathcal{Z}) \cap C^0([0, t_1], \mathcal{D})$$

que cumple (2.53).

Nota 2.4 *Como $\mathcal{A}(t)$ genera una familia de operadores de evolución tenemos la siguiente estimación de las soluciones*

$$||(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)|| \leq \Gamma e^{\alpha t} \left(||(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \theta_0)|| + \int_0^t \left[\int_{\Omega_0} \left(G_i G_i + S^2 \right) dV \right]^{\frac{1}{2}} ds \right).$$

Nota 2.5 *El último teorema y la nota anterior nos permiten afirmar que, si las hipótesis (2.47)-(2.50) sobre los coeficientes se cumplen, entonces el problema (2.44)-(2.46) de la termoelasticidad incremental para dominios no acotados es un problema bien planteado.*

2.5 Apéndice: Tensor fuertemente elíptico

En el presente apéndice presentamos algunos ejemplos que hacen referencia a las hipótesis (2.49) y (2.50).

En el primer ejemplo, supondremos que el estado primario y la configuración de referencia Ω_0 coinciden. Para materiales termoelásticos e isótropos los tensores de elasticidades y de conducción térmica vienen dados por (ver [35]):

$$\begin{aligned} D_{KijN} =& \lambda\delta_{iK}\delta_{jN} + p\delta_{iN}\delta_{jK} + \mu\left(\delta_{ij}\delta_{NK} + \delta_{iN}\delta_{jK}\right), \\ K_{AM} =& k\delta_{AM} + k_0 T_{,A} T_{,M}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes λ, p, μ, k y k_0 son funciones de $\mathbf{X}$. Un sencillo cálculo muestra que la desigualdad (2.50) se cumple si

$$k > 0 \quad \text{y} \quad k_0 > 0.$$

Otro simple cálculo nos dice que la condición de ser fuertemente elíptico se satisface si

$$\mu > 0 \quad \text{y} \quad \lambda + 2\mu + p > 0.$$

Nota 2.6 *Si comparamos estas condiciones con las necesarias para la positividad del tensor, (i.e. $D_{KijN}\xi_{iK}\xi_{jN} \geq \epsilon\xi_{iK}\xi_{iK}$, $\epsilon > 0$),*

$$\mu > 0, \quad \mu + 3\lambda > 0, \quad p + 2\mu > 0, \quad 3\lambda + p + 2\mu > 0, \quad p < 0,$$

observamos que, en este ejemplo, todo tensor definido positivo es fuertemente elíptico.

En un segundo ejemplo supondremos que el estado primario se obtiene a partir de Ω_0 mediante una pequeña deformación termoelástica. En este caso (ver [38])

$$\begin{aligned} D_{KijN} =& (\lambda + \nu_1 e_{RR} - \beta_1 T)\delta_{iK}\delta_{jN} \\ & + (\mu + \nu_2 e_{RR} - \beta_2 T)(\delta_{ij}\delta_{NK} + \delta_{iN}\delta_{jK}) \\ & + (\lambda v_{M,N} + 2\nu_2 e_{MN})\delta_{iK}\delta_{jM} + (\lambda v_{L,K} + 2\nu_2 e_{KL})\delta_{iN}\delta_{jL} \\ & + (\mu v_{L,N} + 2\nu_3 e_{LN})\delta_{jK}\delta_{iL} + (\mu v_{M,K} + 2\nu_3 e_{MK})\delta_{iN}\delta_{jM} \\ & + 2(\mu + \nu_3)\delta_{iP}\delta_{jQ}\delta_{NK} e_{PQ} + 2(\nu_3 + \mu)\delta_{ij} e_{KN} \\ & + (\lambda e_{RR} - \beta T)\delta_{ij}\delta_{NK}, \\ K_{AM} =& (k + k_2 e_{RR} + gT)\delta_{AM} + (k_1 + k_2) e_{AM}, \end{aligned}$$

donde $v_\imath$ y T son el desplazamiento y la temperatura en el estado primario respectivamente,

$$e_{MN} = \frac{1}{2}(v_{M,N} + v_{N,M}), \qquad v_A = \delta_{\imath A} v_\imath,$$

y $\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \beta, \beta_1, \beta_2, k, k_1, k_2, g$ son coeficientes termoelásticos.

Un cálculo directo muestra

$$\begin{aligned} D_{K\imath\jmath N}\xi_K\xi_N\eta_\imath\eta_\jmath = {} & (\lambda + \mu + (\nu_1 + \nu_2)e_{RR} - (\beta_1 + \beta_2)T)\,(\xi_\imath\eta_\imath)^2 \\ & + (\mu + (\lambda + \nu_2)e_{RR} - (\beta + \beta_2)T)\,(\xi_\imath\xi_\imath)(\eta_\jmath\eta_\jmath) \\ & + 2\,((\lambda + \mu)v_{K,N} + 2(\nu_2 + \nu_3)e_{KN})\,(\xi_\imath\eta_\imath)\eta_K\xi_N \\ & + 2(\mu + \nu_3)\,((\xi_\imath\xi_\imath)\eta_K\eta_N + (\eta_\imath\eta_\imath)\xi_K\xi_N)\,e_{KN}. \end{aligned}$$

Si consideramos pequeñas deformaciones esféricas de la forma

$$v_A = X_A f(r), \qquad \text{donde} \qquad r = (X_A X_A)^{\frac{1}{2}},$$

entonces $e_{AB} = \delta_{AB} f + X_A X_B r^{-1} f'$ y $e_{KK} = 3f + rf'$. En este caso la desigualdad (2.50) se cumple siempre que se satisfagan las relaciones

$$E_1 \equiv k + (4k_2 + k_1)f(r) + rk_2 f'(r) + gT > 0,$$

$$E_1 + (k_1 + k_2)rf'(r) > 0.$$

La desigualdad (2.49) se satisface si

$$C_1 + C_1' + 2\big(\lambda + 3\mu + 2\nu_2 + 4\nu_3\big)f(r) > 0,$$

$$C_1 + C_1' + 2\big(\lambda + 3\mu + 2\nu_2 + 4\nu_3\big)\big(f(r) + rf'(r)\big) > 0,$$

$$C_1' + 4(\mu + \nu_3)f(r) > 0,$$

$$C_1' + 2(\mu + \nu_3)\big(2f(r) + rf'(r)\big) > 0,$$

donde

$$C_1 = \lambda + \mu + (\nu_1 + \nu_2)(3f(r) + rf'(r)) - (\beta_1 + \beta_2)T,$$

y

$$C_1' = \mu + (\lambda + \nu_2)(3f(r) + rf'(r)) - (\beta + \beta_2)T.$$

Si en vez de pequeñas deformaciones esféricas consideramos pequeñas deformaciones cilíndricas de la forma

$$v_\alpha = X_\alpha f(r), \quad v_3 = 0, \qquad \text{donde} \quad \alpha = 1,2, \quad \text{y} \quad r = (X_\alpha X_\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

tenemos $e_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f + X_\alpha X_\beta r^{-1} f'$, $e_{A3} = 0$ y $e_{\rho\rho} = 2f + rf'$. La desigualdad (2.50) se satisface si

$$E_2 \equiv k + (3k_2 + k_1) f(r) + rk_2 f'(r) + gT > 0,$$

$$k + k_2(2f + rf') + gT > 0,$$
$$E_2 T + (k_1 + k_2) r f'(r) > 0,$$

y la desigualdad (2.49) se cumple si

$$C_2 + C_2' + 2\big(\lambda + 3\mu + 2\nu_2 + 4\nu_3\big) f(r) > 0,$$

$$C_2 + C_2' + 2\big(\lambda + 3\mu + 2\nu_2 + 4\nu_3\big)\big(f(r) + rf'(r)\big) > 0,$$
$$C_2' + 4(\mu + \nu_3) f(r) > 0,$$
$$C_2' + 2(\mu + \nu_3)\big(2f(r) + rf'(r)\big) > 0,$$
$$C_2' + 4(\mu + \nu_3)\big(2f(r) + rf'(r)\big) > 0,$$

donde

$$C_2 = \lambda + \mu + (\nu_1 + \nu_2)(2f(r) + rf'(r)) - (\beta_1 + \beta_2)T,$$

y

$$C_2' = \mu + (\lambda + \nu_2)(2f(r) + rf'(r)) - (\beta + \beta_2)T.$$

Ahora, si consideramos pequeñas deformaciones de la forma

$$v_\alpha = 0, \ \alpha = 1,2, \qquad v_3 = f(X_1, X_2, X_3),$$

entonces $e_{KL} = \frac{1}{2}\big(\delta_{3K} f_{,L} + \delta_{3L} f_{,K}\big)$, y $e_{KK} = f_{,3}$. La desigualdad (2.50) se satiface si

$$k + k_2 f_{,3} + gT > 0,$$
$$k + k_2 f_{,3} - |k_1 + k_2| (f_{,K} f_{,K})^{1/2} + gT > 0.$$

La desigualdad (2.49) se cumple si

$$C_3' > 0,$$

$$C_3 + C_3' - 2|\nu_2 + \nu_3|(f_{,K}f_{,K})^{1/2} - 2|\mu + \nu_3|(f_{,K}f_{,K})^{1/2} > 0,$$
$$C_3 + C_3' - 2|\lambda + \mu + \nu_2 + \nu_3|(f_{,K}f_{,K})^{1/2} - 2|\mu + \nu_3|(f_{,K}f_{,K})^{1/2} > 0,$$
donde $C_3 = \lambda+\mu+(\nu_1+\nu_2)f_{,3}-(\beta_1+\beta_2)T$ y $C_3' = \mu+(\lambda+\nu_2)f_{,3}-(\beta+\beta_2)T$.

Para el caso más particular de deformación antiplana, $f(X_1, X_2, X_3) = f(X_1, X_2)$, las desigualdades (2.49) y (2.50) se satisfacen si

$$k + gT > 0,$$

$$k - |k_1 + k_2|(f_{,\alpha}f_{,\alpha})^{1/2} + gT > 0,$$
$$C_4' > 0,$$
$$C_4 + C_4' - 2|\nu_2 + \nu_3|(f_{,\alpha}f_{,\alpha})^{1/2} - 2|\mu + \nu_3|(f_{,\alpha}f_{,\alpha})^{1/2} > 0,$$
$$C_4 + C_4' - 2|\lambda + \mu + \nu_2 + \nu_3|(f_{,\alpha}f_{,\alpha})^{1/2} - 2|\mu + \nu_3|(f_{,\alpha}f_{,\alpha})^{1/2} > 0,$$
donde $C_4 = \lambda + \mu - (\beta_1 + \beta_2)T$ y $C_4' = \mu - (\beta + \beta_2)T$.

En el caso más simple de cizallamiento, $f(X_1, X_2, X_3) = \gamma X_1$, las desigualdades (2.49) y (2.50) se satisfacen si

$$k + gT > 0,$$

$$k - |k_1 + k_2|\gamma + gT > 0,$$
$$C_5' > 0,$$
$$C_5 + C_5' - 2|(\nu_2 + \nu_3)\gamma| - 2|(\mu + \nu_3)\gamma| > 0,$$
$$C_5 + C_5' - 2|(\lambda + \mu + \nu_2 + \nu_3)\gamma| - 2|(\mu + \nu_3)\gamma| > 0,$$
donde $C_5 = \lambda + \mu - (\beta_1 + \beta_2)T$ y $C_5' = \mu - (\beta + \beta_2)T$.

Capítulo 3

Materiales porosos

3.1 Introducción

En el año 1972 Goodman & Cowin [31] introdujeron el concepto de *fracción volúmica* para modelizar como medios continuos los materiales granulares y porosos. La idea consiste en suponer que la densidad del material se puede descomponer como producto de dos campos independientes, uno correspondiente a la densidad del material si éste no tuviera intersticios vacios y otro correspondiente a la *fracción volúmica* que se puede interpretar como el cociente entre el volumen que tendría cada partícula si no existieran intersticios vacíos y el volumen que ocupa realmente con ellos.

Usando este concepto Nunziato & Cowin [57] presentaron una teoría para describir el comportamiento de un material poroso con un esqueleto de material elástico e intersticios vacíos. Posteriormente Cowin & Nunziato [18] han obtenido algunos resultados para la teoría lineal. Otros resultados en la teoría lineal sin considerar efectos térmicos son los obtenidos por Puri & Cowin [61], Chandrasekharaiah & Cowin [8], Batra & Yang [3]. Ieşan & Quintanilla [43] han establecido resultados de decaimiento espacial y acotación de la energía para cilindros elásticos y porosos. Una interesante monografía sobre el tema de materiales porosos es la de Ciarletta & Ieşan [12].

Ieşan [36] ha estudiado la teoría lineal para materiales termoelásticos porosos estableciendo resultados de unicidad y diversos teoremas variacionales. Rusu [66] ha obtenido resultados de existencia y unicidad para esta teoría.

Por último hemos de reseñar que Ieşan [37] ha establecido las ecuaciones incrementales para materiales termoelásticos porosos.

El objeto de este capítulo es obtener resultados de existencia, unicidad y de dependencia continua de las soluciones respecto de parámetros iniciales y fuentes externas para la teoría incremental expuesta en [37]. El plan a seguir es, en primer lugar, establecer las ecuaciones de la teoría. Después obtendremos resultados de unicidad y dependencia continua para condiciones de frontera generales, utilizando el método de la energía. Por último, utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales obtendremos resultados de existencia, unicidad y de dependencia continua para condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

3.2 Ecuaciones básicas

3.2.1 Ecuaciones de la teoría de materiales porosos termoelásticos

Supongamos que en el instante inicial tenemos un cuerpo que ocupa una región Ω_0 del espacio tridimensional, con frontera $\partial\Omega_0$ suficientemente regular. Tomaremos como configuración de referencia la configuración del cuerpo en el estado inicial. El estado del cuerpo estará descrito respecto la configuración de referencia y un sistema fijo de coordenada cartesianas.

Denotaremos por X_A las coordenadas de una partícula respecto de dicho sistema de coordenadas y por x_i las coordenadas de una partícula en el instante t, siendo dichas coordenadas función de X_A y t.

La densidad para un material poroso podremos escribirla, en el instante t, como

$$\rho = \gamma\nu, \tag{3.1}$$

donde γ es la densidad del esqueleto del material y ν es la fracción volúmica $(0 < \nu \leq 1)$.

Al igual que en el capítulo anterior, V será una región arbitraria de superficie A en el instante t, y V_0 será su región correspondiente en el instante inicial con superficie A_0. Para derivar nuestras ecuaciones postularemos la conservación de la energía en cada instante t en la forma

$$\begin{aligned} &\int_{V_0} \rho_0(\dot{x}_i\ddot{x}_i + \kappa\dot{\nu}\ddot{\nu})dV_0 + \int_{V_0} \rho_0\dot{U}\,dV_0 \\ &= \int_{V_0} \rho_0(f_i\dot{x}_i + l\dot{\nu} + s)dV_0 + \int_{A_0} (p_i\dot{x}_i + h\dot{\nu} + q)dA_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde U es la energía interna por unidad de masa; f_i es la fuerza volúmica por unidad de masa; p_i es la fuerza superficial ejercida sobre la superficie A pero medida por unidad de área de A_0; s es la fuente de calor por unidad de masa y tiempo; q es el flujo de calor a través de la superficie A medido por unidad de área de A_0; y ρ_0 es la densidad en la configuración de referencia. κ es la inercia equilibrada, que depende de la geometría de los poros y se podría interpretar como la '*masa*' del poro. l es la fuerza volúmica extrínseca equilibrada por unidad de masa y se puede interpretar como una presión aplicada en la superficie interna del poro controlada exteriormente. h es la tensión equilibrada en la superficie A pero medida por unidad de área de A_0, y se puede interpretar como el flujo de poros que atraviesa la superficie.

Suponiendo invariancia de (3.2) bajo cambio de sistemas inerciales tenemos

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{x}_i \, dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 f_i \, dV_0 - \int_{A_0} p_i \, dA_0 = 0. \tag{3.3}$$

Utilizando la arbitrariedad de la región V y el teorema de Cauchy [34] tenemos

$$p_i = T_{Ai} n_A, \tag{3.4}$$

$$T_{Ai,A} + \rho_0 f_i = \ddot{x}_i, \tag{3.5}$$

siendo n_A el vector normal a la superficie A_0 y T_{Ai} el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

De forma análoga a (3.4) tenemos

$$(h - H_A n_A)\,\dot{\nu} + q - Q_A n_A = 0, \tag{3.6}$$

donde Q_A es el flujo de calor y H_A es la tensión equilibrada, que se puede interpretar como una interacción entre los poros.

Sustituyendo (3.4), (3.5) y (3.6) en (3.2), y utilizando otra vez la arbitrariedad del volumen V tenemos

$$\rho_0 \dot{U} = T_{Ai} \dot{x}_{i,A} + Q_{A,A} + H_A \dot{\nu}_{,A} - g\dot{\nu} + \rho_0 s, \tag{3.7}$$

siendo

$$g = \rho_0 \kappa \ddot{\nu} - H_{A,A} - \rho_0 l, \tag{3.8}$$

donde g es la fuerza intrínseca equilibrada, que se puede interpretar como una presión actuando sobre el poro que depende de su geometría, de las tensiones en el esqueleto y de las propiedades del esqueleto.

Como en el capítulo anterior, la conservación del momento angular se traduce en

$$T_{AB} = T_{BA}, \tag{3.9}$$

siendo T_{AB} el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff

$$T_{AB} = X_{B,i} T_{Ai}. \tag{3.10}$$

Con el objetivo de obtener relaciones entre las distintas ecuaciones constitutivas, es conveniente introducir la energía libre de Helmholtz $\Psi = U - T\eta$, donde T es la temperatura absoluta y η la entropía por unidad de masa y tiempo. Ahora podemos escribir la ecuación (3.7) como

$$\rho_0 \left(\dot{\Psi} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta}\right) = T_{AB}\dot{E}_{AB} + H_A \dot{\nu}_{,A} - g\dot{\nu} + Q_{A,A} + \rho_0 s, \tag{3.11}$$

donde

$$2E_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB}. \tag{3.12}$$

Definiremos un material termoelástico poroso como aquel cuyas ecuaciones constitutivas son de la forma

$$\begin{array}{ll} \Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), & T_{KL} = \hat{T}_{KL}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), \\ \eta = \hat{\eta}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), & Q_K = \hat{Q}_K\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), \\ g = \hat{g}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), & H_K = \hat{H}_K\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), \\ h = \hat{h}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right), & q = \hat{q}\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right). \end{array} \tag{3.13}$$

Nota 3.1 *Algunos autores consideran que estas cantidades dependen además de $\dot{\nu}$, con lo cual la deducción de las ecuaciones que sigue a continuación varía, y una primera consecuencia de dicha suposición es que las ecuaciones (3.14), (3.15) que siguen a continuación se han de postular.*

A partir de (3.6) y (3.13) se deduce

$$h = H_A n_A, \tag{3.14}$$

$$q = Q_A n_A. \tag{3.15}$$

La segunda ley de la termodinámica

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\eta}\, dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \frac{s}{T}\, dV_0 - \int \frac{q}{T}\, dA_0 \geq 0, \tag{3.16}$$

puede escribirse en forma local, utilizando (3.14) y (3.15):

$$\rho_0 T\dot{\eta} - \rho_0 s - Q_{A,A} + \frac{1}{T} Q_A T_{,A} \geq 0. \tag{3.17}$$

Si de la ecuación (3.11) aislamos s y la sustituimos en (3.17), entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas (3.13), se deduce

$$\begin{aligned}\left(T_{AB} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}}\right) \dot{E}_{AB} - \rho_0 \left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) \dot{T} + \left(H_A - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,A}}\right) \dot{\nu}_{,A} \\ -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,A}} \dot{T}_{,A} + \left(g + \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right) \dot{\nu} + \frac{1}{T} Q_A T_{,A} \geq 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Si adoptamos de nuevo la interpretación de Coleman & Noll [17] de la segunda ley de la termodinámica, entonces (3.18) ha de ser válido para todo $\dot{E}_{AB}$, $\dot{T}$, $\dot{\nu}_{,A}$, $\dot{T}_{,A}$ y $\dot{\nu}$. De aquí se deduce

$$\Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right), \tag{3.19}$$

$$T_{AB} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}}, \quad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad H_A = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,A}}, \quad g = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \tag{3.20}$$

y

$$Q_A T_{,A} \geq 0. \tag{3.21}$$

Nota 3.2 *Al igual que en el caso de materiales termoelásticos, Ψ no depende del gradiente de temperatura y, por lo tanto, T_{AB}, η, H_A y g tampoco.*

Considerando (3.19) y (3.20), la ecuación (3.11) se puede escribir

$$\rho_0 T\dot{\eta} = Q_{A,A} + \rho_0 s.$$

En este punto, las ecuaciones básicas de la teoría se pueden escribir como:

- la ecuación de la energía

$$\rho_0 T\dot{\eta} = Q_{A,A} + \rho_0 s, \tag{3.22}$$

- la ecuación del movimiento

$$\rho_0 \ddot{x}_i = T_{Ai,A} + \rho_0 f_i, \tag{3.23}$$

- la ecuación de balance de fuerzas equilibradas

$$\rho_0 \kappa \ddot{\nu} = H_{A,A} + g + \rho_0 l, \tag{3.24}$$

- las ecuaciones constitutivas

$$\Psi = \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right), \quad Q_K = \hat{Q}_K\left(E_{AB}, T, T_{,A}, \nu, \nu_{,A}\right)$$

$$T_{AB} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T},$$

$$H_A = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,A}}, \qquad g = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \tag{3.25}$$

- la ecuación geométrica

$$2E_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB}. \tag{3.26}$$

3.2.2 Ecuaciones de la teoría incremental de materiales porosos termoelásticos

Como ya hemos dicho, las teorías incrementales estudian las pequeñas deformaciones superpuestas a una gran deformación. Para establecer las ecuaciones de esta teoría es conveniente considerar dos estados más aparte del de la configuración de referencia: el estado primario Ω y el estado secundario Ω^*. Introduzcamos las cantidades incrementales (ver [46]) asociadas con las diferencias entre los estados secundario y primario. Si el punto $\mathbf{X} = [X_A]$ de Ω_0 se desplaza a $\mathbf{x} = [x_i]$ en Ω y a $\mathbf{x}^* = [x_i^*]$ en Ω^*, entonces $\mathbf{u} = [u_i] = [x_i^* - x_i]$ es el desplazamiento incremental; si T y T^* son las temperaturas absolutas asociadas con Ω y Ω^* entonces $\theta = T^* - T$ es la temperatura incremental y si ν y ν^* son la fracción volúmica en Ω y Ω^* respectivamente, entonces $\varphi = \nu^* - \nu$ es la fracción volúmica incremental.

Nuestro problema inmediato consiste en establecer las ecuaciones, condiciones iniciales y condiciones de frontera para u_i, θ, y φ cuando conocemos el estado primario y las fuentes externas en ambos estados, suponiendo que las cantidades u_i, θ, y φ son pequeñas. Para ello, necesitaremos calcular cuanto valen $T^*_{Ki} - T_{Ki}$, $\eta^* - \eta$, $g^* - g$ y $H^*_K - H_K$, que además de depender del gradiente del desplazamiento incremental y de la temperatura incremental también serán función de la fracción volúmica incremental y su gradiente.

A partir de la relación

$$x^*_{i,A} = x_{i,A} + u_{i,A} = x_{i,A} + u_{i,j}x_{j,A}, \tag{3.27}$$

despreciando términos de segundo orden, podemos escribir

$$E^*_{AB} = E_{AB} + \frac{1}{2}\left(x_{i,B}u_{i,A} + x_{i,A}u_{i,B}\right) = E_{AB} + e_{ij}x_{i,A}x_{j,B}, \tag{3.28}$$

siendo

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \tag{3.29}$$

Desarrollando por Taylor hasta primer orden tenemos

$$\begin{aligned}
\Psi^* =& \hat{\Psi}\left(E^*_{AB}, T^*, \nu^*, \nu^*_{,A}\right)\\
=& \hat{\Psi}\left(E_{AB} + e_{ij}x_{i,A}x_{j,B}, T + \theta, \nu + \varphi, \nu_{,A} + \varphi_{,A}\right)\\
=& \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right) + \frac{\partial \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right)}{\partial E_{AB}} e_{ij}x_{i,A}x_{j,B}\\
&+ \frac{\partial \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right)}{\partial T}\theta + \frac{\partial \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right)}{\partial \nu}\varphi\\
&+ \frac{\partial \hat{\Psi}\left(E_{AB}, T, \nu, \nu_{,A}\right)}{\partial \nu_{,A}}\varphi_{,A}\\
=& \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}} e_{ij}x_{i,A}x_{j,B} + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\theta + \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,A}}\varphi_{,A}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Introduciendo $\sigma = \rho_0\Psi$, podemos escribir

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial E^*_{KL}} = \frac{\partial \sigma}{\partial E_{KL}} + C_{KLMN}e_{ij}x_{i,M}x_{j,N} + D_{KLM}\varphi_{,M} + B_{KL}\varphi - \beta_{KL}\theta,$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial T^*} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \beta_{AB} e_{ij} x_{i,A} x_{j,B} - A_M \varphi_{,M} + B\varphi - A\theta,$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial \nu^*} = \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + B_{KL} e_{ij} x_{i,K} x_{j,L} + B_M \varphi_{,M} + \xi\varphi - B\theta, \tag{3.31}$$

donde

$$C_{KLMN} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial E_{MN}}, \quad D_{KLM} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial \nu_{,M}}, \quad B_{KL} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial \nu},$$

$$\beta_{KL} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{KL} \partial T}, \quad A_M = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T \partial \nu_{,M}}, \quad B = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T \partial \nu},$$

$$A = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2}, \quad A_{LM} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \nu_{,L} \partial \nu_{,M}}, \quad B_K = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \nu_{,K} \partial \nu}, \quad \xi = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \nu^2}. \tag{3.32}$$

Entonces,

$$T^*_{KL} - T_{KL} = C_{KLMN} x_{i,M} u_{i,N} + D_{KLM} \varphi_{,M} + B_{KL} \varphi - \beta_{KL} \theta,$$

$$\rho_0 \eta^* - \rho_0 \eta = \beta_{MN} x_{i,M} u_{i,N} + A_K \varphi_{,K} + B\varphi + A\theta,$$

$$g^* - g = -B_{LN} x_{i,L} u_{i,N} - B_K \varphi_{,K} - \xi\varphi + B\theta,$$

$$H^*_K - H_K = D_{MNK} x_{i,M} u_{i,N} + A_{KN} \varphi_{,N} + B_K \varphi - A_K \theta, \tag{3.33}$$

y teniendo en cuenta que

$$T^*_{Ai} = x^*_{i,B} T^*_{AB} = (x_{i,B} + u_{i,B})\, T^*_{AB} \tag{3.34}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} T^*_{Ki} = \big(x_{i,L} + u_{i,L}\big)\big(T_{KL} &+ C_{KLMN} x_{j,M} u_{j,N} \\ &+ D_{KLM} \varphi_{,M} + B_{KL} \varphi - \beta_{KL} \theta\big). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Despreciando términos de orden superior y utilizando la notación

$$C_{KijN} = C_{KLMN} x_{i,L} x_{j,M}, \quad D_{KiN} = D_{KMN} x_{i,M}, \tag{3.36}$$

$$B_{K\imath} = B_{KL}x_{\imath,L}, \qquad \beta_{K\imath} = \beta_{KL}x_{\imath,L}, \tag{3.37}$$

y

$$A_{K\imath\jmath N} = C_{K\imath\jmath N} + T_{KN}\delta_{\imath\jmath}, \tag{3.38}$$

tenemos

$$T^*_{K\imath} - T_{K\imath} = A_{K\imath\jmath N}u_{\jmath,N} + D_{K\imath M}\varphi_{,M} + B_{K\imath}\varphi - \beta_{K\imath}\theta.$$

$$\rho_0\eta^* - \rho_0\eta = \beta_{N\imath}u_{\imath,N} + A_K\varphi_{,K} + B\varphi + A\theta,$$

$$g^* - g = -B_{N\imath}u_{\imath,N} - B_K\varphi_{,K} - \xi\varphi + B\theta,$$

$$H^*_K - H_K = D_{N\imath K}u_{\imath,N} + A_{KN}\varphi_{,N} + B_K\varphi - A_K\theta. \tag{3.39}$$

Análogamente,

$$Q^*_A - Q_A = R_{AMN}x_{\imath,M}u_{\imath,N} + L_{AK}\varphi_{,K} + E_A\varphi + D_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}, \tag{3.40}$$

siendo

$$R_{AMN} = \frac{\partial Q_A}{\partial E_{MN}}, \quad D_A = \frac{\partial Q_A}{\partial T}, \quad K_{AL} = \frac{\partial Q_A}{\partial T_{,L}},$$

$$E_A = \frac{\partial Q_A}{\partial \nu}, \qquad L_{AM} = \frac{\partial Q_A}{\partial \nu_{,M}}. \tag{3.41}$$

Utilizando la notación

$$R_{A\imath N} = R_{AMN}x_{\imath,M} \tag{3.42}$$

podemos escribir

$$Q^*_A - Q_A = R_{A\imath N}u_{\imath,N} + L_{AK}\varphi_{,K} + E_A\varphi + D_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}. \tag{3.43}$$

Definiendo $P_{K\imath} = T^*_{K\imath} - T_{K\imath}$ primer tensor incremental de tensiones de Piola-Kirchhoff medido por unidad de área en Ω_0; $\gamma = \rho_0(\eta^* - \eta)$ entropía incremental medida por unidad de volumen en Ω_0; $\chi = g^* - g$ fuerza incremental volúmica intrínseca medida por unidad de volumen en Ω_0; $M_K = H^*_K - H_K$ tensión incremental equilibrada medida por unidad de área en Ω_0; $\Phi_A = Q^*_A - Q_A$ flujo incremental de calor medido por unidad de área en Ω_0; $F_\imath = f^*_\imath - f_\imath$ fuerza incremental volúmica; $L = l^* - l$ fuerza incremental extrínseca equilibrada; y $S = s^* - s$ fuente incremental de calor, las ecuaciones básicas de la teoría incremental lineal son:

- la ecuación de la energía

$$T\dot{\gamma} + \rho_0 \theta \dot{\eta} = \Phi_{A,A} + \rho_0 S, \tag{3.44}$$

- la ecuación del movimiento

$$P_{Ai,A} + \rho_0 F_i = \rho_0 \ddot{u}_i, \tag{3.45}$$

- la ecuación de balance de fuerzas equilibradas

$$M_{A,A} + \chi + \rho_0 L = \rho_0 \kappa \ddot{\varphi}, \tag{3.46}$$

- las ecuaciones constitutivas

$$P_{Ki} = A_{KijN} u_{j,N} + D_{KiM} \varphi_{,M} + B_{Ki} \varphi - \beta_{Ki} \theta,$$

$$\gamma = \beta_{Nj} u_{j,N} + A_K \varphi_{,K} + B\varphi + A\theta,$$
$$\chi = -B_{Nj} u_{j,N} - B_K \varphi_{,K} - \xi\varphi + B\theta,$$
$$M_K = D_{NiK} u_{i,N} + A_{KN} \varphi_{,N} + B_K \varphi - A_K \theta,$$

$$\Phi_A = R_{AjN} u_{j,N} + L_{AK} \varphi_{,K} + E_A \varphi + D_A \theta + K_{AM} \theta_{,M}. \tag{3.47}$$

Nota 3.3 *Los coeficientes constitutivos, A_{KijN}, D_{KiM}, B_{Ki}, β_{Ki}, A_K, B, A, B_K, ξ, A_{KN}, R_{AjN}, L_{AK}, E_A, D_A y K_{AM}, son funciones de la deformación temperatura y fracción volúmica del cuerpo en el estado primario. Además poseen las siguientes propiedades de simetría:*

$$A_{KijN} = A_{NjiK}, \quad A_{LN} = A_{NL}. \tag{3.48}$$

3.3 Descripción del problema e hipótesis

Substituyendo (3.47) en (3.44), (3.45) y (3.46) obtenemos:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\rho_0} \Big[A_{KijN} u_{j,N} + D_{KiM} \varphi_{,M} + B_{Ki} \varphi - \beta_{Ki} \theta \Big]_{,K} + F_i, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} =& \frac{1}{AT}\Big[R_{AjN}u_{j,N} + L_{AK}\varphi_{,K} + E_A\varphi + D_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}\Big]_{,A}\\ &- \frac{1}{A}\left(\dot{\beta}_{Nj}u_{j,N} + \dot{A}_K\varphi_{,K} + \dot{B}\varphi + \dot{A}\theta\right)\\ &- \frac{1}{A}\left(\beta_{Nj}\dot{u}_{j,N} + A_K\dot{\varphi}_{,K} + B\dot{\varphi}\right) - \frac{\rho_0\dot{\eta}}{AT}\theta + \frac{\rho_0 S}{AT},\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} =& \frac{1}{\rho_0\kappa}\Big[D_{KiN}u_{i,K} + A_{NK}\varphi_{,K} + B_N\varphi - A_N\theta\Big]_{,N}\\ &+ \frac{1}{\rho_0\kappa}\left(B\theta - B_{Nj}u_{j,N} - B_K\varphi_{,K} - \xi\varphi\right) + \frac{L}{\kappa},\end{aligned} \tag{3.51}$$

en $\Omega_0 \times [0, t_1]$.

Consideraremos las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, t) &= \tilde{u}_i(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_{\mathbf{u}} \times [0, t_1],\\ \varphi(\mathbf{X}, t) &= \tilde{\varphi}(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_{\varphi} \times [0, t_1],\\ \theta(\mathbf{X}, t) &= \tilde{\theta}(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_{\theta} \times [0, t_1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{Ki}(\mathbf{X}, t)n_K &= \tilde{P}_i(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\mathbf{u}} \times [0, t_1],\\ M_K(\mathbf{X}, t)n_K &= \tilde{M}(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\varphi} \times [0, t_1],\\ \Phi_K(\mathbf{X}, t)n_K &= \tilde{\Phi}(\mathbf{X}, t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\theta} \times [0, t_1],\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde n_K es la normal exterior a la superficie.

Añadiremos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) =& \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{X}), \quad \varphi(\mathbf{X}, 0) = \varphi_0(\mathbf{X}),\\ &\dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \psi_0(\mathbf{X}), \quad \theta(\mathbf{X}, 0) = \theta_0(\mathbf{X}), \qquad \text{en} \ \ \Omega_0,\end{aligned} \tag{3.53}$$

siendo $\mathbf{u}_0(\mathbf{X})$, $\mathbf{v}_0(\mathbf{X})$, $\varphi_0(\mathbf{X})$, $\psi_0(\mathbf{X})$, $\theta_0(\mathbf{X})$ funciones dadas.

Asumiremos que los coeficientes constitutivos son diferenciables con continuidad y sus valores son, para t fijo, medibles Lebesgue y esencialmente acotados. Además supondremos que:

(a) La densidad cumple

$$0 < \rho_1 \leq \operatorname{ess}\inf_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \leq \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \leq \rho_2.$$

(b) La inercia equilibrada verifica

$$0 < \kappa_1 \leq \operatorname{ess}\inf_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \kappa(\mathbf{X}) \leq \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \kappa(\mathbf{X}) \leq \kappa_2.$$

(c) La capacidad calorífica cumple

$$0 < A_0 \leq \operatorname{ess}\inf_{\mathbf{X}\in\Omega_0} A(\mathbf{X},t) \leq \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} A(\mathbf{X},t) \leq A_1.$$

(d) Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega_0)$ y todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0} \Big(A_{KijN} u_{i,K} u_{j,N} + A_{KN} \varphi_{,K} \varphi_{,N} + \xi \varphi^2 \\ &\qquad + 2D_{KiN} u_{i,K} \varphi_{,N} + 2B_{Ki} u_{i,K} \varphi + 2B_K \varphi_{,K} \varphi\Big)\, dV \\ &\geq \delta \int_{\Omega_0} (u_{i,K} u_{i,K} + \varphi_{,K} \varphi_{,K} + \varphi^2)\, dV.\end{aligned}$$

(e) Para todo $\theta \in C_0^\infty(\Omega_0)$, existe una constante $K > 0$, tal que

$$\frac{1}{T} \int_{\Omega_0} K_{AN} \theta_{,A} \theta_{,N} dV \geq K \int_{\Omega_0} \theta_{,K} \theta_{,K} dV. \tag{3.54}$$

Nota 3.4 *(a), (b) y (c) nos indican que la densidad, la inercia equilibrada y la capacidad calorífica son estrictamente positivas. (d) es semejante a las hipótesis usuales en el estudio de los problemas de elasticidad [50] y (e) hace referencia a que la conducción calorífica es positiva.*

3.4 Un resultado de unicidad de soluciones

En esta sección el objetivo será obtener un resultado de unicidad y dependencia continua, respecto de condiciones iniciales y fuentes externas, de las soluciones del problema general (3.49)-(3.53).

Para tal fin definimos $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$ como las diferencias entre dos soluciones al sistema (3.49)-(3.53) correspondientes a condiciones iniciales y fuentes externas diferentes, pero con condiciones de frontera iguales.

Sean $\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X})$, $\bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{X})$, $\bar{\varphi}_0(\mathbf{X})$, $\bar{\psi}_0(\mathbf{X})$, $\bar{\theta}_0(\mathbf{X})$ las diferencias entre dos sistemas distintos de condiciones iniciales y $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{L}$, $\bar{S}$ las diferencias entre dos sistemas diferentes de fuentes externas.

Debido a la linealidad de las ecuaciones es suficiente estudiar el problema

$$\ddot{\bar{u}}_i = \frac{1}{\rho_0}\Big[A_{KiJN}\bar{u}_{j,N} + D_{KiM}\bar{\varphi}_{,M} + B_{Ki}\bar{\varphi} - \beta_{Ki}\bar{\theta}\Big]_{,K} + \bar{F}_i,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}} =& \frac{1}{AT}\Big[R_{AjN}\bar{u}_{j,N} + L_{AK}\bar{\varphi}_{,K} + E_A\bar{\varphi} + D_A\bar{\theta} + K_{AM}\bar{\theta}_{,M}\Big]_{,A} \\
&- \frac{1}{A}\Big(\dot{\beta}_{Nj}\bar{u}_{j,N} + \dot{A}_K\bar{\varphi}_{,K} + \dot{B}\bar{\varphi} + \dot{A}\bar{\theta}\Big) \\
&- \frac{1}{A}\Big(\beta_{Nj}\dot{\bar{u}}_{j,N} + A_K\dot{\bar{\varphi}}_{,K} + B\dot{\bar{\varphi}}\Big) - \frac{\rho_0\dot{\eta}}{AT}\bar{\theta} + \frac{\rho_0\bar{S}}{AT},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{\varphi}} =& \frac{1}{\rho_0\kappa}\Big[D_{KiN}\bar{u}_{i,K} + A_{NK}\bar{\varphi}_{,K} + B_N\bar{\varphi} - A_N\bar{\theta}\Big]_{,N} \\
&+ \frac{1}{\rho_0\kappa}\Big(B\bar{\theta} - B_{Nj}\bar{u}_{j,N} - B_K\bar{\varphi}_{,K} - \xi\bar{\varphi}\Big) + \frac{\bar{L}}{\kappa},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

en $\Omega_0 \times [0, t_1]$, con condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i(\mathbf{X}, t) = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_{\mathbf{u}} \times [0, t_1], \\
\bar{\varphi}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_{\varphi} \times [0, t_1], \\
\bar{\theta}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_{\theta} \times [0, t_1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{Ki}(\mathbf{X}, t)n_K = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\mathbf{u}} \times [0, t_1], \\
\bar{M}_K(\mathbf{X}, t)n_K = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\varphi} \times [0, t_1], \\
\bar{\Phi}_K(\mathbf{X}, t)n_K = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\theta} \times [0, t_1],
\end{aligned} \tag{3.56}$$

y condiciones iniciales

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{X}), \quad \bar{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\varphi}_0(\mathbf{X}),$$

$$\dot{\bar{\varphi}}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\psi}_0(\mathbf{X}), \quad \bar{\theta}(\mathbf{X}, 0) = \bar{\theta}_0(\mathbf{X}), \qquad \text{en} \ \ \Omega_0. \tag{3.57}$$

Definamos la función

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Big[\rho_0\bar{v}_i\bar{v}_i+\rho_0\kappa\bar{\psi}^2+A(t)\bar{\theta}^2+A_{KijN}(t)\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}$$
$$+A_{KN}(t)\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}+\xi(t)\bar{\varphi}^2+2D_{KiN}(t)\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}_{,N}$$
$$+2B_K(t)\bar{\varphi}\bar{\varphi}_{,K}+2B_{Ki}(t)\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}\Big]dV, \tag{3.58}$$

que nos da una medida de la distancia entre soluciones.

Derivando respecto del tiempo y utilizando la fórmula de Green-Gauss, obtenemos

$$\dot{E}(t)=\int_{\Omega_0}\Big[\frac{K_{AM}T_{,A}-D_MT}{T^2}\bar{\theta}\bar{\theta}_{,M}-\frac{R_{AiN}}{T}\bar{u}_{i,N}\bar{\theta}_{,A}-\frac{K_{AM}}{T}\bar{\theta}_{,A}\bar{\theta}_{,M}$$
$$+\frac{E_AT_{,A}-\dot{B}T^2}{T^2}\bar{\theta}\bar{\varphi}-\frac{L_{AM}}{T}\bar{\theta}_{,A}\bar{\varphi}_{,M}$$
$$+\frac{R_{AiK}T_{,A}-\dot{\beta}_{Ki}T^2}{T^2}\bar{u}_{i,K}\bar{\theta}-\frac{E_A}{T}\bar{\theta}_{,A}\bar{\varphi}$$
$$+\frac{D_AT_{,A}-\dot{A}T^2-\rho_0T\dot{\eta}}{T^2}\bar{\theta}^2+\frac{L_{AM}T_{,A}-\dot{A}_MT^2}{T^2}\bar{\theta}\bar{\varphi}_{,M}\Big]dV$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Big(\dot{A}_{KijN}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}+\dot{A}_{KN}\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}+\dot{\xi}\bar{\varphi}^2$$
$$+2\dot{D}_{KiN}\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}_{,N}+2\dot{B}_{Ki}\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}+2\dot{B}_K\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}+\dot{A}\bar{\theta}^2\Big)dV$$
$$+\int_{\partial\Omega_0}\Big[\bar{P}_{Ki}\bar{v}_i+\bar{M}_K\bar{\psi}+\bar{\Phi}_K\frac{\bar{\theta}}{T}\Big]n_KdA$$
$$+\int_{\Omega_0}\rho_0\Big[\bar{F}_i\bar{v}_i+\bar{L}\bar{\psi}+\bar{S}\frac{\bar{\theta}}{T}\Big]dV. \tag{3.59}$$

La primera integral de (3.59), utilizando las desigualdades aritmético-geométrica y de Cauchy-Schwarz, se puede acotar por

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2\epsilon_1}+\frac{\epsilon_5}{2}\right)\int_{\Omega_0}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{i,K}\,dV$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1}{2}+\frac{\epsilon_2}{2}+\frac{\epsilon_3}{2}+\frac{\epsilon_4}{2}-K\right)\int_{\Omega_0}\bar{\theta}_{,K}\bar{\theta}_{,K}\,dV$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m_4}{2\epsilon_4}+\frac{\epsilon_8}{2}\right)\int_{\Omega_0}\bar{\varphi}_{,N}\bar{\varphi}_{,N}\,dV$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{2\epsilon_2}+\frac{m_5}{2\epsilon_5}+\frac{m_8}{2\epsilon_8}+m_6+\frac{\epsilon_7}{2}\right)\int_{\Omega_0}\bar{\theta}^2\,dV$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m_3}{2\epsilon_3}+\frac{m_7}{2\epsilon_7}\right)\int_{\Omega_0}\bar{\varphi}^2\,dV, \tag{3.60}$$

siendo ϵ_i constantes positivas arbitrarias, y

$$m_i = \max_{[0,t_1]} \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} M_i^2, \qquad i=1,\dots,8 \tag{3.61}$$

donde las distintas M_i vienen dadas por

$$M_1^2 = \frac{3R_{AiN}R_{AiN}}{T^2}, \qquad M_2^2 = \frac{(K_{AM}T_{,A}-D_MT)(K_{NM}T_{,N}-D_MT)}{T^4},$$
$$M_3^2 = \frac{E_AE_A}{T^2}, \qquad M_4^2 = \frac{3L_{AM}L_{AM}}{T^2},$$
$$M_5^2 = \frac{(R_{AiK}T_{,A}-\dot{\beta}_{Ki}T^2)(R_{NiK}T_{,N}-\dot{\beta}_{Ki}T^2)}{T^4},$$
$$M_6^2 = \frac{(D_AT_{,A}-\dot{A}T^2-\rho_0T\dot{\eta})^2}{T^4}, \qquad M_7^2 = \frac{(E_AT_{,A}-\dot{B}T^2)^2}{T^4},$$
$$M_8^2 = \frac{(L_{AM}T_{,A}-\dot{A}_MT^2)(L_{NM}T_{,N}-\dot{A}_MT^2)}{T^4}. \tag{3.62}$$

Para acotar la segunda integral de (3.59), podemos utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las desigualdades

$$\left|\int_{\Omega_0}\dot{A}_{KijN}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}\,dV\right| \le a_1\int_{\Omega_0}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{i,K}\,dV$$
$$\le \frac{a_1}{\delta}\int_{\Omega_0}A_{KijN}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}\,dV,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0} \dot{A}_{KN}\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}\, dV\right| \leq & a_2 \int_{\Omega_0} \bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,K}\, dV \\ \leq & \frac{a_2}{\delta}\int_{\Omega_0} A_{KN}\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}\, dV,\end{aligned}$$

$$\left|\int_{\Omega_0} \dot{\xi}\bar{\varphi}^2\, dV\right| \leq a_3 \int_{\Omega_0} \bar{\varphi}^2\, dV \leq \frac{a_3}{\delta}\int_{\Omega_0} \xi\bar{\varphi}^2 dV,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0} \dot{B}_{K}\bar{\varphi}\bar{\varphi}_{,K}\, dV\right| \leq & \frac{\epsilon_9 a_4}{2\delta}\int_{\Omega_0} \xi\bar{\varphi}^2\, dV \\ & + \frac{1}{2\epsilon_9\delta}\int_{\Omega_0} A_{KN}\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}\, dV,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0} \dot{D}_{KiN}\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}_{,N}\, dV\right| \leq & \frac{\epsilon_{10} a_5}{2\delta}\int_{\Omega_0} A_{KijN}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}\, dV \\ & + \frac{1}{2\epsilon_{10}\delta}\int_{\Omega_0} A_{KN}\bar{\varphi}_{,K}\bar{\varphi}_{,N}\, dV,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0} \dot{B}_{Ki}\bar{u}_{i,K}\bar{\varphi}\, dV\right| \leq & \frac{\epsilon_{11}}{2\delta}\int_{\Omega_0} A_{KijN}\bar{u}_{i,K}\bar{u}_{j,N}\, dV \\ & + \frac{a_6}{2\epsilon_{11}\delta}\int_{\Omega_0} \xi\bar{\varphi}^2\, dV,\end{aligned} \tag{3.63}$$

donde

$$a_1^2 = \max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} 9\dot{A}_{KijN}\dot{A}_{KijN}, \quad a_2^2 = \max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} 3\dot{A}_{KN}\dot{A}_{KN},$$

$$a_3^2 = \max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{\xi}^2, \quad a_4 = \max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{B}_K\dot{B}_K,$$

$$a_5 = 9\max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{D}_{KiN}\dot{D}_{KiN}, \quad a_6 = \max_{[0,t_1]} \text{ess} \sup_{\mathbf{X}\in\Omega_0} \dot{B}_{Ki}\dot{B}_{Ki}. \tag{3.64}$$

Entonces, utilizando las condiciones de frontera, podemos acotar la derivada de $E(t)$ por

$$\dot{E}(t) \leq (C_1 + 2C_2)E(t) + \int_{\Omega_0} \rho_0 \left[\bar{F}_i \bar{v}_i + \bar{L}\bar{\psi} + \bar{S}\frac{\bar{\theta}}{T} \right] dV. \tag{3.65}$$

Si aplicamos la desigualdad de Hölder tenemos

$$\dot{E}(t) \leq 2K_1 E(t) + 2K_2 E^{1/2}(t) G(t), \tag{3.66}$$

donde K_1 y K_2 son constantes positivas y

$$G(t) = \left(\int_{\Omega_0} \left[\rho_0 \bar{F}_i \bar{F}_i + \frac{\rho_0}{\kappa} \bar{L}^2 + \frac{\rho_0^2}{AT^2} \bar{S}^2 \right] dV \right)^{1/2}. \tag{3.67}$$

Si fijamos $s \in [0, t_1]$ e integramos sobre el intervalo $[0, \tau]$, $\tau \in [0, s]$, se tiene

$$E(\tau) \leq E(0) + 2K_1 \int_0^\tau E(t)dt + 2K_2 \int_0^\tau G(t) E^{1/2}(t) dt. \tag{3.68}$$

Necesitaremos el siguiente lema [22]:

Lema 3.1 *Supongamos que las funciones $f(t) \in L^\infty[0, s]$ y $g(t) \in L^1[0, s]$ son no negativas y cumplen la desigualdad*

$$f^2(\tau) \leq M^2 f^2(0) + \int_0^\tau \left[(2\alpha + 4\beta\tau) f^2(t) + 2Ng(t)f(t) \right] dt, \qquad \tau \in [0, s]$$

donde α, β, M y N son constantes no negativas. Entonces

$$f(s) \leq e^{\eta s + \beta s^2} \left[M f(0) + N \int_0^s g(t) dt \right],$$

siendo $\eta = \alpha + \beta/\alpha$,

Utilizando este lema podemos concluir

$$E^{1/2}(s) \leq \left[E^{1/2}(0) + K_2 \int_0^s G(t) dt \right] e^{K_1 s}. \tag{3.69}$$

Nota 3.5 *La desigualdad anterior es un resultado de dependencia continua, respecto de las condiciones iniciales y fuentes externas.*

Teorema 3.1 *Supongamos que se cumplen las hipótesis (3.54). Entonces, el problema (3.49)-(3.53) tiene, a lo sumo, una solución.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones; utilizando (3.69) tenemos para su diferencia $E(t)=0$, de donde se deduce, conjuntamente con (3.54), que:

$$\bar{\theta}=0, \qquad \bar{\varphi}=0, \qquad \bar{v}_i=0.$$

De esta última igualdad se sigue que $\bar{u}_i$ es constante, y como las condiciones iniciales son las mismas, concluimos $\bar{u}_i=0$. □

3.5 Un resultado de existencia de soluciones

En esta sección trabajaremos con un caso particular de las condiciones de frontera (3.52):

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t)=0, \quad \varphi(\mathbf{X},t)=0, \quad \theta(\mathbf{X},t)=0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega_0\times[0,t_1], \tag{3.70}$$

Para obtener el resultado buscado transformaremos nuestro problema (3.49)-(3.51), (3.70), (3.53) en un problema abstracto en un espacio de Hilbert adecuado.

Consideremos el elemento $\omega=(\mathbf{u},\mathbf{v},\varphi,\psi,\theta)$ donde $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t)=\mathbf{v}(\mathbf{X},t)$ y $\dot{\varphi}(\mathbf{X},t)=\psi(\mathbf{X},t)$.

Denotaremos por $\mathcal{X}$ el espacio $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)\times\mathbf{L}^2(\Omega_0)\times W_0^{1,2}(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0)$, donde $\mathbf{L}^2(\Omega_0)=[L^2(\Omega_0)]^3$ y $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)=[W_0^{1,2}(\Omega_0)]^3$ siendo $W_0^{1,2}(\Omega_0)$ los usuales espacios de Sobolev [1].

Para alcanzar nuestro cometido definimos los operadores:

$$\mathcal{B}_i(\mathbf{u})=\frac{1}{\rho_0}\Big[A_{KijN}u_{j,N}\Big]_{,K}, \qquad \mathcal{B}=(\mathcal{B}_i),$$

$$\mathcal{C}_i(\varphi)=\frac{1}{\rho_0}\Big[D_{KiM}\varphi_{,M}+B_{Ki}\varphi\Big]_{,K}, \qquad \mathcal{C}=(\mathcal{C}_i),$$

$$\mathcal{D}_i(\theta)=-\frac{1}{\rho_0}\Big[\beta_{Ki}\theta\Big]_{,K}, \qquad \mathcal{D}=(\mathcal{D}_i),$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho_0\kappa}\Big(\big[D_{KiA}u_{i,K}\big]_{,A} - B_{Nj}u_{j,N}\Big),$$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{\rho_0\kappa}\Big(\big[A_{LK}\varphi_{,K} + B_L\varphi\big]_{,L} - B_K\varphi_{,K} - \xi\varphi\Big),$$

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{-1}{\rho_0\kappa}\Big(\big[A_K\theta\big]_{,K} - B\theta\Big),$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \frac{1}{AT}\big[R_{AjN}u_{j,N}\big]_{,A} - \frac{1}{A}\dot{\beta}_{Nj}u_{j,N},$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{A}\beta_{Nj}v_{j,N},$$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{AT}\Big[L_{AK}\varphi_{,K} + E_A\varphi\Big]_{,A} - \frac{\dot{A}_K}{A}\varphi_{,K} - \frac{\dot{B}}{A}\varphi,$$

$$\mathcal{M}(\psi) = -\frac{A_K}{A}\psi_{,K} - \frac{B}{A}\psi,$$

$$\mathcal{N}(\theta) = \frac{1}{AT}\Big[D_A\theta + K_{AM}\theta_{,M}\Big]_{,A} - \frac{\dot{A}}{A}\theta - \frac{\rho_0\dot{\eta}}{AT}\theta. \tag{3.71}$$

Sea $\mathcal{A}$ el operador sobre $\mathcal{X}$ definido por

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B} & 0 & \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} \\ 0 & 0 & 0 & Id & 0 \\ \mathcal{E} & 0 & \mathcal{F} & 0 & \mathcal{G} \\ \mathcal{H} & \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta) \in \mathcal{X} \mid \mathcal{A}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \varphi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{X}\}.$$

Para posterior uso es conveniente hacer notar que $D(\mathcal{A}) = \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega_0) \times W_0^{1,2} \times W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega_0)$ es denso en $\mathcal{X}$.

Ahora ya estamos en condiciones de escribir nuestro problema como una ecuación de evolución abstracta en el espacio de Hilbert $\mathcal{X}$,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \\ 0 \\ \frac{L}{\kappa} \\ \frac{\rho_0 S}{AT} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, t_1],$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{v}(0) \\ \varphi(0) \\ \psi(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \varphi_0 \\ \psi_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

Con objeto de demostrar la existencia de solución de la ecuación (3.73), definimos para cada t el producto escalar en $\mathcal{X}$

$$\begin{aligned} &\langle(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\rangle_t \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \Big[A_{KiJN} u_{i,K} \tilde{u}_{j,N} + A_{KN} \varphi_{,K} \tilde{\varphi}_{,N} + \xi \varphi \tilde{\varphi} + A\theta\tilde{\theta} \\ &\qquad + D_{KiN}(\tilde{u}_{i,K}\varphi_{,N} + u_{i,K}\tilde{\varphi}_{,N}) + B_K(\tilde{\varphi}\varphi_{,K} + \varphi\tilde{\varphi}_{,K}) \\ &\qquad + B_{Ki}(\tilde{u}_{i,K}\varphi + u_{i,K}\tilde{\varphi}) + \rho_0 v_i \tilde{v}_i + \rho_0 \kappa \psi \tilde{\psi}\Big] dV. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Nota 3.6 *Debido a las hipótesis (a)-(e), es un simple cálculo comprobar que la norma inducida por este producto escalar es equivalente a la usual de $\mathcal{X}$.*

Para obtener el resultado de existencia, objetivo de esta sección, serán necesarios algunos resultados previos.

Lema 3.2 *Existe una constante $C_1 > 0$ tal que para todo $\omega \in D(\mathcal{A})$, se cumple*

$$\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle_t \leq C_1 \langle \omega, \omega\rangle_t.$$

Demostración. Utilizando la fórmula de Green-Gauss y las condiciones de frontera tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle_t =& \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{K_{AM}T_{,A} - D_M T}{T^2}\theta\theta_{,M} dV \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{R_{AiN}}{T} u_{i,N}\theta_{,A} dV - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{K_{AM}}{T}\theta_{,A}\theta_{,M} dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{E_A T_{,A} - \dot{B}T^2}{T^2}\theta\varphi\, dV - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{L_{AM}}{T}\theta_{,A}\varphi_{,M} dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{D_A T_{,A} - \dot{A}T^2 - \rho_0 T\dot{\eta}}{T^2}\theta^2 dV - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{E_A}{T}\theta_{,A}\varphi dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{L_{AM}T_{,A} - \dot{A}_M T^2}{T^2}\theta\varphi_{,M} dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{R_{AiK}T_{,A} - \dot{\beta}_{Ki}T^2}{T^2} u_{i,K}\theta\, dV.
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

Procediendo igual que en (3.60), se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle_t \leq& \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_5}{2}\right)\int_{\Omega_0} u_{i,K}u_{i,K}\, dV \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_3}{2} + \frac{\epsilon_4}{2} - K\right)\int_{\Omega_0} \theta_{,K}\theta_{,K}\, dV \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{m_4}{2\epsilon_4} + \frac{\epsilon_8}{2}\right)\int_{\Omega_0} \varphi_{,N}\varphi_{,N}\, dV \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{2\epsilon_2} + \frac{m_5}{2\epsilon_5} + \frac{m_8}{2\epsilon_8} + m_6 + \frac{\epsilon_7}{2}\right)\int_{\Omega_0} \theta^2\, dV \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{m_3}{2\epsilon_3} + \frac{m_7}{2\epsilon_7}\right)\int_{\Omega_0} \varphi^2\, dV,
\end{aligned}
$$

siendo ϵ_i constantes positivas arbitrarias, y m_i constantes definidas anteriormente por (3.61) y (3.62).

Si tomamos ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y ϵ_4 tales que $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - 2K \leq 0$ entonces tenemos

$$
\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle_t \leq C_1\langle \omega, \omega\rangle_t, \tag{3.76}
$$

siendo

$$C_1 = \frac{1}{2}\max\left\{\frac{m_1}{2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_5}{2},\ \frac{m_4}{2\epsilon_4} + \frac{\epsilon_8}{2},\ \frac{m_3}{2\epsilon_3} + \frac{m_7}{2\epsilon_7},\right.$$
$$\left.\frac{m_2}{2\epsilon_2} + \frac{m_5}{2\epsilon_5} + \frac{m_8}{2\epsilon_8} + m_6 + \frac{\epsilon_7}{2}\right\}. \quad \square$$

Lema 3.3 *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el operador $\mathcal{A}$ satisface*

$$\mathrm{Rang}(\lambda \mathbf{Id} - \mathcal{A}) = \mathcal{X}.$$

Demostración. Sea $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\theta}) \in \mathcal{X}$; debemos demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\lambda \mathbf{u} - \mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}},$$
$$\lambda \mathbf{v} - \mathcal{B}\mathbf{u} - \mathcal{C}\varphi - \mathcal{D}\theta = \hat{\mathbf{v}},$$
$$\lambda\varphi - \psi = \hat{\varphi},$$
$$\lambda\psi - \mathcal{E}\mathbf{u} - \mathcal{F}\varphi - \mathcal{G}\theta = \hat{\psi},$$

$$(\lambda - \mathcal{N})\theta - \mathcal{H}\mathbf{u} - \mathcal{K}\mathbf{v} - \mathcal{L}\varphi - \mathcal{M}\psi = \hat{\theta}, \tag{3.77}$$

tiene solución en $D(\mathcal{A})$.

Si sustituimos la primera y tercera ecuación en las otras y dividimos la última por λ obtenemos el sistema reducido

$$\tilde{\mathcal{A}}_\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}} + \lambda\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\psi} + \lambda\hat{\varphi} \\ \frac{\hat{\theta} - \mathcal{K}\hat{\mathbf{u}} - \mathcal{M}\hat{\varphi}}{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

donde

$$\tilde{\mathcal{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2\mathbf{Id} - \mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{E} & \lambda^2 Id - \mathcal{F} & -\mathcal{G} \\ -\frac{\mathcal{H}}{\lambda} - \mathcal{K} & -\frac{\mathcal{L}}{\lambda} - \mathcal{M} & Id - \frac{\mathcal{N}}{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

Consideremos el siguiente producto escalar

$$\langle (\mathbf{u}, \varphi, \theta), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) \rangle = \int_{\Omega_0} (\rho_0 u_i \tilde{u}_i + A\theta\tilde{\theta} + \rho_0 \kappa\varphi\tilde{\varphi})\, dV, \tag{3.80}$$

y definamos la forma bilineal

$$B_\lambda[(\mathbf{u},\varphi,\theta),(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\varphi},\tilde{\theta})] = \langle \tilde{A}_\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}, (\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\varphi},\tilde{\theta})\rangle. \tag{3.81}$$

Análogamente a (3.75), (3.60) obtenemos

$$\begin{aligned}
&B_\lambda[(\mathbf{u},\varphi,\theta),(\mathbf{u},\varphi,\theta)] \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\rho_0\lambda^2 u_i u_i + A_{KijN}u_{i,K}u_{j,N} + A_{KN}\varphi_{,K}\varphi_{,N}\right. \\
&\quad \left. +2B_K\varphi\varphi_{,K} + 2D_{KiN}u_{i,K}\varphi_{,N} + 2B_{Ki}u_{i,K}\varphi + (\rho_0\kappa\lambda^2+\xi)\varphi^2\right] dV \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_0}\left\{\theta\left[\dot{\beta}_{iK}u_{i,K} + \dot{A}_K\varphi_{,K} + \dot{B}\varphi\right] + \left[\frac{\rho_0\dot{\eta}}{T} + \dot{A} + \lambda A\right]\theta^2\right. \\
&\quad \left. + \left[R_{AiN}u_{i,N} + D_A\theta + K_{AM}\theta_{,M} + E_A\varphi + L_{AM}\varphi_{,M}\right]\left(\frac{\theta}{T}\right)_{,A}\right\}dV \\
&\geq \int_{\Omega_0}\rho_0\lambda^2 u_i u_i dV + \int_{\Omega_0}\rho_0\kappa\lambda^2\varphi^2 dV \\
&\quad + \left(\delta - \frac{m_1}{2\lambda\epsilon_1} - \frac{\epsilon_5}{2\lambda}\right)\int_{\Omega_0} u_{i,K}u_{i,K}\,dV \\
&\quad + \left(A_0 - \frac{m_2}{2\lambda\epsilon_2} - \frac{m_5}{2\lambda\epsilon_5} - \frac{m_8}{2\lambda\epsilon_8} - \frac{m_6}{\lambda} - \frac{\epsilon_7}{2\lambda}\right)\int_{\Omega_0}\theta^2\,dV \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4 - 2K)\int_{\Omega_0}\theta_{,K}\theta_{,K}\,dV \\
&\quad + \left(\delta - \frac{m_3}{2\lambda\epsilon_3} - \frac{m_7}{2\lambda\epsilon_7}\right)\int_{\Omega_0}\varphi^2\,dV \\
&\quad + \left(\delta - \frac{m_4}{2\lambda\epsilon_4} - \frac{\epsilon_8}{2\lambda}\right)\int_{\Omega_0}\varphi_{,N}\varphi_{,N}\,dV.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Si tomamos ahora ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y ϵ_4 tales que $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4 < 2K$ y λ suficientemente grande, entonces

$$B_\lambda[(\mathbf{u},\varphi,\theta),(\mathbf{u},\varphi,\theta)] \geq C_3\|(\mathbf{u},\varphi,\theta)\|^2_{\mathbf{W}_0^{1,2}\times W_0^{1,2}\times W_0^{1,2}}.$$

Por lo tanto B_λ determina una norma que es equivalente a la usual en $\mathbf{W}_0^{1,2}\times W_0^{1,2}\times W_0^{1,2}$.

Mediante un simple cálculo podemos comprobar que

$$\left(\hat{\mathbf{v}}+\lambda\hat{\mathbf{u}},\hat{\psi}+\lambda\hat{\varphi},\frac{\hat{\theta}-\mathcal{K}\hat{\mathbf{u}}-\mathcal{M}\hat{\varphi}}{\lambda}\right)\in\mathbf{W}^{-1,2}\times W^{-1,2}\times W^{-1,2}.$$

Sea $\mathbf{y}\in\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$, entonces

$$\int_{\Omega_0}\rho_0(\hat{v}_i+\lambda\hat{u}_i)y_i dV\leq\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\|\hat{\mathbf{v}}+\lambda\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)}<\infty.$$

Sea $y\in W_0^{1,2}(\Omega_0)$, entonces

$$\int_{\Omega_0}\rho_0\kappa(\hat{\psi}+\lambda\hat{\varphi})y\,dV\leq\|y\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\|\hat{\psi}+\lambda\hat{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)}<\infty.$$

Por último si $y\in W_0^{1,2}(\Omega_0)$, entonces

$$\int_{\Omega_0}\frac{A\hat{\theta}+\beta_{Ki}\hat{u}_{i,K}+A_K\hat{\varphi}_K+B\hat{\varphi}}{\lambda}y\,dV$$
$$\leq\|y\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\left\|\frac{A\hat{\theta}+\beta_{Ki}\hat{u}_{i,K}+A_K\hat{\varphi}_K+B\hat{\varphi}}{\lambda}\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)}<\infty.$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema de Riesz según el cual podemos afirmar que existe una única solución $(\mathbf{u},\varphi,\theta)\in\mathbf{W}_0^{1,2}\times W_0^{1,2}\times W_0^{1,2}$ del sistema (3.53). Por lo tanto, de la primera y tercera ecuacion de (3.77) tenemos que $\mathbf{v}\in\mathbf{W}_0^{1,2}$ y $\psi\in W_0^{1,2}$. □

Como consecuencia de los lemas 3.2 y 3.3, y teniendo en cuenta que el dominio de operador $\mathcal{A}$ es denso, el corolario de Lumer-Phillips del teorema de Hille-Yosida nos permite enunciar el siguiente resultado:

Teorema 3.2 *Para cada $t\in[0,t_1]$, el operador $\mathcal{A}$ es el generador de un semigrupo cuasi-contractivo.*

Lema 3.4 *Existe una constante $C_2>0$ tal que*

$$\frac{\|\omega\|_t}{\|\omega\|_s}\leq\exp(C_2t_1)\tag{3.83}$$

es válido para todo $\omega\in\mathcal{X}$ y todo t, $s\in[0,t_1]$.

Demostración. Definimos, para cada t, $h(t) \equiv \|\cdot\|_t^2$, donde $\|\cdot\|_t$ es la norma inducida por el producto escalar (3.74). Si derivamos $h(t)$, obtenemos

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \Big(\dot{A}_{KijN}u_{i,K}u_{j,N} + \dot{A}_{KN}\varphi_{,K}\varphi_{,N} + \dot{\xi}\varphi^2 + \dot{A}\theta^2$$
$$+ 2\dot{D}_{KiN}u_{i,K}\varphi_{,N} + 2\dot{B}_{Ki}u_{i,K}\varphi + 2\dot{B}_K\varphi_{,K}\varphi\Big)dV. \qquad (3.84)$$

Utilizando (3.63) y (3.64) podemos escribir

$$\dot{h}(t) \leq 2C_2 h(t), \qquad (3.85)$$

e integrando (3.85) entre s y t se obtiene

$$h(t) \leq h(s)\exp(2C_2|t-s|) \leq h(s)\exp(2C_2 t_1);$$

entonces

$$\frac{\|\omega\|_t}{\|\omega\|_s} \leq \exp(C_2 t_1).\Box$$

Teorema 3.3 *La familia de operadores $\{\mathcal{A}(t),\ t \in [0,t_1]\}$ con $\mathcal{A}$ definido por (3.71), (3.72) es estable en el sentido de Kato con constantes de estabilidad $\Gamma = e^{2C_2t_1}$ y C_1.*

Teorema 3.4 *Supongamos que las hipótesis (3.54) se cumplen. Supongamos también que*

$$\mathbf{F} \in C^1([0,t_1],\mathbf{L}^2(\Omega_0)) \cap C^0([0,t_1],\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)),$$
$$\frac{\rho_0 S}{AT} \in C^1([0,t_1],L^2(\Omega_0)) \cap C^0([0,t_1],W^{2,2}(\Omega_0)),$$
$$\frac{L}{\kappa} \in C^1([0,t_1],L^2(\Omega_0)) \cap C^0([0,t_1],W_0^{1,2}(\Omega_0) \cap W^{2,2}(\Omega_0)).$$

Entonces, para todo

$$(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0,\varphi_0,\psi_0,\theta_0) \in D(\mathcal{A})$$

existe una única solución

$$(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t),\varphi(t),\psi(t),\theta(t)) \in C^1([0,t_1],\mathcal{X}) \cap C^0([0,t_1],D(\mathcal{A}))$$

que satisface la ecuación (3.73).

Nota 3.7 *El último teorema y la nota 3.5 nos permiten afirmar que, si las hipótesis sobre los coeficientes se cumplen, entonces el problema (3.49)-(3.51), (3.70), (3.53) de la termoelasticidad incremental para materiales porosos es un problema bien puesto.*

Capítulo 4

Materiales porosos viscoelásticos

4.1 Introducción

En los capítulos anteriores, las ecuaciones constitutivas del material solamente dependían del estado en cada instante del cuerpo. En algunos materiales, su evolución también depende de sus estados pasados o historia.

A partir de ahora nos centraremos en el estudio de materiales que presentan comportamientos no totalmente elásticos. Dicho comportamiento se verá reflejado en las ecuaciones constitutivas, que ya no serán funciones de las variables independientes, sino que serán funcionales que dependerán tanto del valor de las variables independientes en el instante actual como del valor de dichas variables en el pasado.

En este capítulo extenderemos los resultados obtenidos anteriormente a materiales porosos viscoelásticos, y dejaremos para el próximo el estudio de los materiales termoelásticos con memoria.

Para el caso de materiales porosos viscoelásticos algunos resultados previos han sido obtenidos por Ciarletta & Scalia [13], quienes en su trabajo demuestran unicidad y dependencia continua de soluciones para la teoría lineal de materiales porosos viscoelásticos homogéneos. En un trabajo posterior Ciarletta [11] obtiene un teorema variacional y otro de reciprocidad, también para el mismo problema.

Primero describiremos el espacio de las historias y el concepto de memoria olvidadiza (fading memory). A continuación, siguiendo los pasos de Day [23], escribiremos las ecuaciones constitutivas . Una vez descrito el problema, obtendremos un resultado de unicidad de soluciones. Por último, obtendremos un resultado de existencia de soluciones para condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, y estudiaremos su comportamiento asintótico.

4.2 Historias y memoria olvidadiza

Dada una función ϕ definida en $\mathbb{R}$, y $t \in \mathbb{R}$, definimos la historia ϕ^t como

$$\phi^t(s) = \phi(t-s), \qquad 0 \leq s < \infty.$$

ϕ^t recibe el nombre de historia de ϕ hasta el instante t. La restricción de ϕ^t a $\mathbb{R}^{++}$ recibe el nombre de historia pasada de ϕ hasta el instante t y se denota por ${}_r\phi^t$,

$${}_r\phi^t(s) = \phi(t-s), \qquad 0 < s < \infty.$$

Evidentemente, para toda historia se cumple $\phi^t(0) = \phi(t)$.

Un sistema con memoria es un sistema en el cual ciertas cantidades, u, están determinadas mediante funcionales, $\mathcal{T}$, de un conjunto de historias ϕ^t

$$u(t) = \mathcal{T}\left(\phi^t\right). \tag{4.1}$$

Es habitual la hipótesis consistente en suponer que el material "olvida", o sea, que los valores de $\phi^t(s)$ cuando s es próximo a cero son los más importantes para determinar el comportamiento de u.

Para describir matemáticamente esta hipótesis es necesario definir una topología para el dominio del funcional $\mathcal{T}$.

Si $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{++}$, $h(0) = 1$, es monótonamente decreciente para s grandes, de forma que para $\alpha > 1$ se tiene $\lim\limits_{s\to\infty} s^\alpha h(s) = 0$, diremos que h es una función de influencia de orden α. Es conveniente observar que h es integrable.

El espacio de las historias con función de influencia h estará formado por las historias ϕ^t tal que

$$\|\phi^t\|_h = \left(\int_0^\infty |\phi^t(s)|^2 h(s) ds\right)^{1/2} < \infty. \tag{4.2}$$

Este espacio es un espacio de Banach con la norma (4.2).

Si definimos el producto escalar

$$\langle \phi_1^t, \phi_2^t \rangle_h = \int_0^\infty \phi_1^t(s) \cdot \phi_2^t(s) h(s) ds,$$

tendremos un espacio de Hilbert que denotaremos por S_h.

Principio débil de memoria olvidadiza: Existe una función de influencia h de orden $\alpha > 1$ tal que el funcional (4.1) está definido y es continuo para las historias ϕ^t pertenecientes a un entorno de la historia nula ($\phi^t(s) = 0$) en el espacio S_h.

En este caso la hipótesis de memoria olvidadiza se traduce en la continuidad de $\mathcal{T}$ en la topología inducida por (4.2).

Principio fuerte de memoria olvidadiza: Existe una función de influencia h de orden $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, tal que el funcional (4.1) está definido y es n veces diferenciable Fréchet para las historias ϕ^t pertenecientes a un entorno de la historia nula ($\phi^t(s) = 0$) en el espacio S_h.

Ahora la hipótesis de memoria olvidadiza se traduce en la diferenciabilidad de $\mathcal{T}$ en la topología inducida por (4.2).

La descripción de medios continuos requiere funcionales que dependen explícitamente del estado presente, además de la dependencia en la historia del medio. Por ello es conveniente trabajar en espacios más detallados que S_h.

Sea h una función de influencia y sea ${}_r\mathcal{H}$ el espacio de Banach

$${}_r\mathcal{H} = \left\{ {}_r\phi^t ; \int_0^\infty |{}_r\phi^t(s)|^2 h(s) ds < \infty \right\},$$

con norma

$$||{}_r\phi^t||_r = \int_0^\infty |{}_r\phi^t(s)|^2 h(s) ds.$$

Si definimos el producto escalar

$$\left({}_r\phi_1^t, {}_r\phi_2^t \right) = \int_0^\infty {}_r\phi_1^t(s) \cdot {}_r\phi_2^t(s)\, h(s) ds,$$

el espacio ${}_r\mathcal{H}$ adquiere estructura de espacio de Hilbert.

El producto escalar para las historias

$$\left(\phi_1^t, \phi_2^t\right) = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t) + \int_0^\infty \phi_1^t(s) \cdot \phi_2^t(s)\, h(s) ds,$$

provee al conjunto $\mathcal{H}$ de las historias de norma finita de una estructura de espacio de Hilbert, que recibe el nombre de espacio de memoria olvidadiza (fading memory space).

Si $\mathcal{T}$ es un funcional definido en $\mathcal{H}$, lineal $\big($ i.e. $\mathcal{T}(c_1\phi_1^t + c_2\phi_2^t) = c_1\mathcal{T}(\phi_1^t) + c_2\mathcal{T}(\phi_2^t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\big)$ y acotado $\big($ i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|\mathcal{T}(\phi^t)| \leq M\|\phi^t\|\ \forall\phi^t \in \mathcal{H}\big)$ entonces el teorema de Riesz nos permite afirmar que existe $\varphi^t \in \mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{T}(\phi^t) = \left(\varphi^t, \phi^t\right),$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{T}(\phi^t) = \varphi^t(0) \cdot \phi^t(0) + \int_0^\infty \varphi^t(s) \cdot \phi^t(s) h(s) ds, \tag{4.3}$$

para toda historia $\phi^t \in \mathcal{H}$.

Si definimos $H(s) = \varphi^t(s)h(s)$ y tenemos en cuenta que $h(0) = 1$, entonces podemos escribir (4.3) como

$$\mathcal{T}(\phi^t) = H(0) \cdot \phi(t) + \int_0^\infty H(s) \cdot \phi^t(s) ds. \tag{4.4}$$

Es usual definir G tal que $G'(s) = \dfrac{\partial G(s)}{\partial s} = H(s)$ y $G(0) = H(0)$. La solución

$$G(s) = G(0) + \int_0^\infty H(\tau) d\tau,$$

recibe el nombre de función de relajación. Con esta notación la ecuación (4.4) se escribe

$$\mathcal{T}(\phi^t) = \mathcal{T}(\phi(t), {}_r\phi^t) = G(0) \cdot \phi(t) + \int_0^\infty G'(s) \cdot \phi^t(s) ds.$$

Por último, diremos que un funcional $\mathcal{T}(\phi(t), {}_r\phi^t)$ es continuamente diferenciable si

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\phi(t) + \varphi(t), {}_r\phi^t + {}_r\varphi^t) =& \mathcal{T}(\phi(t), {}_r\phi^t) + \frac{\partial \mathcal{T}(\phi(t), {}_r\phi^t)}{\partial \phi}\varphi(t) \\ &+ \frac{\delta \mathcal{T}(\phi(t), {}_r\phi^t|{}_r\varphi^t)}{\delta\, {}_r\phi^t} + o\left(|\varphi(t)| + \|{}_r\varphi^t\|\right),\end{aligned}$$

donde $\dfrac{\partial\mathcal{T}(\phi(t),\, {}_r\phi^t)}{\partial\phi}$ es continuo y $\dfrac{\delta\mathcal{T}(\phi(t),\, {}_r\phi^t|_r\varphi^t)}{\delta\, {}_r\phi^t}$ es el diferencial de Fréchet continuo en $\phi(t)$ y ${}_r\phi^t$, y lineal en ${}_r\varphi^t$.

Una descripción más detallada sobre los conceptos de espacio de historias y memoria olvidadiza se puede encontrar en [15, 16, 27].

4.3 Inversión temporal y ecuaciones constitutivas

Veamos ahora la forma que adoptan las ecuaciones constitutivas para la teoría de materiales porosos viscoelásticos lineales como consecuencia de la hipótesis de invariancia del trabajo realizado bajo inversiones temporales.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre los cuales hay definidos sendos productos escalares. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$ y S el espacio de endomorfismos simétricos sobre $\mathcal{U}$.

Definimos un proceso cerrado con inicio en el estado natural como un triplete de la forma

$$\wp(\cdot) = [\mathbf{e}(\cdot), \phi(\cdot), \boldsymbol{\varphi}(\cdot)],$$

donde cada elemento del triplete es una función continua y diferenciable a trozos, con soporte compacto. En particular, $\mathbf{e}(\cdot) : \mathbb{R} \to S$ es el tensor de deformaciones, $\phi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la fracción volúmica y $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ es el gradiente de la deformación volúmica.

El proceso inverso $\tilde{\wp}(\cdot)$ de $\wp(\cdot)$ viene dado por $\tilde{\wp}(t) = \wp(-t)$ y también es un proceso cerrado con inicio en el estado natural.

El trabajo realizado en un proceso $\wp(\cdot)$ es

$$\omega(\wp(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathbf{t}(t)\cdot\dot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{h}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - g(t)\dot{\phi}(t)\Big)dt,$$

donde $\mathbf{t}(t)$ es el tensor de tensiones, $\mathbf{h}(t)$ es la tensión equilibrada y $g(t)$ es la fuerza intrínseca equilibrada.

Lema 4.1 *Sea* $\mathbf{A} : [0,\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *continua y acotada, y* $\mathbf{f}$ *una función* *continua y diferenciable a trozos, de soporte compacto. Sea*

$$\mathcal{F}(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{f}}(t) \cdot \mathbf{A}(t-s) \cdot \dot{\mathbf{f}}(s) ds dt.$$

Entonces

$$\mathcal{F}(\mathbf{f}) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{f}})$$

para toda función $\mathbf{f}$ *continua y diferenciable a trozos de soporte compacto, si y solamente si,* $\mathbf{A}(t)$ *es simétrico para todo* $t > 0$.

La demostración de este lema se puede encontrar en [23].

Veamos ahora las consecuencias de imponer invariancia bajo inversión temporal del trabajo realizado en un proceso cerrado con inicio en el estado natural, i. e.

$$\omega\left(\wp(\cdot)\right) = \omega\left(\tilde{\wp}(\cdot)\right).$$

Supongamos que nuestras ecuaciones constitutivas se pueden escribir de la forma:

$$\mathbf{t}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\mathbf{G}(t-s) \cdot \dot{\mathbf{e}}(s) + \mathbf{B}_1(t-s)\dot{\phi}(s) + \mathbf{D}_1(t-s) \cdot \dot{\varphi}(s) \right] ds,$$

$$\mathbf{h}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\mathbf{D}_2(t-s) \cdot \dot{\mathbf{e}}(s) + \mathbf{d}_1(t-s)\dot{\phi}(s) + \mathbf{A}(t-s) \cdot \dot{\varphi}(s) \right] ds,$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\mathbf{B}_2(t-s) \cdot \dot{\mathbf{e}}(s) + b(t-s)\dot{\phi}(s) + \mathbf{d}_2(t-s) \cdot \dot{\varphi}(s) \right] ds, \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{G}(\cdot)$, $\mathbf{B}_1(\cdot)$, $\mathbf{D}_1(\cdot)$, $\mathbf{D}_2(\cdot)$, $\mathbf{d}_1(\cdot)$, $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}_2(\cdot)$, $b(\cdot)$ y $\mathbf{d}_2(\cdot)$ son funciones continuas y acotadas.

Teorema 4.1 *El trabajo realizado en un proceso cerrado con inicio en el estado natural es invariante bajo inversión temporal, si y solamente si,*

(i) $\mathbf{G}(\cdot)$ *es simétrico,*

(ii) $\mathbf{A}(\cdot)$ *es simétrico,*

(iii) $\mathbf{B}_1(\cdot) = -\mathbf{B}_2^T(\cdot)$,

(iv) $\mathbf{D}_1(\cdot) = \mathbf{D}_2^T(\cdot)$,

(v) $\mathbf{d}_1(\cdot) = -\mathbf{d}_2^T(\cdot)$.

Demostración. Sea $\Lambda = [\mathbf{t}, \boldsymbol{\varphi}, \phi]$ y

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(t) & \mathbf{D}_1(t) & \mathbf{B}_1(t) \\ \mathbf{D}_2(t) & \mathbf{A}(t) & \mathbf{d}_1(t) \\ -\mathbf{B}_2(t) & -\mathbf{d}_2(t) & b(t) \end{pmatrix},$$

entonces

$$\omega(\wp(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\Lambda}(t) \cdot \mathbf{M}(t-s) \cdot \dot{\Lambda}(s)\, ds dt,$$

y el teorema es consecuencia inmediata del lema anterior.□

4.4 Ecuaciones básicas

Consideremos un cuerpo que en el instante t_0 ocupa una región regular Ω_0 del espacio euclideo tridimensional con frontera $\partial\Omega_0$ suficientemente regular. El movimiento del cuerpo estará descrito respecto de un sistema rectangular de coordenadas Ox_i.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de los materiales porosos viscoelásticos lineales son [18], la ecuación del movimiento

$$\rho \ddot{u}_i = t_{ij,j} + f_i,$$

y la ecuación de balance de fuerzas equilibradas

$$\rho\kappa\ddot{\phi} = h_{j,j} + g + L, \tag{4.6}$$

las ecuaciones constitutivas

$$t_{ij} = \int_{-\infty}^{t} [G_{ijrs}(t-s)\dot{e}_{rs}(s) + B_{ij}(t-s)\dot{\phi}(s) + D_{ijr}(t-s)\dot{\phi}_{,r}(s)]ds,$$

$$h_i = \int_{-\infty}^{t} [D_{rsi}(t-s)\dot{e}_{rs}(s) + D_i(t-s)\dot{\phi}(s) + A_{ij}(t-s)\dot{\phi}_{,j}(s)]ds,$$

$$g = -\int_{-\infty}^{t} [B_{ij}(t-s)\dot{e}_{ij}(s) + b(t-s)\dot{\phi}(s) + D_i(t-s)\dot{\phi}_{,i}(s)]ds, \tag{4.7}$$

y la ecuación geométrica

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \tag{4.8}$$

en Ω_0.

Aquí, t_{ji} es el tensor de tensiones; f_i es la fuerza por unidad de volumen; ρ es la densidad en la configuración de referencia; $\mathbf{u} = (u_i)$ es el desplazamiento; h_i es la tensión equilibrada; g es la fuerza intrínseca equilibrada equilibrada; L es la fuerza extrínseca equilibrada; ϕ es la diferencia entre la fracción volúmica actual y la de la configuración de referencia y κ es la inercia equilibrada.

Las funciones de relajación satisfacen las simetrías

$$G_{ijrs} = G_{rsij}, \qquad D_{ijr} = D_{jir}, \qquad A_{ij} = A_{ji}, \qquad B_{ij} = B_{ji}. \tag{4.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones de evolución obtenemos

$$\rho\ddot{u}_i = f_i + \Big[\int_{-\infty}^{t} [G_{ijrs}(t-s)\dot{e}_{rs}(s) + B_{ij}(t-s)\dot{\phi}(s) + D_{ijr}(t-s)\dot{\phi}_{,r}(s)]ds\Big]_{,j},$$

$$\begin{aligned}\rho\kappa\ddot{\phi} = L + \Big[\int_{-\infty}^{t} [D_{rsi}(t-s)\dot{e}_{rs}(s) + D_i(t-s)\dot{\phi}(s) + A_{ij}(t-s)\dot{\phi}_{,j}(s)]ds\Big]_{,i}\\ - \int_{-\infty}^{t} [B_{ij}(t-s)\dot{e}_{ij}(s) + b(t-s)\dot{\phi}(s) + D_i(t-s)\dot{\phi}_{,i}(s)]ds.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Utilizando la notación

$$t_{kl}n_k = t_l, \qquad h_k n_k = h,$$

podemos expresar las condiciones de frontera de la forma

$$\begin{aligned} u_i = \tilde{u}_i \ \text{ en } \ \partial\Omega_{\mathbf{u}}, \qquad & t_l = \tilde{t}_l \ \text{ en } \ \partial\Omega_{\mathbf{t}} = \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\mathbf{u}},\\ \phi = \tilde{\phi} \ \text{ en } \ \partial\Omega_{\phi}, \qquad & h = \tilde{h} \ \text{ en } \ \partial\Omega_h = \partial\Omega_0 - \partial\Omega_{\phi}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Consideraremos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, -s) = \mathbf{z}^0(\mathbf{x}, s), \qquad & \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}),\\ \phi(\mathbf{x}, -s) = \alpha^0(\mathbf{x}, s), \qquad & \dot{\phi}(\mathbf{x}, 0) = \psi^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.5 Un resultado de unicidad de soluciones

El objetivo de esta sección es obtener un resultado de unicidad de soluciones para el problema (4.10)-(4.12). El resultado será válido para una clase de materiales diferente a la considerada por Ciarletta & Scalia [13].

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{K}$ and $\mathcal{W}$ las funciones definidas por

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\int_{\Omega_0}\Big(& G_{ijrs}(2t-\tau-z)\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{e}_{rs}(z)\\ &+ A_{ij}(2t-\tau-z)\dot{\phi}_{,i}(\tau)\dot{\phi}_{,j}(z)\\ &+ b(2t-\tau-z)\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}(z)\\ &+ D_{ijr}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ D_k(2t-\tau-z)(\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{\phi}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ B_{ij}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}(\tau))\Big)dV d\tau dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{2t}\int_{-\infty}^{0}\int_{\Omega_0}\Big(& G_{ijrs}(2t-\tau-z)\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{e}_{rs}(z)\\ &+ A_{ij}(2t-\tau-z)\dot{\phi}_{,i}(\tau)\dot{\phi}_{,j}(z)\\ &+ b(2t-\tau-z)\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}(z)\\ &+ D_{ijr}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ D_k(2t-\tau-z)(\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{\phi}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ B_{ij}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}(\tau))\Big)dV d\tau dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(t) = \int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{s}\int_{\Omega_0}\Big(& \dot{G}_{ijrs}(2s-\tau-z)\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{e}_{rs}(z)\\ &+ \dot{A}_{ij}(2s-\tau-z)\dot{\phi}_{,i}(\tau)\dot{\phi}_{,j}(z)\\ &+ \dot{b}(2s-\tau-z)\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}(z)\\ &+ \dot{D}_{ijr}(2s-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ \dot{D}_k(2s-\tau-z)(\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z)+\dot{\phi}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\ &+ \dot{B}_{ij}(2s-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}(z)+\dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}(\tau))\Big)dV d\tau dz ds,\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho\kappa\dot{\phi}\dot{\phi})dV,$$

$$\mathcal{W}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \Big(\rho \dot{u}_i(0)\dot{u}_i(2t) + \rho\kappa\dot{\phi}(0)\dot{\phi}(2t)\Big)dV. \tag{4.13}$$

Lema 4.2 *Si*

$$\mathcal{L}(r,s) = \int_{\Omega_0} \Big(\rho f_i(r)\dot{u}_i(s) + \rho\kappa L(r)\dot{\phi}(s)\Big)dV + \int_{\partial\Omega_0} \Big(t_i(r)\dot{u}_i(s) + h(r)\dot{\phi}(s)\Big)ds,$$

para todo $r, s \in [0,\infty)$. *Entonces*

$$\mathcal{U}(t) - \mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [\mathcal{L}(t+s, t-s) - \mathcal{L}(t-s, t+s)]ds + \mathcal{J}(t) - \mathcal{W}(t).$$

Demostración: Si definimos

$$\mathcal{H}(r,s) = t_{ji}(r)\dot{e}_{ji}(s) + h_i(r)\dot{\phi}_i(s) - g(r)\dot{\phi}(s).$$

tenemos la relación

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t-s, t+s) - \mathcal{H}(t+s, t-s)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int_{-\infty}^{t-s}\int_{-\infty}^{t+s} \Big(G_{ijrs}(2t-\tau-z)\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{e}_{rs}(z)\\
&\qquad + A_{ij}(2t-\tau-z)\dot{\phi}_{,i}(\tau)\dot{\phi}_{,j}(z)\\
&\qquad + b(2t-\tau-z)\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}(z)\\
&\qquad + D_{ijr}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z) + \dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\
&\qquad + D_k(2t-\tau-z)(\dot{\phi}(\tau)\dot{\phi}_{,r}(z) + \dot{\phi}(z)\dot{\phi}_{,r}(\tau))\\
&\qquad + B_{ij}(2t-\tau-z)(\dot{e}_{ij}(\tau)\dot{\phi}(z) + \dot{e}_{ij}(z)\dot{\phi}(\tau))\Big)d\tau dz\Big].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

De las ecuaciones de evolución se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(r,s) =& [t_{ji}(r)\dot{u}_i(s) + h_j(r)\dot{\phi}(s)]_{,j}\\
&- [\rho\ddot{u}_i(r) - f_i(r)]\dot{u}_i(s) - [\rho\kappa\ddot{\phi}(r) - L(r)]\dot{\phi}(s),
\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t-s,t+s)dV \\
&\quad =\mathcal{L}(t-s,t+s) \\
&\qquad + \frac{d}{ds}\Big[\int_{\Omega_0} \big(\rho\dot{u}_i(t-s)\dot{u}_i(t+s) + \rho\kappa\dot{\phi}(t-s)\dot{\phi}(t+s)\big)dV\Big] \\
&\qquad - \int_{\Omega_0} \big(\rho\dot{u}_i(t-s)\ddot{u}_i(t+s) + \rho\kappa\dot{\phi}(t-s)\ddot{\phi}(t+s)\big)dV.
\end{aligned}$$

Integrando entre 0 y t,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\Omega_0} [\mathcal{H}(t-s,t+s) - \mathcal{H}(t+s,t-s)]dVds \\
&\qquad = -2\mathcal{K}(t) + \int_0^t [\mathcal{L}(t-s,t+s) - \mathcal{L}(t+s,t-s)]ds \\
&\qquad\quad + \int_{\Omega_0} \Big(\rho\dot{u}_i(0)\dot{u}_i(2t) + \rho\kappa\dot{\phi}(0)\dot{\phi}(2t)\Big)dV.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ahora, de (4.14) deducimos

$$\int_0^t \int_{\Omega_0} [\mathcal{H}(t-s,t+s) - \mathcal{H}(t+s,t-s)]dVds = 2\mathcal{J}(t) - 2\mathcal{U}(t). \tag{4.16}$$

De las igualdades (4.15) y (4.16) se obtiene el resultado deseado. □

Lema 4.3 *Si $\mathcal{P}(t) = \mathcal{L}(t,t)$, entonces*

$$\begin{aligned}
2\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(0) + \mathcal{K}(0) + \mathcal{D}(t) + \mathcal{J}(t) - \mathcal{W}(t) + \int_0^t \mathcal{P}(s)ds \\
- \frac{1}{2}\int_0^t [\mathcal{L}(t-s,t+s) - \mathcal{L}(t+s,t-s)]ds,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

y

$$\begin{aligned}
2\mathcal{K}(t) = \mathcal{U}(0) + \mathcal{K}(0) + \mathcal{D}(t) - \mathcal{J}(t) + \mathcal{W}(t) + \int_0^t \mathcal{P}(s)ds \\
+ \frac{1}{2}\int_0^t [\mathcal{L}(t-s,t+s) - \mathcal{L}(t+s,t-s)]ds,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

para todo $t \in [0,\infty)$.

Demostración: Mediante un cálculo directo podemos comprobar que

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t,t)dV = \dot{\mathcal{U}}(t) - \dot{\mathcal{D}}(t),$$

y

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t,t)dV = \mathcal{P}(t) - \dot{\mathcal{K}}(t).$$

Igualando las expresiones anteriores e integrando,

$$\mathcal{U}(t) + \mathcal{K}(t) = \mathcal{U}(0) + \mathcal{K}(0) + \int_0^t \mathcal{P}(s)ds + \mathcal{D}(t).$$

De esta relación, conjuntamente con el lema 4.2, se obtiene el resultado deseado.□

Ahora ya estamos en situación de obtener el resultado de unicidad de soluciones, objetivo de esta sección.

Teorema 4.2 *Supongamos que:*

(a) *La densidad y la inercia equilibrada son estrictamente positivas*

$$0 < \rho_1 \leq \operatorname{ess} \inf_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \leq \operatorname{ess} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_2,$$

$$0 < \kappa_1 \leq \operatorname{ess} \inf_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \kappa(\mathbf{x}) \leq \operatorname{ess} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \kappa(\mathbf{x}) \leq \kappa_2.$$

(b) *Las funciones de relajación satisfacen las simetrías*

$$G_{ijrs} = G_{rsij}, \qquad D_{ijr} = D_{jir}, \qquad A_{ij} = A_{ji}, \qquad B_{ij} = B_{ji}.$$

(c) *La desigualdad*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{s} \Big(& \dot{G}_{ijrs}(2s-\tau-z)e_{ij}(\tau)e_{rs}(z) + \dot{A}_{ij}(2s-\tau-z)\psi_i(\tau)\psi_j(z) \\
&+ \dot{b}(2s-\tau-z)\phi(\tau)\phi(z) \\
&+ \dot{D}_{ijr}(2s-\tau-z)(e_{ij}(\tau)\psi_r(z) + e_{ij}(z)\psi_r(\tau)) \\
&+ \dot{D}_k(2s-\tau-z)(\phi(\tau)\psi_k(z) + \phi(z)\psi_k(\tau)) \\
&+ \dot{B}_{ij}(2s-\tau-z)(e_{ij}(\tau)\phi(z) + e_{ij}(z)\phi(\tau))\Big)d\tau dz \leq 0,
\end{aligned}$$

se cumple para todo tensor simétrico e_{ij}, todo vector ψ_i y todo escalar ϕ en $C^1(-\infty,\infty)$.

Entonces el problema determinado por las ecuaciones (4.6),(4.7), las condiciones de frontera (4.11) y las condiciones iniciales (4.12) tiene, a lo sumo, una solución.

Demostración: Supongamos que existen dos soluciones y sea $(\bar{u}_i, \bar{\phi})$ su diferencia. Evidentemente, $(\bar{u}_i, \bar{\phi})$ es solución del problema (4.6),(4.7) con condiciones iniciales nulas.

Por lo tanto, de la ecuación (4.18) deducimos

$$\int_{\Omega_0} \left(\rho \dot{\bar{u}}_i \dot{\bar{u}}_i + \rho \kappa \dot{\bar{\phi}}^2 \right) dV - \bar{\mathcal{D}}(t) = 0.$$

La hipótesis (a) nos permite concluir que $\bar{u}_i = 0$ y $\bar{\phi} = 0$.□

Nota 4.1 *Un ejemplo de funciones, para materiales centrosimétricos e isótropos, que verifican la hipótesis (c) es*

$$G_{ijrs}(s) = \left[\lambda \delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})\right]\left[e^{-s} - k_1\right],$$

$$A_{ij}(s) = \alpha\delta_{ij}\left[e^{-s} - k_2\right], \quad B_{ij}(s) = \beta\delta_{ij}\left[e^{-s} - k_3\right], \quad b(s) = b\left[e^{-s} - k_4\right],$$

siendo k_i constantes y λ, μ, α, β y b independientes de s, tales que

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad b \geq 0, \quad |\beta| \leq 3\lambda + 2\mu + b.$$

Nota 4.2 *Ciarletta & Scalia [13] obtienen un resultado de unicidad de soluciones bajo la hipótesis de que la forma cuadrática*

$$G_{ijrs}(0)\xi_{ij}\xi_{rs} + A_{ij}(0)\eta_i\eta_j + b(0)\gamma^2 + 2D_{ijr}(0)\xi_{ij}\eta_r + 2B_{ij}(0)\xi_{ij}\gamma + 2D_i(0)\eta_i\gamma,$$

es definida positiva.

4.6 Un resultado de existencia de soluciones

En esta sección trabajaremos con un caso particular de las condiciones de frontera (4.11):

$$\mathbf{u} = 0, \quad \phi = 0, \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_0 \times [0, \infty). \tag{4.19}$$

Para obtener nuestro resultado de existencia necesitaremos las hipótesis:

(i) La densidad ρ y la inercia equilibrada κ son estrictamente positivas.

(ii) Existe una constante positiva, c_0, tal que

$$\int_{\Omega_0}\Big(G_{ijrs}(\infty)u_{i,j}u_{r,s}+A_{ij}(\infty)\phi_{,j}\phi_{,i}+b(\infty)\phi^2+2D_{ijr}(\infty)u_{i,j}\phi_{,r}$$
$$+2D_r(\infty)\phi\phi_{,r}+2B_{ij}(\infty)u_{i,j}\phi\Big)dV$$
$$\geq c_0\int_{\Omega_0}\Big(u_{i,j}u_{i,j}+\phi_{,i}\phi_{,i}+\phi^2\Big)dV, \tag{4.20}$$

para todo $\mathbf{u}\in[C_0^\infty(\Omega_0)]^3$ y todo $\phi\in C_0^\infty(\Omega_0)$.

(iii) Existe una función positiva, $\delta(s)$, tal que

$$\int_{\Omega_0}\Big(\ddot{G}_{ijrs}(s)u_{i,j}u_{r,s}+\ddot{A}_{ij}(s)\phi_{,i}\phi_{,j}+\ddot{b}(s)\phi^2+2\ddot{D}_{ijr}(s)u_{i,j}\phi_{,r}$$
$$+2\ddot{D}_k(s)\phi\phi_{,r}+2\ddot{B}_{ij}(s)u_{i,j}\phi\Big)dV$$
$$\geq \delta(s)\int_{\Omega_0}\Big(u_{i,j}u_{i,j}+\phi_{,r}\phi_{,r}+\phi^2\Big)dV, \tag{4.21}$$

para todo $\mathbf{u}\in[C_0^\infty(\Omega_0)]^3$ y todo $\phi\in C_0^\infty(\Omega_0)$.

(iv)

$$\dot{G}_{ijrs}(\infty)=\dot{A}_{ij}(\infty)=\dot{b}(\infty)=\dot{D}_{ijr}(\infty)=\dot{D}_k(\infty)=\dot{B}_{ij}(\infty)=0. \tag{4.22}$$

Nota 4.3 *Las hipótesis (iii) y (iv) implican la existencia de una función positiva, $\delta_1(s)$, tal que*

$$-\int_{\Omega_0}\Big(\dot{G}_{ijrs}(s)u_{i,j}u_{r,s}+\dot{A}_{ij}(s)\phi_{,i}\phi_{,j}+2\dot{D}_{ijr}(s)u_{i,j}\phi_{,r}+2\dot{D}_k(s)\phi\phi_{,r}$$
$$+2\dot{B}_{ij}(s)u_{i,j}\phi+\dot{b}(s)\phi^2\Big)dV\geq\delta_1(s)\int_{\Omega_0}\Big(u_{i,j}u_{i,j}+\phi_{,r}\phi_{,r}+\phi^2\Big)dV, \tag{4.23}$$

para todo $\mathbf{u}\in[C_0^\infty(\Omega_0)]^3$ y todo $\phi\in C_0^\infty(\Omega_0)$. Esta desigualdad nos permitirá afirmar que el producto escalar que definiremos sea positivo.

Una forma alternativa para escribir las ecuaciones constitutivas (4.7) nos permite expresar el sistema (4.10) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\rho\ddot{u}_i =& f_i + \Big[G_{ijrs}(0)u_{r,s} + B_{ij}(0)\phi + D_{ijr}(0)\phi_{,r}\\ &+ \int_0^\infty [\dot{G}_{ijrs}(s)u_{r,s}(t-s) + \dot{B}_{ij}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_{ijr}(s)\phi_{,r}(t-s)]ds\Big]_{,j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\kappa\ddot{\phi} =& L + \Big[D_{rsi}(0)u_{r,s} + D_i(0)\phi + A_{ij}(0)\phi_{,j}\\ &+ \int_0^\infty [\dot{D}_{rsi}(s)u_{r,s}(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi(t-s) + \dot{A}_{ij}(s)\phi_{,j}(t-s)]ds\Big]_{,i}\\ &- B_{ij}(0)u_{i,j} - b(0)\phi - D_i(0)\phi_{,i}\\ &- \int_0^\infty [\dot{B}_{ij}(s)u_{i,j}(t-s) + \dot{b}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi_{,i}(t-s)]ds. \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Como antes, para obtener el resultado de existencia de soluciones transformaremos el problema definido por las ecuaciones (4.24) con condiciones iniciales (4.12) y condiciones de frontera (4.19) en un problema abstracto de evolución en un espacio de Hilbert adecuado.

Consideremos un elemento de la forma

$$\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha),$$

siendo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, $\psi = \dot{\phi}$, $\mathbf{z}(s) = \mathbf{u}(t-s)$, y $\alpha(s) = \phi(t-s)$.

Definamos

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 = \big\{&(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha); \mathbf{u} \in [C_0^\infty(\Omega_0)]^3,\ \mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega_0)]^3,\\ &\phi \in C_0^\infty(\Omega_0), \psi \in [C_0^\infty(\Omega_0)]^3, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_1, \alpha \in \mathcal{H}_2\big\},\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{H}_1 = \big[C_0^\infty([0,\infty), \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0))\big]^3,$$

$$\mathcal{H}_2 = C_0^\infty\big([0,\infty), \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)\big),$$

aquí $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) = [W_0^{1,2}(\Omega_0)]^3$, y $\mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0) = [W^{2,2}(\Omega_0)]^3$ siendo $W_0^{1,2}(\Omega_0)$, y $W^{2,2}(\Omega_0)$ espacios de Sobolev [1].

Denotaremos por $\mathcal{Z}$ el espacio completado de $\mathcal{Z}_0$ a la norma inducida por el producto escalar

$$
\begin{aligned}
&\langle(\mathbf{u},\mathbf{v},\phi,\psi,\mathbf{z},\alpha),(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*,\phi^*,\psi^*,\mathbf{z}^*,\alpha^*)\rangle\\
&=\int_{\Omega_0}\Big(G_{ijrs}(\infty)u_{i,j}u^*_{r,s}+A_{ij}(\infty)\phi^*_{,j}\phi_{,i}+b(\infty)\phi\phi^*\\
&\qquad+D_{ijr}(\infty)(u_{i,j}\phi^*_{,r}+u^*_{i,j}\phi_{,r})+D_r(\infty)(\phi\phi^*_{,r}+\phi^*\phi_{,r})\\
&\qquad+B_{ij}(\infty)(u_{i,j}\phi^*+u^*_{i,j}\phi)+\rho v_iv^*_i+\rho\kappa\psi\psi^*\Big)dV\\
&\quad-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty\Big(\dot{G}_{ijrs}(s)(u_{i,j}-z_{i,j})(u^*_{r,s}-z^*_{r,s})+\dot{A}_{ij}(s)(\phi^*_{,j}-\alpha^*_{,j})(\phi_{,i}-\alpha_{,i})\\
&\qquad\quad+\dot{B}_{ij}(s)((u_{i,j}-z_{i,j})(\phi^*-\alpha^*)+(u^*_{i,j}-z^*_{i,j})(\phi-\alpha))\\
&\qquad\quad+\dot{D}_r(s)((\phi-\alpha)(\phi^*_{,r}-\alpha^*_{,r})+(\phi^*-\alpha^*)(\phi_{,r}-\alpha_{,r}))\\
&\qquad\quad+\dot{D}_{ijr}(s)((u_{i,j}-z_{i,j})(\phi^*_{,r}-\alpha^*_{,r})+(u^*_{i,j}-z^*_{i,j})(\phi_{,r}-\alpha_{,r}))\\
&\qquad\quad+\dot{b}(s)(\phi-\alpha)(\phi^*-\alpha^*)\Big)dsdV. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Definamos los operadores

$$
\begin{aligned}
B_i(\mathbf{u})&=\frac{1}{\rho}\Big[G_{jirs}(0)u_{s,r}\Big]_{,j},\\
C_i(\phi)&=\frac{1}{\rho}\Big[B_{ji}(0)\phi+D_{ijp}(0)\phi_{,p}\Big]_{,j},\\
P_i(\mathbf{z})&=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^\infty\dot{G}_{jirs}(s)z_{s,r}(s)ds\right]_{,j},\\
E_i(\alpha)&=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^\infty(\dot{B}_{ij}(s)\alpha(s)+\dot{D}_{ijp}(s)\alpha_{,p}(s))ds\right]_{,j},\\
F(\mathbf{u})&=\frac{1}{\rho\kappa}\Big(\big[D_{pqi}(0)u_{p,q}\big]_{,i}-B_{ij}(0)u_{i,j}\Big),\\
G(\phi)&=\frac{1}{\rho\kappa}\Big(\big[D_i(0)\phi+A_{ij}(0)\phi_{,j}\big]_{,i}-b(0)\phi-D_k(0)\phi_{,k}\Big),\\
H(\mathbf{z})&=\frac{1}{\rho\kappa}\int_0^\infty\Big(\big[\dot{D}_{pqi}(s)z_{p,q}(s)\big]_{,i}-\dot{B}_{pq}(s)z_{p,q}(s)\Big)ds,\\
J(\alpha)&=\frac{1}{\rho\kappa}\int_0^\infty\Big(\big[\dot{D}_i(s)\alpha(s)+\dot{A}_{ij}(s)\alpha_{,j}(s)\big]_{,i}-\dot{b}(s)\alpha(s)-\dot{D}_i(s)\alpha_{,i}\Big)ds,
\end{aligned}
$$

$$R_i(\mathbf{z}) = -\frac{\partial}{\partial s} z_i(s), \qquad W(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial s}\alpha(s),$$

y sea $\mathcal{A}$ el operador matricial con dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{Z}; \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{Z},\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{u},\ \alpha(0) = \phi\},$$

definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & 0 & \mathbf{C} & 0 & \mathbf{P} & \mathbf{E} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ F & 0 & G & 0 & H & J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{B} = (B_i)$, $\mathbf{P} = (P_i)$, $\mathbf{C} = (C_i)$, $\mathbf{E} = (E_i)$, $\mathbf{R} = (R_i)$ e $\mathbf{Id}$ es el operador identidad. Es conveniente hacer notar que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times$$
$$W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega_0) \times W_0^{1,2} \times \bar{\mathcal{H}}_1 \times \bar{\mathcal{H}}_2 \,|\, \mathbf{z}(0) = \mathbf{u},\ \alpha(0) = \phi\Big\}$$

es denso en $\mathcal{Z}$.

Ahora ya estamos en condiciones de transformar nuestro problema en una ecuación de evolución abstracta en el espacio de Hilbert $\mathcal{Z}$ de la forma

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{A}\omega(t) + \mathcal{F}(t), \quad \omega(0) = \omega_0, \tag{4.26}$$

siendo

$$\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{F} = (0, \rho^{-1}\mathbf{f}, 0, (\rho\kappa)^{-1}L, 0, 0),$$

$$\omega_0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \phi^0, \psi^0, \mathbf{z}^0, \alpha^0).$$

Lema 4.4 *El operador $\mathcal{A}$ satisface la desigualdad*

$$\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle \leq 0,$$

para todo $\omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Demostración: Sea $\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Utilizando el teorema de la divergencia y las condiciones de frontera, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle \\
&= \int_{\Omega_0} \Big(G_{ijrs}(\infty) v_{i,j} u_{r,s} + A_{ij}(\infty)\psi_{,i}\phi_{,j} + b(\infty)\psi\phi \\
&\qquad + D_{ijp}(\infty)(v_{i,j}\phi_{,p} + u_{i,j}\psi_{,p}) + D_p(\infty)(\psi\phi_{,p} + \phi\psi_{,p}) \\
&\qquad + B_{ij}(\infty)(v_{i,j}\phi + u_{i,j}\psi) - G_{ijrs}(0) v_{i,j} u_{r,s} \\
&\qquad + A_{ij}(0)\psi_{,i}\phi_{,j} + b(0)\psi\phi \\
&\qquad + D_{ijp}(0)(v_{i,j}\phi_{,p} + u_{i,j}\psi_{,p}) + D_p(0)(\psi\phi_{,p} + \phi\psi_{,p}) \\
&\qquad + B_{ij}(0)(v_{i,j}\phi + u_{i,j}\psi)\Big) dV \\
&\quad - \int_0^\infty \Big(\dot{G}_{ijrs}(s) z_{r,s}(s) v_{i,j} + \dot{A}_{ij}(s)\alpha_{,j}(s)\psi_{,i} + \dot{b}(s)\alpha(s)\psi \\
&\qquad + \dot{D}_{ijp}(s)(v_{i,j}\alpha_{,p}(s) + z_{i,j}(s)\psi_{,p}) + \dot{D}_p(s)(\psi\alpha_{,p}(s) + \alpha(s)\psi_{,p}) \\
&\qquad + \dot{B}_{ij}(s)(z_{i,j}(s)\phi + v_{i,j}\alpha(s))\Big) ds\Big) dV \\
&\quad - \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \Big(\dot{G}_{ijrs}(s)(v_{i,j} + \dot{z}_{i,j}(s))(u_{r,s} - z_{r,s}(s)) \\
&\qquad + \dot{A}_{ij}(s)(\psi_{,i} + \dot{\alpha}_{,i}(s))(\phi_{,j} - \alpha_{,j}(s)) \\
&\qquad + \dot{b}(s)(\psi + \dot{\alpha}(s))(\phi - \alpha(s)) \\
&\qquad + \dot{D}_{ijp}(s)[(v_{i,j} + \dot{z}_{i,j}(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) + (u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\psi_{,p} + \dot{\alpha}_{,p}(s))] \\
&\qquad + \dot{D}_p(s)[(\psi + \dot{\alpha}(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) + (\psi_{,p} + \dot{\alpha}_{,p}(s))(\phi - \alpha(s))] \\
&\qquad + \dot{B}_{ij}(s)[(v_{i,j} + \dot{z}_{i,j}(s))(\phi - \alpha(s)) + (u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\psi + \dot{\alpha}(s))]\Big) ds dV \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \Big(\ddot{G}_{ijrs}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(u_{r,s} - z_{r,s}(s)) \\
&\qquad + \ddot{A}_{ij}(s)(\phi_{,j} - \alpha_{,j}(s))(\phi_{,i} - \alpha_{,i}(s)) \\
&\qquad + \ddot{b}(s)(\phi - \alpha(s))^2 + 2\ddot{D}_{ijp}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) \\
&\qquad + 2\ddot{D}_p(s)(\phi - \alpha(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) \\
&\qquad + 2\ddot{B}_{ij}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\phi - \alpha(s))\Big) ds dV,
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

siendo la última desigualdad consecuencia de (4.21).□

Lema 4.5 *El operador $\mathcal{A}$ satisface la condición*

$$\text{Rango}(\mathbf{Id} - \mathcal{A}) = \mathcal{Z}.$$

Demostración: Sea $\omega^* = (\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \phi^*, \psi^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*) \in \mathcal{Z}$. La condición del rango se cumple si el sistema

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u}^*,$$

$$\phi - \psi = \phi^*,$$

$$\mathbf{v} - \Big(\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\phi + \mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{E}\alpha\Big) = \mathbf{v}^*,$$

$$\psi - \Big(F\mathbf{u} + G\phi + H\mathbf{z} + J\alpha\Big) = \psi^*,$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{z}^*,$$

$$\alpha - W\alpha = \alpha^*. \tag{4.28}$$

tiene una solución $\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \psi, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

De las dos últimas ecuaciones se deduce

$$\mathbf{z}(s) = e^{-s}\left(\mathbf{u} + \int_0^s e^{\tau}\mathbf{z}^*(\tau)d\tau\right),$$

$$\alpha(s) = e^{-s}\left(\phi + \int_0^s e^{\tau}\alpha^*(\tau)d\tau\right). \tag{4.29}$$

Sustituyendo las dos primeras ecuaciones de (4.28) y (4.29) en las ecuaciones tercera y cuarta de (4.28), obtenemos el sistema reducido

$$\mathcal{A}'\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}' & \mathbf{C}'\\ F' & G'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{m}\\ n\end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

donde hemos utilizado la notación

$$B'_i(\mathbf{u}) = u_i - \frac{1}{\rho}\left[\Big(G_{ijrs}(0) + \int_0^\infty \dot{G}_{ijrs}(s)e^{-s}ds\Big)u_{r,s}\right]_{,j},$$

$$\begin{aligned} C'_i(\phi) = -\frac{1}{\rho}\Big[&\Big(B_{ij}(0) + \int_0^\infty \dot{B}_{ij}(s)e^{-s}ds\Big)\phi \\ &+ \Big(D_{ijp}(0) + \int_0^\infty \dot{D}_{ijp}(s)e^{-s}ds\Big)\phi_{,p}\Big]_{,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho\kappa}\Big\{&\left[\Big(D_{pqi}(0) + \int_0^\infty \dot{D}_{pqi}(s)e^{-s}ds\Big)u_{p,q}\right]_{,i} \\ &- \Big(B_{ij}(0) + \int_0^\infty \dot{B}_{ij}(s)e^{-s}ds\Big)u_{i,j}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(\phi) = \phi - \frac{1}{\rho\kappa}\Big\{&\Big[\big(D_i(0) + \int_0^\infty \dot{D}_i(s)e^{-s}ds\big)\phi \\ &+ \Big(A_{ij}(0) + \int_0^\infty \dot{A}_{ij}(s)e^{-s}ds\Big)\phi_{,j}\Big]_{,i} \\ &-\Big(b(0) + \int_0^\infty \dot{b}(s)e^{-s}ds\Big)\phi - \Big(D_j(0) + \int_0^\infty \dot{D}_j(s)e^{-s}ds\Big)\phi_{,j}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_i =& u_i^* + v_i^* \\ &+ \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \int_0^s e^{\tau - s}\Big[\dot{G}_{ijrl}(s)z^*_{r,l}(\tau) + \dot{B}_{ij}(s)\alpha^*(\tau) + \dot{D}_{ijl}(s)\alpha^*_{,l}(\tau)\Big]_{,j} d\tau ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n =& \phi^* + \psi^* \\ &+ \frac{1}{\rho\kappa}\int_0^\infty \int_0^s e^{\tau - s}\Big(\Big[\dot{D}_{pqi}(s)z^*_{p,q}(\tau) + \dot{D}_i(s)\alpha^*(\tau) + \dot{A}_{ij}(s)\alpha^*_{,j}(\tau)\Big]_{,i} \\ &\qquad - \dot{B}_{ij}(s)z^*_{i,j}(\tau) - \dot{D}_i(s)\alpha^*_{,i}(\tau)\dot{b}(s)\alpha^*(\tau)\Big) d\tau ds, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}' = (B'_i), \qquad \mathbf{C}' = (C'_i), \qquad \mathbf{m} = (m_i). \tag{4.31}$$

Con objeto de estudiar este sistema, introducimos la forma bilineal en $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times W_0^{1,2}(\Omega_0)$,

$$\mathcal{R}[(\mathbf{u},\phi),(\hat{\mathbf{u}},\hat{\phi})] = \langle(\mathbf{B}'\mathbf{u} + \mathbf{C}'\phi, F'\mathbf{u} + G'\phi), (\rho\hat{\mathbf{u}}, \rho\kappa\hat{\phi})\rangle_{\mathbf{L}^2\times L^2}.$$

Un sencillo cálculo muestra que $\mathcal{R}$ está acotada.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}[(\mathbf{u},\phi),(\mathbf{u},\phi)] = &\int_{\Omega_0} (\rho u_i u_i + \rho\kappa\phi^2) dV \\
&+ \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \Big(e^{-s}\big[G_{ijrs}(s)u_{i,j}u_{r,s} + A_{ij}(s)\phi_{,i}\phi_{,j} + b(s)\phi^2 \\
&\qquad + 2D_{ijr}(s)u_{i,j}\phi_{,r} + 2D_r(s)\phi\phi_{,r} \\
&\qquad + 2B_{ij}(s)u_{i,j}\phi\big]ds\Big)dV,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{R}$ es coercitiva en $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times W_0^{1,2}(\Omega_0)$.

Ahora hemos de ver que $(\mathbf{m}, n) \in \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega_0) \times W^{-1,2}(\Omega_0)$

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega_0} \rho y_i m_i dV\right| \\
&\quad = \Bigg|\int_{\Omega_0} \rho y_i \Big[u_i^* + v_i^* + \frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_0^s e^{\tau-s}\Big[\dot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}^*(\tau) \\
&\qquad\qquad + \dot{B}_{ni}(s)\alpha^*(\tau) + \dot{D}_{nik}(s)\alpha_{,k}^*(\tau)\Big]_{,n} d\tau ds\Big] dV\Bigg| \\
&\qquad \leq \left|\int_{\Omega_0} \rho y_i(u_i^* + v_i^*)dV\right| \\
&\qquad\quad + \Bigg|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty\int_0^s e^{\tau-s} y_{i,n}\Big[\dot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}^*(\tau) + \dot{B}_{ni}(s)\alpha^*(\tau) \\
&\qquad\qquad + \dot{D}_{nik}(s)\alpha_{,k}^*(\tau)\Big] d\tau ds dV\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq & \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\|\mathbf{u}^*+\mathbf{v}^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)} \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_0^{s} e^{\tau-s} y_{i,n}\dot{G}_{nijk}(s) z^*_{j,k}(\tau)d\tau ds dV\right| \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_0^{s} e^{\tau-s} y_{i,n}\dot{B}_{ni}(s) \alpha^*(\tau)d\tau ds dV\right| \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_0^{s} e^{\tau-s} y_{i,n}\dot{D}_{nik}(s) \alpha^*_{,k}(\tau)d\tau ds dV\right|.
\end{aligned}$$

Como
$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^{\infty}\dot{f}(\tau)e^{-\tau}d\tau=-\dot{f}(s)e^{-s},$$
mediante integración por partes se obtiene

$$\int_0^{\infty}\dot{f}(s)e^{-s}\int_0^{s}e^{\tau}g(\tau)d\tau ds=\int_0^{\infty}e^{s}g(s)\int_s^{\infty}\dot{f}(\tau)e^{-\tau}d\tau ds, \tag{4.32}$$

Utilizando la igualdad anterior tenemos las estimaciones

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_0}\rho y_i m_i dV\right| \leq & \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\|\mathbf{u}^*+\mathbf{v}^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)} \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau} y_{i,n}\dot{G}_{nijk}(s) z^*_{j,k}(\tau)d\tau ds dV\right| \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau} y_{i,n}\dot{B}_{ni}(s) \alpha^*(\tau)d\tau ds dV\right| \\
& +\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau} y_{i,n}\dot{D}_{nik}(s) \alpha^*_{,k}(\tau)d\tau ds dV\right|.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\dot{\mathbf{G}}(\infty)=0$ y $\ddot{\mathbf{G}}(s)>0$, tenemos

$$-\int_s^{\infty}\dot{\mathbf{G}}(\tau)e^{-\tau}d\tau=-\dot{\mathbf{G}}(s)e^{-s}-\int_s^{\infty}\ddot{\mathbf{G}}(\tau)e^{-\tau}d\tau\leq-\dot{\mathbf{G}}(s)e^{-s}.$$

Teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{G}}(s)<0$ podemos afirmar

$$\left|\int_s^\infty \dot{\mathbf{G}}(\tau)e^{-\tau}d\tau\right| \leq \left|\dot{\mathbf{G}}(s)e^{-s}\right|.$$

Entonces, utilizando esta última desigualdad, la de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica, podemos establecer la estimación

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_0}\rho y_i m_i dV\right| \leq & \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\|\mathbf{u}^*+\mathbf{v}^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)} \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|G_{nijk}(\infty)-G_{nijk}(0)|y_{i,n}y_{j,k}dV \\
&+\frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty z^*_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV\right| \\
&+\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty\int_s^\infty e^{s-\tau}y_{i,n}\dot{B}_{ni}(s)\alpha^*(\tau)d\tau dsdV\right| \\
&+\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty\int_s^\infty e^{s-\tau}y_{i,n}\dot{D}_{nik}(s)\alpha^*_{,k}(\tau)d\tau dsdV\right|.
\end{aligned}$$

La desigualdad (4.23) nos permite afirmar que existen λ_1, λ_2 y λ_3 constantes positivas y $G_1(s)$, $b_1(s)$ y $A_1(s)$ funciones monótonas decrecientes tales que

$$-\int_{\Omega_0}\dot{G}_{nijk}(s)u_{i,n}u_{j,k}dV \geq G_1(s)\int_{\Omega_0}u_{i,n}u_{i,n}dV, \quad G_1(s)>0,$$

$$-\int_{\Omega_0}\dot{b}(s)\phi^2dV \geq b_1(s)\int_{\Omega_0}\phi^2dV, \quad b_1(s)>0,$$

$$-\int_{\Omega_0}\dot{A}_{ij}(s)\phi_{,i}\phi_{,j}dV \geq A_1(s)\int_{\Omega_0}\phi_{,i}\phi_{,i}dV, \quad A_1(s)>0,$$

$$\left\|\dot{B}_{ij}(s)\right\| \leq \lambda_1\left(G_1(s)\right)^{1/2}\left(b_1(s)\right)^{1/2}, \quad \lambda_1>0,$$

$$\left\|\dot{D}_{nik}(s)\right\| \leq \lambda_2\left(G_1(s)\right)^{1/2}\left(A_1(s)\right)^{1/2}, \quad \lambda_2>0,$$

$$\left\|\dot{D}_k(\mathbf{x},s)\right\| \leq \lambda_3\left(A_1(s)\right)^{1/2}\left(b_1(s)\right)^{1/2}, \quad \lambda_3>0,$$

siendo

$$\|\dot{B}_{ij}(\mathbf{x},s)\| = \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0}(\dot{B}_{ij}(\mathbf{x},s)\dot{B}_{ij}(\mathbf{x},s))^{1/2},$$

$$\|\dot{D}_{nij}(\mathbf{x},s)\| = \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0}(\dot{D}_{nij}(\mathbf{x},s)\dot{D}_{nij}(\mathbf{x},s))^{1/2},$$

$$\|\dot{D}_{i}(\mathbf{x},s)\| = \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0}(\dot{D}_{i}(\mathbf{x},s)\dot{D}_{i}(\mathbf{x},s))^{1/2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\infty \dot{B}_{ij}(\tau)e^{-\tau}d\tau\right\| &\leq \lambda_1\int_s^\infty [G_1(\tau)b_1(\tau)]^{1/2}\, e^{-\tau}d\tau\\ &\leq \lambda_1\left[\int_s^\infty G_1(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^{1/2}\left[\int_s^\infty b_1(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^{1/2}\\ &\leq \lambda_1\,[G_1(s)b_1(s)]^{1/2}\, e^{-s}.\end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma,

$$\left\|\int_0^\infty \dot{D}_k(\tau)e^{-\tau}d\tau\right\| \leq \lambda_3\big[A_1(s)b_1(s)\big]^{1/2}e^{-s}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0}\rho y_i m_i dV\right| \leq\ & \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}\,\|\mathbf{u}^*+\mathbf{v}^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)}\\ &+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|G_{nijk}(\infty)-G_{nijk}(0)|\, y_{i,n}y_{j,k}dV\\ &+\frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{G}_{nijk}(s)z^*_{i,n}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV\right|\\ &+\frac{\lambda_1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty G_1(s)y_{i,n}y_{i,n}dsdV\right|\\ &+\frac{\lambda_1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty b_1(s)\alpha^*(s)\alpha^*(s)dsdV\right|\\ &+\frac{\lambda_2}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty G_1(s)y_{i,n}y_{i,n}dsdV\right|\\ &+\frac{\lambda_2}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty A_1(s)\alpha^*_{,k}(s)\alpha^*_{,k}(s)dsdV\right|\\ <\ &\infty. \qquad (4.33)\end{aligned}$$

De forma totalmente análoga, si $y \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_0} \rho y n dV\right| \leq & \|\mathbf{y}\|_{W_0^{1,2}(\Omega_0)} \|\phi^* + \psi^*\|_{L^2(\Omega_0)} \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |A_{kl}(\infty) - A_{kl}(0)|\, y_{,k} y_{,l} dV \\
& + \frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{A}_{kl}(s)\alpha^*_{,k}(s)\alpha^*_{,l}(s) ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_2}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty A_1(s) y_{,k} y_{,k} ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_2}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty G_1(s) z^*_{i,j}(s) z^*_{i,j}(s) ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_3}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty A_1(s) y_{,k} y_{,k} ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_3}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty b_1(s)\alpha^*(s)\alpha^*(s) ds dV\right| \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |b(\infty) - b(0)|\, y^2 dV \\
& + \frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{b}(s)\alpha^*(s)\alpha^*(s) ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty b_1(s) y^2 ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty G_1(s) z^*_{i,j}(s) z^*_{i,j}(s) ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_3}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty b_1(s) y^2 ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda_3}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty A_1(s)\alpha^*_{,k}(s)\alpha^*_{,k}(s) ds dV\right| \\
& < \infty.
\end{aligned}
$$

El teorema de Lax-Milgram nos asegura que existe $(\mathbf{u}, \phi)$ solución del sistema (4.30). Por lo tanto, podemos concluir la existencia de $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$ y $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$.

Por último, hemos de comprobar que $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{H}}_1$ y $\alpha \in \tilde{\mathcal{H}}_2$.

De la quinta ecuación de (4.28) se sigue

$$\int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV$$
$$= \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \Big[z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}(s) + z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)\dot{z}_{j,k}(s)\Big]dsdV.$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0} u_{i,n}\dot{G}_{nijk}(0)u_{j,k}dV + \int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}(s)dsdV - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\ddot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}(s)dsdV.$$

A partir de $\ddot{G}_{nijk}(s) > 0$, deducimos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_0} u_{i,n}\dot{G}_{nijk}(0)u_{j,k}dV - \int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z_{j,k}(s)dsdV$$
$$\leq -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty z_{i,n}(s)\dot{G}_{nijk}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV.$$

Utilizando ls desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica se tiene

$$-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{G}_{nijk}(s)z_{i,n}(s)z_{j,k}(s)dsdV$$
$$\leq -\int_{\Omega_0} \dot{G}_{nijk}(0)u_{i,m}u_{j,k}dV - \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{G}_{nijk}(s)z^*_{i,n}(s)z^*_{j,k}(s)dsdV. \tag{4.34}$$

Procediendo igual, pero a partir de la última ecuación de (4.28) obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{A}_{kl}(s)\alpha_{,k}(s)\alpha_{,l}(s)dsdV \\
&\le -\int_{\Omega_0}\dot{A}_{kl}(0)\phi_{,k}\phi_{,l}dV \\
&\quad -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{A}_{kl}(s)\alpha^*_{,k}(s)\alpha^*_{,l}(s)dsdV, \\
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{b}(s)\alpha(s)\alpha(s)dsdV \\
&\le -\int_{\Omega_0}\dot{b}(0)\phi\phi dV - \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{b}(s)\alpha^*(s)\alpha^*(s)dsdV.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

De (4.23) se deduce

$$
\begin{aligned}
2\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{B}_{ni}(s)z_{i,n}(s)\alpha(s)dsdV\right| & \\
\le -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{G}_{nijk}(s)z_{i,n}(s)z_{j,k}(s)dsdV \\
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{b}(s)\alpha(s)\alpha(s)dsdV, \\
2\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{D}_{nijk}(s)z_{i,n}(s)\alpha_{,k}(s)dsdV\right| & \\
\le -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{G}_{nijk}(s)z_{i,n}(s)z_{j,k}(s)dsdV \\
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{A}_{kl}(s)\alpha_{,k}(s)\alpha_{,l}(s)dsdV, \\
2\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{D}_{k}(s)\alpha_{,k}(s)\alpha(s)dsdV\right| & \\
\le -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{A}_{kl}(s)\alpha_{,k}(s)\alpha_{,l}(s)dsdV \\
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \dot{b}(s)\alpha(s)\alpha(s)dsdV.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

De las acotaciones anteriores se deduce que $\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{H}}_1$ y $\alpha \in \bar{\mathcal{H}}_2$. $\Box$

Como consecuencia de los lemas anteriores podemos enunciar el siguiente resultado

Teorema 4.3 *El operador $\mathcal{A}$ es el generador de un semigrupo de contracciones en $\mathcal{Z}$.*

Nota 4.4 *Es posible relajar la hipótesis (4.21). Si suponemos que existe una constante positiva, λ, tal que*

$$\int_{\Omega_0} \Big(\frac{1}{2}\big(\ddot{G}_{ijrs}(s) - \lambda\dot{G}_{ijrs}(s)\big)u_{i,j}u_{r,s} + \frac{1}{2}\big(\ddot{A}_{ij}(s) - \lambda\dot{A}_{ij}(s)\big)\phi_{,i}\phi_{,j}$$
$$+ \frac{1}{2}\big(\ddot{b}(s) - \lambda\dot{b}(s)\big)\phi^2 + \big(\ddot{D}_{ijr}(s) - \lambda\dot{D}_{ijr}(s)\big)u_{i,j}\phi_{,r}$$
$$+ \big(\ddot{D}_k(s) - \lambda\dot{D}_k(s)\big)\phi\phi_{,r} + \big(\ddot{B}_{ij}(s) - \lambda\dot{B}_{ij}(s)\big)u_{i,j}\phi\Big)dV \geq 0, \qquad (4.37)$$

entonces, postulando (4.23), se puede demostrar que $\mathcal{A}$ genera un semigrupo cuasi-contractivo.

Teorema 4.4 *Si*

$$f_i, L \in C^1([0,\infty), L^2) \cap C^0([0,\infty), W_0^{1,2}),$$

y

$$\omega_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

entonces, existe una única solución $\omega(t) \in C^1([0,\infty), \mathcal{Z})$ al problema (4.26).

Nota 4.5 *Como el semigrupo generado por el operador $\mathcal{A}$ es contractivo, tenemos la siguiente estimación para las soluciones:*

$$||\omega(t)|| \leq ||\omega_0||_{\mathcal{Z}} + \int_0^t (||\mathbf{f}(s)||_{\mathbf{L}^2} + ||L(s)||_{L^2})ds,$$

que muestra la dependencia continua de la solución respecto de las condiciones iniciales y fuerzas externas. Este hecho fue probado en [13] para el caso en que el cuerpo es homogéneo.

Nota 4.6 *El teorema 4.4 conjuntamente con la anterior observación nos dice que, en las hipótesis explicitadas $(i)-(iv)$, el problema (4.10), (4.19), (4.12) de la viscoelasticidad de materiales porosos admite una única solución que depende continuamente de los parámetros iniciales y de las fuentes externas. Por consiguiente es un problema bien planteado.*

4.7 Comportamiento asintótico de las soluciones

En esta sección demostraremos que, en ausencia de fuentes externas y condiciones de frontera homogéneas, el cuerpo evoluciona asintóticamente hacia el estado natural ($u_i = \phi = 0$). Para ello será suficiente comprobar (ver [21]) que las órbitas son precompactas y que el operador no tiene ningún autovalor imaginario puro en $\mathcal{E}$, el subespacio cerrado generado por los elementos $\omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tales que $\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle = 0$.

Un requisito previo es el siguiente resultado:

Lema 4.6

$$\mathcal{A}^{-1}0 = \{0\}.$$

Demostración. Hemos de ver que la única solución de $\mathcal{A}\omega = 0$ es $\omega = 0$. Si escribimos explícitamente el sistema tenemos

$$v_i = 0, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\Big[\int_0^\infty & \big[\dot{G}_{ijrs}(s)u_{r,s}(t-s) + \dot{B}_{ij}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_{ijr}(s)\phi_{,r}(t-s)\big]ds \\ & + G_{ijrs}(0)u_{r,s} + B_{ij}(0)\phi + D_{ijr}(0)\phi_{,r}\Big]_{,j} = 0,\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\psi = 0, \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\int_0^\infty [\dot{D}_{rsi}(s)u_{r,s}(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi(t-s) + \dot{A}_{ij}(s)\phi_{,j}(t-s)]ds \\ &\quad + D_{rsi}(0)u_{r,s} + D_i(0)\phi + A_{ij}(0)\phi_{,j}\Big]_{,i} \\ &- \int_0^\infty [\dot{B}_{ij}(s)u_{i,j}(t-s) + \dot{b}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi_{,i}(t-s)]ds \\ &- B_{ij}(0)u_{i,j} - b(0)\phi - D_i(0)\phi_{,i} = 0,\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} z_i(s) = 0, \tag{4.42}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\alpha(s) = 0. \tag{4.43}$$

Integrando las dos últimas ecuaciones y, teniendo en cuenta que $\mathbf{z}(0) = \mathbf{u}$ y $\alpha(0) = \phi$ tenemos

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{u}, \qquad \alpha(s) = \phi.$$

Si sustituimos en (4.39) y (4.41) e integramos llegamos a:

$$\Big[G_{ijrs}(\infty)u_{r,s} + B_{ij}(\infty)\phi + D_{ijr}(\infty)\phi_{,r}\Big]_{,j} = 0, \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}&\Big[D_{rsi}(\infty)u_{r,s} + D_i(\infty)\phi + A_{ij}(\infty)\phi_{,j}\Big]_{,i}\\ &- B_{ij}(\infty)u_{i,j} - b(\infty)\phi - D_i(\infty)\phi_{,i} = 0.\end{aligned} \tag{4.45}$$

Multiplicando (4.44) por u_i e integrando sobre Ω_0, tras aplicar el teorema de la divergencia, se tiene:

$$\int_{\Omega_0}\Big[G_{ijrs}(\infty)u_{r,s}u_{i,j} + B_{ij}(\infty)u_{i,j}\phi + D_{ijr}(\infty)u_{i,j}\phi_{,r}\Big]dV = 0. \tag{4.46}$$

Si multiplicamos (4.45) por ϕ e integramos sobre Ω_0, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}\Big[&D_{rsi}(\infty)u_{r,s}\phi_{,i} + D_i(\infty)\phi\phi_{,i} + A_{ij}(\infty)\phi_{,j}\phi_{,i}\\ &+ B_{ij}(\infty)u_{i,j}\phi + b(\infty)\phi^2 + D_i(\infty)\phi_{,i}\phi\Big]dV = 0.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Sumando la ecuaciones anteriores podemos escribir:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}\Big[&G_{ijrs}(\infty)u_{r,s}u_{i,j} + 2B_{ij}(\infty)u_{i,j}\phi\\ &+ 2D_{ijr}(\infty)u_{i,j}\phi_{,r} + 2D_i(\infty)\phi\phi_{,i} + A_{ij}(\infty)\phi_{,j}\phi_{,i} + b(\infty)\phi^2\Big]dV = 0.\end{aligned}$$

De aquí, conjuntamente con la hipótesis (4.20), concluimos que:

$$u_{i,j} = 0, \qquad \phi = 0,$$

y, por lo tanto, $u_i = 0$. □

Lema 4.7 *El operador $\mathcal{A}$ no tiene ningún valor propio imaginario puro asociado a un vector propio perteneciente al subespacio cerrado $\mathcal{E}$.*

Demostración. Solamente hemos de ver que la única solución en $\mathcal{E}$ de $\mathcal{A}\omega = i\lambda\omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es $\omega = 0$.

Sea $\omega \in \mathcal{E}$, entonces $\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle = 0$. Como consecuencia de (4.27) tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \Big(&\ddot{G}_{ijrs}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(u_{r,s} - z_{r,s}(s)) \\ &+ \ddot{A}_{ij}(s)(\phi_{,j} - \alpha_{,j}(s))(\phi_{,i} - \alpha_{,i}(s)) \\ &+ \ddot{b}(s)(\phi - \alpha(s))^2 + 2\ddot{D}_{ijp}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) \\ &+ 2\ddot{D}_p(s)(\phi - \alpha(s))(\phi_{,p} - \alpha_{,p}(s)) \\ &+ 2\ddot{B}_{ij}(s)(u_{i,j} - z_{i,j}(s))(\phi - \alpha(s))\Big)dsdV = 0. \end{aligned}$$

Ahora, la hipótesis (4.21) nos permite afirmar que:

$$u_{i,j} - z_{i,j}(s) = 0, \qquad \phi - \alpha(s) = 0. \tag{4.48}$$

Por otra parte, integrando las dos últimas ecuaciones del sistema $\mathcal{A}\omega = i\lambda\omega$ tenemos:

$$z_k = \mathrm{e}^{-i\lambda s}u_k, \qquad \alpha = \mathrm{e}^{-i\lambda s}\phi.$$

Sustituyendo en (4.48) podemos escribir

$$\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\mathrm{s}}\right)u_{j,k} = 0, \qquad \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\mathrm{s}}\right)\phi = 0,$$

que implican que $u_i = 0$ y $\phi = 0$ si $\lambda \neq 0$. □

Nota 4.7 *El hecho de que no hayan valores propios imaginarios puros es debido a los efectos de memoria. Sin ellos es fácil ver que el sistema $\mathcal{A}\omega = i\lambda\omega$ tiene soluciones distintas de la nula.*

Lema 4.8 *Las órbitas son precompactas.*

Demostración. Definamos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \big\{&(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \phi^*, \psi^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}); \\ &\mathbf{z}^* \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)), \alpha^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+, W^{2,2}(\Omega_0))\big\}, \end{aligned}$$

y sea $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \phi(t), \psi(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s))$ una solución que empieza en el punto $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \phi^*, \psi^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*) \in \mathcal{M}$.

Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}^+$,

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \phi(t), \psi(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\|\mathcal{A}\left(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \phi(t), \psi(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s)\right)\| \leq \|\mathcal{A}\left(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \phi^*, \psi^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*\right)\|,$$

ya que el semigrupo es disipativo.

En particular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &\in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)),\\
\psi &\in C(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)),\\
\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} &\in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)),\\
\frac{\partial \alpha}{\partial s} &\in C(\mathbb{R}^+, W_0^{1,2}(\Omega_0) \cap W^{2,2}(\Omega_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\int_0^\infty \left[\dot{G}_{ijrs}(s) u_{r,s}(t-s) + \dot{B}_{ij}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_{ijr}(s)\phi_{,r}(t-s)\right] ds\\
&+ G_{ijrs}(0) u_{r,s} + B_{ij}(0)\phi + D_{ijr}(0)\phi_{,r}\Big]_{,j} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{L}^2(\Omega_0)),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\int_0^\infty [\dot{D}_{rsi}(s) u_{r,s}(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi(t-s) + \dot{A}_{ij}(s)\phi_{,j}(t-s)] ds\\
&\quad + D_{rsi}(0) u_{r,s} + D_i(0)\phi + A_{ij}(0)\phi_{,j}\Big]_{,i}\\
&- \int_0^\infty [\dot{B}_{ij}(s) u_{i,j}(t-s) + \dot{b}(s)\phi(t-s) + \dot{D}_i(s)\phi_{,i}(t-s)] ds\\
&- B_{ij}(0) u_{i,j} - b(0)\phi - D_i(0)\phi_{,i} \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_0)),
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Utilizando un esquema de iteración de Picard [19] en (4.49)-(4.50) obtenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{W}_0^{2,2} \times W_0^{1,2}(\Omega_0)}\\
&\quad \leq k \left\|\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\phi + \mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{E}\alpha, F\mathbf{u} + G\phi + H\mathbf{z} + J\alpha\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0)},
\end{aligned}$$

siendo k una constante positiva. De aquí se sigue que $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{2,2})$, y $\phi \in C(\mathbb{R}^+, W_0^{2,2}(\Omega_0))$.

Utilizando el teorema de Rellich-Kondrachov [1], podemos concluir que las órbitas con origen en $\mathcal{M}$ son precompactas.

Por otra parte, $\mathcal{M}$ es denso en $\mathcal{X}$ y además es cerrado [20]; por lo tanto, toda órbita que empieza en un punto de $\mathcal{X}$ es precompacta. □

Como consecuencia de los lemas previos podemos enunciar el teorema:

Teorema 4.5 *Sea* $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \phi(t), \psi(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s))$ *la solución de (4.24) con* $f_i = L = 0$*, condiciones iniciales (4.12) y condiciones de frontera (4.19); entonces,*

$$\lim_{t\to\infty} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \phi(t), \psi(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s)) = 0$$

en la norma inducida por el producto escalar (4.25).

Capítulo 5

Termoviscoelasticidad lineal

5.1 Introducción

Day [23] utiliza la hipótesis de invariancia del trabajo bajo inversión temporal para demostrar que el tensor de relajación es simétrico en el caso de materiales viscoelásticos a temperatura constante. Posteriormente Gurtin [33] extiende la idea de invariancia bajo inversión temporal a la producción de entropía,

$$\Gamma\{\Im(\cdot)\} = \Gamma\{\tilde{\Im}(\cdot)\},$$

con objeto de establecer un sistema fundamental de ecuaciones para la termoelasticidad lineal de materiales con memoria, siendo $\tilde{\Im}(t)$ el proceso inverso de $\Im(t)$ (i.e. $\tilde{\Im}(t) = \Im(-t)$). Esta idea dio una respuesta a la hora de fundamentar las ecuaciones de la termoelasticidad de materiales con memoria.

Otros autores han estudiado anteriormente teorías para la termoelasticidad de materiales con memoria. Por ejemplo, Navarro [53, 54] considera la teoría compuesta por ecuaciones constitutivas, para el tensor de tensiones y la entropía, que no tienen en cuenta efectos de memoria respecto al gradiente de temperatura. Para el flujo de calor toma como ecuación constitutiva la ley de Fourier.

Falqués [28] considera la teoría compuesta por ecuaciones constitutivas para el tensor de tensiones y la entropía que no tienen en cuenta efectos de memoria. Para el flujo de calor toma como ecuación constitutiva:

$$q_i(t) = \int_0^\infty k_{ij}(s)\theta_{,j}(t-s)ds,$$

con objeto de recuperar la teoría de Lord-Shulman [48].

Resultados de unicidad para materiales homogéneos y de dependencia continua para materiales centrosimétricos han sido obtenidos por Ieşan & Scalia [44].

El objeto de este capítulo es obtener resultados de unicidad, existencia y comportamiento asintótico de soluciones para materiales termoelásticos con memoria.

5.2 Notación y ecuaciones básicas

Consideremos un cuerpo que en el instante t ocupa una región acotada Ω_0 del espacio tridimensional, con frontera $\partial\Omega_0$, suficientemente regular. El movimiento del cuerpo estará descrito respecto de un sistema rectangular de coordenadas Ox_i.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de los sólidos, independientes de la naturaleza del material, son:

- la ecuación del movimiento

$$\rho \ddot{x}_i = t_{ji,j} + f_i, \tag{5.1}$$

- la ecuación de la energía

$$T\dot{\eta} = q_{i,i} + S. \tag{5.2}$$

Antes de presentar las ecuaciones constitutivas que caracterizarán los materiales con memoria, será útil introducir alguna notación.

Denotaremos un proceso por un triplete de la forma

$$\Im = [\mathbf{F}, T, \mathbf{g}],$$

siendo $\mathbf{F}$ el gradiente de deformación, T la temperatura y $\mathbf{g}$ el gradiente de temperatura. $\Im_0 = [\mathbf{Id}, T_0, 0]$ será el estado de equilibrio, donde $\mathbf{Id}$ es la identidad y T_0 una temperatura constante.

Un proceso infinitesimal es un triplete

$$\wp = [\mathbf{H}, \theta, \mathbf{g}],$$

de forma que $\mathbf{H}$ es el gradiente de desplazamiento y θ la variación de la temperatura respecto de T_0. La parte simétrica de $\mathbf{H}$ la denotaremos por $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$.

Supondremos que las ecuaciones constitutivas vienen dadas por funcionales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \hat{\mathbf{t}}(\Im^t), \\ \epsilon &= \hat{\epsilon}(\Im^t), \\ \eta &= \hat{\eta}(\Im^t), \\ \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}(\Im^t), \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\mathbf{t}$ es el tensor de tensiones, ϵ es la energía interna, η la entropía, $\mathbf{q}$ el flujo de calor y $\Im^t$ es la historia del proceso $\Im$.

Supondremos que los funcionales de (5.3) cumplen:

(A) $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\epsilon}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{q}}$ son funciones derivables con continuidad respecto del tiempo.

(B) $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mathbf{q}}$ tienen derivadas $\delta\hat{\mathbf{t}}$, $\delta\hat{\epsilon}$, $\delta\hat{\mathbf{q}}$ en $\Im_0$ y $\delta\hat{\mathbf{t}}$ es simétrico.

(C)

$$\lim_{t\to\infty} \eta(\Im^t) = \eta(\Im_0), \qquad \lim_{t\to\infty} \epsilon(\Im^t) = \epsilon(\Im_0),$$

cuando se tiene $\Im(t) = \Im_0$, si $t < -\tau$ ó $t > \tau$ para algún $\tau > 0$.

(D) $\Im_0$ es el estado natural en el sentido

$$\hat{\mathbf{t}}(\Im_0) = \hat{\mathbf{q}}(\Im_0) = 0.$$

Definimos la producción de entropía, $\Gamma\{\Im(\cdot)\}$, como

$$\Gamma\{\Im(\cdot)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \big[\dot{\eta} + \frac{1}{T}\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{F}} - \frac{\dot{\epsilon}}{T} + \frac{1}{T^2}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}\big]dt, \tag{5.4}$$

y la producción infinitesimal de entropía, $\Xi\{\wp(\cdot)\}$, como

$$\Xi\{\wp(\cdot)\} = \frac{1}{T_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} \big[T_0\mathbf{t}_1\cdot\dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta}\epsilon_1 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{g}\big]dt, \tag{5.5}$$

siendo $\mathbf{t}_1(t) = \delta\hat{\mathbf{t}}(\wp^t)$, $\epsilon_1(t) = \delta\hat{\epsilon}(\wp^t)$ y $\mathbf{q}_1(t) = \delta\hat{\mathbf{q}}(\wp^t)$.

Teorema 5.1 *Si* $\Im_\alpha(\cdot) = \Im_0 + \alpha\wp(\cdot)$, *entonces*

$$\Gamma\{\Im_\alpha(\cdot)\} = \alpha^2 \Xi\{\wp(\cdot)\} + o(\alpha^2), \qquad \textit{cuando} \quad \alpha \to 0.$$

Teorema 5.2 *Si la producción de entropía es invariante bajo inversión temporal, entonces la producción infinitesimal de entropía también lo es.*

La demostración de estos teoremas y los siguientes resultados de esta sección pueden encontrarse en [33].

Para ver las consecuencias de la invariancia de la producción infinitesimal de entropía bajo inversión temporal es conveniente introducir la notación

$$\Lambda = (\mathbf{E}, \theta)\,, \qquad \Sigma = (T\mathbf{t}, -\epsilon)\,, \qquad \Sigma_1 = \delta\hat{\Sigma} = (T_0\mathbf{t}_1, -\epsilon_1)\,. \tag{5.6}$$

También necesitaremos la hipótesis:

(E) Existen funciones $\mathbf{G}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{J}$ y $\mathbf{K}$, con $\mathbf{G}$ acotada, tales que para cualquier proceso infinitesimal, $\wp(\cdot) = [\mathbf{H}(\cdot), \theta(\cdot), \mathbf{g}(\cdot)]$, se cumple:

$$\delta\hat{\Sigma}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{G}(t-s)\cdot\dot{\Lambda}(s) + \mathbf{L}(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\,ds,$$

$$\delta\hat{\mathbf{q}}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{J}(t-s)\cdot\dot{\Lambda}(s) + \mathbf{K}(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\,ds. \tag{5.7}$$

Teorema 5.3 *Una condición necesaria y suficiente para que la producción infinitesimal de entropía sea invariante bajo inversión temporal es que para todo* $s \geq 0$ *se verifiquen simultáneamente las condiciones:*

(i) $\mathbf{G}(s)$ *sea simétrico,*

(ii) $\mathbf{K}(s)$ *sea simétrico,*

(iii) $\mathbf{L}(s) = -\mathbf{J}^T(s) + $ *cte.*

Si $\mathbf{K}_\infty = \displaystyle\int_0^\infty \mathbf{K}(s)ds$, entonces $\mathbf{q}_1 = \mathbf{K}_\infty \cdot \mathbf{g}$ es el flujo infinitesimal de calor producido por un gradiente de temperatura que siempre ha sido constante.

Corolario 5.1 *El tensor* $\mathbf{K}_\infty$*, si existe, es simétrico.*

Escribiendo las ecuaciones (5.7) de forma más explícita tenemos:

$$\delta\hat{\mathbf{t}}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{G}_1(t-s)\cdot\dot{\mathbf{E}}(s) + \mathbf{G}_2(t-s)\dot{\theta}(s) + \mathbf{L}_1(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\,ds,$$

$$\delta\hat{\epsilon}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{G}_3(t-s)\cdot\dot{\mathbf{E}}(s) + G_4(t-s)\dot{\theta}(s) + \mathbf{l}_2(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\,ds,$$

$$\delta\hat{\mathbf{q}}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{J}_1(t-s)\cdot\dot{\mathbf{E}}(s) + \mathbf{j}_2(t-s)\dot{\theta}(s) + \mathbf{K}(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\,ds, \quad (5.8)$$

donde

$$\mathbf{G} \leftrightarrow \begin{pmatrix} T_0\mathbf{G}_1 & T_0\mathbf{G}_2 \\ -\mathbf{G}_3 & -G_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L} \leftrightarrow \begin{pmatrix} T_0\mathbf{L}_1 \\ -\mathbf{l}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1, & \mathbf{j}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Corolario 5.2 *Para todo $s \geq 0$,*

(i) $\mathbf{G}_1(s)$ *es simétrico,*

(ii) $T_0\mathbf{G}_2(s) = -\mathbf{G}_3(s)$,

(iii) $T_0\mathbf{L}_1(s) = -\mathbf{J}_1^T(s) + cte$,

(iv) $\mathbf{l}_2(s) = \mathbf{j}_2^T(s) + cte$.

Corolario 5.3 *Supongamos que $\mathbf{L}_1(\infty)$, $\mathbf{l}_2(\infty)$, $\mathbf{J}_1(\infty)$ y $\mathbf{j}_2(\infty)$ existen y son nulos, entonces*

$$T_0\mathbf{L}_1(s) = \mathbf{J}_1^T(s), \qquad \mathbf{l}_2(s) = \mathbf{j}_2^T(s),$$

para todo $s \geq 0$.

En este punto es necesario hacer alguna hipótesis sobre la entropía:

(F) $\hat{\eta}$ tiene derivada $\delta\hat{\eta}$ en $\Im_0$, y existen funciones $\mathbf{M}_1$, M_2, $\mathbf{m}_3$ tales que

$$\delta\hat{\eta}(\wp^t) = \int_{-\infty}^{t} \Big[\mathbf{M}_1(t-s)\cdot\dot{\mathbf{E}}(s) + M_2(t-s)\dot{\theta}(s) + \mathbf{m}_3(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\Big]\, ds.$$

Definiendo la energía libre $\Psi = \epsilon - T\eta$, podemos escribir

$$\Psi(t) = \hat{\Psi}(\Im^t) = \hat{\epsilon}(\Im^t) - T(t)\hat{\eta}(\Im^t),$$

con derivada $\delta\hat{\Psi}$ en $\Im_0$, tal que

$$\delta\hat{\Psi}(\wp^t) = \delta\hat{\epsilon}(\wp^t) - T_0\delta\hat{\eta}(\wp^t) - \theta\hat{\eta}(\Im_0). \tag{5.10}$$

Para ser coherente con los resultados obtenidos por Coleman [14], es necesario suponer

(G) para todo proceso infinitesimal $\wp(\cdot)$, y para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\delta\hat{\Psi}(\wp^t) = \hat{\mathbf{t}}(\Im_0)\cdot\mathbf{H}(t) - \hat{\eta}(\Im_0)\theta(t).$$

De las hipótesis (D), (G) y (5.10) se deduce

$$\delta\hat{\epsilon}(\wp^t) = T_0\delta\hat{\eta}(\wp^t), \tag{5.11}$$

y, por lo tanto,

Corolario 5.4 *Para todo* $s \geq 0$,

(i) $\mathbf{G}_2(s) = -\mathbf{M}_1(s)$,

(ii) $\mathbf{j}_2(s) = T_0\mathbf{m}_3(s) + cte$.

Ahora, las ecuaciones constitutivas lineales obtenidas se pueden escribir, en coordenadas, de la forma:

$$\begin{aligned}
t_{ij}(\mathbf{x},t) &= \int_{-\infty}^{t} \big[c_{ijrs}(\mathbf{x},t-s)\dot{e}_{rs}(\mathbf{x},s) - l_{ij}(\mathbf{x},t-s)\dot{\theta}(\mathbf{x},s) \\
&\qquad - h_{ijk}(\mathbf{x},t-s)\theta_{,k}(\mathbf{x},s)\big]ds, \\
\eta(\mathbf{x},t) &= \int_{-\infty}^{t} \big[l_{ij}(\mathbf{x},t-s)\dot{e}_{ij}(\mathbf{x},s) + a(\mathbf{x},t-s)\dot{\theta}(\mathbf{x},s) \\
&\qquad + m_i(\mathbf{x},t-s)\theta_{,i}(\mathbf{x},s)\big]ds, \\
q_i(\mathbf{x},t) &= \int_{-\infty}^{t} \big[T_0 h_{rsi}(\mathbf{x},t-s)\dot{e}_{rs}(\mathbf{x},s) + T_0 m_i(\mathbf{x},t-s)\dot{\theta}(\mathbf{x},s) \\
&\qquad + k_{ij}(\mathbf{x},t-s)\theta_{,j}(\mathbf{x},s)\big]ds,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

o, equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
t_{ij}(\mathbf{x},t) = {} & c_{ijrs}(\mathbf{x},0)e_{rs}(\mathbf{x},t) - l_{ij}(\mathbf{x},0)\theta(\mathbf{x},t) \\
& + \int_0^\infty \Big\{ \dot{c}_{ijrs}(\mathbf{x},s)e_{rs}(\mathbf{x},t-s) - \dot{l}_{ij}(\mathbf{x},s)\theta(\mathbf{x},t-s) \\
& \qquad - h_{ijk}(\mathbf{x},s)\theta_{,k}(\mathbf{x},t-s)\Big\} ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta(\mathbf{x},t) = {} & l_{ij}(\mathbf{x},0)e_{ij}(\mathbf{x},t) + a(\mathbf{x},0)\theta(\mathbf{x},t) \\
& + \int_0^\infty \Big\{ \dot{l}_{ij}(\mathbf{x},s)e_{ij}(\mathbf{x},t-s) + \dot{a}(\mathbf{x},s)\theta(\mathbf{x},t-s) \\
& \qquad + m_i(\mathbf{x},s)\theta_{,i}(\mathbf{x},t-s)\Big\} ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_i(\mathbf{x},t) = {} & \frac{1}{T_0} h_{rsi}(\mathbf{x},0)e_{rs}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{T_0} m_i(\mathbf{x},0)\theta(\mathbf{x},t) \\
& + \int_0^\infty \Big\{ k_{ij}(\mathbf{x},s)\theta_{,j}(\mathbf{x},t-s) + \frac{1}{T_0}\dot{h}_{rsi}(\mathbf{x},s)e_{rs}(\mathbf{x},t-s) \\
& \qquad + \frac{1}{T_0}\dot{m}_i(\mathbf{x},s)\theta(\mathbf{x},t-s)\Big\} ds.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

5.3 Descripción del problema

Nuestro estudio se restringirá a materiales centrosimétricos (i.e. invariantes bajo reflexiones), para los cuales se tiene que los tensores de orden impar son nulos y por lo tanto $h_{ijk} = 0$, $m_i = 0$.

Nuestro sistema de ecuaciones para la termoviscoelasticidad lineal es el compuesto por:

- la ecuación del movimiento:

$$
t_{ji,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad \text{en } \Omega_0 \times [0, t_1], \tag{5.14}
$$

- la ecuación de la energía:

$$
T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + S, \qquad \text{en } \Omega_0 \times [0, t_1], \tag{5.15}
$$

- las ecuaciones constitutivas:

$$
\begin{aligned}
t_{ij}(\mathbf{x},t) =& c_{ijrs}(\mathbf{x},0)e_{rs}(\mathbf{x},t) - l_{ij}(\mathbf{x},0)\theta(\mathbf{x},t) \\
&+ \int_0^\infty \Big\{\dot{c}_{ijrs}(\mathbf{x},s)e_{rs}(\mathbf{x},t-s) - \dot{l}_{ij}(\mathbf{x},s)\theta(\mathbf{x},t-s)\Big\}ds, \\
\eta(\mathbf{x},t) =& l_{ij}(\mathbf{x},0)e_{ij}(\mathbf{x},t) + a(\mathbf{x},0)\theta(\mathbf{x},t) \\
&+ \int_0^\infty \Big\{\dot{l}_{ij}(\mathbf{x},s)e_{ij}(\mathbf{x},t-s) + \dot{a}(\mathbf{x},s)\theta(\mathbf{x},t-s)\Big\}ds, \\
q_i(\mathbf{x},t) =& \int_0^\infty k_{ij}(\mathbf{x},s)\theta_{,j}(\mathbf{x},t-s)ds, \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

- la ecuación geométrica:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (5.17)$$

siendo $\mathbf{u}$ el desplazamiento; $\mathbf{t}$ el tensor de tensiones; $\mathbf{f}$ la fuerza volúmica; η la entropía por unidad de volumen, $\mathbf{q}$ el flujo de calor; S la fuente de calor volúmica; θ la diferencia entre T y una temperatura de referencia $T_0 > 0$ y ρ la densidad.

También, como consecuencia de la hipótesis de Gurtin, se tiene que las funciones de relajación verifican las relaciones de simetría:

$$c_{ijrs} = c_{rsij} = c_{jirs}, \qquad l_{ij} = l_{ji}, \qquad k_{ij} = k_{ji}. \qquad (5.18)$$

Consideraremos las condiciones de frontera:

$$
\begin{aligned}
t_{ij}n_j &= t_i \text{ en } \partial\Omega_0 - \partial\Omega_u \times (-\infty, t_0), & u_i &= \tilde{u}_i \text{ en } \partial\Omega_u \times (-\infty, t_0), \\
q_i n_i &= Q \text{ en } \partial\Omega_0 - \partial\Omega_\theta \times (-\infty, t_0), & \theta &= \tilde{\theta} \text{ en } \partial\Omega_\theta \times (-\infty, t_0), \quad (5.19)
\end{aligned}
$$

y las condiciones iniciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},-s) = \mathbf{z}_0(\mathbf{x},s), \qquad \theta(\mathbf{x},-s) = \alpha_0(\mathbf{x},s), \qquad \text{en} \quad \Omega_0 \times [0,\infty). \qquad (5.20)$$

5.4 Un resultado de unicidad de soluciones

Nuestro objetivo en esta sección es obtener un resultado de unicidad para el problema general (5.14)-(5.20). El resultado será aplicable a unos materiales que difieren de los estudiados anteriormente por Ieşan & Scalia [44].

Será útil escribir las ecuaciones constitutivas en la forma:

$$t_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[c_{ijrs}(t-s)\dot{u}_{r,s}(s) - l_{ij}(t-s)\dot{\theta}(s)\right]ds,$$
$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[l_{ij}(t-s)\dot{u}_{i,j}(s) + a(t-s)\dot{\theta}(s)\right]ds,$$
$$q_i(t) = \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\theta_{,j}(s)ds,$$

donde hemos suprimido la dependencia espacial por conveniencia.

Definamos las funciones:

$$\mathcal{K}_1(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \rho\dot{u}_i(t)\dot{u}_i(t)dV,$$
$$\mathcal{K}_2(t) = \int_{\Omega_0} \eta(t)\theta(t)dV,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t) =& \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \Big\{c_{ijkl}(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{u}_{k,l}(\tau_2) \\ &- l_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\left[\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2) + \dot{u}_{i,j}(\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\right] \\ &- a(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2)\Big\}d\tau_1 d\tau_2 dV,\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{T_0}k_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\theta_{,i}(\tau_1)\theta_{,j}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 dV,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t) =& \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{2t}\int_{-\infty}^{0} \Big\{c_{ijkl}(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{u}_{k,l}(\tau_2) \\ &- l_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\left[\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2) + \dot{u}_{i,j}(\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\right] \\ &- a(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2)\Big\}d\tau_1 d\tau_2 dV,\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{2t}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{T_0}k_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\theta_{,i}(\tau_1)\theta_{,j}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 dV,$$

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega_0} \int_0^t \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^s \Big\{ \dot{c}_{ijkl}(2s - \tau_1 - \tau_2)\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{u}_{k,l}(\tau_2) \\ - \dot{l}_{ij}(2s - \tau_1 - \tau_2)\big[\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2) + \dot{u}_{i,j}(\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\big] \\ - \dot{a}(2s - \tau_1 - \tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2)\Big\} d\tau_1 d\tau_2 ds dV,$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(t) = \int_{\Omega_0} \int_0^t \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^s \frac{\dot{k}_{ij}(2s - \tau_1 - \tau_2)}{T_0} \theta_{,i}(\tau_1)\theta_{,j}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ds dV,$$

$$\mathcal{W}_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho \dot{u}_i(0)\dot{u}_i(2t) dV,$$

$$\mathcal{W}_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \big(\eta(0)\theta(2t) + \eta(2t)\theta(0)\big) dV,$$

$$\mathcal{L}_1(r,s) = \int_{\partial\Omega_0} \big[t_{ij}(r)\dot{u}_j(s)\big] n_i dS + \int_{\Omega_0} \rho f_i(r)\dot{u}_i(s) dV,$$

$$\mathcal{L}_2(r,s) = \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{T_0} q_i(r)\theta(s) n_i dS + \int_{\Omega_0} \frac{1}{T_0} S(r)\theta(s) dV.$$

Precisaremos un par de lemas para poder enunciar el resultado de unicidad de soluciones.

Lema 5.1

$$\mathcal{U}(t) - \tilde{\mathcal{U}}(t) - \mathcal{K}_1(t) + \mathcal{K}_2(t) = \mathcal{J}(t) - \tilde{\mathcal{J}}(t) - \mathcal{W}_1(t) + \mathcal{W}_2(t) \\ -\frac{1}{2} \int_0^t \big[\mathcal{L}_1(t-s, t+s) - \mathcal{L}_2(t-s, t+s) \\ - \mathcal{L}_1(t+s, t-s) + \mathcal{L}_2(t+s, t-s)\big] ds. \qquad (5.21)$$

Demostración. Si definimos la función

$$\mathcal{H}(s,r) = t_{ij}(s)\dot{u}_{i,j}(r) - \eta(s)\dot{\theta}(r), \qquad (5.22)$$

un sencillo cálculo muestra que

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t-s,t+s)-\mathcal{H}(t+s,t-s)\\
&\quad=\frac{d}{ds}\Bigg\{\int_{-\infty}^{t-s}\int_{-\infty}^{t+s}\Big[c_{ijkl}(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{u}_{k,l}(\tau_2)\\
&\qquad\qquad-l_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\big[\dot{u}_{i,j}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2)+\dot{u}_{i,j}(\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\big]\\
&\qquad\qquad-a(2t-\tau_1-\tau_2)\dot{\theta}(\tau_1)\dot{\theta}(\tau_2)\Big]d\tau_1 d\tau_2\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

e integrando, obtenemos

$$
\int_{\Omega_0}\int_0^t\big[\mathcal{H}(t-s,t+s)-\mathcal{H}(t+s,t-s)\big]dsdV=2\mathcal{J}(t)-2\mathcal{U}(t). \tag{5.24}
$$

Por otro lado, usando las ecuaciones de evolución, podemos escribir (5.22) como

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t-s,t+s)\\
&\quad=\big[t_{ij}(t-s)\dot{u}_j(t+s)\big]_{,i}-\rho\big[\ddot{u}_i(t-s)-f_i(t-s)\big]\dot{u}_i(t+s)\\
&\qquad-\frac{d}{ds}\big[\eta(t-s)\theta(t+s)\big]-\frac{1}{T_0}\big[q_i(t-s)\theta(t+s)\big]_{,i}\\
&\qquad+\frac{1}{T_0}q_i(t-s)\theta_{,i}(t+s)-\frac{1}{T_0}S(t-s)\theta(t+s),
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

e integrando sobre Ω_0,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_0}\mathcal{H}(t-s,t+s)dV=&\mathcal{L}_1(t-s,t+s)-\mathcal{L}_2(t-s,t+s)\\
&-\int_{\Omega_0}\rho\ddot{u}_i(t-s)\dot{u}_i(t+s)dV\\
&-\int_{\Omega_0}\frac{d}{ds}\big[\eta(t-s)\theta(t+s)\big]dV\\
&+\int_{\Omega_0}\frac{1}{T_0}q_i(t-s)\theta_{,i}(t+s)dV.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

De forma análoga, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t+s,t-s)dV =& \mathcal{L}_1(t+s,t-s) - \mathcal{L}_2(t+s,t-s)\\ &- \int_{\Omega_0} \rho\ddot{u}_i(t+s)\dot{u}_i(t-s)dV\\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{d}{ds}\big[\eta(t+s)\theta(t-s)\big]dV\\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{1}{T_0}q_i(t+s)\theta_{,i}(t-s)dV. \end{aligned}\tag{5.27}$$

Integrando entre 0 y t la diferencia entre (5.26) y (5.27) y utilizando las identidades de Lagrange [10] , obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}\int_0^t \big[\mathcal{H}(t-s,t+s) - \mathcal{H}(t+s,t-s)\big]dsdV\\ &= -2\Big[\mathcal{K}_1(t) - \mathcal{K}_2(t) - \mathcal{W}_1(t) + \mathcal{W}_2(t)\Big]\\ &\quad + \int_0^t \big[\mathcal{L}_1(t-s,t+s) - \mathcal{L}_2(t-s,t+s)\\ &\qquad - \mathcal{L}_1(t+s,t-s) + \mathcal{L}_2(t+s,t-s)\big]ds\\ &\quad + \int_{\Omega_0}\int_0^t \frac{d}{ds}\Big[\int_{-\infty}^{t-s}\int_{-\infty}^{t+s} k_{ij}(2t-\tau_1-\tau_2)\theta_{,i}(\tau_1)\theta_{,j}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\Big]dsdV\\ &= \int_0^t \big[\mathcal{L}_1(t-s,t+s) - \mathcal{L}_2(t-s,t+s)\\ &\qquad - \mathcal{L}_1(t+s,t-s) + \mathcal{L}_2(t+s,t-s)\big]ds\\ &\quad - 2\Big[\mathcal{K}_1(t) - \mathcal{K}_2(t) - \mathcal{W}_1(t) + \mathcal{W}_2(t) - \tilde{\mathcal{J}}(t) + \tilde{\mathcal{U}}(t)\Big]. \end{aligned}\tag{5.28}$$

Las igualdades (5.24) y (5.28) dan lugar a (5.21) que es el resultado buscado. □

Lema 5.2

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}(t) + \tilde{\mathcal{U}}(t) + \mathcal{K}_1(t) + \mathcal{K}_2(t) - \mathcal{D}(t) - \tilde{\mathcal{D}}(t)\\ &\quad = \mathcal{U}(0) + \tilde{\mathcal{U}}(0) + \mathcal{K}_1(0) + \mathcal{K}_2(0) + \int_0^t \big[\mathcal{L}_1(s,s) + \mathcal{L}_2(s,s)\big]ds. \end{aligned}\tag{5.29}$$

Demostración. De la ecuación (5.22) tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t,t)dV \\
&\quad = \int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{t} \left[c_{ijkl}(t-\tau)\dot{u}_{i,j}(\tau)\dot{u}_{k,l}(t) - l_{ij}(t-\tau)\dot{u}_{i,j}(t)\dot{\theta}(\tau)\right] d\tau dV \\
&\quad\quad - \int_{\Omega_0}\int_{-\infty}^{t} \left[l_{ij}(t-\tau)\dot{u}_{i,j}(\tau)\dot{\theta}(t) + a(2t-\tau)\dot{\theta}(\tau)\dot{\theta}(t)\right] d\tau dV \\
&\quad = \dot{\mathcal{U}}(t) - \dot{\mathcal{D}}(t).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Utilizando las ecuaciones de evolución, de (5.22) también se obtiene

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{H}(t,t)dV = \mathcal{L}_1(t,t) + \mathcal{L}_2(t,t) - \dot{\mathcal{K}}_1(t) - \dot{\mathcal{K}}_2(t) - \dot{\tilde{\mathcal{U}}}(t) + \dot{\tilde{\mathcal{D}}}(t). \tag{5.31}$$

Entonces,

$$\dot{\mathcal{U}}(t) + \dot{\tilde{\mathcal{U}}}(t) + \dot{\mathcal{K}}_1(t) + \dot{\mathcal{K}}_2(t) - \dot{\mathcal{D}}(t) - \dot{\tilde{\mathcal{D}}}(t) = \mathcal{L}_1(t,t) + \mathcal{L}_2(t,t), \tag{5.32}$$

integrando entre 0 y t obtenemos (5.29).□

Teorema 5.4 *Supongamos:*

(i) *La densidad es escrictamente positiva*

$$0 < \rho_0 \leq ess \inf_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \leq ess \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_1 .$$

(ii) $a(\mathbf{x}, s)$ *es estrictamente positivo*

$$0 < a_0 \leq ess \inf_{\mathbf{x}\in\Omega_0} a(\mathbf{x},s) \leq ess \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0} a(\mathbf{x},s) \leq a_1.$$

(iii) *Las funciones de relajación cumplen las relaciones*

$$c_{ijrs} = c_{rsij} = c_{jirs}, \qquad l_{ij} = l_{ji}, \qquad k_{ij} = k_{ji}.$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{s} \frac{1}{T_0} k_{ij}(2s-\tau_1-\tau_2)\zeta_i(\tau_1)\zeta_j(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 ds > 0,$$

para todo vector $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{C}^1(-\infty,\infty)$ *no nulo.*

(v)

$$\int_0^t \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^s \Big[\dot{c}_{ijkl}(2s-\tau_1-\tau_2)u_{ij}(\tau_1)u_{kl}(\tau_2)$$
$$- \dot{a}(2s-\tau_1-\tau_2)\theta(\tau_1)\theta(\tau_2)$$
$$- \dot{l}_{ij}(2s-\tau_1-\tau_2)\big[u_{ij}(\tau_1)\theta(\tau_2) + u_{ij}(\tau_2)\theta(\tau_1)\big]$$
$$+ \frac{1}{T_0}\dot{k}_{ij}(2s-\tau_1-\tau_2)\zeta_i(\tau_1)\zeta_j(\tau_2)\Big] d\tau_1 d\tau_2 ds dV \leq 0,$$

para todo tensor $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(-\infty,\infty)$*, todo escalar* $\theta \in C^1(-\infty,\infty)$ *y todo vector* $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{C}^1(-\infty,\infty)$*.*

Entonces, el problema (5.14)-(5.18) con condiciones de frontera (5.19) y condiciones iniciales (5.20) tiene, a lo sumo, una solución.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones. Sean $\bar{u}_i$ y $\bar{\theta}$ sus diferencias. Si consideramos el problema correspondiente a $\bar{u}_i$ y $\bar{\theta}$, y restamos (5.21) de (5.29)

$$2\bar{\mathcal{K}}_1(t) + 2\bar{\bar{\mathcal{U}}}(t) = \bar{\mathcal{D}}(t) + \bar{\bar{\mathcal{D}}}(t), \tag{5.33}$$

las hipótesis $(i)-(v)$ implican $\bar{\mathcal{K}}_1(t) = \bar{\bar{\mathcal{U}}} = 0$. De $\bar{\mathcal{K}}_1 = 0$ se deduce que $\bar{u}$ es constante e igual a cero ya que inicialmente $\bar{u}_i$ es cero.

De $\bar{\mathbf{u}} = 0$ y (iv) se deduce $\nabla\bar{\theta} = 0$, y por lo tanto $\bar{\mathbf{q}} = 0$. Utilizando la ecuación de la energía se tiene $\bar{\eta}$ constante e igual a cero. De las ecuaciones constitutivas y (ii) se obtiene $\bar{\theta} = 0$. □

Nota 5.1 *Un conjunto de funciones, para materiales centrosimétricos e isótropos, que verifican la hipótesis (v), sería*

$$c_{ijrs}(s) = \big[\lambda\delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})\big][e^{-s} - k_1], \qquad k_{ij}(s) = k\delta_{ij}[e^{-s} - k_2],$$
$$l_{ij}(s) = l\delta_{ij}[e^{-s} - k_3], \qquad a(s) = a[e^{-s} - k_4],$$

siendo k_1*,* k_2*,* k_3 *y* k_4 *constantes y,* λ*,* μ*,* k*,* l *y* a *independientes de* s*, tales que*

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad k \geq 0, \quad a \geq 0, \quad |l| \leq 3\lambda + 2\mu + a.$$

Otro conjunto de funciones que verifican la hipótesis (v) sería

$$c_{ijrs}(s) = c_{ij}c_{rs}e^{-s}, \qquad a(s) = a^2 e^{-s},$$

$$k_{ij}(s) = -k_{ij}\ln(s+k_5), \qquad l_{ij} = a\, c_{ij} f(s)\, e^{-s},$$

siendo a y $k_5 > \frac{1}{2}$ constantes, $f(s)$ una función tal que $|f'(s) - f(s)| \leq 1$ para todo s y, k_{ij} un tensor para el cual existe una constante $\epsilon > 0$ tal que $k_{ij}v_iv_j \geq \epsilon v_iv_i$, para todo vector v_i.

5.5 Un resultado de existencia de soluciones

En esta sección y la siguiente trabajaremos con el caso particular

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \qquad \theta(\mathbf{x},t) = 0, \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_0 \times (-\infty, t_1], \tag{5.34}$$

de las condiciones de frontera (5.19).

Para lograr nuestro propósito utilizaremos la teoría de semigrupos de operadores lineales, transformando el problema (5.14)-(5.18), (5.34), (5.20) en un problema de evolución abstracto en un espacio de Hilbert adecuado.

Necesitaremos las siguiente hipótesis:

(i) La densidad es estrictamente positiva,

(ii) $a(\mathbf{x}, 0)$ es estrictamente positivo,

(iii) $\exists\delta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_0} \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{c}(\mathbf{x},\infty)\cdot\nabla\mathbf{u}\, dV \geq \delta\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\, dV,$$

para todo $\mathbf{u} \in [C_0^\infty(\Omega_0)]^3$,

(iv) $\exists\delta_2(s) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} &\big[\nabla\mathbf{u}\cdot\ddot{\mathbf{c}}(\mathbf{x},s)\cdot\nabla\mathbf{u} + 2\ddot{l}(\mathbf{x},s)\cdot\nabla\mathbf{u}\theta - \ddot{a}(\mathbf{x},s)\theta^2 \\ &+ \frac{1}{T_0}\mathbf{v}\cdot\ddot{\mathbf{k}}(\mathbf{x},s)\cdot\mathbf{v}\big]dV \geq \delta_2(s)\int_{\Omega_0}\big[\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \theta^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big]dV,\end{aligned} \tag{5.35}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega_0)]^3$ y todo $\theta \in C_0^\infty(\Omega_0)$,

(v)

$$\dot{a}(\mathbf{x},\infty)=\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x},\infty)=\dot{\mathbf{l}}(\mathbf{x},\infty)=\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{x},\infty)=\mathbf{k}(\mathbf{x},\infty)=0. \tag{5.36}$$

Nota 5.2 *Las hipótesis (i)-(iii) son usuales en la termoelastidad y su interpretación física es evidente. La hipótesis (iv) asegura el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica y, por último, la hipótesis (v) nos dice que el material olvida los estados suficientemente lejanos en el tiempo.*

Nota 5.3 *Las hipótesis (iv) y (v) implican la existencia de una función* $\delta_1(s)>0$ *tal que*

$$-\int_{\Omega_0}\big[\nabla\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x},s)\cdot\nabla\mathbf{u}+2\dot{\mathbf{l}}(\mathbf{x},s)\cdot\nabla\mathbf{u}\,\theta-\dot{a}(\mathbf{x},s)\theta^2 \\ +\frac{1}{T_0}\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{x},s)\cdot\mathbf{v}\big]dV\geq\delta_1(s)\int_{\Omega_0}\big[\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\theta^2+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big]dV, \tag{5.37}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in[C_0^\infty(\Omega_0)]^3$ *y todo* $\theta\in C_0^\infty(\Omega_0)$*, siendo* $\delta_1(s)=\int_s^\infty\delta_2(\tau)d\tau$.

Nota 5.4 *La nota 5.3, conjuntamente con la hipótesis (v), nos permiten afirmar que* $\mathbf{c}(s)>0$*,* $\mathbf{k}(s)>0$ *y* $a(s)>0$.

Nota 5.5 *La desigualdad (iv) puede verse también como una extensión natural de las hipótesis que se establecen en [53, 54] y [28] para sendas teorías de la termoelasticidad con memoria.*

Consideremos un elemento de la forma

$$\omega=(\mathbf{u},\mathbf{v},\theta,\mathbf{z}(s),\alpha(s)),$$

siendo $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{z}(s)=\mathbf{u}(t-s)$, $\alpha(s)=\theta(t-s)$, y el espacio funcional

$$\mathcal{X}_0=\{(\mathbf{u},\mathbf{v},\theta,\mathbf{z}(s),\alpha(s))\in\ \mathbf{C}_0^\infty(\Omega_0)\times\mathbf{C}_0^\infty(\Omega_0)\times C_0^\infty(\Omega_0)\times\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^2\},$$

donde

$$\mathcal{H}^1=\{\mathbf{z}\in[C_0^\infty([0,\infty),W_0^{1,2}(\Omega_0)\cap W^{2,2}(\Omega_0))]^3\},$$
$$\mathcal{H}^2=\{\alpha\in C_0^\infty([0,\infty),W_0^{1,2}(\Omega_0)\cap W^{2,2}(\Omega_0))\}.$$

Sea $\mathcal{X}$ el completado de $\mathcal{X}_0$ con la norma inducida por el producto escalar

$$
\begin{aligned}
&\langle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \theta_1, \mathbf{z}_1, \alpha_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \theta_2, \mathbf{z}_2, \alpha_2)\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega_0} \{\nabla\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{c}(\infty) \cdot \nabla\mathbf{u}_2 + \rho\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a(0)\theta_1\theta_2\} dV \\
&\quad - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \Big\{[\nabla\mathbf{u}_1 - \nabla\mathbf{z}_1(s)] \cdot \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot [\nabla\mathbf{u}_2 - \nabla\mathbf{z}_2(s)] \\
&\qquad + \Big\{\alpha_1(s)\dot{\mathbf{l}}(s) \cdot [\nabla\mathbf{u}_2 - \nabla\mathbf{z}_2(s)] + \alpha_2(s)\dot{\mathbf{l}}(s) \cdot [\nabla\mathbf{u}_1 - \nabla\mathbf{z}_1(s)]\Big\} \\
&\qquad - \dot{a}(s)\alpha_1(s)\alpha_2(s) + \frac{1}{T_0}\nabla\bar{\alpha}_1(s) \cdot \dot{\mathbf{k}}(s) \cdot \nabla\bar{\alpha}_2(s)\Big\} ds dV, \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

siendo

$$\bar{\alpha}(s) = \int_0^s \alpha(\tau) d\tau,$$

la historia sumada de $\alpha(s)$.

Nota 5.6 *Para un uso posterior recordemos las siguientes propiedades que se pueden verificar mediante un sencillo cálculo directo:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\bar{\varphi}^t(\mathbf{x}, s) &= \varphi^t(\mathbf{x}, s), \\
\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varphi}^t(\mathbf{x}, s) &= \varphi(\mathbf{x}, t) - \varphi^t(\mathbf{x}, s), \\
\overline{\frac{\partial}{\partial s}\varphi^t(\mathbf{x}, s)} &= \varphi^t(\mathbf{x}, s) - \varphi(\mathbf{x}, t). \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

Nota 5.7 *El producto escalar es definido positivo como consecuencia de las hipótesis (i)-(iii) y la desigualdad (5.37).*

Una vez definido el espacio funcional $\mathcal{X}$ en el que trabajar, para poder transformar el problema definido por las ecuaciones (5.14)-(5.18), (5.34), (5.20) en un problema de evolución abstracto es conveniente definir los operadores:

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\{\mathbf{c}(0) \cdot \nabla\mathbf{u}\}, \qquad \mathbf{G}\theta = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\{\mathbf{l}(0)\theta\},$$

$$\mathbf{C}\mathbf{z} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left\{\int_0^\infty \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla\mathbf{z} ds\right\}, \qquad \mathbf{D}\alpha = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left\{\int_0^\infty \dot{\mathbf{l}}(s)\alpha(s)\, ds\right\},$$

$$
\begin{gathered}
L\mathbf{u} = -\frac{1}{a(0)}\dot{\mathbf{l}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}, \qquad M\mathbf{v} = -\frac{1}{a(0)}\mathbf{l}(0)\cdot\nabla\mathbf{v}, \\
N\theta = -\frac{\dot{a}(0)}{a(0)}\theta, \qquad P\mathbf{z} = -\frac{1}{a(0)}\int_0^\infty \ddot{\mathbf{l}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)\,ds, \\
Q\alpha = -\frac{1}{a(0)}\int_0^\infty \ddot{a}(s)\alpha(s)\,ds + \frac{1}{a(0)}\mathrm{div}\left\{\int_0^\infty \frac{1}{T_0}\mathbf{k}(s)\cdot\nabla\alpha(s)ds\right\}, \\
\mathbf{R}\mathbf{z} = -\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{z}(s), \qquad W\alpha = -\frac{\partial}{\partial s}\alpha(s).
\end{gathered}
$$

Sea $\mathcal{A}$ el operador matricial definido por

$$
\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & 0 & \mathbf{G} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ L & M & N & P & Q \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix},
$$

donde $\mathbf{Id}$ es el operador identidad, con dominio

$$
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\omega \in \mathcal{X} \,|\, \mathcal{A}\omega \in \mathcal{X}, \ \mathbf{z}(0) = \mathbf{u}, \ \alpha(0) = \theta\}.
$$

Para posterior uso, es conveniente notar que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big\{(\mathbf{u},\mathbf{v},\theta,\mathbf{z},\alpha) \in \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times \\
W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega_0) \times \tilde{\mathcal{H}}_1 \times \tilde{\mathcal{H}}_2 \,|\, \mathbf{z}(0) = \mathbf{u}, \ \alpha(0) = \theta\big\}
\end{aligned}
$$

es denso en $\mathcal{X}$.

Por último, definimos

$$
\mathcal{F} = (0, \rho^{-1}\mathbf{f}, (a(0)T_0)^{-1}S, 0, 0), \qquad \omega_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \theta_0, \mathbf{z}_0, \alpha_0).
$$

Ahora ya estamos en condiciones de escribir nuestro problema como un problema de evolución abstracto en la forma:

$$
\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathcal{A}\omega(t) + \mathcal{F}(t), \qquad \omega(0) = \omega_0, \qquad 0 \leq t \leq t_1. \tag{5.40}
$$

Lema 5.3 *El operador $\mathcal{A}$ satisface la desigualdad*

$$
\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle \leq 0. \tag{5.41}
$$

Demostración. Si $\omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, entonces

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle = & \int_{\Omega_0} \Big\{ \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}(\infty) \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}\{\mathbf{c}(0) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{l}(0)\theta\} \Big\} dV \\
& + \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}\{\dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla \mathbf{z} - \dot{\mathbf{l}}(s)\alpha(s)\} ds dV \\
& - \int_{\Omega_0} \theta \Big\{ \dot{a}(0)\theta + \dot{\mathbf{l}}(0) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{l}(0) \cdot \nabla \mathbf{v} \Big\} dV \\
& - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \Big\{ \ddot{\mathbf{l}}(s) \cdot \nabla \mathbf{z}(s) + \ddot{a}(s)\alpha(s) \Big\} \theta \, ds dV \\
& + \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \operatorname{div}\Big\{ \frac{1}{T_0} \mathbf{k}(s) \cdot \nabla \alpha(s) \Big\} \theta \, ds dV \\
& - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty [\nabla \mathbf{v} + \nabla \dot{\mathbf{z}}(s)] \cdot \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}(s)] ds dV \\
& - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \Big\{ - \dot{\alpha}(s) \dot{\mathbf{l}}(s) \cdot [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}(s)] \\
& \qquad + \alpha(s) \dot{\mathbf{l}}(s) \cdot [\nabla \mathbf{v} + \nabla \dot{\mathbf{z}}(s)] \Big\} ds dV \\
& - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \dot{a}(s)\alpha(s)\dot{\alpha}(s) ds dV \\
& + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \nabla \dot{\bar{\alpha}}(s) \cdot \dot{\mathbf{k}}(s) \cdot \nabla \bar{\alpha}(s) ds dV.
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de la divergencia e integrando respecto a s por partes, tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle = & - \frac{1}{2T_0} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \nabla \bar{\alpha}(s) \cdot \ddot{\mathbf{k}}(s) \cdot \nabla \bar{\alpha}(s) ds dV \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty \ddot{a}(s) (\alpha(s) - \theta)^2 ds dV \\
& - \int_{\Omega_0} \int_0^\infty (\alpha(s) - \theta) \ddot{\mathbf{l}}(s) \cdot [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}(s)] ds dV \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}(s)] \cdot \ddot{\mathbf{c}}(s) \cdot [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}(s)] ds dV \\
& \leq 0,
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

con lo cual queda demostrado el lema. □

Lema 5.4 *El operador $\mathcal{A}$ satisface la condición*

$$\text{Rango}(\mathbf{Id} - \mathcal{A}) = \mathcal{X}. \tag{5.43}$$

Demostración. Debido a la definición del operador $\mathcal{A}$, la condición (5.43) se satisface si el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{v} - (\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\theta + \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\alpha) &= \hat{\mathbf{v}}, \\ \theta - (L\mathbf{u} + M\mathbf{v} + N\theta + P\mathbf{z} + Q\alpha) &= \hat{\theta}, \\ \mathbf{z} - \mathbf{R}\mathbf{z} &= \hat{\mathbf{z}}, \\ \alpha - W\alpha &= \hat{\alpha}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

tiene una solución $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta, \mathbf{z}, \alpha) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ si $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\alpha}) \in \mathcal{X}$.

De las dos últimas ecuaciones de (5.44) obtenemos

$$\mathbf{z}(s) = e^{-s}\left[\mathbf{u} + \int_0^s e^{\tau}\hat{\mathbf{z}}(\tau)d\tau\right],$$

$$\alpha(s) = e^{-s}\left[\theta + \int_0^s e^{\tau}\hat{\alpha}(\tau)d\tau\right]; \tag{5.45}$$

introduciendo la primera ecuación de (5.44) y (5.45) en la segunda y tercera de (5.44) se tiene

$$\mathcal{A}'\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}' & \mathbf{G}' \\ L' & M' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \tag{5.46}$$

donde

$$\mathbf{F}'\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\text{div}\left\{\mathbf{c}(0)\cdot\nabla\mathbf{u} + \int_0^\infty e^{-s}\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{u}\,ds\right\},$$

$$\mathbf{G}'\theta = \frac{1}{\rho}\text{div}\left\{\mathbf{l}(0)\theta + \int_0^\infty e^{-s}\dot{\mathbf{l}}(s)\theta\,ds\right\},$$

$$L'\mathbf{u} = \frac{1}{a(0)} \left\{ \mathbf{l}(0) \cdot \nabla \mathbf{u} + \dot{\mathbf{l}}(0) \cdot \nabla \mathbf{u} + \int_0^\infty e^{-s} \ddot{\mathbf{l}}(s) \cdot \nabla \mathbf{u} \, ds \right\},$$

$$\begin{aligned} M'\theta =& \theta + \frac{1}{a(0)} \left\{ \dot{a}(0)\theta + \int_0^\infty e^{-s} \ddot{a}(s)\theta \, ds \right\} \\ & - \frac{1}{a(0)} \operatorname{div} \left\{ \theta + \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{T_0} \mathbf{k}(s) \cdot \nabla \theta \, ds \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_1 = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left\{ \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau - s} \left\{ \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla \hat{\mathbf{z}}(\tau) - \dot{\mathbf{l}}(s) \hat{\alpha}(\tau) \right\} d\tau ds \right\},$$

$$\begin{aligned} g_2 =& \hat{\theta} - \frac{1}{a(0)} \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau - s} \left\{ \ddot{\mathbf{l}}(s) \cdot \nabla \hat{\mathbf{z}}(\tau) + \ddot{a}(s) \hat{\alpha}(\tau) \right\} d\tau ds \\ & + \frac{1}{a(0)} \mathbf{l}(0) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{a(0)} \operatorname{div} \left\{ \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau - s} \frac{1}{T_0} \mathbf{k}(s) \cdot \nabla \hat{\alpha}(\tau) \, d\tau ds \right\}. \end{aligned}$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ un producto escalar en L^2, convenientemente pesado, y consideremos la forma bilineal

$$\begin{aligned} B[(\mathbf{u}_1, \theta_1), (\mathbf{u}_2, \theta_2)] =& \langle \mathcal{A}'(\mathbf{u}_1, \theta_1)^T, (\mathbf{u}_2, \theta_2) \rangle_* \\ =& \langle (\mathbf{F}'\mathbf{u}_1 + \mathbf{G}'\theta_1, L'\mathbf{u}_1 + M'\theta_1), (\mathbf{u}_2, \theta_2) \rangle_*. \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de la divergencia se tiene

$$\begin{aligned} B[(\mathbf{u}, \theta), (\mathbf{u}, \theta)] =& \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s} \mathbf{c}(s) ds \right) \cdot \nabla \mathbf{u} \, dV \\ & + \int_{\Omega_0} \int_0^\infty e^{-s} a(s) \theta^2 ds dV \\ & + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega_0} \nabla \theta \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s} \mathbf{k}(s) ds \right) \cdot \nabla \theta dV. \end{aligned} \tag{5.47}$$

La nota 5.4 nos permite afirmar que B determina una norma equivalente a la usual del espacio $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \times W_0^{1,2}(\Omega_0)$.

Ahora hemos de ver que $(\mathbf{g}_1, g_2) \in \mathbf{W}^{-1,2} \times W^{-1,2}$.
Si $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_0} \rho\mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_1 dV\right| &= \Bigg|\int_{\Omega_0} \rho\mathbf{y} \cdot \Bigg[\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Big\{\int_0^\infty \int_0^s e^{\tau-s}\big\{\dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla\hat{\mathbf{z}}(\tau) \\
&\qquad - \dot{\mathbf{l}}(s)\hat{\alpha}(\tau)\big\}d\tau ds\Big\}\Bigg]dV\Bigg| \\
&\leq \left|\int_{\Omega_0} \rho\mathbf{y} \cdot (\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})dV\right| \\
&\quad + \Bigg|\int_{\Omega_0} \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau-s}\nabla\mathbf{y} \cdot \big\{\dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla\hat{\mathbf{z}}(\tau) \\
&\qquad - \dot{\mathbf{l}}(s)\hat{\alpha}(\tau)\big\}d\tau ds dV\Bigg| \\
&\leq \|\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)} \\
&\quad + \left|\int_{\Omega_0} \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau-s}\nabla\mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla\hat{\mathbf{z}}(\tau) d\tau ds dV\right| \\
&\quad + \left|\int_{\Omega_0} \int_0^\infty \int_0^s e^{\tau-s}\nabla\mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{l}}(s)\hat{\alpha}(\tau) d\tau ds dV\right|.
\end{aligned}$$

Como se verifica

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty \dot{\mathbf{c}}(\tau)e^{-\tau}d\tau = -\dot{\mathbf{c}}(s)e^{-s},$$

mediante integración por partes se obtiene

$$\int_0^\infty \dot{\mathbf{c}}(s)e^{-s} \cdot \int_0^s e^{\tau}\nabla\hat{\mathbf{z}}(\tau)d\tau ds = \int_0^\infty e^{s}\nabla\hat{\mathbf{z}}(s) \cdot \int_s^\infty \dot{\mathbf{c}}(\tau)e^{-\tau}d\tau ds. \tag{5.48}$$

Análogamente

$$\int_0^\infty \dot{\mathbf{l}}(s)e^{-s} \int_0^s e^{\tau}\hat{\alpha}(\tau)d\tau ds = \int_0^\infty e^{s}\hat{\alpha}(s) \int_s^\infty \dot{\mathbf{l}}(\tau)e^{-\tau}d\tau ds. \tag{5.49}$$

Utilizando las dos igualdades anteriores tenemos la estimación

$$\left|\int_{\Omega_0} \rho\mathbf{y}\cdot\mathbf{g}_1 dV\right| \leq \|\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}$$
$$+\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau}\nabla\mathbf{y}\cdot\dot{\mathbf{c}}(\tau)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)ds d\tau dV\right|$$
$$+\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau}\nabla\mathbf{y}\cdot\dot{\mathbf{l}}(\tau)\hat{\alpha}(s)ds d\tau dV\right|.$$

Por otra parte

$$-\int_s^{\infty}\dot{\mathbf{c}}(\tau)e^{-\tau}d\tau = -\dot{\mathbf{c}}(s)e^{-s}-\int_s^{\infty}\ddot{\mathbf{c}}(\tau)e^{-\tau}d\tau \leq -\dot{\mathbf{c}}(s)e^{-s},$$

donde la desigualdad es consecuencia de $\ddot{\mathbf{c}}(s)>0$. Como $\dot{\mathbf{c}}(s)<0$ podemos afirmar que

$$\left|\int_s^{\infty}\dot{\mathbf{c}}(\tau)e^{-\tau}d\tau\right| \leq \left|\dot{\mathbf{c}}(s)e^{-s}\right|.$$

Entonces, utilizando esta última desigualdad, la de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica, podemos establecer la estimación

$$\left|\int_{\Omega_0} \rho\mathbf{y}\cdot\mathbf{g}_1 dV\right| \leq \|\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{y}\cdot|\mathbf{c}(\infty)-\mathbf{c}(0)|\cdot\nabla\mathbf{y}\, dV$$
$$+\frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)ds dV\right|$$
$$+\left|\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{s-\tau}\nabla\mathbf{y}\cdot\dot{\mathbf{l}}(\tau)\hat{\alpha}(s)ds d\tau dV\right|.$$

La desigualdad (5.37) nos permite afirmar

$$-\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{u}dV \geq c_1(s)\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}dV, \quad c_1(s)>0,$$

$$\int_{\Omega_0}\dot{a}(s)\theta^2 dV \geq a_1(s)\int_{\Omega_0}\theta^2 dV, \quad a_1(s)>0,$$

$$\left\|\dot{\mathbf{l}}(s)\right\| \leq \lambda \left(c_1(s)\right)^{1/2} \left(a_1(s)\right)^{1/2}, \quad \lambda > 0, \tag{5.50}$$

siendo $\|\dot{\mathbf{l}}(\mathbf{x}, s)\| = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_0} (\dot{l}_{ij}(\mathbf{x}, s)\dot{l}_{ij}(\mathbf{x}, s))^{1/2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\int_s^\infty \dot{\mathbf{l}}(\tau)e^{-\tau}d\tau\right\| \leq & \lambda \int_s^\infty \left(c_1(\tau)\right)^{1/2} \left(a_1(\tau)\right)^{1/2} e^{-\tau} d\tau \\
\leq & \lambda \left(\int_s^\infty c_1(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^{1/2} \left(\int_s^\infty a_1(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^{1/2} \\
\leq & \lambda \left(c_1(s)\right)^{1/2} \left(a_1(s)\right)^{1/2} e^{-s},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que $a_1(s)$ y $c_1(s)$ son funciones monótonas decrecientes.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_0} \rho \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_1 dV\right| \leq & \|\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)} \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla \mathbf{y} \cdot \mathbf{c}(\infty) - \mathbf{c}(0)| \cdot \nabla \mathbf{y}\, dV \\
& + \frac{1}{2} \left|\int_{\Omega_0} \int_0^\infty \nabla \hat{\mathbf{z}}(s) \cdot \dot{\mathbf{c}}(s) \cdot \nabla \hat{\mathbf{z}}(s) ds dV\right| \\
& + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty c_1(s) \nabla \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} ds dV \\
& + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^\infty a_1(s) \hat{\alpha}^2(s) ds dV \\
< & \infty.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

De forma análoga se tiene que, si $y \in W_0^{1,2}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_0} a(0)\, y\, g_2\, dV\right| \leq & (\|\hat{\theta}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2})\, \|y\|_{W_0^{1,2}} \\ & + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |a(0)|\, y^2 dV + \frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \ddot{a}(s)\hat{\alpha}^2(s) ds dV\right| \\ & + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty c_2(s)\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s) ds dV \\ & + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty a_2(s) y^2 ds dV \\ & + \int_{\Omega_0} \frac{1}{T_0}\nabla y\cdot\mathbf{k}_\infty\cdot\nabla y dV \\ & + \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \frac{1}{T_0}\nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\mathbf{k}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s) ds dV \\ < & \infty. \end{aligned} \tag{5.52}$$

donde $c_2(s)$, $a_2(s)$ y $\tilde{\lambda}$ vienen dados de forma análoga a (5.50) pero a partir de la hipótesis (iv) y $\mathbf{k}_\infty = \int_0^\infty \mathbf{k}(s)ds$ (ver [33]).

Por lo tanto, el teorema de Riesz implica que existe un único par $(\mathbf{u},\theta) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)\times W_0^{1,2}(\Omega_0)$ solución de (5.46). Considerando la ecuación $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}$, es obvio que $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)$.

Por último, nos falta comprobar $(\mathbf{z},\alpha) \in \bar{\mathcal{H}}^1 \times \bar{\mathcal{H}}^2$ con lo cual el lema estará probado.

De la cuarta ecuación de (5.44) se sigue

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s) ds dV \\ &\qquad = \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \left[\nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s) + \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\dot{\mathbf{z}}(s)\right] ds dV.\end{aligned}$$

Integrando por partes se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)dsdV \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{c}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}\,dV + \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV \\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\ddot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV,
\end{aligned}
$$

y como $\ddot{\mathbf{c}}(s) > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{c}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}|,dV \\
&\qquad \leq -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)dsdV.
\end{aligned}
$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica llegamos a

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV &\leq -\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{c}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}\,dV \\
&\quad -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\hat{\mathbf{z}}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\hat{\mathbf{z}}(s)dsdV.
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

En virtud de la última ecuación de (5.44) llegamos a

$$
\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{a}(s)\alpha^2(s)dsdV \leq \int_{\Omega_0}\dot{a}(0)\theta^2 dV + \int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{a}(s)\hat{\alpha}^2(s)dsdV. \tag{5.54}
$$

A partir de la última ecuación de (5.44) podemos escribir

$$
\overline{\nabla\alpha} + \overline{\frac{\partial}{\partial s}\nabla\alpha} = \overline{\nabla\hat{\alpha}},
$$

y deducimos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\overline{\nabla\hat{\alpha}}(s)dsdV \\
&= -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\theta dsdV \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\ddot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV \\
&\quad +\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV,
\end{aligned}
$$

una vez que hemos utilizado las propiedades de la historia sumada y hemos integrado por partes. Como $\ddot{\mathbf{k}}(s)>0$, tras utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de la media aritmético-geométrica llegamos a

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV \\
&\leq -\frac{1}{2\epsilon_2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV \\
&\quad -\frac{\epsilon_2}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\theta\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\theta dsdV \\
&\quad -\frac{1}{2\epsilon_1}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV \\
&\quad -\frac{\epsilon_1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \overline{\nabla\hat{\alpha}}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\overline{\nabla\hat{\alpha}}(s)dsdV.
\end{aligned}
$$

Tomando $\epsilon_1=\epsilon_2=2$, concluimos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty & \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV \\
&\leq -2\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \overline{\nabla\hat{\alpha}}(s)\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\overline{\nabla\hat{\alpha}}(s)dsdV - 2\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\theta\cdot\dot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\theta dsdV.
\end{aligned} \tag{5.55}
$$

De la desigualdad (5.37) se deduce

$$
\begin{aligned}
2&\left|\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \alpha(s)\dot{\mathbf{l}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV\right| \\
&\leq -\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\mathbf{z}(s)\cdot\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s)dsdV+\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \dot{a}(s)\alpha^2(s)dsdV. \quad (5.56)
\end{aligned}
$$

Las desigualdades (5.53)-(5.56) nos permiten afirmar que $(\mathbf{z},\alpha)\in\tilde{\mathcal{H}}^1\times\tilde{\mathcal{H}}^2$, con lo cual el lema queda probado. □

Consecuencia de los dos lemas previos y del teorema de Hille-Yosida es el siguiente resultado:

Teorema 5.5 *Supongamos que*

$$\mathbf{f}\in\mathbf{C}^0([0,t_1],\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0))\cap\mathbf{C}^1([0,t_1],\mathbf{L}^2(\Omega_0)),$$

$$S\in C^0([0,t_1],W_0^{1,2}(\Omega_0))\cap C^1([0,t_1],L^2(\Omega_0)).$$

Entonces, para cualquier

$$(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0,\theta_0,\mathbf{z}_0,\alpha_0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$$

existe una única solución para el problema (5.14)-(5.18), (5.34), (5.20).

Nota 5.8 *Como $\mathcal{A}$ genera un semigrupo de contracciones, tenemos la siguiente estimación para las soluciones:*

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t),\ \theta(t),\mathbf{z}(t),\alpha(t))\| \\
&\qquad\leq\|(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0,\theta_0,\mathbf{z}_0,\alpha_0)\|+\int_0^t\left\{\int_{\Omega_0} f_i f_i+\left(\frac{S}{a(0)T_0}\right)^2 dV\right\}^{1/2} ds.
\end{aligned}
$$

Esta desigualdad es un resultado de dependencia continua respecto de parámetros iniciales que ya había sido obtenida en [44].

Nota 5.9 *El teorema 5.5 conjuntamente con la anterior observación nos permite afirmar que, en las hipótesis explicitadas $(i)-(v)$, el problema (5.14)-(5.18), (5.34), (5.20) de la termoelasticidad de materiales con memoria es un problema bien planteado ya que admite una única solución que depende continuamente de los parámetros iniciales y de las fuentes externas.*

5.6 Comportamiento asintótico de las soluciones

Para demostrar la estabilidad asintótica de un semigrupo de contracciones es suficiente comprobar (ver [21]) que las órbitas son precompactas y que el operador no tiene ningún autovalor imaginario puro en $\mathcal{E}$, el subespacio cerrado generado por los elementos $\omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tales que $\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle = 0$.

Lema 5.5

$$\mathcal{A}^{-1}0 = \{0\}.$$

Demostración. Hemos de comprobar que $\mathcal{A}\omega = 0$ implica $\omega = 0$. Si escribimos explícitamente el sistema tenemos

$$\mathbf{v} = 0, \tag{5.57}$$

$$\operatorname{div}\left\{\mathbf{c}(0)\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{l}(0)\theta + \int_0^\infty \left[\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s) - \dot{\mathbf{l}}(s)\alpha(s)\right]ds\right\} = 0, \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left\{\frac{1}{T_0}\int_0^\infty \mathbf{k}(s)\cdot\nabla\alpha(s)ds\right\} - \mathbf{l}(0)\cdot\nabla\mathbf{v} - \dot{\mathbf{l}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}\\ -\dot{a}(0)\theta - \int_0^\infty \left[\ddot{\mathbf{l}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s) + \ddot{a}(s)\alpha(s)\right]ds = 0,\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{z}(s) = 0, \tag{5.60}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\alpha(s) = 0. \tag{5.61}$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{u}, \qquad \alpha(s) = \theta,$$

con lo cual el sistema (5.57)-(5.61) se reduce a

$$\operatorname{div}\{\mathbf{c}(\infty)\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{l}(\infty)\theta\}=0, \tag{5.62}$$

$$\operatorname{div}\left\{\frac{1}{T_0}\int_0^\infty \mathbf{k}(s)\cdot\nabla\theta ds\right\}=0. \tag{5.63}$$

Multiplicando (5.63) por θ e integrando sobre Ω_0 se tiene

$$\frac{1}{T_0}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\theta\cdot\mathbf{k}(s)\cdot\nabla\theta dsdV=0.$$

Por consiguiente $\theta=0$. Entonces, (5.62) se reduce a

$$\operatorname{div}\{\mathbf{c}(\infty)\cdot\nabla\mathbf{u}\}=0;$$

multiplicando por $\mathbf{u}$ e integrando sobre Ω_0 se obtiene

$$\int_{\Omega_0}\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{c}(\infty)\cdot\nabla\mathbf{u}dV=0,$$

y por lo tanto $\mathbf{u}=0$, con lo cual el lema queda demostrado. □

Lema 5.6 *El operador $\mathcal{A}$ no tiene ningún valor propio imaginario puro en el subespacio cerrado $\mathcal{E}$.*

Demostración. Hemos de ver que la ecuación $\mathcal{A}\omega=i\lambda\omega$, $\lambda\in\mathbb{R}$, tiene como única solución $\omega=0$ en $\mathcal{E}$.

Sabemos que $\langle\mathcal{A}\omega,\omega\rangle=0$ ya que $\omega\in\mathcal{E}$. Entonces, como consecuencia de (5.42) tenemos:

$$\begin{aligned}0=&-\frac{1}{2T_0}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \nabla\bar{\alpha}(s)\cdot\ddot{\mathbf{k}}(s)\cdot\nabla\bar{\alpha}(s)dsdV\\&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty \ddot{a}(s)(\alpha(s)-\theta)^2dsdV\\&-\int_{\Omega_0}\int_0^\infty(\alpha(s)-\theta)\ddot{\mathbf{l}}(s)\cdot[\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)]dsdV\\&-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^\infty[\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)]\cdot\ddot{\mathbf{c}}(s)\cdot[\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)]dsdV.\end{aligned} \tag{5.64}$$

Una consecuencia de (5.64) es que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}[\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)]\cdot\ddot{\mathbf{c}}(s)\cdot[\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)]dsdV=0. \tag{5.65}$$

Debido a las hipótesis se deduce que

$$\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{z}(s)=0. \tag{5.66}$$

Por otra parte, si resolvemos la penúltima ecuación del sistema $\mathcal{A}\omega=i\lambda\omega$ tenemos

$$\mathbf{z}=e^{-i\lambda s}\mathbf{u}, \tag{5.67}$$

y por consiguiente (5.66) se puede escribir

$$\nabla\mathbf{u}\left(1-e^{-i\lambda s}\right)=0, \tag{5.68}$$

que obliga a $\mathbf{u}=0$ si $\lambda\neq 0$.

Otra consecuencia de (5.64) es que

$$\int_{\Omega_0}\int_0^{\infty}\ddot{a}(s)(\alpha(s)-\theta)^2dsdV=0. \tag{5.69}$$

Resolviendo la última ecuación del sistema $\mathcal{A}\omega=i\lambda\omega$, podemos llegar a la conclusión

$$\theta\left(1-e^{-i\lambda s}\right)=0, \tag{5.70}$$

de donde se deduce immediatamente $\theta=0$ si $\lambda\neq 0$. □

Lema 5.7 *Las órbitas son precompactas.*

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \{&(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \theta^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*) \in \mathcal{D}(\mathcal{A});\\ &\mathbf{z}^* \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)), \alpha^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+, W^{2,2}(\Omega_0))\},\end{aligned}$$

y sea $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s))$ una solución que empieza en el punto $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \theta^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*) \in \mathcal{M}$.

Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ y

$$||\mathcal{A}\,(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s))\,|| \leq ||\mathcal{A}\,(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \theta^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*)\,||,$$

ya que el semigrupo es disipativo.

En particular,

$$\begin{aligned}&\mathbf{v} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0)),\\ &\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega_0)),\\ &\frac{\partial \alpha}{\partial s} \in C(\mathbb{R}^+, W_0^{1,2}(\Omega_0) \cap W^{2,2}(\Omega_0)),\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\Big\{\mathbf{c}(0)\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathrm{l}(0)\theta + \int_0^\infty \big[\dot{\mathbf{c}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s) - \dot{\mathrm{l}}(s)\alpha(s)\big]ds\Big\} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{L}^2(\Omega_0)),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\Big\{\frac{1}{T_0}\int_0^\infty \mathbf{k}(s)\cdot\nabla\alpha(s)ds\Big\} &- \mathrm{l}(0)\cdot\nabla\mathbf{v} - \dot{\mathrm{l}}(0)\cdot\nabla\mathbf{u}\\ &- \dot{a}(0)\theta - \int_0^\infty \Big[\ddot{\mathrm{l}}(s)\cdot\nabla\mathbf{z}(s) + \ddot{a}(s)\alpha(s)\Big]\,ds \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_0)).\end{aligned} \tag{5.71}$$

Haciendo uso de un esquema de iteración de Picard [19] en (5.71) obtenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}&||(\mathbf{u},\theta)||_{\mathbf{W}_0^{2,2}(\Omega_0)\times W_0^{1,2}(\Omega_0)}\\ &\quad\leq k\,||\mathbf{F}\mathbf{u} + \mathbf{G}\theta + \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\alpha, L\mathbf{u} + M\mathbf{v} + N\theta + P\mathbf{z} + D\alpha||_{\mathbf{L}^2(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0)},\end{aligned}$$

siendo k una constante positiva. De aquí se sigue que $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^+, \mathbf{W}_0^{2,2}(\Omega_0))$, y $\theta \in C(\mathbb{R}^+, W_0^{1,2}(\Omega_0))$.

Utilizando el teorema de Rellich-Kondrachov [1], podemos concluir que las órbitas con origen en $\mathcal{M}$ son precompactas.

Por otra parte, $\mathcal{M}$ es denso en $\mathcal{X}$ y además es cerrado [20]; por lo tanto, toda órbita que empieza en un punto de $\mathcal{X}$ es precompacta. $\square$

Como consecuencia de los lemas 5.6 y 5.7 podemos enunciar el teorema:

Teorema 5.6 *Supongamos que* $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s))$ *es la solución del problema (5.14)-(5.18), (5.34), (5.20) con* $f_i = S = 0$*; entonces,*

$$\lim_{t\to\infty} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \mathbf{z}(t,s), \alpha(t,s)) = 0$$

en la norma inducida por el producto escalar (5.38).

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones

En el presente trabajo hemos estudiado las ecuaciones incrementales para materiales termoelásticos no acotados, obteniendo un resultado de existencia de soluciones para el caso en que el tensor incremental de elasticidades, D_{KijN}, es fuertemente elíptico. Algunos casos particulares en que esta hipótesis es satisfecha son presentados. Este resultado es una extensión del obtenido anteriormente en [55].

Posteriormente hemos considerado que nuestros materiales son, además, porosos [57]. Para determinar el comportamiento de este tipo de materiales es necesario introducir una nueva variable independiente, la fracción volúmica, y una nueva ecuación de evolución. Una vez formulado el problema incremental [37], se obtienen resultados de unicidad de soluciones para condiciones de frontera mixtas, y de existencia de soluciones para condiciones de frontera homogéneas.

El siguiente paso ha sido considerar que las ecuaciones constitutivas no sólo dependen del estado actual del material, sino que también son funcionales de sus estados pasados. Tanto en el caso de materiales porosos viscoelásticos como en el de materiales termoelásticos, se han obtenido resultados de unicidad, existencia y comportamiento asintótico de soluciones.

Resumiendo, podemos afirmar que los problemas de la termoelasticidad incremental de materiales no acotados, de la termoelasticidad de materiales porosos pretensionados, de la viscoelasticidad de materiales porosos y de la termoelasticidad de materiales con memoria son problemas bien puestos, ya que admiten una única solución que depende continuamente de las fuentes externas y de las condiciones iniciales.

6.2 Problemas abiertos

A continuación se enumeran sólo algunas de las cuestiones que han surgido al realizar la presente memoria:

1. Comportamiento asintótico de las soluciones en los problemas incrementales. Un posible camino a seguir sería la reducción de ecuaciones en derivadas parciales a sistemas finito-dimensionales.

2. Tasa de decaimiento de las soluciones de los problemas viscoelásticos. En trabajos recientes, Muñoz Rivera [52] y Liu & Zheng [47] han obtenido decaimiento exponencial de las soluciones en algunos problemas más sencillos.

3. Estudio de las ecuaciones incrementales para materiales porosos viscoelásticos con memoria. Las ecuaciones han sido planteadas, pero han resultado ser poco manejables.

4. Estudio de las ecuaciones para materiales termoelásticos con memoria sin simetría central. Los esfuerzos realizados para eliminar dicha restricción han resultado infructuosos, hasta el momento.

5. Planteamiento de las ecuaciones incrementales para materiales termoelásticos con memoria. En este caso los problemas son de fundamentación; ni siquiera se tiene clara la existencia de funcionales como la energía libre.

6. Dependencia de las soluciones respecto de las condiciones de frontera.

Bibliografía

[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] T. Alfrey & E.F. Gurnee. *Dynamics of viscoelastic behavior*, capítulo 11, volumen I de *Rheology*, ed. Eirich. Academic Press, 1976.

[3] R.C. Batra & J.S. Yang. Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials. *J. Elasticity*, **39**:265–271, 1995.

[4] F. Bofill & R. Quintanilla. Some qualitative results for the linear theory of thermo-microstretch elastic solids. *Int. J. Engng. Sci.*, **33**:2115–2125, 1995.

[5] H. Brézis. *Análisis funcional.* Alianza universidad textos, Madrid, 1983.

[6] D.E. Carlson. *Linear thermoelasticity*, capítulo 2, volumen VI a/2 de *Handbuch der Physik*, ed. C. Truesdell. Springer, Berlin, 1972.

[7] A.L. Cauchy. Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. *Ex. de Math.*, **3**:293–319, 1829.

[8] D.S. Chandrasekharaiah & S.C. Cowin. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity. *J. Elasticity*, **21**:121–126, 1989.

[9] S. Chiriţa. Uniqueness and continuous dependence results for the incremental thermoelasticity. *J. Ther. Stresses*, **5**:161– 172, 1982.

[10] S. Chiriţa & S. Rionero. Lagrange identity in linear viscoelasticity. *Int. J. Engng. Sci.*, **29**:1181–1200, 1991.

[11] M. Ciarletta. Reciprocal and variational theorems for viscoelastic materials with voids. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, **123**:243–252, 1989.

[12] M. Ciarletta & D. Ieşan. *Non-classical elastic solids*, volumen 293 de *Pitman Research Notes in Mathematical Series.* Longman Scientif and Technical, Harlow, Essex, 1993.

[13] M. Ciarletta & A. Scalia. On some theorems in the linear theory of viscoelastic materials with voids. *J. Elasticity*, **25**:149–158, 1991.

[14] B.D. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**:1–46, 1964.

[15] B.D. Coleman & J.V. Mizel. Norms and semi-groups in the theory of fading memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **23**:87–123, 1966.

[16] B.D. Coleman & W. Noll. Foundations of linear viscoelasticity. *Review of Modern Physics*, **33**:239–249, 1961. Errata, **36**:1103, 1964.

[17] B.D. Coleman & W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **13**:167–178, 1963.

[18] S.C. Cowin & J.W. Nunziato. Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, **13**:125–147, 1983.

[19] C.M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **37**:297–308, 1970.

[20] C.M. Dafermos. Semiflows associated with compact and uniform processes. *Math. Sys. Theory*, **8**:142–149, 1974.

[21] C.M. Dafermos. *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics*, páginas 295–306, en *IUTAM/IMU Symposium on applications of methods of functional analysis to problems in mechanics*, volumen 503 de *Lectures Notes in Mathematics.* Springer, 1976.

[22] C.M. Dafermos. The second law of thermodynamics and stability. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **70**:167–179, 1979.

[23] W.A. Day. Time- reversal and symmetry of the relaxation function of a linear viscoelastic material. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **40**:155–159, 1970.

[24] A.H. England & A.E. Green. Steady state thermoelasticity for initially stressed bodies. *Phil. Trans. Ro. Soc. London Set A*, **253**:517–542, 1961.

[25] A.C. Eringen. *Constitutive equations for simple materials*, páginas 131–172, volumen II de *Continuum Physics*, ed. A.C. Eringen. Academic Press, New York, 1975.

[26] A.C. Eringen & E.S. Suhubi. *Elastodynamics.* Academic Press, New York, 1974.

[27] M. Fabrizio & A. Morro. *Mathematical problems in linear viscoelasticity.* SIAM studies in applied mathematics, Philadelphia, 1992.

[28] A. Falqués. Thermoelasticity and heat conduction with memory effects. *J. Thermal Stresses*, **5**:145–160, 1982.

[29] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur.* Paris, 1822.

[30] J.A. Goldstein. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press, New York, 1985.

[31] M.A. Goodman & S.C. Cowin. A continuum theory for granular materials. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **44**:249–266, 1972.

[32] A.E. Green. Thermoelastic stresses in initially stressed bodies. *Proc. R. Soc. London Set A*, **255**:1–19, 1962.

[33] M.E. Gurtin. Time-reversal and symmetry in the thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **44**:387–399, 1971.

[34] M.E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*, volumen 158 de *Mathematics in science and engineering.* Academic Press, San Diego, 1993.

[35] D. Ieşan. Incremental equations in thermoelasticity. *J. Thermal Stresses*, **3**:41–56, 1980.

[36] D. Ieşan. A theory of thermoelastic materials with voids. *Acta Mechanica*, **60**:67–89, 1986.

[37] D. Ieşan. A theory of initially stressed thermoelastic materials with voids. *An. St. Univ. Al. I. Cuza-Iaşi*, **33**:167–184, 1987.

[38] D. Ieşan. Thermoelasticity of initially heated bodies. *J. Thermal Stresses*, **11**:17–38, 1988.

[39] D. Ieşan. *Prestressed bodies.* Longman Scientific and technical, London, 1989.

[40] D. Ieşan & R. Quintanilla. On the grade consistent theory of micropolar thermoelasticity. *J. Thermal Stresses*, **15**:393–417, 1992.

[41] D. Ieşan & R. Quintanilla. Existence and continuous dependence results in the theory of microstretch elastic bodies. *Int. J. Engng. Sci.*, **32**:991–1001, 1994.

[42] D. Ieşan & R. Quintanilla. Existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua. *J. Elasticity* , **36**:85–98, 1994.

[43] D. Ieşan & R. Quintanilla. Decay estimates and energy bounds for porous elastic cylinders. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, **46**:268–281, 1995.

[44] D. Ieşan & A. Scalia. Some theorems in the theory of thermoviscoelasticity. *J. Thermal Stresses*, **12**:225–239, 1989.

[45] L. Kato. Linear evolution equations of hyperbolic type I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I*, **17**:241–258, 1970.

[46] R.J. Knops & E.W. Wilkes. *Theory of elastic stability*, capítulo 2, volumen VIa/2 de *Handbuch der Physik*, ed. C. Truesdell. Springer, Berlin, 1973.

[47] Z. Liu & S. Zheng. On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity. *Quart. Appl. Math.*, **54**:21–31, 1996.

[48] H.W. Lord & Y. Shulmam. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:299–309, 1967.

[49] A.E. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* 2 ed., Cambridge, 1906.

[50] J.E. Marsden & T.J.R. Hugues. *Mathematical foundations of elasticity.* Prentice-Hall, New Jersey, 1983.

[51] F. Martínez & R. Quintanilla. Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. *Collect. Math.*, **46**: 263–277, 1995.

[52] J.E. Muñoz Rivera. Energy decay rate in linear thermoelasticity. *Funkcial Ekvac.*, **35**:19–30, 1992.

[53] C.B. Navarro. Asymptotic stability in linear thermoviscoelasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, **65**:399–431, 1978.

[54] C.B. Navarro. *Existence and uniqueness in the Cauchy problem for a linear thermoelastic material with memory,* páginas 191–204, apéndice al artículo de J.E. Marsden & T.J. Hugues en *Topics in mathematical foundations of elasticity, Heriot-Watt Symposium II,* Pitman, London, 1978.

[55] C.B. Navarro & R. Quintanilla. On existence and uniqueness in incremental thermoelasticity. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, **35**:206–215, 1984.

[56] C.L. Navier. Mémoire sur les lois d'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Mém. Acad. Sci. Inst. France,* **7**:375–393, 1821.

[57] J.W. Nunziato & S.C. Cowin. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **72**:175–201, 1979.

[58] A. Pazy. On the applicability of Liapunov's theorem in Hilbert space. *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:291–294, 1972.

[59] A. Pazy. *Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behaviour*, páginas 36–134, *Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt Symposium, volume III,* ed. R.J. Knops, Pitman Research notes in Math 30, London, 1979.

[60] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New-York, 1983.

[61] P. Puri & S.C. Cowin. Plane wawes in linear elastic materials with voids. *J. Elasticity,* **15**:167–183, 1985.

[62] R. Quintanilla. *Sobre el estudio cualitativo de las ecuaciones de evolución para la termoelasticidad incremental.* Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, 1985.

[63] R. Quintanilla. Asymptotic behaviour in incremental thermoelasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, **125**:154–160, 1987.

[64] R. Quintanilla & H.T. Williams. An existence and uniqueness theoren for incremental viscoelasticity. *Quart. Appl. Math.*, **43**:287–294, 1985.

[65] M. Renardy & R.C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volumen 13 de *Texts in applied mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[66] G. Rusu. On existence and uniqueness in thermoelasticity of materials with voids. *Bull. Polon. Sci. Techn. Sci.*, **35**:339–346, 1987.

[67] S.P. Timoshenko. *History of strength of materials.* Dover, New York, 1983.

[68] F. Treves. *Basic linear partial differential equations.* Academic Press, New York, 1975.

[69] C. Truesdell. *Ensayos de historia de la mecánica.* Tecnos, Madrid, 1975.

[70] C. Truesdell & W. Noll. *The non linear field theories of mechanics*, volumen III/3 de *Encyclopedia of Physik.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[71] C. Truesdell & R.A. Toupin. *The classical field theories*, volumen III/1 de *Encyclopedia of Physik.* Springer-Verlag, Berlin, 1960.