Universitat Politècnica de Catalunya

Programa de Doctorado de Matemática Aplicada

Aportaciones al estudio de soluciones para juegos cooperativos

José Miguel Giménez Pradales

Manresa—Terrassa

2001

Índice

0

Introducción

El desarrollo de las matemáticas ha seguido, en numerosas ocasiones, el reflejo de las situaciones y de los problemas que se presentan en las actividades humanas. El comercio, la industria, la construcción, la navegación, han hecho que se crearan y perfeccionaran métodos matemáticos que pudieran dar respuesta a los retos que, en cada momento, se han presentado ante el entendimiento del ser humano.

Para poder comprender la realidad que le rodea, modificarla, e incluso predecir sus manifestaciones, el hombre crea una serie de objetos abstractos que, dentro de un sistema de reglas matemáticas precisas, pueden relacionarse entre sí, asimilando aquello que sucede a ciertas acciones sobre los objetos que ha creado. Ha nacido así el modelo matemático. De la intuición creativa y del poder de relación entre los objetos, además del uso de las leyes de la lógica, dependerá la bondad del modelo matemático en el ajuste de la realidad que le inspira.

Los modelos matemáticos que tradicionalmente han servido para describir situaciones surgidas en la física, en la ingeniería o en las finanzas, se han revelado recientemente útiles en el estudio y la descripción de fenómenos relativos a la conducta humana.

Los conflictos de intereses y todo aquello que rodea a la toma de decisiones se encuentra presente en la práctica totalidad de las actividades humanas: en economía, en sociología, en política y en muchas otras actividades se presentan situaciones de competición entre los agentes que intervienen que, a su vez, requieren de la cooperación entre los mismos para poder alcanzar sus objetivos. El binomio competencia-cooperación se muestra indisoluble a la hora de explicar las relaciones entre esos agentes, ya sean individuos de un colectivo, empresas de un sector, o incluso países en las instituciones que los representan.

En general, los problemas relativos a conflictos de intereses o toma de decisiones se caracterizan por la existencia de un grupo de individuos que se encuentra ante una situación que puede tener más de un desenlace, respecto a cada uno de los cuales cada individuo tiene una determinada preferencia personal. Además, cada individuo controla alguna de las variables que determina el resultado final, aunque no controla la totalidad. Cada una de estas sitaciones se denomina juego. Así, un juego puede recoger situaciones tan dispares como una partida de naipes, la obtención de una contrata por parte de ciertas empresas o la negociación de acuerdos internacionales entre países.

El inicio de la teoría matemática que estudia los conflictos de intereses, denominada Teoría de Juegos, se establece en el año 1944, a raiz de la publicación del libro "Game Theory and Economic Behavior" de John von Neumann y Oskar Morgenstern, aunque ya se tuviera constancia de trabajos previos a principios de este siglo. Desde entonces, la Teoría de Juegos ha evolucionado ampliamente y ha visto como sus modelos se han aplicado especialmente a la economía y a la política, así como a otras ciencias sociales como filosofía o psicología, ya que sus modelos se ajustan al estudio de la conducta humana.

No es que la Teoría de Juegos pueda abarcar todos y cada uno de los problemas relacionados con la toma de decisiones o con los conflictos de intereses; en general, ha de suponerse que existe un número concreto de jugadores, que se conocen y que están determinados todos los posibles resultados del juego, que cada jugador tiene una preferencia entre los diferentes resultados que puede expresarse en términos de una función de utilidad y que el objetivo de cada jugador es maximizar la utilidad obtenida tras el desenlace del juego.

El problema para cada jugador consiste en determinar la estrategia que debe seguir, de manera que su influencia parcial en el juego le resulte lo más beneficiosa posible. Ante esta situación, se presenta una primera clasificación entre juegos: los cooperativos y los no cooperativos.

La teoría de juegos no cooperativos se ocupa del comportamiento de los agentes del juego en aquellas situaciones en las que la elección de la estrategia óptima de cada jugador depende de su pronóstico sobre las elecciones de los oponentes y busca maximizar su propio beneficio desconociendo la elección efectuada por los demás.

En el caso en que pueda haber comunicación entre los jugadores, de manera que puedan negociar o establecer acuerdos que permitan formar coaliciones, entonces la situación se enmarca dentro de los llamados juegos cooperativos. En estas situaciones, se considera como información básica la utilidad que cada coalición puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes, con independencia de la actuación del resto de los agentes del juego. Así, los acuerdos entre los miembros de cada coalición se encaminan a coordinar sus actuaciones o a redistribuir los pagos o ganancias obtenidos.

En un sentido amplio, la teoría de juegos cooperativos trata sobre las elecciones que los jugadores efectúan, o que deberían efectuar, para obtener resultados de equilibrio, así como de algunos aspectos relativos a la comunicación entre los jugadores o la formación de coaliciones entre los mismos.

Por otra parte, la redistribución de los pagos obtenidos será posible si la utilidad que se obtiene en el juego es transferible. Un ejemplo de utilidad transferible sería el pago en dinero, o en cualquier otro bien que pudiera dividirse tantas veces como fuera necesario; en contraposición a la utilidad transferible, existen situaciones en las que la utilidad es un bien subjetivo referido a preferencias personales de los jugadores. De esta forma, si la utilidad es transferible, un único número permite describir las posibilidades estratégicas de cada coalición, entendiendo que a la hora de la redistribución, las apetencias de cada jugador respecto a la utilidad disponible serán equiparables.

Esta memoria se centra al entorno de los juegos cooperativos con utilidad transferible. Una vez modelizada una determinada situación de conflicto de intereses mediante un juego específico, el problema central que aborda la Teoría de Juegos en este campo consiste en la distribución de la totalidad de la utilidad disponible entre los diferentes jugadores. Para dar respuesta a este planteamiento se emplean modelos de razonamiento matemático en los que priman ideas como equidad, justicia o igual tratamiento, de manera que las soluciones puedan ser comunmente aceptadas por los agentes del juego. Dado que los criterios que pueden hacer ver un resultado como justo son dispares, podrán proponerse para un mismo juego diferentes soluciones, según se traduzcan las ideas de justicia o de equidad a la formulación matemática.

Una vez fijadas las reglas que permitan obtener la solución de los diferentes juegos, la solución explícita encontrada para cada uno de ellos ha de traducir las condiciones que la inspiraron a ese caso concreto, de manera que pueda ser empleada como referencia de la situación relativa de cada jugador dentro del juego y, en su conjunto, pueda ser comparada con otras posibles soluciones de esa misma situación que puedan derivarse de enfoques diferentes en la distribución de la utilidad.

El objetivo del presente trabajo consiste en la generalización y el estudio de modelos y métodos que han mostrado su eficiencia respecto a las soluciones para los juegos cooperativos propuestas por Shapley o por Banzhaf, así como el desarrollo de propiedades derivadas de la generalización de esos conceptos. Para las soluciones de Shapley y de Banzhaf se conoce su modificación por la formación de estructuras de coalición en el conjunto de jugadores y su cálculo por medio de la extensión multilineal del juego que se considere; también se conoce para ambas la posibilidad de considerar un potencial que permite recuperar las propias soluciones. Estos y otros conceptos se extienden a una clase más amplia de soluciones para los juegos cooperativos: los semivalores. En esta extensión juegan un papel esencial ciertas familias de semivalores que forman sistemas de referencia en el conjunto de los semivalores.

Conforme a la idea general que se ha establecido, esta memoria, que tiene por título *Aportaciones al estudio de soluciones para juegos cooperativos*, se estructura en seis capítulos, de los que a continuación se presenta un breve resumen.

El primer capítulo contiene una introducción a los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible. Allí se recuerdan las soluciones para estos juegos que aparecerán a lo largo de la memoria: Shapley, Banzhaf, semivalores, soluciones basadas en el exceso, para acabar con el concepto de potencial para el valor de Shapley. En otro orden de consideración destacan las modificaciones en la cooperación debidas a la introducción en el conjunto de jugadores de estructuras de coalición o de grafos que modelizan situaciones de cooperación parcial. Finalmente, se recuerda el concepto y las propiedades básicas de la extensión multilineal de los juegos cooperativos. El contenido de este capítulo no es original y su inclusión se justifica por la pretensión de unificar en lo posible la notación, así como de lograr un elevado grado de autonomía de la totalidad de la obra.

El segundo capítulo es el dedicado a estructuras de coalición y semivalores. Los semivalores que atribuyen a cada jugador la misma probabilidad de formar parte de cualquier coalición, a los que llamamos binomiales, constituyen un sistema de referencia para el conjunto de semivalores, cuando su número es igual al cardinal del conjunto de jugadores. De esta forma, el pago por cualquier semivalor puede determinarse linealmente a través de la extensión multilineal del juego, empleando una matriz cuyos coeficientes se obtienen a partir de esta función. A su vez, la misma combinación lineal de semivalores binomiales da lugar a semivalores inducidos en juegos cooperativos con menor cardinal del conjunto de jugadores, con independencia del sistema de referencia escogido. Esta consideración permite definir de manera natural la modificación de cualquier semivalor para juegos con estructura de coalición en el conjunto de jugadores, coincidiendo con el valor coalicional de Owen (1977) para el valor de Shapley. Se incluye, a continuación, un método para calcular cualquier semivalor modificado, transformando la extensión multilineal hasta determinar los elementos de una matriz, obteniendo el resultado de manera análoga a como se opera una forma cuadrática en expresión matricial.

Este capítulo acaba probando que cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición cumple propiedades deseables como simetría dentro de los bloques, jugador nulo o aditividad, llegándose a conseguir una caracterización axiomática para una de estas modificaciones, concretamente la correspondiente al valor de Banzhaf.

El tercer capítulo se dedica al estudio de las coaliciones bipersonales entre jugadores. Este estudio se efectúa con caracter general para todos los semivalores y se consideran los incrementos correspondientes a la comparación entre la asignación en el juego inicial a los dos jugadores respecto a su clase en el cociente y a la comparación entre la asignación modificada y sin modificar, tanto para los jugadores que se coaligan como para los que no. Son casos particulares de este estudio los conocidos para las soluciones de Shapley y de Banzhaf (Amer et al. 1996). El hecho de efectuar un estudio general para semivalores permite caracterizar aquellos que cumplen ciertas propiedades respecto a esos incrementos, particularmente, los que asignan incrementos nulos.

Se han obtenido los resultados en este capítulo considerando la función característica de los juegos. A continuación se ofrece el cálculo de los incrementos empleando la extensión multilineal modificada hasta conseguir los elementos de ciertas matrices que permitirán obtener por linealidad los resultados para cualquier semivalor. El capítulo finaliza tratando un problema inverso consistente en la determinación para un juego y una pareja de jugadores concretos de aquellos semivalores que ofrecen un incremento de asignación determinado entre el juego inicial y el juego cociente, estableciendo previamente el máximo y el mínimo de tal incremento.

El cuarto capítulo comienza observando cómo se modifica la función característica cuando se suprime una de las aristas de un grafo que modeliza situaciones de cooperación parcial entre los agentes del juego. A partir de esta observación se estudian las propiedades que verifican tanto los semivalores como la normalización aditiva de los mismos, respecto a los axiomas para estos modelos de cooperación introducidos por Myerson (1977). A continuación se generaliza a todos los agentes del juego la noción de pérdida o ganancia por la supresión de una arista de cooperación, pasando a estudiar quiénes son los jugadores más beneficiados o más perjudicados por esa supresión y bajo qué condiciones se producen tales circunstancias. La última sección está dedicada a estudiar el efecto sobre la extensión multilineal de la supresión de una arista de cooperación, que se traduce en una función incremento entre la extensión multilineal antes y después de la supresión; la expresión de este incremento permite no sólo el cálculo de las asignaciones modificadas sino también la comprobación de propiedades relativas a la cooperación parcial. Como resultado de propiedades de las extensiones multilineales se consigue obtener una expresión para el cálculo de las asignaciones por semivalores normalizados aditivamente.

El quinto capítulo introduce un concepto de potencial para todos los semivalores sobre juegos cooperativos. La introducción se realiza en dos fases, una primera para los semivalores binomiales y una segunda para los semivalores en general, obtenida por linealidad a partir de la primera. Se observa cómo este concepto engloba el de Hart y Mas-Colell (1988) para la solución de Shapley y el de Dragan (1995) para la de Banzhaf. Se concluye una primera parte con el cálculo efectivo del potencial para cualquier semivalor por medio de la extensión multilineal del juego y de sus adecuadas modificaciones. A continuación se recuerda la noción de base potencial y se construye para cada semivalor binomial primero y para todo semivalor sobre juegos cooperativos después. La determinación de estas bases permite la descripción del espacio nulo por cada semivalor, esto es, el subespacio de juegos a los cuales el semivalor les asigna el vector nulo. Junto a esta descripción se consigue resolver un problema inverso consistente en la obtención de todos los juegos a los que un semivalor determinado les asigna un vector solución establecido de antemano.

El capítulo continúa con la noción de juego de poder por cada semivalor. Esta noción, que supone una biyección en cada espacio de juegos cooperativos, permite definir juegos reducidos respecto a los cuales cada semivalor es consistente, llegando a obtener una caracterización para cada semivalor. El desarrollo de estas propiedades contiene diversos puntos de contacto con el tratamiento que ofrece Dragan (1999), el cual, a su vez, se relaciona con el trabajo de Calvo y Santos (1997), donde se caracterizan las soluciones para juegos cooperativos que admiten un potencial. Para concluir, con base en una situación real producida en el Ayuntamiento de Manresa, se construye de modo efectivo un juego reducido afectando a los miembros de la Comisión de Gobierno compuesta por unos grupos políticos que, coaligados, consiguieron obtener la mayoría en el consistorio.

En el último capítulo se aborda el problema de la determinación de los juegos cooperativos que, a pesar de ser diferentes, cualquier semivalor les asigna el mismo vector de pagos, de donde se deriva el nombre de indistinguibles. El problema se reduce al estudio de los juegos indistinguibles del nulo y a la consideración de semivalores correspondientes a un sistema de referencia, llegando a obtener la dimensión del subespacio de esos juegos para cada cardinal del conjunto de jugadores. A continuación se introducen los juegos más sencillos que son indistinguibles del nulo y que se denominan juegos de conmutación. Se ofrece un método constructivo para determinar una base de cada subespacio de juegos indistinguibles del nulo formada por juegos de conmutación.

Finalmente, dentro del mismo capítulo, se plantea el problema de determinar los subespacios de juegos indistinguibles del nulo por cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición. Se consigue obtener la dimensión de estos subespacios para cada cardinal del conjunto de jugadores, ofreciendo bases formadas por juegos construidos a partir de los de conmutación, a los que se denomina expandidos. En la obtención de resultados juega un papel destacado la extensión multilineal, por su empleo para calcular la modificación de los semivalores y por su adecuación para determinar juegos indistinguibles.

El objetivo genérico que motiva el presente trabajo es contribuir al desarrollo de la Teoría de Juegos en el ámbito concreto de los juegos cooperativos con utilidad transferible. De entre los objetivos más específicos podrían destacarse los siguientes:

- Extender conceptos como modificación de la asignación para juegos con estructura de coalición o potencial a una clase más amplia de soluciones.
- Estudiar el comportamiento de estas soluciones en determinadas situaciones de cooperación modificada, ya sea por estructuras de coalición o por grafos de comunicación, y caracterizar algunas de las soluciones respecto a esas situaciones.
- Ampliar las posibilidades de la extensión multilineal de los juegos cooperativos en referencia al cálculo de soluciones en situaciones de cooperación modificada o a la obtención de potenciales.
- Abordar la resolución de determinados problemas denominados inversos, en el sentido de obtener los juegos o las soluciones cuando están prefijados los pagos en ciertas situaciones de cooperación.
- Describir y cuantificar los juegos cooperativos que obtienen los mismos vectores de pagos por cualquier concepto de solución basado en medias ponderadas de las contribuciones marginales.

Para concluir, destacaríamos que cuando un concepto no original aparece por vez primera en el texto se acompaña de su referencia bibliográfica, salvo algunos conceptos reconocidos como básicos o cuyo origen ya haya sido referenciado. También, se ha procurado que los ejemplos recojan situaciones reales que pueden ser contrastadas; sin embargo, algunas situaciones son claramente impuestas, con el objetivo de enfatizar los conceptos o los métodos que acabarían de introducirse.

1

Preliminares

1.1 Juegos cooperativos con utilidad transferible

Definición 1.1
Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, v) donde $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función tal que $v(\emptyset) = 0$, que se denomina función característica del juego.

Los subconjuntos S de N se denominan coaliciones y $v(S)$ representa la utilidad que pueden garantizarse los jugadores de S si deciden cooperar, con independencia de las acciones de los jugadores de $N \setminus S$. En caso de que no pueda haber confusión respecto a cual es el conjunto de jugadores, se identifica el juego (N, v) con su función característica v.

El conjunto de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible cuyo conjunto de jugadores es N se representa por G_N y en él se definen una suma y un producto por escalares del siguiente modo:

(a) Para $u, v \in G_N$, su suma $u + v$ es el juego definido por

$$(u+v)(S) = u(S) + v(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

(b) Para $v \in G_N$ y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, su producto λv es el juego definido por

$$(\lambda v)(S) = \lambda v(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

Con estas operaciones G_N tiene estructura de espacio vectorial y su dimensión es $2^n - 1$, ya que las funciones 1_T definidas para cada coalición no vacía $T \subseteq N$ por:

$$1_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

forman una base de G_N.

Los juegos de unanimidad u_T definidos para cada coalición no vacía $T \subseteq N$ como:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \supseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

forman también una base del espacio de juegos G_N. La siguiente propiedad establece la expresión de cualquier juego como combinación lineal de los juegos de unanimidad.

Proposición 1.2
Dado un juego cualquiera $v \in G_N$ se cumple que

$$v = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T u_T, \quad \text{donde } \alpha_T = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} v(S).$$

Las componentes α_T reciben el nombre de dividendos de Harsanyi del juego v, siendo t y s los cardinales respectivos de las coaliciones T y S.

Las siguientes definiciones establecen diferentes tipos particulares de juegos cooperativos, en atención al comportamiento de su función característica.

Definiciones 1.3
Un juego cooperativo (N, v) es superaditivo si para todas las coaliciones de N tales que $S \cap T = \emptyset$ se cumple que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Un juego cooperativo (N, v) es monótono si $v(S) \leq v(T)$, siempre que $S \subseteq T$.

Un juego cooperativo (N, v) es simple si además de ser monótono se cumple que $v(S) \in \{0, 1\}$, $\forall S \subseteq N$, y $v(N) = 1$.

La restricción de un juego cooperativo (N, v) a una coalición T es el juego $(T, v|_T)$ definido por

$$v|_T(S) = v(S), \quad \forall S \subseteq T.$$

Exponemos a continuación diferentes situaciones que pueden estudiarse bajo la óptica de la teoría de juegos coooperativos con utilidad transferible. Más allá de los enunciados concretos, estos ejemplos intentan mostrar la adecuación de la Teoría de Juegos para abordar y resolver problemas relativos a conflictos de intereses entre diferentes agentes económicos o políticos, que encuentran vías adecuadas de actuación entre la competencia y la cooperación.

Ejemplo 1.4 *El problema de la bancarrota.*
Un problema de bancarrota consiste esencialmente en un par (C, d), donde C es un número real positivo que representa el capital disponible para hacer frente a las demandas de un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ de acreedores. Cada acreedor demanda una cantidad positiva d_i, $1 \leq i \leq n$, existiendo problema cuando no pueden cubrirse la totalidad de las demandas, esto es:

$$C < \sum_{i \in N} d_i.$$

Para estudiar este tipo de situaciones, O'Neil propone en 1982 un juego cooperativo con utilidad transferible definido en la forma:

$$v(S) = \max\{\, 0\, ,\, C - \sum_{i \in N \smallsetminus S} d_i\, \}, \ \ \forall S \subseteq N.$$

En esta definición, $v(S)$ representa la cantidad que los miembros de la coalición S pueden garantizarse en la situación más desfavorable para ellos, es decir, en el caso en que los acreedores de $N \smallsetminus S$ reciben, si es posible, todas sus demandas.

Un caso particular de este problema podría ser aquél en que:

$$C = 100; \ d_1 = 25, \ d_2 = 50, \ d_3 = 75.$$

La función característica para este supuesto es:

$$v(\{1\}) = 0 \qquad v(\{1,2\}) = 25 \qquad v(\{1,2,3\}) = 100$$
$$v(\{2\}) = 0 \qquad v(\{1,3\}) = 50$$
$$v(\{3\}) = 25 \qquad v(\{2,3\}) = 75$$

El problema que ahora se presenta es el de distribuir entre los diferentes jugadores el capital existente de forma que la solución pueda ser aceptada por todos ellos, en el sentido de que la entiendan como razonable y justa.

Ejemplo 1.5 *Problemas de asignación de costes o reparto de beneficios.*
Bajo este epígrafe se recogen numerosas situaciones que se caracterizan por el hecho de que un grupo de usuarios comparte un servicio común o bien obtiene una serie de ventajas al actuar conjuntamente frente a una determinada oferta. En general, cada agente individual está interesado en obtener cierto bien o servicio y el hecho de actuar conjuntamente crea el problema de asignar los costes comunes de la obtención o, en forma paralela, de repartir los beneficios de la actuación conjunta.

Para concretar un caso particular citaremos el siguiente: un distribuidor imputa un coste de 100 unidades monetarias por el suministro de su materia a cada uno de los potenciales usuarios, que designaremos por $1, 2, 3, 4$. Por las características de la distribución, ya sean geográficas o técnicas de infraestructura, el coste para el suministro conjunto a cada una de las agrupaciones de usuarios es el que se expresa mediante la siguiente función c de costes:

$$c(\{1\}) = 100 \qquad c(\{1,3\}) = 150 \qquad c(\{1,2,3\}) = 210$$
$$c(\{2\}) = 100 \qquad c(\{1,4\}) = 160 \qquad c(\{1,2,4\}) = 220$$
$$c(\{3\}) = 100 \qquad c(\{2,3\}) = 150 \qquad c(\{1,3,4\}) = 230$$
$$c(\{4\}) = 100 \qquad c(\{2,4\}) = 150 \qquad c(\{2,3,4\}) = 250$$
$$c(\{1,2\}) = 120 \qquad c(\{3,4\}) = 130 \qquad c(\{1,2,3,4\}) = 250$$

Los usuarios pueden ser individuos, empresas o ciudades que desean recibir un determinado suministro de la materia que se considere. El juego que recoge la situación que se ha planteado tiene como conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y su función característica es c, donde cada $c(S)$ es el coste del suministro a la coalición S. Si se acepta la oferta de la empresa distribuidora para el suministro conjunto, el problema que se plantea es el de repartir entre los usuarios el coste global de las 250 unidades monetarias, de manera que dicho reparto pueda ser asumido por todos ellos.

El enunciado anterior corresponde a la óptica del problema de reparto de costes entre usuarios de un servicio común. Desde otro punto de vista, por el hecho de actuar conjuntamente, se produce un beneficio para cada coalición que puede expresarse mediante la función

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S).$$

Ahora el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica v recoge el beneficio que obtiene cada coalición de usuarios respecto al coste del suministro individual:

$v(\{1\}) = 0$	$v(\{1,3\}) = 50$	$v(\{1,2,3\}) = 90$
$v(\{2\}) = 0$	$v(\{1,4\}) = 40$	$v(\{1,2,4\}) = 80$
$v(\{3\}) = 0$	$v(\{2,3\}) = 50$	$v(\{1,3,4\}) = 70$
$v(\{4\}) = 0$	$v(\{2,4\}) = 50$	$v(\{2,3,4\}) = 50$
$v(\{1,2\}) = 80$	$v(\{3,4\}) = 70$	$v(\{1,2,3,4\}) = 150$

Con este planteamiento, el problema que surge es el de repartir el beneficio total de 150 unidades monetarias entre los cuatro usuarios.

Ejemplo 1.6 *Los organismos de decisión.*
La Teoría de Juegos dedica especial atención a modelizar los sistemas de representación y de toma de decisiones que se rigen por mecanismos de votación, ya sean de carácter político, como Parlamentos de diferentes naciones u organizaciones supranacionales, o de carácter económico, como consejos de administración de corporaciones o de empresas.

El análisis de estas situaciones se establece por medio de los índices de poder, que reflejan las posibilidades estratégicas de los diferentes miembros de un organismo en el sentido de influir en el resultado de las decisiones que se adopten, a través de las coaliciones ganadoras a las que pertenecen. Los índices de poder muestran su utilidad a la hora de estudiar los efectos de los cambios de composición de los organismos o de la modificación de las reglas de votación.

En el modelo de juego que se emplea para estas situaciones, el conjunto N de jugadores está formado por los miembros del organismo que se estudie (parlamentarios, partidos políticos, paises, accionistas); la función de utilidad corresponde a un juego simple de manera que $v(S) = 1$ si los miembros de S son capaces de aprobar por sí solos una propuesta, mientras que $v(S) = 0$, en caso contrario.

Una coalición S es ganadora si $v(S) = 1$; ganadora minimal si $v(S) = 1$ y además $v(T) = 0$ para cualquier $T \subset S$; perdedora si $v(S) = 0$. Es evidente que un juego simple queda unívocamente determinado conociendo la familia de coaliciones ganadoras minimales.

Una clase especialmente interesante de juegos simples es la formada por los llamados juegos de mayoría ponderada; uno de tales juegos consiste en una terna (N, ω, q) donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ con $\omega_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$, es una distribución de pesos y $q \in \mathbb{R}^+$ es la cuota. Habitualmente un juego de mayoría ponderada se representa por

$$[\,q\,;\,\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n].$$

Una coalición $S \subseteq N$ es ganadora si

$$q \leq \sum_{i \in S} \omega_i$$

y es perdedora en caso contrario. Este tipo de juegos permite modelizar situaciones en las que se supone disciplina de voto: los jugadores son partidos políticos parlamentarios o grupos del tipo unificado que sea, cuyos pesos corresponden al número de miembros de la agrupación en cuestión, siendo q la mayoría exigida para ganar la votación.

El Parlamento de Cataluña es la cámara legislativa propia de esta comunidad. Su composición es de 135 diputados, de manera que la mayoría absoluta se consigue con un número igual o superior a 68 de los mismos. Fruto de las elecciones del 17 de octubre de 1999 se inauguró la VI Legislatura, actualmente vigente.

Los grupos parlamentarios presentes en el Parlamento son: Convergència i Unió (CiU) con 56 diputados; Partit dels Socialistes de Catalunya-Ciutadans pel Canvi (PSC) con 50 diputados; Partit Popular (PP) con 12 diputados; Esquerra Republicana de Catalunya (ERC) con 12 diputados e Iniciativa per Catalunya-Els Verds (IC) con 5 diputados. El juego de mayoría ponderada que recoge la situación actual del Parlamento de Cataluña es

$$[\,68\,;\,56,\;50,\;12,\;12,\;5\,].$$

La V Legislatura del Parlamento de Cataluña surgió de las elecciones de noviembre de 1995 y cubrió el periodo comprendido entre los años 1995 y 1999. En esa ocasión, la composición de los grupos parlamentarios fue la siguiente: Convergència i Unió (CiU), 60 diputados; Partit dels Socialistes de Catalunya (PSC), 34 diputados; Partit Popular (PP), 17 diputados; Iniciativa per Catalunya-Els Verds (IC), 13 diputados; Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), 11 diputados. La correspondiente descripción del Parlamento como JMP es:

$$[\,68\,;\,60,\;34,\;17,\;13,\;11\,].$$

Por razones de una mayor diferenciación entre los índices de poder que posteriormente se considerarán, escogeremos esta última composición como modelo, en lugar de la actual composición del Parlamento catalán.

Las coaliciones ganadoras minimales en este juego son:

$$\{\ \{\text{CiU, PSC}\},\ \{\text{CiU, PP}\},\ \{\text{CiU, IC}\},\ \{\text{CiU, ERC}\},\ \{\text{PSC, PP, IC, ERC}\}\ \}.$$

Hemos visto que todo juego de mayoría ponderada tiene asociado un juego simple. Sin embargo, no todo juego simple proviene de un juego de mayoría ponderada.

En el Congreso de los Estados Unidos de América, para que una ley que cuente con el respaldo del Presidente sea aprobada, es necesaria la mayoría de votos de la Cámara de Representantes y del Senado; si el proyecto no cuenta con el apoyo del Presidente son necesarios dos tercios de votos de cada una de las cámaras. La Cámara de Representantes cuenta con 435 miembros y el Senado con 100.

En este juego simple, suponiendo la simetría de los representantes entre sí y de los senadores entre sí, las coaliciones ganadoras minimales son del tipo

$$\{\,P + 51s + 218r\,,\;67s + 290r\,\}.$$

Puede probarse que este juego simple no proviene de ningún juego de mayoría ponderada, por lo que se dice de él que no es realizable.

1.2 Soluciones para los juegos cooperativos

En el desarrollo de la sección anterior se ha puesto de manifiesto que uno de los problemas que pretende resolver la Teoría de Juegos es la distribución de la cantidad $v(N)$ de una manera razonable, entre los diferentes agentes del juego. Este es quizás el problema más ampliamente estudiado en la Teoría de Juegos; que la distribución sea razonable quiere indicar que el dinero o cualquier otro bien transferible que representa $v(N)$ sea repartido entre los jugadores de forma que ese reparto pueda ser aceptado por todos, al amparo de unos criterios que se establezcan previamente como válidos.

Definición 1.7
Un concepto de solución para los juegos cooperativos es, en general, una regla que asigna a cada juego de n jugadores (N, v) un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, siguiendo unas reglas predeterminadas. En principio, ese subconjunto puede ser vacío, contener un único elemento o varios elementos, según el juego que se considere o según la regla que se establezca.

Se dice que una solución $x \in \mathbb{R}^N$ para el juego (N, v) es un vector de pagos eficiente si cumple

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

donde x_i se entiende como el pago al jugador $i \in N$.

Si además $x_i \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$, se dice que $x \in \mathbb{R}^N$ satisface el principio de racionalidad individual, según el cual cada jugador obtiene al menos igual a lo que obtendría por sí solo en el juego (N, v).

El conjunto de todas las soluciones que son vectores de pagos eficientes y que satisfacen el principio de racionalidad individual es el denominado conjunto de imputaciones del juego (N, v) y se denota por $I[v]$,

$$I[v] = \{x \in \mathbb{R}^N \,/ \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N\}.$$

El primer concepto de solución para juegos cooperativos con utilidad transferible es el de conjunto estable, introducido en 1944 por von Neumann y Morgenstern. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto estable para el juego (N, v) si cumple: (a) $A \subseteq I[v]$; (b) si $x, y \in A$, entonces $y \notin dom(x)$; (c) si $y \in I[v] \setminus A$, existe $x \in A$ tal que $y \in dom(x)$. Para $x \in I[v]$, $dom(x)$ es el conjunto de imputaciones dominadas por el vector x, es decir, $y \in dom(x)$ si existe una coalición $S \subseteq N$ tal que $x_i > y_i$, $\forall i \in S$, y $\sum_{k \in S} x_k \leq v(S)$.

Los conjuntos estables son un concepto de solución cuyo manejo es, en general, dificultoso; la propia determinación de los mismos suele ser laboriosa, pudiendo encontrar juegos que poseen infinitos conjuntos estables y otros que carecen de dichos conjuntos (Lucas, 1968 y 1969).

Otro concepto de solución, introducido por Gilles en 1953, es el núcleo de un juego. El núcleo del juego (N, v) está formado por todos los vectores de pagos eficientes $x \in \mathbb{R}^N$ que, además, cumplen:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

El núcleo se denota por $C[v]$. Las soluciones del núcleo pueden entenderse como distribuciones favorables de la utilidad total $v(N)$ en el sentido de que el pago para cada coalición, entendido éste como la suma de pagos a sus integrantes, nunca es menor que la utilidad que por sí sola obtendría la coalición; en este sentido, la cooperación ha de ser vista como beneficiosa por cualquier coalición y la solución aceptable por todas ellas.

El cálculo del núcleo de un juego (N, v) conduce, en general, a un sistema de $2^n - 2$ inecuaciones junto a una ecuación que recoge la condición de eficiencia. En el ejemplo de la bancarrota de la sección anterior, la obtención del núcleo supone resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{lll} x_1 \geq 0 & x_1 + x_2 \geq 25 & \\ x_2 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 50 & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_3 \geq 25 & x_2 + x_3 \geq 75 & \end{array}$$

Su solución es $C[v]$:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq x_1 \leq 25,\ 0 \leq x_2 \leq 50,\ x_1 + x_2 \geq 25,\ x_3 = 100 - x_1 - x_2\},$$

tratándose de un polígono de $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son los puntos $(0, 25, 75)$, $(25, 0, 75)$, $(25, 50, 25)$, $(0, 50, 50)$.

Vemos que el núcleo puede contener soluciones realmente dispares como pago a los diferentes jugadores. Este es un inconveniente del núcleo, pero puede suceder que el núcleo de un juego sea vacío, incluso en juegos superaditivos (Lucas y Rabie, 1982).

EL VALOR DE SHAPLEY

A tenor de todas estas dificultades, parece conveniente establecer soluciones para juegos cooperativos que asignen a cada juego (N, v) un único vector de pagos. El primer concepto de solución única para juegos cooperativos con utilidad transferible fue introducido por L. S. Shapley en 1953.

El método utilizado por Shapley consiste en proponer unas determinadas propiedades que debería verificar esa solución única y demostrar que estas mismas propiedades la caracterizan de forma unívoca, de manera que pueden ser tomadas como axiomas. Para enunciar estos axiomas se precisan dos conceptos previos:

(a) $K \subseteq N$ es un soporte del juego (N, v) si

$$v(S) = v(K \cap S), \quad \forall S \subseteq N.$$

Un jugador $i \in N$ es nulo en el juego (N, v) si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Así, todos los jugadores de $N \setminus K$ son nulos.

(b) Si π es una permutación del conjunto N, πv es el juego definido por

$$(\pi v)(\pi S) = v(S), \ \forall S \subseteq N.$$

Entonces, los axiomas que se exige que satisfaga esa solución única de un juego (N, v), que se designa por $\phi[v]$, son:

- *Eficiencia.* Si K es un soporte del juego (N, v), se cumple:

$$\sum_{i \in K} \phi_i[v] = v(K).$$

- *Simetría.* Para toda permutación π de N, se cumple:

$$\phi_{\pi i}[\pi v] = \phi_i[v], \ \ \forall i \in N.$$

- *Aditividad.* Para cualesquiera juegos (N, u), (N, v), se cumple:

$$\phi[u + v] = \phi[u] + \phi[v].$$

El teorema que se enuncia a continuación asegura que estos tres axiomas caracterizan unívocamente una solución para cada juego (N, v), que es la que se conoce como valor de Shapley.

Teorema 1.8 *(Shapley, 1953)*
Existe una única aplicación $\phi : G_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface los axiomas de eficiencia para soportes, simetría y aditividad, y es la que tiene por expresión:

$$\phi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \gamma(n, s)[v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad \text{para cada } i \in N,$$

donde

$$\gamma(n, s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{1}{s\binom{n}{s}}$$

Observaciones 1.9
(a) El pago que el valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada

de las contribuciones marginales de ese jugador a las coaliciones a las que pertenece. Los factores de ponderación $\gamma(n,s)$ forman una distribución de probabilidad sobre dichas coaliciones, al escoger de modo equiprobable el cardinal de la coalición y, posteriormente, una de las coaliciones de dicho cardinal.

Análogamente, el valor de Shapley es el valor esperado por cada jugador cuando considerando todas las posibles ordenaciones de los jugadores de N como igualmente probables, cada jugador recibe como pago su contribución marginal a la coalición formada por todos los jugadores que le preceden.

(b) El valor de Shapley de un juego depende únicamente de las propiedades abstractas del mismo, sin tener en cuenta los distintos grados de cooperación o las posibilidades de comunicación que existan entre los jugadores de cada juego concreto. El estudio de estas alteraciones en la cooperación ha dado lugar a diferentes conceptos de solución que modifican el concepto de solución dado por Shapley. A título de ejemplo podemos mencionar que la agrupación de jugadores en bloques estables ha sido estudiada por Aumann y Drèze en 1974 o por Owen en 1977; la comunicación parcial modelizada mediante grafos en el conjunto de jugadores ha sido tratada por Myerson a partir de 1977; las incompatibilidades entre jugadores por Carreras en 1991; las situaciones de comunicación parcial e incompatibilidades por Bergantiños en 1993 o los índices de cooperación en las coaliciones por Amer en 1995.

(c) Una solución ϕ cumple la propiedad del jugador nulo si $\phi_i[v] = 0$ para todo juego v y todo jugador nulo i en v.

Un jugador $i \in N$ es un títere en el juego (N, v) si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Una solución ϕ cumple la propiedad de títeres si $\phi_i[v] = v(\{i\})$ para todo juego v y todo títere i en v.

Dos jugadores $i, j \in N$ son indiferentes en el juego (N, v) si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Una solución ϕ cumple la propiedad de indiferencia si $\phi_i[v] = \phi_j[v]$ para todo juego v y toda pareja de jugadores i, j indiferentes en v.

El valor de Shapley verifica la propiedad del jugador nulo, además de tratarse de una imputación para juegos superaditivos. A la vista de diferentes propiedades se han podido establecer otros sistemas de axiomas que caracterizan el valor de Shapley, como los propuestos por Young en 1985 o Hart y Mas-Colell en 1989.

El único concepto de solución para juegos cooperativos que satisface las propiedades de eficiencia para soportes, títeres, indiferencia y aditividad es el valor de Shapley, constituyendo estas cuatro propiedades otra caracterización axiomática para este valor.

(d) Para el caso de juegos simples, el axioma de aditividad no puede utilizarse. En 1975, Dubey define dos operaciones entre juegos simples:

$$\begin{aligned}(u \vee v)(S) &= \max\{u(S), v(S)\},\\ (u \wedge v)(S) &= \min\{u(S), v(S)\}.\end{aligned}$$

Si S_N denota el conjunto de juegos simples con n jugadores, las operaciones anteriores dotan a S_N de estructura de retículo distributivo. Para este tipo de juegos, el axioma de aditividad debe sustituirse por la denominada propiedad de transferencia, que establece,

$$\phi[u \vee v] + \phi[u \wedge v] = \phi[u] + \phi[v], \quad \forall u, v \in S_N.$$

Los juegos cooperativos simples se emplean normalmente como modelos de organismos de decisión donde los acuerdos se toman por votación. Un concepto de solución para esta clase de juegos acostumbra a denominarse índice de poder, en atención a las situaciones que modeliza. El índice de poder representa una medida abstracta del poder de cada jugador en el organismo que el juego describe.

Teorema 1.10 *(Dubey, 1975)*
Existe una única aplicación $\phi : S_N \to \mathbb{R}^N$ que satisface las propiedades de eficiencia para soportes, simetría y transferencia: es el índice de poder de Shapley-Shubick, que tiene por expresión

$$\phi_i[v] = \sum_{\substack{S \in W \\ S \ni i,\, S \setminus \{i\} \notin W}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \quad \text{para cada } i \in N,$$

donde W denota el conjunto de coaliciones ganadoras del juego v. Esta solución es la restricción del valor de Shapley a los juegos simples.

Ejemplos 1.11
(a) El valor de Shapley para el juego de la bancarrota que se había considerado en la sección anterior, en el que $C = 100$, $d = (25, 50, 75)$, es:

$$\phi[v] = (\,16.6667\,,\;29.1667\,,\;54.1667\,).$$

Se puede comprobar que esta solución pertenece al núcleo del juego v y comparada con el reparto proporcional a las demandas $(\,16.6667\,,\;33.3333\,,\;50\,)$, beneficia al tercer jugador y perjudica al segundo.

(b) En el problema de la asignación de costes planteado en la sección anterior, el reparto de las 250 unidades monetarias del coste global del suministro a los cuatro adjudicatarios es, según la solución de Shapley, el siguiente:

$$\phi[c] = (\,55\,,\;60\,,\;65\,,\;70\,).$$

Desde el enfoque del reparto de las 150 unidades de beneficio que se generan por la contratación en común del suministro, el valor de Shapley establece la siguiente solución:

$$\phi[v] = (\,45\,,\;40\,,\;35\,,\;30\,).$$

Se observa como $\phi_i[v] = c(\{i\}) - \phi_i[c]$, para cada jugador i. Este resultado era de esperar, por la propiedad de aditividad; de esta manera puede entenderse la asignación de costes y el reparto de beneficios como problemas complementarios uno del otro.

(c) Para el ejemplo del Parlamento de Cataluña en la legislatura 95-99, el índice de poder de Shapley-Shubik otorga la siguiente distribución:

$$\phi[v] = (\,0.6\,,\;0.1\,,\;0.1\,,\;0.1\,,\;0.1\,).$$

El primer jugador, CiU, está destacado pues forma parte de cuatro de las cinco coaliciones ganadoras minimales; los otros cuatro jugadores, a pesar del número diferente de escaños de cada grupo parlamentario, ocupan un papel simétrico en el juego, por lo que su índice de poder es el mismo.

(d) Finalmente, para el caso del Congreso de los Estados Unidos de América, los índices de poder del Presidente, del Senado y de la Cámara de Representantes son, respectivamente:

$$\phi_P = 0.160470, \quad \phi_S = 0.437418, \quad \phi_R = 0.402112.$$

Habida cuenta de la posición simétrica de cada senador en el Senado y de cada representante en la Cámara, el poder de cada uno de ellos se obtendrá dividiendo por 100 el poder del Senado y por 435 el de la Cámara de Representantes, respectivamente. De esta forma, proporcionalmente, si ϕ_s es el índice de poder de Shapley-Shubik de un senador y ϕ_r el de un representante:

$$\phi_P : \phi_s : \phi_r \approx 350 : 9 : 2.$$

EL VALOR DE BANZHAF

Otro concepto de solución que asigna a cada juego un único vector de pagos es el valor de Banzhaf. En este caso se atribuye como pago a cada jugador la suma de sus contribuciones marginales a todas las coaliciones a las que pertenece; esta cantidad puede venir multiplicada por un coeficiente, en cuyo caso se habla del valor de Banzhaf normalizado. La sencillez de construcción de este valor hace que goce de una posición destacada en la Teoría de Juegos, habiendo llegado a ser aceptado por un juez de Nueva York como medida válida de poder para determinar la representación en un organismo de decisión de ese Estado.

Al igual que para el valor de Shapley, diversos autores han caracterizado axiomáticamente el valor de Banzhaf: Owen en 1978, Lehrer en 1988 o Feltkamp en 1995. Una introducción axiomática del valor de Banzhaf precisa, para cada juego (N, v), la consideración de la cantidad siguiente:

$$\eta[v] = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Teorema 1.12 *(Feltkamp, 1995)*
Existe una única aplicación $b : G_N \to \mathbb{R}^N$ que satisface los axiomas de simetría, jugador nulo, aditividad y que verifica que $\sum_{i \in N} b_i[v] = \eta[v]$; esta aplicación es la que tiene por expresión:

$$b_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad \text{para cada } i \in N.$$

Observaciones 1.13
(a) La solución que acaba de introducirse es el valor de Banzhaf no normalizado. Dividiendo todas las componentes de b por 2^{n-1} se obtiene el valor de Banzhaf normalizado, que designaremos por ψ, siendo el que se emplea habitualmente; ψ verifica los mismos axiomas, sólo que ahora $\sum_{i\in N}\psi_i[v] = 2^{1-n}\eta[v]$. Es decir,

$$\psi_i[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} [v(S) - v(S\setminus\{i\})], \quad \text{para cada } i \in N.$$

(b) El valor de Banzhaf es, como el valor de Shapley, una media ponderada de las contribuciones marginales de cada jugador a las coliciones a las que pertenece; en este caso, los coeficientes de ponderación son todos iguales a $1/2^{n-1}$, de forma que el peso de cada coalición a la que pertenece un jugador $i \in N$ es siempre el mismo.

(c) Sustituyendo el axioma de aditividad por el de transferencia se caracteriza ψ para los juegos simples, obteniéndose el que se conoce como índice de poder de Banzhaf-Coleman. De hecho, este índice no es un caso particular, sino que la solución para juegos de G_N es la generalización de este índice surgido en los juegos simples.

Ejemplos 1.14
(a) El valor de Banzhaf para el juego de la bancarrota de la sección anterior es:

$$\psi[v] = (\,18.75\,,\ 31.25\,,\ 56.25\,),$$

de manera que las 100 unidades monetarias del capital C disponible se repartirían entre los acreedores en la forma 17.6471, 29.4118, 52.9412; este reparto beneficia a los dos primeros acreedores frente al tercero que recibe una cantidad ligeramente inferior a la que le correspondería por la solución de Shapley.

(b) Para el problema de asignación de costes-reparto de beneficios, el valor de Banzhaf del juego v correspondiente al reparto de beneficios es:

$$\psi[v] = (\,42.5\,,\ 40\,,\ 35\,,\ 30\,),$$

lo cual supone el siguiente reparto proporcional de las 150 unidades de beneficio entre los cuatro jugadores: para el primero, 43.2203; para el segundo, 40.6780; para el tercero, 35.5932 y para el cuarto, 30.5085. Otra vez el jugador más beneficiado en la solución de Shapley resulta ligeramente desfavorecido en la solución de Banzhaf.

(c) En el Parlamento de Cataluña en la legislatura 95-99, el índice de Banzhaf es:

$$\psi[v] = (\,0.875\,,\,0.125\,,\,0.125\,,\,0.125\,,\,0.125\,).$$

En tantos por ciento, el poder del primer grupo parlamentario es del 63.636%, mientras que el de los demás grupos es del 9.091%. En este caso, el jugador que tiene un mayor poder por Shapley (60%) ve incrementado éste en la distribucion de Banzhaf, mientras que los restantes jugadores obtienen un poder menor.

(d) Considerando el Congreso de los Estados Unidos de América, según la solución de Banzhaf, los índices de poder del Presidente, del Senado y de la Cámara de Representantes, así como sus respectivos porcentajes son:

$$\begin{aligned} \psi_P &= 0.23010 && (3.8\%) \\ \psi_S &= 1.98973 && (32.9\%) \\ \psi_R &= 3.83139 && (63.3\%) \end{aligned}$$

LOS SEMIVALORES

El valor de Shapley y el valor de Banzhaf son soluciones para los juegos cooperativos que tienen en común el hecho de asignar a cada jugador un pago en base a sus contribuciones marginales, ponderadas de una u otra forma, según hemos visto en los apartados precedentes. De la misma forma que se establecen unos axiomas para las soluciones de Shapley o de Banzhaf, ahora se generaliza esta situación introduciendo unas propiedades para caracterizar axiomáticamente una amplia clase de soluciones para juegos cooperativos.

En primer lugar, denotamos por A_N el conjunto de juegos cooperativos de n jugadores que sean aditivos, esto es,

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T), \quad \text{si } S \cap T = \emptyset, \quad S, T \subseteq N.$$

Observamos que A_N para $|N| = n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^N$, ya que cualquier juego $v \in A_N$ queda determinado al conocer $v(\{i\})$, para $1 \leq i \leq n$.

En 1981, Dubey, Neyman y Weber definen un semivalor sobre los juegos cooperativos de G_N como aquella solución $\sigma : G_N \to A_N$ que cumple:

(a) *Linealidad.* $\sigma(u+v) = \sigma(u) + \sigma(v), \ \ \forall u, v \in G_N$.

(b) *Simetría.* Para cada permutación π del conjunto N, $\sigma(\pi v)(\{\pi i\}) = \sigma v(\{i\})$.

(c) *Monotonía.* v monótono implica σv monótono.

(d) σ es una *proyección*: si $v \in A_N$ entonces, $\sigma v = v$.

La siguiente propiedad relaciona los axiomas de la definición con el cálculo de la solución en relación a las contribuciones marginales de los jugadores.

Teorema 1.15 *(Dubey, Neyman, Weber, 1981)*
(a) Dados n números reales p_s, $1 \leq s \leq n$, cumpliendo:

$$(i) \quad \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1, \qquad (ii) \quad p_s \geq 0, \ 1 \leq s \leq n,$$

$$\sigma v(\{i\}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} p_s [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad \text{para cada } i \in N, \text{ para cada } v \in G_N,$$

definen un semivalor σ sobre los juegos de G_N, donde $s = |S|$.

(b) Recíprocamente, todo semivalor $\sigma : G_N \to A_N$ se obtiene de esta manera.

Observaciones 1.16
(a) Según el teorema anterior, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de semivalores sobre juegos de G_N y el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ $(p_1, ..., p_n)$ que cumplen las condiciones $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$ y $p_s \geq 0, \ 1 \leq s \leq n$.

(b) Así, un semivalor σ puede entenderse como la media ponderada de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que pertenece; los coeficientes de ponderación son diferentes para cada semivalor, siendo precisamente los números p_s, $1 \leq s \leq n$. En particular, el valor de Shapley es el semivalor de coeficientes

$$p_s = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \quad 1 \leq s \leq n,$$

y el valor de Banzhaf el de coeficientes $p_s = 1/2^{n-1}$, $1 \leq s \leq n$.

(c) Siguiendo una notación análoga a las soluciones de Shapley y de Banzhaf, la solución que se obtiene por un semivalor σ la escribiremos en la forma:

$$\sigma_i[v] = \sigma v(\{i\}), \text{ para cada } i \in N \text{ y cada juego } v \in G_N.$$

Ejemplo 1.17
Consideramos el problema de la bancarrota con $C = 100$, $d = (25, 50, 75)$. Supongamos que tras estudiar numerosos casos de este tipo de situaciones se llega a la conclusión que cada acreedor actúa en solitario para reclamar la deuda en un 50% de los casos, que cada acreedor se alía con otro para realizar una reclamación conjunta en un 40% de los casos, mientras que cada uno se alía con otros dos en un 10% de las ocasiones. El semivalor que recogería este tipo de situaciones sería aquel cuyos coeficientes son:

$$p_1 = 1/2, \qquad p_2 = 1/5, \qquad p_3 = 1/10.$$

Por este semivalor, la solución al problema de la bancarrota que se plantea es

$$\sigma[v] = (\,12.5\,,\ 20\,,\ 45\,),$$

que corresponde a un reparto de las 100 unidades monetarias disponibles en 16.1290 para el primer acreedor, 25.8065 para el segundo y 58.0645 para el tercero.

Cada uno de los posibles valores admisibles de los coeficientes (p_1, p_2, p_3) ofrecerá una solución acorde con el peso que se atribuye a las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones de las que forme parte, según su cardinal. En el caso que nos ocupa, el tercer jugador resulta ser el más beneficiado por esta solución, obteniendo 58.0645 unidades de utilidad, frente a lo que obtendría por las soluciones de Shapley o de Banzhaf, 54.1667 y 52.9412 unidades de utilidad, respectivamente. Este beneficio se deriva principalmente por el hecho de que según el juego que describe el problema de la bancarrota,

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0, \qquad v(\{3\}) = 25,$$

siendo las contribuciones marginales a las coaliciones formadas por un único jugador las que están ponderadas con un coeficiente mayor, concretamente del 50%; el jugador más perjudicado respecto a las otras soluciones resulta ser el segundo, mientras que el primero obtiene aproximadamente igual utilidad.

SOLUCIONES BASADAS EN EL EXCESO

Para juegos cooperativos con utilidad transferible (N, v) se define el exceso de una solución $x : G_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ para cada coalición $S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$, en la forma:

$$e(S, x) = v(S) - x(S).$$

El vector $\theta(x) = (\, e(S, x)\,)_{S \subseteq N}$ recibe el nombre de vector exceso de la solución x para el juego v. El número $e(S, x)$ puede interpretarse como una medida de la insatisfacción de la coalición S con el pago que le atribuye la solución x.

Schneider en 1969 propone como concepto de solución para juegos cooperativos el nucleolo y Sobolev en 1975 el prenucleolo, buscando minimizar el vector exceso entre los vectores de pagos eficientes y entre las imputaciones, respectivamente. En ambos casos, el orden respecto al cual se busca el mínimo es el lexicográfico entre las componentes del vector exceso.

En el año 1994 Ruiz, Valenciano y Zarzuelo proponen una solución basada en el vector exceso en el sentido de minimizar la varianza correspondiente al vector $\theta(x)$. Concretamente, para cada juego $v \in G_N$ plantean el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \sum_{S \subseteq N} (\, e(S, x) - \overline{e}(v, x)\,)^2, \\ &\text{con la restricción} \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\overline{e}(v, x)$ es el exceso promedio, $\overline{e}(v, x) = \dfrac{1}{2^n - 1} \displaystyle\sum_{S \subseteq N} e(S, x)$.

Puede probarse que, para cualquier vector de pagos eficiente, la suma de los excesos de todas las coaliciones es la misma, por lo que, de hecho, $\overline{e}(v, x) = \overline{e}(v)$.

Teorema 1.18 *(Ruiz, Valenciano, Zarzuelo, 1994)*
Existe una única solución λ del problema (1.1), a la que llamamos λ-prenucleolo,

cuya expresión viene dada por:

$$\lambda_i[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \left[\, na_i(v) - \sum_{j\in N} a_j(v) \, \right], \quad \text{para cada } i \in N,$$

donde $a_i(v) = \sum_{S:\, i\in S} v(S)$.

Observaciones 1.19
(a) Junto al problema (1.1) se propone resolver otro en el que además se imponen las condiciones de racionalidad individual $x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N$. Si el conjunto de imputaciones de v es no vacío, este problema admite solución única y ésta es conocida como el λ-nucleolo.

(b) El λ-prenucleolo también admite una caracterización axiomática; para llegar a ella se introducen dos propiedades:

Un concepto de solución x satisface la condición de juego inesencial si, para cualquier juego aditivo, se verifica que el pago correspondiente a cada jugador $i \in N$ es $x_i(v) = v(\{i\})$.

Un concepto de solución x satisface la condición de monotonía respecto al promedio de las contribuciones marginales si

$$\sum_{S:\, i,j\notin S} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \geq \sum_{S:\, i,j\notin S} [v(S \cup \{j\}) - v(S)] \ \text{ implica:}$$

$$x_i(v) \geq x_j(v), \ \ \forall i, j \in N, \ \forall v \in G_N.$$

El λ-prenucleolo es el único concepto de solución para juegos de G_N que satisface los axiomas de eficiencia, linealidad, juego inesencial y monotonía respecto al promedio de las contribuciones marginales.

(c) Este último axioma relaciona el λ-prenucleolo con el valor de Banzhaf, que también lo verifica. El valor de Banzhaf no verifica, en general, la propiedad de eficiencia. Una solución no eficiente puede transformarse en eficiente mediante un proceso de normalización; en particular, la normalización aditiva de una solución consiste en añadir una misma constante a todas las componentes de la solución para obtener un vector de pagos eficiente.

Se verifica que:

$$\lambda_i[v] = \psi_i[v] + \frac{1}{n}\left(\, v(N) - \sum_{j \in N} \psi_j[v] \, \right), \quad \text{para cada } i \in N,$$

es decir, el λ-prenucleolo es la normalización aditiva del valor de Banzhaf.

Ejemplos 1.20
(a) En el problema de la bancarrota con $(C; d) = (100; 25, 50, 75)$, la solución que establece el λ-prenucleolo es

$$\lambda[v] = (\, 16.6667\,,\ 29.1667\,,\ 54.1667\,).$$

(b) Para el juego de reparto de 150 unidades de beneficio enunciado en la sección anterior, la solución por el λ-prenucleolo es

$$\lambda[v] = (\, 43.125\,,\ 40.625\,,\ 35.625\,,\ 30.625\,).$$

(c) Para la situación del Parlamento de Cataluña en la legislatura 1995-99, la solución según el λ-prenucleolo es

$$\lambda[v] = (\, 0.800\,,\ 0.050\,,\ 0.050\,,\ 0.050\,,\ 0.050).$$

El λ-prenucleolo, al igual que el valor de Shapley, es un vector de pagos eficiente. Pueden compararse estos resultados con la solución que, en cada caso, corresponde al valor de Shapley: en el primer juego el λ-prenucleolo y el valor de Shapley coinciden, en el segundo las soluciones son relativamente próximas, mientras que en el tercero son claramente dispares. La coincidencia en el primer juego no es casual, ya que para juegos con tres jugadores ambas soluciones asignan el mismo vector de pagos.

EL CONCEPTO DE POTENCIAL

El valor de Shapley asigna a cada juego (N, v) un vector de pagos, es decir, a cada juego de n jugadores le asocia n números correspondientes al vector solución que se ha establecido axiomáticamente.

Se trata ahora de establecer una aplicación entre el conjunto de juegos cooperativos con utilidad transferible, que denotamos como Γ, y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, de forma que a cada juego $(N, v) \in \Gamma$ se le asocie un único número real.

Para un juego (N, v) y una coalición $S \subset N$, se denota el juego restricción de v a S como (S, v), donde la función v se ha restringido a los subconjuntos de S.

Una función $P : \Gamma \to \mathbb{R}$, con $P(\emptyset, v) = 0$, recibe el nombre de función potencial si verifica

$$\sum_{i \in N} [P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v)] = v(N). \tag{1.2}$$

Teorema 1.21 *(Hart, Mas-Colell, 1988)*
Existe una única función potencial $P : \Gamma \to \mathbb{R}$. Para cada juego (N, v), el vector de contribuciones marginales

$$(\, P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v)\,)_{i \in N}$$

coincide con el valor de Shapley del juego. Además, el potencial de un juego queda unívocamente determinado aplicando recursivamente la expresión (1.2) a (N, v) y a todos sus subjuegos.

Observaciones 1.22
(a) El concepto de potencial fue introducido en 1988 por Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell. De la misma manera que derivando la función potencial respecto a cada una de sus variables se obtienen las componentes del campo conservativo, la derivada (discreta) de la función potencial permite obtener las componentes del valor de Shapley de cada juego, esto es:

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v) = \phi_i[N, v], \quad \forall i \in N.$$

(b) El concepto de potencial puede ser visto como una nueva caracterización axiomática del valor de Shapley. Ahora sólo se precisa un único axioma, (1.2), que resume en sí mismo el axioma de eficiencia y la relación del pago a cada jugador respecto a sus contribuciones marginales. El potencial para cualquier juego (N, v) puede calcularse de modo recursivo despejando $P(N, v)$ en (1.2), obteniendo

$$P(N,v)=\frac{1}{n}\left[\ v(N)+\sum_{i\in N}P(N\setminus\{i\},v)\ \right],$$

junto a la condición inicial $P(\emptyset,v)=0$.

Ejemplo 1.23
Si consideramos el juego de la bancarrota con $(C;d)=(100;25,50,75)$, los potenciales de este juego (N,v) y de todos sus subjuegos (S,v) con $S\subset N,\ S\neq\emptyset$, son:

$$P(\{1\},v)=0 \qquad P(\{2\},v)=0 \qquad P(\{3\},v)=25$$
$$P(\{1,2\},v)=25/2 \qquad P(\{1,3\},v)=75/2 \qquad P(\{2,3\},v)=50$$
$$P(\{1,2,3\},v)=200/3$$

Puede comprobarse que se cumple:

$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{2,3\},v)=\frac{50}{3}=\phi_1[N,v],$$
$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{1,3\},v)=\frac{175}{6}=\phi_2[N,v],$$
$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{1,2\},v)=\frac{325}{6}=\phi_3[N,v],$$

y lo mismo sucede con los valores de Shapley de todos los subjuegos de (N,v).

1.3 Modificaciones en la cooperación

Los conceptos de solución que se han descrito en la sección precedente presuponen que los jugadores o los agentes de cada una de las situaciones que se modelizan mediante un juego pueden cooperar de forma totalmente libre entre sí.

Sin embargo, el análisis de situaciones económicas, sociales o políticas concretas nos hace comprender que, en ocasiones, no todas las posibles situaciones de cooperación pueden darse, ya sea porque existan imposibilidades en la comunicación entre los jugadores, ya sea porque afinidades muy marcadas entre los mismos les muevan a actuar conjuntamente o porque factores externos como leyes antimonopolio prohiban expresamente la cooperación.

Para el estudio de este tipo de situaciones en las que las posibilidades de cooperación se han visto modificadas se han utilizado básicamente dos estructuras matemáticas: las estructuras de coalición y los grafos.

Si (N, v) es un juego cooperativo con utilidad transferible, una estructura de coalición B sobre el conjunto de jugadores N es cualquier partición de N,

$$B = \{B_1, B_2, ..., B_m\},$$

donde cada $B_k,\ 1 \leq k \leq m$, se denomina bloque de la estructura.

EL JUEGO COCIENTE

Definición 1.24
Se define el juego cociente del juego (N, v) respecto a la estructura de coalición B como el juego (M, v_B), cuya función característica es la dada por:

$$v_B(L) = v\,(\bigcup_{k \in L} B_k\,)\,, \quad \text{para cualquier } L \subseteq M.$$

Observación 1.25
El juego cociente puede interpretarse a partir del juego inicial (N, v), donde diferentes jugadores deciden actuar siempre conjuntamente formando los bloques correspondientes a la estructura B. Cada uno de estos bloques o coaliciones fijas puede cooperar con los demás obteniendo como utilidad la indicada por la función v_B, que no es otra que la utilidad de la unión de los jugadores de los bloques que se consideren.

El juego cociente tiene como conjunto de jugadores un número m igual al de bloques de la estructura de coalición. En este sentido se puede pensar que cada bloque elige un representante que es el jugador correspondiente en el juego cociente.

Ejemplos 1.26
(a) Supongamos que en el problema de la bancarrota donde las diferentes deudas

son $d_1 = 25$, $d_2 = 50$, $d_3 = 75$, los acreedores primero y segundo deciden actuar conjuntamente nombrando un procurador único que los represente ante la comisión liquidadora que ha de repartir las 100 unidades de capital remanente; se ha formado la estructura de coalición

$$B = \{\{1,2\},\{3\}\}.$$

El juego cociente tiene ahora dos jugadores, que para recordar su origen designaremos por $\overline{12}$, 3. La función característica de este juego es:

$$v_B(\{\overline{12}\}) = 25, \;\; v_B(\{3\}) = 25, \;\; v_B(\{\overline{12},3\}) = 100.$$

De la simetría de este juego se sigue la simetría en el pago que asigna el valor de Shapley a los jugadores,

$$\phi[v_B] = (\,50\,,\,50\,).$$

Esta maniobra ha conseguido disminuir el pago al tercer acreedor en beneficio de la coalición formada por los dos primeros.

(b) En el problema de reparto de beneficios por la contratación del suministro conjunto entre cuatro agentes, si suponemos que se ha formado la estructura de coalición

$$B = \{\{1,2\},\{3,4\}\},$$

el juego cociente tiene dos jugadores $M = \{\overline{12},\overline{34}\}$ y su función de utilidad toma los valores:

$$v_B(\{\overline{12}\}) = 70, \;\; v_B(\{\overline{34}\}) = 80, \;\; v_B(\{\overline{12},\overline{34}\}) = 150.$$

El pago que obtendría cada bloque según la solución de Shapley es

$$\phi[v_B] = (\,80\,,\,70\,).$$

Recordando la solución de Shapley para v, $\phi[v] = (\,45\,,\,40\,,\,35\,,\,30\,)$, observamos cómo los integrantes del primer bloque resultan perjudicados, mientras que los del segundo bloque resultan beneficiados al haberse formado esta estructura de coalición en concreto.

Entendiendo que cada bloque tiene un representante que actúa como jugador en el cociente, cada solución que se proponga para este juego asignará según sus reglas una utilidad a cada representante. El problema que surge ahora de modo natural es el de cómo repartir esa utilidad entre los integrantes de cada coalición.

EL VALOR COALICIONAL

Un juego con estructura de coalición es una terna (N, v, B) donde (N, v) es un juego cooperativo con utilidad transferible y $B = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ es un estructura de coalición sobre N.

Para la construcción de este valor coalicional Owen en 1977 considera que cada bloque elige un representante y que las posibilidades de cada uno de ellos vienen descritas por el juego cociente (M, v_B), donde $M = \{1, ..., m\}$ es el conjunto de representantes y

$$v_B(L) = v\,(\bigcup_{q\in L} B_q\,), \quad \forall L \subseteq M.$$

Admitiendo como regla de reparto en el juego v_B el valor de Shapley, cada representante $j \in M$ obtiene el pago $\phi_j[v_B]$ que debe repartir entre los miembros del bloque que representa.

Para el reparto, Owen propone el juego cociente modificado. Suponiendo que nos encontramos en un bloque concreto B_j y K es un grupo cualquiera de jugadores $K \subseteq B_j$, el juego $v_{B_j|K}$ es el juego cociente entre las clases, sólo que ahora la clase B_j ha sido sustituida por K, es decir,

$$v_{B_j|K}(L) = v\left(\bigcup_{q\in L} B_q \setminus K'\right), \qquad K' = B_q \setminus K,$$

estando $v_{B_j|K}$ definido para cualquier $L \subseteq M$. La utilidad que demandaría para sí la coalición Kes $\phi_j[v_{B_j|K}]$. Pero este proceso puede realizarse para todas y cada una de las coaliciones incluidas en el bloque B_j, de manera que puede definirse el juego:

$$w_j(K) = \phi_j[v_{B_j|K}], \quad \forall K \subseteq B_j.$$

Este es el juego que se jugaría dentro del bloque coalicional B_j; entonces, el valor asignado a cada jugador en el juego (N, v) con estructura de coalición B es:

$$\phi_i[v; B] = \phi_i[w_j], \quad \text{para cada } i \in B_j.$$

Teorema 1.27 *(Owen, 1977)*
El valor coalicional de Owen para el juego con estructura de coalición (N, v, B) puede calcularse por medio de la expresión:

$$\phi_i[v;B] = \sum_{\substack{L\subseteq M \\ j\notin L}} \sum_{\substack{K\subseteq B_j \\ i\notin K}} \gamma(m,l{+}1)\gamma(b_j,k{+}1) \Big[\ v\Big(\ \bigcup_{q\in L} B_q{\cup}K{\cup}\{i\} \ \Big){-}v\Big(\ \bigcup_{q\in L} B_q{\cup}K \ \Big) \ \Big]$$

donde $\gamma(a,b) = (b-1)!(a-b)!/a!$ y el cálculo es válido para cada $i \in B_j$ y para cada $B_j \in B,\ 1 \leq j \leq m$.

Observaciones 1.28
(a) El valor coalicional de Owen es un promedio ponderado de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones en las que van agrupados los elementos de cada bloque, excepto los del bloque correspondiente al propio jugador.

(b) El valor coalicional admite un desarrollo axiomático similar al del valor de Shapley. El valor coalicional es una regla que asigna a cada juego con estructura de coalición (N, v, B) un vector de $\mathbb{R}^N$ que verifica:

- *Eficiencia.* Si K es un soporte del juego (N, v), se cumple:
$$\sum_{i\in K} \phi_i[v;B] = v(K).$$

- *Simetría dentro de los bloques.* Si $i_1, i_2 \in B_j$ son indiferentes por v, es decir,
$$v(S \cup \{i_1\}) = v(S \cup \{i_2\}), \ \ \forall S \subseteq N \setminus \{i_1, i_2\},$$
se cumple:
$$\phi_{i_1}[v;B] = \phi_{i_2}[v;B].$$

- *Simetría entre los bloques.* Si $B_{j_1}, B_{j_2} \in B$ son bloques indiferentes,
$$v\Big(\ \bigcup_{q\in S} B_q \cup B_{j_1} \ \Big) = v\Big(\ \bigcup_{q\in S} B_q \cup B_{j_1} \ \Big), \ \ \forall S \subseteq M \setminus \{j_1, j_2\},$$
se cumple:
$$\sum_{i\in B_{j_1}} \phi_i[v;B] = \sum_{i\in B_{j_2}} \phi_i[v;B].$$

- *Aditividad.* Para cualesquiera juegos (N,u), (N,v), se cumple:

$$\phi[u+v;B] = \phi[u;B] + \phi[v;B].$$

Se demuestra que existe un único valor que asigna a cada juego con estructura de coalición (N,v,B) un vector de $\mathbb{R}^N$ que verifica los cuatro axiomas anteriores y que es el valor coalicional de Owen.

Ejemplos 1.29
(a) Para el problema de la bancarrota donde el juego (N,v) viene dado por $(C;d) = (100;25,50,75)$ y la estructura de coalición es $B = \{\{1,2\},\{3\}\}$, el valor coalicional asigna a los jugadores el siguiente vector de pagos:

$$\phi[v;B] = (\,18.75\,,\;31.25\,,\;50\,).$$

Comparando el resultado con el vector de pagos del valor de Shapley para el juego inicial $(\,16.6667\,,\;29.1667\,,\;54.1667\,)$, los dos integrantes de la coalición $\{1,2\}$ han salido beneficiados y han obtenido un mismo incremento en el pago. El reparto de las 50 unidades entre los elementos de la coalición en proporción a sus deudas hubiera dado lugar al pago 16.6667 y 33.3333, de forma que el primer jugador es el realmente beneficiado por la formación del bloque.

(b) Para la situación del reparto de las 150 unidades monetarias de beneficio en el problema del suministro que se viene considerando, en el supuesto de que se forme la estructura de colición $B = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, el pago propuesto por el valor coalicional es:

$$\phi[v;B] = (\,45\,,\;35\,,\;37.5\,,\;32.5\,).$$

Si se compara con el pago por Shapley $\phi[v] = (\,45\,,\;40\,,\;35\,,\;30\,)$, se observa que el bloque coalicional $\{1,2\}$ resulta perjudicado puesto que obtiene 5 unidades menos de utilidad, y ese perjuicio recae sobre el jugador 2; por su parte, el bloque coalicional $\{3,4\}$ obtiene 5 unidades más de utilidad que se reparten entre ambos jugadores.

Observación 1.30
El valor coalicional de Owen representa la modificación del valor de Shapley por la formación de una estructura de coalición en el conjunto de jugadores. En un

primer estadio cada bloque coalicional obtiene el pago que el valor de Shapley le asigna en el cociente, mientras que, en un segundo estadio, el reparto dentro de cada bloque se efectúa también según la solución de Shapley.

Siguiendo un desarrollo conceptualmente similar, Owen en 1981 establece otra posible solución para un juego con estructura de coalición (N, v, B). Se trata en este caso de emplear el valor de Banzhaf en las mismas acciones en las que se emplea el valor de Shapley para definir el valor coalicional. Se obtiene de esta manera el *valor de Banzhaf para juegos con estructura de coalición*, que obedece a la siguiente expresión explícita:

$$\psi_i[v; B] = \frac{1}{2^{m+b_j-2}} \sum_{\substack{L \subseteq M \\ j \notin L}} \sum_{\substack{K \subseteq B_j \\ i \notin K}} \left[v\left(\bigcup_{q \in L} B_q \cup K \cup \{i\} \right) - v\left(\bigcup_{q \in L} B_q \cup K \right) \right],$$

para cada $i \in B_j$ y para cada $B_j \in B,\ 1 \leq j \leq m$.

SITUACIONES DE COOPERACIÓN PARCIAL

En el estudio de los juegos se supone, en general, la posibilidad de cooperación universal de todos los jugadores entre sí, o bien, la no cooperación; sin embargo, existen otras muchas posibilidades intermedias de cooperación entre una y otra situación. En ocasiones, la cooperación se basa en la existencia de acuerdos bilaterales entre los agentes del juego, mientras que, en otros casos, la propia estructura del juego o factores externos impiden la comunicación y, por tanto, la cooperación entre esos agentes.

Para modelizar este tipo de situaciones se introduce, junto a la estructura del juego cooperativo (N, v), el conjunto de grafos cuyos vértices son los elementos de N. Así, g será un grafo no orientado sobre N, es decir, un conjunto de pares de elementos distintos de N. Si $\{i, j\} \in g$, se dice que los jugadores i, j están conectados por una arista del grafo, que se representa por $i : j$. El conjunto de todos los grafos sobre N lo designamos por $GR(N)$.

Las aristas del grafo deben interpretarse como canales de comunicación entre los jugadores, de manera que dos jugadores pueden comunicarse y, por tanto, cooperar si están unidos directamente por una arista del grafo o, indirectamente, si están conectados a través de otros jugadores. Una coalición S es conexa por el grafo g si para cualesquiera jugadores $i, j \in S$ existen elementos $i_0, ..., i_r \in S$ tales que $i_0 = i$, $i_r = j$ y $i_{k-1}\!:\!i_k \in g$ para $k = 1, ..., r$.

De esta forma, el grafo g determina, para cada coalición $S \subseteq N$, una partición de dicha coalición en componentes conexas maximales, que denotamos por S/g. Los jugadores de cada componente conexa pueden cooperar entre sí ya que están directa o indirectamente comunicados, mientras que la comunicación o cooperación no es posible entre bloques diferentes.

Las posibles situciones de cooperación parcial entre los elementos de N vienen determinadas por cada uno de los grafos de $GR(N)$. Una situación de comunicación parcial es una terna (N, v, g) de manera que la función de utilidad del juego v modificado por el grafo g es:

$$v/g(S) = \sum_{T \in S/g} v(T), \quad \text{para cada } S \subseteq N,$$

que representa las posibilidades de los jugadores de la coalición S, ya que éstos no pueden cooperar entre sí totalmente, sino que la utilidad que obtienen es la suma de la utilidad que puede obtener cada bloque $T \in S/g$, en donde sí es posible la cooperación.

Para un juego determinado (N, v), Myerson (1977) propone una regla de asignación definida en la forma:

$$\begin{array}{rccc} Y: & GR(N) & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & g & \rightarrow & Y(g) \end{array}$$

y establece unos axiomas que sería deseable que verificara una tal regla de asignación. Los axiomas de Myerson son:

- *Eficiencia por componentes.* Para todo $g \in GR(N)$ y toda componente conexa $T \in N/g$, se cumple:

$$\sum_{i \in T} Y_i(g) = v(T).$$

- *Justicia.* Para todo $g \in GR(N)$ y cualquier arista $i\!:\!j \in g$, se cumple:

$$Y_i(g) - Y_i(g \setminus i\!:\!j) = Y_j(g) - Y_j(g \setminus i\!:\!j).$$

- *Estabilidad.* Para todo $g \in GR(N)$ y cualquier arista $i\!:\!j \in g$, se cumple:

$$Y_i(g) \geq Y_i(g \smallsetminus i\!:\!j) \quad \text{y} \quad Y_j(g) \geq Y_j(g \smallsetminus i\!:\!j).$$

Teorema 1.31 *(Myerson, 1977)*
Fijado un juego (N, v) existe una única regla de asignación $Y : GR(N) \to \mathbb{R}^N$ que verifica los axiomas de eficiencia por componentes y justicia; esta regla es el valor de Shapley del juego modificado v/g,

$$Y(g) = \phi[v/g].$$

Además, si v es superaditivo, la regla es estable.

Observaciones 1.32
(a) La regla de asignación definida en el teorema anterior se denomina también valor de Myerson y se representa por $Y(v, g)$ o $Y(N, v, g)$ cuando se quiere poner de manifiesto el conjunto de jugadores.

(b) El axioma de justicia puede interpretarse como un principio de distribución equitativa de ganancias: los jugadores quedan igualmente beneficiados (o perjudicados) por su comunicación bilateral. El axioma de estabilidad supone que la supresión de la colaboración bilateral entre dos jugadores les acarrea no ganancia; según esta propiedad, son preferibles las situaciones de mayor cooperación a las de menor cooperación entre los jugadores.

Ejemplo 1.33
Consideramos el juego cooperativo (N, v) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica es la definida por

$$v(\{i\}) = 0,\ i = 1, 2, 3,\ v(\{1, 2\}) = 3,\ v(\{1, 3\}) = 6,\ v(\{2, 3\}) = 4,\ v(N) = 10.$$

El vector de pagos correspondiente a la solución de Shapley es

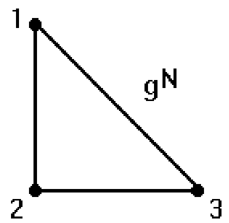
$$\phi[v] = (\,3.5\,,\ 2.5\,,\ 4\,).$$

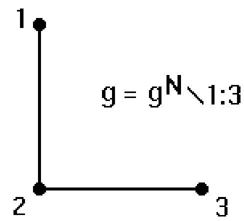
Esta solución corresponde a la situación de cooperación universal entre los jugadores de N, es decir, el grafo de cooperación es el grafo completo g^N. Si se considera la situación de cooperación parcial cuyo grafo es $g = \{1:2, 2:3\}$, la funcion característica del juego modificado v/g es:

$$v/g(\{i\}) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$
$$v/g(\{1,2\}) = 3, \quad v/g(\{1,3\}) = 0, \quad v/g(\{2,3\}) = 4, \quad v/g(N) = 10.$$

Para esta situación el pago correspondiente por el valor de Myerson es

$$\phi[v/g] = (\, 2.5\,,\, 4.5\,,\, 3\,).$$





El segundo jugador era el que obtenía un pago menor en el juego inicial, mientras que ahora es el que obtiene mayor utilidad, ya que en la nueva situación él puede cooperar con los otros y es, a su vez, indispensable en la cooperación global. Por otro lado, el grafo que se considera es $g = g^N \setminus 1\!:\!3$. Observamos cómo los jugadores 1 y 3, cuyo acuerdo bilateral desaparece, pierden en la nueva situación (estabilidad) y los dos experimentan la misma disminución en el pago (justicia).

1.4 La extensión multilineal de un juego

Un juego cooperativo (N, v) queda determinado una vez conocida su función de utilidad v que es una función real cuyo dominio es 2^N, es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de N. Este dominio se identifica con el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ siguiente:

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; x_i = 0 \text{ ó } 1,\; i = 1, ..., n\},$$

ya que cada subconjunto $S \subseteq N$ está en correspondencia biyectiva con uno de los vectores del conjunto anterior, concretamente con aquél en el que $x_i = 1$ si $i \in S$ y $x_j = 0$ si $j \notin S$.

De esta forma 2^N se asimila a $\{0,1\}^n$ y se puede pensar que v es una función real definida en los vértices del cubo unidad. A partir de esta identificación, Owen en 1972 extiende dicha función a todo el cubo unidad

$$I^n = [0,1]^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, ..., n\},$$

en la forma que se establece a continuación.

Definición 1.34
Para un juego cooperativo (N, v), la extensión multilineal (EML) de v es la función real de n variables dada por

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} x_j \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \, v(S).$$

Esta función está definida para cualesquiera valores reales de $x_j, \ j = 1, ..., n$, aunque habitualmente se considera sólo los valores de f en el cubo unidad.

La función que se acaba de definir coincide con v en los vértices del cubo unidad y, en este sentido, es una extensión de v, tratándose además de una función afín en cada una de las variables $x_j, \ j = 1, ..., n$. Se demuestra que, de hecho, esta función f es la única que verifica las dos propiedades anteriores.

Desde el punto de vista probabilístico, la EML admite la siguiente interpretación: si X es una coalición de jugadores formada aleatoriamente, es decir, suponiendo que x_j es la probabilidad de que el jugador j pertenezca a X, para $j = 1, ..., n$, y estas probabilidades son independientes, entonces, para cada $S \subseteq N$,

$$prob\{X = S\} = \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j).$$

En tal caso,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = E[v(X)],$$

donde E representa la esperanza matemática.

La EML es especialmente útil para el cálculo de algunos de los conceptos de solución que han sido presentados en las secciones anteriores.

Teorema 1.35 *(Owen, 1972 y 1975)*
Si (N, v) es un juego cooperativo con utilidad transferible y $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es su EML, entonces:

(a) El valor de Shapley para cada jugador $i \in N$ es

$$\phi_i[v] = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, ..., t)\, dt.$$

(b) El valor de Banzhaf para cada jugador $i \in N$ es

$$\phi_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(1/2, 1/2, ..., 1/2).$$

Observación 1.36
La EML también puede emplearse para calcular el valor coalicional de Owen (Owen y Winter, 1992) o para calcular el valor de Banzhaf para juegos con estructura de coalición (Carreras y Magaña, 1994). En ambos casos se parte de la EML del juego inicial (N, v) y se modifica ésta, según los pasos de sendos algoritmos preestablecidos, hasta obtener otras extensiones multilineales. A partir de estas extensiones multilineales y empleando los métodos del teorema anterior, se obtiene una u otra solución modificada por la estructura de coaliciones que se esté considerando.

2

Estructuras de coalición y semivalores

2.1 Sistemas de referencia para semivalores

Un semivalor cualquiera σ definido sobre el espacio de juegos cooperativos G_N viene determinado por sus coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$. Los coeficientes de un semivalor son números reales, así cada semivalor σ puede identificarse con el punto de sus coeficientes $(p_1, p_2, ..., p_n)$, pensado éste como punto del espacio afín $\mathbb{R}^n$. Debido a que los coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, han de cumplir la condición

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1,$$

los puntos asociados a los semivalores pertenecen a un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, que es el que tiene por ecuación la condición anterior. Sin embargo, no todos los puntos de ese hiperplano se corresponden a semivalores; sólo aquellos cuyas componentes sean todas no negativas tienen un semivalor asociado, puesto que $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, es la segunda condición que se exige a los coeficientes de un semivalor.

En esta sección prestaremos especial atención a unos semivalores concretos caracterizados por la forma específica de sus coeficientes. Estos semivalores verifican que el pago que asignan a cada jugador $i \in N$ tiene una expresión sencilla a partir de la EML del juego $v \in G_N$ que se esté estudiando. Además, estos semivalores pueden agruparse formando sistemas de referencia en el hiperplano de semivalores, de forma que cualquier otro semivalor se expresa como combinación lineal de éstos, permitiendo extender las propiedades que se demuestren para los semivalores de un sistema de referencia al conjunto de semivalores sobre el espacio de juegos G_N.

Proposición 2.1
Para cualquier número $\alpha \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 1$, los números

$$p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}, \quad 1 \leq s \leq n,$$

definen los coeficientes de un semivalor sobre el espacio de juegos $G_N,\ |N| = n \geq 1$.

Demostración
Hemos de probar que los coeficientes $p_{\alpha,s}$, $1 \leq s \leq n$, cumplen las condiciones que se exigen a los coeficientes de un semivalor:

$$\text{(i)} \quad p_{\alpha,s} \geq 0, \ \ 1 \leq s \leq n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_{\alpha,s} = 1.$$

La condición (i) es evidente. Para probar la condición (ii):

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_{\alpha,s} = \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \alpha^{t}(1-\alpha)^{n-1-t},$$

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_{\alpha,s} = [\alpha + (1-\alpha)]^{n-1} = 1. \ \square$$

Observación 2.2
Los números $p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$, $1 \leq s \leq n$, están definidos para $\alpha \in (0,1)$. Pretendemos dar sentido a las expresiones para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ calculando los límites siguientes:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} (p_{\alpha,1}, ..., p_{\alpha,n}) = \lim_{\alpha \to 0^+} ((1-\alpha)^{n-1}, \alpha(1-\alpha)^{n-2}, ..., \alpha^{n-1}) = (1, 0, ..., 0),$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} (p_{\alpha,1}, ..., p_{\alpha,n}) = \lim_{\alpha \to 1^-} ((1-\alpha)^{n-1}, ..., \alpha^{n-2}(1-\alpha), \alpha^{n-1}) = (0, ..., 0, 1).$$

Los casos extremos que aparecen corresponden al índice dictatorial, coeficientes $(1, 0, ..., 0)$, y al índice marginal, coeficientes $(0, ..., 0, 1)$. Como consecuencia de la propiedad anterior y de esta observación podemos enunciar la siguiente definición.

Definición 2.3
Para cada número real α cumpliendo $0 \leq \alpha \leq 1$, definimos un semivalor sobre el espacio de juegos G_N, $|N| = n$, que designamos por σ_α, como aquél cuyos coeficientes son:

$$0 < \alpha < 1, \qquad \sigma_\alpha : \qquad p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s},\ 1 \leq s \leq n.$$

$$\sigma_0 : \qquad p_{0,1} = 1;\ p_{0,s} = 0,\ 2 \leq s \leq n.$$

$$\sigma_1 : \qquad p_{1,s} = 0,\ 1 \leq s \leq n-1;\ p_{1,n} = 1.$$

Dentro del que llamamos hiperplano de semivalores, identificando cada semivalor con el punto de sus coeficientes, la familia σ_α, $\alpha \in [0, 1]$, se corresponde a una curva descrita por el parámetro α; el punto inicial es el correspondiente al índice dictatorial, el punto final es el correspondiente al índice marginal y para el valor $\alpha = 1/2$ la curva pasa por el punto correspondiente al valor de Banzhaf.

Definición 2.4
Consideramos los semivalores $\sigma_i : G_N \to \mathbb{R}^N,\ 1 \leq i \leq n$, de coeficientes respectivos $p_{i,s},\ 1 \leq s \leq n,\ |N| = n$.
La familia $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ forma un sistema de referencia para los semivalores sobre el espacio de juegos G_N, si la familia de puntos $\{P_i\}_{1 \leq i \leq n}$ forma un sistema de referencia afín del hiperplano de $\mathbb{R}^n$ de ecuación $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$.

Cada punto P_i tiene por coordenadas los coeficientes del semivalor σ_i, es decir,

$$P_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, ..., p_{i,n}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Lema 2.5
Supongamos que L es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m, $(1 \leq m < n)$, y que el punto $Q \notin L$. La familia $\{P_i \in L\}_{1 \leq i \leq m+1}$ forma un sistema de referencia afín de la variedad L si y sólo si la familia de vectores $\{\overrightarrow{QP_i}\}_{1 \leq i \leq m+1}$ es linealmente independiente.

Demostración
Suponemos que la familia $\{\overrightarrow{QP_i}\}_{1\leq i\leq m+1}$ es linealmente independiente. Para probar que $\{P_i \in L\}_{1\leq i\leq m+1}$ forma un sistema de referencia afín de L, tomando P_1 como punto origen y $\{P_i\}_{2\leq i\leq m+1}$ como puntos unidad, hemos de probar que $\{\overrightarrow{P_1P_i}\}_{2\leq i\leq m+1}$ forman una base de la dirección de L. Al ser $\dim L = m$, igual al número de vectores de la familia, basta probar que se trata de vectores linealmente independientes.

$$\sum_{i=2}^{m+1}\beta_i\overrightarrow{P_1P_i} = \sum_{i=2}^{m+1}\beta_i(\overrightarrow{QP_i} - \overrightarrow{QP_1}) = \left(-\sum_{i=2}^{m+1}\beta_i\right)\overrightarrow{QP_1} + \sum_{i=2}^{m+1}\beta_i\overrightarrow{QP_i} = \overrightarrow{0}.$$

De la independencia lineal de $\{\overrightarrow{QP_i}\}_{1\leq i\leq m+1}$ se sigue, $-\sum_{i=2}^{m+1}\beta_i = \beta_2 = \cdots = \beta_{m+1} = 0$; en particular, $\beta_2 = \cdots = \beta_{m+1} = 0$, lo cual implica la independencia lineal de $\{\overrightarrow{P_1P_i}\}_{2\leq i\leq m+1}$.

Recíprocamente. Suponemos ahora que $\{P_i\}_{2\leq i\leq m+1}$ forma un sistema de referencia afín de L.

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\overrightarrow{QP_i} = \sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(\overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{P_1P_i}) = \left(-\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\right)\overrightarrow{P_1Q} + \sum_{i=2}^{m+1}\lambda_i\overrightarrow{P_1P_i} = \overrightarrow{0}.$$

La familia $\{\overrightarrow{P_1P_i}\}_{2\leq i\leq m+1}$ es linealmente independiente por ser $\{P_i\}_{1\leq i\leq m+1}$ sistema de referencia afín de la variedad L; a su vez, el vector $\overrightarrow{P_1Q}$ no es combinación lineal de $\{\overrightarrow{P_1P_i}\}_{2\leq i\leq m+1}$, pues si lo fuera, el punto $Q \in L$. En consecuencia, $\{\overrightarrow{P_1Q}, \overrightarrow{P_1P_2}, ..., \overrightarrow{P_1P_{m+1}}\}$ es una familia linealmente independiente, por lo que, necesariamente,

$$-\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m+1} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m+1} = 0,$$

y $\{\overrightarrow{QP_i}\}_{1\leq i\leq m+1}$ es linealmente independiente. □

Teorema 2.6
Para $n > 1$, escogidos n números cualesquiera $\alpha_i \in [0,1]$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, la familia $\{\sigma_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ forma un sistema de referencia para los semivalores definidos sobre el espacio de juegos cooperativos G_N, $|N| = n$.

Demostración
Consideraremos que los semivalores están ordenados siguiendo el orden creciente

de los números α_i, $1 \leq i \leq n$, es decir, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$, sin que ello suponga pérdida de generalidad.

Denotamos por P_{α_i} al punto correspondiente a los coeficientes del semivalor σ_{α_i}, $1 \leq i \leq n$. Según la definición 2.4, hemos de probar que $\{P_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ forma un sistema de referencia afín del hiperplano de $\mathbb{R}^n$ de ecuación $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$, conocido como hiperplano de semivalores, donde las variables son $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$. Por el lema anterior, basta demostrar que la familia de vectores $\{\overrightarrow{OP_{\alpha_i}}\}_{1\leq i\leq n}$ es linealmente independiente, donde ahora $m = n-1$ y el punto Q del lema es el origen de coordenadas O, que no pertenece al hiperplano considerado.

El determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores $\overrightarrow{OP_{\alpha_1}}, ..., \overrightarrow{OP_{\alpha_n}}$, para el caso $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$, es:

$$\begin{vmatrix} (1-\alpha_1)^{n-1} & (1-\alpha_2)^{n-1} & \cdots & (1-\alpha_n)^{n-1} \\ \alpha_1(1-\alpha_1)^{n-2} & \alpha_2(1-\alpha_2)^{n-2} & \cdots & \alpha_n(1-\alpha_n)^{n-2} \\ \alpha_1^2(1-\alpha_1)^{n-3} & \alpha_2^2(1-\alpha_2)^{n-3} & \cdots & \alpha_n^2(1-\alpha_n)^{n-3} \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ \alpha_1^{n-2}(1-\alpha_1) & \alpha_2^{n-2}(1-\alpha_2) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(1-\alpha_n) \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\alpha_1)^{n-1}(1-\alpha_2)^{n-1}\cdots(1-\alpha_n)^{n-1}\,\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1} & \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \\ \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^2 & \left(\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)^2 & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)^2 \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & & \\ \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^{n-2} & \left(\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)^{n-2} & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)^{n-2} \\ \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^{n-1} & \left(\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)^{n-1} & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\alpha_1)^{n-1}(1-\alpha_2)^{n-1}\cdots(1-\alpha_n)^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left[\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}-\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right]=$$

$$= (1-\alpha_1)^{n-1}(1-\alpha_2)^{n-1}\cdots(1-\alpha_n)^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\alpha_j-\alpha_i}{(1-\alpha_j)(1-\alpha_i)}=$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0, \quad \text{ya que } \alpha_j\neq\alpha_i, \text{ si } i\neq j.$$

Para el caso $0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<1$ los coeficientes de la primera columna del determinante son,

$$p_{0,1}=1,\ p_{0,2}=\cdots=p_{0,n}=0,$$

de manera que se obtiene un determinante del mismo tipo, que desarrollado por la primera columna resulta ser:

$$\prod_{2\le i\le n}\alpha_i\prod_{2\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0, \quad \text{ya que } \alpha_j\neq\alpha_i, \text{ si } i\neq j.$$

Consideraciones similares permiten demostrar que el determinante es también no nulo en los casos que quedan por estudiar: $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n=1$ y $0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n=1$. $\square$

Proposición 2.7
Fijados n números reales diferentes, $0\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\le 1$, cualquier semivalor σ definido sobre el espacio de juegos G_N, $|N|=n$, se expresa en forma única como combinación lineal del sistema de referencia de semivalores $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1\le j\le n}$, esto es, existen unos coeficientes únicos λ_j, $1\le j\le n$, tales que:

$$\sigma=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sigma_{\alpha_j}, \quad \text{cumpliendo} \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1.$$

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la propiedad anterior. Si $\{P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, ..., P_{\alpha_n}\}$ forma un sistema de referencia en el hiperplano de semivalores, el punto P_σ correspondiente al semivalor σ cumplirá

$$\overrightarrow{P_{\alpha_1}P_\sigma} = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \overrightarrow{P_{\alpha_1}P_{\alpha_j}},$$

donde los escalares λ_j, $2 \le j \le n$, son únicos, ya que la familia $\{\overrightarrow{P_{\alpha_1}P_{\alpha_j}}\}_{2\le j\le n}$ forma una base del subespacio director del hiperplano de semivalores. De la igualdad anterior,

$$\overrightarrow{OP_\sigma} - \overrightarrow{OP_{\alpha_1}} = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \left(\overrightarrow{OP_{\alpha_j}} - \overrightarrow{OP_{\alpha_1}} \right),$$

$$\overrightarrow{OP_\sigma} = \left(1 - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \right) \overrightarrow{OP_{\alpha_1}} + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \overrightarrow{OP_{\alpha_j}}.$$

Basta definir $\lambda_1 = 1 - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j$ para poder escribir:

$$\overrightarrow{OP_\sigma} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{OP_{\alpha_j}}, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \ \square$$

Observación 2.8

Si los coeficientes del semivalor σ son p_s, $1 \le s \le n$, la igualdad anterior, desarrollada según los diferentes valores de α_j, $1 \le j \le n$, da lugar a:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1 \ \Rightarrow \ p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s}, \ 1 \le s \le n;$$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1 \ \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j (1-\alpha_j)^{n-1}, \\ p_s = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s}, \ 2 \le s \le n; \end{cases}$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = 1 \ \Rightarrow \begin{cases} p_s = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s}, \ 1 \le s \le n-1, \\ p_n = \lambda_n + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{n-1}; \end{cases}$$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} p_1 = \lambda_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j (1-\alpha_j)^{n-1}, \\ p_s = \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-s}, \; 2 \leq s \leq n-1, \\ p_n = \lambda_n + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{n-1}. \end{cases}$$

Estas cuatro expresiones recogen la relación entre los coeficientes de un semivalor cualquiera σ y los coeficientes de la familia $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1 \leq j \leq n}$, $\alpha_j \in [0,1]$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ si $j \neq k$, según si α_1, α_n toman o no los valores 0 ó 1. En todos los casos la relación entre los semivalores obedece a la expresión:

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Proposición 2.9
Si $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$, el pago que el semivalor σ_α, $\alpha \in [0,1]$, asigna a un jugador cualquiera $i \in N$ puede calcularse mediante la expresión

$$(\sigma_\alpha)_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\alpha}), \quad \overline{\alpha} = (\alpha, \alpha, ..., \alpha).$$

Demostración
En la expresión de la EML del juego $v \in G_N$,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} x_j \prod_{k \notin S} (1 - x_k) v(S),$$

separamos los términos según si las coaliciones S contienen o no al jugador $i \in N$ y calculamos la derivada parcial respecto a la variable x_i,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) \;\; = \;\; & \sum_{S \ni i} x_i \prod_{j \in S \setminus \{i\}} x_j \prod_{k \notin S} (1 - x_k) v(S) + \\ & + \sum_{S \not\ni i} (1 - x_i) \prod_{j \in S} x_j \prod_{k \notin S \cup \{i\}} (1 - x_k) v(S), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \quad &= \quad \sum_{S \ni i} \prod_{j \in S \setminus \{i\}} x_j \prod_{k \notin S} (1 - x_k) v(S) - \\ &\qquad - \sum_{S \not\ni i} \prod_{j \in S} x_j \prod_{k \notin S \cup \{i\}} (1 - x_k) v(S).\end{aligned}$$

Sustituyendo las variables por $\overline{\alpha} = (\alpha, \alpha, ..., \alpha)$, para $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\alpha}) &= \sum_{S \ni i} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} v(S) - \sum_{S \not\ni i} \alpha^{s}(1-\alpha)^{n-s-1} v(S) \\ &= \sum_{S \ni i} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} v(S) - \sum_{S \ni i} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} v(S \setminus \{i\}) \\ &= \sum_{S \ni i} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} [v(S) - v(S \setminus \{i\}] = (\sigma_\alpha)_i[v].\end{aligned}$$

Los casos $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{0}) = \sum_{\substack{S \ni i \\ |S|=1}} v(S) - \sum_{\substack{S \not\ni i \\ |S|=0}} v(S) = v(\{i\}) - v(\emptyset) = (\sigma_0)_i[v];$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{1}) = \sum_{\substack{S \ni i \\ |S|=n}} v(S) - \sum_{\substack{S \not\ni i \\ |S|=n-1}} v(S) = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = (\sigma_1)_i[v]. \ \Box$$

Teorema 2.10
Si $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$, el vector de pagos que un semivalor cualquiera σ asigna a los jugadores de v puede calcularse por medio de la expresión

$$\sigma[v] = B\ \Lambda,$$

donde la matriz B se obtiene para cada sistema de referencia de semivalores $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1 \leq j \leq n}$, $\alpha_j \in [0, 1]$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ si $j \neq k$, en la forma:

$$B = (\ b_{ij}\ )_{1 \leq i,j \leq n}, \quad b_{ij} = (\sigma_{\alpha_j})_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\alpha}_j),$$

y la matriz Λ es la matriz columna de los coeficientes de σ en ese sistema de referencia:

$$\Lambda^t = (\lambda_1\, \lambda_2\, \cdot\cdot\cdot\, \lambda_n), \quad \text{si} \;\; \sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}.$$

Demostración

Considerando la referencia de semivalores $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1\leq j\leq n}$, $\alpha_j \in [0,1]$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ si $j \neq k$, para cualquier jugador $i \in N$:

$$\sigma_i[v] = \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j} \Big)_i [v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sigma_{\alpha_j})_i[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\alpha}_j),$$

donde $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la EML del juego v. Basta identificar cada expresión con los elementos de las matrices que se han definido, para poder concluir que se verifica la expresión del enunciado. $\square$

La fórmula $\sigma[v] = B\; \Lambda$ permite obtener el vector de pagos para un determinado juego $v \in G_N$ por cualquier semivalor σ. La matriz B no depende de ningún semivalor en concreto, depende de los semivalores del sistema de referencia que se escoja, pero una vez escogido éste, la matriz queda asociada al juego y permite calcular el vector de pagos por cualquier semivalor, sin mas que modificar la matriz Λ de sus coeficientes en el sistema de referencia escogido.

Ejemplo 2.11

Consideramos el juego $v \in G_N$, $N = \{1,2,3\}$, definido en la forma:
$v(\{1\}) = 2$, $v(\{2\}) = 1$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 3$, $v(\{1,3\}) = 3$, $v(\{2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,3\}) = 4$. Su EML es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3.$$

En tal caso:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2 + x_3 - x_2x_3, 1 + x_3 - x_1x_3, x_1 + x_2 - x_1x_2),$$

$$\nabla f(t,t,t) = (2 + t - t^2, 1 + t - t^2, 2t - t^2);$$

integrando entre 0 y 1:

$$\phi[v] = (\, 13/6\, ,\; 7/6\, ,\; 2/3\,)$$

Ahora escogemos tres números reales del intervalo $[0, 1]$ y escribimos los coeficientes correspondientes a los semivalores del tipo σ_α para los valores $\alpha = 1/6,\ 1/2,\ 5/6$.

$$\sigma_{1/6}: \qquad p_{1/6,1} = 25/36, \qquad p_{1/6,2} = 5/36, \qquad p_{1/6,3} = 1/36;$$

$$\sigma_{1/2}: \qquad p_{1/2,1} = 1/4, \qquad p_{1/2,2} = 1/4, \qquad p_{1/2,3} = 1/4;$$

$$\sigma_{5/6}: \qquad p_{5/6,1} = 1/36, \qquad p_{5/6,2} = 5/36, \qquad p_{5/6,3} = 25/36.$$

Para calcular los coeficientes de la matriz B para este juego, empleamos la fórmula de la propiedad anterior, de manera que cada columna se obtiene sustituyendo en la expresión

$$\nabla f(\overline{\alpha}) = (2 + \alpha - \alpha^2, 1 + \alpha - \alpha^2, 2\alpha - \alpha^2)$$

los valores $\alpha = 1/6,\ 1/2,\ 5/6$, llegando a:

$$B = \begin{pmatrix} 77/36 & 9/4 & 77/36 \\ 41/36 & 5/4 & 41/36 \\ 11/36 & 3/4 & 35/36 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes del valor Shapley como semivalor son:

$$p_1 = \gamma(3, 1) = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \gamma(3, 2) = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \gamma(3, 3) = \frac{1}{3}.$$

Si designamos como Sh_3 al punto del hiperplano de semivalores para juegos cooperativos de 3 jugadores correspondiente al valor de Shapley, sus coordenadas son:

$$Sh_3 = (\,1/3\,,\ 1/6\,,\ 1/3\,)$$

Escrito el punto correspondiente al valor de Shapley Sh_3 en el sistema de referencia afín formado por los puntos $P_{1/6}$, $P_{1/2}$, $P_{5/6}$, se llega a obtener para el valor de Shapley:

$$\phi = 3/8\,\sigma_{1/6} + 2/8\,\sigma_{1/2} + 3/8\,\sigma_{5/6}.$$

Así, podemos calcular el vector de pagos que como semivalor asigna el valor de

Shapley a este juego:

$$\phi[v] = B\,\Lambda = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 77 & 81 & 77 \\ 41 & 45 & 41 \\ 11 & 27 & 35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/8 \\ 2/8 \\ 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ 7/6 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

observando que coincide con el resultado obtenido previamente.

Si se escoge como sistema de referencia de semivalores $\{\sigma_0,\ \sigma_{1/2},\ \sigma_1\}$, el valor de Shapley tine por expresión,

$$\phi = \frac{1}{6}\sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_{1/2} + \frac{1}{6}\sigma_1,$$

y el cálculo en este nuevo sistema de referencia es:

$$\phi[v] = B'\,\Lambda' = \begin{pmatrix} 2 & 9/4 & 2 \\ 1 & 5/4 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ 7/6 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

obteniéndose como se esperaba el mismo resultado, con independencia del sistema de referencia que pueda escogerse.

Definición 2.12
Sobre el espacio de juegos cooperativos $G_N,\ |N| \geq 2$, definimos el *semivalor vértice* $\sigma_{V_j} : G_N \to \mathbb{R}^N,\ 1 \leq j \leq n$, como aquel cuyos coeficientes son,

$$p_j = \frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}; \quad p_s = 0, \quad s \neq j.$$

Proposición 2.13
La familia de semivalores vértices $\{\sigma_{V_j}\}_{1\leq j\leq n}$ forma un sistema de referencia para los semivalores definidos sobre el espacio de juegos cooperativos $G_N,\ |N| \geq 2$.

Demostración
Basta probar que la familia de puntos vértices

$$\left\{\ V_j = \left(\ 0\,, ...,\, 0\,,\ \overset{j)}{\binom{n-1}{j-1}^{-1}}\,,\ 0\,, ...,\ 0\ \right)\ \right\}_{1\leq j\leq n}$$

forma un sistema de referencia afín del hiperplano $\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}p_s = 1$, o según el lema 2.5, que la familia de vectores $\{\overrightarrow{OV_j}\}_{1\leq j\leq n}$ es linealmente independiente, esto es,

$$\det(\overrightarrow{OV_1}, ..., \overrightarrow{OV_n}) = \prod_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}^{-1} \neq 0. \ \square$$

Observación 2.14
(a) Cada semivalor vértice tiene por coeficientes las coordenadas correspondientes a cada uno de los puntos vértices del convexo de $\mathbb{R}^n$ determinado por el hiperplano $\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}p_s = 1$ y los semiespacios $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$.

(b) Cualquier semivalor $\sigma : G_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ se expresa en forma única como combinación lineal de los semivalores de un sistema de referencia. Si p_s, $1 \leq s \leq n$, son los coeficientes del semivalor σ y el sistema de referencia es el de los semivalores vértices:

$$P = (p_1, ..., p_j, ..., p_n) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \left(0\,, ..., 0\,, \overset{j)}{\binom{n-1}{j-1}^{-1}}, 0\,, ..., 0 \right),$$

de donde, $p_j = \lambda_j \frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}$, $1 \leq j \leq n$, llegando a obtener: $\lambda_j = \binom{n-1}{j-1}p_j$, $1 \leq j \leq n$.

Es inmediato que $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$ y, en este caso particular, $\lambda_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$.

2.2 Semivalores binomiales

Para un semivalor σ definido sobre el espacio de juegos cooperativos G_N la expresión que permite obtener el pago a un jugador cualquiera $i \in N$ es:

$$\sigma_i[v] = \sum_{S\ni i} p_s[v(S) - v(S\setminus\{i\})].$$

Las contribuciones marginales del jugador i a cada coalición S están ponderadas según unos pesos p_s; estos pesos son iguales para cada cardinal de las coaliciones

$s = |S|$. La condición $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$ expresa el hecho de que la suma de pesos sea la unidad, teniendo en cuenta el número de coaliciones de cada cardinal que contienen al jugador i cuyo pago se calcula. Además $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, exige que cada peso sea no negativo.

En particular, el valor de Shapley es aquél cuyos pesos están definidos según las posibles ordenaciones de los jugadores de S, sin contar al jugador i, y las posibles ordenaciones del complementario de S, referidas a las posibles ordenaciones del conjunto total de jugadores, esto es:

$$\text{valor de Shapley sobre } G_N\text{: } p_s = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\,, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Otro caso particular, el valor de Banzhaf, otorga el mismo peso a todas las coaliciones que contienen al jugador i, cuyo número es de 2^{n-1}:

$$\text{valor de Banzhaf sobre } G_N\text{: } p_s = \frac{1}{2^{n-1}}\,, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Estos son dos ejemplos de semivalores sobre juegos de G_N que tienen la particularidad de definir los pesos de las coaliciones S conteniendo a cierto jugador i, no sólo en función del cardinal de S, sino también del cardinal del conjunto de jugadores N.

En realidad, cuando nos referimos al valor de Shapley o al valor de Banzhaf, no tratamos de dos semivalores aislados, sino que nos referimos a sendas familias de semivalores definidas sobre espacios de juegos cooperativos para todos y cada uno de los cardinales de los conjuntos de jugadores:

$$\left\{ \text{valor de Shapley sobre } G_N\text{: } p_s = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\,,\ 1 \leq s \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}^*};$$

$$\left\{ \text{valor de Banzhaf sobre } G_N\text{: } p_s = \frac{1}{2^{n-1}}\,,\ 1 \leq s \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Pretendemos ahora definir otras familias de semivalores, para cada cardinal del conjunto de jugadores. En la sección anterior hemos definido los semivalores σ_α para $0 < \alpha < 1$ como aquellos semivalores sobre el espacio de juegos G_N cuyos coeficientes son:

$$p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s},\ 1 \leq s \leq n.$$

Estos coeficientes también dependen del cardinal s de la coalición S que contiene al jugador i y del cardinal n del conjunto de jugadores N.

El peso que se otorga a una coalición S conteniendo al jugador i puede interpretarse de la siguiente manera: si $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ indica la probabilidad de que un jugador cualquiera forme parte de cualquier coalición, la probabilidad de que se forme una determinada coalición S conteniendo previamente a i es $\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$, suponiendo que el hecho de que cada jugador se incorpore a la coalición es independiente de que los demás lo hagan. Así, la probabilidad de que exactamente los $s-1$ jugadores de $S \setminus \{i\}$ se incorporen a S, mientras que los $n-s$ restantes no lo hagan, es precisamente el peso atribuido a cada una de las coaliciones de cardinal s: $p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$.

Podríamos pensar que los jugadores se encuentran en un recinto exterior al lugar donde se forman las coaliciones, y en ese lugar se encuentra ya el jugador i. Si cada jugador actúa independientemente de los demás y todos tienen probabilidad α de entrar y $1-\alpha$ de no entrar, la probabilidad de que exclusivamente entren los jugadores de $S \setminus \{i\}$ es $\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$.

Los casos límite para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ tienen también interpretación en términos de probabilidad. Si la probabilidad de formar parte de una coalición cualquiera tiende a 0, en el límite, ningún jugador entrará a formar parte, así que la única contribución marginal a tener en cuenta será $v(\{i\}) - v(\emptyset)$, con probabilidad 1, es decir:

$$(\sigma_0)_i[v] = v(\{i\}), \quad \forall i \in N.$$

Si la probabilidad de formar parte de cualquier coalición tiende a 1, en el límite, todos los jugadores entrarán a formar parte, formándose con probabilidad 1 la coalición total, mientras que el resto de coaliciones tendrán probabilidad 0, entonces:

$$(\sigma_1)_i[v] = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \quad \forall i \in N.$$

Definición 2.15
Llamamos semivalor binomial σ_α al semivalor definido sobre los espacios de juegos

G_N, $|N| \geq 1$, cuyos coeficientes son:

$$\text{para } 0 < \alpha < 1: \qquad p^n_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}, \quad 1 \leq s \leq n,$$

$$\text{para } \alpha = 0: \qquad p^n_{0,1} = 1, \;\; p^n_{0,s} = 0, \quad 2 \leq s \leq n,$$

$$\text{para } \alpha = 1: \qquad p^n_{1,s} = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \;\; p^n_{1,n} = 1.$$

Estos semivalores están definidos para los diferentes cardinales de los conjuntos de jugadores. Por tanto, para cada $\alpha \in [0,1]$ hemos definido la siguiente familia:

$$\left\{\text{semivalor binomial para } \alpha \text{ sobre } G_N; \text{ coeficientes: } p^n_{\alpha,s}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Cuando no exista duda sobre el cardinal del conjunto de jugadores N, omitiremos el superíndice n y escribiremos los coeficientes $p_{\alpha,s}$, $1 \leq s \leq n$.

Ejemplo 2.16
La familia de valores de Banzhaf es la correspondiente a la familia de semivalores binomiales para $\alpha = 1/2$.

$$p^n_{1/2,s} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-s} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad 1 \leq s \leq n.$$

En este caso, la probabilidad que tiene cada jugador de entrar a formar parte de cualquier coalición es la misma que la de no entrar a formar parte de la coalición.

Ejemplo 2.17
En el ejemplo anterior, todas las coaliciones tienen el mismo peso a la hora de calcular el pago para cualquier jugador. En general, la ponderación es diferente según el cardinal de las coaliciones. Si estimamos que las coaliciones con $s-1$ jugadores han de ponderarse con un peso k veces superior al de las coaliciones de cardinal s, $(k > 1)$, un semivalor binomial concreto σ_α recoge esta situación:

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} = \frac{\alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-(s-1)}}{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}} = k, \quad 1 < s \leq n \;\Rightarrow\; \frac{1-\alpha}{\alpha} = k; \;\; \alpha = \frac{1}{k+1}.$$

Por ejemplo, si el peso a las coaliciones de cardinal $s-1$ ha de ser el doble que a las de cardinal s, el semivalor binomial adecuado es $\sigma_{1/3}$; si ha de ser el triple,

$\sigma_{1/4}$. En general, σ_α, con $0 < \alpha < 1/2$, recoge los casos en los que las coaliciones ganan peso a medida que disminuye su cardinal: para σ_α, con $0 < \alpha < 1/2$, el factor de proporcionalidad es $k = (1-\alpha)/\alpha$.

Por el contrario, si se estima que las coaliciones de cardinal $s+1$ han de ponderarse con un peso K veces superior a las de cardinal s, $(K > 1)$, el semivalor binomial concreto σ_α que recoge esta situación es:

$$\frac{p_{s+1}}{p_s} = \frac{\alpha^s(1-\alpha)^{n-(s+1)}}{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}} = K, \quad 1 \leq s < n \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{1-\alpha} = K; \;\; \alpha = \frac{K}{K+1}\,.$$

Si $K = 2$, el semivalor adecuado es $\sigma_{2/3}$. En general, σ_α, con $1/2 < \alpha < 1$, recoge los casos en los que las coaliciones ganan peso a medida que aumenta su cardinal: para σ_α, con $1/2 < \alpha < 1$, el factor de proporcionalidad es $K = \alpha/(1-\alpha)$.

Observación 2.18
En Feltkamp (1995) se demuestra una caracterización axiomática para el valor de Banzhaf. Se pretende ahora introducir una caracterización para cada uno de los semivalores binomiales σ_α, $\alpha \in (0,1)$.

Si G_N denota el espacio de juegos cooperativos de n jugadores, para las reglas de asignación

$$\begin{array}{rccc} X: & G_N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & v & \rightarrow & X[v] \end{array}$$

se consideran las siguientes propiedades:

A1 *Simetría.* Si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, $\forall S \subseteq N \setminus \{i,j\}$, entonces $X_i[v] = X_j[v]$.

A2 *Jugador nulo.* Si $i \in N$ es nulo en el juego $v \in G_N$, entonces $X_i[v] = 0$.

A3 *Aditividad.* $X[u+v] = X[u] + X[v]$, $\forall u, v \in G_N$.

A4 Para cada juego $v \in G_N$ y cada $\alpha \in (0,1)$ se define

$$\eta_\alpha[v] = \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N,\, S \ni i} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

entonces $\sum_{i\in N} X_i[v] = \eta_\alpha[v]$.

Teorema 2.19
La única regla de asignación definida sobre el espacio de juegos G_N que verifica las propiedades A1, A2, A3 y A4, para un valor prefijado de α $(0 < \alpha < 1)$, es el semivalor σ_α definido en la forma:

$$(\sigma_\alpha)_i[v] = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S\setminus\{i\})], \quad i \in N.$$

Demostración
El semivalor σ_α, $\alpha \in (0,1)$, verifica A1, A2, A3 y A4, para el propio valor α.

Supongamos $\alpha \in (0,1)$ y que una regla de asignación $X : G_N \to \mathbb{R}^N$ verifica A1, A2, A3 y A4, para ese valor de α. Todo juego $v \in G_N$ puede expresarse como combinación lineal de la base de juegos de unanimidad de G_N, $\{u_S \,/\, S \subseteq N\}$, en la forma

$$v = \sum_{S\subseteq N} c_S u_S\,, \quad \text{donde} \quad c_S = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{s-t} v(T).$$

Por la propiedad A3 de aditividad, basta conocer la actuación de X sobre juegos del tipo cu_R, donde R es cualquier subconjunto de N y $c \in \mathbb{R}$.

Si el jugador $i \notin R$, $u_R(S \setminus \{i\}) = u_R(S)$, $\forall S \subseteq N,\ S \ni i$, luego i es nulo en u_R; por la propiedad A2, $X_i[cu_R] = 0$, si $i \notin R$. En virtud de la propiedad A4:

$$\sum_{i\in R} X_i[cu_R] = \eta_\alpha[cu_R] = \sum_{i\in N} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} c\,[u_R(S) - u_R(S\setminus\{i\})].$$

Como antes, para $i \in N \setminus R$, $u_R(S) - u_R(S \setminus \{i\}) = 0$, $\forall S \subseteq N,\ S \ni i$. Para $i \in R$, los únicos subconjuntos $S \ni i$ que consiguen que $u_R(S) - u_R(S \setminus \{i\}) = 1$ son exactamente de la forma $S = R \cup P$, donde $P \subseteq N \setminus R$. Atendiendo a los diferentes cardinales de los subconjuntos P cumpliendo la condición que se ha establecido, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in R} X_i[cu_R] &= c\,r\sum_{p=0}^{n-r}\binom{n-r}{p}\alpha^{r+p-1}(1-\alpha)^{n-r-p} \\
&= c\,r\,\alpha^{r-1}\sum_{p=0}^{n-r}\binom{n-r}{p}\alpha^{p}(1-\alpha)^{n-r-p} \\
&= c\,r\,\alpha^{r-1}(\alpha+1-\alpha)^{n-r} = c\,r\,\alpha^{r-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, por la propiedad A1 de simetría, todos los elementos de R reciben el mismo pago por X, de forma que si $i \in R$:

$$X_i[cu_R] = \frac{1}{r}\sum_{i\in R} X_i[cu_R] = c\,\alpha^{r-1}.$$

De esta manera resulta completamente determinado el pago por X para cualquier juego $v \in G_N$. Esto completa la demostración. $\square$

Podemos comprobar que el semivalor σ_α, $\alpha \in (0,1)$, asigna los mismos valores que X para el juego $cu_R \in G_N$. Si el jugador $i \notin R$, i es nulo en cu_R, entonces $(\sigma_\alpha)_i[cu_R] = 0$. Si $i \in R$, $u_R(S) - u_R(S \setminus \{i\}) = 1$ exclusivamente cuando $S = R \cup P$, $P \subseteq N \setminus R$; en cualquier otro caso, $u_R(S) - u_R(S \setminus \{i\}) = 0$. Entonces,

$$(\sigma_\alpha)_i[cu_R] = c\sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[u_R(S) - u_R(S\setminus\{i\})], \quad i \in R;$$

$$(\sigma_\alpha)_i[cu_R] = c\sum_{p=0}^{n-r}\binom{n-r}{p}\alpha^{r+p-1}(1-\alpha)^{n-r-p} = c\,\alpha^{r-1}, \quad i \in R.$$

Así, $X_i[cu_R] = (\sigma_\alpha)_i[cu_R]$, $\forall i \in N$, $\forall R \subseteq N$, $\forall c \in \mathbb{R}$, de donde se concluye que $X = \sigma_\alpha$.

2.3 Semivalores inducidos

Nos proponemos ahora asociar a cada semivalor concreto σ definido sobre el espacio de juegos G_N una familia de semivalores, de manera que cada uno de sus miembros esté definido sobre espacios de juegos donde el conjunto de jugadores sea de cardinal inferior al del propio N. En este cometido jugarán un papel esencial las familias de semivalores binomiales que se acaban de considerar.

Para un semivalor concreto $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$, fijados n números reales $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$, existen n escalares únicos λ_j, $1 \leq j \leq n$, tales que: $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Siguiendo la nomenclatura introducida en la definición 2.15 para los coeficientes de los semivalores binomiales, los coeficientes del semivalor σ son:

$$p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p^n_{\alpha_j,s}, \qquad 1 \leq s \leq n.$$

A partir de la igualdad anterior, definimos para cada natural m, $(1 \leq m < n)$, los siguientes números:

$$p^m_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p^m_{\alpha_j,s}, \qquad 1 \leq s \leq m. \tag{2.1}$$

Lema 2.20
Con la nomenclatura de la definición 2.15, los números definidos en la expresión (2.1), verifican:

(a) $\displaystyle\sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} p^m_s = 1$, para cada m, $1 \leq m < n$.

(b) p^m_s son independientes de los $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ escogidos, así como de los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la combinación lineal.

Demostración
(a) Fijado m, $1 \leq m < n$,

$$\sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} p^m_s = \sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p^m_{\alpha_j,s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} p^m_{\alpha_j,s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

ya que como los coeficientes $p^m_{\alpha_j,s}$ son los correspondientes a un semivalor definido sobre juegos con m jugadores se verifica:

$$\sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} p^m_{\alpha_j,s} = 1.$$

(b) Suponemos el caso $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$. En la expresión de p_s, sustituimos cada $p_{\alpha_j,s}$ por su valor en función de los números α_j:

$$p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_{\alpha_j,s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s}, \qquad 1 \leq s \leq n.$$

En las igualdades para $s = 1, ..., n-1$, separamos un factor del tipo $1-\alpha_j$ en cada término del sumatorio,

$$p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1-\alpha_j)\alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s-1}, \qquad 1 \leq s \leq n-1,$$

$$p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s-1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s}(1-\alpha_j)^{n-s-1}, \qquad 1 \leq s \leq n-1,$$

$$p_s + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s}(1-\alpha_j)^{n-(s+1)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-1-s}, \qquad 1 \leq s \leq n-1.$$

El sumatorio que acompaña a p_s en el miembro de la izquierda es p_{s+1}, $1 \leq s \leq n-1$, mientras que el de la derecha es el número p^{n-1}_s, $1 \leq s \leq n-1$,

$$p_s + p_{s+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-1-s} = p^{n-1}_s, \qquad 1 \leq s \leq n-1.$$

En las igualdades anteriores para $s = 1, ..., n-2$, repetimos el proceso:

$$p_s + p_{s+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1-\alpha_j)\alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-1-s-1}, \qquad 1 \leq s \leq n-2,$$

$$p_s + p_{s+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s-2} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s}(1-\alpha_j)^{n-s-2}, \qquad 1 \leq s \leq n-2,$$

$$p_s + p_{s+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^s (1-\alpha_j)^{n-(s+2)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-2-s}, \qquad 1 \leq s \leq n-2.$$

El sumatorio que acompaña a $p_s + p_{s+1}$ en el miembro de la izquierda es $p_{s+1} + p_{s+2}$, $1 \leq s \leq n-2$, mientras que el de la derecha es el número p_s^{n-2}, $1 \leq s \leq n-2$,

$$p_s + 2p_{s+1} + p_{s+2} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-2-s} = p_s^{n-2}, \qquad 1 \leq s \leq n-2,$$

o lo que es lo mismo:

$$\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} p_{s+j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-2-s} = p_s^{n-2}, \qquad 1 \leq s \leq n-2.$$

Con esto hemos probado que los números p_s^m tienen una expresión independiente de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ y de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ para los casos $m = n-1$ y $m = n-2$. Supongamos ahora que esta expresón es vàlida para $m+1$ $(1 < m+1 < n)$ y veamos que también se verifica para m.

Por hipótesis de inducción:

$$\sum_{j=0}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{m+1-s} = p_s^{m+1}, \qquad 1 \leq s \leq m+1.$$

En las igualdades anteriores para $s = 1, ..., m$, separamos un factor del tipo $1-\alpha_j$ en cada término del sumatorio:

$$\sum_{j=0}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1-\alpha_j) \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{m+1-s-1} = p_s^{m+1}, \ 1 \leq s \leq m,$$

$$\sum_{j=0}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+j} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s} (1-\alpha_j)^{m-s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{m-s}, \ 1 \leq s \leq m.$$

Por la hipótesis de inducción para $s+1\,(2 \leq s+1 \leq m+1)$, el segundo sumatorio del miembro de la izquierda es

$$\sum_{j=0}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+1+j}\,,$$

mientras que el sumatorio de la derecha es el número p_s^m, $1 \leq s \leq m$. Por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+j} + \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-(m+1)}{j-1} p_{s+j} = p_s^m, \qquad 1 \leq s \leq m,$$

$$p_s + \sum_{j=1}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j} p_{s+j} + \sum_{j=1}^{n-(m+1)} \binom{n-(m+1)}{j-1} p_{s+j} + p_{s+n-m} = p_s^m,$$

$$p_s + \sum_{j=1}^{n-(m+1)} \left[\binom{n-(m+1)}{j} + \binom{n-(m+1)}{j-1}\right] p_{s+j} + p_{s+n-m} = p_s^m,$$

$$p_s + \sum_{j=1}^{n-(m+1)} \binom{n-m}{j} p_{s+j} + p_{s+n-m} = p_s^m, \qquad 1 \leq s \leq m,$$

de donde,

$$p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j}, \qquad 1 \leq s \leq m. \tag{2.2}$$

Esta expresión prueba que para cualquier valor de m, $1 \leq m < n$, los números p_s^m, $1 \leq s \leq m$, no dependen ni de la elección de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ni de los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la combinación lineal, para el caso $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$. Los casos restantes, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n \neq 1$; $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_n = 1$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n = 1$ tienen un tratamiento similar, modificando de manera conveniente el número de sumandos en los diferentes sumatorios. $\square$

Proposición 2.21
Dado un semivalor $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$, $|N| = n$, de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, que para $\alpha_j \in [0,1]$, $1 \leq j \leq n$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ si $j \neq k$, se expresa en forma única como $\sigma = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, con $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, entonces, los números

$$p_s^m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_{\alpha_j,s}^m\,, \qquad 1 \leq s \leq m,$$

definen los coeficientes de un semivalor $\sigma^m : G_M \to \mathbb{R}^M$, $|M| = m$, para cada m, $1 \leq m < n$.

La familia $\{\sigma^m\}_{1\leq m<n}$ que denominamos *familia de semivalores inducidos por σ en espacios de juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores*, es independiente de la elección de los números α_j, $1 \leq j \leq n$, y de los coeficientes λ_j, $1 \leq j \leq n$, de la combinación lineal.

Demostración
Si $v \in G_M$, $1 \leq |M| < n$, al calcular

$$\sigma_i^m[v] = \sum_{S\subseteq M,\, S\ni i} p_s^m[v(S) - v(S\setminus\{i\})],$$

los coeficientes p_s^m son los mismos para cada cardinal de las coaliciones que intervienen, $|S| = s$, $1 \leq s \leq m = |M|$.

Por la parte (a) del lema 2.20:

$$\sum_{s=1}^{m} \binom{m-1}{s-1} p_s^m = 1, \quad 1 \leq m < n.$$

En la parte (b) del mismo lema se prueba la independencia de los coeficientes p_s^m de los números escogidos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ y de los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la combinación lineal. La misma fórmula (2.2) que nos da la independencia nos permite ver que:

$$p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j} \geq 0 \quad \text{para } 1 \leq s \leq m.$$

Por tanto, se verifican las dos propiedades que se exigen a los coeficientes de cualquier semivalor: cada elemento de $\{\sigma^m\}_{1\leq m<n}$ es un semivalor sobre cada G_M, $|M| = m$, y está bien definido. $\square$

Ejemplo 2.22
(a) Si consideramos el valor de Shapley como semivalor definido sobre el espacio de juegos G_N, entonces, los semivalores inducidos en espacios de juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores son también valores de Shapley.

(b) Si el semivalor sobre el espacio de juegos con n jugadores es de tipo binomial, σ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces, los semivalores inducidos en espacios de juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores son también binomiales, σ_α^m, $0 \leq \alpha \leq 1$, para $1 \leq m < n$.

Demostración

(a) Los coeficientes del valor de Shapley para juegos de G_N son

$$p_s = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \qquad 1 \leq s \leq n.$$

Según hemos visto, para juegos cooperativos con $n-1$ jugadores, y para $1 \leq s \leq n-1$:

$$p_s^{n-1} = p_s + p_{s+1} = \gamma(n,s) + \gamma(n,s+1) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} + \frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

$$p_s^{n-1} = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{n!}[n-s+s] = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} = \gamma(n-1,s).$$

Supongamos que lo que queremos probar es cierto para $m+1$, $(1 < m+1 < n)$:

$$p_s^{m+1} = \gamma(m+1,s), \qquad 1 \leq s \leq m+1,$$

y veamos si es cierto para m, $(1 \leq m < n)$:

$$p_s^m = p_s^{m+1} + p_{s+1}^{m+1} = \gamma(m+1,s) + \gamma(m+1,s+1) = \frac{(s-1)!(m+1-s)!}{(m+1)!} + \frac{s!(m-s)!}{(m+1)!},$$

$$p_s^m = \frac{(s-1)!(m-s)!}{m!} = \gamma(m,s), \qquad 1 \leq s \leq m.$$

(b) En el caso de semivalores binomiales sobre juegos de G_N, para $\alpha \in (0,1)$, los coeficientes son, $p_s = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$, $1 \leq s \leq n$. Sustituyendo en la fórmula general:

$$p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j} = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \alpha^{s+j-1}(1-\alpha)^{n-s-j}, \qquad 1 \leq s \leq m,$$

$$p_s^m = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{m-s} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-m-j}, \qquad 1 \leq s \leq m,$$

$$p_s^m = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{m-s}[(1-\alpha)+\alpha]^{n-m} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{m-s}, \qquad 1 \leq s \leq m.$$

Para $\alpha = 0$: $p_1 = 1$, $p_s = 0$, $2 \leq s \leq n$; de aquí:

$$p_1^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{1+j} = 1; \;\; p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j} = 0, \;\; 2 \leq s \leq m.$$

Para $\alpha = 1$: $p_s = 0$, $1 \leq s \leq n-1$; $p_n = 1$; de aquí:

$$p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j} = 0, \;\; 1 \leq s \leq m-1; \;\; p_m^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{m+j} = 1.$$

Caso particular 2.23
Si en el apartado (b) del ejemplo anterior consideramos el valor $\alpha = 1/2$, el semivalor inicial tiene coeficientes $p_s = (1/2)^{s-1}(1-1/2)^{n-s} = 1/2^{n-1}$, $1 \leq s \leq n$: es el valor de Banzhaf. Los semivalores inducidos en espacios de juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores son también valores de Banzhaf puesto que sus coeficientes son: $p_s^m = 1/2^{m-1}$ para $1 \leq s \leq m$ $(1 \leq m < n)$.

Observación 2.24
La manera de obtener el vector de pagos por un semivalor inducido σ^m a partir de la EML es, formalmente, la misma que la de obtener el vector de pagos del semivalor σ a partir de la EML correspondiente a un juego de G_N.

Es decir, si σ es un semivalor sobre juegos de G_N, con $|N| = n$, que se expresa en forma única como

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}, \quad \text{con} \;\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

una vez escogidos los números $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$ y suponiendo que $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la EML de un juego $v \in G_N$, por el teorema 2.10, para cada $i \in N$:

$$\sigma_i[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\alpha}_j), \qquad \overline{\alpha}_j = (\alpha_j, ..., \alpha_j).$$

Por la forma que adoptan los semivalores inducidos, con los mismos coeficientes de la combinación lineal, podemos afirmar que si un juego $w \in G_M$, con $|M| = m$, $1 \leq m < n$, el pago que el semivalor σ^m asigna a cada jugador $i \in M$ puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_i^m[w] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_i}(\overline{\alpha}_j), \qquad \overline{\alpha}_j = (\alpha_j, ..., \alpha_j),$$

donde $\bar{f} = \bar{f}(y_1, y_2, ..., y_m)$ es la EML del juego $w \in G_M$.

2.4 Semivalores modificados

Consideramos ahora un juego cooperativo concreto $v \in G_N$, con $|N| = n$, y que en el conjunto N de los jugadores se ha formado una partición por una estructura de coalición $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.

Queremos estudiar cómo varía la asignación que un semivalor σ otorga a un jugador cualquiera $i \in B_j$, por el hecho de haberse formado la estructura de coalición B. La asignación inicial al jugador i se designa por $\sigma_i[v]$ y la asignación modificada para juegos con estructura de coalición la designaremos por $\sigma_i[v; B]$.

Para poder llevar a término el proceso de construcción del semivalor modificado necesitamos tener semivalores definidos sobre cualesquiera conjuntos de jugadores M, con $|M| = m$, $1 \leq m \leq n$. Estos semivalores, que forman una familia para cada semivalor σ sobre el espacio de juegos G_N, con $|N| = n$, son precisamente los semivalores inducidos por σ sobre espacios de juegos con cardinal del conjunto de jugadores menor que el de N, es decir:

$$\sigma^m : G_M \to \mathbb{R}^M, \quad 1 \leq m \leq n,$$

donde se considera $\sigma^n = \sigma$.

La existencia de estos σ^m nos permitirá seguir un proceso paralelo al que conduce a la definición del valor coalicional a partir del valor de Shapley, pero ahora para cualquier semivalor.

Consideramos un semivalor determinado σ definido sobre G_N, $|N| = n$. Escogemos un conjunto arbitrario de n números reales $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$, de manera que el semivalor σ se expresa en forma única como combinación de semivalores binomiales: $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$ con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Designamos como M el conjunto de las clases en N por la partición en coaliciones $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$; M es un conjunto de m jugadores, $1 \leq m \leq n$.

Si el jugador $i \in B_j$, podemos definir el juego $u_{B_j|K}$ sobre M de la manera siguiente:

$$u_{B_j|K}(L) = v(\bigcup_{l \in L} B_l \setminus K'), \qquad K' = B_j \setminus K$$

donde L es cualquier subconjunto de M ($L \subseteq M$).

Este es el juego que juegan las clases de la partición, excepto la clase B_j a la que pertenece el jugador i, que es reemplazada por el subconjunto $K \subseteq B_j$.

Como que el juego $u_{B_j|K}$ está definido sobre un conjunto M con m jugadores ($1 \leq m \leq n$), podemos aplicar el correspondiente semivalor inducido por σ para juegos con ese cardinal del conjunto de jugadores: σ^m. Así podemos construir el juego w_j sobre cualquier subconjunto $K \subseteq B_j$ en la forma:

$$w_j(K) = (\sigma^m)_j[u_{B_j|K}], \qquad K \subseteq B_j,$$

es decir:

$$w_j(K) = (\lambda_1 \sigma^m_{\alpha_1} + \lambda_2 \sigma^m_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n \sigma^m_{\alpha_n})_j[u_{B_j|K}], \qquad K \subseteq B_j.$$

El valor $w_j(K)$ indica la asignación que por el semivalor inducido σ^m le correspondería al subconjunto $K \subseteq B_j$ si negociara directamente con las demás clases como jugadores del juego cociente, ignorando los restantes elementos de su clase, es decir, sin considerar $K' = B_j \setminus K$.

A continuación, dado que el juego w_j está definido para cualquier subconjunto de B_j, es decir, está definido sobre un conjunto con $|B_j| = b_j$ jugadores, al ser $1 \leq b_j \leq n$, podemos aplicar el semivalor inducido por σ para juegos con cardinal del conjunto de jugadores b_j, y definir finalmente el semivalor modificado por la estructura de coalición B en la forma:

$$\sigma_i[v;B] = (\sigma^{b_j})_i[w_j]\,, \qquad i \in B_j,$$

es decir:

$$\sigma_i[v;B] = (\lambda_1\sigma^{b_j}_{\alpha_1} + \lambda_2\sigma^{b_j}_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n\sigma^{b_j}_{\alpha_n})_i[w_j]\,, \qquad i \in B_j$$

Determinamos ahora el juego w_j para llegar a obtener una expresión explícita del semivalor modificado. Consideramos, en particular, que $\alpha_j \in (0,1)$, $1 \leq j \leq n$, en cuyo caso:

$$w_j(K) = \sum_{L \ni j} \Big(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_q^{l-1}(1-\alpha_q)^{m-l} \Big) \left[u_{B_j|K}(L) - u_{B_j|K}(L\setminus\{j\}) \right],$$

$$w_j(K) = \sum_{L \ni j} \Big(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_q^{l-1}(1-\alpha_q)^{m-l} \Big) \Big[\; v(\bigcup_{l\in L} B_l \setminus K') - v(\bigcup_{l \in L\setminus\{j\}} B_l \setminus K') \; \Big].$$

Si escribimos $L = T \cup \{j\}$, $T \not\ni j$, entonces $l = t+1$ y la igualdad anterior se transforma en:

$$w_j(K) = \sum_{T \not\ni j} \Big(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_q^{t}(1-\alpha_q)^{m-t-1} \Big) \Big[\; v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup K) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) \; \Big].$$

A partir de aquí:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{\substack{S' \subseteq B_j \\ S' \ni i}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \alpha_p^{s'-1}(1-\alpha_p)^{b_j - s'} \Big) [w_j(S') - w_j(S'\setminus\{i\})]\,.$$

Escribiendo $S' = S \cup \{i\}$, para $S \not\ni i$, es $s' = s+1$, quedando la igualdad anterior en la forma:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{\substack{S \subseteq B_j \\ S \not\ni i}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \alpha_p^{s}(1-\alpha_p)^{b_j - s-1} \Big) [w_j(S\cup\{i\}) - w_j(S)]\,.$$

Si en esta fórmula sustituimos $w_j(S\cup\{i\})$ y $w_j(S)$ por la expresión mediante doble sumatorio que habíamos logrado para $w_j(K)$ resulta, para $i \in B_j$:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{\substack{S\subseteq B_j \\ S\not\ni i}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \alpha_p^s (1-\alpha_p)^{b_j-s-1} \Big) \Big[\sum_{T\not\ni j} \Big(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_q^t (1-\alpha_q)^{m-t-1} \Big) \cdot$$
$$\cdot [v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)] \Big],$$

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}} \sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \alpha_p^s (1-\alpha_p)^{b_j-s-1} \Big) \Big(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_q^t (1-\alpha_q)^{m-t-1} \Big) \cdot$$
$$\cdot [v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)]. \tag{2.3}$$

Los coeficientes que acompañan a $v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)$ dependen de $s = |S|$ y dependen de $t = |T|$, pero no dependen de los coeficientes de la combinación de σ en función de los semivalores binomiales σ_{α_j}, ni tampoco de la elección de estos α_j en $(0,1)$. Así podemos enunciar la siguiente propiedad.

Teorema 2.25
(a) Si σ es un semivalor definido sobre los juegos de G_N, con $|N| = n$, que para $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$ se expresa como $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, y en el conjunto N de jugadores se ha establecido una partición mediante una estructura de coalición $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$, entonces el semivalor σ modificado para juegos con estructura de coalición puede obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \lambda_p \lambda_q \Big[\sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}} \sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}} \alpha_p^s \alpha_q^t (1-\alpha_p)^{b_j-s-1} (1-\alpha_q)^{m-t-1} \cdot$$
$$\cdot [v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)] \Big] \tag{2.4}$$

para $i \in B_j$, $B_j \in B$.

(b) La expresión anterior es independiente de los números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escogidos para formar el sistema de referencia de semivalores sobre G_N y también de los coeficientes de la combinación lineal de σ en función de $\sigma_{\alpha_1}, \ldots, \sigma_{\alpha_n}$.

Demostración
(a) La fórmula de este apartado se deduce directamente de las consideraciones previas a su enunciado para el caso $\alpha_j \in (0,1)$, $1 \leq j \leq n$. Los casos restantes, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n \neq 1$; $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_n = 1$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n = 1$, tienen un desarrollo similar modificando convenientemente el número de sumandos en los diferentes sumatorios, de acuerdo con las expresiones de la definición 2.15 y de la observación 2.8.

(b) Sabemos que cada semivalor inducido σ^m, $1 \leq m \leq n$, es independiente de la elección de los números α_j, $1 \leq j \leq n$, a partir de los cuales se forma el sistema de referencia de semivalores; como éstos son los que se emplean, primero para definir $w_j(K) = (\sigma^m)_j[u_{B_j|K}]$, $K \subseteq B_j$, y después para definir $\sigma_i[v; B] = (\sigma^{b_j})_i[w_j]$, $i \in B_j$, podemos afirmar que se cumple la independencia de la expresión (2.4) de los números α_j, $1 \leq j \leq n$, escogidos y de los escalares λ_j, $1 \leq j \leq n$, que aparecen en la combinación lineal. $\square$

Consecuencia 2.26
Si las estructuras de coalición son los casos extremos:

(a) $B = N_I = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, coaliciones individuales, entonces $\sigma[v; N_I] = \sigma[v]$.

(b) $B = \{N\} = \{\{1, 2, \ldots, n\}\}$, coalición total, entonces $\sigma[v; \{N\}] = \sigma[v]$.

Demostración
(a) En la estructura trivial en la que cada coalición está integrada por un único jugador, si se sigue la notación general:

$i \in B_i$, un único elemento: $S \subseteq B_i \setminus \{i\} \Rightarrow S = \emptyset$; $T \subseteq M \setminus \{i\} = N \setminus \{i\}$.

$$\sigma_i[v; N_I] = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \lambda_p \lambda_q \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \alpha_q^t (1-\alpha_q)^{n-t-1} [v(T \cup \{i\}) - v(T)],$$

$$\sigma_i[v; N_I] = \sum_{p=1}^{n} \Big[\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \alpha_q^t (1-\alpha_q)^{n-t-1} [v(T \cup \{i\}) - v(T)] \Big] \lambda_p,$$

$$\sigma_i[v; N_I] = \sum_{q=1}^{n} \lambda_q (\sigma_{\alpha_q})_i[v] \sum_{p=1}^{n} \lambda_p = \sigma_i[v].$$

(b) La otra estructura extrema en la que figura una única coalición adopta en términos de la notación general la forma:

$B = \{N\}$, un único elemento: $S \subseteq N \setminus \{i\}$; $T \subseteq M \setminus \{j\}$, $|M| = 1 \Rightarrow T = \emptyset$.

$$\sigma_i[v;\{N\}] = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\lambda_p\lambda_q \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \alpha_p^s(1-\alpha_p)^{n-s-1}[v(S\cup\{i\}) - v(S)],$$

$$\sigma_i[v;\{N\}] = \sum_{q=1}^{n}\Big[\,\sum_{p=1}^{n}\lambda_p \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \alpha_p^s(1-\alpha_p)^{n-s-1}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]\,\Big]\,\lambda_q,$$

$$\sigma_i[v;\{N\}] = \sum_{p=1}^{n}\lambda_p(\sigma_{\alpha_p})_i[v]\sum_{q=1}^{n}\lambda_q = \sigma_i[v].\ \square$$

Proposición 2.27
Supongamos que σ es cualquier semivalor sobre el espacio de juegos G_N y que B es cualquier estructura de coalición en el conjunto de jugadores N. El semivalor σ modificado para juegos con estructura de coalición verifica las propiedades:

(a) *Jugador nulo.* Si $i \in N$ es nulo en el juego $v \in G_N$, entonces $\sigma_i[v;B] = 0$.

(b) *Simetría dentro de cada bloque.* Si $v(S\cup\{i_1\}) = v(S\cup\{i_2\})$, $\forall S \subseteq N\setminus\{i_1,i_2\}$, con $i_1, i_2 \in B_j$, $(B_j \in B)$, entonces $\sigma_{i_1}[v;B] = \sigma_{i_2}[v;B]$.

(c) *Aditividad.* $\sigma[u+v;B] = \sigma[u;B] + \sigma[v;B]$, $\forall u,v \in G_N$.

(d) *Monotonía.* Si $v \in G_N$ es monótono, entonces $\sigma_i[v;B] \geq 0$, $\forall i \in N$.

(e) *Monotonía dentro de cada bloque.* Si $v(S\cup\{i_1\}) \geq v(S\cup\{i_2\})$, $\forall S \subseteq N\setminus\{i_1,i_2\}$, con $i_1, i_2 \in B_j$, $(B_j \in B)$, entonces $\sigma_{i_1}[v;B] \geq \sigma_{i_2}[v;B]$.

(f) *Títeres.* Si $i \in N$ es un títere en el juego $v \in G_N$, entonces $\sigma_i[v;B] = v(\{i\})$.

Demostración
Los apartados (a), (b) y (c) son consecuencia directa de la expresión para $\sigma_i[v;B]$, $i \in B_j$, $B_j \in B$, obtenida en la fórmula (2.4).

La expresión para $\sigma_i[v;B]$ en esa fórmula pone de manifiesto la dependencia en el cálculo de la asignación del semivalor modificado respecto a los coeficientes $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ del semivalor σ en el sistema de referencia de semivalores binomiales que se haya escogido. Si en vez de considerar la expresión (2.4) se toma en consideración la expresión (2.3), en la que los escalares λ_p, λ_q, $1 \leq p, q \leq n$, figuran junto a los coeficientes de los semivalores binomiales,

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \alpha_p^s (1-\alpha_p)^{b_j - s - 1} \right) \left(\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \alpha_p^t (1-\alpha_p)^{m-t-1} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \right],$$

se llega a

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} p_{s+1}^{b_j} p_{t+1}^{m} \left[v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \right],$$

donde $p_{s+1}^{b_j}$, $1 \leq s+1 \leq b_j$, y p_{t+1}^{m}, $1 \leq t+1 \leq m$, son los coeficientes de los semivalores inducidos por σ en espacios de juegos con cardinal del conjunto de jugadores b_j y m, respectivamente $(b_j, m \leq n)$.

A partir de la expresión anterior es inmediato comprobar (d), ya que si $v \in G_N$ es monótono,

$$v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \geq 0, \;\; \forall S \subseteq B_j \setminus \{i\}, \; \forall T \subseteq M \setminus \{j\},$$

que junto a $p_{s+1}^{b_j} p_{t+1}^{m} \geq 0$, da lugar a $\sigma_i[v;B] \geq 0$, $\forall i \in N$. De manera análoga se probaría (e).

Por último, para demostrar la propiedad (f), si $i \in N$ es un títere en el juego $v \in G_N$, se cumple

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}), \;\; \forall S \subseteq N \setminus \{i\},$$

de forma que la expresión para $\sigma_i[v;B]$ queda reducida a:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} p_{s+1}^{b_j} p_{t+1}^{m} \, v(\{i\}).$$

Pero como $p^{b_j}_{s+1}$, $1 \leq s+1 \leq b_j$, y p^m_{t+1}, $1 \leq t+1 \leq m$, son coeficientes de semivalores:

$$\sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} p^{b_j}_{s+1} = \sum_{s=0}^{b_j-1} \binom{b_j-1}{s} p^{b_j}_{s+1} = 1, \quad \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} p^m_{t+1} = \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m-1}{t} p^m_{t+1} = 1,$$

y se concluye que

$$\sigma_i[v;B] = v(\{i\}). \ \square$$

Observación 2.28
En la expresión (2.4) del semivalor modificado aparecen n^2 términos de tipo más sencillo que designaremos por $a_{pq}(i,v,B)$, ya que dependen del jugador i, del juego v, así como de la estructura de coalición B.

$$\begin{aligned} a_{pq}(i,v,B) \ = & \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} \alpha_p^s \alpha_q^t (1-\alpha_p)^{b_j-s-1} (1-\alpha_q)^{m-t-1} \cdot \\ & \cdot [v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S)]. \end{aligned}$$

El coeficiente correspondiente a uno de estos términos es $\lambda_p \lambda_q$, $(1 \leq p,q \leq n)$. Los λ_j, que son los coeficientes de la combinación lineal $\sigma = \lambda_1 \sigma_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n \sigma_{\alpha_n}$, verifican $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. También la suma de los coeficientes $\lambda_p \lambda_q \, (1 \leq p,q \leq n)$ cumple esta misma condición:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \lambda_p \lambda_q = \sum_{p=1}^n \lambda_p \sum_{q=1}^n \lambda_q = 1.$$

Estos n^2 términos que aparecen, cuando está claro cuál es el juego v y cuál es la estructura de coalición B definida sobre N, pueden escribirse simplemente como $a_{pq}(i)$ y formar la matriz que denominamos $A(i)$:

$$A(i) = (\ a_{pq}(i)\ ), \quad 1 \leq p,q \leq n.$$

Teorema 2.29
Con las notaciones introducidas, el pago que el semivalor modificado para juegos

con estructura de coalición asigna a un jugador i puede calcularse matricialmente mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_i[v;B] = \Lambda^t\ A(i)\ \Lambda, \tag{2.5}$$

donde Λ es la matriz columna de los coeficientes de σ como combinación lineal de los semivalores binomiales para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, es decir, $\Lambda^t = (\ \lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_n\ )$.

Demostración
Sustituyendo en la expresión general obtenida para $\sigma_i[v;B]$ la definición dada para $a_{pq}(i)$, se obtiene:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \lambda_p \lambda_q a_{pq}(i,v,B),$$

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{q=1}^{n} \Big(\ \sum_{p=1}^{n} \lambda_p a_{pq}(i,v,B)\ \Big) \lambda_q = \Lambda^t\ A(i,v,B)\ \Lambda,$$

siendo ésta la expresión que simplificada se da en el enunciado. □

Observación 2.30
(a) La matriz $A(i)$ no depende del semivalor concreto σ cuya expresión modificada se pretende calcular; $A(i)$ depende de los n semivalores $\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \ldots, \sigma_{\alpha_n}$ que se escojan como sistema de referencia en el hiperplano de semivalores para un determinado cardinal del conjunto de jugadores, así como del juego v que se considere y de la estructura de coalición B que se forme.

Por otro lado, es la matriz Λ la que depende exclusivamente del semivalor con que se esté trabajando, de manera que fijada la matriz $A(i)$ pueden estudiarse las asignaciones modificadas por diferentes semivalores sin mas que sustituir en el producto las diferentes expresiones de Λ.

(b) Una vez fijado el sistema de referencia de semivalores binomiales $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1\le j\le n}$, los elementos de la diagonal principal de la matriz $A(i)$ son los pagos que por cada uno de los semivalores binomiales modificados para juegos con la estructura de coalición B le corresponderían al jugador i, es decir:

$$(\sigma_{\alpha_j})_i[v;B] = a_{jj}(i), \quad 1 \le j \le n,\ i \in N.$$

En efecto, tal y como se han definido los elementos $a_{pq}(i)$, $1 \leq p, q \leq n$, de la matriz $A(i)$, el semivalor binomial que actúa en el nivel de los integrantes de la coalición B_j es el correspondiente al valor α_p, mientras que el que actúa en el juego cociente modificado es el correspondiente al valor α_q. Para cualquier elemento de la diagonal principal de la matriz $A(i)$ actúa en los dos niveles el mismo semivalor binomial, de donde se sigue la igualdad de la fórmula anterior.

Así, los elementos de la diagonal principal de la matriz $A(i)$ tienen significado por ellos mismos, mientras que el resto de elementos se entienden como necesarios para obtener cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición.

Teorema 2.31
Sean $v \in G_N$ un juego cooperativo y $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ una estructura de coalición definida en N. Para un jugador $i \in B_j$, se puede obtener el término $a_{pq}(i)$, $1 \leq p, q \leq n$, de la matriz $A(i)$ por medio de las reglas siguientes:

(1) Se determina la EML $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ del juego v.

(2) Para cada $t \in M,\ t \neq j$, y cada $m \in B_t$ se sustituye la variable x_m por y_t. Así se obtiene una nueva función de las variables x_k, y_t para $k \in B_j,\ t \in M \setminus \{j\}$.

(3) En la función anterior se reducen a 1 todos los exponentes que aparezcan en y_t, es decir, se cambia y_t^r $(r > 1)$ por y_t, obteniendo de esta manera otra función multilineal,

$$g_j(x_k, y_t), \quad k \in B_j,\ t \in M \setminus \{j\}.$$

(4) Se deriva la función g_j respecto a la variable x_i.

(5) Se sustituye cada x_k por α_p y cada y_t por α_q.

De esta manera, escribiendo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_p &= (\alpha_p, \ldots, \alpha_p),\ \bar{\alpha}_p \in \mathbb{R}^{|B_j|},\ i \in B_j, \\ \bar{\alpha}_q &= (\alpha_q, \ldots, \alpha_q),\ \bar{\alpha}_q \in \mathbb{R}^{m-1}, \end{aligned}$$

podemos concluir que:

$$a_{pq}(i) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{\alpha}_p, \bar{\alpha}_q), \quad 1 \leq p, q \leq n. \tag{2.6}$$

Demostración
Supongamos que $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$; ésta adopta la forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{Q \subseteq N} \prod_{j \in Q} x_j \prod_{k \in N \setminus Q} (1 - x_k) v(Q).$$

Si $|B_t| = b$, al aplicar la regla (2) para cierto $t \in M \setminus \{j\}$, aparecen expresiones con la variable y_t que son de tres tipos diferentes: y_t^b, $(1 - y_t)^b$, $y_t^{b_1}(1 - y_t)^{b_2}$ con $b_1 + b_2 = b$, $0 < b_1, b_2 < b$.

Actuando según la regla (3), las primeras expresiones se transforman en y_t. Las segundas expresiones son:

$$(1 - y_t)^b = \sum_{h=0}^{b} \binom{b}{h} (-1)^h y_t^h = 1 + \sum_{h=1}^{b} \binom{b}{h} (-1)^h y_t^h,$$

de forma que al sustituir y_t^h por y_t para $1 \leq h \leq b$, queda:

$$1 + y_t \sum_{h=1}^{b} \binom{b}{h} (-1)^h = 1 + y_t \left[\sum_{h=0}^{b} \binom{b}{h} (-1)^h - 1 \right] = 1 - y_t.$$

Finalmente, las del tercer tipo, mixtas, se anulan, pues al hacer la transformación pasan a ser:

$$y_t^{b_1}(1 - y_t)^{b_2} = \sum_{h=0}^{b_2} \binom{b_2}{h} (-1)^h y_t^{b_1+h} \;\rightarrow\; y_t \sum_{h=0}^{b_2} \binom{b_2}{h} (-1)^h = 0.$$

Esto supone que tras aplicar las reglas (2) y (3), los únicos términos cuyo coeficiente no se anula son aquellos que contienen todos los elementos de B_t o ninguno de ellos. Así las coaliciones Q con coeficiente no nulo adoptan la forma:

$$Q = \bigcup_{t \in T} B_t \cup S, \qquad T \subseteq M \setminus \{j\},\ S \subseteq B_{j.}$$

El coeficiente para una de tales Q es:

$$\prod_{k \in S} x_k \prod_{k \in B_j \setminus S} (1 - x_k) \prod_{t \in T} y_t \prod_{t \notin T \cup \{j\}} (1 - y_t),$$

de manera que la función multilineal g_j queda:

$$g_j((x_k)_{k\in B_j},(y_t)_{t\neq j}) =$$

$$= \sum_{S\subseteq B_j}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\Big[\prod_{k\in S}x_k\prod_{k\in B_j\setminus S}(1-x_k)\prod_{t\in T}y_t\prod_{t\notin T\cup\{j\}}(1-y_t)\Big]v(\bigcup_{t\in T}B_t\cup S).$$

Derivando, según (4), respecto a la variable x_i:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_k,y_t) = \sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\Big[\prod_{k\in S}x_k\prod_{k\in(B_j\setminus\{i\})\setminus S}(1-x_k)\prod_{t\in T}y_t\prod_{t\notin T\cup\{j\}}(1-y_t)\Big]\cdot$$

$$\cdot[v(\bigcup_{t\in T}B_t\cup S\cup\{i\})-v(\bigcup_{t\in T}B_t\cup S)].$$

Sustituyendo cada x_k, $k\in B_j$, por α_p, y cada y_t, $t\neq j$, por α_q, se obtiene:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar\alpha_p,\bar\alpha_q) = \sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\alpha_p^s(1-\alpha_p)^{b_j-s-1}\alpha_q^t(1-\alpha_q)^{m-t-1}\cdot$$

$$\cdot[v(\bigcup_{t\in T}B_t\cup S\cup\{i\})-v(\bigcup_{t\in T}B_t\cup S)].$$

En consecuencia:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar\alpha_p,\bar\alpha_q)=a_{pq}(i),\quad 1\le p,q\le n.\ \square$$

Ejemplo 2.32
Consideramos el juego v definido sobre $N=\{1,2,3,4\}$ en la forma: $v(S)=4$ si $1\in S\neq N$, $v(S)=2^{s-1}$ si $1\notin S$ y $v(N)=8$.

La EML asociada a v es:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4+x_2x_3x_4+3x_1x_2x_3x_4.$$

Para este juego, los valores de Shapley y de Banzhaf son, respectivamente,

$$\phi[v]=(13/4,19/12,19/12,19/12)\,,\quad \psi[v]=(23/8,9/8,9/8,9/8).$$

Supongamos que se quiere estudiar cómo se modifican las asignaciones al primer jugador al formarse la estructura de coalición $B = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

En primer lugar, la modificación de la EML hasta obtener $g_1(x_1, x_2, y_2)$ siguiendo los pasos (2) y (3) del teorema 2.31 resulta:

$$g_1(x_1, x_2, y_2) = 4x_1 + x_2 + 2y_2 - x_1x_2 - 2x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1x_2y_2,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_2) = 4 - x_2 - 2y_2 + 3x_2y_2.$$

Cambiando ahora x_2 por α_p y y_2 por α_q obtenemos:

$$a_{pq}(1) = 4 - \alpha_p - 2\alpha_q + 3\alpha_p\alpha_q.$$

(a) Tomando como sistema de referencia en el hiperplano de semivalores los binomiales correspondientes a los valores $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1/3,\ \alpha_3 = 2/3,\ \alpha_4 = 1$, se obtiene la matriz:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 10/3 & 8/3 & 2 \\ 11/3 & 10/3 & 3 & 8/3 \\ 10/3 & 10/3 & 10/3 & 10/3 \\ 3 & 10/3 & 11/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular para el primer jugador el valor de Banzhaf ψ modificado por B; denotamos por $Bh_4 = (1/8, 1/8, 1/8, 1/8)$ el punto del hiperplano de semivalores correspondiente al valor de Banzhaf, de manera que en función de estos semivalores binomiales resulta ser:

$$\psi = \frac{-1}{16}\sigma_0 + \frac{9}{16}\sigma_{1/3} + \frac{9}{16}\sigma_{2/3} + \frac{-1}{16}\sigma_1.$$

De aquí,

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 \end{pmatrix},$$

obteniendo el resultado:

$$\psi_1[v; B] = \Lambda^t\ A(1)\ \Lambda = \frac{13}{4}.$$

(b) Considerando los mismos semivalores binomiales, vamos ahora a calcular para el primer jugador el valor de Shapley ϕ modificado por B. En este caso, denotando el punto correspondiente al valor de Shapley como $Sh_4 = (1/4, 1/12, 1/12, 1/4)$, resulta ser:

$$\phi = \frac{1}{8}\sigma_0 + \frac{3}{8}\sigma_{1/3} + \frac{3}{8}\sigma_{2/3} + \frac{1}{8}\sigma_1.$$

De aquí,

$$\tilde{\Lambda}^t = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix},$$

obteniendo el resultado:

$$\phi_1[v; B] = \tilde{\Lambda}^t \; A(1) \; \tilde{\Lambda} = \frac{13}{4}.$$

Este resultado era previsible, ya que cuando se calculan semivalores modificados se trabaja en dos niveles: por una parte, a nivel de las clases de la estructura de coalición y, por otra parte, dentro de la propia coalición a la que pertenece el jugador cuyo semivalor modificado se pretende calcular. En este caso ambos niveles se corresponden a juegos bipersonales donde los semivalores inducidos por Shapley y por Banzhaf tienen los mismos coeficientes, $(1/2, 1/2)$.

(c) Consideramos ahora con el mismo juego inicial v la estructura de coalición $B' = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$.

A partir de la EML del juego inicial pasamos a calcular la función $g_2(x_2, x_3, x_4, y_1)$, que no es otra que la misma f en la que se ha cambiado x_1 por y_1. Como pretendemos evaluar la modificación correspondiente al segundo jugador derivamos respecto a x_2:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_2, x_3, x_4, y_1) = 1 - y_1 + x_3 x_4 + 3x_3 x_4 y_1.$$

Cambiando x_3, x_4 por α_p y y_1 por α_q obtenemos:

$$a_{pq}(2) = 1 - \alpha_q + \alpha_p^2 + 3\alpha_p^2 \alpha_q.$$

Volvemos a tomar los mismos semivalores binomiales para formar la matriz $A(2)$:

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 10/9 & 8/9 & 2/3 & 4/9 \\ 13/9 & 14/9 & 5/3 & 16/9 \\ 2 & 8/3 & 10/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como antes, el valor de Banzhaf como semivalor para juegos con cuatro jugadores se expresa como combinación lineal de estos semivalores binomiales dando lugar a la matriz Λ:

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 \end{pmatrix}.$$

De aquí:

$$\psi_2[v; B'] = \Lambda^t \ A(2) \ \Lambda = \frac{9}{8}.$$

El valor de Shapley puede expresarse de la misma manera, dando lugar a la matriz $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda}^t = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Resulta entonces:

$$\phi_2[v; B'] = \tilde{\Lambda}^t \ A(2) \ \tilde{\Lambda} = \frac{4}{3}.$$

(d) Para el mismo juego inicial v y considerando la estructura de coalición B', volvemos a calcular semivalores modificados para el segundo jugador. En este caso escogemos como semivalores binomiales de referencia los que corresponden a los valores $\alpha_1 = 1/8$, $\alpha_2 = 3/8$, $\alpha_3 = 5/8$, $\alpha_4 = 7/8$. Sustituyendo estos valores en la expresión de $a_{pq}(2)$ obtenemos los diferentes elementos de la matriz $A(2)$:

$$a_{pq}(2) = 1 - \alpha_q + \alpha_p^2 + 3\alpha_p^2\alpha_q,$$

$$A(2) = \frac{1}{512} \begin{pmatrix} 459 & 337 & 215 & 930 \\ 547 & 473 & 399 & 325 \\ 723 & 745 & 767 & 789 \\ 987 & 1153 & 1319 & 1485 \end{pmatrix}.$$

Para calcular ahora el valor de Banzhaf ψ modificado por B' para el segundo jugador, necesitamos tener este semivalor como combinación lineal de los semivalores binomiales escogidos:

$$\psi = \frac{-1}{16}\sigma_{1/8} + \frac{9}{16}\sigma_{3/8} + \frac{9}{16}\sigma_{5/8} + \frac{-1}{16}\sigma_{7/8}.$$

De aquí,

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 \end{pmatrix},$$

obteniendo el resultado:

$$\psi_2[v; B'] = \Lambda^t \; A(2) \; \Lambda = \frac{9}{8}.$$

Lo mismo para el valor de Shapley,

$$\phi = \frac{13}{48}\sigma_{1/8} + \frac{11}{48}\sigma_{3/8} + \frac{11}{48}\sigma_{5/8} + \frac{13}{48}\sigma_{7/8},$$

$$\tilde{\Lambda}^t = \begin{pmatrix} 13/48 & 11/48 & 11/48 & 13/48 \end{pmatrix},$$

obteniendo el resultado:

$$\phi_2[v; B'] = \tilde{\Lambda}^t \; A(2) \; \tilde{\Lambda} = \frac{4}{3}.$$

En los apartados (c) y (d) se resuelve el mismo problema, tomando como semivalores binomiales auxiliares diferentes sistemas de referencia, con la idea de mostrar que el resultado es independiente de su elección.

2.5 Una caracterización axiomática

Definición 2.33
Para $v \in G_N,\ |N| \geq 2$, y cualesquiera $i, j \in N,\ i \neq j$, se define el juego $v_{i \lhd j} \in G_N$, denominado *juego de delegación*, en la forma siguiente:

$$v_{i \lhd j}(S) = \begin{cases} v(S \cup \{j\}) & \text{si } \ i \in S, \\ v(S \setminus \{j\}) & \text{si } \ i \notin S. \end{cases}$$

En términos de utilidad, el juego $v_{i \lhd j}$ atribuye a las coaliciones en las que figura el jugador i la utilidad que se obtendría si también figurase el jugador j, mientras que las restantes coaliciones pierden la contribución marginal correspondiente al jugador j. Así, la presencia o la ausencia del jugador i en una coalición equivale a la de los jugadores i, j simultáneamente; el jugador j ha delegado en el jugador i su actuación en el escenario del juego.

El juego cooperativo $v \in G_N$ transformado por la delegación del jugador j en el jugador i es $v_{i \lhd j} \in G_N$.

Lema 2.34
(a) Para $v \in G_N,\ |N| \geq 2$, y cualesquiera $i, j \in N,\ i \neq j$, el jugador $j \in N$ es nulo en el juego $v_{i \lhd j} \in G_N$.

(b) Para cualquier juego de unanimidad $u_S \in G_N,\ S \subseteq N,\ |N| \geq 2$, se verifica:

$$\begin{array}{lll} i, j \in S & \Rightarrow & (u_S)_{i \lhd j} = u_{S \setminus \{j\}}; \\ i \notin S,\ j \in S & \Rightarrow & (u_S)_{i \lhd j} = u_{(S \setminus \{j\}) \cup \{i\}}; \\ j \notin S & \Rightarrow & (u_S)_{i \lhd j} = u_S. \end{array}$$

Demostración
(a) Si consideramos cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{j\}$ puede suceder:

$$i \in S \ \Rightarrow\ v_{i \lhd j}(S \cup \{j\}) - v_{i \lhd j}(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S \cup \{j\}) = 0,$$

$$i \notin S \ \Rightarrow\ v_{i \lhd j}(S \cup \{j\}) - v_{i \lhd j}(S) = v(S) - v(S) = 0;$$

en ambos casos, $v_{i \lhd j}(S \cup \{j\}) - v_{i \lhd j}(S) = 0$, para $S \subseteq N \setminus \{j\}$, de donde j es nulo en $v_{i \lhd j}$.

(b) Suponemos $i, j \in S$ y consideramos cualquier coalición $T \supseteq S \setminus \{j\}$; como $i \in S$ también $i \in T$, de donde,

$$(u_S)_{i \lhd j}(T) = u_S(T \cup \{j\}) = 1, \quad \text{ya que } T \cup \{j\} \supseteq S.$$

Para cualquier coalición $T \not\supseteq S \setminus \{j\}$ se cumple $T \cup \{j\} \not\supseteq S$, $T \setminus \{j\} \not\supseteq S$. En esta situación puede suceder:

$$i \in T \ \Rightarrow\ (u_S)_{i \lhd j}(T) = u_S(T \cup \{j\}) = 0,$$

$$i \notin T \ \Rightarrow\ (u_S)_{i \lhd j}(T) = u_S(T \setminus \{j\}) = 0.$$

El juego $(u_S)_{i\lhd j}$ cumple $(u_S)_{i\lhd j}(T) = 1$, si $T \supseteq S \setminus \{j\}$, mientras que $(u_S)_{i\lhd j}(T) = 0$, en caso contrario; en consecuencia, $(u_S)_{i\lhd j} = u_{S\setminus\{j\}}$. Los demás casos pueden probarse en forma similar. $\square$

Observación 2.35
Consideramos en el conjunto de jugadores N, $|N| \geq 2$, la estructura de coalición en la que se forma un único bloque coalicional de dos jugadores $\{i, j\}$, $i, j \in N$, y el resto aislados. Si denotamos por $v_{\overline{ij}}$ el juego cociente, podemos establecer entre $v_{i\lhd j}$ y $v_{\overline{ij}}$ la relación que se expresa a continuación.

Para $S' \subseteq N \setminus \{i, j\}$:

$$v_{i\lhd j}(S' \cup \{i\}) = v(S' \cup \{i, j\}) = v_{\overline{ij}}(S' \cup \{\overline{ij}\}),$$

$$v_{i\lhd j}(S') = v(S') = v_{\overline{ij}}(S'),$$

donde $\overline{ij}$ indica la clase de los jugadores i, j en el juego cociente.

De esta forma, la utilidad que pueda obtener el bloque $\{i, j\}$ al coaligarse con cualesquiera otros jugadores, $v(S' \cup \{i, j\})$, $S' \subseteq N \setminus \{i, j\}$, se asigna a la coalición $S' \cup \{i\}$ en el juego $v_{i\lhd j}$.

El juego cociente $v_{\overline{ij}} \in G_M$, $|M| = |N| - 1$. De esta manera, las $2^{n-1} - 1$ condiciones anteriores determinan completamente el juego $v_{i\lhd j} \in G_N$, junto a las 2^{n-1} condiciones siguientes que recogen la condición de jugador nulo de j en el juego $v_{i\lhd j}$:

$$v_{i\lhd j}(S'' \cup \{j\}) = v_{i\lhd j}(S'') \quad \text{para } S'' \subseteq N \setminus \{j\}.$$

Ejemplo 2.36
Se considera el juego $v \in G_N$, $N = \{1, 2, 3\}$, definido en la forma:

$$v(\{1\}) = 1, \quad v(\{2\}) = 2, \quad v(\{3\}) = 1,$$
$$v(\{1,2\}) = 4, \quad v(\{1,3\}) = 3, \quad v(\{2,3\}) = 3, \quad v(\{1,2,3\}) = 7.$$

Escrito como vector de $\mathbb{R}^7$, donde las componentes indican las utilidades que obtienen las diferentes coaliciones ordenadas por cardinales crecientes y, dentro de un mismo cardinal, lexicográficamente, el juego v es:

$$v = (1, 2, 1, 4, 3, 3, 7).$$

Suponiendo que se establece la estructura de coalición $\{\{1,2\},\{3\}\}$, el juego cociente es:

$$v_{\overline{12}}(\{\overline{12}\}) = 4, \;\; v_{\overline{12}}(\{3\}) = 1, \;\; v_{\overline{12}}(\{\overline{12},3\}) = 7.$$

A partir de estos valores, para el juego $v_{1\lhd 2}$, se cumple:

$$v_{1\lhd 2}(\{1\}) = \mathbf{4}, \;\; v_{1\lhd 2}(\{3\}) = \mathbf{1}, \;\; v_{1\lhd 2}(\{1,3\}) = \mathbf{7}.$$

El resto de utilidades se obtiene imponiendo que el jugador 2 es nulo en el juego $v_{1\lhd 2}$.

$$v_{1\lhd 2}(\{2\}) = v_{1\lhd 2}(\emptyset) = 0, \qquad v_{1\lhd 2}(\{1,2\}) = v_{1\lhd 2}(\{1\}) = 4,$$
$$v_{1\lhd 2}(\{2,3\}) = v_{1\lhd 2}(\{3\}) = 1, \qquad v_{1\lhd 2}(\{1,2,3\}) = v_{1\lhd 2}(\{1,3\}) = 7,$$

resultando:

$$v_{1\lhd 2} = (\,\mathbf{4}\,,\,0\,,\,\mathbf{1}\,,\,4\,,\,\mathbf{7}\,,\,1\,,\,7\,).$$

Ejemplo 2.37

Consideramos el juego simple v asociado al J.M.P. definido por

$$v \equiv [\,51\,;\,45,\,30,\,15,\,10\,].$$

Este juego, que describe un consejo de administración donde sus cuatro componentes poseen en tantos por ciento el número de acciones correspondiente a su peso, escrito como vector es

$$v = (\;0,\;0,\;0,\;0,\;1,\;1,\;\mathbf{1},\;\mathbf{0},\;0,\;0,\;1,\;1,\;1,\;1,\;1\;).$$

Para este caso, el juego $v_{2\lhd 4}$ es

$$v_{2\lhd 4} = (\;0,\;0,\;0,\;0,\;1,\;1,\;\mathbf{0},\;\mathbf{1},\;0,\;0,\;1,\;1,\;1,\;1,\;1\;),$$

donde las únicas diferencias con el juego v son:

$$v_{2\lhd 4}(\{1,4\}) = v(\{1\}) = 0 \neq 1 = v(\{1,4\}),$$

$$v_{2\lhd 4}(\{2,3\}) = v(\{2,3,4\}) = 1 \neq 0 = v(\{2,3\}).$$

El juego $v_{2\lhd 4}$ resulta ser exactamente el juego simple $\overline{v}$ asociado al J.M.P.

$$\overline{v} \equiv [\,51\,;\,45,\,40,\,15,\,0\,],$$

ya que

$$\overline{v} = (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ).$$

En el juego $\overline{v}$ el peso correspondiente al jugador 2, $\overline{p}_2 = 40$, es la suma de los pesos de los jugadores 2 y 4 en el juego inicial v, $p_2 = 30$, $p_4 = 10$, mientras que el peso del jugador 4 en $\overline{v}$ es $\overline{p}_4 = 0$, tratándose, por tanto, de un jugador nulo.

Según la solución de Banzhaf, las asignaciones a los juegos v y $v_{2\lhd 4}$ son

$$\psi[v] = (3/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4), \quad \psi[v_{2\lhd 4}] = (1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 0),$$

cumpliendo

$$\psi_2[v_{2\lhd 4}] = \psi_2[v] + \psi_4[v].$$

Queda reflejado en este ejemplo como el juego $v_{i\lhd j}$ supone la delegación del jugador j en el jugador i de los instrumentos esenciales de poder en un juego de mayoría ponderada, que en este caso adoptan la forma de acciones de una sociedad.

Observación 2.38
Si G_N denota el espacio de juegos cooperativos de n jugadores y $\mathcal{B}_N$ representa el conjunto de estructuras de coalición que pueden formarse en el conjunto de jugadores N, para las reglas de asignación

$$\begin{array}{rccc} X: & G_N \times \mathcal{B}_N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (v, B) & \rightarrow & X[v; B] \end{array}$$

se consideran las siguientes propiedades:

B1 *Aditividad.* $X[u+v;B] = X[u;B] + X[v;B]$, $\forall u, v \in G_N$, $\forall B \in \mathcal{B}_N$.

B2 *Títeres.* Si $i \in N$ es títere en el juego $v \in G_N$, entonces $X_i[v;B] = v(\{i\})$.

B3 *Simetría dentro de los bloques.* Si $v(S \cup \{i_1\}) = v(S \cup \{i_2\})$, $\forall S \subseteq N \setminus \{i_1, i_2\}$, con $i_1, i_2 \in B_j$, $(B_j \in B)$, entonces $X_{i_1}[v;B] = X_{i_2}[v;B]$.

B4 Si $i_1, i_2 \in B_j$ y $k \notin B_j$, entonces $X_k[v_{i_1 \lhd i_2}; B] = X_k[v;B]$.

B5 Si $i_1, i_2 \in B_j$, entonces $X_{i_1}[v_{i_1 \lhd i_2}; B] = X_{i_1}[v;B] + X_{i_2}[v;B]$.

B6 Si $B \in \mathcal{B}_N$ es cualquier estructura de coalición en la que figura en cada bloque coalicional, como máximo, un jugador no nulo según el juego $v \in G_N$ y $\{N\}$ es la estructura con un único bloque, entonces $X[v; B] = X[v; \{N\}]$.

Las propiedades B1, B2 y B3 se encuentran ampliamente referenciadas en la teoría dedicada a soluciones para juegos cooperativos. Las propiedades B4 y B5 se refieren específicamente al juego de delegación. La propiedad B4 establece que la existencia de delegación entre dos jugadores de una misma coalición no ha de afectar al pago que puedan recibir los jugadores de las restantes coaliciones, mientras que B5 afirma que el jugador que recibe la delegación también recibe el pago que le correspondería al jugador que ha delegado.

La propiedad B5 está relacionada con uno de los axiomas propuestos por Lehrer (1988) para caracterizar el valor de Banzhaf. En aquel axioma se considera el juego cociente con una estructura de coalición formada por una clase con dos jugadores $\overline{ij} = \{i, j\}$ y el resto aislados. En la observación 2.35 hemos visto la estrecha relación entre el juego de delegación $v_{i \lhd j}$ y el juego cociente por esa estructura de coalición $v_{\overline{ij}}$ que se resume en $v_{i \lhd j}(S \cup \{i\}) = v_{\overline{ij}}(S \cup \{\overline{ij}\})$, $v_{i \lhd j}(S) = v_{\overline{ij}}(S)$, para $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.

Si el axioma de Lehrer exige al valor de Banzhaf ψ cumplir $\psi_i[v] + \psi_j[v] \leq \psi_{\overline{ij}}[v_{\overline{ij}}]$, en nuestro caso, la condición se transforma en igualdad, demandando para al valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición que satisfaga $\psi_i[v; B] + \psi_j[v; B] = \psi_i[v_{i \lhd j}; B]$, cuando i, j pertenecen a un mismo bloque coalicional de la estructura B.

En el capítulo siguiente dedicado a coaliciones bipersonales probaremos que, de entre todos los semivalores, el valor de Banzhaf es el único que cumple la igualdad $\psi_i[v] + \psi_j[v] = \psi_{\overline{ij}}[v_{\overline{ij}}]$. Este resultado, de alguna manera, inspira la propiedad B5 para los juegos con estructura de coalición. Además, la introducción del juego de delegación en lugar del juego cociente tiene la ventaja de mantener el conjunto de jugadores del juego inicial.

A continuación demostraremos que cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición satisface las propiedades B1, B2, B3, B4 y B6. Sin embargo, el valor coalicional de Owen no satisface, en general, el axioma B5. Este hecho garantiza la independencia de B5 respecto a las demás propiedades.

La propiedad B6 indica que si en cada bloque coalicional existe, como máximo, un jugador no nulo, entonces esta estructura coalicional es equivalente, en términos de asignaciones, a la estructura trivial en la que se forma un único bloque coalicional con todos los jugadores.

También es posible comprobar la independencia de B6 respecto a las restantes propiedades. Para ello se consideraría una regla de asignación mixta, es decir, que emplea valores diferentes en el nivel del juego cociente y en el reparto en el interior de cada coalición. Si el número de coaliciones es mayor o igual a tres y cada bloque coalicional incluye, como máximo, un jugador no nulo, el empleo del valor de Shapley en el cociente y del valor de Banzhaf en el sí de las coaliciones consigue el efecto deseado.

Proposición 2.39
Todo semivalor σ modificado para juegos con estructura de coalición verifica las propiedades B1, B2, B3, B4 y B6.

Demostración
Las propiedades B1, B2 y B3 son exactamente las demostradas en los apartados (c), (f) y (b) de la proposición 2.27, respectivamente.

Para probar que se cumple la propiedad B4, suponemos que la estructura de coalición es $B = \{B_1, ..., B_m\}$, $i_1, i_2 \in B_j$, $k \in B_p$ y $p \neq j$. En este caso la expresión para $\sigma_k[v; B]$ es, a partir de la fórmula (2.3):

$$\sigma_k[v;B] = \sum_{S \subseteq B_p \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{p\}} p_{s+1}^{b_p} p_{t+1}^{m} \left[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{k\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \right],$$

donde los coeficientes $p_{s+1}^{b_p}$, $1 \leq s+1 \leq b_p$, y p_{t+1}^{m}, $1 \leq t+1 \leq m$, son los que corresponden a los semivalores inducidos por σ en espacios de juegos con cardinales de los conjuntos de jugadores b_p y m, respectivamente.

Puede suceder ahora dos casos en relación al bloque B_j en el que se encuentran i_1, i_2. Si $j \in T$, $i_1, i_2 \in \bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{k\}$, $\bigcup_{t \in T} B_t \cup S$, mientras que si $j \notin T$ ni i_1 ni

i_2 pertenecen a esos conjuntos. En ambos casos:

$$v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{k\}) - v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) = v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{k\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S),$$

de donde se sigue que $\sigma_k[v_{i_1 \lhd i_2}; B] = \sigma_k[v; B]$, para $k \notin B_j$.

Para demostrar que cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición cumple la propiedad B6, supondremos, sin pérdida de generalidad, que los jugadores $1, 2, ..., h \in N$ son los únicos jugadores no nulos del juego $v \in G_N$, $h \leq n$.

Consideramos acto seguido uno de esos jugadores (por ejemplo el 1) y calculamos el pago que le corresponde por un semivalor cualquiera sobre G_N que tenga por coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$.

$$\sigma_1[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni 1}} p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} p_{s+1}[v(S \cup \{1\}) - v(S)].$$

Cada $S \subseteq N \setminus \{1\}$ puede escribirse como $S = S' \cup S''$ con $S' \subseteq H \setminus \{1\}$, $S'' \subseteq N \setminus H$, donde $H = \{1, 2, ..., h\}$. Cualquiera de estos subconjuntos S'' está formado exclusivamente por jugadores nulos, de manera que se cumple:

$$v(S \cup \{1\}) = v(S' \cup S'' \cup \{1\}) = v(S' \cup \{1\}),$$

pudiendo escribir

$$\sigma_1[v] = \sum_{S' \subseteq H \setminus \{1\}} \left(\sum_{s''=0}^{n-h} \binom{n-h}{s''} p_{s'+s''+1} \right) [v(S' \cup \{1\}) - v(S')].$$

Recordando la expresión (2.2) para los coeficientes de los semivalores inducidos en espacios de juegos con menos jugadores podemos concluir que

$$\sigma_1[v] = \sum_{S' \subseteq H \setminus \{1\}} p^h_{s'+1}[v(S' \cup \{1\}) - v(S')]. \tag{2.7}$$

Por otro lado, consideramos una estructura de coalición B que tenga, como máximo, un único jugador no nulo en cada bloque coalicional. Siguiendo el esquema precedente suponemos $1, 2, ..., h \in N$ únicos jugadores no nulos, $1 \in B_1$, $2 \in$

$B_2, \ldots, h \in B_h$, siendo $B = \{B_1, B_2, ..., B_h, B_{h+1}, ..., B_m\}$, $1 \leq h \leq m \leq n$. Para el jugador 1, el pago que le asigna el semivalor modificado es:

$$\sigma_1[v; B] = \sum_{T \subseteq M \setminus \{1\}} \sum_{S \subseteq B_1 \setminus \{1\}} p^m_{t+1} p^{b_1}_{s+1} \left[\; v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \; \right].$$

Para cualquier $S \subseteq B_1 \setminus \{1\}$ todos sus elementos son jugadores nulos y se cumple:

$$v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) = v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t),$$

apareciendo esta diferencia tantas veces como subconjuntos S están incluidos en $B_1 \setminus \{1\}$. En consecuencia,

$$\sigma_1[v; B] = \sum_{T \subseteq M \setminus \{1\}} p^m_{t+1} \left(\sum_{s=0}^{b_1 - 1} \binom{b_1 - 1}{s} p^{b_1}_{s+1} \right) \left[\; v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) \; \right].$$

Como que $p^{b_1}_{s+1}$, $1 \leq s + 1 \leq b_1$, son los coeficientes de un semivalor definido para juegos con b_1 jugadores se verifica $\sum_{s=0}^{b_1-1} \binom{b_1-1}{s} p^{b_1}_{s+1} = 1$ y la expresión anterior queda reducida a:

$$\sigma_1[v; B] = \sum_{T \subseteq M \setminus \{1\}} p^m_{t+1} \left[\; v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) \; \right].$$

Cada $T \subseteq M \setminus \{1\}$ puede escribirse como $T = T' \cup T''$ con $T' \subseteq H \setminus \{1\}$, $T'' \subseteq M \setminus H$, donde $H = \{1, 2, ..., h\}$. Al ser $2 \in B_2, \ldots, h \in B_h$ los únicos jugadores no nulos resulta

$$v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) = v(T' \cup \{1\}) - v(T'),$$

apareciendo estas diferencias tantas veces como subconjuntos T'' puedan encontrarse en $M \setminus H$, para cada $T' \subseteq H \setminus \{1\}$ que se considere. Entonces,

$$\sigma_1[v; B] = \sum_{T' \subseteq H \setminus \{1\}} \left(\sum_{t''=0}^{m-h} \binom{m-h}{t''} p^m_{t'+t''+1} \right) [v(T' \cup \{1\}) - v(T')].$$

A partir de la expresión de los coeficientes de los semivalores inducidos:

$$p^m_s = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p^n_{s+j}, \; 1 \leq s \leq m \leq n \; \Rightarrow \; \sum_{t''=0}^{m-h} \binom{m-h}{t''} p^m_{t'+t''+1} = p^h_{t'+1}, \; 1 \leq t'+1 \leq h,$$

quedando finalmente la expresión para $\sigma_1[v;B]$ reducida a:

$$\sigma_1[v;B] = \sum_{T' \subseteq H \setminus \{1\}} p^h_{t'+1}[v(T' \cup \{1\}) - v(T')]. \tag{2.8}$$

Las expresiones encontradas para $\sigma_1[v]$ en (2.7) y para $\sigma_1[v;B]$ en (2.8), respectivamente, son extensibles a cualquier jugador no nulo en $v \in G_N$. Para cualquiera de los otros jugadores, al tratarse de jugadores nulos, las asignaciones por un semivalor σ o por su modificación para juegos con estructura de coalición son nulas.

Teniendo en cuenta que por la consecuencia 2.26(b) la asignación por el semivalor modificado para juegos con un único bloque coalicional $\{N\}$ coincide con la asignación por el propio semivalor, podemos concluir

$$\sigma[v;B] = \sigma[v] = \sigma[v;\{N\}]. \ \square$$

Teorema 2.40
El valor de Banzhaf modificado es la única regla de asignación $X : G_N \times \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades B1, B2, B3, B4, B5 y B6.

Demostración
Según la proposición 2.27 el valor de Banzhaf modificado, como cualquier otro semivalor modificado, cumple las propiedades B1, B2 y B3; también, según la proposición anterior, todo semivalor modificado verifica las propiedades B4 y B6. Queda por probar que el valor de Banzhaf modificado satisface la propiedad B5.

La expresión obtenida en Owen (1981) para la asignación a un jugador por el valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición es:

$$\psi_i[v;B] = \frac{1}{2^{m+b_j-2}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i\}} \left[v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \right],$$

donde $i \in B_j$, B_j bloque coalicional de la estructura $B = \{B_1, ..., B_m\}$.

Para el caso particular del jugador i_1, con $i_1, i_2 \in B_j$, y el juego $v_{i_1 \lhd i_2} \in G_N$:

$$\psi_{i_1}[v_{i_1 \lhd i_2};B] =$$
$$= \frac{1}{2^{m+b_j-2}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\}} \left[v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \right].$$

Desarrollando el sumatorio correspondiente a las coaliciones $S \subseteq B_j \setminus \{i_1\}$, podemos escribir:

$$\sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \ni i_2}} \Big[\, v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \Big] +$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \not\ni i_2}} \Big[\, v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - v_{i_1 \lhd i_2}(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \Big] =$$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \ni i_2}} \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \setminus \{i_2\}) \, \Big] +$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \not\ni i_2}} \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1, i_2\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \Big] .$$

Estos dos sumatorios pueden agruparse en uno único con $S' \subseteq B_j \setminus \{i_1, i_2\}$ dando lugar a la expresión

$$2 \sum_{S' \subseteq B_j \setminus \{i_1, i_2\}} \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S' \cup \{i_1, i_2\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S') \, \Big] . \tag{2.9}$$

Por otro lado, al considerar $i_1, i_2 \in B_j$, se puede escribir para el juego $v \in G_N$:

$$\psi_{i_1}[v; B] + \psi_{i_2}[v; B] = \frac{1}{2^{m+b_j-2}} \sum_{T \subseteq M \setminus \{j\}} \Big\{ \sum_{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\}} \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) -$$

$$- v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \Big] + \sum_{S' \subseteq B_j \setminus \{i_2\}} \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S' \cup \{i_2\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S') \, \Big] \Big\} .$$

Desarrollando los sumatorios interiores para $S \subseteq B_j \setminus \{i_1\}$ y para $S' \subseteq B_j \setminus \{i_2\}$, y agrupándolos posteriormente en un único sumatorio para $\overline{S} \subseteq B_j \setminus \{i_1, i_2\}$, se obtiene:

$$\Big(\sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \ni i_2}} + \sum_{\substack{S \subseteq B_j \setminus \{i_1\} \\ S \not\ni i_2}} \Big) \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S) \, \Big] +$$

$$+ \Big(\sum_{\substack{S' \subseteq B_j \setminus \{i_2\} \\ S' \ni i_1}} + \sum_{\substack{S' \subseteq B_j \setminus \{i_2\} \\ S' \not\ni i_1}} \Big) \Big[\, v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S' \cup \{i_2\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup S') \, \Big] =$$

$$= \sum_{\overline{S}\subseteq B_j\setminus\{i_1,i_2\}} \Big[\, v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_1,i_2\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_2\}) +$$
$$+ v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_1\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S}) + v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_1,i_2\}) -$$
$$- v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_1\}) + v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_2\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S}) \,\Big] =$$

$$= 2 \sum_{\overline{S}\subseteq B_j\setminus\{i_1,i_2\}} \Big[\, v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S} \cup \{i_1,i_2\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup \overline{S}) \,\Big]. \tag{2.10}$$

La igualdad entre (2.9) y (2.10) hace que $\psi_{i_1}[v_{i_1 \triangleleft i_2}; B] = \psi_{i_1}[v; B] + \psi_{i_2}[v; B]$, para cualesquiera jugadores i_1, i_2 pertenecientes al mismo bloque coalicional B_j, lo que demuestra que el valor de Banzhaf modificado cumple la propiedad B5.

Recíprocamente, supongamos que $X : G_N \times \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}^N$ es una regla de asignación que verifica las propiedades B1 a B6. Queremos probar que estas seis propiedades determinan unívocamente los valores de la regla de asignación para cualesquiera $(v, B) \in G_N \times \mathcal{B}_N$. Sabemos que todo juego $v \in G_N$ puede expresarse en forma única como

$$v = \sum_{S\subseteq N} c_S u_S,$$

donde $\{u_S \in G_N \ / \ S \subseteq N\}$ es la base de G_N formada por los juegos de unanimidad. Por la propiedad B1 de aditividad, basta conocer la actuación de X para juegos del tipo cu_R, donde R es cualquier subconjunto de N y $c \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $B = \{B_1, ..., B_m\}$ es una estructura de coalición en N. El subconjunto R intersecará a cierto número de bloques coalicionales de B. Por comodidad suponemos que R interseca únicamente a los m_R primeros bloques coalicionales ($m_R \leq m$) y que se cumple:

$$|B_l| = b_l, \;\; |R \cap B_l| = c_l, \;\; 1 \leq l \leq m_R, \quad \sum_{l=1}^{m_R} c_l = r = |R|.$$

Todos los jugadores $i \notin R$ son nulos en el juego $u_R \in G_N$; por la propiedad B2, $X_i[cu_R; B] = 0$, para $i \notin R$. Consideramos ahora cualquiera de los jugadores no nulos $i \in R$. Escogemos el jugador $i_1 \in R \cap B_1$, a la vez que uno de los otros jugadores de R en cada otro de los bloques coalicionales con intersección, $k_l \in R \cap B_l$, $2 \leq l \leq m_R$.

Todos los elementos de $R \cap B_1 = \{i_1, i_2, ..., i_{c_1}\}$ son simétricos respecto al juego cu_R. Aplicando la propiedad B3 de simetría dentro de los bloques junto a la propiedad B5:

$$\begin{aligned} X_{i_1}[cu_R; B] &= \frac{1}{2}\, X_{i_1}[(cu_R)_{i_1 \lhd i_2}; B] = \frac{1}{2}\, X_{i_1}[cu_{R \setminus \{i_2\}}; B] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\, X_{i_1}[(cu_{R \setminus \{i_2\}})_{i_1 \lhd i_3}; B] = \frac{1}{2^2} X_{i_1}[cu_{R \setminus \{i_2, i_3\}}; B] \\ &= \cdot\ \cdot\ \cdot = \frac{1}{2^{c_1 - 1}} X_{i_1}[cu_{R \setminus \{i_2, i_3, ..., i_{c_1}\}}; B]. \end{aligned}$$

Mientras, para los jugadores fuera del bloque B_1, por la propiedad B4:

$$X_k[cu_R; B] = X_k[cu_{R \setminus \{i_2, i_3, ..., i_{c_1}\}}; B], \quad k \notin B_1.$$

Efectuando el mismo proceso para los bloques coalicionales $B_2, ..., B_{m_R}$, la asignación por X no se altera para los elementos de fuera de esos bloques, en particular, para los elementos de B_1. Así podemos escribir:

$$X_{i_1}[cu_R; B] = \frac{1}{2^{c_1 - 1}} X_{i_1}[cu_{\{i_1, k_2, ..., k_{m_R}\}}; B].$$

Para el juego $cu_{\{i_1, k_2, ..., k_{m_R}\}}$, B es una estructura de coalición que tiene, como máximo, un único elemento no nulo en cada bloque coalicional. Aplicando la propiedad B6:

$$X_{i_1}[cu_R; B] = \frac{1}{2^{c_1 - 1}} X_{i_1}[cu_{\{i_1, k_2, ..., k_{m_R}\}}; B] = \frac{1}{2^{c_1 - 1}} X_{i_1}[cu_{\{i_1, k_2, ..., k_{m_R}\}}; \{N\}].$$

En la estructura $\{N\}$ el único bloque coalicional tiene exactamente m_R jugadores no nulos. Volviendo a aplicar las propiedades B3 y B5:

$$\begin{aligned}
X_{i_1}[cu_{\{i_1,k_2,\ldots,k_{m_R}\}};\{N\}] &= \frac{1}{2}\,X_{i_1}[(cu_{\{i_1,k_2,\ldots,k_{m_R}\}})_{i_1\lhd k_2};\{N\}]\\
&= \frac{1}{2}\,X_{i_1}[cu_{\{i_1,k_3,\ldots,k_{m_R}\}};\{N\}]\\
&\quad \cdots\\
&= \frac{1}{2^{m_R-1}}\,X_{i_1}[cu_{\{i_1\}};\{N\}]\\
&= \frac{1}{2^{m_R-1}}\,c.
\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la propiedad B2, ya que el jugador $i_1 \in N$ es un títere en el juego $cu_{\{i_1\}} \in G_N$. Finalmente, para un jugador no nulo como $i_1 \in R \cap B_1$:

$$X_{i_1}[cu_R;B] = \frac{1}{2^{m_R-1}}\,\frac{1}{2^{c_1-1}}\,c = \frac{c}{2^{m_R+c_1-2}},$$

donde $c_1 = |R \cap B_1|$ y m_R es el número de bloques coalicionales de B que tienen intersección no vacía con R.

Las seis propiedades B1 a B6 determinan completamente la regla de asignación X para cada pareja $(v,B) \in G_N \times \mathcal{B}_N$. Como que el valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición verifica estas seis propiedades, necesariamente $X = \psi$, lo cual completa la demostración. □

Observación 2.41
Se puede comprobar cómo el valor de Banzhaf modificado asigna los mismos valores que la regla de asignación X a un juego $cu_R \in G_N$, $\emptyset \neq R \subseteq N$, y a cualquier estructura de coalición B definida en N.

Si el jugador $i \notin R$, i es nulo en cu_R, entonces $\psi_i[cu_R;B] = 0$.

Volvemos a considerar un jugador no nulo en cu_R, $i_1 \in R \cap B_1$, entonces

$$\psi_{i_1}[cu_R;B] = \frac{c}{2^{m+b_1-2}} \sum_{T\subseteq M\setminus\{1\}}\ \sum_{S\subseteq B_1\setminus\{i_1\}} \Big[\ u_R(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - u_R(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)\ \Big].$$

Cada uno de los subconjuntos que generan los sumatorios, T y S, puede expresarse como unión de otros dos en la forma:

$$T = T' \cup T'', \;\; T' \subseteq \{2, ..., m_R\}, \; T'' \subseteq M \setminus \{1, 2, ..., m_R\},$$

$$S = S' \cup S'', \;\; S' \subseteq (B_1 \setminus \{i_1\}) \cap R, \; S'' \subseteq B_1 \setminus R.$$

La diferencia $u_R(\underset{t \in T}{\cup} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - u_R(\underset{t \in T}{\cup} B_t \cup S)$ toma valor 1 exclusivamente cuando $S' = (B_1 \setminus \{i_1\}) \cap R$ y $T' = \{2, ..., m_R\}$, simultáneamente. En tal caso los subconjuntos $S'' \subseteq B_1 \setminus R$ y $T'' \subseteq M \setminus \{1, 2, ..., m_R\}$ pueden ser cualesquiera cumpliendo esas condiciones.
En el resto de casos $u_R(\underset{t \in T}{\cup} B_t \cup S \cup \{i_1\}) - u_R(\underset{t \in T}{\cup} B_t \cup S) = 0$.

Así, la fórmula para calcular $\psi_{i_1}[cu_R; B]$ se transforma en:

$$\psi_{i_1}[cu_R; B] = \frac{c}{2^{m+b_1-2}} \sum_{t''=0}^{m-m_R} \binom{m - m_R}{t''} \sum_{s''=0}^{b_1-c_1} \binom{b_1 - c_1}{s''},$$

$$\psi_{i_1}[cu_R; B] = \frac{c}{2^{m+b_1-2}} \, 2^{m-m_R} \, 2^{b_1-c_1} = \frac{c}{2^{m_R+c_1-2}},$$

siendo $i_1 \in R \cap B_1, \; c_1 = |R \cap B_1|$ y m_R el número de bloques coalicionales de la estructura B que tienen intersección no vacía con R.

3

Coaliciones bipersonales

3.1 Semivalores y juego cociente

Supongamos que $v \in G_N$ es un juego cooperativo definido sobre un conjunto N de n jugadores y que $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ es un semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$.

Consideramos la situación en la que se forma una estructura de coalición determinada por la agrupación de dos jugadores en una clase y el resto aislados. Suponemos que los dos jugadores que se coaligan son los dos primeros de forma que la estructura de coalición queda:

$$B_{\overline{12}} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}.$$

Nos proponemos estudiar la relación entre los pagos que por el semivalor σ reciben los jugadores 1 y 2 en el juego inicial v, con respecto al pago que en el juego cociente recibe la clase $\{1, 2\}$. El conjunto cociente está formado por $n - 1$ jugadores, con la siguiente notación:

$$N/B_{\overline{12}} = \{\overline{12}, 3, \ldots, n\}.$$

El juego entre clases lo denotamos por $v_{\overline{12}}$; $v_{\overline{12}} \in G_M$, $|M| = n - 1$.

Proposición 3.1
Si $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ es un semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, la diferencia de asignaciones por este semivalor a una coalición única de dos jugadores con respecto a la suma de sus asignaciones individuales por σ obedece a la siguiente expresión:

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = \\ = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})]. \tag{3.1}$$

Demostración
La asignación correspondiente al primer jugador por σ en el juego inicial v puede escribirse como:

$$\sigma_1[v] = \sum_{S \ni 1} p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})],$$

$$\sigma_1[v] = \sum_{S \ni 1,2} p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})] + \sum_{S \ni 1, S \not\ni 2} p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})].$$

Si en el segundo sumatorio hacemos $S' = S \cup \{2\}$, con $2 \notin S$, entonces $s' = s + 1$ y podemos escribir:

$$\sigma_1[v] = \sum_{S \ni 1,2} p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})] + \sum_{S' \ni 1,2} p_{s'-1}[v(S' \setminus \{2\}) - v(S' \setminus \{1,2\})];$$

agrupando los dos sumatorios en uno:

$$\sigma_1[v] = \sum_{S \ni 1,2} \{p_s[v(S) - v(S \setminus \{1\})] + p_{s-1}[v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{1,2\})]\} . \tag{3.2}$$

Análogamente para el segundo jugador:

$$\sigma_2[v] = \sum_{S \ni 1,2} \{p_s[v(S) - v(S \setminus \{2\})] + p_{s-1}[v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{1,2\})]\} .$$

Ahora hacemos el cálculo de la asignación para el primer jugador del juego cociente, que es $\overline{12}$. Los coeficientes correspondientes al semivalor inducido por σ para juegos con $n-1$ jugadores son $p_s^{n-1} = p_s + p_{s+1},\ 1 \leq s \leq n-1$. Las coaliciones que se han de tener en cuenta se designan por $\overline{S},\ \overline{S} \subseteq N/B_{\overline{12}}$. Con estas notaciones:

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] = \sum_{\overline{S} \ni \overline{12}} (p_{\overline{s}} + p_{\overline{s}+1})[v_{\overline{12}}(\overline{S}) - v_{\overline{12}}(\overline{S} \setminus \{\overline{12}\})], \quad |\overline{S}| = \overline{s}.$$

Entre el juego cociente $v_{\overline{12}}$ y el juego inicial v en N podemos establecer las relaciones siguientes:

(a) Si $\overline{12} \in \overline{S}$, entonces: $v_{\overline{12}}(\overline{S}) = v((\overline{S} \setminus \{\overline{12}\}) \cup \{1,2\})) = v(T \cup \{1,2\})$, donde hemos identificado la coalición $\overline{S} \setminus \{\overline{12}\} \subseteq N/B_{\overline{12}}$ con la coalición $T \subseteq N \setminus \{1,2\}$, en cuyo caso $t = \overline{s} - 1$.

(b) Si $\overline{12} \notin \overline{S}$, entonces: $v_{\overline{12}}(\overline{S}) = v(T)$, identificando la coalición $\overline{S} \subseteq N/B_{\overline{12}}$ con la coalición $T \subseteq N \setminus \{1,2\}$, en cuyo caso $t = \overline{s}$.

Así, la fórmula para $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}]$ puede escribirse como:

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] = \sum_{T \not\ni 1,2} (p_{t+1} + p_{t+2})[v(T \cup \{1,2\}) - v(T)], \quad |T| = t.$$

Llamando $S = T \cup \{1,2\}$, con $1,2 \notin T$, entonces $s = t+2$, y queda:

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} + p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1,2\})], \quad |S| = s.$$

Basta ahora reunir en una sola expresión los valores de $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}],\ \sigma_1[v],\ \sigma_2[v]$ para obtener el resultado que se enuncia en la proposición.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = & \sum_{S \ni 1,2} (p_s + p_{s-1})[v(S) - v(S \setminus \{1,2\})] - \\
& - \sum_{S \ni 1,2} p_s[2v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\})] - \\
& - \sum_{S \ni 1,2} p_{s-1}[v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1\}) - 2v(S \setminus \{1,2\})],
\end{aligned}$$

$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v])=$

$$= \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})]. \; \square$$

Observación 3.2
Un sistema de axiomas impuesto por Lehrer (1988) que caracteriza el valor de Banzhaf para los juegos cooperativos es el siguiente:

1. Si $i \in N$ es un títere en $v \in G_N$, entonces $\psi_i[v] = v(\{i\})$.

2. Si $i, j \in N$ son indiferentes por $v \in G_N$, $\psi_i[v] = \psi_j[v]$.

3. Para cada par $\{i, j\} \subseteq N$ y cada $v \in G_N$, $\psi_i[v] + \psi_j[v] \leq \psi_{\overline{ij}}[v_{\overline{ij}}]$.

4. Para cada $u, v \in G_N$, $\psi[u + v] = \psi[v] + \psi[v]$.

En el tercer axioma se hace referencia al juego cociente $v_{\overline{ij}}$, que siguiendo la notación que empleamos representa el juego cociente en el que se han agrupado formando coalición los jugadores $i, j \in N$, mientras que el resto forma coaliciones individuales. Así $\psi_{\overline{ij}}[v_{\overline{ij}}]$ representa el pago que recibe en el cociente la clase formada por los jugadores i, j, que simbolizamos por $\overline{ij}$.

En Magaña (1996) se prueba que, de hecho, el valor de Banzhaf satisface la igualdad, es decir, la suma de lo que obtienen dos jugadores en el juego inicial por el valor de Banzhaf es igual a lo que obtiene su coalición en el juego cociente $v_{\overline{ij}}$. Estamos ahora en condiciones de enunciar un recíproco, asegurando que el único semivalor que verifica esta igualdad es precisamente el de Banzhaf. Sin pérdida de generalidad, continuamos considerando los dos primeros jugadores, en lugar de dos cualesquiera.

Teorema 3.3
Sean $v \in G_N$, $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor cualquiera y $B_{\overline{12}} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$. Si designamos por $v_{\overline{12}}$ el juego cociente de v por $B_{\overline{12}}$, entonces:

$$\sigma_1[v] + \sigma_2[v] = \sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}], \; \forall v \in G_N \text{ si y sólo si } \sigma \text{ es el valor de Banzhaf.}$$

Demostración
Si σ es el valor de Banzhaf sobre G_N, sus coeficientes son $p_s = 1/2^{n-1},\ 1 \le s \le n$. Como que los coeficientes que aparecen en los términos del sumatorio de la fórmula (3.1) son $p_{s-1} - p_s,\ 2 \le s \le n$, se sigue que $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = 0$, $\forall v \in G_N$.

Recíprocamente, supongamos que $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = 0$ para cualquier $v \in G_N$, entonces $p_{s-1} - p_s = 0$, para $s = 2, \ldots, n$, de donde $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$. Por la condición que han de cumplir los coeficientes de cualquier semivalor:

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1, \quad p_1 \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} = 1 \ \Rightarrow\ p_1 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces, $p_s = \dfrac{1}{2^{n-1}},\ 1 \le s \le n$, y σ es el valor de Banzhaf. $\square$

Consecuencia 3.4
(a) Si consideramos como semivalor el valor de Shapley, la expresión que relaciona los pagos a los dos jugadores individuales en v con el pago a su coalición en el cociente resulta:

$$\phi_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\phi_1[v] + \phi_2[v]) = \sum_{S \ni 1,2} (n - 2s + 2) \frac{(s-2)!(n-s)!}{n!} \cdot$$
$$\cdot [v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})].$$

(b) Para un semivalor bimomial $\sigma_\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, la correspondiente expresión de la diferencia de pagos adopta la forma:

$$(\sigma_\alpha)_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - \{(\sigma_\alpha)_1[v] + (\sigma_\alpha)_2[v]\} =$$
$$= \sum_{S \ni 1,2} (1 - 2\alpha)\alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})].$$

Los casos extremos $\alpha = 0,\ \alpha = 1$, resultan ser:

$$(\sigma_0)_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - \{(\sigma_0)_1[v] + (\sigma_0)_2[v]\} = v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}),$$

$$(\sigma_1)_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - \{(\sigma_1)_1[v] + (\sigma_1)_2[v]\} =$$
$$= -[v(N) - v(N \setminus \{1\}) - v(N \setminus \{2\}) + v(N \setminus \{1,2\})].$$

Demostración
(a) Basta escribir los coeficientes correspondientes al valor de Shapley en el sumatorio de la expresión (3.1) y efectuar el cálculo:

$$p_{s-1} - p_s = \gamma(n, s-1) - \gamma(n, s) = \frac{(s-2)!(n-s+1)!}{n!} - \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

$$p_{s-1} - p_s = (n-2s+2)\frac{(s-2)!(n-s)!}{n!}.$$

(b) Lo mismo que en el apartado anterior, pero ahora para los coeficientes de un σ_α, $0 < \alpha < 1$:

$$p_{s-1} - p_s = \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s+1} - \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} = (1-2\alpha)\alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}.$$

Los casos extremos $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, se obtienen de manera análoga. $\square$

3.2 Efecto de la modificación de semivalores

En esta sección nos proponemos estudiar la relación entre el pago a los jugadores de cierto juego $v \in G_N$ por un semivalor y el pago que el semivalor modificado para juegos con estructura de coalición asigna a los diferentes jugadores de N cuando se considera la estructura $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$.

Proposición 3.5
Sean $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$, entonces la diferencia entre la asignación por el semivalor σ modificado para juegos con estructura de coalición $B_{\overline{12}}$ para un jugador de la coalición $\{1,2\}$ y la asignación por σ a ese mismo jugador responde a la siguiente expresión:

$$\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v] =$$

$$= \sum_{S \ni 1,2} [k_\sigma p_{s-1} - (1-k_\sigma)p_s][v(S) - v(S\setminus\{1\}) - v(S\setminus\{2\}) + v(S\setminus\{1,2\})], \tag{3.3}$$

donde $k_\sigma = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}$ y la fórmula es válida para $i = 1, 2$.

Demostración
Calculamos, en primer lugar, la asignación correspondiente al primer jugador por el semivalor modificado para juegos con estructura de coalición y que denotamos por $\sigma_1[v; B_{\overline{12}}]$. Seguimos en todo momento las notaciones que se emplearon en la construcción del semivalor modificado para juegos con estructura de coalición.

Método 1. En este caso: $1 \in B_1 = \{1, 2\},\ |B_{\overline{12}}| = n - 1$.

Subconjuntos de B_1 : $K = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

Semivalor en $G_N : \sigma$. Semivalor inducido en $G_M,\ 1 \leq |M| < n : \sigma^m$.

Por la definición de semivalor modificado:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = (\sigma^2)_1[w_1],$$

ya que el juego w_1 es el que se juega dentro de la clase B_1, que tiene dos jugadores. Los coeficientes correspondientes al semivalor σ^2 los denotamos por $p_1^2,\ p_2^2$. Así podemos escribir:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = p_2^2[w_1(\{1, 2\}) - w_1(\{2\})] + p_1^2[w_1(\{1\}) - w_1(\emptyset)].$$

Según habíamos probado para los coeficientes de los semivalores inducidos, éstos pueden expresarse a partir de los coeficientes del semivalor inicial por medio de las relaciones siguientes:

$$p_1^2 = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{1+j}, \quad p_2^2 = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}.$$

Teniendo en cuenta la definición del enunciado, precisamente es $p_2^2 = k_\sigma$. Al ser $p_1^2,\ p_2^2$ coeficientes de un semivalor definido sobre juegos bipersonales se cumple $p_1^2 + p_2^2 = 1$, por lo que podemos escribir: $p_1^2 = 1 - k_\sigma$. Con esta notación, la fórmula para $\sigma_1[v; B_{\overline{12}}]$ es,

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = k_\sigma[w_1(\{1, 2\}) - w_1(\{2\})] + (1 - k_\sigma)[w_1(\{1\}) - w_1(\emptyset)].$$

La expresión k_σ nos recuerda la dependencia de este valor de los coeficientes del semivalor inicial σ. Ahora sustituimos las expresiones de w_1 por su definición:

$$\begin{aligned}\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = \quad & k_\sigma \left[(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1,2\}}] - (\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{2\}}]\right] + \\ & + (1-k_\sigma)\left[(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1\}}] - (\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\emptyset}]\right].\end{aligned}$$

El juego $u_{B_1|K}$ es el juego cociente modificado. Al tener el cociente $n-1$ elementos, el semivalor correspondiente es σ^{n-1}, cuyos coeficientes en función de los de σ son: $p_s^{n-1} = p_s + p_{s+1},\ 1 \leq s \leq n-1$. El desarrollo para cada $(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|K}]$, según los posibles subconjuntos $K \subseteq B_1 = \{1,2\}$ y referido después a subconjuntos de N, es el siguiente:

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1,2\}}] = \sum_{\overline{S} \subseteq N/B_{\overline{12}},\ \overline{S} \ni \overline{12}} p_{\overline{s}}^{n-1}\left[u_{B_1|\{1,2\}}(\overline{S}) - u_{B_1|\{1,2\}}(\overline{S} \setminus \{\overline{12}\})\right],$$

siendo $p_{\overline{s}}^{n-1} = p_{\overline{s}} + p_{\overline{s}+1}$. Para $\overline{S} \ni \overline{12}$, podemos escribir:

$$u_{B_1|\{1,2\}}(\overline{S}) = v\left((\overline{S} \setminus \{\overline{12}\}) \cup \{1,2\}\right) = v(T \cup \{1,2\}),$$

$$u_{B_1|\{1,2\}}(\overline{S} \setminus \{\overline{12}\}) = v(T),$$

donde $T \subseteq N \setminus \{1,2\},\ t = \overline{s} - 1$. Entonces:

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1,2\}}] = \sum_{T \not\ni 1,2} (p_{t+1} + p_{t+2})[v(T \cup \{1,2\}) - v(T)],$$

y llamando $T \cup \{1,2\} = S,\ t+2 = s$, obtenemos la expresión buscada:

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1,2\}}] = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} + p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1,2\})].$$

Análogamente, las otras expresiones son:

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{2\}}] = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} + p_s)[v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{1,2\})],$$

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\{1\}}] = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} + p_s)[v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{1,2\})],$$

$$(\sigma^{n-1})_1[u_{B_1|\emptyset}] = \sum_{S\ni 1,2} (p_{s-1}+p_s)[v(S\setminus\{1,2\}) - v(S\setminus\{1,2\})] = 0.$$

Sustituyendo estos cuatro términos en la fórmula de $\sigma_1[v;B_{\overline{12}}]$ queda:

$$\sigma_1[v;B_{\overline{12}}] = k_\sigma \sum_{S\ni 1,2} (p_{s-1}+p_s)[v(S) - v(S\setminus\{1\})] +$$

$$+ (1-k_\sigma) \sum_{S\ni 1,2} (p_{s-1}+p_s)[v(S\setminus\{2\}) - v(S\setminus\{1,2\})].$$

$$\sigma_1[v;B_{\overline{12}}] =$$

$$= \sum_{S\ni 1,2} (p_{s-1}+p_s) \Big\{ \; k_\sigma[v(S) - v(S\setminus\{1\})] + (1-k_\sigma)[v(S\setminus\{2\}) - v(S\setminus\{1,2\})] \; \Big\}.$$

Método 2. Aplicamos la fórmula general para cualquier semivalor modificado que se obtiene a partir de la expresión (2.3) del capítulo anterior:

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}} \sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}} p^m_{t+1} p^{b_j}_{s+1} \Big[\; v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S) \; \Big]$$

para $i \in B_j$, B_j bloque coalicional de $\{B_1, ..., B_m\}$ partición de N.

En nuesto caso particular, $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\},\{3\},\ldots,\{n\}\}$, vamos a calcular el semivalor modificado para $1 \in B_1$. Entonces, $|B_1| = b_1 = 2$ y el número de bloques coalicionales $m = n-1$.

Posibles subconjuntos $S \subseteq B_1 \setminus \{1\}: \; S = \{2\}, \; s = 1; \; S = \emptyset, \; s = 0.$

Los coeficientes p^m_{t+1}, $1 \leq t+1 \leq m$, son los correspondientes al semivalor que actúa sobre el cociente modificado. En este caso, p^{n-1}_{t+1}, $1 \leq t+1 \leq n-1$.

Los coeficientes $p^{b_j}_{s+1}$, $1 \leq s+1 \leq b_j$, son los correspondientes al semivalor que actúa sobre un juego bipersonal en B_1; éstos son p^2_1, p^2_2 y adoptan, en función de k_σ, los valores,

$$p^2_1 = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{1+j} = 1 - k_\sigma, \quad p^2_2 = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j} = k_\sigma.$$

En consecuencia, la fórmula para $\sigma_1[v; B_{\overline{12}}]$ es,

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{T \subseteq M \setminus \{1\}} p_{t+1}^{n-1} \Big\{ p_2^2 \Big[v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1,2\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{2\}) \Big] +$$

$$+ p_1^2 \Big[v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{1\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) \Big] \Big\}.$$

Todas las uniones de coaliciones de la forma $\bigcup_{t \in T} B_t$, para $T \subseteq M \setminus \{1\}$, son, de hecho, subconjuntos de $N \setminus \{1,2\}$, por lo que podemos escribir:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{S' \subseteq N \setminus \{1,2\}} p_{s'+1}^{n-1} \Big\{ k_\sigma [v(S' \cup \{1,2\}) - v(S' \cup \{2\})] +$$

$$+ (1 - k_\sigma)[v(S' \cup \{1\}) - v(S')] \Big\}.$$

Si en esta fórmula consideramos $S = S' \cup \{1,2\}$ para $S' \subseteq N \setminus \{1,2\}$, $s = s' + 2$, de forma que cada coeficiente se transforma en p_{s-1}^{n-1}, $1 \le s - 1 \le n - 1$. Recordando la relación entre los coeficientes del semivalor inducido σ^{n-1} y los del semivalor σ, que es $p_{s-1}^{n-1} = p_{s-1} + p_s$, $2 \le s \le n$, llegamos a obtener:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] =$$

$$= \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} + p_s) \Big\{ k_\sigma [v(S) - v(S \setminus \{1\})] + (1 - k_\sigma)[v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{1,2\})] \Big\}.$$

Si la expresión de $\sigma_1[v; B_{\overline{12}}]$ la comparamos con la expresión de $\sigma_1[v]$ obtenida en la fórmula (3.2),

$$\sigma_1[v] = \sum_{S \ni 1,2} \Big\{ p_s [v(S) - v(S \setminus \{1\})] + p_{s-1}[v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{1,2\})] \Big\},$$

podemos concluir que la relación entre ambos pagos es:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_1[v] =$$

$$= \sum_{S \ni 1,2} [k_\sigma p_{s-1} - (1 - k_\sigma) p_s][v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})].$$

El mismo resultado se obtiene para el jugador 2. □

Consecuencia 3.6
En las mismas condiciones de la proposición anterior, para los jugadores $1, 2$ que forman la única coalición bipersonal:

$$\sigma_1[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_1[v] = \sigma_2[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_2[v].$$

Esto supone que el beneficio que se pretende por el hecho de crear esa coalición bipersonal, medido como el incremento de asignaciones, es el mismo para ambos jugadores, con independencia de su situación en el juego inicial, para cualquier semivalor σ sobre G_N.

Consecuencia 3.7
(a) Si consideramos como semivalor el valor de Shapley, la expresión que relaciona la asignación por el semivalor modificado con respecto a la asignación por el propio semivalor adopta, para $i = 1, 2$, la forma:

$$\phi_i[v; B_{\overline{12}}] - \phi_i[v] = \frac{1}{2} \sum_{S \ni 1,2} (n - 2s + 2) \frac{(s-2)!(n-s)!}{n!} \cdot$$
$$\cdot [v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1, 2\})].$$

(b) En el caso en que se considera el valor de Banzhaf:

$$\psi_i[v; B_{\overline{12}}] = \psi_i[v], \quad i = 1, 2.$$

Demostración
(a) Basta escribir el coeficiente de cada término del sumatorio de la fórmula general para el caso particular del valor de Shapley. Este coeficiente es:

$$k_\sigma p_{s-1} - (1 - k_\sigma) p_s.$$

Recordemos que, en general, $k_\sigma = p_2^2$ y para el valor de Shapley en juegos bipersonales $p_2^2 = 1/2$. Así, el coeficiente que hemos de evaluar adopta la forma:

$$\frac{1}{2}\gamma(n, s-1) - \frac{1}{2}\gamma(n, s) = \frac{1}{2} \left[\frac{(s-2)!(n-s+1)!}{n!} - \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \right],$$

$$\frac{1}{2}\gamma(n,s-1)-\frac{1}{2}\gamma(n,s)=\frac{1}{2}(n-2s+2)\frac{(s-2)!(n-s)!}{n!}.$$

(b) Trabajando otra vez con los coeficientes del sumatorio, como que el valor de Banzhaf también verifica para los juegos bipersonales $p_2^2 = 1/2$, nos queda para evaluar:

$$\frac{1}{2}p_{s-1}-\frac{1}{2}p_s=\frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\ \right]=0.$$

Todos los coeficientes son 0, y el incremento es, en este caso, nulo. □

Observación 3.8
Según el caso particular (b) que acabamos de analizar, es suficiente que el semivalor que se considera sea el de Banzhaf para asegurar que el incremento entre el pago modificado y el pago inicial es nulo. La pregunta que podríamos formular es si esta condición es, además, necesaria. La respuesta viene dada en la siguiente propiedad, en la que se establece una clase más amplia de semivalores en los que se verifica que el incremento es nulo

Teorema 3.9
Sean $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes $p_s,\ 1 \le s \le n$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\},\{3\},\ldots,\{n\}\}$. Si denotamos por $\sigma[v; B_{\overline{12}}]$ la asignación por el semivalor modificado para juegos con estructura de coalición $B_{\overline{12}}$, entonces:

$$\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_i[v],\ i = 1,2,\ \forall v \in G_N \text{ si y sólo si } \sigma \text{ es un semivalor binomial.}$$

Demostración
Probamos, en primer lugar, que se verifica la condición para cualquier semivalor binomial $\sigma_\alpha : G_N \to \mathbb{R}^N,\ 0 < \alpha < 1$. Los coeficientes de estos semivalores son $p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s},\ 1 \le s \le n$.

El valor de k_σ corresponde al segundo coeficiente del semivalor inducido por un semivalor σ sobre juegos bipersonales y en este caso es:

$$k_{\sigma_\alpha} = p^2_{\alpha,2} = \alpha^1(1-\alpha)^0 = \alpha.$$

Los coeficientes de los términos del sumatorio que aparece en la expresión de $\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v],\ i = 1, 2$, adoptan para un semivalor binomial con $\alpha \in (0, 1)$ la forma siguiente, para $2 \leq s \leq n$:

$$k_{\sigma_\alpha} p_{\alpha,s-1} - (1 - k_{\sigma_\alpha}) p_{\alpha,s} = \alpha\, \alpha^{s-2} (1-\alpha)^{n-s+1} - (1-\alpha)\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} = 0,$$

de donde se sigue que si $\alpha \in (0, 1)$: $(\sigma_\alpha)_i[v; B_{\overline{12}}] = (\sigma_\alpha)_i[v],\ i = 1, 2,\ \forall v \in G_N$.

Los casos extremos $\alpha = 0,\ \alpha = 1$, verifican también la misma propiedad.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_i[v],\ i = 1, 2,\ \forall v \in G_N$. En tal caso serán nulos todos los coeficientes que aparezcan en los términos del sumatorio, es decir:

$$k_\sigma p_{s-1} - (1 - k_\sigma) p_s = 0, \quad s = 2, \ldots, n.$$

Suponiendo que es $k_\sigma \neq 1$, podemos escribir:

$$p_s = \frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} p_{s-1}, \quad s = 2, \ldots, n; \quad p_s = \left[\frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} \right]^{s-1} p_1, \quad s = 2, \ldots, n.$$

Sustituyendo estos valores en la condición que han de cumplir los coeficientes de cualquier semivalor, $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$:

$$p_1 \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} \left[\frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} \right]^{s-1} = 1; \quad p_1 \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \left[\frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} \right]^{t} = 1;$$

$$p_1 \left[1 + \frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} \right]^{n-1} = 1 \ \Rightarrow\ p_1 = (1 - k_\sigma)^{n-1},$$

y los demás coeficientes son:

$$p_s = \left[\frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma} \right]^{s-1} (1 - k_\sigma)^{n-1} = k_\sigma^{s-1} (1 - k_\sigma)^{n-s}, \quad s = 2, \ldots, n.$$

Escribiendo $\alpha = k_\sigma$, los coeficientes de σ se corresponden a los de un semivalor binomial:

$$p_s = \alpha^{s-1} (1 - \alpha)^{n-s}, \quad s = 1, \ldots, n,\ \alpha \neq 1.$$

Queda por estudiar el caso $k_\sigma = 1$. Ahora los coeficientes de los términos del sumatorio son $p_{s-1} = 0,\ s = 2, \ldots, n$, de manera que necesariamente tiene que ser $p_n = 1$, y éstos son los coeficientes correspondientes al semivalor binomial para $\alpha = 1$. $\square$

Observación 3.10
Por el hecho de haberse formado una única coalición bipersonal en el conjunto de jugadores de un juego $v \in G_N$ se ha llevado a cabo dos tipos de estudio.

En primer lugar, designando a los jugadores coaligados como $1, 2$, se ha comparado el pago en el juego cociente $v_{\overline{12}}$ al jugador $\overline{12}$, que representa la coalición, con respecto a la suma de pagos iniciales en v. Si designamos por $\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma]$ el incremento de pagos,

$$\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma] = \sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]),$$

por la proposición 3.1:

$$\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma] = \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1, 2\})].$$

En segundo lugar, se ha estudiado cómo variaba la asignación a cualquiera de los dos jugadores cuando el semivalor σ se modificaba para juegos con estructura de coalición con esa única coalición bipersonal. Si designamos la suma de los incrementos de las respectivas asignaciones a ambos jugadores por $\Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}]$, es decir,

$$\Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}] = \sigma_1[v; B_{\overline{12}}] + \sigma_2[v; B_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]),$$

por la proposición 3.5:

$$\Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}] = 2 \sum_{S \ni 1,2} [k_\sigma p_{s-1} - (1 - k_\sigma) p_s][v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1, 2\})],$$

donde $k_\sigma = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}$.

Con las notaciones que acabamos de introducir, podemos comparar uno y otro incrementos, dando lugar a la siguiente propiedad.

Teorema 3.11
Sean $v \in G_N$, $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$, entonces:

$$\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma] = \Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}], \ \forall v \in G_N \text{ si y sólo si } \sigma \text{ es estándar para juegos bipersonales.}$$

Demostración
Comparando las expresiones de $\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma]$ y de $\Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}]$, llegamos a la igualdad:

$$\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma] - \Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}] =$$

$$= \sum_{S \ni 1,2} [1 - 2k_\sigma](p_{s-1} + p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})],$$

siendo $k_\sigma = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}$.

Sabemos que $k_\sigma = p_2^2$, es decir, es el segundo coeficiente del semivalor σ^2, que es el inducido por σ para juegos con dos jugadores.

Por otro lado, un semivalor σ es estándar para juegos bipersonales si:

$$\sigma_i[v] = v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})], \quad \forall v \in G_N, \ N = \{i,j\},$$

$$\sigma_i[v] = \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) - v(\{j\})] + \frac{1}{2}[v(\{i\}) - v(\emptyset)],$$

siendo, por tanto, sus coeficientes: $(p_1, p_2) = (1/2, 1/2)$.

Así, suponiendo que σ es estándar para juegos bipersonales, todos los sumandos en la fórmula de la diferencia de incrementos son nulos, puesto que en ellos aparece el factor $[1 - 2k_\sigma]$ que se anula para $k_\sigma = p_2^2 = 1/2$.

Recíprocamente, si $\Delta_{1,2}[v, v_{\overline{12}}; \sigma] = \Delta_{1,2}[v, \sigma; B_{\overline{12}}]$, $\forall v \in G_N$, todos los coeficientes de los términos del sumatorio serán nulos,

$$[1 - 2k_\sigma](p_{s-1} + p_s) = 0.$$

Puede suceder entonces que $2k_\sigma - 1 = 0$, con lo que $k_\sigma = 1/2$, $(p_1^2, p_2^2) = (1/2, 1/2)$ y el semivalor σ es estándar para juegos bipersonales.

Pero podría ser que $1 - 2k_\sigma \neq 0$, en cuyo caso sería $p_{s-1} + p_s = 0$, $s = 2, \ldots, n$, es decir:

$$p_1 + p_2 = p_2 + p_3 = \cdots = p_{n-1} + p_n = 0.$$

Como que estos coeficientes han de cumplir $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, necesariamente sería: $p_s = 0$, $1 \leq s \leq n$. Pero entonces no se cumpliría la otra condición que afecta a los coeficientes de un semivalor cualquiera, que es $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$. Luego, σ es estándar para juegos bipersonales. $\square$

Proposición 3.12
Sean $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, con $|N| \geq 3$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$, entonces la diferencia entre el pago que el semivalor modificado asigna a un jugador que no es de la coalición bipersonal y el pago que a ese jugador le asigna el semivalor σ responde a la siguiente expresión:

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_3[v] = \sum_{S \ni 1,2,3} p_{s-1}[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{3\}) +$$
$$+ v(S \setminus \{1,2\}) + v(S \setminus \{1,3\}) + v(S \setminus \{2,3\}) - v(S \setminus \{1,2,3\})],$$

donde 3 representa uno cualquiera de los jugadores fuera de la coalición bipersonal $\{1,2\}$.

Demostración
Calculamos, en primer lugar, una expresión para el pago correspondiente al jugador 3 por el semivalor σ, representando este jugador 3 uno cualquiera de los jugadores que no forma parte de la coalición bipersonal única que convenimos en representar por $\{1,2\}$.

$$\sigma_3[v] = \sum_{S \ni 3} p_s[v(S) - v(S \setminus \{3\})], \quad s = |S|.$$

Separamos este sumatorio según si 1 ó 2 pertenecen o no a la coalición S.

$$\begin{aligned}\sigma_3[v] \;=\; & \sum_{S\ni 1,2,3} p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})] + \sum_{\substack{S\ni 1,3\\ S\not\ni 2}} p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})] + \\ & + \sum_{\substack{S\ni 2,3\\ S\not\ni 1}} p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})] + \sum_{\substack{S\ni 3\\ S\not\ni 1,2}} p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})].\end{aligned}$$

Si en el segundo sumatorio hacemos $S' = S\cup\{2\},\ s' = s+1$, en el tercer sumatorio hacemos $S' = S\cup\{1\},\ s' = s+1$, y en el cuarto sumatorio hacemos $S' = S\cup\{1,2\},\ s' = s+2$:

$$\begin{aligned}\sigma_3[v] = & \sum_{S\ni 1,2,3} p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})] + \sum_{S'\ni 1,2,3} p_{s'-1}[v(S'\setminus\{2\})-v(S'\setminus\{2,3\})] + \\ & + \sum_{S'\ni 1,2,3} p_{s'-1}[v(S'\setminus\{1\})-v(S'\setminus\{1,3\})] + \\ & + \sum_{S'\ni 1,2,3} p_{s'-2}[v(S'\setminus\{1,2\})-v(S'\setminus\{1,2,3\})].\end{aligned}$$

Agrupando en un mismo sumatorio llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned}\sigma_3[v] \;=\; & \sum_{S\ni 1,2,3} \Big\{\ p_s[v(S)-v(S\setminus\{3\})] + p_{s-1}[v(S\setminus\{2\})-v(S\setminus\{2,3\})+ \\ & + v(S\setminus\{1\})-v(S\setminus\{1,3\})] + p_{s-2}[v(S\setminus\{1,2\})-v(S\setminus\{1,2,3\})]\ \Big\}.\end{aligned}$$

Para obtener la expresión de $\sigma_3[v;B_{\overline{12}}]$ aplicamos la fórmula general para cualquier semivalor modificado que se obtiene a partir de la expresión (2.3) del capítulo anterior,

$$\sigma_i[v;B] = \sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}} \sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}} p^m_{t+1} p^{b_j}_{s+1} \left[\ v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S \cup \{i\}) - v(\bigcup_{t\in T} B_t \cup S)\ \right],$$

para $i\in B_j$, B_j bloque coalicional de $\{B_1,...,B_m\}$ partición de N.

En nuestro caso, $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}, \ldots, \{n\}\}$, vamos a calcular el semivalor modificado para $3 \in B_2$: $|B_2| = 1$ y el número de bloques coalicionales $m = n-1$.

Posibles subconjuntos $S \subseteq B_2 \setminus \{3\}: \; S = \emptyset, \; s = 0$.

Los coeficientes p_{t+1}^m, $1 \leq t+1 \leq m$, son los correspondientes al semivalor que actúa sobre el cociente modificado. En este caso, p_{t+1}^{n-1}, $1 \leq t+1 \leq n-1$. Los coeficientes $p_{s+1}^{b_j}$, $1 \leq s+1 \leq b_j$, son los correspondientes al semivalor que actúa sobre un juego unipersonal en B_2: se trata exclusivamente de $p_1^1 = 1$.

En consecuencia, la fórmula para $\sigma_3[v; B_{\overline{12}}]$ es,

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{T \subseteq M \setminus \{2\}} p_{t+1}^{n-1} \left[\; v(\bigcup_{t \in T} B_t \cup \{3\}) - v(\bigcup_{t \in T} B_t) \; \right].$$

De entre los subconjuntos $T \subseteq M \setminus \{2\}$ puede haber de dos tipos:

(a) aquellos T tales que $1 \in T$, es decir, que pueden identificarse con subconjuntos de $\{1, 2, 4, \ldots, n\}$,

(b) aquellos T tales que $1 \notin T$, por lo que pueden identificarse con subconjuntos de $\{4, \ldots, n\}$.

Según esta diferenciación, el sumatorio en la expresión de $\sigma_3[v; B_{\overline{12}}]$ puede descomponerse en dos: uno con $S' \subseteq N$ tales que $1, 2 \in S'$, $3 \notin S'$, $s' = t+1$, para los subconjuntos del tipo (a), y otro con $S' \subseteq N$ tales que $1, 2, 3 \notin S'$, $s' = t$, para los del tipo (b).

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{\substack{S' \subseteq N \\ S' \ni 1,2, \, S' \not\ni 3}} p_{s'}^{n-1} [v(S' \cup \{3\}) - v(S')] + \sum_{\substack{S' \subseteq N \\ S' \not\ni 1,2,3}} p_{s'+1}^{n-1} [v(S' \cup \{3\}) - v(S')].$$

Si en el primer sumatorio escribimos $S = S' \cup \{3\}$, $s = s'+1$, y en el segundo escribimos $S = S' \cup \{1, 2, 3\}$, $s = s'+3$, obtenemos:

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{S \ni 1,2,3} \left\{ \; p_{s-1}^{n-1} [v(S) - v(S \setminus \{3\})] + p_{s-2}^{n-1} [v(S \setminus \{1,2\}) - v(S \setminus \{1,2,3\})] \; \right\}.$$

Pero los coeficientes en los términos del sumatorio son coeficientes del semivalor inducido σ^{n-1}: $p_{s-1}^{n-1} = p_{s-1} + p_s$, $p_{s-2}^{n-1} = p_{s-2} + p_{s-1}$, para $3 \leq s \leq n$. De aquí:

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] = \sum_{S \ni 1,2,3} \Big\{ (p_{s-1} + p_s)[v(S) - v(S \setminus \{3\})] + \\ +(p_{s-2} + p_{s-1})[v(S \setminus \{1,2\}) - v(S \setminus \{1,2,3\})] \Big\}.$$

Finalmente, restando a esta expresión la fómula que hemos encontrado previamente para $\sigma_3[v]$, obtenemos la igualdad:

$$\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_3[v] = \sum_{S \ni 1,2,3} p_{s-1}[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{3\}) + \\ +v(S \setminus \{1,2\}) + v(S \setminus \{1,3\}) + v(S \setminus \{2,3\}) - v(S \setminus \{1,2,3\})]. \quad \square$$

Consecuencia 3.13
Para determinados semivalores, la expresión correspondiente al coeficiente de cada término del sumatorio adopta la forma siguiente:

(a) Valor de Shapley: $p_{s-1} = \gamma(n, s-1) = \dfrac{(s-2)!(n-s+1)!}{n!}$, $3 \leq s \leq n$.

(b) Semivalores binomiales: $p_{s-1} = \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s+1}$, $3 \leq s \leq n$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Dentro de éstos el valor de Banzhaf es el correspondiente a $\alpha = 1/2$, en cuyo caso, el coeficiente es $p_{s-1} = 1/2^{n-1}$, $3 \leq s \leq n$, que al no depender del cardinal de S puede salir como factor común del sumatorio.

Definición 3.14
Un semivalor $\sigma : G_N \rightarrow \mathbb{R}^N$ decimos que es un *semivalor extremo* si es una combinación lineal convexa del índice dictatorial y del índice marginal:

$$\sigma = (1-\alpha)i_d + \alpha\, i_m, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Por sus coeficientes:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) = (1-\alpha)(1, 0, \ldots, 0, 0) + \alpha(0, 0, \ldots, 0, 1), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) = (1-\alpha, 0, \ldots, 0, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Teorema 3.15
Sean $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes $p_s,\ 1 \leq s \leq n$, con $|N| \geq 3$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\},\{3\},\ldots,\{n\}\}$, entonces:

$\sigma_j[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_j[v],\ \forall j \in N\setminus\{1,2\},\ \forall v \in G_N$, si y sólo si σ es un semivalor extremo.

Demostración
La expresión que hemos obtenido en la proposición anterior sirve para cualquier jugador $j \in N,\ j \neq 1,2$. Así, en todos estos casos los coeficientes que aparecen en los términos del sumatorio son: $p_{s-1},\ 3 \leq s \leq n$, o lo que es lo mismo, $p_s,\ 2 \leq s \leq n-1$.

Si el semivalor σ es extremo cumple $p_s = 0,\ 2 \leq s \leq n-1$, de donde todos los términos del sumatorio son nulos y $\sigma_j[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_j[v],\ j \neq 1,2$.

Recíprocamente, si $\sigma_j[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_j[v],\ \forall j \in N \setminus \{1,2\},\ \forall v \in G_N$, todos los coeficientes de los términos del sumatorio serán nulos, de donde $p_s = 0,\ 2 \leq s \leq n-1$. Quedan por determinar p_1, p_n; pero estos coeficientes han de cumplir las condiciones propias de cualesquiera coeficientes de un semivalor:

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1 \\ p_s \geq 0,\ 1 \leq s \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} p_1 + p_n = 1 \\ p_1, p_n \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = 1-\alpha \\ p_n = \alpha \end{array}\right\} \ 0 \leq \alpha \leq 1,$$

luego σ es un semivalor extremo. $\square$

Consecuencia 3.16
Sean $v \in G_N$ y $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ semivalor de coeficientes $p_s,\ 1 \leq s \leq n$, con $|N| \geq 3$. Supongamos que se forma la estructura de coalición $B_{\overline{12}} = \{\{1,2\},\{3\},\ldots,\{n\}\}$, entonces:

$\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_i[v],\ \forall i \in N,\ \forall v \in G_N$ si y sólo si σ es el índice dictatorial o σ es el índice marginal.

Demostración
Por el teorema 3.9, $\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_i[v],\ i = 1,2,\ \forall v \in G_N$ si y sólo si σ es un semivalor binomial. Por el teorema anterior, $\sigma_j[v; B_{\overline{12}}] = \sigma_j[v],\ \forall j \in N \setminus \{1,2\},\ \forall v \in$

G_N si y sólo si σ es un semivalor extremo. Como los únicos semivalores que son, a la vez, binomiales y extremos para $|N| \geq 3$, son el índice dictatorial y el índice marginal, se sigue la afirmación del enunciado. $\square$

3.3 EML y coaliciones de dos jugadores

En esta sección ofrecemos un método de cálculo de los incrementos de asignación que se han obtenido en las secciones precedentes cuando se ha considerado una única coalición bipersonal en el conjunto de jugadores. La sistematización de los cálculos se efectúa mediante la extensión multilineal del juego cooperativo.

En Magaña (1996) se ofrece una expresión para la extensión multilineal del juego cociente, en general, y del cociente con una única coalición bipersonal, en particular. Ahora, manipulaciones similares de la extensión multilineal recogidas en el siguiente lema conducen a las fórmulas para el cálculo de los correspondientes incrementos según la asignación ofrecida por cualquier semivalor. Estos resultados engloban los ofrecidos en la referencia que se cita para los valores de Shapley y de Banzhaf.

Lema 3.17
Supongamos que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ es la EML de un juego $v \in G_N$.

(a) Si $i, j \in N$, $|N| \geq 2$, y denotamos $\overline{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f(\overline{\alpha})}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{S \ni i,j} \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S \setminus \{i\}) - v(S \setminus \{j\}) + v(S \setminus \{i,j\})].$$

(b) Si $i, j, k \in N$, $|N| \geq 3$, y denotamos $\overline{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f(\overline{\alpha})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = & \sum_{S \ni i,j,k} \alpha^{s-3}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S \setminus \{i\}) - v(S \setminus \{j\}) - \\ & - v(S \setminus \{k\}) + v(S \setminus \{i,j\}) + v(S \setminus \{i,k\}) + \end{aligned}$$

$$+ v(S \setminus \{j,k\}) - v(S \setminus \{i,j,k\})].$$

Demostración
(a) La expresión de la EML del juego v,

$$f(x_1,\,\ldots,x_n) = \sum_{S\subseteq N} \prod_{l\in S} x_l \prod_{m\notin S} (1-x_m)v(S),$$

la separamos en cuatro sumatorios según si i,j pertenecen o no a cada coalición S:

$$\begin{aligned} f(x_1,\,\ldots,x_n) = & \sum_{S\ni i,j} x_i x_j \prod_{l\in S\setminus\{i,j\}} x_l \prod_{m\notin S} (1-x_m)v(S)+ \\ & + \sum_{S\ni i, S\not\ni j} x_i(1-x_j) \prod_{l\in S\setminus\{i\}} x_l \prod_{m\notin S\cup\{j\}} (1-x_m)v(S)+ \\ & + \sum_{S\not\ni i, S\ni j} (1-x_i)x_j \prod_{l\in S\setminus\{j\}} x_l \prod_{m\notin S\cup\{i\}} (1-x_m)v(S)+ \\ & + \sum_{S\not\ni i,j} (1-x_i)(1-x_j) \prod_{l\in S} x_l \prod_{m\notin S\cup\{i,j\}} (1-x_m)v(S). \end{aligned}$$

Derivando respecto a x_i, x_j, obtenemos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ como suma de cuatro términos:

$$\begin{aligned} & \sum_{S\ni i,j} \prod_{l\in S\setminus\{i,j\}} x_l \prod_{m\notin S} (1-x_m)v(S) - \sum_{S\ni i, S\not\ni j} \prod_{l\in S\setminus\{i\}} x_l \prod_{m\notin S\cup\{j\}} (1-x_m)v(S)- \\ & - \sum_{S\not\ni i, S\ni j} \prod_{l\in S\setminus\{j\}} x_l \prod_{m\notin S\cup\{i\}} (1-x_m)v(S) + \sum_{S\not\ni i,j} \prod_{l\in S} x_l \prod_{m\notin S\cup\{i,j\}} (1-x_m)v(S). \end{aligned}$$

Si en el segundo sumatorio hacemos $S' = S\cup\{j\},\ s' = s+1$, en el tercero $S' = S\cup\{i\},\ s' = s+1$, y en el cuarto $S' = S\cup\{i,j\},\ s' = s+2$, la expresión anterior se transforma en:

$$\sum_{S\ni i,j}\prod_{l\in S\setminus\{i,j\}}x_l\prod_{m\notin S}(1-x_m)v(S)-\sum_{S'\ni i,j}\prod_{l\in S'\setminus\{i,j\}}x_l\prod_{m\notin S'}(1-x_m)v(S'\setminus\{j\})-$$

$$-\sum_{S'\ni i,j}\prod_{l\in S'\setminus\{i,j\}}x_l\prod_{m\notin S'}(1-x_m)v(S'\setminus\{i\})+$$

$$+\sum_{S'\ni i,j}\prod_{l\in S'\setminus\{i,j\}}x_l\prod_{m\notin S'}(1-x_m)v(S'\setminus\{i,j\}).$$

Esta expresión puede agruparse bajo un único sumatorio:

$$\frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{S\ni i,j}\prod_{l\in S\setminus\{i,j\}}x_l\prod_{m\notin S}(1-x_m)[v(S)-v(S\setminus\{i\})-$$

$$-v(S\setminus\{j\})+v(S\setminus\{i,j\})].$$

Si se sustituye $(x_1,\ldots,x_n)$ por $(\alpha,\ldots,\alpha)$, en cada término del sumatorio aparece como coeficiente $\alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}$, y hemos obtenido la expresión del enunciado del apartado (a).

(b) Para obtener la fórmula de este apartado, partimos de la expresión anterior, separando en dos sumatorios según las coaliciones S: por un lado los términos con S tal que $i,j,k\in S$, y por otro lado los términos con S tal que $i,j\in S,\ k\notin S$. En el primer tipo de términos sacamos factor común x_k, y en el segundo $1-x_k$. Al derivar parcialmente respecto a x_k, los primeros términos se transforman en 1 y los segundos en -1, y la fórmula para la derivada parcial tercera respecto a $x_i,\ x_j,\ x_k$ tiene por expresión:

$$\sum_{S\ni i,j,k}\prod_{\substack{l\in S\\ l\neq i,j,k}}x_l\prod_{m\notin S}(1-x_m)[v(S)-v(S\setminus\{i\})-v(S\setminus\{j\})+v(S\setminus\{i,j\})]-$$

$$-\sum_{\substack{S\ni i,j\\ S\not\ni k}}\prod_{\substack{l\in S\\ l\neq i,j}}x_l\prod_{\substack{m\notin S\\ m\neq k}}(1-x_m)[v(S)-v(S\setminus\{i\})-v(S\setminus\{j\})+v(S\setminus\{i,j\})].$$

Si en el segundo sumatorio escribimos $S'=S\cup\{k\},\ s'=s+1$, y después agrupamos ambos sumatorios en uno:

$$\frac{\partial^3 f(x_1,\, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \sum_{S \ni i,j,k} \prod_{\substack{l \in S \\ l \neq i,j,k}} x_l \prod_{m \notin S} (1 - x_m)[v(S) - v(S \setminus \{i\}) - v(S \setminus \{j\}) -$$

$$-v(S \setminus \{k\}) + v(S \setminus \{i,j\}) + v(S \setminus \{i,k\}) + v(S \setminus \{j,k\}) - v(S \setminus \{i,j,k\})].$$

Finalmente, si sustituimos $(x_1,\, \ldots, x_n)$ por $(\alpha,\, \ldots, \alpha)$, en cada término del sumatorio aparece como coeficiente $\alpha^{s-3}(1-\alpha)^{n-s}$, y hemos obtenido la expresión que corresponde al enunciado del apartado (b). $\square$

Proposición 3.18
Sea $f = f(x_1,\, \ldots, x_n)$ la EML del juego $v \in G_N$.
Sean $0 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leq 1$, n números reales, de manera que el semivalor $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$, de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, se expresa en forma única como $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.
Si Λ es la matriz columna de los coeficientes de σ como combinación lineal de los semivalores binomiales para $\alpha_1,\, \ldots, \alpha_n$, entonces:

(a) $\quad \sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = C\, \Lambda,$

(b) $\quad \sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v] = D^\sigma\, \Lambda, \qquad i = 1, 2,$

(c) $\quad \sigma_k[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_k[v] = E^k\, \Lambda, \qquad k \neq 1, 2,$

donde C, D^σ, E^k son las matrices fila siguientes:

$$C = (c_j), \qquad c_j = (1 - 2\alpha_j) \frac{\partial^2 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2}\,, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$D^\sigma = (d_j^\sigma), \qquad d_j^\sigma = (k_\sigma - \alpha_j) \frac{\partial^2 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2}\,, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$E^k = (e_j^k), \qquad e_j^k = \alpha_j(1 - \alpha_j) \frac{\partial^3 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_k}\,, \quad 1 \leq j \leq n,\ k \neq 1, 2,$$

con las notaciones: $k_\sigma = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} \tbinom{n-2}{j} p_{2+j}$, $\ \overline{\alpha}_j = (\alpha_j,\, \ldots, \alpha_j)$.

Demostración
(a) A partir de la fórmula que en la proposición 3.1 hemos probado para este incremento,

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) =$$
$$= \sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})],$$

sustituimos cada coeficiente del sumatorio en función de los coeficientes de los semivalores binomiales escogidos como sistema de referencia, obteniendo, para $\alpha \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} p_{s-1} - p_s &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-2} (1-\alpha_j)^{n-s+1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-s} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1 - 2\alpha_j) \alpha_j^{s-2} (1-\alpha_j)^{n-s}. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de los sumatorios en la expresión del incremento y teniendo en cuenta la fórmula de la derivada segunda de la EML obtenida en el apartado (a) del lema 3.17, podemos escribir:

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1 - 2\alpha_j) \frac{\partial^2 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2} = C\,\Lambda.$$

(b) Ahora, la fórmula obtenida en la proposición 3.5 para este incremento es:

$$\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v] =$$
$$= \sum_{S \ni 1,2} [k_\sigma p_{s-1} - (1-k_\sigma) p_s][v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})],$$

donde $k_\sigma = \sum\limits_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}$ y la fórmula es válida para $i = 1, 2$.

Sustituyendo cada coeficiente del sumatorio en función de los coeficientes de los semivalores binomiales queda:

$$
\begin{aligned}
k_\sigma p_{s-1} - (1-k_\sigma)p_s &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[k_\sigma(1-\alpha_j) - (1-k_\sigma)\alpha_j\right] \alpha_j^{s-2}(1-\alpha_j)^{n-s} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[k_\sigma - \alpha_j\right] \alpha_j^{s-2}(1-\alpha_j)^{n-s}.
\end{aligned}
$$

Intercambiando el orden de los sumatorios y aplicando nuevamente la propiedad (a) del lema 3.17 se obtiene:

$$
\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (k_\sigma - \alpha_j) \frac{\partial^2 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2} = D^\sigma\ \Lambda, \quad \text{para } i = 1, 2.
$$

(c) Por último, la expresión de este incremento es, según la proposición 3.12,

$$
\begin{aligned}
\sigma_3[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_3[v] = \sum_{S \ni 1,2,3} & p_{s-1}[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) - v(S \setminus \{3\}) + \\
& + v(S \setminus \{1,2\}) + v(S \setminus \{1,3\}) + v(S \setminus \{2,3\}) - v(S \setminus \{1,2,3\})].
\end{aligned}
$$

Si escribimos los coeficientes p_{s-1} en función de los coeficientes de los semivalores binomiales y agrupamos queda:

$$
p_{s-1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-2}(1-\alpha_j)^{n-s+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j (1-\alpha_j) \alpha_j^{s-3}(1-\alpha_j)^{n-s}.
$$

Intercambiando el orden de los sumatorios en la fórmula del incremento y empleando la expresión de la derivada tercera de la EML vista en el apartado (b) del lema 3.17 se llega a obtener:

$$
\sigma_k[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_k[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j (1-\alpha_j) \frac{\partial^3 f(\overline{\alpha}_j)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_k} = E^k\ \Lambda, \quad \text{para } k \neq 1, 2.
$$

En cualquiera de los apartados (a), (b), (c), se obtienen expresiones similares cuando se consideran los casos en los que los semivalores binomiales de referencia son los correspondientes a $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n \neq 1$; $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_n = 1$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_n = 1$. $\square$

Observación 3.19
Las matrices denominadas C, E^k no dependen del semivalor σ con el que en concreto se esté trabajando. Estas matrices, que dependen del juego $v \in G_N$ que se considere a través de su extensión multilineal f, quedan definidas una vez determinado el sistema de referencia en el hiperplano de semivalores dado por los n semivalores binomiales escogidos σ_{α_j}, $1 \leq j \leq n$.

Así, los cálculos correspondientes a los incrementos reflejados en los apartados (a) y (c) pueden efectuarse para diferentes semivalores σ sin más que cambiar las matrices Λ de cada semivalor que se estudie. Para el caso (b), la diferencia $\sigma_i[v; B_{\overline{12}}] - \sigma_i[v]$, $i = 1, 2$, requiere, además, el cálculo de la constante k_σ que debe obtenerse para cada semivalor.

Ejemplo 3.20
Consideramos el juego $v \in G_N$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, definido en la forma: $v(S) = 4$ si $1 \in S \neq N$, $v(S) = 2^{s-1}$ si $1 \notin S$ y $v(N) = 8$. En todo el ejemplo supondremos que se forma una única coalición bipersonal entre los jugadores 2 y 3, de manera que la estructura de coaliciones es $B_{\overline{23}} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$.

La EML asociada a este juego es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_4.$$

Como que la coalición bipersonal que se forma es $\{2, 3\}$ calculamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_4 + 3x_1x_4.$$

(a) Vamos a determinar el incremento de asignación por el valor de Banzhaf para la clase $\overline{23}$ del cociente respecto a la suma de asignaciones para los jugadores $2, 3$ en el juego original, tomando como sistema de referencia semivalores binomiales para $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$, $\alpha_4 = 1$.

Función auxiliar F_C para obtener la matriz denominada C:

$$F_C(\alpha) = (1 - 2\alpha)\frac{\partial^2 f(\overline{\alpha})}{\partial x_2 \partial x_3} = (1 - 2\alpha)(\alpha + 3\alpha^2).$$

$$F_C(0) = 0, \qquad F_C(1/3) = 2/9, \qquad F_C(2/3) = -2/3, \qquad F_C(1) = -4.$$

Sabemos que el valor de Banzhaf en este sistema de referencia es:

$$\psi = \frac{-1}{16}\sigma_0 + \frac{9}{16}\sigma_{1/3} + \frac{9}{16}\sigma_{2/3} + \frac{-1}{16}\sigma_1.$$

Por lo tanto:

$$\psi_{\overline{23}}[v_{\overline{23}}] - (\psi_2[v] + \psi_3[v]) = C\,\Lambda = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 2/9 & -2/3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Este resultado es el esperado ya que el valor de Banzhaf cumple que este incremento es nulo para cualquier juego.

(b) El mismo cálculo que en el apartado (a), pero ahora para el valor de Shapley.

En este caso sirve la misma matriz C del apartado anterior, siendo suficiente cambiar la matriz de los coeficientes correspondientes al semivalor, que ahora denotamos por $\widetilde{\Lambda}$. Para obtener esos coeficientes basta recordar que:

$$\phi = \frac{1}{8}\sigma_0 + \frac{3}{8}\sigma_{1/3} + \frac{3}{8}\sigma_{2/3} + \frac{1}{8}\sigma_1.$$

Entonces:

$$\phi_{\overline{23}}[v_{\overline{23}}] - (\phi_2[v] + \phi_3[v]) = C\,\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 2/9 & -2/3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{3}.$$

(c) Obtención de los incrementos respectivos de asignación por los valores de Banzhaf y de Shapley para la clase $\overline{23}$ del cociente respecto a la suma de asignaciones para los jugadores $2, 3$ en el juego original, tomando como sistema de referencia semivalores binomiales para $\alpha_1 = 1/8$, $\alpha_2 = 3/8$, $\alpha_3 = 5/8$, $\alpha_4 = 7/8$.

En este caso, la función auxiliar $F_C = (1-2\alpha)(\alpha + 3\alpha^2)$ es la misma que ya había sido empleada para obtener la matriz C en los apartados (a) y (b). Ahora debe valorarse en los nuevos valores de α.

$$F_C(1/8) = \frac{33}{256}, \qquad F_C(3/8) = \frac{51}{256}, \qquad F_C(5/8) = \frac{-115}{256}, \qquad F_C(7/8) = \frac{-609}{256}.$$

Al ser, respectivamente,

$$\psi = \frac{-1}{16}\sigma_{1/8} + \frac{9}{16}\sigma_{3/8} + \frac{9}{16}\sigma_{5/8} + \frac{-1}{16}\sigma_{7/8},$$

$$\phi = \frac{13}{48}\sigma_{1/8} + \frac{11}{48}\sigma_{3/8} + \frac{11}{48}\sigma_{5/8} + \frac{13}{48}\sigma_{7/8},$$

se obtienen los resultados:

$$\psi_{\overline{23}}[v_{\overline{23}}] - (\psi_2[v] + \psi_3[v]) = C\,\Lambda = \frac{1}{4096}\begin{pmatrix} 33 & 51 & -115 & -609 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\phi_{\overline{23}}[v_{\overline{23}}] - (\phi_2[v] + \phi_3[v]) = C\,\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{12288}\begin{pmatrix} 33 & 51 & -115 & -609 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{-2}{3}.$$

Estos resultados, junto con los de los apartados (a) y (b), nos permiten comprobar la independencia de los cálculos de la elección del sistema de referencia en el hiperplano de semivalores.

(d) Obtención para cualquiera de los jugadores $2, 3$ del incremento de asignaciones entre el semivalor modificado por la formación de la coalición bipersonal y el semivalor inicial, para Banzhaf y para Shapley.

En esta ocasión hemos de calcular la matriz D^σ, lo cual hacemos por medio de la función auxiliar,

$$F_{D^\sigma}(\alpha) = (k_\sigma - \alpha)\frac{\partial^2 f(\overline{\alpha})}{\partial x_2 \partial x_3} = (k_\sigma - \alpha)(\alpha + 3\alpha^2).$$

Mas que de una función, se trata de una familia de funciones, ya que depende de cada semivalor a través del coeficiente k_σ. En el caso del valor de Banzhaf se tiene $k_\psi = 1/2$, de donde:

$$F_{D^\psi}(\alpha) = (1/2 - \alpha)(\alpha + 3\alpha^2).$$

En este caso, consideramos semivalores binomiales de referencia para $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$, $\alpha_4 = 1$, y en ellos valoramos la función:

$$F_{D^\psi}(0) = 0, \qquad F_{D^\psi}(1/3) = 1/9, \qquad F_{D^\psi}(2/3) = -1/3, \qquad F_{D^\psi}(1) = -2.$$

De esta manera, para $i = 2, 3$:

$$\psi_i[v; B_{\overline{23}}] - \psi_i[v] = D^\psi\, \Lambda = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & -1/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ahora para el valor de Shapley $k_\phi = 1/2$, por lo que la función auxiliar es la misma y también la matriz $D^\phi = D^\psi$. Por lo tanto, para $i = 2, 3$:

$$\phi_i[v; B_{\overline{23}}] - \phi_i[v] = D^\phi\, \Lambda = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & -1/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}.$$

Ambos resultados eran previsibles. Que el incremento correspondiente al valor de Banzhaf sea nulo es debido a que se probó que esto sucedía para todo semivalor binomial y éste no es sino el caso particular para $\alpha = 1/2$.

En cuanto al resultado para el valor de Shapley, también se probó que para juegos estándar para bipersonales, el incremento entre la asignación en el cociente respecto a la suma de las dos asignaciones en el juego inicial es el mismo que el incremento entre la suma de asignaciones modificadas respecto a la suma de asignaciones iniciales. Si en el apartado (b) obtuvimos un resultado de $-2/3$, ahora esperábamos obtener $-1/3$, ya que la primera cantidad se ha de repartir en partes iguales para los incrementos individuales de cada jugador.

(e) Finalmente, calculamos cómo afecta al resto de jugadores el hecho de haberse formado la coalición $\{2, 3\}$. La derivada segunda de la EML respecto a x_2 y x_3 es, en este caso, $x_4 + 3x_1x_4$. Para estudiar el incremento para el jugador 1 hemos de derivar ahora respecto a la variable x_1:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} = 3x_4.$$

A partir de esta derivada parcial podemos construir la función auxiliar $F_{E^1}(\alpha)$ que nos permite construir la matriz E^1 para el primer jugador:

$$F_{E^1}(\alpha) = \alpha(1-\alpha)\frac{\partial^3 f(\overline{\alpha})}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} = \alpha(1-\alpha)3\alpha = 3\alpha^2(1-\alpha).$$

Valorando nuevamente en $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$, $\alpha_4 = 1$, se obtiene:

$$F_{E^1}(0) = 0, \qquad F_{E^1}(1/3) = 2/9, \qquad F_{E^1}(2/3) = 4/9, \qquad F_{E^1}(1) = 0.$$

De aquí, para el valor de Banzhaf,

$$\psi_1[v; B_{\overline{23}}] - \psi_1[v] = E^1\,\Lambda = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 2/9 & 4/9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{8},$$

y para el valor de Shapley,

$$\phi_1[v; B_{\overline{23}}] - \phi_1[v] = E^1\,\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 2/9 & 4/9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Un procedimiento análogo permite calcular el incremento de asignación entre el semivalor modificado y el inicial para el jugador 4:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} = 1 + 3x_1 \quad \Rightarrow \quad F_{E^4}(\alpha) = \alpha(1-\alpha)\frac{\partial^3 f(\overline{\alpha})}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} = \alpha(1-\alpha)(1+3\alpha).$$

Sustituyendo en los mismos valores de α, obtenemos la matriz E^4 para el cuarto jugador, y a partir de ésta los resultados:

$$\psi_4[v; B_{\overline{23}}] - \psi_4[v] = E^4\,\Lambda = \frac{1}{9}\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{8},$$

$$\phi_4[v; B_{\overline{23}}] - \phi_4[v] = E^4\,\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{9}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{12}.$$

3.4 Un problema inverso

Consideramos un juego cooperativo concreto $v \in G_N$, $|N| = n$, y suponemos que en el conjunto N de los jugadores se forma una única coalición bipersonal entre dos jugadores, que designaremos por 1, 2.

El problema que tratamos de resolver es el de hallar los semivalores $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ tales que la diferencia entre la asignación en el juego cociente a la clase formada por los dos jugadores con respecto a la suma de sus asignaciones individuales en el juego inicial sea un valor dado. Así pues, se trata de resolver la ecuación

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a, \tag{3.4}$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})] = a.$$

La resolución de este problema pasa por dos estadios diferentes:

- Encontrar los valores de a que son admisibles, es decir, aquellos para los que exista semivalores que sean solución de la ecuación anterior.
- Una vez determinados los valores posibles de a, encontrar todas las soluciones que satisfagan la ecuación para un valor concreto, de entre los que son admisibles.

Definición 3.21
Para un juego cooperativo fijado $v \in G_N$, $|N| \geq 2$, supuesta la coalición bipersonal única $\{1, 2\}$, definimos la sucesión de constantes

$$\{\, k_1 \,,\, k_2 \,,\, \ldots \,,\, k_n \,,\, k_{n+1} \,\}$$

en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
&k_1 = 0, \\
&k_s = \sum_{S \ni 1,2,\, |S| = s} [v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})], \quad 2 \leq s \leq n, \\
&k_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Proposición 3.22
Los valores admisibles de a en la ecuación (3.4) son los números del intervalo real $[\,\omega\,,\,\Omega\,]$, donde:

$$\omega = \min_{s=1,\ldots,n} \left\{ [k_{s+1} - k_s] \binom{n-1}{s-1}^{-1} \right\}, \qquad \Omega = \max_{s=1,\ldots,n} \left\{ [k_{s+1} - k_s] \binom{n-1}{s-1}^{-1} \right\}.$$

Demostración
Con la notación que acabamos de introducir, podemos escribir:

$$\sum_{S \ni 1,2} (p_{s-1} - p_s)[v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})] =$$

$$= \sum_{s=2}^{n} (p_{s-1} - p_s) \sum_{\substack{S \ni 1,2, \\ |S|=s}} [v(S) - v(S \setminus \{1\}) - v(S \setminus \{2\}) + v(S \setminus \{1,2\})] =$$

$$= \sum_{s=2}^{n} k_s (p_{s-1} - p_s) = \sum_{s=1}^{n} (k_{s+1} - k_s) p_s.$$

Así, hallar el máximo y el mínimo de esta expresión en función de los diferentes semivalores σ definidos sobre el espacio de juegos cooperativos G_N supone resolver los programas lineales siguientes:

maximizar (minimizar): $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} (k_{s+1} - k_s) p_s,$

con la restricción: $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1,$

y las condiciones de no negatividad: $p_s \geq 0,\ \ 1 \leq s \leq n.$

En este caso, el conjunto de oportunidades es una región convexa y acotada de $\mathbb{R}^n$. El máximo (mínimo) de un programa lineal se alcanza sobre algún vértice del conjunto de oportunidades. Los vértices son los puntos $V_s,\ 1 \leq s \leq n$, cuyas coordenadas son, respectivamente,

$$p_s = \binom{n-1}{s-1}^{-1}, \;\; p_t = 0, \; t \neq s.$$

Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices supone calcular:

$$[k_{s+1} - k_s]\binom{n-1}{s-1}^{-1}, \quad \text{para } 1 \leq s \leq n,$$

de tal manera que el máximo y el mínimo posibles son, respectivamente, los que figuran en el enunciado de la propiedad. $\square$

Observación 3.23
Para cualquier juego $v \in G_N$, el valor de Banzhaf verifica:

$$\psi_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\psi_1[v] + \psi_2[v]) = 0.$$

Así, para cualquier juego $v \in G_N$, siempre $\omega \leq 0,\ \Omega \geq 0$.

Fijado $a \in (\,\omega\,,\,\Omega\,),\ \omega \neq \Omega$, podemos construir un semivalor σ que verifique

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a.$$

Los coeficientes de un tal semivalor son las coordenadas del punto P que se obtiene en la forma siguiente:

$$P = \frac{\Omega - a}{\Omega - \omega}\, V_{s^*} + \frac{a - \omega}{\Omega - \omega}\, V_{s^{**}}\,,$$

siendo V_{s^*} un vértice del conjunto de oportunidades en el que se alcanza el valor mínimo ω y $V_{s^{**}}$ un vértice en el que se alcanza el valor máximo Ω.

También, siguiendo la misma notación, puede obtenerse una solución en la forma siguiente:

$$\text{para } 0 < a < \Omega : \qquad P = \frac{\Omega - a}{\Omega}\, Bh + \frac{a}{\Omega}\, V_{s^{**}}\,,$$

$$\text{para } \omega < a < 0 : \qquad P = \frac{a}{\omega}\, V_{s^*} + \frac{\omega - a}{\omega}\, Bh\,,$$

donde $Bh = (1/2^{n-1}, ..., 1/2^{n-1})$ es el punto correspondiente al valor de Banzhaf.

En ambos casos, se trata de concretar un punto sobre el segmento que une otros dos cuyo efecto sobre la ecuación (3.4) es conocido. En el primer caso, sobre el segmento que une un vértice donde se alcanza el mínimo con otro donde se alcanza el máximo. Todos los valores se alcanzan sobre ese segmento y todos los puntos del segmento son del conjunto de oportunidades, ya que éste es convexo. En el segundo caso, se emplean dos segmentos, uniendo el punto Bh correspondiente al valor de Banzhaf con un vértice donde se alcance el máximo y con uno en el que se alcance el mínimo, y actuando de igual manera.

Ejemplo 3.24
Consideramos el juego $v \in G_N$, $N = \{1,2,3,4\}$, definido en la forma: $v(S) = 4$ si $1 \in S \neq N$, $v(S) = 2^{s-1}$ si $1 \notin S$ y $v(N) = 8$. Suponemos que se forma la coalición bipersonal única $\{1,2\}$. Para esta coalición vamos a calcular el máximo y el mínimo de la diferencia entre la asignación $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}]$ en el juego cociente y la suma de asignaciones $\sigma_1[v] + \sigma_2[v]$ en el juego inicial.

En primer lugar, obtenemos la sucesión de constantes $\{\, k_1\,,\, k_2\,,\, k_3\,,\, k_4\,,\, k_5\,\}$ que en este caso debe calcularse considerando las coaliciones $S \subseteq N$ tales que $S \ni 1,2$.

Para $|S| = 2,\ S = \{1,2\}$: $k_2 = v(\{1,2\}) - v(\{2\}) - v(\{1\}) = -1$.

Para $|S| = 3,\ S = \{1,2,3\}, \{1,2,4\}$:

$$\begin{aligned} k_3 = v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) - v(\{1,3\}) + v(\{3\}) + \\ + v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\}) - v(\{1,4\}) + v(\{4\}) = -2. \end{aligned}$$

Para $|S| = 4,\ S = \{1,2,3,4\}$:

$$k_4 = v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\}) - v(\{1,3,4\}) + v(\{3,4\}) = 2.$$

A estos valores hemos de añadir $k_1 = k_5 = 0$ y calcular el máximo y el mínimo de:

$$\left\{ [k_{s+1} - k_s] \binom{4-1}{s-1}^{-1} \right\}_{1 \le s \le 4} = \left\{ -1\,,\, -\frac{1}{3}\,,\, \frac{4}{3}\,,\, -2 \right\}.$$

Los valores admisibles para $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v])$ son los del intervalo $[\,-2\,,\, 4/3\,]$.

El máximo se alcanza en el vértice de coordenadas $V_3 = (\,0\,,\,0\,,\,1/3\,,\,0\,)$, y el mínimo en el vértice de coordenadas $V_4 = (\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,)$.

Para obtener una solución de la ecuación en uno de los casos admisibles, como por ejemplo $a = 1$,

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = 1,$$

podemos emplear uno de los métodos de la observación 3.23. Un semivalor σ que sea solución particular será aquél cuyos coeficientes sean las coordenadas del punto P:

$$P = \frac{4/3 - 1}{4/3}\, Bh + \frac{1}{4/3}\, V_3,$$

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) + \frac{3}{4}\left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{3}\,,\,0\right) = \left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{9}{32}, \frac{1}{32}\right).$$

Observación 3.25

La proposición 3.22 nos proporciona el conjunto posible de números a admisibles como término independiente en la ecuación lineal

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a.$$

Si designamos por H el "hiperplano de semivalores", es decir, la intersección del hiperplano de $\mathbb{R}^n$ de ecuación $\sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} p_s = 1$ con los semiespacios de ecuaciones respectivas $p_s \geq 0,\ 1 \leq s \leq n$, tenemos para cada punto de H un valor del incremento $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v])$, de manera que podemos establecer la siguiente aplicación,

$$\begin{array}{rccc} \Delta_{12}: & H & \to & [\,\omega\,,\,\Omega\,] \\ & (p_1, ..., p_n) & \to & \sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) \end{array}$$

Al ser $\Delta_{12}(p_1, ..., p_n) = \sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = \sum_{s=1}^{n} (k_{s+1} - k_s) p_s$, la función Δ_{12} es una función lineal y, por tanto, continua de H sobre $[\,\omega\,,\,\Omega\,]$. Fijado un valor concreto $a \in (\,\omega\,,\,\Omega\,)$ queremos encontrar todos los puntos $(p_1, ..., p_n) \in H$, que sean antiimagen por Δ_{12} del valor a.

Proposición 3.26

Fijado un valor $a \in (\,\omega\,,\,\Omega\,)$, todos los semivalores σ definidos sobre el espacio de juegos G_N que verifican $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a$ son aquellos cuyos coeficientes son solución del sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1}-k_s)p_s = a \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}p_s = 1 \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

junto con las condiciones de no negatividad $p_s \geq 0,\ 1 \leq s \leq n$. Entonces:

(a) El único valor admisible es $a = 0$ y todos los semivalores son solución de $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = 0$ si y sólo si $k_s = 0,\ 2 \leq s \leq n$.

(b) Si algún $k_s \neq 0,\ 2 \leq s \leq n$, las soluciones del sistema (3.5) forman una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-2$, de manera que su intersección con los semiespacios de ecuaciones respectivas $p_s \geq 0,\ 1 \leq s \leq n$, es un convexo que separa H en dos partes: de un lado la región cuyos puntos corresponden a semivalores para los cuales el incremento es superior a a, y de otro la región cuyos puntos corresponden a semivalores para los cuales el incremento es inferior a a.

Demostración

(a) Los coeficientes de la segunda ecuación del sistema (3.5) son todos no nulos, de forma que la matriz de ese sistema tiene rango 1 si y sólo si

$$k_{s+1} - k_s = \lambda\binom{n-1}{s-1}, \quad 1 \leq s \leq n.$$

De aquí, al ser $k_1 = 0,\ k_2 = \lambda\binom{n-1}{0}$, y, en general, $k_s = \lambda\sum_{i=1}^{s-1}\binom{n-1}{i-1},\ 2 \leq s \leq n$. También, $k_{n+1} = 0$, de donde, $-k_n = \lambda\binom{n-1}{n-1}$, es decir, $k_n = -\lambda$. Comparando:

$$k_n = \lambda\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1} = -\lambda, \text{ de donde, necesariamente, } \lambda = 0.$$

Entonces $k_{s+1} - k_s = 0,\ 1 \leq s \leq n$. Por ser $k_1 = 0$ ó $k_{n+1} = 0$ se sigue que, necesariamente, $k_s = 0,\ 2 \leq s \leq n$. En este caso, para que el sistema (3.5) sea compatible sólo es admisible el valor $a = 0$, y todos los semivalores son solución en $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = 0$.

(b) Si algún $k_s \neq 0,\ 2 \leq s \leq n$, el sistema (3.5) tiene rango 2, de manera que su solución es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-2$. Al intersecar esta solución con los semiespacios $p_s \geq 0,\ 1 \leq s \leq n$, se obtiene un convexo, por ser todos ellos convexos, con intersección no vacía; como esta intersección es acotada, se trata de un poliedro en $\mathbb{R}^n$.

El hiperplano de ecuación $\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1} - k_s)p_s = a$ $(\omega < a < \Omega)$ separa en dos partes al llamado "hiperplano de semivalores" H. Si en una de esas dos partes $\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1} - k_s)p_s > a$ y $\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1} - k_s)p_s < a$, en un punto intermedio se tendría $\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1} - k_s)p_s = a$, por linealidad, y la solución del sistema (3.5) no tendría dimensión $n - 2$, lo cual sería una contradicción. □

Consecuencia 3.27
Si algún $k_s \neq 0,\ 2 \leq s \leq n$, en la ecuación $\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a$, los valores mínimo y máximo admisibles como términos independientes a, son, respectivamente, $\omega < 0,\ \Omega > 0$, es decir, siempre podemos encontrar algunos semivalores para los cuales la agrupación en el cociente resulte positiva, mientras que para otros resulte negativa.

Demostración
Según la observación 3.23, $\omega \leq 0,\ \Omega \geq 0$.

Como semivalor, identificamos el valor de Banzhaf con el punto del hiperplano de semivalores que designamos por $Bh = (1/2^{n-1}, ..., 1/2^{n-1})$. Éste no es un vértice del conjunto de oportunidades, ni tampoco forma parte de ninguna arista, es un punto interior, para el que se cumple $\psi_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\psi_1[v] + \psi_2[v]) = 0$. Podemos concluir que sobre el punto Bh no se alcanza ni el máximo ni el mínimo, esto es $\omega \neq 0,\ \Omega \neq 0$, de donde se sigue la afirmación del enunciado. □

Observación 3.28
El "hiperplano de semivalores" H es un convexo de $\mathbb{R}^n$ cuyos vértices son los puntos $V_s,\ 1 \leq s \leq n$, de coordenadas respectivas

$$p_s = \binom{n-1}{s-1}^{-1},\ \ p_t = 0,\ t \neq s.$$

Al hacer intersección con el hiperplano

$$\sum_{s=1}^{n}(k_{s+1} - k_s)p_s = a, \quad \omega < a < \Omega, \tag{3.6}$$

se obtiene otro convexo cuyos vértices son vértices de H o puntos que se encuentran sobre las aristas del propio H. Para determinar cuáles de las aristas de H tienen o no intersección con el hiperplano solución de (3.6) procedemos de la forma siguiente:

(a) ordenamos los vértices de H según el valor obtenido: $[k_{s+1} - k_s]\binom{n-1}{s-1}^{-1}$, $1 \leq s \leq n$, en orden creciente.

(b) colocamos el valor $a \in (\omega\,, \Omega\,)$ en el lugar que por orden le corresponda. Puede entonces suceder que ese valor de a coincida con k valores de ciertos vértices ($0 \leq k \leq n-2$), quedando s valores superiores ($1 \leq s \leq n-1$), y el resto, $n-k-s$, inferiores a a.

El número total de aristas de H queda descompuesto en seis grupos:

$$\binom{n}{2} = \binom{n-k-s}{2} + \binom{s}{2} + \binom{k}{2} + (n-k-s)\,k + k\,s + (n-k-s)\,s.$$

En el primer grupo de aristas no se alcanza el valor a, pues son las que toman en ambos extremos valor inferior a a. En las del segundo grupo tampoco se alcanza a, pues en ambos extremos el valor es superior a a. En las del tercer grupo el valor se alcanza en toda la arista, por alcanzarse en ambos extremos. En las del cuarto grupo el valor a se alcanza sólo en el vértice donde toma el valor mayor. En las del quinto grupo sólo en el vértice donde toma el valor menor. Finalmente, en las del sexto grupo, el valor a se alcanza en un único punto intermedio de cada una, ya que en un vértice toman valor estrictamente menor y en el otro estrictamente mayor que a.

(c) Consideramos ahora los k vértices en los que se alcanza el mismo valor a, que reunen los grupos tercero, cuarto y quinto del apartado anterior, junto a los $(n-k-s)\,s$ puntos de las aristas del sexto grupo. Para determinar estos puntos empleamos un procedimiento análogo al de la observación 3.23.

Supongamos que en la arista de vértices V_s, V_t se toman, respectivamente, los valores p, q, con $\omega \leq p < a < q \leq \Omega$. El punto P correspondiente a esa arista, donde se toma el valor a, tendrá por coordenadas:

$$P = \frac{q-a}{q-p} V_s + \frac{a-p}{q-p} V_t\,.$$

Los $k+(n-k-s)\,s = m$ vértices o intermedios de aristas de H en los que se toma el valor a, son los vértices del convexo en donde, además, se verifica la ecuación (3.6).

(d) Así, todos los semivalores que son solución de

$$\sigma_{\overline{12}}[v_{\overline{12}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_2[v]) = a, \quad \text{con } \omega < a < \Omega,$$

son aquellos cuyos coeficientes se corresponden a las combinaciones lineales convexas de los m puntos obtenidos en el apartado (c):

$$P = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i\,, \ \text{ con } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1; \ \ \lambda_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq m.$$

Ejemplo 3.29
La composición del Parlamento Vasco surgido de las elecciones del año 1998 es la siguiente:

Partido Nacionalista Vasco (PNV), 21 diputados; Partido Popular (PP), 16 diputados; Euskal Herritarrok (EH), 14 diputados; Partido Socialista de Euskadi (PSE), 14 diputados; Eusko Alkartasuna (EA), 6 diputados; Izquierda Unida (IU), 2 diputados; Unidad Alavesa (UA), 2 diputados.

El número total de diputados de esta cámara es de 75, de forma que para conseguir la mayoría absoluta se necesitan, al menos, 38. En consecuencia, la situación de este Parlamento como juego de mayoría ponderada es:

$$[\,38\,;\,21\,,\,16\,,\,14\,,\,14\,,\,6\,,\,2\,,\,2\,].$$

Las conversaciones entre los diferentes grupos políticos han llevado a la formación de una única coalición entre los jugadores 1 -Partido Nacionalista Vasco- y 5 -Eusko Alkartasuna-.

En esta situación, vamos a determinar:

(a) El máximo y el mínimo de la diferencia entre la asignación a la coalición $\{1,5\}$ en el juego cociente y la suma de asignaciones a los jugadores 1 y 5, en el juego inicial.

(b) Todos los semivalores para los cuales el incremento anterior sea nulo.

(a) Determinamos en primer lugar la sucesión de constantes. Como el número de jugadores es $n = 7$, $k_1 = k_8 = 0$. Las demás constantes son

$$k_s = \sum_{S \ni 1,5,\, |S|=s} [v(S) - v(S\setminus\{1\}) - v(S\setminus\{5\}) + v(S\setminus\{1,5\})], \;\; 2 \le s \le 7,$$

obteniéndose los valores:

$$k_2 = 0,\; k_3 = 3,\; k_4 = 4,\; k_5 = -4,\; k_6 = -3,\; k_7 = 0.$$

A partir de aquí:

$$\left\{ [k_{s+1} - k_s] \binom{7-1}{s-1}^{-1} \right\}_{1 \le s \le 7} = \left\{ 0\,,\, \frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{15}\,,\, -\frac{2}{5}\,,\, \frac{1}{15}\,,\, \frac{1}{2}\,,\, 0 \right\}.$$

El mínimo es $-\dfrac{2}{5}$ y se alcanza en $V_4 = (0,0,0,1/20,0,0,0)$.
El máximo es $\dfrac{1}{2}$ y se alcanza en $V_2 = (0,1/6,0,0,0,0,0)$, $V_6 = (0,0,0,0,0,1/6,0)$.

De esta forma, la ecuación $\sigma_{\overline{15}}[v_{\overline{15}}] - (\sigma_1[v] + \sigma_5[v]) = a$ tiene como valores admisibles de a los del intervalo real $[-2/5,\ 1/2\,]$.

(b) El valor $a = 0$ siempre es admisible. Para determinar el convexo de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son coeficientes de semivalores σ para los cuales el incremento es nulo, actuamos como indica la observación 3.28, ordenando los valores en los vértices de menor a mayor:

$$-\frac{2}{5}\,(V_4) \le 0\,(V_1) \le 0\,(V_7) \le \frac{1}{15}\,(V_3) \le \frac{1}{15}\,(V_5) \le \frac{1}{2}\,(V_2) \le \frac{1}{2}\,(V_6)$$

En este caso, $k = 2$ valores de los vértices coinciden con el valor $a = 0$ del incremento: los vértices V_1, V_7 son vértices de la solución.

Por otro lado, $s = 4$ valores de los vértices son superiores al valor $a = 0$, mientras que $n - k - s = 7 - 2 - 4 = 1$ es inferior. Obtenemos entonces cuatro vértices del convexo solución sobre puntos de las aristas:

$$\begin{aligned}
&P_1 \text{ en la arista que une } V_4 \text{ con } V_3: \quad P_1 = (0, 0, 2/35, 1/140, 0, 0, 0),\\
&P_2 \text{ en la arista que une } V_4 \text{ con } V_5: \quad P_2 = (0, 0, 0, 1/140, 2/35, 0, 0),\\
&P_3 \text{ en la arista que une } V_4 \text{ con } V_2: \quad P_3 = (0, 2/27, 0, 1/36, 0, 0, 0),\\
&P_4 \text{ en la arista que une } V_4 \text{ con } V_6: \quad P_4 = (0, 0, 0, 1/36, 0, 2/27, 0).
\end{aligned}$$

Así, todos los puntos P cuyas coordenadas son coeficientes de semivalores que dan incremento nulo son:

$$P = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_7 + \lambda_3 P_1 + \lambda_4 P_2 + \lambda_5 P_3 + \lambda_6 P_4\,, \quad \sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 6,$$

$$P = \left(\lambda_1\,, \frac{2}{27}\lambda_5\,, \frac{2}{35}\lambda_3\,, \frac{1}{140}(\lambda_3 + \lambda_4) + \frac{1}{36}(\lambda_5 + \lambda_6)\,, \frac{2}{35}\lambda_4\,, \frac{2}{27}\lambda_6\,, \lambda_2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 6.$$

Puede comprobarse que para los valores

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/64,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 35/128,\ \lambda_5 = \lambda_6 = 27/128,$$

el punto P correspondiente tiene todas sus coordenadas iguales a $1/2^6$, que son los coeficientes del valor de Banzhaf. Este punto tenía que pertenecer al convexo de incremento nulo, ya que el valor de Banzhaf siempre da incremento nulo para cualquier juego y cualquier coalición bipersonal única, esto es:

$$\psi_{\overline{15}}[v_{\overline{15}}] - (\psi_1[v] + \psi_5[v]) = 0.$$

4

Cooperación parcial

4.1 El juego incremento

Consideramos juegos cooperativos del espacio G_N. Denotamos como $GR(N)$ el conjunto de todos los grafos con vértices en los elementos del conjunto de jugadores N.

Siguiendo el modelo propuesto por Myerson (1977), cada posible situación de cooperación parcial entre los jugadores de N viene determinada por un grafo de cooperación $g \in GR(N)$. Dos jugadores cualesquiera de N pueden colaborar entre sí si están unidos directamente por una arista del grafo g o, dentro de una coalición S, si están están unidos a través de un camino que tenga los otros jugadores intermedios dentro de S.

Así, el juego $v \in G_N$ modificado por la estructura de cooperación del grafo g se define por:

$$v/g(S) = \sum_{T \in S/g} v(T), \quad S \subseteq N,$$

donde S/g denota la partición en componentes conexas por el grafo g de la coalición S.

Queremos estudiar la relación entre el juego v/g y el juego $v/(g\setminus k\!:\!l)$, donde al grafo g se le ha suprimido una de sus aristas $k\!:\!l$. Análogamente:

$$v/(g\setminus k\!:\!l)(S)=\sum_{T'\in S/(g\setminus k:l)} v(T'),\quad S\subseteq N,\ k\!:\!l\in g.$$

Definición 4.1
Llamamos juego incremento de v por la supresión de la arista $k\!:\!l$ del grafo g, y lo designamos por $\Delta v_{g,k:l}$, al juego perteneciente a G_N definido por:

$$\Delta v_{g,k:l}(S)=v/g(S)-v/(g\setminus k\!:\!l)(S),\quad S\subseteq N.$$

Este juego recoge la variación entre ambos juegos modificados.

Proposición 4.2
Si T_{kl} denota la componente conexa de S/g donde se encuentran k y l por el grafo g y T_k, T_l las componentes conexas de $S/(g\setminus k:l)$ donde se encuentran, respectivamente, k y l por el grafo $g\setminus k\!:\!l$, entonces:

$$\Delta v_{g,k:l}(S)=\begin{cases} v(T_{kl})-[v(T_k)+v(T_l)] & \text{si } T_{kl} \text{ queda desconectada} \\ & \text{al suprimir la arista } k\!:\!l, \\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Las componentes T_{kl}, T_k, T_l dependen de cada S, $S\subseteq N$.

Demostración
Al ser $\Delta v_{g,k:l}(S)=v/g(S)-v/(g\setminus k\!:\!l)(S)$, $S\subseteq N$, hemos de evaluar los juegos de la derecha de la igualdad según los casos que puedan presentarse.

(1) Si $\{k,l\}\nsubseteq S$, la supresión de la arista $k\!:\!l$ no crea en S nuevas componentes conexas, así que $v/g(S)=v/(g\setminus k\!:\!l)(S)$.

(2) Si $\{k,l\}\subseteq S$ y denotamos por $T_{kl}\in S/g$ la componente conexa de S en la que se encuentran k y l, ya que están unidos por la arista $k:l\in g$, sólo puede suceder que la supresión de esa arista desconecte T_{kl} en dos componentes conexas de $S/(g\setminus k\!:\!l)$ que denotamos, respectivamente, T_k y T_l. Así se tiene:

$$\begin{aligned} v/g(S) - v/(g \setminus k:l)(S) &= \sum_{T \in S/g} v(T) - \sum_{T' \in S/(g \setminus k:l)} v(T') \\ &= v(T_{kl}) - [v(T_k) + v(T_l)]. \end{aligned}$$

El resto de componentes conexas de S/g no pueden verse alteradas por la supresión de la arista $k:l$ ya que no está contenida en esas componentes. De la igualdad anterior se sigue la expresión del enunciado de la propiedad. □

Observación 4.3
La función $\Delta v_{g,k:l}(S)$ sólo ha de ser evaluada en los 2^{n-2} subconjuntos tales que $\{k,l\} \subseteq S$; en los restantes, $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, $S \not\supseteq \{k,l\}$. Además, si dentro de algún S con $\{k,l\} \subseteq S$ existe algún camino alternativo a $k:l$, también, $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$.

4.2 Semivalores y grafos de cooperación

En esta sección nos proponemos estudiar las situaciones de cooperación parcial modelizadas por grafos de cooperación respecto a las asignaciones que los diferentes semivalores proponen para cada juego cooperativo. Este estudio se realiza sobre el juego incremento definido en la sección precedente, siendo el que pone de manifiesto las propiedades que se quiere obtener.

Proposición 4.4
Si $v \in G_N$, $g \in GR(N)$ y σ es un semivalor definido sobre G_N de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, para la arista $k:l \in g$ se cumple:

(a) $\sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = \sigma_l[\Delta v_{g,k:l}] = \displaystyle\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni k,l}} p_s \Delta v_{g,k:l}(S).$

(b) $\sigma_i[\Delta v_{g,k:l}] = \displaystyle\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i,k,l}} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i\})], \quad i \neq k,l.$

Demostración
(a) Para $k \in N$, donde $k\!:\!l$ es la arista que se suprime:

$$\sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = \sum_{S:k\in S} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S\setminus\{k\})].$$

En la propiedad anterior hemos visto $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, si $\{k,l\} \not\subseteq S$, así basta que el sumatorio se extienda a las coaliciones S tales que $S \ni k, l$. Además, dentro del sumatorio, $S\setminus\{k\}$ no contiene a k, luego $\Delta v_{g,k:l}(S\setminus\{k\}) = 0$, quedando:

$$\sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni k,l}} p_s \Delta v_{g,k:l}(S).$$

Análoga expresión puede probarse para $\sigma_l[\Delta v_{g,k:l}]$.

(b) Para $i \in N$, $i \neq k, l$:

$$\sigma_i[\Delta v_{g,k:l}] = \sum_{S:i\in S} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S\setminus\{i\})].$$

Igual que antes $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, si $\{k,l\} \not\subseteq S$, así que el sumatorio se extiende únicamente a los 2^{n-3} subconjuntos S tales que $i, k, l \in S$. $\square$

Teorema 4.5
Dado $v \in G_N$, si σ es cualquier semivalor definido sobre G_N de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, entonces las reglas de asignación definidas por:

$$\begin{array}{rccc} Y_\sigma : & GR(N) & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & g & \rightarrow & \sigma[v/g] \end{array}$$

(a) verifican la propiedad de justicia,

(b) verifican la propiedad de estabilidad, para juegos superaditivos.

Demostración
(a) La propiedad de justicia para una regla de asignación definida según un semivalor σ supone que se cumpla:

$$\sigma_k[v/g] - \sigma_k[v/(g\setminus k\!:\!l)] = \sigma_l[v/g] - \sigma_l[v/(g\setminus k\!:\!l)], \quad k\!:\!l \in g,$$

o lo que es lo mismo:

$$\sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = \sigma_l[\Delta v_{g,k:l}], \quad k:l \in g,$$

estando esta igualdad probada en el apartado (a) de la proposición 4.4.

(b) Para probar la estabilidad para juegos superaditivos basta considerar que si la supresión de la arista $k:l$ crea dos nuevas componentes conexas T_k y T_l en S, al ser $T_k \cup T_l = T_{kl}$, $T_k \cap T_l = \emptyset$, se cumple por la superaditividad de v:

$$v(T_{kl}) = v(T_k \cup T_l) \geq v(T_k) + v(T_l).$$

De aquí:

$$\sigma_k[v/g] - \sigma_k[v/(g \setminus k:l)] = \sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni k,l}} p_s \Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0,$$

ya que si S no queda desconectado $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, mientras que si queda desconectado $\Delta v_{g,k:l}(S) = v(T_{kl}) - [v(T_k) + v(T_l)] \geq 0$, y en cualquier caso $p_s \geq 0$ para $1 \leq s \leq n$.

La desigualdad $\sigma_k[v/g] - \sigma_k[v/(g \setminus k:l)] \geq 0$ supone que el jugador k obtiene un incremento no positivo al suprimirse la arista que lo une con el jugador l, si v es superaditivo. El mismo resultado puede probarse para el jugador l, de donde se sigue la estabilidad de la asignación por σ. □

Observación 4.6
En la definición del juego incremento de v por la supresión de la arista $k:l$ del grafo g, $\Delta v_{g,k:l}(S) = v/g(S) - v/(g \setminus k:l)(S)$, $S \subseteq N$, si comparamos los pagos que un semivalor σ asigna a un juego y a otro, podemos escribir:

$$\sigma_i[v/(g \setminus k:l)] - \sigma_i[v/g] = -\sigma_i[\Delta v_{g,k:l}], \quad i \in N.$$

Si designamos por $\Delta\sigma_i(v, g, k:l)$ el incremento de asignación al jugador $i \in N$ al pasar del juego v/g al juego $v/(g \setminus k:l)$, podemos escribir:

$$\Delta\sigma(v, g, k:l) = -\sigma[\Delta v_{g,k:l}].$$

Es decir, el incremento de asignación por un determinado semivalor al pasar del grafo g al grafo $g \setminus k:l$ es el opuesto de la distribución de pagos al juego incremento por el semivalor que se considere.

Ejemplo 4.7
Consideramos el juego $v \in G_N$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, definido de la siguiente manera: $v(\{i\}) = 0$, $v(\{i, j\}) = \max\{i, j\}$, $v(\{i, j, k\}) = i + j + k$, $i, j, k \in N$, $v(N) = 10$. Supongamos que en N está definido el grafo de cooperación

$$g = \{1:2, 2:3, 3:4, 4:1\}$$

y que de éste suprimimos la arista $1:2$. Queremos estudiar:

(a) la variación de asignación por cualquier semivalor σ definido sobre juegos cooperativos de cuatro jugadores,
(b) la variación para los casos particulares valor de Banzhaf y valor de Shapley.

(a) El juego incremento $\Delta v_{g,1:2}$ está definido sobre las coaliciones de N y lo evaluamos sobre aquellas coaliciones S con $\{1, 2\} \subseteq S$. Para el resto de coaliciones $\Delta v_{g,1:2}(S) = 0$, $S \not\supseteq \{1, 2\}$. En total efectuamos 4 valoraciones que podemos recoger en una tabla:

S	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	N
$\Delta v_{g,1:2}(S)$	2	3	3	0

$\Delta v_{g,1:2}(N) = 0$ ya que N no queda desconectado al suprimir la arista $1:2$.

Según la observación 4.6, la variación de asignación por cualquier semivalor σ de coeficientes (p_1, p_2, p_3, p_4) para el primer jugador es:

$$\Delta\sigma_1(v, g, 1:2) = -\left[p_2 \Delta v_{g,1:2}(\{1, 2\}) + p_3 \Delta v_{g,1:2}(\{1, 2, 3\}) + p_3 \Delta v_{g,1:2}(\{1, 2, 4\})\right],$$

$$\Delta\sigma_1(v, g, 1:2) = -2p_2 - 6p_3.$$

Por la condición de justicia: $\Delta\sigma_2(v, g, 1:2) = \Delta\sigma_1(v, g, 1:2) = -2p_2 - 6p_3$.

El juego v que hemos definido es superaditivo: se observa como los dos jugadores desconectados obtienen siempre un incremento no positivo, sea cual sea el semivalor con el que se trabaje.

Para los otros jugadores:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_3(v, g, 1:2) \;=\; - & \;\{p_3\left[\Delta v_{g,1:2}(\{1, 2, 3\}) - \Delta v_{g,1:2}(\{1, 2\})\right] + \\ & + p_4\left[\Delta v_{g,1:2}(N) - \Delta v_{g,1:2}(\{1, 2, 4\})\right]\},\end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_3(v, g, 1\!:\!2) = -p_3 + 3p_4.$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_4(v, g, 1\!:\!2) \quad = - \quad & \{p_3 \left[\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,4\}) - \Delta v_{g,1:2}(\{1,2\})\right] + \\ & +p_4 \left[\Delta v_{g,1:2}(N) - \Delta v_{g,1:2}(\{1,2,3\})\right]\},\end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_4(v, g, 1\!:\!2) = -p_3 + 3p_4.$$

De esta forma, para cualquier semivalor σ, el vector de incrementos por la supresión de la arista $1\!:\!2$ es:

$$\Delta\sigma(v, g, 1\!:\!2) = (-2p_2 - 6p_3,\ -2p_2 - 6p_3,\ -p_3 + 3p_4,\ -p_3 + 3p_4).$$

(b) En concreto, para el valor de Banzhaf:

$$\Delta\psi(v, g, 1\!:\!2) = (-1,\ -1,\ 1/4,\ 1/4).$$

El pago que el valor de Banzhaf asigna a los jugadores en el juego v/g es:

$$\psi[v/g] = (21/8,\ 21/8,\ 27/8,\ 31/8).$$

Para obtener la distribución correspondiente al juego $v/(g\setminus 1\!:\!2)$ bastará sumar el incremento correspondiente a la supresión de la arista, esto es:

$$\psi[v/(g\setminus 1\!:\!2)] = \psi[v/g] + \Delta\psi(v, g, 1\!:\!2) = (13/8,\ 13/8,\ 29/8,\ 33/8).$$

Para el valor de Shapley:

$$\Delta\phi(v, g, 1\!:\!2) = (-2/3,\ -2/3,\ 2/3,\ 2/3).$$

Como que el pago que reciben los jugadores de N en el juego v/g es:

$$\phi[v/g] = (23/12,\ 25/12,\ 33/12,\ 39/12),$$

en el juego $v/(g\setminus 1\!:\!2)$ será:

$$\phi[v/(g\setminus 1\!:\!2)] = \phi[v/g] + \Delta\phi(v, g, 1\!:\!2) = (15/12,\ 17/12,\ 41/12,\ 47/12).$$

Proposición 4.8
Supongamos $v \in S_N$, juego simple con n jugadores, $n \geq 3$, y el grafo de cooperación inicial el grafo completo g^N. Si se suprime una arista cualquiera $k:l$, entonces, para cualquier semivalor σ de coeficientes $p_s, 1 \leq s \leq n$:

(a) $\{k,l\} \notin W \;\Rightarrow\; \sigma[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma[v]$.

(b) $\{k,l\} \in W^m \;\Rightarrow\;$
$$\sigma_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i[v] - p_2, \qquad i = k,l,$$
$$\sigma_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i[v] + p_3, \qquad i \neq k,l,$$

donde W indica el conjunto de coaliciones ganadoras, $v(S) = 1$, del juego $v \in S_N$ y W^m indica el conjunto de coaliciones ganadoras minimales de v.

Demostración
En cualquier caso, si del grafo completo g^N se suprime una arista cualquiera $k\!:\!l$, el único subconjunto que queda desconectado de entre los que contienen k,l es el propio $\{k,l\}$. Cualquier otra coalición conteniendo k,l y otro jugador no queda desconectada.

(a) Si $\{k,l\} \notin W$, $\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\}) = v(\{k,l\}) - [v(\{k\}) + v(\{l\})] = 0$; de aquí:

$$\Delta\sigma(v, g^N, k\!:\!l) = -\sigma[\Delta v_{g^N,k:l}] = 0,$$

y se sigue la igualdad del enunciado.

(b) Si $\{k,l\} \in W^m$, $\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\}) = v(\{k,l\}) - [v(\{k\}) + v(\{l\})] = 1$; entonces:

$$\Delta\sigma_i(v, g^N, k\!:\!l) = -\sigma_i[\Delta v_{g^N,k:l}] = -\sum_{S \ni k,l} p_s \Delta v_{g^N,k:l}(S) = -p_2, \quad i = k,l,$$

de donde se sigue la igualdad del enunciado para $i = k,l$.

Para $i \neq k,l$:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i(v, g^N, k\!:\!l) &= -\sigma_i[\Delta v_{g^N,k:l}] = -\sum_{S \ni k,l,i} p_s[\Delta v_{g^N,k:l}(S) - \Delta v_{g^N,k:l}(S \setminus \{i\})] \\ &= -p_3[\Delta v_{g^N,k:l}(\{i,k,l\}) - \Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\})] = p_3,\end{aligned}$$

siendo los demás incrementos nulos para cualquier S que contenga i, k, l y sea de cardinal superior. $\square$

Casos particulares 4.9
En las condiciones de la proposición anterior, para el valor de Shapley ϕ y para el valor de Banzhaf ψ se cumple:

(a) $\{k, l\} \notin W \;\Rightarrow\; \phi[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \phi[v],$

$$\psi[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \psi[v].$$

(b) $\{k, l\} \in W^m \;\Rightarrow\; \phi_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \phi_i[v] - \dfrac{1}{n(n-1)}\,, \qquad i = k, l,$

$$\phi_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \phi_i[v] + \frac{2}{n(n-1)(n-2)}\,, \qquad i \neq k, l,$$

$$\psi_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \psi_i[v] - \frac{1}{2^{n-1}}\,, \qquad i = k, l,$$

$$\psi_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \psi_i[v] + \frac{1}{2^{n-1}}\,, \qquad i \neq k, l.$$

Ejemplo 4.10
La composición del Parlamento de Cataluña resultante de las elecciones celebradas el 19 de noviembre de 1995 fue la siguiente: Convergència i Unió CiU, 60 diputados; Partit dels Socialistes de Catalunya PSC, 34 diputados; Partit Popular PP, 17 diputados; Iniciativa per Catalunya-Els Verds IC, 13 diputados; Esquerra Republicana de Catalunya ERC, 11 diputados.
Como juego de mayoría ponderada, la situación del parlamento de Cataluña viene descrita en la forma:

$$[\,68\,;\,60\,,\,34\,,\,17\,,\,13\,,\,11\,].$$

Para este juego el valor de Shapley correspondiente es:

$$\phi[v] = (0.6,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1),$$

y el valor de Banzhaf:

$$\psi[v] = (7/8,\ 1/8,\ 1/8,\ 1/8,\ 1/8).$$

Estos son los valores correspondientes a las asignaciones para el juego v con el grafo de cooperación completo, es decir, v/g^N.

Queremos estudiar cuáles serían los efectos de la supresión de una arista del grafo de cooperación. En concreto, suprimimos la arista $1{:}4$. Esta supresión supone la no colaboración lateral entre los jugadores 1 (CiU) y 4 (IC) documentada, en su momento, en los medios de comunicación.

Según lo que hemos visto, las asignaciones por el valor de Shapley o por el valor de Banzhaf sufrirán las siguientes variaciones:

$$\begin{aligned}
\phi[v/(g^N \setminus 1{:}4)] &= \phi[v/g^N] + \Delta\phi(v, g^N, 1{:}4)\\
&= (0.6,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1) + (-0.05,\ 0.03,\ 0.03,\ -0.05,\ 0.03)\\
&= (0.55,\ 0.13,\ 0.13,\ 0.05,\ 0.13),\\
\psi[v/(g^N \setminus 1{:}4)] &= \psi[v/g^N] + \Delta\psi(v, g^N, 1{:}4)\\
&= (7/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8) + (-1/16, 1/16, 1/16, -1/16, 1/16)\\
&= (13/16,\ 3/16,\ 3/16,\ 1/16,\ 3/16).
\end{aligned}$$

Como puede observarse, en ambos casos, la pérdida es la misma para los jugadores 1 y 4, por la condición de justicia. Sin embargo, proporcionalmente, el jugador con menor poder queda más afectado por la no cooperación.

Proposición 4.11
Supongamos $v \in S_N$, juego simple con n jugadores, $n \geq 3$, y el grafo de cooperación inicial $g = \{1 : j,\ 2 \leq j \leq n\}$, grafo radial con centro en 1 y satélites $2, ..., n$. Si se suprime una arista cualquiera como $1 : 2$, entonces, para cualquier semivalor σ de coeficientes $p_s, 1 \leq s \leq n$:

(a) Si las coaliciones ganadoras minimales son aquellas que contienen el punto central 1 y tienen cardinal m, $2 \leq m < n$:

$$\Delta\sigma_1(v, g, 1{:}2) = \Delta\sigma_2(v, g, 1{:}2) = -\tbinom{n-2}{m-2} p_m,$$

$$\Delta\sigma_i(v, g, 1{:}2) = -\tbinom{n-3}{m-3} p_m + \tbinom{n-3}{m-2} p_{m+1}, \qquad i \neq 1, 2.$$

(b) Si la única coalición ganadora minimal es N:

$$\Delta\sigma_i(v, g, 1{:}2) = -p_n, \qquad \forall i \in N$$

Demostración
Hemos de evaluar los valores de $\Delta v_{g,1:2}(S)$ para las diferentes coaliciones. Sabemos que $\Delta v_{g,1:2}(S) = 0$ si $S \not\supseteq \{1,2\}$.
El resto de coaliciones conteniendo a $\{1,2\}$ son de alguno de los tipos siguientes:

$$\begin{gathered} S = \{1,2\}, \text{ una única coalición, } \binom{n-2}{0} = 1, \\ S = \{1,2,q\}, \text{ con } q \in N \diagdown \{1,2\}, \text{ en número de } \binom{n-2}{1}, \\ \cdots \\ S = \{1,2,q_1,...,q_{m-2}\}, \text{ con } q_1,...,q_{m-2} \in N \diagdown \{1,2\}, \text{ en número de } \binom{n-2}{m-2}, \\ \cdots \\ S = N, \text{ en número de } \binom{n-2}{n-2} = 1. \end{gathered}$$

(a) Si las coaliciones ganadoras minimales son de cardinal m, los únicos subconjuntos para los que $\Delta v_{g,1:2}(S) \neq 0$ son exactamente los del tipo $S = \{1,2,q_1,...,q_{m-2}\}$:

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,q_1,...,q_{m-2}\}) = 1, \qquad q_1,...,q_{m-2} \in N \diagdown \{1,2\}.$$

Estas coaliciones pasan de ser ganadoras a ser perdedoras, al suprimirse la arista $1:2$. Las coaliciones de cardinal inferior no dejan de ser perdedoras al suprimir $1{:}2$, así que su incremento es nulo, igual que las de cardinal superior a m, que no dejan de ser ganadoras tras la supresión.

Según estas consideraciones, para $i = 1,2$:

$$\Delta\sigma_i(v, g, 1{:}2) = -p_m \sum_{q_1,..,q_{m-2} \in N \diagdown \{1,2\}} \Delta v_{g,1:2}(\{1,2,q_1,...,q_{m-2}\}) = -\binom{n-2}{m-2} p_m,$$

siendo esta expresión válida para $2 \leq m \leq n$.

Ahora, para $i \neq 1,2$ y $2 \leq m \leq n-1$, hemos de considerar aquellas coaliciones que contengan $\{1,2,i\}$:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i(v,g,1\!:\!2) \;=\; & -p_m \sum_{q_1,..,q_{m-3}\in N\setminus\{1,2,i\}} [\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,i,q_1,...,q_{m-3}\})- \\ & \qquad\qquad -\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,q_1,...,q_{m-3}\})]- \\ & -p_{m+1} \sum_{q_1,..,q_{m-2}\in N\setminus\{1,2,i\}} [\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,i,q_1,...,q_{m-2}\})- \\ & \qquad\qquad -\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,q_1,...,q_{m-2}\})].\end{aligned}$$

En el primer sumatorio de esta expresión $q_1,..,q_{m-3} \in N\setminus\{1,2,i\}$, así que el número de sumandos es de $\binom{n-3}{m-3}$ y $\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,q_1,...,q_{m-3}\}) = 0$, puesto que el cardinal de estas coaliciones es $m-1$.
En el segundo sumatorio $q_1,..,q_{m-2} \in N\setminus\{1,2,i\}$, así que el número de sumandos es de $\binom{n-3}{m-2}$ y $\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,i,q_1,...,q_{m-2}\}) = 0$, puesto que el cardinal de estas coaliciones es $m+1$.
En consecuencia, la expresión anterior se transforma en:

$$\Delta\sigma_i(v,g,1\!:\!2) = -\tbinom{n-3}{m-3}p_m + \tbinom{n-3}{m-2}p_{m+1}, \qquad i \neq 1,2;\ 2 \leq m \leq n-1.$$

(b) Para el caso en que la única coalición ganadora minimal es N, la expresión del incremento para los jugadores extremos de la arista que se suprime vista en el apartado (a), es también válida para $m = n$, quedando: $\Delta\sigma_i(v,g,1\!:\!2) = -p_n$, $i = 1,2$.

Para $i \neq 1,2$ y $m = n$, la expresión del incremento queda reducida a:

$$\Delta\sigma_i(v,g,1\!:\!2) = -p_n[\Delta v_{g,1:2}(N) - \Delta v_{g,1:2}(N\setminus\{i\})] = -p_n,$$

lo cual concluye la demostración del enunciado. $\square$

Este tipo de grafos aparece en diversos estudios de sistemas de comunicación. Desde un punto central están comunicados diferentes periféricos; la supresión de una arista de cooperación supone la pérdida de comunicación entre el punto central y el satélite.
El significado que puede atribuirse a las coaliciones ganadoras minimales es el siguiente: para $m = 2$ supone que se consigue emitir desde el centro a cualquier

periférico; para $m = 3$ supone que se consigue emitir enlazando dos periféricos a través del punto central, actuando éste como emisor-receptor de, por ejemplo, un sistema de radioenlaces; para un m cualquiera supondría una generalización del caso $m = 3$, donde por problemas de operatividad o de costes se requiere asegurar un número mínimo m de puntos enlazados.
El estudio de los incrementos de asignación por un determinado semivalor al suprimir una arista de cooperación de uno de estos grafos radiales supone considerar cómo deben distribuirse los efectos de la pérdida de comunicación entre los agentes que intervienen en el sistema.

Caso particular 4.12
Estando en las condiciones de la proposición anterior, la supresión de la arista $1:2$ del grafo radial de centro 1 supone para el valor de Shapley los siguientes incrementos.

(a) Para coaliciones ganadoras minimales de cardinal m, $2 \leq m < n$:

$$\Delta\phi_1(v, g, 1\!:\!2) = \Delta\phi_2(v, g, 1\!:\!2) = -\frac{m-1}{n(n-1)},$$

$$\Delta\phi_i(v, g, 1\!:\!2) = \frac{2(m-1)}{n(n-1)(n-2)}, \qquad i \neq 1, 2.$$

(b) Si la única coalición ganadora minimal es N:

$$\Delta\phi_i(v, g, 1\!:\!2) = -\frac{1}{n}, \qquad \forall i \in N.$$

4.3 Normalización aditiva y grafos de cooperación

En la sección anterior hemos probado que, en las situaciones de cooperación parcial modelizadas por grafos de cooperación definidos sobre el conjunto de vértices formado por los jugadores de un juego cooperativo, todo semivalor permite obtener una regla de asignación justa, que además es estable para juegos superaditivos.

Está probado en Myerson (1977) que el único vector de pagos que da lugar a una regla de asignación justa y eficiente por componentes conexas es el valor de Shapley. Así, para el caso de los semivalores ya estudiado, no se podía pretender la eficiencia por componentes conexas, puesto que sólo el valor de Shapley la verifica. Para intentar paliar de alguna manera esta carencia recurrimos a la normalización aditiva de los semivalores.

La normalización aditiva de una solución consiste en eliminar el exceso de la suma de los pagos a los jugadores respecto a la utilidad que puede obtener en el juego la coalición total. La eliminación del exceso se obtiene descontando a cada jugador una misma cantidad, es decir, la n-ésima parte de ese exceso. La expresión concreta de la normalización aditiva de un semivalor adopta en su desarrollo esquemas similares a los que se ofrecen en Ruiz et al. (1995); ahora los resultados se orientan al tratamiento de la supresión de una arista en un grafo de cooperación.

Definición 4.13
Para cualquier semivalor σ definido sobre el espacio de juegos cooperativos G_N se define su normalización aditiva σ^a en la forma

$$\begin{array}{rccc} \sigma^a: & G_N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & v & \rightarrow & \sigma^a[v] \end{array}$$

donde $\sigma_i^a[v] = \sigma_i[v] + \dfrac{1}{n}\left[\ v(N) - \sum_{j\in N} \sigma_j[v]\ \right]$, para cada $i \in N$.

Lema 4.14
Para cualquier semivalor σ definido sobre los juegos de G_N cuyos coeficientes sean $p_s, 1 \leq s \leq n$, se verifica la siguiente relación:

$$\sum_{S\ni j} p_s v(S\setminus\{j\}) - \sum_{S\ni i} p_s v(S\setminus\{i\}) = \sum_{\substack{S\ni i\\ S\neq N}} p_{s+1} v(S) - \sum_{\substack{S\ni j\\ S\neq N}} p_{s+1} v(S).$$

Demostración

$$\sum_{S\ni j} p_s v(S\setminus\{j\}) - \sum_{S\ni i} p_s v(S\setminus\{i\}) = \sum_{S\ni i,j} p_s v(S\setminus\{j\}) + \sum_{\substack{S: i\notin S\\ j\in S}} p_s v(S\setminus\{j\}) -$$

$$- \sum_{S \ni i,j} p_s v(S \setminus \{i\}) - \sum_{\substack{S: i \in S \\ j \notin S}} p_s v(S \setminus \{i\}),$$

$$\sum_{S \ni j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i} p_s v(S \setminus \{i\}) = \sum_{S \ni i,j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i,j} p_s v(S \setminus \{i\}).$$

Si en el primer sumatorio de la derecha de la igualdad llamamos $S' = S \setminus \{j\}$ y en el segundo $S' = S \setminus \{i\}$:

$$\sum_{S \ni j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i} p_s v(S \setminus \{i\}) = \sum_{\substack{S': i \in S' \\ j \notin S'}} p_{s'+1} v(S') - \sum_{\substack{S': i \notin S' \\ j \in S'}} p_{s'+1} v(S').$$

Si en esta igualdad se suma y resta $\displaystyle\sum_{S: i,j \in S, S \neq N} p_{s+1} v(S)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{S \ni j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i} p_s v(S \setminus \{i\}) &= \sum_{\substack{S: i \in S \\ j \notin S}} p_{s+1} v(S) + \sum_{\substack{S \ni i,j \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S) - \\ &\quad - \sum_{\substack{S \ni i,j \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S) - \sum_{\substack{S: i \notin S \\ j \in S}} p_{s+1} v(S), \end{aligned}$$

llegando a la fórmula del enunciado:

$$\sum_{S \ni j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i} p_s v(S \setminus \{i\}) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S) - \sum_{\substack{S \ni j \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S). \quad \square$$

Proposición 4.15
La normalización aditiva σ^a de un semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, definido sobre el espacio de juegos G_N obedece a la siguiente expresión:

$$\sigma_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + a_i^\sigma(v) - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} a_j^\sigma(v), \quad \text{para cada } i \in N, \ \forall v \in G_N,$$

donde

$$a_i^\sigma(v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (p_s + p_{s+1}) v(S).$$

Demostración
En la definición de $\sigma_i^a[v]$, $i \in N$, sustituimos cada expresión con $\sigma_i[v]$ en función de los coeficientes p_s del semivalor y agrupamos en un sumatorio:

$$\sigma_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i} p_s[v(S) - v(S \setminus \{i\})] - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} \sum_{S \ni j} p_s[v(S) - v(S \setminus \{j\})],$$

$$\sigma_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left\{ \sum_{S \ni i} p_s[v(S) - v(S \setminus \{i\})] - \sum_{S \ni j} p_s[v(S) - v(S \setminus \{j\})] \right\}.$$

Si ahora desarrollamos cada uno de los sumandos en el sumatorio para $j \in N \setminus \{i\}$ y aplicamos el lema previo:

$$\sum_{S \ni i} p_s v(S) - \sum_{S \ni j} p_s v(S) + \sum_{S \ni j} p_s v(S \setminus \{j\}) - \sum_{S \ni i} p_s v(S \setminus \{i\}) =$$
$$= \sum_{S \ni i} p_s v(S) - \sum_{S \ni j} p_s v(S) + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S) - \sum_{\substack{S \ni j \\ S \neq N}} p_{s+1} v(S) =$$
$$= \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (p_s + p_{s+1}) v(S) - \sum_{\substack{S \ni j \\ S \neq N}} (p_s + p_{s+1}) v(S) = a_i^\sigma(v) - a_j^\sigma(v).$$

Así la fórmula para $\sigma_i^a[v]$, $i \in N$, queda:

$$\sigma_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[a_i^\sigma(v) - a_j^\sigma(v) \right] = \frac{v(N)}{n} + a_i^\sigma(v) - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} a_j^\sigma(v). \quad \square$$

Caso particular 4.16
Para la normalización aditiva del valor de Banzhaf se tiene:

$$p_s = \frac{1}{2^{n-1}},\ 1 \leq s \leq n \quad \Rightarrow \quad a_i^\psi(v) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} v(S) = \frac{1}{2^{n-2}} \left[\sum_{S \ni i} v(S) - v(N) \right].$$

La fórmula obtenida da lugar a la siguiente, para cada $i \in N$:

$$\psi_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{2^{n-2}} \left[\sum_{S \ni i} v(S) - v(N) \right] - \frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j \in N} \left[\sum_{S \ni j} v(S) - v(N) \right].$$

Si en este caso en concreto llamamos $a_i(v) = \sum_{S \ni i} v(S)$, podemos escribir:

$$\psi_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{2^{n-2}} a_i(v) - \frac{1}{n}\frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j \in N} a_j(v), \quad i \in N,$$

$$\psi_i^a[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \left[\; n a_i(v) - \sum_{j \in N} a_j(v) \; \right] = \lambda_i[v], \quad i \in N,$$

siendo ésta la expresión obtenida para el λ-prenucleolo, que es la normalización aditiva del valor de Banzhaf.

Proposición 4.17
Si $v \in G_N$, $g \in GR(N)$, σ es un semivalor definido sobre G_N de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, y la arista $k\!:\!l \in g$, entonces:

(a) para $i = k, l$:

$$\sigma_i^a[v/(g \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v/g] - \frac{1}{n}\, \Delta v_{g,k:l}(N) - \\ -\frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{k,l\}} \left[\; \sum_{S \ni k,l, S \not\ni j} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g,k:l}(S) \; \right],$$

(b) para $i \neq k, l$:

$$\sigma_i^a[v/(g \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v/g] - \frac{1}{n}\, \Delta v_{g,k:l}(N) - \\ -\frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[\; \sum_{S \ni i,k,l, S \not\ni j} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g,k:l}(S) - \sum_{S \ni j,k,l, S \not\ni i} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g,k:l}(S) \; \right].$$

Demostración
Las expresiones para los pagos que la normalización aditiva de un semivalor σ asigna a un jugador cualquiera $i \in N$ en el juego v/g y en el juego $v/(g \setminus k\!:\!l)$ son, respectivamente:

$$\sigma_i^a[v/g] = \frac{v/g(N)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[a_i^\sigma(v/g) - a_j^\sigma(v/g) \right],$$

$$\sigma_i^a[v/(g \setminus k\!:\!l)] = \frac{v/(g \setminus k\!:\!l)(N)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[a_i^\sigma(v/(g \setminus k\!:\!l)) - a_j^\sigma(v/(g \setminus k\!:\!l)) \right].$$

Comparando una expresión con la otra y teniendo en cuenta que el juego incremento de v por la supresión de la arista $k:l$ del grafo g está definido para cada $S \subseteq N$ en la forma $\Delta v_{g,k:l}(S) = v/g(S) - v/(g\setminus k:l)(S)$, podemos escribir:

$$\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)] = \sigma_i^a[v/g] - \frac{1}{n}\Delta v_{g,k:l}(N) -$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \left\{a_i^\sigma(v/g) - a_i^\sigma(v/(g\setminus k:l)) - \left[a_j^\sigma(v/g) - a_j^\sigma(v/(g\setminus k:l))\right]\right\}.$$

Dentro del sumatorio aparecen expresiones como la siguiente:

$$a_j^\sigma(v/g) - a_j^\sigma(v/(g\setminus k:l)) = \sum_{\substack{S\ni j\\ S\neq N}} (p_s + p_{s+1})[v/g(S) - v/(g\setminus k:l)(S)] =$$

$$= \sum_{\substack{S\ni j\\ S\neq N}} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S) = \sum_{\substack{S\ni j,k,l\\ S\neq N}} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S).$$

De esta forma la expresión que relaciona los pagos en los juegos v/g y $v/(g\setminus k:l)$, es, para cualquier jugador $i \in N$:

$$\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)] = \sigma_i^a[v/g] - \frac{1}{n}\Delta v_{g,k:l}(N) -$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \Bigg[\sum_{S\ni i,k,l,S\neq N} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S) - \sum_{S\ni j,k,l,S\neq N} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S)\Bigg]. \tag{4.1}$$

(a) Para el jugador $i = k$, uno de los vértices de la arista que se suprime, el sumatorio en la fórmula anterior se extiende a los términos con $j \in N\setminus\{k\}$; pero cuando $j = l$ el término correspondiente se anula, ya que ambos sumatorios en ese término son iguales. Por lo tanto:

$$\sigma_k^a[v/(g\setminus k:l)] = \sigma_k^a[v/g] - \frac{1}{n}\Delta v_{g,k:l}(N) -$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{k,l\}} \Bigg[\sum_{S\ni k,l,S\neq N} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S) - \sum_{S\ni j,k,l,S\neq N} (p_s + p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S)\Bigg],$$

$$\sigma_k^a[v/(g\setminus k\!:\!l)] = \sigma_k^a[v/g] - \frac{1}{n}\Delta v_{g,k:l}(N) - \\ -\frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{k,l\}}\Big[\sum_{S\ni k,l,S\not\ni j}(p_s+p_{s+1})\Delta v_{g,k:l}(S)\Big].$$

Una expresión semejante puede obtenerse para el jugador l, con lo que queda probada la parte (a) de la propiedad.

(b) En este caso $i \neq k, l$. En la fórmula (4.1) los sumatorios que aparecen pueden descomponerse del modo siguiente:

$$S: i,k,l \in S,\ S\neq N \ \rightarrow \begin{cases} S: i,j,k,l\in S,\ S\neq N & \text{(i)}\\ S: i,k,l\in S,\ j\notin S & \text{(ii)}\end{cases}$$

$$S: j,k,l \in S,\ S\neq N \ \rightarrow \begin{cases} S: i,j,k,l\in S,\ S\neq N & \text{(iii)}\\ S: j,k,l\in S,\ i\notin S & \text{(iv)}\end{cases}$$

Los términos (i) y (iii) se eliminan, de manera que se obtiene la expresión del enunciado. $\square$

Teorema 4.18
Dado $v \in G_N$, si σ es cualquier semivalor definido sobre G_N de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, entonces las reglas de asignación definidas por:

$$\begin{array}{rccc} Y_{\sigma^a}: & GR(N) & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & g & \rightarrow & \sigma^a[v/g] \end{array}$$

(a) verifican la propiedad de justicia,

(b) verifican la propiedad de estabilidad, para juegos superaditivos.

Demostración
(a) La propiedad de justicia para una regla de asignación definida según la normalización aditiva de un semivalor σ supone que se cumpla:

$$\sigma_k^a[v/g] - \sigma_k^a[v/(g\setminus k\!:\!l)] = \sigma_l^a[v/g] - \sigma_l^a[v/(g\setminus k\!:\!l)], \quad k\!:\!l \in g,$$

pero esta igualdad es evidente, por el apartado (a) de la proposición 4.17.

(b) En la fórmula del apartado (a) de la proposición 4.17 aparecen expresiones de la función incremento de v por la supresión de la arista $k\!:\!l$ del grafo de cooperación g; éstas son $\Delta v_{g,k:l}(N)$ y $\Delta v_{g,k:l}(S)$ para S tales que $k,l \in S$, $j \notin S$, $j \in N \setminus \{k,l\}$.

Sabemos que $\Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0$, $\forall S \subseteq N$, si el juego v es superaditivo, y para cualquier semivalor los coeficientes $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, entonces:

$$\sigma_i^a[v/g] \geq \sigma_i^a[v/(g \setminus k\!:\!l)], \quad i = k, l,$$

y esto supone la propiedad de estabilidad. $\square$

Observación 4.19
Acabamos de probar que la normalización aditiva de cualquier semivalor da lugar a una regla de asignación justa y, para juegos superaditivos, estable. Si el grafo de cooperación g no desconecta la coalición total N, ni tampoco la supresión de la arista $k\!:\!l$ consigue este efecto, se cumple:

$$v/g(N) = v/(g \setminus k\!:\!l)(N) = v(N).$$

Por la propia característica de la construcción de la normalización aditiva, un semivalor normalizado cualquiera es eficiente, es decir, la suma de pagos que asigna a los diferentes jugadores es igual a la utilidad que es capaz de obtener la coalición total, $v(N)$. Se consigue, de esta manera, obtener vectores de pagos que sean globalmente eficientes, esto es, eficientes sobre N. Si N es la única componente conexa todos ellos son eficientes sobre esa componente conexa.

Proposición 4.20
Supongamos $v \in S_N$, juego simple con n jugadores, $n \geq 3$, y el grafo de cooperación inicial el grafo completo g^N. Si se suprime una arista cualquiera $k : l$, entonces, para cualquier semivalor σ de coeficientes $p_s, 1 \leq s \leq n$, su correspondiente normalización aditiva σ^a verifica:

(a) $\{k,l\} \notin W \ \Rightarrow\ \sigma^a[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma^a[v]$.

(b) $\{k,l\} \in W^m \;\Rightarrow\; \sigma_i^a[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v] - \dfrac{n-2}{n}(p_2+p_3), \qquad i = k,l,$

$$\sigma_i^a[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v] + \frac{2}{n}(p_2+p_3), \qquad i \neq k,l,$$

donde W indica el conjunto de coaliciones ganadoras, $v(S)=1$, del juego $v \in S_N$ y W^m indica el conjunto de coaliciones ganadoras minimales de v.

Demostración

Para relacionar el pago a los jugadores k,l por la normalización aditiva σ^a, en los juegos v y $v/(g^N \setminus k\!:\!l)$, hacemos servir la expresión (a) de la proposición 4.17. Si $g = g^N$, $n \geq 3$, la supresión de una arista cualquiera $k\!:\!l$ no desconecta N, luego $\Delta v_{g^N,k:l}(N) = 0$. Además:

$$\sum_{j \in N \setminus \{k,l\}} \left[\sum_{S \ni k,l, S \not\ni j} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g^N,k:l}(S) \right] = (n-2)(p_2+p_3)\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\}),$$

ya que toda coalición S que contenga los jugadores k,l y cualquier otro jugador, no queda desconectada por la supresión de $k:l$ y, por lo tanto, $\Delta v_{g^N,k:l}(S) = 0$. En consecuencia:

- si $\{k,l\} \notin W$, entonces $\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\}) = 0$ y se cumple (a) para $i = k,l$.

- si $\{k,l\} \in W^m$, entonces $\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\}) = 1$, de donde:

$$\sigma_i^a[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v] - \frac{1}{n}(n-2)(p_2+p_3)$$

y se cumple el apartado (b) para $i = k,l$.

Ahora, para estudiar el comportaminto sobre los jugadores $i \neq k,l$ hacemos servir la expresión (b) de la proposición 4.17; como antes, $\Delta v_{g^N,k:l}(N) = 0$ si $n \geq 3$. El sumatorio que aparece en esa expresión,

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[\sum_{S \ni i,k,l, S \not\ni j} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g^N,k:l}(S) - \sum_{S \ni j,k,l, S \not\ni i} (p_s + p_{s+1}) \Delta v_{g^N,k:l}(S) \right],$$

ha de estudiarse en dos casos diferentes:

- si $j = k,l$, queda reducido a un único término: $-(p_2+p_3)\Delta v_{g^N,k:l}(\{k,l\})$.

- si $j \in N \setminus \{i\}$, $j \neq k, l$, todos los términos que aparecen son nulos, ya que ninguna coalición S queda desconectada al contar con tres o más jugadores.

En consecuencia, para $i \neq k, l$ se tiene:

$$\sigma_i^a[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \sigma_i^a[v] + \frac{2}{n}(p_2 + p_3)\Delta v_{g^N, k:l}(\{k, l\});$$

- si $\{k, l\} \notin W$, entonces $\Delta v_{g^N, k:l}(\{k, l\}) = 0$ y se cumple (a) para $i \neq k, l$.

- si $\{k, l\} \in W^m$, entonces $\Delta v_{g^N, k:l}(\{k, l\}) = 1$ y se cumple (b) para $i \neq k, l$. $\square$

Caso particular 4.21
Para el λ-prenucleolo, normalización aditiva del valor de Banzhaf, $\lambda = \psi^a$, en las condiciones de la proposición anterior, se cumple:

(a) $\{k, l\} \notin W \;\Rightarrow\; \lambda[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \lambda[v]$.

(b) $\{k, l\} \in W^m \;\Rightarrow\; \lambda_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \lambda_i[v] - \dfrac{n-2}{n2^{n-2}}\,, \qquad i = k, l,$

$$\lambda_i[v/(g^N \setminus k\!:\!l)] = \lambda_i[v] + \frac{1}{n2^{n-3}}\,, \qquad i \neq k, l.$$

Ejemplo 4.22
Retomamos el ejemplo 4.10 relativo al Parlamento de Cataluña resultante de las elecciones del 19 de noviembre de 1995. Los partidos con representación, CiU, PSC, PP, IC, ERC, juegan el JMP siguiente:

$$[\,68\,;\,60\,,\,34\,,\,17\,,\,13\,,\,11\,].$$

Para este juego, correspondiente al grafo completo g^N, el λ-prenucleolo otorga la distribución de poder

$$\lambda[v] = (4/5,\ 1/20,\ 1/20,\ 1/20,\ 1/20).$$

Si suprimimos la arista de cooperación $1\!:\!4$, como $\{1, 4\} \in W^m$, la asignación que el λ-prenucleolo supondrá para esa nueva situación de cooperación estará relacionada con la inicial en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda[v/(g^N \setminus 1\!:\!4)] &= \lambda[v] + (-3/40, 1/20, 1/20, -3/40, 1/20)\\ &= (29/40,\ 1/10,\ 1/10,\ -1/40,\ 1/10).\end{aligned}$$

4.4 Simetría por la supresión de una arista

En el estudio de las reglas de asignación aparecen propiedades como justicia o estabilidad que hacen referencia a los jugadores extremos de la arista del grafo de cooperación que se suprime. Ahora nos proponemos determinar el efecto de la supresión de la arista de cooperación sobre otros jugadores, además de sobre los propios extremos.

Definición 4.23
Para cualquier regla de asignación $Y : GR(N) \to \mathbb{R}^N$ decimos que los jugadores $i, j \in N$ son simétricos por la supresión de la arista $k\!:\!l$ del grafo de cooperación g si

$$Y_i(g) - Y_i(g \setminus k\!:\!l) = Y_j(g) - Y_j(g \setminus k\!:\!l), \qquad i, j \in N,\ k\!:\!l \in g.$$

Observación 4.24
La simetría por la supresión de la arista $k : l$ del grafo de cooperación g es una relación de equivalencia definida en el conjunto de jugadores N. De esta forma, N queda dividido en clases de equivalencia por esa relación.
La condición de justicia por la supresión de una arista de cooperación $k\!:\!l$ es un caso particular de simetría, precisamente para los jugadores k, l, extremos de la arista que se suprime.

Proposición 4.25
Supongamos que $v \in G_N$ es un juego superaditivo y que del grafo de cooperación g se suprime la arista $k\!:\!l$. Para cualquier semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, definido sobre G_N se cumple:

(a) Los jugadores k, l pertenecen a la clase que obtiene un menor incremento por la supresión de la arista $k\!:\!l$.

(b) Si $v(\{k, l\}) > v(\{k\}) + v(\{l\})$ y $p_2 > 0$, entonces, los jugadores k y l son los únicos elementos de la clase que más pierde.

Demostración
(a) Por el teorema 4.5, sabemos que para cualquier semivalor σ, por la condición

de justicia, los jugadores k y l sufren el mismo incremento al suprimir la arista $k\!:\!l$. Si el juego v es superaditivo, por la condición de estabilidad, el incremento para ambos jugadores es negativo o nulo. Queda por comprobar que, para juegos superaditivos, no existe ningún jugador que sufra un incremento menor.

Vamos a comparar los incrementos que sufren por la supresión de la arista $k\!:\!l$ del grafo g, por un lado, los jugadores k y l, y por otro, uno cualquiera de los restantes jugadores $i \neq k, l$. Según las expresiones para estos incrementos obtenidas en la proposición 4.4:

$$\Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l) = -\sigma_k[\Delta v_{g,k:l}] = -\sum_{S \ni k,l} p_s \Delta v_{g,k:l}(S).$$

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) = -\sigma_i[\Delta v_{g,k:l}] = -\sum_{S \ni i,k,l} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i\})],$$

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) = -\sum_{S \ni i,k,l} p_s \Delta v_{g,k:l}(S) + \sum_{\substack{S \ni k,l \\ S \not\ni i}} p_{s+1} \Delta v_{g,k:l}(S), \quad i \neq k, l.$$

Estas expresiones para $\Delta\sigma$ son válidas para cualquier semivalor definido sobre G_N. El sumatorio para $\Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l)$ consta de 2^{n-2} términos. El sumatorio precedido de signo negativo en $\Delta\sigma_i(v, g, k : l)$, $i \neq k, l$, consta de 2^{n-3} términos, de entre los que figuran en el sumatorio del incremento para k, apareciendo además un segundo sumatorio precedido de signo positivo. Todos los términos en los tres sumatorios son positivos o nulos, ya que $\Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0$ para juegos superaditivos, y $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, para cualquier semivalor σ. En consecuencia:

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) \geq \Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l) = \Delta\sigma_l(v, g, k\!:\!l), \quad i \neq k, l.$$

(b) Si $v(\{k, l\}) > v(\{k\}) + v(\{l\})$, esto es lo mismo que decir, $\Delta v_{g,k:l}(\{k, l\}) > 0$; éste es uno de los términos que aparece en $\Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l)$, pero que no aparece en $\Delta\sigma_i(v, g, k : l)$, $i \neq k, l$. Si además, el coeficiente que acompaña a ese término es $p_2 > 0$, podemos afirmar que la desigualdad anterior es estricta

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) > \Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l) = \Delta\sigma_l(v, g, k\!:\!l), \quad i \neq k, l,$$

y k, l son los únicos elementos que pertenecen a la clase que más pierde. $\square$

Proposición 4.26
Supongamos que $v \in G_N$ es un juego superaditivo y que σ es cualquier semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, definido sobre G_N. Si existe un camino con un jugador intermedio, $\{k\!:\!i, i\!:\!l\}$, alternativo a la arista $k\!:\!l$ que se suprime, entonces, ese jugador i forma parte de la clase que obtiene un mayor incremento por la supresión de la arista de cooperación.

Demostración
En primer lugar, vamos a probar que un jugador i situado en un camino alternativo $\{k\!:\!i, i\!:\!l\}$ no pierde al suprimirse la arista $k\!:\!l$. Según la expresión del incremento obtenida en la proposición 4.4 para un jugador $i \neq k, l$:

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) = -\sigma_i[\Delta v_{g,k:l}] = -\sum_{S \ni i,k,l} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i\})],$$

pero ahora $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, si $S \ni i, k, l$, ya que para estas coaliciones existe el camino alternativo $\{k\!:\!i, i\!:\!l\}$ y no se produce desconexión. Entonces:

$$\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l) = \sum_{S \ni i,k,l} p_s \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i\}) = \sum_{\substack{S \ni k,l \\ S \not\ni i}} p_{s+1} \Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0,$$

ya que $\Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0$ para juegos superaditivos, y $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, para cualquier semivalor σ.

Consideramos ahora otro jugador $j \neq i, k, l$ y evaluamos su incremento:

$$\Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l) = -\sigma_j[\Delta v_{g,k:l}] = -\sum_{S \ni j,k,l} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{j\})],$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l) \;\; = \;\; & -\sum_{S \ni i,j,k,l} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{j\})] - \\ & -\sum_{\substack{S \ni j,k,l \\ S \not\ni i}} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{j\})]. \end{aligned}$$

En el primer sumatorio $\Delta v_{g,k:l}(S) = \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{j\}) = 0$, ya que $i, k, l \in S$, $S \setminus \{j\}$, y al ser $\{k\!:\!i, i\!:\!l\}$ un camino alternativo a $k\!:\!l$ no se crean ni en S ni en $S \setminus \{j\}$ nuevas componentes conexas. Entonces:

$$\Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l) = \sum_{\substack{S \ni k,l \\ S \not\ni i,j}} p_{s+1} \Delta v_{g,k:l}(S) - \sum_{\substack{S \ni j,k,l \\ S \not\ni i}} p_s \Delta v_{g,k:l}(S), \qquad j \neq i, k, l.$$

En $\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l)$, $j \neq i,k,l$, para v superaditivo, los términos de ambos sumatorios son no negativos. El primer sumatorio consta de 2^{n-4} términos, de entre los 2^{n-3} que constan en el sumatorio para $\Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l)$, y queda además disminuido por los términos del segundo sumatorio. Por lo tanto:

$$\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l) \leq \Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l), \qquad j \in N \setminus \{i\}. \ \square$$

Proposición 4.27
Para cualquier juego cooperativo $v \in G_N$ y para cualquier semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, definido sobre G_N, si existen diferentes caminos con un jugador intermedio, $\{k\!:\!i_1, i_1\!:\!l\}, ..., \{k\!:\!i_q, i_q\!:\!l\}$, alternativos a la arista $k\!:\!l$ que se suprime, entonces, los jugadores $i_1, ..., i_q$ pertenecen a la misma clase de simetría por la supresión de la arista.

Demostración
Consideramos uno cualquiera de estos jugadores i_m, $1 \leq m \leq q$, y escribimos la expresión del incremento que le corresponde al suprimir la arista $k\!:\!l$:

$$\Delta\sigma_{i_m}(v,g,k\!:\!l) = -\sigma_{i_m}[\Delta v_{g,k:l}] = -\sum_{S \ni i_m,k,l} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i_m\})],$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{i_m}(v,g,k\!:\!l) \;=\; & -\sum_{\substack{S \ni i_m,k,l \\ S \not\ni i_1,..,i_{m-1},i_{m+1},..,i_q}} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i_m\})] - \\ & -\sum_{\substack{S \ni i_m,k,l \\ S \cap \{i_1,..,i_{m-1},i_{m+1},..,i_q\} \neq \emptyset}} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S) - \Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i_m\})].\end{aligned}$$

En ambos sumatorios, $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$, ya que $S \ni i_m, k, l$ y el camino alternativo $\{k\!:\!i_m, i_m\!:\!l\}$ está contenido en todas esas coaliciones, no creándose ninguna nueva componente conexa al suprimir $k:l$. En el segundo sumatorio, también $\Delta v_{g,k:l}(S \setminus \{i_m\}) = 0$, puesto que $S \setminus \{i_m\}$ contiene alguno de los elementos $i_1, ..., i_{m-1}, i_{m+1}, ..., i_q$, existiendo, por tanto, camino alternativo a $k : l$ sin salir de S. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{i_m}(v,g,k\!:\!l) &= \sum_{\substack{S\ni i_m,k,l\\ S\not\ni i_1,..,i_{m-1},i_{m+1},..,i_q}} p_s \Delta v_{g,k:l}(S\smallsetminus\{i_m\})\\ &= \sum_{\substack{S\ni k,l\\ S\not\ni i_1,..,i_{m-1},i_m,i_{m+1},..,i_q}} p_{s+1}\Delta v_{g,k:l}(S), \qquad 1\le m\le q.\end{aligned}$$

Queda así probado que los jugadores $i_1,...,i_q$ pertenecen a la misma clase de simetría por la supresión de la arista $k\!:\!l$. □

Proposición 4.28

Supongamos que $v\in G_N$ es un juego superaditivo y que σ es cualquier semivalor de coeficientes p_s, $1\le s\le n$, definido sobre G_N. Consideramos el subconjunto Q de todos los jugadores que se encuentran en caminos con un intermedio alternativos a la arista $k\!:\!l$ que se suprime en el grafo de cooperación g:

$$Q=\{\, i\in N\ /\ \exists\,\{k\!:\!i, i\!:\!l\}\subseteq g\,\}.$$

Si $Q\neq\emptyset$ y para todo $j\notin Q$, $j\neq k,l$, $\Delta v_{g,k:l}(\{k,l,j\})>0$ y $p_3\neq 0$ ó $p_4\neq 0$, entonces, los jugadores del subconjunto Q son los únicos que alcanzan el incremento máximo de la asignación por σ al suprimir la arista $k\!:\!l$.

Demostración

Por la proposición 4.27, el incremento correspondiente a los jugadores del subconjunto Q es el mismo, y obedece a la expresión,

$$\Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l)=\sum_{S\ni k,l,S\cap Q=\emptyset} p_{s+1}\Delta v_{g,k:l}(S), \qquad i\in Q.$$

Por la proposición 4.26, al ser v superaditivo, los jugadores de Q forman parte de la clase que obtiene un incremento mayor por la supresión de la arista $k\!:\!l$ del grafo de cooperación g. Vamos ahora a comparar este incremento con el correspondiente a un jugador $j\notin Q$, $j\neq k,l$.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l) &= -\sum_{\substack{S\ni j,k,l\\ S\cap Q=\emptyset}} p_s[\Delta v_{g,k:l}(S)-\Delta v_{g,k:l}(S\smallsetminus\{j\})]\\ &= \sum_{\substack{S\ni k,l,\, S\not\ni j\\ S\cap Q=\emptyset}} p_{s+1}\Delta v_{g,k:l}(S) - \sum_{\substack{S\ni j,k,l\\ S\cap Q=\emptyset}} p_s\Delta v_{g,k:l}(S).\end{aligned}$$

En la expresión de $\Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l)$, el primer sumatorio contiene 2^{n-3-q} términos de entre los 2^{n-2-q} términos que contiene la expresión de $\Delta\sigma_i(v, g, k : l)$ para $i \in Q$, estando ese primer sumatorio disminuido por un segundo. Todos los términos en esos dos sumatorios y en el sumatorio para $\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l)$, $i \in Q$, son positivos, de donde se concluye la desigualdad:

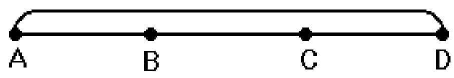
$$\Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l) \leq \Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l), \quad \forall j \notin Q,\ j \neq k, l;\ \forall i \in Q.$$

Si $\forall j \notin Q$, $j \neq k, l$, $\Delta v_{g,k:l}(\{k, l, j\}) > 0$ y $p_4 > 0$ la desigualdad se vuelve estricta ya que $\Delta v_{g,k:l}(\{k, l, j\})$ es uno de los incrementos que figura en $\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l)$, $i \in Q$ y no figura en el primer sumatorio de $\Delta\sigma_j(v, g, k : l)$, $j \notin Q$, $j \neq k, l$. Lo mismo ocurre si $\forall j \notin Q$, $j \neq k, l$, $\Delta v_{g,k:l}(\{k, l, j\}) > 0$ y $p_3 > 0$ puesto que entonces éste es uno de los incrementos que figura en el sumatorio precedido de signo negativo de $\Delta\sigma_j(v, g, k\!:\!l)$. $\square$

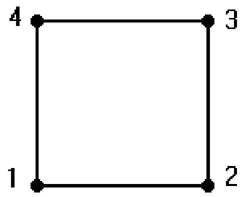
Observación 4.29
Para un juego $v \in G_N$ superaditivo y cualquier semivalor σ sobre los juegos de G_N hemos probado que el mínimo del incremento (máxima pérdida) se produce en los jugadores extremos de la arista del grafo de cooperación que se suprime. A su vez, el máximo del incremento se alcanza en los jugadores que forman un camino alternativo en triángulo con respecto a la arista que se suprime, si esos jugadores existen.

Nos preguntamos qué ocurriría si no existiese ningún camino con un intermedio, alernativo a la arista que se suprime. Por ejemplo, el caso más sencillo sería aquel en el que un camino alternativo de longitud mínima tuviera dos vértices intermedios. El siguiente ejemplo nos muestra que no puede darse una respuesta general como en el caso de caminos alternativos con un vértice intermedio.

Ejemplo 4.30
Consideramos el caso de una red de comunicación o de transporte entre cuatro puntos diferentes, que pueden ser ciudades. Habitualmente, este tipo de redes suele ser redundante: existe un sistema de contacto entre colaterales, que recibe el nombre de *escalonado*, y un sistema que une las cabeceras, que recibe el nombre de *selectivo*, entendiendo que ambas cabeceras son núcleos de mayor importancia y requieren un servicio directo. Gráficamente, el esquema sería:



La situación anterior puede modelizarse por medio del siguiente grafo:



La supresión de una de estas aristas supone que uno de los tramos de comunicación o transporte ha quedado sin servicio. Estudiar el incremento por la supresión de una arista consiste en determinar cómo se redistribuyen los beneficios del sistema entre los agentes que intervienen, teniendo en cuenta que las únicas posibilidades de cooperación son a través de las aristas del grafo, ya que el resto de relaciones no están establecidas.

Supondremos que en el grafo $g = \{1{:}2, 2{:}3, 3{:}4, 4{:}1\}$ se suprime la arista $1{:}2$. En este caso, queda un único camino alternativo con dos vértices intermedios 3 y 4. Nos proponemos estudiar cúal es el efecto de la supresión sobre estos jugadores.

La función incremento $\Delta v_{g,1:2}$ toma valores que pueden ser no nulos sobre los 4 subconjuntos que contienen a 1 y 2:

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) - [v(\{1\}) + v(\{2\})] = a,$$

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,3\}) - [v(\{1\}) + v(\{2,3\})] = b,$$

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,4\}) = v(\{1,2,4\}) - [v(\{1,4\}) + v(\{2\})] = c,$$

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2,3,4\}) = 0, \text{ ya que } \{1,2,3,4\} \text{ no queda desconectado.}$$

Hemos designado las cantidades que entran en juego mediante a, b, c; si v es superaditivo, $a, b, c \geq 0$. Los incrementos de asignación correspondientes a los jugadores

3 y 4 son:

$$\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = -\sigma_3[\Delta v_{g,1:2}] = -\sum_{S\ni 1,2,3} p_s[\Delta v_{g,1:2}(S) - \Delta v_{g,1:2}(S\setminus\{3\})],$$

$$\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = p_3a + p_4c - p_3b.$$

$$\Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) = -\sigma_4[\Delta v_{g,1:2}] = -\sum_{S\ni 1,2,4} p_s[\Delta v_{g,1:2}(S) - \Delta v_{g,1:2}(S\setminus\{4\})],$$

$$\Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) = p_3a + p_4b - p_3c.$$

En particular, para un semivalor σ que cumpla $p_3 = p_4 = p > 0$ (por ejemplo, el valor de Banzhaf) podemos escribir:

$$\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = p(a+c-b), \qquad \Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) = p(a+b-c);$$

si $c-b>a$, entonces: $\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) > 0$, $\Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) < 0$;

si $b-c>a$, entonces: $\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) < 0$, $\Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) > 0$.

Por otro lado, en el caso particular $a=0$, $b=c>0$, podemos escribir:

$$\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = (p_4-p_3)c, \qquad \Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) = (p_4-p_3)c;$$

para semivalores con $p_4 > p_3$ será: $\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = \Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) > 0$;

para semivalores con $p_4 < p_3$ será: $\Delta\sigma_3(v,g,1\!:\!2) = \Delta\sigma_4(v,g,1\!:\!2) < 0$.

Este ejemplo nos muestra, en el caso más sencillo posible, un único camino alternativo con dos intermedios, que los incrementos de asignación para esos intermedios pueden ser ambos positivos, ambos negativos, o tener signos contrarios, dependiendo del semivalor con el que se trabaje o de las características del juego que se estudie.

Proposición 4.31
Supongamos que σ es cualquier semivalor definido sobre G_N y σ^a es su normalización aditiva. Entonces, la partición de N en clases de equivalencia por la

supresión de una arista $k\!:\!l$ del grafo de cooperación g se conserva tanto si la regla de asignación es la correspondiente a σ como si es la correspondiente a σ^a.

Demostración
Supongamos que i, j pertenecen a la misma clase por la supresión de $k\!:\!l \in g$ por la asignación correspondiente al semivalor σ:

$$\sigma_i[v/g] - \sigma_i[v/(g\setminus k\!:\!l)] = \sigma_j[v/g] - \sigma_j[v/(g\setminus k\!:\!l)].$$

Para obtener la normalización aditiva de $\sigma[v/g]$ sumamos a cada una de sus componentes $\{v/g(N) - \sum_{i\in N}\sigma_i[v/g]\}/n$ y para obtener la de $\sigma[v/(g\setminus k\!:\!l)]$ sumamos a cada componente $\{v/(g\setminus k\!:\!l)(N) - \sum_{i\in N}\sigma_i[v/(g\setminus k\!:\!l)]\}/n$. Así, de la condición anterior se llega a:

$$\sigma_i^a[v/g] - \sigma_i^a[v/(g\setminus k\!:\!l)] = \sigma_j^a[v/g] - \sigma_j^a[v/(g\setminus k\!:\!l)],$$

luego i, j pertenecen a la misma clase por la supresión de $k : l \in g$ por la asignación que corresponde a σ^a. De forma análoga, restando esas cantidades, si i, j pertenecen a la misma clase por σ^a pertenecerán a la misma clase por σ. $\square$

A efectos prácticos, esta proposición supone que si cada clase de equivalencia por la supresión de $k\!:\!l$ se etiquetara con un valor, el de su incremento $\Delta\sigma_i(v, g, k\!:\!l)$, i elemento cualquiera de la clase, al cambiar σ por σ^a cambiaría la etiqueta pero no los elementos que forman la clase.

Consecuencia 4.32
(a) Para cualquier semivalor σ definido sobre el espacio de juegos G_N, las reglas de asignación $Y_{\sigma^a} : GR(N) \to \mathbb{R}^N$ definidas por $Y_{\sigma^a}(g) = \sigma^a[v/g]$ verifican la propiedad de justicia.

(b) Todos los enunciados de las proposiciones 4.25, 4.26, 4.27 y 4.28 pueden reescribirse cambiando un semivalor cualquiera σ por su normalización aditiva σ^a.

Demostración
(a) La condición de justicia es equivalente a decir que k y l forman parte de la misma clase de equivalencia por la supresión de la arista $k\!:\!l$. Como estas clases son las mismas por σ y por σ^a se sigue la propiedad del enunciado.

(b) Las proposiciones 4.25 a 4.28 hacen referencia en todo momento a clases de equivalencia por σ, ya sea la clase que sufre un mayor incremento, o un menor incremento, o si ciertos elementos son los únicos de alguna de esas clases. Por la conservación de las clases al cambiar σ por σ^a todas esas proposiciones son también válidas para la normalización aditiva de cualquier semivalor. □

Proposición 4.33
Para cualquier juego $v \in G_N$, si $v/g(N) = v/(g \setminus k:l)(N)$, entonces el incremento que permite obtener la asignación $\sigma^a[v/(g \setminus k:l)]$ a partir de $\sigma^a[v/g]$ es la normalización aditiva a cero del incremento que permite obtener la asignación $\sigma[v/(g \setminus k:l)]$ a partir de $\sigma[v/g]$, esto es:

$$\sigma^a[v/(g \setminus k:l)] = \sigma^a[v/g] + N_0^a(\Delta\sigma(v,g,k:l)).$$

Demostración
Para cualquier $i \in N$, cualquier grafo de cooperación g y cualquier arista $k:l \in g$, se verifica, por un lado,

$$\sigma_i^a[v/g] = \sigma_i[v/g] + \frac{1}{n} v/g(N) - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} \sigma_j[v/g],$$

mientras que por otro,

$$\sigma_i[v/(g \setminus k:l)] = \sigma_i[v/g] + \Delta\sigma_i(v,g,k:l).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_i^a[v/(g \setminus k:l)] &= \sigma_i[v/g] + \Delta\sigma_i(v,g,k:l) + \frac{1}{n}\, v/(g \setminus k:l)(N) - \\ &\quad -\frac{1}{n} \sum_{j \in N} [\sigma_j[v/g] + \Delta\sigma_j(v,g,k:l)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^a[v/(g \setminus k:l)] &= \sigma_i[v/g] + \frac{1}{n} v/(g \setminus k:l)(N) - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} \sigma_j[v/g] + \\ &\quad + \Delta\sigma_i(v,g,k:l) - \frac{1}{n} \sum_{j \in N} \Delta\sigma_j(v,g,k:l). \end{aligned}$$

Comparando $\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)]$ con $\sigma_i^a[v/g]$,

$$\begin{aligned}\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)] &= \sigma_i^a[v/g]+\frac{1}{n}\,[v/(g\setminus k:l)(N)-v/g(N)]+\\ &\quad +\Delta\sigma_i(v,g,k:l)+\frac{1}{n}\left[\ 0-\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k:l)\ \right],\quad i\in N.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Si $v/(g\setminus k:l)(N)=v/g(N)$ la fórmula anterior queda, para cada $i\in N$:

$$\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)]=\sigma_i^a[v/g]+\Delta\sigma_i(v,g,k:l)+\frac{1}{n}\left[\ 0-\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k:l)\ \right],$$

o lo que es lo mismo:

$$\sigma^a[v/(g\setminus k:l)]=\sigma^a[v/g]+N_0^a(\Delta\sigma(v,g,k:l)).\ \square$$

Consecuencia 4.34

Supongamos que el juego $v\in G_N$ es superaditivo. Las reglas de asignación $Y_{\sigma^a}:GR(N)\rightarrow\mathbb{R}^N$ definidas por $Y_{\sigma^a}(g)=\sigma^a[v/g]$ verifican la propiedad de estabilidad, para cualquier semivalor σ definido sobre el espacio de juegos G_N.

Demostración

La fórmula (4.2) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\sigma_i^a[v/(g\setminus k:l)]-\sigma_i^a[v/g] &= \frac{1}{n}\,[v/(g\setminus k:l)(N)-v/g(N)]+\Delta\sigma_i(v,g,k:l)-\\ &\quad -\frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k:l),\qquad i\in N,\end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_i^a(v,g,k:l)=-\frac{1}{n}\Delta v_{g,k:l}(N)+\Delta\sigma_i(v,g,k:l)-\frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k:l),\quad i\in N. \tag{4.3}$$

La estabilidad por σ^a supone probar que $\Delta\sigma_k^a(v,g,k:l)=\Delta\sigma_l^a(v,g,k:l)\leq 0$.

Se verifica $\Delta\sigma_k(v,g,k:l)=\Delta\sigma_l(v,g,k:l)\leq 0$, por la estabilidad de la asignación Y_σ para juegos superaditivos. Probaremos ahora que

$$\Delta\sigma_i(v,g,k:l)-\frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k:l)\leq 0,\ \text{ para } i=k,l. \tag{4.4}$$

Si (4.4) no se verifica, $\Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l) - \dfrac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l) > 0$, para $i=k,l$.

Por la proposición 4.25, $\Delta\sigma_i(v,g,k:l)$, $i=k,l$, es el menor de los incrementos para cualquier jugador de N al suprimir la arista $k\!:\!l$. Entonces:

$$\Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l) - \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l) > 0, \text{ para todo } i\in N.$$

Sumando:

$$\sum_{i\in N}\Big[\ \Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l) - \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l)\ \Big] > 0,$$

$$\sum_{i\in N}\Delta\sigma_i(v,g,k\!:\!l) - \sum_{j\in N}\Delta\sigma_j(v,g,k\!:\!l) > 0,$$

lo cual es contradictorio, así que (4.4) se verifica.

Finalmente, como $\Delta v_{g,k:l}(N)\geq 0$ para juegos superaditivos, la fórmula (4.3) para $i=k,l$ permite escribir:

$$\Delta\sigma_k^a(v,g,k\!:\!l) = \Delta\sigma_l^a(v,g,k\!:\!l) \leq 0.\ \square$$

Ejemplo 4.35
Vamos a comprobar, para la normalización aditiva del valor de Banzhaf, que el incremento por la supresión de una arista puede calcularse mediante la normalización aditiva a cero del incremento que por la misma supresión supone el valor de Banzhaf.

Para el Parlamento de Cataluña resultante de las elecciones de noviembre de 1995, los partidos con representación, CiU, PSC, PP, IC, ERC, juegan el JMP siguiente:

$$[\,68\,;\,60\,,\,34\,,\,17\,,\,13\,,\,11\,].$$

Consideramos el grafo completo g^N como grafo inicial y suprimimos la arista $1\!:\!4$. Los resultados ya obtenidos son:

$$\begin{aligned}
\psi[v/g^N] &= (\,0.8750\,,\,0.1250\,,\,0.1250\,,\,0.1250\,,\,0.1250\,),\\
\Delta\psi(v,g^N,1\!:\!4) &= (-0.0625\,,\,0.0625\,,\,0.0625\,,-0.0625\,,\,0.0625\,),\\
\psi[v/(g^N\setminus 1\!:\!4)] &= (\,0.8125\,,\,0.1875\,,\,0.1875\,,0.0625\,,\,0.1875\,).
\end{aligned}$$

Para la asignación normalizada:

$$\begin{aligned}\lambda[v/g^N] &= (\,0.8000\,,\,0.0500\,,\,0.0500\,,\,0.0500\,,\,0.0500\,),\\ \lambda[v/(g^N\setminus 1\!:\!4)] &= (\,0.7250\,,\,0.1000\,,\,0.1000\,,-0.0250\,,\,0.1000\,).\end{aligned}$$

Vamos a comprobar este resultado haciendo el cálculo con la normalización aditiva a cero de $\Delta\psi(v, g^N, 1\!:\!4)$:

$$-\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\Delta\psi_j(v, g^N, 1\!:\!4) = -\frac{1}{5}\,0.0625 = -0.0125;$$

$$N_0^a(\Delta\psi(v, g^N, 1\!:\!4)) = (-0.0750\,,\,0.0500\,,\,0.0500\,,-0.0750\,,\,0.0500\,).$$

Empleando la expresión $\lambda[v/(g^N\setminus 1:4)] = \lambda[v/g^N] + N_0^a(\Delta\psi(v, g^N, 1:4))$, se obtiene:

$$\lambda[v/(g^N\setminus 1\!:\!4)] = (\,0.7250\,,\,0.1000\,,\,0.1000\,,-0.0250\,,\,0.1000\,),$$

que es lo que queríamos comprobar.

4.5 EML y grafos de cooperación

Proposición 4.36
Para cualquier juego $v \in G_N$, cualquier grafo de cooperación $g \in GR(N)$ y cualquier arista $k\!:\!l \in g$, si denotamos por

$$f(x_1, ..., x_n) \text{ EML del juego } v/g, \;\; \bar{f}(x_1, ..., x_n) \text{ EML del juego } v/(g\setminus k\!:\!l),$$

se verifica:

$$\bar{f}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \Delta f(x_1, ..., x_n),$$

siendo

$$\Delta f(x_1, ..., x_n) = -x_k x_l \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni k,l}} \prod_{i\in S\setminus\{k,l\}} x_i \prod_{j\notin S}(1 - x_j)\Delta v_{g,k:l}(S),$$

donde $\Delta v_{g,k:l}(S) = v(T_{kl}) - [v(T_k) + v(T_l)]$ si la supresión de la arista $k:l$ separa la componente conexa T_{kl} de S/g, donde se encuentran k y l por el grafo g, en las componentes conexas T_k, T_l de $S/(g \setminus k:l)$ donde se encuentran, respectivamente, k y l por el grafo $g \setminus k:l$. En cualquier otro caso $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$.

Demostración
Las extensiones multilineales respectivas de v/g y de $v/(g \setminus k:l)$ son:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v/g(S),$$

$$\bar{f}(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v/(g \setminus k:l)(S).$$

Para poder comparar una con otra basta comparar $v/g(S)$ con $v/(g \setminus k:l)(S)$. Según la definición 4.1 $\Delta v_{g,k:l}(S) = v/g(S) - v/(g \setminus k:l)(S)$, $S \subseteq N$, siendo $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$ para $S \not\supseteq \{k, l\}$, por lo tanto:

$$f(x_1, ..., x_n) - \bar{f}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni k,l}} x_k x_l \prod_{i \in S \setminus \{k,l\}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \Delta v_{g,k:l}(S).$$

En la proposición 4.2 se probó que $\Delta v_{g,k:l}(S) = v(T_{kl}) - [v(T_k) + v(T_l)]$ en aquellos subconjuntos $S \supseteq \{k, l\}$ para los que la supresión de la arista $k:l$ supone la desconexión de T_{kl} en dos componentes conexas T_k y T_l, mientras que $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$ en cualquier otro caso. Así:

$$\bar{f}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) - x_k x_l \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni k,l}} \prod_{i \in S \setminus \{k,l\}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \Delta v_{g,k:l}(S)$$

y la expresión de $\Delta f(x_1, ..., x_n)$ es la del enunciado. $\square$

Observación 4.37
El número de términos que aparecen en el sumatorio del incremento de la EML al pasar del juego v/g al juego $v/(g \setminus k:l)$ se corresponde al número de subconjuntos $S \subseteq N$ tales que $S \ni k, l$, es decir, 2^{n-2}. Sin embargo, la función $\Delta v_{g,k:l}$ toma también valores nulos para todos aquellos subconjuntos que contienen un camino alternativo a la arista $k:l$ que se suprime, esto es, para aquellos que no quedan desconectados.

Supongamos que existe un camino alternativo a la arista $k : l$ con m vértices intermedios, $\{k : i_1, i_1 : i_2, ..., i_m : l\}$, $i_1, ..., i_m \neq k, l$. Los subconjuntos $S \supseteq \{k, i_1, ..., i_m, l\}$ no necesitan ser evaluados pues para ellos $\Delta v_{g,k:l}(S) = 0$ y su número es de $2^{n-(2+m)}$. De esta forma, el número de sumandos efectivos en la expresión de $\Delta f(x_1, ..., x_n)$ se reduce a:

$$2^{n-2} - 2^{n-(2+m)} = 2^{n-2}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right).$$

Si, por ejemplo, existe un camino alternativo con un intermedio, $m = 1$, el número de sumandos efectivos en Δf se reduce a la mitad, 2^{n-3}; si existe un camino alternativo con $m = 2$ intermedios el número de sumandos efectivos se reduce a $\frac{3}{4}\,2^{n-2}$, etc.

Observación 4.38
Supongamos que σ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, es un semivalor binomial definido sobre el espacio de juegos G_N. Para cualquier $i \in N$:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}) + \frac{\partial \Delta f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}), \qquad \bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha),$$

o lo que es lo mismo

$$(\sigma_\alpha)_i[v/(g \setminus k\!:\!l)] = (\sigma_\alpha)_i[v/g] + \frac{\partial \Delta f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}), \quad i \in N.$$

De aquí:

$$\Delta(\sigma_\alpha)_i(v, g, k\!:\!l) = \frac{\partial \Delta f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}), \quad i \in N.$$

Para los valores $i = k, l$, observando la simetría del incremento Δf de la EML para las variables x_k y x_l, podemos afirmar que:

$$\Delta(\sigma_\alpha)_k(v, g, k\!:\!l) = \Delta(\sigma_\alpha)_l(v, g, k\!:\!l) = -\sum_{S \ni k,l} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}\Delta v_{g,k:l}(S),$$

de donde se sigue la condición de justicia por la supresión de la arista $k\!:\!l$, para cualquier semivalor binomial σ_α.

Como que escogidos n números diferentes α_i, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$, un semivalor cualquiera σ definido sobre G_N puede expresarse como combinación lineal de semivalores binomiales

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{\alpha_i}, \quad \text{con} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

se sigue también la justicia por la supresión de la arista $k\!:\!l$ para cualquier semivalor.

Por otra parte, si $v \in G_N$ es superaditivo, $\Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0$, $\forall S \subseteq N$, entonces:

$$\Delta(\sigma_\alpha)_k(v, g, k\!:\!l) = \Delta(\sigma_\alpha)_l(v, g, k\!:\!l) = -\sum_{S \ni k,l} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s} \Delta v_{g,k:l}(S) \leq 0,$$

de donde se sigue la estabilidad por semivalores binomiales para juegos superaditivos. Para un semivalor cualquiera:

$$\Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta(\sigma_{\alpha_i})_k(v, g, k\!:\!l) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[-\sum_{S \ni k,l} \alpha_i^{s-1}(1-\alpha_i)^{n-s} \Delta v_{g,k:l}(S) \right]$$

$$\Delta\sigma_k(v, g, k\!:\!l) = -\sum_{S \ni k,l} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^{s-1}(1-\alpha_i)^{n-s} \Delta v_{g,k:l}(S) = -\sum_{S \ni k,l} p_s \Delta v_{g,k:l}(S) \leq 0.$$

En la expresión anterior $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, pues son los coeficientes del semivalor σ, y como antes, $\Delta v_{g,k:l}(S) \geq 0$, $\forall S \subseteq N$, para v superaditivo. La misma expresión es válida para $\Delta\sigma_l(v, g, k\!:\!l)$, con lo que queda probada la estabilidad por cualquier semivalor para juegos superaditivos.

El desarrollo en esta observación constituye una demostración alternativa para el teorema 4.5.

Ejemplo 4.39
Para el juego $v \in G_N$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, definido en la forma: $v(\{i\}) = 0$, $v(\{i, j\}) = \max\{i, j\}$, $v(\{i, j, k\}) = i + j + k$, $i, j, k \in N$, $v(N) = 10$, suponiendo que en N está definido el grafo de cooperación

$$g = \{1\!:\!2, 2\!:\!3, 3\!:\!4, 4\!:\!1\}$$

y que de éste se suprime la arista $1\!:\!2$, queremos estudiar:

(a) la modificación de la EML por dicha supresión,
(b) la variación de asignación por cualquier semivalor binomial producida al suprimirse esa arista.

(a) La EML del juego v/g que recoge la situción inicial de cooperación es:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1x_2+4x_1x_4+3x_2x_3+4x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+ \\ &\qquad +2x_2x_3x_4-7x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Al suprimir la arista $1\!:\!2$, para calcular $\Delta f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, precisamos los valores de $\Delta v_{g,1:2}(S)$, $S \supseteq \{1,2\}$,

$$\Delta v_{g,1:2}(\{1,2\})=2,\ \Delta v_{g,1:2}(\{1,2,3\})=3,\ \Delta v_{g,1:2}(\{1,2,4\})=3,\ \Delta v_{g,1:2}(N)=0.$$

Entonces:

$$\Delta f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1x_2[2+x_3+x_4-4x_3x_4],$$

$$\Delta f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1x_2-x_1x_2x_3-x_1x_2x_4+4x_1x_2x_3x_4.$$

Ahora, la EML del juego $v/(g\setminus 1\!:\!2)$, denotada por $\bar f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, se obtiene a partir de la igualdad:

$$\bar f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Delta f(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

$$\bar f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1x_4+3x_2x_3+4x_3x_4+2x_2x_3x_4-3x_1x_2x_3x_4.$$

(b) Para evaluar el efecto de la supresión de la arista $1\!:\!2$ por cualquier semivalor binomial σ_α, $0\le\alpha\le 1$, actuamos sobre el incremento $\Delta f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ de la siguiente manera:

$$\Delta\sigma_\alpha(v,g,1\!:\!2) = \nabla(\Delta f)(\bar\alpha), \qquad \bar\alpha=(\alpha,...,\alpha),$$

$$\Delta\sigma_\alpha(v,g,1\!:\!2) = (-2\alpha-2\alpha^2+4\alpha^3, -2\alpha-2\alpha^2+4\alpha^3, -\alpha^2+4\alpha^3, -\alpha^2+4\alpha^3).$$

Si, por ejemplo, sustituimos α por $1/2$ obtenemos el incremento por el valor de Banzhaf:

$$\Delta\psi(v,g,1\!:\!2) = \nabla(\Delta f)(\overline{1/2}) = (-1\,,-1\,,\ 1/4\,,\ 1/4\,).$$

Si buscamos el incremento por el λ-prenucleolo, basta calcular la normalización aditiva a cero del incremento por el valor de Banzhaf:

$$\Delta\lambda(v, g, 1\!:\!2) = (-5/8\,, -5/8\,,\ 5/8\,,\ 5/8\,).$$

Lema 4.40
Si $f(x_1, ..., x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$, para cualquier $i = 1, ..., n$, se cumple:

(a) $f(a_1, .., a_i' + a_i'', .., a_n) = f(a_1, .., a_i', .., a_n) + f(a_1, .., a_i'', .., a_n) - f(a_1, .., 0, .., a_n)$,

(b) $f(a_1, .., \lambda a_i, .., a_n) = \lambda f(a_1, .., a_i, .., a_n) + (1-\lambda) f(a_1, .., 0, .., a_n)$,

siendo $\lambda, a_1, .., a_i, .., a_n \in \mathbb{R}$.

Demostración
Si en la expresión de la EML del juego v,

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} x_j \prod_{k \notin S} (1 - x_k) v(S),$$

desarrollamos los productos de cada término del sumatorio obtenemos unas expresiones en las que aparece una determinada variable x_i junto a otras expresiones en las que no aparece esa misma variable. Así podemos escribir:

$$f(x_1, .., x_i, .., x_n) = A(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n) x_i + B(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n). \quad (4.5)$$

(a) Empleando la expresión anterior:

$$f(a_1, .., a_i' + a_i'', .., a_n) = A(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n)(a_i' + a_i'') + B(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n),$$

$$\begin{aligned} f(a_1, .., a_i' + a_i'', .., a_n) = {} & A(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n) a_i' + B(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n) + \\ & + A(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n) a_i'' + B(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n) - \\ & - B(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n). \end{aligned}$$

En la expresión (4.5) se observa que $f(x_1, .., 0, .., x_n) = B(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$, por lo tanto, en la fórmula anterior la primera línea es $f(a_1, .., a_i', .., a_n)$, la segunda $f(a_1, .., a_i'', .., a_n)$ y la tercera $f(a_1, .., 0, .., a_n)$, quedando probada la parte (a) del enunciado.

(b) Otra vez a partir de (4.5):

$$f(a_1,..,\lambda a_i,..,a_n) = A(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)\lambda a_i + B(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n),$$

$$f(a_1,..,\lambda a_i,..,a_n) = \lambda[A(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)a_i + B(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n)]+$$
$$+ (1-\lambda)B(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n).$$

La primera línea es $\lambda f(a_1,..,a_i,..,a_n)$ mientras que la segunda, por la misma observación que en el apartado (a), es $(1-\lambda)f(a_1,..,0,..,a_n)$ y queda probada la parte (b) del enunciado. □

Proposición 4.41
Si $f(x_1,...,x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$, para $i = 1,...,n$, se verifica:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,..,a_i,..,a_n) = \frac{1}{k}[f(a_1,..,p+k,..,a_n) - f(a_1,..,p,..,a_n)]$$

para cualesquiera $p, k, a_1,..,a_i,..,a_n \in \mathbb{R},\ k \neq 0$.

Demostración
Derivando respecto a x_i en la expresión

$$f(x_1,..,x_i,..,x_n) = A(x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n)x_i + B(x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n),$$

se obtiene:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,..,x_i,..,x_n) = A(x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n).$$

Sustituyendo en $(a_1,..,a_i,..,a_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,..,a_i,..,a_n) = A(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n).$$

Por otro lado:
$$\frac{1}{k}[f(a_1,..,p+k,..,a_n) - f(a_1,..,p,..,a_n)] =$$

$$= \frac{1}{k}[f(a_1,..,p,..,a_n) + f(a_1,..,k,..,a_n) - f(a_1,..,0,..,a_n) - f(a_1,..,p,..,a_n)] =$$

$$= \frac{1}{k}[f(a_1,..,k,..,a_n) - f(a_1,..,0,..,a_n)] =$$

$$= \frac{1}{k}[kf(a_1,..,1,..,a_n) + (1-k)f(a_1,..,0,..,a_n) - f(a_1,..,0,..,a_n)] =$$

$$= f(a_1,..,1,..,a_n) - f(a_1,..,0,..,a_n) =$$

$$= A(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n) + B(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n) - B(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n) =$$

$$= A(a_1,..,a_{i-1},a_{i+1},..,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,..,a_i,..,a_n). \ \square$$

Proposición 4.42
Si $f(x_1,...,x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$ y σ_α, $0 < \alpha \leq 1$, es un semivalor binomial sobre G_N, entonces, el pago a un jugador $i \in N$ por σ_α^a, normalización aditiva del semivalor σ_α, puede calcularse como:

$$(\sigma_\alpha^a)_i[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{j\in N} f_{N\setminus\{j\}}(\bar{\alpha}) - \frac{1}{\alpha} f_{N\setminus\{i\}}(\bar{\alpha}),$$

donde $f_{N\setminus\{i\}}(x_1,..,x_i,..,x_n) = f(x_1,..,x_{i-1},0,x_{i+1},..,x_n)$.

Demostración
El pago por un semivalor binomial σ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, puede calcularse mediante la EML del juego v en la forma:

$$(\sigma_\alpha)_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha), \quad i \in N.$$

La normalización aditiva se calcula mediante:

$$(\sigma_\alpha^a)_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha) + \frac{1}{n}\left[\ v(N) - \sum_{j\in N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha)\ \right], \quad i \in N,$$

$$(\sigma_\alpha^a)_i[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left[\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha)\ \right], \quad i \in N.$$

Por la proposición 4.41, para $\alpha \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha,..,\alpha,..,\alpha) = \frac{1}{\alpha}[f(\alpha,..,\alpha,..,\alpha) - f(\alpha,..,\overset{i)}{0},..,\alpha)],$$

de forma que cada sumando en la expresión de $(\sigma_\alpha^a)_i[v]$, $\alpha \neq 0$, resulta ser:

$$\frac{1}{\alpha}[f(\alpha,..,\overset{i)}{\alpha},..,\overset{j)}{0},..,\alpha) - f(\alpha,..,\overset{i)}{0},..,\overset{j)}{\alpha},..,\alpha)].$$

Así pues:

$$(\sigma_\alpha^a)_i[v] = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{j\in N} f(\alpha,..,\alpha,..,\overset{j)}{0},..,\alpha) - \frac{1}{\alpha}f(\alpha,..,\overset{i)}{0},..,\alpha,..,\alpha).$$

Empleando la notación $f_{N\setminus\{i\}}(x_1,..,x_i,..,x_n) = f(x_1,..,x_{i-1},0,x_{i+1},..,x_n)$ se obtiene la expresión del enunciado. $\square$

Proposición 4.43

Supongamos que σ, semivalor sobre el espacio de juegos G_N, se expresa como combinación lineal de n semivalores binomiales σ_{α_p}, $0 \leq \alpha_p \leq 1$, α_p diferentes, en la forma:

$$\sigma = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \sigma_{\alpha_p}, \quad \text{con } \lambda_p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq n; \ \sum_{p=1}^{n} \lambda_p = 1.$$

Entonces, la normalización aditiva de σ se expresa de manera análoga como combinación lineal de las normalizaciones aditivas de los σ_{α_p}, es decir:

$$\sigma^a = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \sigma_{\alpha_p}^a, \ \text{con } \lambda_p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq n; \ \sum_{p=1}^{n} \lambda_p = 1.$$

Demostración

Para un $i \in N$ cualquiera,

$$\begin{aligned}
\sigma_i^a[v] &= \sigma_i[v] + \frac{1}{n}\Big[\ v(N) - \sum_{j\in N}\sigma_j[v]\ \Big] \\
&= \sum_{p=1}^{n}\lambda_p(\sigma_{\alpha_p})_i[v] + \frac{1}{n}\Big[\ v(N) - \sum_{j\in N}\Big(\ \sum_{p=1}^{n}\lambda_p(\sigma_{\alpha_p})_j[v]\ \Big)\ \Big] \\
&= \sum_{p=1}^{n}\lambda_p(\sigma_{\alpha_p})_i[v] + \frac{1}{n}\Big[\ v(N) - \sum_{p=1}^{n}\lambda_p\sum_{j\in N}(\sigma_{\alpha_p})_j[v]\ \Big] \\
&= \sum_{p=1}^{n}\lambda_p\Big\{\ (\sigma_{\alpha_p})_i[v] + \frac{1}{n}\Big[\ v(N) - \sum_{j\in N}(\sigma_{\alpha_p})_j[v]\ \Big]\ \Big\} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\lambda_p(\sigma_{\alpha_p}^a)_i[v].\ \square
\end{aligned}$$

Consecuencia 4.44

Para un semivalor cualquiera σ definido sobre el espacio de juegos G_N:

$$\sigma_i^a[v] = \frac{1}{n} v(N) + L\,\Lambda, \quad i \in N,$$

donde las matrices L, Λ son:

$$L = (l_p)_{1 \le p \le n}, \quad l_p = \frac{1}{n} \sum_{j \in N} \frac{1}{\alpha_p} f_{N \setminus \{j\}}(\overline{\alpha}_p) - \frac{1}{\alpha_p} f_{N \setminus \{i\}}(\overline{\alpha}_p),$$

$$\Lambda^t = (\lambda_1 \cdots \lambda_n), \text{ si } \sigma = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \sigma_{\alpha_p}, \text{ con } 0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n \le 1.$$

Demostración

Para un $i \in N$ cualquiera, basta escribir:

$$\sigma_i^a[v] = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p (\sigma_{\alpha_p}^a)_i[v] = \frac{v(N)}{n} + \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \left[\frac{1}{n\alpha_p} \sum_{j \in N} f_{N \setminus \{j\}}(\bar{\alpha}_p) - \frac{1}{\alpha_p} f_{N \setminus \{i\}}(\bar{\alpha}_p) \right]$$

e identificar con las notaciones del enunciado. $\square$

Observación 4.45

La fórmula de la consecuencia 4.44 escrita para el juego $\Delta v_{g,k:l}$ permite calcular el comportamiento de σ^a para el caso en que de un grafo de cooperación g se suprime una de sus aristas $k\!:\!l$.

$$\Delta\sigma_i^a(v, g, k\!:\!l) = -\sigma_i^a[\Delta v_{g,k:l}] = -\frac{1}{n} \Delta v_{g,k:l}(N) - L_\Delta\,\Lambda, \quad i \in N,$$

siendo $L_\Delta = (l_{\Delta_p})_{1 \le p \le n}, \quad l_{\Delta_p} = \dfrac{1}{n} \sum_{j \in N} \dfrac{1}{\alpha_p} \Delta f_{N \setminus \{j\}}(\overline{\alpha}_p) - \dfrac{1}{\alpha_p} \Delta f_{N \setminus \{i\}}(\overline{\alpha}_p).$

En estas expresiones, debido a la forma que tiene Δf, si escribimos,

$$F_i(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Delta f_{N \setminus \{i\}}(\overline{\alpha}), \quad \alpha \ne 0,$$

se cumple, para los extremos de la arista $k\!:\!l$, $F_k(\alpha) = F_l(\alpha) = 0$.

Ejemplo 4.46

Si retomamos el juego v del ejemplo 4.39 se verifica que por la supresión de la arista $1\!:\!2$ el incremento de la EML es:

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 x_2 [2 + x_3 + x_4 - 4x_3 x_4].$$

Definiendo como en la observación anterior las funciones $F_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$F_1(\alpha) = 0, \qquad F_2(\alpha) = 0, \qquad F_3(\alpha) = -\alpha(2+\alpha), \qquad F_4(\alpha) = -\alpha(2+\alpha).$$

De aquí, $\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{j=1}^{4} F_i(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\alpha(2+\alpha)$ de manera que, para cualquier $\alpha \neq 0$:

$$\Delta\sigma_\alpha^a(v, g, 1\!:\!2) = (\,-\alpha(2+\alpha)/2\,,\ -\alpha(2+\alpha)/2\,,\ \alpha(2+\alpha)/2\,,\ \alpha(2+\alpha)/2\,)\,.$$

Por ejemplo, para $\alpha = 1/2$ obtenemos el incremento por el λ-prenucleolo:

$$\Delta\lambda(v, g, 1\!:\!2) = (-5/8\,, -5/8\,,\ 5/8\,,\ 5/8\,).$$

5

Potencial

5.1 Potencial para semivalores binomiales

Consideramos juegos cooperativos con utilidad transferible definidos sobre un conjunto de n jugadores, es decir, juegos $v \in G_N$.

Para cualquier número real $0 < \alpha < 1$, el semivalor llamado binomial σ_α es aquél que tiene por coeficientes $p_{\alpha,s} = \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$, $1 \leq s \leq n$, de forma que el pago que σ_α asigna a cada jugador $i \in N$ resulta ser:

$$(\sigma_\alpha)_i[v] = \sum_{S:i\in S} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S\setminus\{i\})].$$

El juego v está definido sobre el conjunto de jugadores N. Si $T \subseteq N$ es cualquier subconjunto de N denotamos por (T, v) a la restricción de v en T. Así el propio juego v lo denotamos por (N, v).

Definición 5.1
Llamamos poder del juego (N, v) por el semivalor σ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, a la suma de los pagos que ese semivalor asigna a todos los jugadores $i \in N$ y lo representamos por

$\Pi_\alpha(N,v)$. Para $0<\alpha<1$:

$$\Pi_\alpha(N,v)=\sum_{i\in N}(\sigma_\alpha)_i[N,v]=\sum_{i\in N}\sum_{S:i\in S}\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[v(S)-v(S\setminus\{i\})].$$

Los casos $\alpha=0$ y $\alpha=1$ correspondientes, respectivamente, al índice dictatorial y al índice marginal, tienen como expresión del poder:

$$\Pi_0(N,v)=\sum_{i\in N}(\sigma_0)_i[N,v]=\sum_{i\in N}v(\{i\}),$$

$$\Pi_1(N,v)=\sum_{i\in N}(\sigma_1)_i[N,v]=\sum_{i\in N}[v(N)-v(N\setminus\{i\})].$$

Pretendemos definir un potencial P_α para cada semivalor σ_α, $0\le\alpha\le 1$, de manera que se cumpla:

$$P_\alpha(N,v)-P_\alpha(N\setminus\{i\},v)=(\sigma_\alpha)_i[N,v],\qquad \forall i\in N.$$

Para conseguir este objetivo empleamos una expresión recursiva como la que se encuentra en Dragan (1995) para el valor de Banzhaf, pero ahora empleada para cada uno de los semivalores binomiales.

Definición 5.2
Definimos el potencial P_α para el semivalor σ_α, $0\le\alpha\le 1$, en forma recursiva a través de la expresión

$$P_\alpha(T,v)=\frac{1}{t}\left[\ \Pi_\alpha(T,v)+\sum_{j\in T}P_\alpha(T\setminus\{j\},v)\ \right],\qquad T\neq\emptyset,\ T\subseteq N,$$

con la condición: $P_\alpha(\emptyset,v)=0$.

Aquí $\Pi_\alpha(T,v)$ es el poder del juego (T,v) por el semivalor σ_α, considerando en T la restricción del juego v definido en N.

Lema 5.3
Para cada subconjunto $T\subseteq N$, $T\neq\emptyset$, el poder $\Pi_\alpha(T,v)$ del juego (T,v) por el semivalor $\sigma_\alpha, 0<\alpha<1$, tiene la siguiente expresión:

$$\Pi_\alpha(T,v)=\sum_{U\subseteq T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}[u-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-u)]v(U).$$

Demostración
En la expresión del poder del juego (T, v)

$$\Pi_\alpha(T, v) = \sum_{i \in T} (\sigma_\alpha)_i[T, v] = \sum_{i \in T} \sum_{\substack{S: i \in S \\ S \subseteq T}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s}[v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

agrupamos por subconjuntos incluidos en T:

$$\Pi_\alpha(T, v) = \sum_{U \subseteq T} \left\{ [\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}\, u] v(U) - [\alpha^u (1-\alpha)^{t-(u+1)}(t-u)] v(U) \right\},$$

$$\Pi_\alpha(T, v) = \sum_{U \subseteq T} \alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}[u - \frac{\alpha}{1-\alpha}(t-u)] v(U).$$

Expresión que también puede escribirse como:

$$\Pi_\alpha(T, v) = \sum_{U \subseteq T} \alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u} \left[\frac{1}{1-\alpha} u - \frac{\alpha}{1-\alpha} t \right] v(U). \ \square$$

Proposición 5.4
Si P_α es el potencial de un semivalor σ_α se verifica:

(a) Para $0 < \alpha < 1$, $\quad P_\alpha(T, v) = \sum_{S \subseteq T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s} v(S), \quad \forall T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$

(b) Para $\alpha = 0$, $\quad P_0(T, v) = \sum_{i \in T} v(\{i\}), \quad \forall T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$

(c) Para $\alpha = 1$, $\quad P_1(T, v) = v(T), \quad \forall T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$

Demostración
(a) Actuamos por inducción sobre el cardinal de T. Para $|T| = 1,\ T = \{i\}$,

$$P_\alpha(\{i\}, v) = \frac{1}{1}[\Pi_\alpha(\{i\}, v) + P_\alpha(\emptyset, v)] = \Pi_\alpha(\{i\}, v).$$

Empleando la expresión del poder vista en el lema anterior:

$$P_\alpha(\{i\}, v) = \Pi_\alpha(\{i\}, v) = \alpha^{1-1}(1-\alpha)^{1-1}[1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} 0] v(\{i\}) = v(\{i\}).$$

Ahora suponemos que la fórmula a demostrar es cierta para coaliciones de cardinal hasta $t-1$ y vamos a probarla para cardinal t. Por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in T} P_\alpha(T\setminus\{j\},v) &= \sum_{j\in T}\Big[\sum_{S\subseteq T\setminus\{j\}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-1-s}v(S)\Big]\\ &= \sum_{U\subset T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-1-u}(t-u)v(U),\end{aligned}$$

ya que cada subconjunto $U\subset T$ aparece tantas veces en el doble sumatorio como elementos de T deje de contener, es decir, $t-u$ veces. De esta forma, el potencial para (T,v), $T\neq\emptyset$, que tiene por expresión

$$P_\alpha(T,v)=\frac{1}{t}\Big[\ \Pi_\alpha(T,v)+\sum_{j\in T}P_\alpha(T\setminus\{j\},v)\ \Big]$$

puede escribirse como,

$$\begin{aligned}P_\alpha(T,v) &= \frac{1}{t}\Bigg\{\alpha^{t-1}t\,v(T)+\sum_{U\subset T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}\left[u-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-u)\right]v(U)+\\ &\qquad +\sum_{U\subset T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-1-u}(t-u)v(U)\Bigg\},\end{aligned}$$

$$P_\alpha(T,v)=\alpha^{t-1}v(T)+\frac{1}{t}\sum_{U\subset T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}\left[u-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-u)+\frac{t-u}{1-\alpha}\right]v(U),$$

$$P_\alpha(T,v)=\alpha^{t-1}v(T)+\sum_{U\subset T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}v(U),$$

obteniendo la expresión buscada:

$$P_\alpha(T,v)=\sum_{U\subseteq T}\alpha^{u-1}(1-\alpha)^{t-u}v(U).$$

(b) Para $\alpha=0$, el semivalor σ_0 tiene por coeficientes $p_1=1$, $p_2=\cdots=p_n=0$. En la fórmula del potencial P_α, para $\alpha=0$, se cumple para $|T|=1$:

$$P_0(\{i\},v)=1[\Pi_0(\{i\},v)+0]=1[v(\{i\})-v(\emptyset)]=v(\{i\}).$$

Suponiendo la fórmula cierta hasta cardinal $t-1$, vamos a probarla para t. En primer lugar,

$$\sum_{j\in T} P_0(T\setminus\{j\},v) = \sum_{j\in T}\sum_{i\in T\setminus\{j\}} v(\{i\}) = (t-1)\sum_{i\in T} v(\{i\}),$$

entonces:

$$\begin{aligned} P_0(T,v) &= \frac{1}{t}\left[\ \Pi_0(T,v) + \sum_{j\in T} P_0(T\setminus\{j\},v)\ \right] \\ &= \frac{1}{t}\left[\ \sum_{i\in T} v(\{i\}) + (t-1)\sum_{i\in T} v(\{i\})\ \right] \\ &= \sum_{i\in T} v(\{i\}). \end{aligned}$$

(c) Para $\alpha = 1$, el semivalor σ_1 tiene por coeficientes $p_1 = \cdots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$. En la fórmula del potencial P_α, para $\alpha = 1$, se cumple para $|T| = 1$:

$$P_1(\{i\},v) = 1[\Pi_1(\{i\},v) + 0] = 1[v(\{i\}) - v(\emptyset)] = v(\{i\}).$$

Suponiendo la fórmula que se pretende demostrar cierta hasta cardinal de los subconjuntos $t-1$, vamos a probarla para cardinal t. Para coaliciones como $T\setminus\{j\}$ se cumple:

$$\sum_{j\in T} P_1(T\setminus\{j\},v) = \sum_{j\in T} v(T\setminus\{j\}).$$

De aquí:

$$\begin{aligned} P_1(T,v) &= \frac{1}{t}\left[\ \Pi_1(T,v) + \sum_{j\in T} P_1(T\setminus\{j\},v)\ \right] \\ &= \frac{1}{t}\left[\ \sum_{j\in T}[v(T) - v(T\setminus\{j\})] + \sum_{j\in T} v(T\setminus\{j\})\ \right] \\ &= \frac{1}{t}\sum_{j\in T} v(T) = v(T).\ \square \end{aligned}$$

Teorema 5.5
Si P_α es el potencial de un semivalor σ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces:

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) = (\sigma_\alpha)_j[N,v], \qquad \forall j \in N$$

Demostración
Distinguimos, como en la propiedad anterior, tres casos según los diferentes valores de α.

(a) Para $0 < \alpha < 1$, separamos las coaliciones S que contienen el jugador j de las que no lo contienen:

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) =$$

$$= \sum_{S\subseteq N} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S) - \sum_{S'\subseteq N\setminus\{j\}} \alpha^{s'-1}(1-\alpha)^{n-1-s'}v(S'),$$

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S) +$$

$$+ \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S) - \mathit{1} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}v(S\setminus\{j\}).$$

En el último sumatorio se ha considerado $S = S' \cup \{j\}$, de donde $s = s' + 1$. Este sumatorio se descompone a continuación en dos con los coeficientes según la igualdad $\mathit{1} = \alpha + (\mathit{1} - \alpha)$, de manera que en el siguiente paso pueden agruparse con iguales coeficientes de α y de $(1-\alpha)$.

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S) -$$

$$-\alpha \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}v(S\setminus\{j\}) - (\mathit{1}-\alpha) \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-2}(1-\alpha)^{n-s}v(S\setminus\{j\}) +$$

$$+ \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S),$$

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni j}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[v(S) - v(S\setminus\{j\})] -$$

$$- \sum_{\substack{S'\subseteq N\\ S'\not\ni j}} \alpha^{s'-1}(1-\alpha)^{n-s'}v(S') + \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}v(S).$$

En el penúltimo sumatorio de la expresión anterior se ha considerado $S' = S\setminus\{j\}$, de donde $s' = s-1$. Así los dos últimos sumatorios son iguales y se llega a obtener la fórmula deseada para un jugador cualquiera $j \in N$:

$$P_\alpha(N,v) - P_\alpha(N\setminus\{j\},v) = (\sigma_\alpha)_j[N,v].$$

(b) Para $\alpha = 0$ y cualquier $j \in N$ se cumple:

$$P_0(N,v) - P_0(N\setminus\{j\},v) = \sum_{i\in N} v(\{i\}) - \sum_{i\in N\setminus\{j\}} v(\{i\}) = v(\{j\}) = (\sigma_0)_j[N,v].$$

(c) Para $\alpha = 1$ y cualquier $j \in N$ se verifica:

$$P_1(N,v) - P_1(N\setminus\{j\},v) = v(N) - v(N\setminus\{j\}) = (\sigma_1)_j[N,v]. \ \square$$

Proposición 5.6
Sean $u_T \in G_N$, $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, los juegos de unanimidad en el espacio de juegos G_N, definidos en la forma:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \supseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para un juego cualquiera $v \in G_N$ que se exprese como combinación lineal de los juegos de unanimidad en la forma $v = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T$ se verifica:

(a) Para $0 < \alpha \leq 1$, $\qquad P_\alpha(N,v) = \sum_{T\subseteq N} \alpha^{t-1}\alpha_T.$

(b) Para $\alpha = 0$, $\qquad P_0(N,v) = \sum_{i\in N} \alpha_{\{i\}}.$

Demostración

En la proposición 5.4 hemos visto que el potencial P_α para $0 < \alpha < 1$ adopta la expresión $P_\alpha(T, v) = \sum_{S\subseteq T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s}v(S)$, $P_0(T, v) = \sum_{i\in T} v(\{i\})$, $P_1(T, v) = v(T)$, para cualquier coalición $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$. Por lo tanto, P_α para $0 \leq \alpha \leq 1$ es lineal para juegos de G_N, por lo que bastará calcular el potencial para los juegos de unanimidad u_T. Distinguimos los diferentes casos según los valores de α.

(a1) Para $0 < \alpha < 1$ podemos escribir:

$$P_\alpha(N, u_T) = \sum_{S\subseteq N} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}u_T(S) = \sum_{S\supseteq T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}.$$

Descomponemos el sumatorio según el cardinal de las coaliciones S:

$$P_\alpha(N, u_T) = \sum_{\substack{S\supseteq T\\|S|=t}} \alpha^{t-1}(1-\alpha)^{n-t} + \sum_{\substack{S\supseteq T\\|S|=t+1}} \alpha^{t}(1-\alpha)^{n-t-1} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\substack{S\supseteq T\\|S|=n-1}} \alpha^{n-2}(1-\alpha) + \sum_{\substack{S\supseteq T\\|S|=n}} \alpha^{n-1}.$$

$$P_\alpha(N, u_T) = \binom{n-t}{0}\alpha^{t-1}(1-\alpha)^{n-t} + \binom{n-t}{1}\alpha^{t}(1-\alpha)^{n-t-1} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n-t}{n-t-1}\alpha^{n-2}(1-\alpha) + \binom{n-t}{n-t}\alpha^{n-1}.$$

Sacando factor común de todos los sumandos el término α^{t-1}, llegamos a obtener:

$$P_\alpha(N, u_T) = \alpha^{t-1}\sum_{j=0}^{n-t}\binom{n-t}{j}(1-\alpha)^{n-t-j}\alpha^j = \alpha^{t-1}[(1-\alpha)+\alpha]^{n-t} = \alpha^{t-1}.$$

Tomando en consideración la linealidad de P_α concluimos que:

$$P_\alpha(N, v) = P_\alpha(N, \sum_{T\subseteq N}\alpha_T u_T) = \sum_{T\subseteq N}\alpha_T P_\alpha(N, u_T) = \sum_{T\subseteq N}\alpha^{t-1}\alpha_T.$$

(a2) Para $\alpha = 1$ sabemos que $P_1(T, v) = v(T)$, por lo que para los juegos de unanimidad:

$$P_1(N, u_T) = u_T(N) = 1, \qquad \forall T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$$

Considerando ahora la linealidad de P_1:

$$P_1(N,v) = P_1(N, \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T) = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T P_1(N,u_T) = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T,$$

de forma que se cumple la fórmula del apartado (a) del enunciado también para $\alpha = 1$.

(b) Para el caso $\alpha = 0$ hemos visto que $P_0(T,v) = \sum_{i\in T} v(\{i\})$. Por lo tanto:

$$P_0(N,u_T) = \sum_{i\in N} u_T(\{i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |T| = 1, \\ 0 & \text{si } |T| \neq 1. \end{cases}$$

$$P_0(N,v) = P_0(N, \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T) = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T P_0(N,u_T) = \sum_{|T|=1} \alpha_T.$$

Como que las coaliciones de cardinal 1 son las de los jugadores individuales, concluimos la expresión del apartado (b) del enunciado: $P_0(N,v) = \sum_{i\in N} \alpha_{\{i\}}$. $\square$

Caso particular 5.7
Todas las expresiones que se han deducido para valores de α con $0 < \alpha < 1$, adoptan una expresión particularmente sencilla para el caso $\alpha = 1/2$, que como sabemos corresponde al valor de Banzhaf. De esta manera se puede afimar que:

$$P_{1/2}(T,v) = \frac{1}{2^{t-1}} \sum_{S\subseteq T} v(S), \qquad \forall T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

$$P_{1/2}(N,v) - P_{1/2}(N \setminus \{j\}, v) = \psi_j[N,v], \qquad \forall j \in N.$$

$$P_{1/2}(N,v) = \sum_{T\subseteq N} \frac{1}{2^{t-1}} \alpha_T, \qquad \text{para } v = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T.$$

Aquí $\psi_j[N,v]$ denota el pago que el valor de Banzhaf asigna al jugador $j \in N$ en el juego (N,v). Pueden compararse estos resultados con los que se ofrecen en Dragan (1995), en donde se estudian nuevas propiedades del valor de Banzhaf.

5.2 Potencial para cualquier semivalor

Seguimos considerando juegos cooperativos del espacio G_N.

Cualquier semivalor σ definido sobre los juegos de G_N puede expresarse como combinación lineal de semivalores binomiales. De esta forma, si suponemos dados n números reales $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$, podemos obtener los coeficientes del semivalor σ, p_s, $1 \leq s \leq n$, en forma única como:

$$p_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_{\alpha_j, s},$$

donde los $p_{\alpha_j,s}$ son los coeficientes correspondientes al semivalor binomial σ_{α_j} para $j = 1, \ldots, n$, es decir, $p_{\alpha_j,s} = \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{n-s}$ para $1 \leq s \leq n$, cumpliendo además que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

A partir de estas consideraciones podemos escribir para cada $i \in N$:

$$\begin{aligned}
\sigma_i[N,v] &= \sum_{S \ni i} p_s [v(S) - v(S \setminus \{i\}] \\
&= \sum_{S \ni i} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-s} \right) [v(S) - v(S \setminus \{i\}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{S \ni i} \alpha_j^{s-1} (1-\alpha_j)^{n-s} [v(S) - v(S \setminus \{i\}] \right),
\end{aligned}$$

de donde:

$$\sigma_i[N,v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sigma_{\alpha_j})_i [N,v], \quad \forall i \in N.$$

Hacemos servir la misma notación que en la sección anterior. Para un juego $v \in G_N$ y cualquier coalición $T \subseteq N$ denotamos por (T, v) a la restricción de v en T. Así el propio juego v lo denotamos por (N, v).

Definición 5.8
Llamamos poder del juego (N, v) por el semivalor σ a la suma de los pagos que

ese semivalor asigna a todos los jugadores $i \in N$ y lo representamos por $\Pi_\sigma(N,v)$.

$$\Pi_\sigma(N,v) = \sum_{i\in N} \sigma_i[N,v] = \sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\sigma_{\alpha_j})_i[N,v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i\in N}(\sigma_{\alpha_j})_i[N,v].$$

De esta forma el poder del juego (N,v) por el semivalor σ es una combinación lineal de poderes por semivalores σ_{α_j}: la misma combinación lineal que permite expresar el propio semivalor σ como combinación lineal de los semivalores binomiales σ_{α_j}.

Pretendemos definir ahora un potencial P_σ para un semivalor cualquiera σ definido sobre juegos de G_N, de manera que se cumpla la relación:

$$P_\sigma(N,v) - P_\sigma(N\setminus\{i\},v) = \sigma_i[N,v], \qquad \forall i \in N.$$

Definición 5.9
Definimos el potencial P_σ para el semivalor σ en forma recursiva a través de la expresión

$$P_\sigma(T,v) = \frac{1}{t}\left[\ \Pi_\sigma(T,v) + \sum_{j\in T} P_\sigma(T\setminus\{j\},v)\ \right], \qquad T \neq \emptyset,\, T \subseteq N,$$

con la condición: $P_\sigma(\emptyset,v) = 0$.

A partir de estas definciones de poder y de potencial para un semivalor cualquiera σ definido sobre juegos de G_N, que no son sino la extensión por combinaciones lineales de las correspondientes nociones para semivalores binomiales, podemos probar propiedades análogas a las demostradas en la sección anterior y que se resumen en el siguiente enunciado.

Teorema 5.10
Si P_σ es el potencial de un semivalor σ definido sobre G_N, cuyos coeficientes son p_s, $1 \leq s \leq n$, y $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$ con $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$, entonces:

(a) $$P_\sigma(T,v) = \sum_{S\subseteq T}\left[\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{t-s}\ \right] v(S) = \sum_{S\subseteq T} p_s^t v(S) =$$

$$= \sum_{S\subseteq T}\left[\ \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{s+j}\ \right] v(S), \qquad T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

(b) $P_\sigma(N,v) - P_\sigma(N\setminus\{i\},v) = \sigma_i[N,v], \qquad \forall i \in N.$

(c) Para $v = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T$:

$$P_\sigma(N,v) = \sum_{T\subseteq N} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{t-1} \Big) \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} p_t^t \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} \Big[\sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{t+j} \Big] \alpha_T.$$

Demostración

(a) Para $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, teniendo en cuenta la expresión del poder Π_σ como combinación lineal de poderes de semivalores binomiales y la forma recursiva para la obtención del potencial, podemos escribir:

$$\begin{aligned} P_\sigma(T,v) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{\alpha_j}(T,v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{S\subseteq T} \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{t-s} v(S) \\ &= \sum_{S\subseteq T} \Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{t-s} \Big] v(S) \\ &= \sum_{S\subseteq T} p_s^t v(S) = \sum_{S\subseteq T} \Big[\sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{s+j} \Big] v(S). \end{aligned}$$

(b) Si $i \in N$:

$$\begin{aligned} P_\sigma(N,v) - P_\sigma(N\setminus\{i\},v) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{\alpha_j}(N,v) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{\alpha_j}(N\setminus\{i\},v) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[P_{\alpha_j}(N,v) - P_{\alpha_j}(N\setminus\{i\},v) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sigma_{\alpha_j})_i(N,v) = \sigma_i[N,v]. \end{aligned}$$

(c) Si $v = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T$, donde u_T son los juegos de unanimidad de G_N, entonces:

$$P_\sigma(N,v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{\alpha_j}(N,v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{T\subseteq N} \alpha_j^{t-1} \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{t-1} \Big) \alpha_T.$$

$$P_\sigma(N,v) = \sum_{T\subseteq N} p_t^t \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} \Big[\sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{t+j} \Big] \alpha_T. \ \square$$

En las demostraciones de los apartados (a) y (c) aparecen los coeficientes de los semivalores inducidos por σ en espacios de juegos con cardinal del conjunto de jugadores inferior al de N, p_s^t, $1 \le s \le t \le n$. Las otras dos expresiones corresponden al desarrollo de estos coeficientes como combinaciones lineales de coeficientes de semivalores binomiales, o bien, a su desarrollo en términos de los propios coeficientes del semivalor σ.

Caso particular 5.11
Consideramos como semivalor σ definido sobre juegos de G_N el valor de Shapley, que denotamos como ϕ. Sus coeficientes como semivalor son:

$$p_s^n = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \qquad 1 \le s \le n.$$

Si escribimos un juego cualquiera v como combinación lineal de los juegos de unanimidad $v = \sum_{T\subseteq N} \alpha_T u_T$ y empleamos el resultado del apartado (c) del teorema anterior:

$$P_\phi(N,v) = \sum_{T\subseteq N} p_t^t \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} \gamma(t,t) \alpha_T = \sum_{T\subseteq N} \frac{1}{t} \alpha_T.$$

Puede compararse este resultado con Hart y Mas-Colell (1988), donde se introduce el concepto de potencial para el valor de Shapley.

Lema 5.12
Si $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$, la EML del juego v restringido a la coalición $T \subseteq N$, f_T, puede obtenerse sustituyendo en la función f las variables correspondientes a los elementos de $N \setminus T$ por 0.

Demostración
La EML de un juego $v \in G_N$ es:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{S\subseteq N} \prod_{i\in S} x_i \prod_{j\notin S} (1-x_j) v(S).$$

Para una coalición $T \subseteq N$, podemos separar el sumatorio entre los subconjuntos totalmente contenidos en T y los que no lo están:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{S \subseteq T} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) v(S) + \sum_{S \not\subseteq T} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) v(S).$$

Por comodidad supondremos que T está formada por los t primeros jugadores de N. De esta forma:

$$f(x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0) = \sum_{S \subseteq T} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in T \setminus S} (1 - x_j) v(S),$$

ya que si $S \not\subseteq T$ existirá, al menos, un $i \in S$ tal que $i \notin T$ y al sustituir x_i por 0 anulará el correspondiente término del segundo sumatorio.

La expresión de f_T, EML de la restricción del juego v al subconjunto T, es:

$$f_T(x_1, \ldots, x_t) = \sum_{S \subseteq T} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v(S).$$

De las dos últimas expresiones se sigue la igualdad del enunciado:

$$f_T(x_1, \ldots, x_t) = f(x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0). \; \square$$

Teorema 5.13
(a) Para un semivalor binomial σ_α, $0 < \alpha < 1$, el potencial para cualquier juego restringido (T, v), $T \subseteq N$, puede obtenerse a partir de la EML f del juego (N, v) en la forma siguiente:

$$P_\alpha(T, v) = \frac{1}{\alpha} f_T(\overline{\alpha}),$$

donde $\overline{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^t$ y f_T es la EML del juego (T, v).

(b) Para un semivalor $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$, el potencial para cualquier juego restringido (T, v), $T \subseteq N$, obedece a la siguiente expresión:

$$P_\sigma(T, v) = Q_T \, \Lambda \, ,$$

donde $Q_T = (q_{Tj})_{1 \leq j \leq n}$ es la matriz que tiene por elementos

$$q_{Tj} = \frac{1}{\alpha_j} f_T(\overline{\alpha}_j), \; 1 \leq j \leq n,$$

y $\Lambda^t = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ es el vector de las componentes del semivalor σ en el sistema de referencia $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{1\leq j\leq n}$.

Demostración
(a) La proposición 5.4 establece para $0 < \alpha < 1$ que el potencial P_α tiene por expresión:

$$P_\alpha(T,v) = \sum_{S\subseteq T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s}v(S), \quad \forall T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

Por otro lado, si en la expresión de la EML del juego (T, v),

$$f_T(x_1, \ldots, x_t) = \sum_{S\subseteq T} \prod_{i\in S} x_i \prod_{j\notin S}(1-x_j)v(S),$$

sustituimos las t variables por α, se obtiene:

$$f_T(\overline{\alpha}) = \sum_{S\subseteq T} \alpha^s(1-\alpha)^{t-s}v(S).$$

Comparando la primera y la tercera expresiones:

$$P_\alpha(T,v) = \frac{1}{\alpha} f_T(\overline{\alpha}), \text{ para } 0 < \alpha < 1,\, T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

(b) Según el apartado (a) del teorema 5.10 el potencial para un semivalor σ definido sobre juegos de G_N es:

$$P_\sigma(T,v) = \sum_{S\subseteq T} \Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{t-s} \Big] v(S), \qquad T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

donde $\sigma = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$. Intercambiando el orden de los sumatorios y aplicando el apartado (a):

$$P_\sigma(T,v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big[\sum_{S\subseteq T} \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{t-s}v(S) \Big] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big[\frac{1}{\alpha_j} f_T(\overline{\alpha}_j) \Big] = Q_T\,\Lambda,$$

siendo Q_T y Λ exactamente las matrices del enunciado de la propiedad. $\square$

5.3 Base potencial para semivalores

Definición 5.14
En general, una base para el espacio de juegos cooperativos G_N es una base potencial con respecto a cierto valor X que posea un potencial, si las componentes de cada juego $v \in G_N$ relativas a esa base son, exactamente, los potenciales de X para (N, v) y todos sus juegos restringidos (T, v), $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$.

Un ejemplo de esta situación puede encontrarse en Dragan (1991) para el valor de Shapley. Ahora seguiremos un procedimiento general de obtención, primero para semivalores binomiales y después, en general, para cualquier semivalor.

Lema 5.15
Supongamos que X es un valor sobre G_N con un potencial lineal H.
La base $\{v_S \in G_N : S \subseteq N,\ S \neq \emptyset\}$ del espacio G_N es una base potencial si y sólo si para cada $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$H(S, v_S) = 1;\ \ H(T, v_S) = 0,\ \forall T \subseteq N,\ T \neq S.$$

Demostración
Si $\{v_S \in G_N : S \subseteq N,\ S \neq \emptyset\}$ es base de G_N, cada $v \in G_N$ se expresa en forma única como combinación lineal de los juegos de la base:

$$v = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T v_T.$$

En particular, para $v = v_S :\ v_S = \sum_{T \subseteq N} \beta_T v_T$ siendo $\beta_S = 1$ y $\beta_T = 0$, $\forall T \neq S$.
Si la base es potencial:

$$1 = \beta_S = H(S, v_S);\ \ 0 = \beta_T = H(T, v_S),\ \forall T \subseteq N,\ T \neq S.$$

Recíprocamente, si escribimos $v \in G_N$ como combinación lineal de los juegos de la base y calculamos el potencial:

$$H(S, v) = H(S, \sum_{T \subseteq N} \alpha_T v_T) = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T H(S, v_T) = \alpha_S H(S, v_S) = \alpha_S.$$

Así, cada coeficiente α_S de la combinación lineal es el potencial $H(S, v)$ y la base considerada es base potencial. □

Proposición 5.16
Para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, si P_α denota el potencial para el semivalor binomial σ_α definido sobre juegos de G_N, un juego cualquiera $v \in G_N$ puede reconstruirse recursivamente a partir del potencial por medio de la siguiente expresión:

$$v(T) = \frac{1}{\alpha^{t-1}} \left[\; P_\alpha(T, v) - \sum_{S \subset T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s} v(S) \; \right], \qquad \forall T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

Para $\alpha = 0$, un juego $v \in G_N$ no puede reconstruirse a partir del potencial P_0.

Demostración
Para $0 < \alpha < 1$, el apartado (a) de la proposición 5.4 permite obtener el potencial P_α a partir de los valores $v(S)$ del juego $v \in G_N$:

$$P_\alpha(T, v) = \sum_{S \subseteq T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s} v(S), \qquad \forall T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

Si en esta expresión separamos del sumatorio para $S \subseteq T$ el propio subconjunto T,

$$P_\alpha(T, v) = \alpha^{t-1} v(T) + \sum_{S \subset T} \alpha^{s-1}(1-\alpha)^{t-s} v(S).$$

Podemos ahora despejar $v(T)$ y llegar a la expresión del enunciado para cualquier coalición $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$. En un primer estadio del proceso recursivo $|T| = 1$: $v(\{i\}) = P_\alpha(\{i\}, v)$.

Para el caso $\alpha = 1$, la misma proposición 5.4 en su apartado (c) establece que $P_1(T, v) = v(T)$, con lo que los valores del juego v son exactamente los valores del potencial, cumpliéndose la fórmula del enunciado sustituyendo α por 1.

Para el valor de $\alpha = 0$, el potencial resulta ser $P_0(T, v) = \sum_{i \in T} v(\{i\})$.

En este caso el potencial para σ_0 sólo contempla los valores de los jugadores individuales por un juego $v \in G_N$. En consecuencia, no se puede reconstruir el valor de $v(T)$ para coaliciones con $|T| \geq 2$. $\square$

Proposición 5.17
Para cada $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, existe un único juego $c_{\alpha,S} \in G_N$ cumpliendo:

$$P_\alpha(S, c_{\alpha,S}) = 1; \qquad P_\alpha(T, c_{\alpha,S}) = 0, \quad \forall T \subseteq N,\, T \neq S,$$

que resulta ser:

$$c_{\alpha,S}(T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s} & \text{si } T \supseteq S, \\ \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde P_α denota el potencial del semivalor binomial σ_α definido sobre juegos de G_N, para $0 < \alpha < 1$.

Demostración
A partir de la fórmula obtenida en la proposición anterior podemos afirmar que para las coaliciones T tales que $|T| < |S|$ se cumple:

$$c_{\alpha,S}(T) = 0,$$

ya que los valores $c_{\alpha,S}(T)$ se obtienen de manera recursiva y todos los potenciales $P_\alpha(T, c_{\alpha,S})$ son nulos para $T \neq S$.

Volviendo a emplear la misma fórmula para $|T| = |S|$, siendo los potenciales $P_\alpha(S, c_{\alpha,S}) = 1$, $P_\alpha(T, c_{\alpha,S}) = 0$, $\forall T \subseteq N$, $T \neq S$, y $c_{\alpha,S}(T) = 0$ para todo $T \subset S$, se cumple:

$$c_{\alpha,S}(S) = \frac{1}{\alpha^{s-1}}; \qquad c_{\alpha,S}(T) = 0, \quad T \neq S.$$

Ahora, con la misma fórmula anterior para los subconjuntos T tales que $|T| > |S|$, $T \supset S$, y para el juego $c_{\alpha,S}$:

$$c_{\alpha,S}(T) = -\sum_{U \subset T} \alpha^{u-t}(1-\alpha)^{t-u} c_{\alpha,S}(U),$$

ya que también para estos T se cumple $P_\alpha(T, c_{\alpha,S}) = 0$.

A partir de esta última expresión vamos a probar, por inducción, que se verifica la fórmula del enunciado.

Para $|T| = |S| + 1$, el único subconjunto que da valor no nulo en el sumatorio es $U = S$: $c_{\alpha,S}(S) = 1/\alpha^{s-1}$. En consecuencia,

$$c_{\alpha,S}(T) = -\alpha^{-1}(1-\alpha)\frac{1}{\alpha^{s-1}} = -\alpha^{-s}(1-\alpha), \qquad T \supset S,\ |T| = |S| + 1.$$

Supongamos que se cumple la fórmula del enunciado para $T \supset S$ con $t - s < k$ y probémosla para $T \supset S$ con $t - s = k$.

Los subconjuntos $U \subset T$ que aparecen en el sumatorio los agrupamos según su cardinal:

Para $U = S$, $\binom{t-s}{0}$ términos; para $U = S \cup \{j\}$, $j \in T \setminus S$, $\binom{t-s}{1}$ términos; para $U = S \cup \{j,k\}$, $j,k \in T \setminus S$, $j \neq k$, $\binom{t-s}{2}$ términos; . . . ; para $U = T \setminus \{j\}$, $j \in T \setminus S$, $\binom{t-s}{t-s-1}$ términos.

Entonces, como en la expresión de $c_{\alpha,S}(T)$ los valores que aparecen para $c_{\alpha,S}(U)$ sólo dependen del cardinal de U, para $S \subseteq U \subset T$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} c_{\alpha,S}(T) &= -\alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s}\left[1 - \binom{t-s}{1} + \binom{t-s}{2} - \cdots + (-1)^{t-s-1}\binom{t-s}{t-s-1}\right] \\ &= -\alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s}\left[\ \sum_{j=0}^{t-s}\binom{t-s}{j}(-1)^j - (-1)^{t-s}\ \right] \\ &= -\alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s}(-1)^{t-s+1}, \end{aligned}$$

llegando a obtener:

$$c_{\alpha,S}(T) = (-1)^{t-s}\alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s}, \qquad \text{para } T \supseteq S.$$

Finalmente, si $|T| > |S|$ pero $T \not\supset S$ resulta $c_{\alpha,S}(T) = 0$ por la forma recursiva como se obtienen los valores de $c_{\alpha,S}(T)$ a partir de los potenciales, ya que éstos son todos nulos pues los subconjuntos de T tampoco contienen a S. □

Caso particular 5.18
Para $\alpha = 1/2$ el semivalor binomial correspondiente es el valor de Banzhaf. En

este caso:

$$c_{1/2,S}(T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-t}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t-s} = (-1)^{t-s}2^{s-1} & \text{si } T \supseteq S, \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo 5.19
Para juegos de G_N con $|N| = 4$ y el semivalor correspondiente a $\alpha = 1/3$, la familia de juegos de la propiedad anterior adopta la expresión siguiente:

$$c_{1/3,S}(T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-t}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{t-s} = (-1)^{t-s}2^{t-s}3^{s-1} & \text{si } T \supseteq S, \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se consideran las coaliciones formadas por jugadores de $N = \{1, 2, 3, 4\}$ en el orden de cardinales crecientes y, dentro de un mismo cardinal, en orden lexicográfico.

Si referimos cada juego de la familia $c_{1/3,S}$, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, por su valor actuando sobre cada una de las coaliciones incluidas en N en el orden establecido anteriormente, su expresión es:

$$c_{1/3,\{1\}} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2,\ -2,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 0,\ -8),$$

$$c_{1/3,\{2\}} = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0,\ -2,\ -2,\ 0,\ 4,\ 4,\ 0,\ 4,\ -8),$$

$$c_{1/3,\{3\}} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0,\ -2,\ 0,\ -2,\ 4,\ 0,\ 4,\ 4,\ -8),$$

$$c_{1/3,\{4\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0,\ -2,\ -2,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ -8),$$

$$c_{1/3,\{1,2\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ -6,\ 0,\ 0,\ 12),$$

$$c_{1/3,\{1,3\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 0,\ -6,\ 0,\ 12),$$

....

$$c_{1/3,\{3,4\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ -6,\ -6,\ 12),$$

$$c_{1/3,\{1,2,3\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ -18),$$

....

$$c_{1/3,\{2,3,4\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ -18),$$

$$c_{1/3,\{1,2,3,4\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 27).$$

Proposición 5.20
Supongamos que σ es un semivalor definido sobre el espacio de juegos cooperativos G_N cuyos coeficientes son p_s, $1 \leq s \leq n$. Un juego cualquiera $v \in G_N$ puede reconstruirse recursivamente a partir del potencial P_σ del semivalor σ por medio de la expresión

$$v(T) = \frac{1}{p_t^t}\left[\ P_\sigma(T, v) - \sum_{S \subset T} p_s^t v(S)\ \right],$$

$\forall T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, si y sólo si el n-ésimo coeficiente del semivalor σ es estrictamente positivo ($p_n > 0$). Los coeficientes p_s^t, $1 \leq s \leq t \leq n$, corresponden a los semivalores inducidos por σ sobre espacios de juegos con cardinal del conjunto de jugadores $t \leq n$.

Demostración
Para el semivalor $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$, el apartado (a) del teorema 5.10 permite obtener el potencial P_σ a partir de los valores $v(S)$ del juego $v \in G_N$:

$$P_\sigma(T, v) = \sum_{S \subseteq T} p_s^t v(S), \quad T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$$

Si en esta expresión separamos del sumatorio para $S \subseteq T$ el propio subconjunto T, obtenemos:

$$P_\sigma(T, v) = p_t^t v(T) + \sum_{S \subset T} p_s^t v(S), \quad T \subseteq N,\ T \neq \emptyset.$$

Para poder despejar $v(T)$ es necesario que el coeficiente que lo acompaña sea diferente de cero. Este coeficiente resulta ser el último de los coeficientes de cada semivalor inducido por σ en juegos con cardinal del conjunto de jugadores inferior o igual al de N: $p_t^t,\ t = 1, \ldots, n$.

En particular, para $t = n$, $p_n^n = p_n \neq 0$, de donde: $p_n > 0$.

Recíprocamente. Si $p_n > 0$, al ser $p_s \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, se cumple:

$$p_n = p_n^n > 0, \qquad p_{n-1}^{n-1} = p_{n-1} + p_n > 0, \qquad p_{n-2}^{n-2} = p_{n-2} + 2p_{n-1} + p_n > 0, \ldots$$

y, en general,

$$p_t^t = \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{t+j} > 0, \quad t = 1, \ldots, n,$$

de manera que puede despejarse $v(T)$, para $|T| = t = 1, \ldots, n$.

Aislando $v(T)$:

$$v(T) = \frac{1}{p_t^t} \left[\ P_\sigma(T, v) - \sum_{S \subset T} p_s^t v(S)\ \right],$$

siendo esta expresión válida para cualquier $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$. $\square$

En la siguiente proposición se construye una familia de juegos que, para cada semivalor $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$ con $p_n > 0$, verifica las propiedades que se exige a los juegos de una base para formar base potencial. A continuación se comprueba que efectivamente los juegos encontrados forman una base de G_N con lo que se habrá conseguido construir una base potencial para todos estos semivalores.

Proposición 5.21

Si P_σ denota el potencial del semivalor σ, con $p_n > 0$, definido sobre juegos de G_N, para cada $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, existe un único juego $c_{\sigma,S} \in G_N$ cumpliendo:

$$P_\sigma(S, c_{\sigma,S}) = 1; \qquad P_\sigma(T, c_{\sigma,S}) = 0, \qquad \forall T \subseteq N,\ T \neq S,$$

que resulta ser:

$$c_{\sigma,S}(T) = \begin{cases} (-1)^{t-s} \displaystyle\sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} \frac{(-1)^h}{p_{t-h}^{t-h}} & \text{si } T \supseteq S, \\ & \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración
La fórmula de la proposición anterior podemos escribirla para cada $c_{\sigma,S}$, $S \subseteq N$, $T \subseteq N$, $S, T \neq \emptyset$, de la manera siguiente:

$$c_{\sigma,S}(T) = \frac{1}{p_t^t} P_\sigma(T, c_{\sigma,S}) - \frac{1}{p_t^t} \sum_{U \subset T} p_u^t c_{\sigma,S}(U).$$

Para probar la fórmula del enunciado distinguimos cuatro casos:

(a) Si $|T| < |S|$, como los valores de $c_{\sigma,S}(T)$ se obtienen recursivamente y para todos estos subconjuntos $P_\sigma(T, c_{\sigma,S}) = 0$, podemos afirmar que $c_{\sigma,S}(T) = 0$.

(b) Si $|T| = |S|$, puede suceder que $T \neq S$ en cuyo caso $P_\sigma(T, c_{\sigma,S}) = 0$ y por el apartado anterior $c_{\sigma,S}(U) = 0$ para $U \subset T$, de donde: $c_{\sigma,S}(T) = 0$. Para el caso $T = S$, $P_\sigma(S, c_{\sigma,S}) = 1$ a la vez que $c_{\sigma,S}(U) = 0$ para $U \subset S$. En consecuencia:

$$c_{\sigma,S}(S) = \frac{1}{p_s^s}.$$

(c) Si $|T| > |S|$ pero $T \not\supset S$, por un lado $P_\sigma(T, c_{\sigma,S}) = 0$ y por otro $c_{\sigma,S}(U) = 0$ para $U \subset T$, ya que $U \not\supseteq S$. Así pues, $c_{\sigma,S}(T) = 0$.

(d) Queda por comprobar qué ocurre para el caso $|T| > |S|$ con $T \supset S$.

Para demostrar la fórmula por inducción sobre $|T| - |S|$ empezamos estudiando el caso $t - s = 1$, es decir, $T = S \cup \{i\}$, $i \in T \setminus S$:

$$c_{\sigma,S}(S \cup \{i\}) = 0 - \frac{1}{p_{s+1}^{s+1}} \sum_{U \subset S \cup \{i\}} p_u^{s+1} c_{\sigma,S}(U).$$

De entre todos los subconjuntos $U \subset S \cup \{i\}$ sólo $c_{\sigma,S}(U)$ toma un valor no nulo para $U = S$, que según el apartado (b) es $c_{\sigma,S}(S) = 1/p_s^s$. Por tanto:

$$\begin{aligned} c_{\sigma,S}(S \cup \{i\}) &= \frac{-1}{p_{s+1}^{s+1}}\, p_s^{s+1}\, \frac{1}{p_s^s} = \frac{-1}{p_{s+1}^{s+1}} \left[p_s^s - p_{s+1}^{s+1}\right] \frac{1}{p_s^s} \\ &= (-1) \left[\frac{1}{p_{s+1}^{s+1}} - \frac{1}{p_s^s}\right], \end{aligned}$$

y se cumple la fórmula para $T \supset S$ con $t - s = 1$:

$$c_{\sigma,S}(S \cup \{i\}) = (-1)^1 \sum_{h=0}^{1} \binom{1}{h} \frac{(-1)^h}{p_{s+1-h}^{s+1-h}}.$$

Consideramos ahora el caso $T = S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}$, esto es, $T \supset S$ con $t - s = k$. Por hipótesis de inducción suponemos que la fórmula del enunciado es válida para $T \supset S$ con $t - s < k$ y queremos demostrar que

$$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}) = (-1)^k \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \frac{(-1)^h}{p_{s+k-h}^{s+k-h}}.$$

La fórmula de la proposición 5.20 para el juego $c_{\sigma,S}$ y para la coalición $S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}$ adopta la siguiente expresión:

$$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_1, ..., i_k\}) = \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \sum_{U \subset S \cup \{i_1,..,i_k\}} p_u^{s+k} c_{\sigma,S}(U).$$

Los subconjuntos $U \subset S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}$ para los que $c_{\sigma,S}(U) \neq 0$ son:

Tipo	*Valor de* $c_{\sigma,S}(U)$
S	$c_{\sigma,S}(S) = \frac{1}{p_s^s}$
$S \cup \{i_p\}$ $p=1,\ldots,k$	$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_p\}) = (-1)\left[\frac{1}{p_{s+1}^{s+1}} - \frac{1}{p_s^s}\right]$
$S \cup \{i_p, i_q\}$ $p,q=1,\ldots,k$	$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_p, i_q\}) = (-1)^2 \sum_{h=0}^{2} \binom{2}{h} \frac{(-1)^h}{p_{s+2-h}^{s+2-h}}$
$S \cup \{i_p, i_q, i_r\}$ $1 \leq p,q,r \leq k$	$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_p, i_q, i_r\}) = (-1)^3 \sum_{h=0}^{3} \binom{3}{h} \frac{(-1)^h}{p_{s+3-h}^{s+3-h}}$

$$\begin{array}{ll} \cdots & \cdots \\ & c_{\sigma,S}(S\cup\{i_{\alpha_1},..,i_{\alpha_{k-1}}\}) = \\ \underset{1\le\alpha_1,..,\alpha_{k-1}\le k}{S\cup\{i_{\alpha_1},..,i_{\alpha_{k-1}}\}} & \quad = (-1)^{k-1}\displaystyle\sum_{h=0}^{k-1}\binom{k-1}{h}\frac{(-1)^h}{p_{s+k-1-h}^{s+k-1-h}} \end{array}$$

El número de subconjuntos del tipo S es $\binom{k}{0}$; del tipo $S\cup\{i_p\}$, $1\le p\le k$, es $\binom{k}{1}$; del tipo $S\cup\{i_p,i_q\}$, $1\le p,q\le k$, es $\binom{k}{2}$; del tipo $S\cup\{i_p,i_q,i_r\}$, $1\le p,q,r\le k$, es $\binom{k}{3}$; . . . ; del tipo $S\cup\{i_{\alpha_1},...,i_{\alpha_{k-1}}\}$, $1\le\alpha_1,...,\alpha_{k-1}\le k$, es $\binom{k}{k-1}$.

A partir de estas consideraciones podemos escribir una expresión desarrollada para $c_{\sigma,S}(S\cup\{i_1,\,\ldots,i_k\})$:

$$c_{\sigma,S}(S\cup\{i_1,\,\ldots,i_k\}) = \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}}\left\{\binom{k}{0}p_s^{s+k}\frac{1}{p_s^s}+\binom{k}{1}p_{s+1}^{s+k}(-1)^1\left[\frac{1}{p_{s+1}^{s+1}}-\frac{1}{p_s^s}\right]+\right.$$

$$+\binom{k}{2}p_{s+2}^{s+k}(-1)^2\sum_{h=0}^{2}\binom{2}{h}\frac{(-1)^h}{p_{s+2-h}^{s+2-h}}+\binom{k}{3}p_{s+3}^{s+k}(-1)^3\sum_{h=0}^{3}\binom{3}{h}\frac{(-1)^h}{p_{s+3-h}^{s+3-h}}+$$

$$\left.+\cdots+\binom{k}{k-1}p_{s+k-1}^{s+k}(-1)^{k-1}\sum_{h=0}^{k-1}\binom{k-1}{h}\frac{(-1)^h}{p_{s+k-1-h}^{s+k-1-h}}\right\}.$$

Agrupando:

$$c_{\sigma,S}(S\cup\{i_1,\,\ldots,i_k\}) = \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}}\sum_{a=0}^{k-1}\left\{\binom{k}{a}p_{s+a}^{s+k}(-1)^a\sum_{b=0}^{a}\binom{a}{b}\frac{(-1)^b}{p_{s+a-b}^{s+a-b}}\right\}.$$

Ahora cada factor del tipo p_{s+a}^{s+k}, $0\le a\le k-1$, puede expresarse en función de los últimos coeficientes de cada semivalor inducido sobre juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores. En concreto:

$$p_{s+a}^{s+k} = \sum_{c=0}^{k-a}\binom{k-a}{c}(-1)^c\,p_{s+a+c}^{s+a+c}\,,\qquad 0\le a\le k-1.$$

Para probar la expresión anterior supondremos $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$ con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, de manera que los coeficientes del semivalor σ y de sus semivalores inducidos se expresan como combinación lineal de coeficientes de semivalores binomiales.

$$\begin{aligned} p_{s+a}^{s+k} &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \alpha_j^{s+a-1}(1-\alpha_j)^{k-a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \alpha_j^{s+a-1} \sum_{c=0}^{k-a} \binom{k-a}{c} (-1)^c \alpha_j^c \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{c=0}^{k-a} \binom{k-a}{c} (-1)^c \alpha_j^{s+a+c-1} \\ &= \sum_{c=0}^{k-a} \binom{k-a}{c} (-1)^c \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s+a+c-1} \\ &= \sum_{c=0}^{k-a} \binom{k-a}{c} (-1)^c \, p_{s+a+c}^{s+a+c}, \qquad \text{para } 0 \le a \le k-1. \end{aligned}$$

Entonces, la expresión para $c_{\sigma,S}(S \cup \{i_1, \ldots, i_k\})$ se transforma en:

$$c_{\sigma,S}(S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}) =$$

$$= \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \sum_{a=0}^{k-1} \left\{ \binom{k}{a} \left[\sum_{c=0}^{k-a} \binom{k-a}{c} (-1)^c \, p_{s+a+c}^{s+a+c} \right] (-1)^a \sum_{b=0}^{a} \binom{a}{b} \frac{(-1)^b}{p_{s+a-b}^{s+a-b}} \right\}.$$

Fijado un número a entre 0 y $k-1$ aparecen expresiones con los últimos coeficientes de los semivalores inducidos en el numerador y en el denominador. Los coeficientes que aparecen en el numerador varían desde $c = 0$ hasta $c = k - a$, es decir:

$$p_{s+a}^{s+a}, \ldots, p_{s+k}^{s+k}.$$

Por su lado, los coeficientes que aparecen en el denominador varían desde $b = 0$ hasta $b = a$, esto es:

$$\frac{1}{p_{s+a}^{s+a}}, \ldots, \frac{1}{p_s^s}.$$

De esta forma, los índices de los coeficientes del numerador son siempre mayores o iguales que los índices de los coeficientes del denominador y sólo coinciden cuando es:

$$p_{s+a}^{s+a}, \ \frac{1}{p_{s+a}^{s+a}}, \quad \text{para } 0 \leq a \leq k-1.$$

Este primer tipo de términos da lugar a constantes dentro de la expresión entre llaves en la fórmula de $c_{\sigma,S}(S \cup \{i_1, \ldots, i_k\})$ así que es el coeficiente que afecta a $-1/p_{s+k}^{s+k}$, resultando ser el correspondiente a $c = 0$ en el primer factor y $b = 0$ en el segundo, esto es:

$$\frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \sum_{a=0}^{k-1} \left[\binom{k}{a} \binom{k-a}{0} (-1)^0 \, p_{s+a}^{s+a} \, (-1)^a \binom{a}{0} \frac{(-1)^0}{p_{s+a}^{s+a}} \right] =$$

$$= \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \sum_{a=0}^{k-1} \binom{k}{a} (-1)^a = \frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \left[\sum_{a=0}^{k} \binom{k}{a} (-1)^a - (-1)^k \right] = \frac{(-1)^k}{p_{s+k}^{s+k}} \, ,$$

y hemos obtenido el término para $h = 0$ de la fórmula que queremos probar.

El resto de términos en la fórmula que se pretende demostrar está constituido por aquellos que tienen el factor p_{s+k}^{s+k} en el numerador, de manera que éste se anula con el que aparece fuera de la expresión entre llaves.

Para que se cumpla lo anterior $s + a + c = s + k$, de donde $a + c = k$, es decir, son los términos para $c = k - a$.

$$\frac{-1}{p_{s+k}^{s+k}} \sum_{a=0}^{k-1} \left[\binom{k}{a} \binom{k-a}{k-a} (-1)^{k-a} \, p_{s+k}^{s+k} (-1)^a \sum_{b=0}^{a} \binom{a}{b} \frac{(-1)^b}{p_{s+a-b}^{s+a-b}} \right] =$$

$$= - \left[\sum_{a=0}^{k-1} \binom{k}{a} (-1)^k \sum_{b=0}^{a} \binom{a}{b} \frac{(-1)^b}{p_{s+a-b}^{s+a-b}} \right] = (-1)^{k+1} \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{a} \binom{k}{a} \binom{a}{b} \frac{(-1)^b}{p_{s+a-b}^{s+a-b}}.$$

La variación de p_{s+a-b}^{s+a-b} es desde $a = 0$ con $b = 0$, en donde aparece p_s^s, hasta $a = k - 1$ que con $b = 0$ hace que aparezca p_{s+k-1}^{s+k-1}. Si agrupamos sacando factor común los términos $1/p_{s+a-b}^{s+a-b}$, haciendo $a - b = q$, $0 \leq q \leq k - 1$, podemos igualar la última expresión a la siguiente:

$$(-1)^{k+1}\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{k-q-1}\binom{k}{q+b}\binom{q+b}{b}\frac{(-1)^b}{p_{s+q}^{s+q}}=$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{p_{s+q}^{s+q}}\sum_{b=0}^{k-q-1}\frac{k!}{(k-q-b)!}\frac{1}{b!q!}(-1)^b=$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{p_{s+q}^{s+q}}\frac{k!}{q!}\frac{1}{(k-q)!}\sum_{b=0}^{k-q-1}\frac{(k-q)!}{b!(k-q-b)!}(-1)^b=$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{p_{s+q}^{s+q}}\binom{k}{q}\left[\sum_{b=0}^{k-q}\binom{k-p}{b}(-1)^b-(-1)^{k-q}\right]=$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{p_{s+q}^{s+q}}\binom{k}{q}(-1)^{k-q+1}=\sum_{q=0}^{k-1}\binom{k}{q}\frac{(-1)^{2k-q}}{p_{s+q}^{s+q}}.$$

Si en la última igualdad identificamos $s+q$ con $s+k-h$ tenemos: $q=k-h$. Así la expresión se transforma en:

$$\sum_{h=1}^{k}\binom{k}{k-h}\frac{(-1)^{2k-k+h}}{p_{s+k-h}^{s+k-h}}=(-1)^k\sum_{h=1}^{k}\binom{k}{h}\frac{(-1)^h}{p_{s+k-h}^{s+k-h}}.$$

Sólo queda ahora por probar que los restantes términos que aparecen tienen coeficiente nulo. Estos términos se encuentran afectados por un cociente del tipo:

$$\frac{p_{s+r}^{s+r}}{p_{s+q}^{s+q}},\quad \text{con}\ \ 0\leq q<r\leq k-1.$$

Para determinar el coeficiente que afecta a este tipo de términos en la fórmula que permite obtener $c_{\sigma,S}(S\cup\{i_1,\,\ldots,i_k\})$ identificamos:

$$\left.\begin{array}{l} s+r=s+a+c\\ s+q=s+a-b\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} c=r-a\\ b=a-q\end{array}\right.$$

De esta manera, en el primer sumatorio interior a las llaves consideramos sólo el término $c = r - a$, mientras que en el segundo consideramos sólo $b = a - q$. Así, uno cualquiera de estos términos adopta la forma:

$$\sum_{a=q}^{r} \binom{k}{a} \left[\binom{k-a}{r-a} (-1)^{r-a} \, p_{s+r}^{s+r} \, (-1)^{a} \binom{a}{a-q} \frac{(-1)^{a-q}}{p_{s+q}^{s+q}} \right] =$$

$$= \left[\sum_{a=q}^{r} (-1)^{r-q+a} \binom{k}{a} \binom{k-a}{r-a} \binom{a}{a-q} \right] \frac{p_{s+r}^{s+r}}{p_{s+q}^{s+q}}.$$

Operando sobre el coeficiente, éste resulta ser:

$$(-1)^{r-q} \frac{k!}{(k-r)!q!} \sum_{a=q}^{r} \frac{1}{(r-a)!(a-q)!} (-1)^{a}.$$

Si hacemos $d = a - q$, el sumatorio se transforma en:

$$\sum_{d=0}^{r-q} \frac{1}{(r-d-q)!d!} (-1)^{d+q} = (-1)^{q} \frac{1}{(r-q)!} \sum_{d=0}^{r-q} \frac{(r-q)!}{d!(r-q-d)!} (-1)^{d} =$$

$$= (-1)^{q} \frac{1}{(r-q)!} \sum_{d=0}^{r-q} \binom{r-q}{d} (-1)^{d} = 0.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 5.22
Si σ es un semivalor de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, definido sobre el espacio de juegos G_N, con $p_n > 0$, entonces la familia de juegos

$$C_\sigma = \{ c_{\sigma,S} \in G_N \, / \, S \subseteq N, \; S \neq \emptyset \}$$

forma una base potencial del espacio G_N respecto al semivalor σ.

Demostración
En primer lugar $|C_\sigma| = 2^n - 1 = \dim G_N$. Basta demostrar que los juegos de

C_σ son linealmente independientes. Para ello ordenamos los juegos $c_{\sigma,S}$ según el cardinal de S y, dentro del mismo cardinal, lexicográficamente.

Si formamos la matriz con las componentes de cada $c_{\sigma,S}$, donde cada componente representa la actuación de $c_{\sigma,S}$ sobre las diferentes coaliciones $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, ordenadas del mismo modo que las S de $c_{\sigma,S}$, obtenemos una matriz triangular inferior ya que $c_{\sigma,S}(T) = 0$ si $|T| < |S|$ o si $|T| = |S|$ con $T \neq S$. Los elementos que aparecen en la diagonal de esta matriz son:

$$c_{\sigma,S}(S) = \frac{1}{p_s^s}, \qquad 1 \leq s \leq n.$$

Como ya habíamos visto en la fórmula que permite reconstruir el juego a partir del potencial, $p_n > 0$ hace que $p_s^s > 0$, $1 \leq s \leq n$. Así, el determinante de la matriz de los juegos de C_σ resulta ser:

$$\prod_{S \subseteq N} \frac{1}{p_s^s} > 0,$$

y los vectores de C_σ son linealmente independientes.

El hecho de que esta base sea potencial es debido a las condiciones que se exigen en la propia definición de cada $c_{\sigma,S}$. $\square$

Caso particular 5.23
Consideramos un semivalor binomial σ_α, $0 < \alpha < 1$, definido sobre el espacio de juegos G_N. En este caso se cumple:

$$\sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} \frac{(-1)^h}{p_{t-h}^{t-h}} = \sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} \frac{(-1)^h}{\alpha^{t-h-1}} = \frac{1}{\alpha^{t-1}} \sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} \frac{(-1)^h}{\alpha^{-h}} =$$

$$= \alpha^{1-t} \sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} (-\alpha)^h = \alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s}.$$

De aquí:

$$c_{\alpha,S}(T) = \begin{cases} (-1)^{t-s}\, \alpha^{1-t}(1-\alpha)^{t-s} & \text{si } T \supseteq S, \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta manera, la familia $C_\alpha = \{c_{\alpha,S} \in G_N \ / \ S \subseteq N, \ S \neq \emptyset\}$ forma una base potencial para el semivalor binomial σ_α, $0 < \alpha < 1$, definido sobre juegos de G_N.

Caso particular 5.24
Consideramos el valor de Shapley como semivalor sobre juegos de G_N y lo denotamos por ϕ. Sus coeficientes son:

$$p_s^n = \gamma(n,s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \quad 1 \leq s \leq n.$$

La expresión de p_{t-h}^{t-h} es, en este caso,

$$p_{t-h}^{t-h} = \gamma(\,t-h,\, t-h\,) = \frac{1}{t-h},$$

y la fórmula de $c_{\sigma,S}(T)$ para $\sigma = \phi$ y $T \supseteq S$ da lugar a:

$$c_{\phi,S}(T) = (-1)^{t-s} \sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} \frac{(-1)^h}{p_{t-h}^{t-h}} = (-1)^{t-s} \sum_{h=0}^{t-s} \binom{t-s}{h} (-1)^h (t-h).$$

Distinguimos diferentes coaliciones $T \supseteq S$ para evaluar los valores que toma $c_{\sigma,S}(T)$. Para $T = S$:

$$c_{\phi,S}(S) = (-1)^0 s = s.$$

Para $T = S \cup \{i\}$, $i \notin S$:

$$c_{\phi,S}(S \cup \{i\}) = (-1)^1 \ \left[\tbinom{1}{0}(-1)^0(s+1) + \tbinom{1}{1}(-1)^1 s\right] = -1.$$

Para $T = S \cup \{i,j\}$, $i,j \notin S$:

$$c_{\phi,S}(S \cup \{i,j\}) = (-1)^2 \ \left[\tbinom{2}{0}(s+2) + \tbinom{2}{1}(-1)(s+1) + \tbinom{2}{0} s\right] = 0.$$

En general, para $T = S \cup \{i_1, ..., i_q\}$, $i_1, ..., i_q \notin S$, $2 < q \leq n-s$:

$$\begin{aligned}
c_{\phi,S}(S \cup \{i_1, ..., i_q\}) &= (-1)^q \sum_{h=0}^{q} \binom{q}{h} (-1)^h (s+q-h) \\
&= (-1)^q \left[(s+q) \sum_{h=0}^{q} \binom{q}{h} (-1)^h - \sum_{h=0}^{q} \binom{q}{h} (-1)^h h \right] \\
&= (-1)^{q+1} \sum_{h=0}^{q} \binom{q}{h} (-1)^h h = 0.
\end{aligned}$$

Para las demás coaliciones $T \not\supseteq S$, $c_{\phi,S}(T) = 0$.

Según hemos visto, la familia $C_\phi = \{c_{\phi,S} \in G_N \,/\, S \subseteq N,\, S \neq \emptyset\}$ forma una base potencial para el valor de Shapley definido sobre juegos de G_N. Puede compararse este resultado con el análogo en Dragan (1991).

Ejemplo 5.25
(a) Consideramos el espacio de juegos de tres jugadores G_N, $|N| = 3$, y sobre este espacio un semivalor σ de coeficientes $(p_1, p_2, p_3) = (1/2, 1/5, 1/10)$. Vamos a determinar la base potencial en G_N, $|N| = 3$, respecto al semivalor σ.

Este semivalor viene a indicar que se atribuye un 50% de probabilidad a que un jugador cualquiera de los tres actúe en solitario, un 20% a que lo haga formando cada una de las dos posibles coaliciones bipersonales de las que puede formar parte y un 10% a que forme parte de la coalición total.

Según la fórmula obtenida para determinar los juegos de la base potencial $c_{\sigma,S}$, donde los subconjuntos S tienen cardinales $s = 1, 2, 3$, necesitamos calcular:

$$p_3^3 = p_3 = \frac{1}{10}, \qquad p_2^2 = p_2 + p_3 = \frac{3}{10}, \qquad p_1^1 = 1.$$

El primer juego de la base potencial por el semivalor σ es $c_{\sigma,\{1\}}$, el cual actúa sobre las coaliciones que contengan al jugador 1 en la forma:

$$c_{\sigma,\{1\}}(\{1\}) = (-1)^0 \binom{0}{0} \frac{(-1)^0}{p_1^1} = 1,$$

$$c_{\sigma,\{1\}}(\{1,2\}) = (-1)^1 \sum_{h=0}^{1} \binom{1}{h} \frac{(-1)^h}{p_{2-h}^{2-h}} = -\left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_1^1}\right] = -\frac{7}{3},$$

$$c_{\sigma,\{1\}}(\{1,2,3\}) = (-1)^2 \sum_{h=0}^{2} \binom{2}{h} \frac{(-1)^h}{p_{3-h}^{3-h}} = \frac{1}{p_3^3} - \frac{2}{p_2^2} + \frac{1}{p_1^1} = \frac{13}{3}.$$

La actuación sobre la coalición $\{1,3\}$ es la misma que sobre $\{1,2\}$, ya que sólo depende del hecho de contener al jugador 1 y del cardinal de la propia coalición. Los mismos valores hallados sirven para los juegos $c_{\sigma,\{2\}}$, $c_{\sigma,\{3\}}$, dependiendo ahora del cardinal de la coalición que contenga, respectivamente, a los jugadores 2 ó 3.

Si referimos estos juegos en componentes según su actuación sobre las diferentes coaliciones, ordenadas primero por cardinal y dentro de un mismo cardinal lexicográficamente, se tiene:

$$c_{\sigma,\{1\}} = (1,\ 0,\ 0,\ -7/3,\ -7/3,\ 0,\ 13/3),$$

$$c_{\sigma,\{2\}} = (0,\ 1,\ 0,\ -7/3,\ 0,\ -7/3,\ 13/3),$$

$$c_{\sigma,\{3\}} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -7/3,\ -7/3,\ 13/3).$$

Vamos a calcular ahora el comportamiento de un juego $c_{\sigma,S}$, $|S| = 2$, sobre coaliciones que contengan a S y que pueden ser de cardinal 2 ó 3. Por ejemplo:

$$c_{\sigma,\{1,2\}}(\{1,2\}) = (-1)^0 \binom{0}{0} \frac{(-1)^0}{p_2^2} = \frac{10}{3},$$

$$c_{\sigma,\{1,2\}}(\{1,2,3\}) = (-1)^1 \sum_{h=0}^{1} \binom{1}{h} \frac{(-1)^h}{p_{3-h}^{3-h}} = -\left[\frac{1}{p_3^3} - \frac{1}{p_2^2}\right] = -\frac{20}{3}.$$

De aquí:

$$c_{\sigma,\{1,2\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 10/3,\ 0,\ 0,\ -20/3),$$

$$c_{\sigma,\{1,3\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10/3,\ 0,\ -20/3),$$

$$c_{\sigma,\{2,3\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10/3,\ -20/3).$$

Por último:

$$c_{\sigma,\{1,2,3\}}(\{1,2,3\}) = (-1)^0 \binom{0}{0} \frac{(-1)^0}{p_3^3} = 10,$$

de donde,

$$c_{\sigma,\{1,2,3\}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10).$$

Se puede comprobar que estos 7 vectores forman base de G_N, $|N| = 3$. El determinante de la matriz formada por sus componentes toma el valor que se ha probado:

$$\Delta = \prod_{S \subseteq N} \frac{1}{p_s^s} = 1^3 \left(\frac{10}{3}\right)^3 10 > 0.$$

(b) Consideramos un juego concreto perteneciente a G_N, $|N| = 3$, definido como sigue:

$$v = (2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7),$$

donde cada componente representa la actuación de v sobre las diferentes coaliciones ordenadas como de costumbre.

Tratamos de expresar este juego $v \in G_N$ como combinación lineal de la base obtenida en el apartado (a), $\{c_{\sigma,S} \in G_N \,/\, S \subseteq N,\, |N| = 3,\, S \neq \emptyset\}$, y luego comprobar que esos coeficientes son precisamente los potenciales por el semivalor σ del juego v restringido a cada subconjunto S.

Para expresar el juego v como combinación lineal de la forma

$$v = \sum_{S \subseteq N,\ S \neq \emptyset} \alpha_S\, c_{\sigma,S},$$

planteamos un sistema lineal con incógnitas α_S cuya solución es:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{23},\ \alpha_{123}) = (2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3.3,\ 2.9,\ 5.1),$$

donde hemos identificado cada coeficiente con unos subíndices que se corresponden a los elementos que pertenecen a cada subconjunto S.

Comprobamos ahora el potencial por el semivalor σ para cada juego restringido empleando la fórmula del apartado (a) del teorema 5.10:

$$P_\sigma(T, v) = \sum_{S \subseteq T} p_s^t\, v(S), \quad T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

Para subconjuntos de cardinal 1:

$$P_\sigma(\{i\}, v) = p_1^1\, v(\{i\}) = v(\{i\}),$$

de donde,

$$P_\sigma(\{1\}, v) = 2, \quad P_\sigma(\{2\}, v) = 1, \quad P_\sigma(\{3\}, v) = 1.$$

Para subconjuntos de cardinal 2:

$$\begin{aligned} P_\sigma(\{i,j\}, v) &= p_1^2\, [v(\{i\}) + v(\{j\})] + p_2^2 v(\{i,j\}) \\ &= (p_1 + p_2)\, [v(\{i\}) + v(\{j\})] + (p_2 + p_3) v(\{i,j\}), \end{aligned}$$

de donde,

$$P_\sigma(\{1,2\},v) = 3, \quad P_\sigma(\{1,3\},v) = 3.3, \quad P_\sigma(\{2,3\},v) = 2.9.$$

En último lugar, para $N = \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} P_\sigma(N,v) &= p_1\left[v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})\right] + p_2\left[v(\{1,2\}) + \right. \\ & \qquad \left. + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\})\right] + p_3 v(\{1,2,3\}), \end{aligned}$$

de donde,

$$P_\sigma(\{1,2,3\},v) = 5.1.$$

También podemos calcular los potenciales respecto al semivalor σ empleando la EML. En primer lugar expresamos σ como combinación lineal de semivalores binomiales para $\alpha = 1/6,\ 1/2,\ 5/6$:

$$\sigma = \frac{21}{40}\sigma_{1/6} + \frac{22}{40}\sigma_{1/2} + \frac{-3}{40}\sigma_{5/6}.$$

La EML del juego v que tratamos es

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_3 + 3x_2x_3 - x_1x_2x_3.$$

Para calcular el potencial a través de la EML empleamos la expresión:

$$P_\sigma(T,v) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j P_{\alpha_j}(T,v) = Q_T\,\Lambda, \quad T \subseteq N,$$

donde $Q_T = (q_{Tj}),\ q_{Tj} = f_T(\overline{\alpha}_j)/\alpha_j$, $1 \le j \le 3$, con $\Lambda^t = (21/40\ \ 22/40\ \ -3/40)$.

Comprobamos, por ejemplo, el cálculo para la coalición $\{2,3\}$:

$$f_{\{2,3\}} = x_2 + x_3 + 3x_2x_3,$$

$$f_{\{2,3\}}(\overline{\alpha}) = 2\alpha + 3\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad P_\alpha(\{2,3\},v) = 2 + 3\alpha,$$

$$P_\sigma(T,v) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21/40 \\ 22/40 \\ -3/40 \end{pmatrix} = 2.9.$$

El resto de potenciales respecto a σ puede calcularse de manera análoga.

5.4 Los espacios nulos

Proposición 5.26
En el espacio de juegos G_N, fijado un semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, con $p_n > 0$, para los juegos de la base potencial $c_{\sigma,S}$, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, se verifica:

$$\text{(a)} \qquad \sigma[N, c_{\sigma,N}] = u,$$

$$\text{(b)} \qquad \sigma[N, c_{\sigma,N\setminus\{j\}}] = -e_j, \quad \forall j \in N$$

$$\text{(c)} \qquad \sigma[N, c_{\sigma,S}] = 0, \quad \forall S \subset N,\ 1 \leq |S| \leq n-2,$$

donde e_j es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $u = (1, 1, ..., 1)$.

Demostración
A partir del potencial, el pago a un jugador $i \in N$ por el semivalor σ puede calcularse por medio de la expresión:

$$\sigma_i[N, v] = P_\sigma(N, v) - P_\sigma(N\setminus\{i\}, v).$$

(a) Aplicando la expresión anterior para $v = c_{\sigma,N}$:

$$\sigma_i[N, c_{\sigma,N}] = P_\sigma(N, c_{\sigma,N}) - P_\sigma(N\setminus\{i\}, c_{\sigma,N}) = 1 - 0 = 1,$$

de donde se sigue que $\sigma[N, c_{\sigma,N}] = u$.

(b) Aplicando la misma expresión para el juego $c_{\sigma,N\setminus\{j\}}$:

$$\sigma_i[N, c_{\sigma,N\setminus\{j\}}] = P_\sigma(N, c_{\sigma,N\setminus\{j\}}) - P_\sigma(N\setminus\{i\}, c_{\sigma,N\setminus\{j\}}) = 0 - \delta_{ij} = -\delta_{ij},$$

de donde se concluye que $\sigma[N, c_{\sigma,N\setminus\{j\}}] = -e_j$, para $j \in N$.

(c) Por último, aplicando la expresión para $S \subset N$, $|S| \leq n-2$:

$$\sigma_i[N, c_{\sigma,S}] = P_\sigma(N, c_{\sigma,S}) - P_\sigma(N\setminus\{i\}, c_{\sigma,S}) = 0,$$

de donde se obtiene $\sigma[N, c_{\sigma,S}] = 0$ para $S \subset N,\ 1 \leq |S| \leq n-2$. $\square$

Definición 5.27
Para un semivalor σ sobre el espacio de juegos cooperativos G_N llamamos espacio nulo por este semivalor al conjunto de juegos v tales que $\sigma[v] = 0$. Lo designamos por $EN(\sigma)$.

$$EN(\sigma) = \{v \in G_N \ / \ \sigma[v] = 0\}.$$

Este conjunto es un subespacio vectorial del espacio de juegos G_N.

Proposición 5.28
En el espacio de juegos G_N, fijado un semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, con $p_n > 0$, el espacio nulo por el semivalor σ tiene dimensión $2^n - n - 1$ y está generado por la familia de juegos

$$\left\{ \ c_{\sigma,N} + \sum_{j=1}^{n} c_{\sigma,N \setminus \{j\}} \ , \ c_{\sigma,S} \ / \ 1 \leq |S| \leq n-2 \ \right\}.$$

Demostración
En primer lugar vemos que todos los juegos de esta familia pertenecen a $EN(\sigma)$, ya que por la proposición anterior:

$$\sigma[N, c_{\sigma,N} + \sum_{j=1}^{n} c_{\sigma,N \setminus \{j\}}] = u + \sum_{j=1}^{n} (-e_j) = 0,$$

$$\sigma[N, c_{\sigma,S}] = 0, \quad \forall S \subset N, \ 1 \leq |S| \leq n-2.$$

Además, forman una familia linealmente independiente.

Ahora vamos a probar que cualquier juego $v \in EN(\sigma)$ es combinación lineal de los juegos de esta familia.

Para un juego cualquiera $v \in G_N$ escribimos su expresión como combinación lineal de los vectores de la base potencial. En esta base los coeficientes resultan ser los potenciales de v y de todas las restricciones de v a cada coalición:

$$v = \sum_{S \subseteq N} P_\sigma(S, v) c_{\sigma,S}.$$

Como que el juego v es un juego concreto y el semivalor σ está fijado, los potenciales que aparecen en la expresión de v son unos números determinados que podemos designar por $q_S = P_\sigma(S, v)$. De esta forma:

$$v = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ 1\leq|S|\leq n-2}} q_S c_{\sigma,S} + \sum_{j\in N} q_{N\setminus\{j\}} c_{\sigma,N\setminus\{j\}} + q_N c_{\sigma,N},$$

$$v = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ 1\leq|S|\leq n-2}} q_S c_{\sigma,S} + q_N \left[\; c_{\sigma,N} + \sum_{j\in N} c_{\sigma,N\setminus\{j\}} \;\right] - \sum_{j\in N} \left[q_N - q_{N\setminus\{j\}}\right] c_{\sigma,N\setminus\{j\}}.$$

En esta expresión, los coeficientes en el último sumatorio son

$$q_N - q_{N\setminus\{j\}} = P_\sigma(N, v) - P_\sigma(N\setminus\{j\}, v) = \sigma_j[N, v],$$

de manera que para un juego $v \in G_N$ podemos escribir:

$$v = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ 1\leq|S|\leq n-2}} q_S c_{\sigma,S} + q_N \left[\; c_{\sigma,N} + \sum_{j\in N} c_{\sigma,N\setminus\{j\}} \;\right] - \sum_{j\in N} \sigma_j[N, v] c_{\sigma,N\setminus\{j\}}. \tag{5.1}$$

Si $v \in EN(\sigma)$, $\sigma_j[N, v] = 0$, $\forall j \in N$, de tal manera que todo juego de $EN(\sigma)$ se expresa como combinación lineal de los juegos del enunciado y, además, los coeficientes de la combinación son exactamente los potenciales $P_\sigma(S, v)$ para los juegos $c_{\sigma,S}$, $1 \leq |S| \leq n-2$, y $P_\sigma(N, v)$ para el juego $c_{\sigma,N} + \sum_{j\in N} c_{\sigma,N\setminus\{j\}}$. $\square$

Consecuencia 5.29
En el espacio de juegos G_N, fijado un semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, con $p_n > 0$, la solución de la ecuación

$$\sigma[N, v] = \eta,$$

donde $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ es un vector dado de $\mathbb{R}^n$, viene dada por la expresión:

$$v = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ 1\leq|S|\leq n-2}} q_S c_{\sigma,S} + q_N \left[\; c_{\sigma,N} + \sum_{j\in N} c_{\sigma,N\setminus\{j\}} \;\right] - \sum_{j\in N} \eta_j c_{\sigma,N\setminus\{j\}}, \tag{5.2}$$

siendo los coeficientes $q_N,\ q_S,\ 1 \leq |S| \leq n-2$, grados de libertad del conjunto de soluciones, resultando ser luego, para cada elección, los potenciales del juego v para N y para v restringido a S, $1 \leq |S| \leq n-2$, respectivamente.

Demostración
Basta reescribir la expresión (5.1) imponiendo $\sigma_j[N,v] = \eta_j,\ j \in N$, para obtener todos los juegos que tienen como semivalor el vector η dado. $\square$

Consecuencia 5.30
En las mismas condiciones que la consecuencia 5.29, vamos a escoger una solución particular de la ecuación $\sigma[N,v] = \eta$ imponiendo los siguientes potenciales:

$$q_N = P_\sigma(N,v) = 0; \quad q_S = P_\sigma(S,v) = 0, \ \ 1 \leq |S| \leq n-2.$$

Esta solución particular adopta la forma:

$$\overline{v}_\sigma = - \sum_{j\in N} \eta_j c_{\sigma,N\setminus\{j\}}.$$

El juego $\overline{v}_\sigma$ es combinación lineal de los juegos $c_{\sigma,N\setminus\{j\}}$, $j \in N$, que toman los valores siguientes:

$$c_{\sigma,N\setminus\{j\}}(N\setminus\{j\}) = \frac{1}{p_{n-1}^{n-1}} = \frac{1}{p_n + p_{n-1}},$$

$$c_{\sigma,N\setminus\{j\}}(N) = (-1)\left[\frac{1}{p_n^n} + \frac{-1}{p_{n-1}^{n-1}}\right] = \frac{1}{p_n + p_{n-1}} - \frac{1}{p_n} = \frac{-p_{n-1}}{p_n}\,\frac{1}{p_n + p_{n-1}},$$

$$c_{\sigma,N\setminus\{j\}}(S) = 0, \ \text{ si } S \neq N, N\setminus\{j\}.$$

Así, la solución particular de $\sigma[N,v] = \eta$ que hemos escogido es:

$$\overline{v}_\sigma(S) = \begin{cases} \dfrac{p_{n-1}}{p_n}\,\dfrac{1}{p_n + p_{n-1}} \displaystyle\sum_{j\in N} \eta_j & \text{si } S = N, \\[2ex] \dfrac{-1}{p_n + p_{n-1}}\,\eta_j & \text{si } S = N\setminus\{j\},\ 1 \leq j \leq n, \\[2ex] 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A este juego $\overline{v}_\sigma$ que verifica $\sigma[N,v] = \eta$ le llamaremos juego "sencillo" que satisface esta ecuación. Se puede comprobar que, efectivamente, cumple $\sigma_j[N,v] = \eta_j,\ \forall j \in N$:

$$\begin{aligned}
\sigma_j[N,v] &= p_n \left[\frac{p_{n-1}}{p_n} \frac{1}{p_n + p_{n-1}} \sum_{j\in N} \eta_j - \frac{-\eta_j}{p_n + p_{n-1}} \right] + p_{n-1} \left[\sum_{i\neq j} \frac{-\eta_i}{p_n + p_{n-1}} \right] \\
&= \frac{p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}} \sum_{j\in N} \eta_j + \frac{p_n}{p_n + p_{n-1}} \eta_j - \frac{p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}} \sum_{i\neq j} \eta_i \\
&= \frac{p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}} \eta_j + \frac{p_n}{p_n + p_{n-1}} \eta_j = \eta_j.
\end{aligned}$$

Casos particulares 5.31
Para el valor de Banzhaf:

$$p_n = p_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p_n + p_{n-1}} = \frac{p_{n-1}}{p_n} \frac{1}{p_n + p_{n-1}} = 2^{n-2}.$$

$$\overline{v}_\psi(S) = \begin{cases} 2^{n-2} \sum_{j\in N} \eta_j & \text{si } S = N, \\ -2^{n-2}\, \eta_j & \text{si } S = N \setminus \{j\},\ 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para el valor de Shapley:

$$p_n = \gamma(n,n) = \frac{1}{n}, \quad p_{n-1} = \gamma(n,n-1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p_n + p_{n-1}} = n-1, \quad \frac{p_{n-1}}{p_n} \frac{1}{p_n + p_{n-1}} = 1.$$

$$\overline{v}_\phi(S) = \begin{cases} \sum_{j\in N} \eta_j & \text{si } S = N, \\ (1-n)\, \eta_j & \text{si } S = N \setminus \{j\},\ 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 5.32
(a) El juego "sencillo" de cuatro jugadores que por el valor de Banzhaf obtiene como vector de pagos $\eta = (3, 4, 5, 7)$ resulta ser:

$$\overline{v}_\psi(S) = \begin{cases} 76 & S = N, \\ -12 & S = \{2,3,4\}, \\ -16 & S = \{1,3,4\}, \\ -20 & S = \{1,2,4\}, \\ -28 & S = \{1,2,3\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) El juego "sencillo" de cuatro jugadores que por el valor de Shapley obtiene como vector de pagos $\eta = (3, 4, 5, 7)$ resulta ser:

$$\overline{v}_\phi(S) = \begin{cases} 19 & S = N, \\ -9 & S = \{2,3,4\}, \\ -12 & S = \{1,3,4\}, \\ -15 & S = \{1,2,4\}, \\ -21 & S = \{1,2,3\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consecuencia 5.33
En el espacio de juegos G_N, fijado un semivalor σ de coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, con $p_n > 0$, la solución de la ecuación no homogénea

$$\sigma[N, v] = \eta,$$

donde $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ es un vector dado de $\mathbb{R}^n$, se obtiene como la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $\sigma[N, v] = 0$, más una solución particular de la no homogénea.

Demostración
La expresión (5.2) es la solución general de la ecuación $\sigma[N, v] = \eta$. Esta expresión es exactamente:

$$v = EN(\sigma) + \overline{v}_\sigma.$$

De esta manera, la solución de cualquier ecuación $\sigma[N, v] = \eta$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, tiene una parte común que es el espacio nulo por el semivalor σ y una parte específica cuya solución es el juego "sencillo" que se ha determinado explícitamente en la consecuencia 5.30. $\square$

5.5 El juego de poder

En el lema 5.3 de la sección dedicada al potencial para semivalores binomiales σ_α se ha probado que el poder por uno de tales semivalores tiene por expresión:

$$\Pi_\alpha(S,v) = \sum_{U\subseteq S} \alpha^{u-1}(1-\alpha)^{s-u}\left[\frac{1}{1-\alpha}u - \frac{\alpha}{1-\alpha}s\right] v(U),$$

para todo subconjunto $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, y $0 < \alpha < 1$.

Si en el sumatorio separamos el propio subconjunto S obtenemos:

$$\Pi_\alpha(S,v) = s\alpha^{s-1}v(S) + \sum_{U\subset S} \alpha^{u-1}(1-\alpha)^{s-u-1}\left[u - s\alpha\right] v(U).$$

Para un semivalor cualquiera σ definido sobre el espacio de juegos G_N que tenga por coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, y dados n números reales diferentes α_j, $0 < \alpha_j < 1$, de manera que el semivalor σ se escriba como $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, el poder por el semivalor σ tiene por expresión:

$$\Pi_\sigma(S,v) = s\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1} v(S) + \sum_{U\subset S}\left[\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{u-1}(1-\alpha_j)^{s-u-1}(u - s\alpha_j)\ \right] v(U),$$

para todo subconjunto $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$.

Operando el coeficiente del segundo sumatorio para $U \subset S$ podemos escribir:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{u-1}(1-\alpha_j)^{s-u-1}(u - s\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{u-1}(1-\alpha_j)^{s-u-1}[(1-\alpha_j)u - \alpha_j(s-u)] =$$

$$= u\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{u-1}(1-\alpha_j)^{s-u} - (s-u)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha^{u}(1-\alpha_j)^{s-u-1} = u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s,$$

donde p_u^s, p_{u+1}^s son coeficientes del semivalor inducido por σ en el espacio de juegos con cardinal del conjunto de jugadores s $(1 \leq s \leq n)$. De esta forma la expresión de $\Pi_\sigma(S,v)$ se transforma en:

$$\Pi_\sigma(S,v) = s\, p_s^s v(S) + \sum_{U \subset S} \left[\; u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s \;\right] v(U), \quad \text{para } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset.$$

A partir de esta última expresión, si los coeficientes que acompañan a cada $v(S)$ son distintos de cero se puede aislar cada $v(S)$:

$$v(S) = \frac{1}{s\, p_s^s} \left\{\; \Pi_\sigma(S,v) - \sum_{U \subset S} \left[\; u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s \;\right] v(U) \;\right\},$$

para cualquier coalición $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, siempre que se cumpla

$$p_s^s \neq 0, \quad 1 \leq s \leq n.$$

En la demostración de la proposición 5.20 se probó que estas condiciones equivalían a $p_n > 0$. Como consecuencia, podemos enunciar la siguiente propiedad.

Proposición 5.34
Fijado un semivalor σ definido sobre el espacio de juegos cooperativos G_N que tenga por coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, existe una correspondencia biyectiva

$$\begin{array}{ccc} G_N & \to & G_N \\ v & \to & \Pi_\sigma(\ \ ,v) \end{array}$$

definida a través de la relación: $\Pi_\sigma(S,v) = \sum_{j\in S}(\sigma^s)_j[S,v]$, $\forall S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, si y sólo si $p_n > 0$.

Demostración
Las fórmulas que se han escrito antes permiten obtener el poder si se conoce el juego y permiten conocer el juego si se conoce el poder, siendo así como queda establecida la correspondencia biyectiva. El poder de cada juego restringido $\Pi_\sigma(S,v)$ es un número real, de forma que $\Pi_\sigma(\ \ ,v)$ asigna a cada coalición S un número real. Se trata por lo tanto de un juego de G_N, el juego de poder.

La única condición para que pueda recuperarse recursivamente el juego v a partir del poder Π_σ es que todos los coeficientes de $v(S)$ sean no nulos y esto equivale a $p_n > 0$, tal y como se probó en la proposición 5.20. $\square$

Consecuencia 5.35
Dados $2^n - 1$ números reales arbitrarios, existe un único juego $v \in G_N$ que tiene por cierto semivalor σ, con $p_n > 0$, los poderes para (N, v) y todos sus juegos restringidos dados por esos valores.

Ejemplo 5.36
Queremos construir un juego de tres jugadores que por el semivalor σ de coeficientes $(p_1, p_2, p_3) = (1/2,\ 1/5,\ 1/10)$ tenga para el propio juego y todos sus juegos restringidos los siguientes poderes:

$$\Pi_\sigma\ (\{1\}, v) = 1, \qquad \Pi_\sigma(\{2\}, v) = 2, \qquad \Pi_\sigma(\{3\}, v) = 1,$$

$$\Pi_\sigma\ (\{1,2\}, v) = 4, \qquad \Pi_\sigma(\{1,3\}, v) = 4, \qquad \Pi_\sigma(\{2,3\}, v) = 3,$$

$$\Pi_\sigma(\{1,2,3\}, v) = 7.$$

Para determinar el juego v lo hacemos según el cardinal de las coaliciones $S \subseteq N$, empezando por las que son de un solo jugador, $|S| = s = 1$,

$$v(\{i\}) = \frac{1}{1\, p_1^1}\, [\Pi_\sigma(\{i\}, v) - 0] = \Pi_\sigma(\{i\}, v), \qquad i \in N.$$

De aquí:

$$v(\{1\}) = 1, \quad v(\{2\}) = 2, \quad v(\{3\}) = 1.$$

Para coaliciones S con $|S| = s = 2$:

$$v(\{i,j\}) = \frac{1}{2\, p_2^2} \left\{ \ \Pi_\sigma(\{i,j\}, v) - [1\, p_1^2 - (2-1)\, p_2^2]\ [v(\{i\}) + v(\{j\})] \ \right\}.$$

Los coeficientes que aparecen en la expresión no dependen de las coaliciones S concretas, sólo dependen del cardinal de S y de las coaliciones contenidas en S. En este caso:

$$p_2^2 = p_2 + p_3 = \frac{3}{10}\,, \qquad p_1^2 - p_2^2 = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}\,,$$

$$v(\{i,j\}) = \frac{5}{3} \left\{ \Pi_\sigma(\{i,j\}, v) - \frac{2}{5}\, [v(\{i\}) + v(\{j\})] \right\}.$$

En consecuencia:

$$v(\{1,2\}) = \frac{14}{3}, \quad v(\{1,3\}) = \frac{16}{3}, \quad v(\{2,3\}) = 3.$$

Acabamos con las coaliciones con $|S| = s = 3$, que es el propio N:

$$v(N) = \frac{1}{3\,p_3^3}\Big\{\ \Pi_\sigma(N,v) - [2\,p_2^3 - (3-2)\,p_3^3]\ [v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + \\ + v(\{2,3\})] - [1\,p_1^3 - (3-1)\,p_2^3]\ [v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})]\ \Big\}.$$

Ahora los coeficientes son:

$$p_3^3 = p_3 = \frac{1}{10}, \quad 2\,p_2^3 - p_3^3 = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \quad p_1^3 - 2\,p_2^3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Finalmente:

$$v(\{1,2,3\}) = \frac{10}{3}\left\{7 - \frac{3}{10}\ 13 - \frac{1}{10}\ 4\right\} = 9.$$

Así, el juego que cumple las condiciones de poder por el semivalor σ que se han enunciado es:

$v(\{1\}) = 1$,	$v(\{2\}) = 2$,	$v(\{3\}) = 1$,	
$v(\{1,2\}) = 14/3$,	$v(\{1,3\}) = 16/3$,	$v(\{2,3\}) = 3$,	$v(\{1,2,3\}) = 9$.

Podemos comprobar que el juego v cumple esa distribución de poder. Su EML es

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 + \frac{5}{3}\,x_1x_2 + \frac{10}{3}\,x_1x_3.$$

En tal caso:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\alpha}) = 1 + 5\alpha, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(\overline{\alpha}) = 2 + \frac{5}{3}\alpha, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(\overline{\alpha}) = 1 + \frac{10}{3}\alpha.$$

A su vez, el semivalor σ como combinación lineal de semivalores binomiales para $\alpha = 1/6,\ 1/2,\ 5/6$ es:

$$\sigma = \frac{21}{40}\sigma_{1/6} + \frac{22}{40}\sigma_{1/2} + \frac{-3}{40}\sigma_{5/6}\ .$$

Entonces:

$$\sigma[v] = \begin{pmatrix} 11/6 & 7/2 & 31/6 \\ 41/18 & 17/6 & 61/18 \\ 14/9 & 8/3 & 34/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21/40 \\ 22/40 \\ -3/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y el poder del juego v es $\prod_\sigma(N,v) = 7$. De manera análoga podría encontrarse el poder para cualquier juego restringido (S,v), $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, considerando la EML f_S correspondiente.

Consecuencia 5.37
La correspondencia $G_N \rightarrow G_N$, definida por $v \rightarrow \prod_\sigma(\ ,v)$, es la identidad si y sólo si el semivalor σ es el valor de Shapley.

Demostración
Si el semivalor σ es el valor de Shapley, al ser eficiente, $\prod_\sigma(S,v) = v(S)$, $\forall S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Por consiguiente, la correspondencia es la identidad.

Para ver el recíproco, supongamos que σ es un semivalor sobre G_N que cumple:

$$\prod\nolimits_\sigma(S,v) = v(S), \quad \forall v \in G_N,\ \forall S \subseteq N,\ S \neq \emptyset.$$

Entonces, por la fórmula que permite obtener el poder a partir del juego, sustituyendo $\prod_\sigma(S,v)$ por $v(S)$, se tiene:

$$v(S) = s\,p_s^s v(S) + \sum_{U \subset S} \left[\ u\,p_u^s - (s-u)\,p_{u+1}^s\ \right] v(U).$$

Como esta expresión es válida $\forall v \in G_N$, $\forall S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} 1 &= s\,p_s^s, && 1 \leq s \leq n, \\ 0 &= u\,p_u^s - (s-u)\,p_{u+1}^s, && 1 \leq u < s. \end{aligned}$$

Despejando en la primera familia de igualdades:

$$p_s^s = \frac{1}{s} = \gamma(s,s), \quad 1 \leq s \leq n.$$

Si hacemos $u = s - 1\,(1 < s \le n)$ en la segunda familia de igualdades:

$$(s-1)p^s_{s-1} - p^s_s = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p^s_{s-1} = \frac{1}{s-1}\,p^s_s = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{s} = \gamma(s, s-1).$$

Supongamos ahora que $p^s_k = \gamma(s,k)$ para $1 < k \le n$ y veamos cúal es entonces el valor de p^s_{k-1}. Empleando la misma expresión ahora para $u = k - 1$:

$$(k-1)p^s_{k-1} - (s-k+1)\; p^s_k = 0, \qquad 1 \le k-1 < s,$$

$$p^s_{k-1} = \frac{s-k+1}{k-1} p^s_k = \frac{s-k+1}{k-1}\;\gamma(s,k) = \frac{s-k+1}{k-1}\;\frac{(k-1)!(s-k)!}{s!},$$

$$p^s_{k-1} = \frac{(k-2)!(s-k+1)!}{s!} = \gamma(s, k-1), \qquad 1 \le k-1 < s \le n.$$

De donde, necesariamente, el semivalor σ es el valor de Shapley. $\square$

Definición 5.38
Dado un semivalor σ sobre el espacio de juegos G_N con $p_n \neq 0$, para cada semivalor σ' sobre G_N y para cada $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, definimos un juego reducido $v_T^{\sigma'}$ por medio del juego de poder en la forma siguiente:

$$\textstyle\prod_\sigma(S, v_T^{\sigma'}) = \prod_\sigma(S \cup T^c, v) - \displaystyle\sum_{j \in T^c} \sigma'_j[S \cup T^c, v], \quad \forall S \subseteq T,\; S \neq \emptyset,$$

donde T^c denota el subconjunto $N \setminus T$ y $\sigma'_j[S \cup T^c, v]$ es el pago que el semivalor inducido por σ' asigna al jugador $j \in T^c$ en el juego v restringido a $S \cup T^c$.

El poder del juego restringido $(S, v_T^{\sigma'})$ es igual al poder que en el juego v tendrían los jugadores de S unido al complementario de T, descontando el pago a esos jugadores por el semivalor σ'.

Como es

$$\textstyle\prod_\sigma(S \cup T^c, v) = \displaystyle\sum_{j \in S \cup T^c} \sigma_j[S \cup T^c, v], \quad \forall S \subseteq T,\; S \neq \emptyset,$$

podemos dar la siguiente definición para el poder del juego v_T^σ.

Definición 5.39
Para el semivalor σ sobre el espacio de juegos G_N, con $p_n \neq 0$, y para cada

$T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, definimos el juego reducido v_T^σ por medio del juego de poder en la forma:

$$\prod_\sigma(S, v_T^\sigma) = \sum_{j \in S} \sigma_j[S \cup T^c, v], \quad \forall S \subseteq T,\, S \neq \emptyset.$$

El poder de la coalición S por el semivalor σ en el juego reducido v_T^σ es la suma de los pagos que se asignan a los jugadores de S en el juego v restringido a $S \cup T^c$ por el semivalor que se considera.

Definido de esta manera, el juego reducido v_T^σ es el correspondiente por la biyección de la proposición 5.34 al juego de poder que se ha construido.

Proposición 5.40
El semivalor σ es consistente respecto a los juegos reducidos v_T^σ, es decir:

$$\sigma_j[T, v_T^\sigma] = \sigma_j[N, v], \qquad \forall j \in T,\, \forall T \subseteq N,\, T \neq \emptyset.$$

Demostración
En primer lugar, escribimos:

$$\prod_\sigma(S, v_T^\sigma) = \sum_{j \in S} \sigma_j[S, v_T^\sigma] = \sum_{j \in S} \left[P_\sigma(S, v_T^\sigma) - P_\sigma(S \setminus \{j\}, v_T^\sigma)\right], \quad S \subseteq T.$$

Por otro lado, también para $S \subseteq T$:

$$\prod_\sigma(S, v_T^\sigma) = \sum_{j \in S} \sigma_j[S \cup T^c, v] = \sum_{j \in S} \left[P_\sigma(S \cup T^c, v) - P_\sigma(S \cup T^c \setminus \{j\}, v)\right].$$

Igualando ambas expresiones:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in S} &\left[P_\sigma(S, v_T^\sigma) - P_\sigma(S \setminus \{j\}, v_T^\sigma)\right] = \\ &= \sum_{j \in S} \left[P_\sigma(S \cup T^c, v) - P_\sigma(S \cup T^c \setminus \{j\}, v)\right], \quad S \subseteq T.\end{aligned} \tag{5.3}$$

A partir de la fórmula anterior intentamos probar:

$$P_\sigma(S, v_T^\sigma) = P_\sigma(S \cup T^c, v) - P_\sigma(T^c, v), \qquad S \subseteq T. \tag{5.4}$$

Para $|S| = 1$, $S = \{i\}$ y la fórmula (5.3) se transforma en la (5.4). Supongamos ahora que la fómula (5.4) es cierta para toda coalición L con $|L| < s$ y veamos que es cierta para S con $|S| = s$. En este caso (5.3) adopta la forma:

$$sP_\sigma(S, v_T^\sigma) - \sum_{j \in S} P_\sigma(S \setminus \{j\}, v_T^\sigma) = sP_\sigma(S \cup T^c, v) - \sum_{j \in S} P_\sigma(S \cup T^c \setminus \{j\}, v),$$

$$sP_\sigma(S, v_T^\sigma) = sP_\sigma(S \cup T^c, v) + \sum_{j \in S} \left[P_\sigma(S \setminus \{j\}, v_T^\sigma) - P_\sigma(S \cup T^c \setminus \{j\}, v)\right].$$

Empleando la hipótesis de inducción para $S \setminus \{j\}$:

$$sP_\sigma(S, v_T^\sigma) = sP_\sigma(S \cup T^c, v) - sP_\sigma(T^c, v), \qquad S \subseteq T,$$

y queda demostrada la fórmula (5.4). A partir de este resultado considerando $S = T$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_j[T, v_T^\sigma] &= P_\sigma(T, v_T^\sigma) - P_\sigma(T \setminus \{j\}, v_T^\sigma) \\
&= P_\sigma(N, v) - P_\sigma(T^c, v) - [P_\sigma(N \setminus \{j\}, v) - P_\sigma(T^c, v)] \\
&= P_\sigma(N, v) - P_\sigma(N \setminus \{j\}, v) = \sigma_j[N, v].
\end{aligned}$$

que, para cada $j \in T$, $T \subseteq N$, es lo que queríamos probar. $\square$

Definición 5.41
Un semivalor σ es ω-estándar ($0 \leq \omega \leq 1$) para juegos bipersonales si para cualquier $v \in G_N$, $|N| = 2$, cumple:

$$\sigma_i(\{i, j\}, v) = v(\{i\}) + \omega \left[v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})\right], \qquad i \neq j.$$

Es decir, el pago al jugador i por el semivalor σ consiste en lo que el propio jugador obtendría en el juego, $v(\{i\})$, añadiéndole el exceso de la coalición de los dos jugadores, $v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})$, multiplicado por un factor entre 0 y 1.

El caso $\omega = 1/2$ es el que se conoce como estándar para juegos bipersonales.

Proposición 5.42
(a) Si σ es un semivalor definido sobre los juegos de G_N que se expresa como $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, α_j diferentes, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, entonces σ es ω-estándar para juegos bipersonales con:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j.$$

(b) Si σ es un semivalor definido sobre los juegos de G_N que tiene por coeficientes p_s, $1 \leq s \leq n$, entonces σ es ω-estándar para juegos bipersonales con:

$$\omega = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}.$$

Demostración
En la expresión de la definición de ω-estándar podemos agrupar de forma que se obtiene:

$$\sigma_i(\{i,j\}, v) = (1-\omega)v(\{i\}) + \omega\left[v(\{i,j\}) - v(\{j\})\right], \qquad i \neq j.$$

Así los coeficientes de σ como semivalor sobre juegos bipersonales son:

$$p_1 = 1 - \omega\,, \qquad p_2 = \omega.$$

(a) Si $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, entonces los semivalores inducidos por σ para juegos con menos jugadores tienen como coeficientes:

$$p_s^m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{s-1}(1-\alpha_j)^{m-s},\ 1 \leq s \leq m < n.$$

En particular, el coeficiente p_2^2 del semivalor inducido σ^2 es el definido como ω, de donde:

$$\omega = p_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^{2-1}(1-\alpha_j)^{2-2} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j.$$

(b) La fórmula general que permite obtener los coeficientes de los semivalores inducidos por σ en espacios de juegos con menos jugadores σ^m, $1 \leq m < n$, es:

$$p_s^m = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p_{s+j}.$$

Para el caso $m = 2$ y $s = 2$ es:

$$\omega = p_2^2 = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p_{2+j}. \quad \square$$

Teorema 5.43
Supongamos que σ es un semivalor definido sobre los juegos de G_N con $p_n \neq 0$ y que es ω-estándar para juegos bipersonales, $0 < \omega < 1$.
El único semivalor definido sobre los juegos de G_N que es a la vez ω-estándar para juegos bipersonales y consistente respecto a los juegos reducidos $v_T^\sigma\,(\forall T \subseteq N)$ es el propio semivalor σ.

Demostración
Sabemos que el semivalor σ es consistente respecto a la familia de juegos reducidos $v_T^\sigma\,(\forall T \subseteq N)$. Queremos ver que es el único que es consistente de entre los que son ω-estándar para juegos bipersonales.

Si existe otro semivalor σ' sobre los juegos de G_N que cumple ambas condiciones, probaremos que:

$$\sum_{j \in S} \sigma'_j[S, v] = \textstyle\prod_\sigma(S, v), \qquad \forall S \subseteq N.$$

Para $|S| = 1$, $S = \{i\}$:

$$\sigma'_i[\{i\}, v] = v(\{i\}) = \textstyle\prod_\sigma(\{i\}, v).$$

Para $|S| = 2$, $S = \{i, j\}$:

$$\sigma'_k[\{i,j\}, v] = v(\{k\}) + \omega\,[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})] = \sigma_k[\{i,j\}, v], \quad k = i, j.$$

Para $|S| > 2$, consideramos T con $|T| = 2$, $T^c = S \setminus T$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} \sigma'_j[S, v] &= \sum_{j \in T} \sigma'_j[S, v] + \sum_{j \in (S \setminus T)} \sigma'_j[S, v] \\
&= \sum_{j \in T} \sigma'_j[T, v_T^{\sigma'}] + \sum_{j \in (S \setminus T)} \sigma'_j[S, v] \\
&= \textstyle\prod_\sigma(T, v_T^{\sigma'}) + \displaystyle\sum_{j \in (S \setminus T)} \sigma'_j[S, v] = \textstyle\prod_\sigma(S, v).
\end{aligned}$$

El paso de la primera a la segunda línea es debido a que σ' es consistente, mientras que el paso de la segunda a la tercera es por hipótesis de inducción.

En particular, hemos demostrado que para $|S| = 1, 2$ se verifica:

$$\sigma'_i[S, v] = \sigma_i[S, v], \qquad i \in S.$$

Queremos probar que esta igualdad se cumple para todo $S \subseteq N$. Para demostrarlo suponemos que $\sigma'_i[L, v] = \sigma_i[L, v]$, $\forall i \in L$, $\forall L \subseteq N$, $|L| < s$. Como que la igualdad está probada para $s = 1, 2$, consideramos $|S| \geq 3$ y allí escogemos $T = \{i, j\}$, $i, j \in S$, $i \neq j$.

Para los respectivos juegos reducidos $v_T^{\sigma'}$, v_T^{σ} se verifica:

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_\sigma(\{i\}, v_T^{\sigma'}) &= \textstyle\prod_\sigma(S \setminus \{j\}, v) - \sum_{j \in (S \setminus T)} \sigma'_j[S \setminus \{j\}, v] &&= \sigma_i[S \setminus \{j\}, v], \\
\textstyle\prod_\sigma(\{i\}, v_T^{\sigma}) &= \textstyle\prod_\sigma(S \setminus \{j\}, v) - \sum_{j \in (S \setminus T)} \sigma_j[S \setminus \{j\}, v] &&= \sigma_i[S \setminus \{j\}, v].
\end{aligned}$$

De estas dos igualdades:

$$\textstyle\prod_\sigma(\{i\}, v_T^{\sigma'}) = \prod_\sigma(\{i\}, v_T^{\sigma}) \quad \Rightarrow \quad v_T^{\sigma'}(\{i\}) = v_T^{\sigma}(\{i\}).$$

Análogamente:

$$\textstyle\prod_\sigma(\{j\}, v_T^{\sigma'}) = \prod_\sigma(\{j\}, v_T^{\sigma}) \quad \Rightarrow \quad v_T^{\sigma'}(\{j\}) = v_T^{\sigma}(\{j\}).$$

De esta forma se tiene:

$$\sigma'_i[T, v_T^{\sigma'}] \geq \sigma'_i[T, v_T^{\sigma}] \Leftrightarrow v_T^{\sigma'}(T) \geq v_T^{\sigma}(T) \Leftrightarrow \sigma'_j[T, v_T^{\sigma'}] \geq \sigma'_j[T, v_T^{\sigma}].$$

En consecuencia:

$$\begin{gathered}
\sigma'_i[S, v] = \sigma'_i[T, v_T^{\sigma'}] \geq \sigma'_i[T, v_T^{\sigma}] = \sigma_i[T, v_T^{\sigma}] = \sigma_i[S, v] \\
\Updownarrow \\
\sigma'_j[S, v] = \sigma'_j[T, v_T^{\sigma'}] \geq \sigma'_j[T, v_T^{\sigma}] = \sigma_j[T, v_T^{\sigma}] = \sigma_j[S, v],
\end{gathered}$$

donde los dos pares de igualdades de los extremos son por las respectivas propiedades de consistencia y las dos igualdades centrales son por hipótesis de inducción. Por lo tanto, para cada $i, j \in S$ se verifica:

$$\sigma'_i[S,v] \geq \sigma_i[S,v] \quad \Leftrightarrow \quad \sigma'_j[S,v] \geq \sigma_j[S,v].$$

Pero $\sum_{j \in S} \sigma'_j[S,v] = \sum_{j \in S} \sigma_j[S,v]$, de donde, necesariamente:

$$\sigma'_i[S,v] = \sigma_i[S,v], \qquad \forall i \in S,\, \forall S \subseteq N. \;\; \square$$

5.6 Un ejemplo concreto

La fórmula que permite recuperar un juego conocido el poder por un semivalor σ definido en el espacio de juegos cooperativos G_N, con $p_n \neq 0$, es, para $S \subseteq N$:

$$v(S) = \frac{1}{s\, p_s^s} \left\{ \; \Pi_\sigma(S,v) - \sum_{U \subset S} \left[\; u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s \; \right] v(U) \; \right\}.$$

Escrita para el juego v_T^σ resulta, para cada $S \subseteq T$:

$$v_T^\sigma(S) = \frac{1}{s\, p_s^s} \left\{ \; \Pi_\sigma(S,v_T^\sigma) - \sum_{U \subset S} \left[\; u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s \; \right] v_T^\sigma(U) \; \right\}.$$

Pero al ser $\Pi_\sigma(S,v_T^\sigma) = \sum_{i \in S} \sigma_i[S \cup T^c, v]$ con $T^c = N \setminus T$, podemos escribir:

$$v_T^\sigma(S) = \frac{1}{s\, p_s^s} \left\{ \; \sum_{i \in S} \sigma_i[S \cup T^c, v] - \sum_{U \subset S} \left[\; u\, p_u^s - (s-u)\, p_{u+1}^s \; \right] v_T^\sigma(U) \; \right\}, \quad S \subseteq T.$$

Esta fórmula permite construir en forma recursiva el juego reducido v_T^σ $(\forall T \subseteq N)$ conocido el poder por el semivalor σ del juego v restringido a coaliciones del tipo $S \cup T^c$.

Para el caso particular de un semivalor binomial σ_α, $0 < \alpha < 1$, denotamos $v_T^{\sigma_\alpha}$ por v_T^α y la expresión anterior adopta la forma:

$$v_T^\alpha(S) = \frac{1}{s\alpha^{s-1}} \left\{ \sum_{i \in S} (\sigma_\alpha)_i [S \cup T^c, v] - \sum_{U \subset S} \alpha^{u-1}(1-\alpha)^{s-u-1}(u - s\alpha) v_T^\alpha(U) \right\}, \quad S \subseteq T \,.$$

El Ayuntamiento de Manresa (1995-1999)
En las elecciones municipales celebradas el año 1995, cinco grupos políticos obtuvieron representación en el consistorio municipal de la ciudad de Manresa, repartiéndose de la manera que se indica las 25 actas de concejal que estaban en juego.

Convergència i Unió, CiU, 9 concejales.
Partit dels Socialistes de Catalunya, PSC, 8 concejales.
Esquerra Republicana de Catalunya, ERC, 3 concejales.
Partit Popular, PP, 3 concejales.
Iniciativa per Catalunya - Els verds, IC, 2 concejales.

Descrita como juego de mayoría ponderada, la situación del Ayuntamiento de Manresa en el periodo de referencia es:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 5 \\ & & & \text{CiU} & \text{PSC} & \text{ERC} & \text{PP} & \text{IC} \\ [\,q\,;\,p\,] & = & [\;\; 13\;; & 9\,, & 8\,, & 3\,, & 3\,, & 2 \;\;] \end{array}$$

En este JMP, las coaliciones ganadoras minimales son:

$$W^m = \{\{1,2\},\ \{1,3,4\},\ \{1,3,5\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{2,4,5\}\}.$$

Como fruto de los acuerdos entre los diferentes grupos políticos, es precisamente la coalición ganadora minimal $\{2,3,5\}$ la que se forma con carácter estable y la que permite acceder a la alcaldía de la ciudad al primer candidato de la lista del PSC.

Vamos a estudiar una posible distribución previa del poder entre los diferentes jugadores de este juego. Si, por ejemplo, consideramos que todas las coaliciones entre los diferentes partidos son igualmente probables, el semivalor que recoge esta suposición es el índice de Banzhaf. Por el contrario, podemos suponer que no todas las coaliciones tienen la misma probabilidad de formarse.

Si estimamos, como nos parece plausible, que la probabilidad de que se forme una determinada coalición depende de su cardinal, de manera que cuanto mayor sea éste menor sea su probabilidad, llegaremos a considerar otros diferentes semivalores.

En concreto, si consideramos que la probabilidad de formarse una coalición de cardinal $s+1$ es la mitad que la de formarse una coalición de cardinal s, el semivalor que describe esta situación es un semivalor binomial, con el valor de α que se indica:

$$\frac{p_{s+1}}{p_s} = \frac{\alpha^s(1-\alpha)^{n-s-1}}{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}, \quad 1 \leq s < n \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

En particular, para juegos con $n = 5$ jugadores los coeficientes del semivalor binomial para $\alpha = 1/3$ son:

$$(p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4,\, p_5) = \left(\frac{16}{81}, \frac{8}{81}, \frac{4}{81}, \frac{2}{81}, \frac{1}{81}\right),$$

y expresados en tantos por ciento $p_1 \cong 19,75\%$, $p_2 \cong 9,87\%$, $p_3 \cong 4,94\%$, $p_4 \cong 2,47\%$, $p_5 \cong 1,23\%$. Éstas son las probablidades asociadas a la formación de coaliciones de 1, 2, 3, 4 ó 5 jugadores, respectivamente.

Calculamos ahora el pago que por el semivalor binomial para $\alpha = 1/3$ corresponde a los jugadores del juego que estamos tratando, cuya EML es:

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_5) &= x_1x_2 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 - \\ &-2x_1x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3x_5 - 2x_1x_2x_4x_5 - 2x_1x_3x_4x_5 - 2x_2x_3x_4x_5 + 4x_1x_2x_3x_4x_5. \end{aligned}$$

Los jugadores $1, 2$ son indiferentes en el juego v, así como los jugadores $3, 4, 5$. Calculamos sólo para 1 y 3:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\alpha}) = \alpha + 3\alpha^2 - 8\alpha^3 + 4\alpha^4 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{1/3})_1[v] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{1/3}) = \frac{34}{81};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\overline{\alpha}) = 4\alpha^2 - 8\alpha^3 + 4\alpha^4 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{1/3})_3[v] = \frac{\partial f}{\partial x_3}(\overline{1/3}) = \frac{16}{81}.$$

De esta forma, la distribución de poder para el juego v por el semivalor binomial para $\alpha = 1/3$ es:
$$\sigma_{1/3}[v] = \left(\frac{34}{81}, \frac{34}{81}, \frac{16}{81}, \frac{16}{81}, \frac{16}{81}\right).$$

Hemos comentado antes que los partidos PSC, ERC, IC han formado una coalición estable, que se corresponde con la coalición ganadora minimal $\{2,3,5\}$. Estos tres partidos forman la Comisión de Gobierno del consistorio, mientras que los otros dos, CiU y PP, quedan en la oposición.

La Comisión de Gobierno, que a partir de ahora designaremos por $T = \{2,3,5\}$, es un subconjunto de tres jugadores del conjunto inicial N. Vamos a construir un juego que tenga por conjunto de jugadores T, de manera que por el semivalor que se considera $\sigma_{1/3}$ el pago a cada uno de los integrantes de T sea el mismo que $\sigma_{1/3}$ les asigna en el juego inicial v: éste no es sino el juego reducido $v_T^{1/3}$.

La expresión para este tipo de juegos reducidos, para el caso $\alpha = 1/3$, se transforma en:
$$v_T^{1/3}(S) = \frac{1}{s}\left[\ 3^{s-1}\sum_{i\in S}(\sigma_{1/3})_i[S\cup\{1,4\},v] - \sum_{U\subset S} 2^{s-u-1}\,(3u-s)\,v_T^{1/3}(U)\ \right],$$
$$S \subseteq \{2,3,5\}, S \neq \emptyset,$$

ya que si $N = \{1,2,3,4,5\}$ y $T = \{2,3,5\}$ entonces $T^c = \{1,4\}$.

Para determinar de forma recursiva todos los valores de $v_T^{1/3}(S)$ para $S \subseteq \{2,3,5\}$, $S \neq \emptyset$, necesitamos:

$$\text{para } S = \{2\}, \qquad (\sigma_{1/3})_2[\{1,2,4\},v] = 1/3;$$

$$\text{para } S = \{3\}, \qquad (\sigma_{1/3})_3[\{1,3,4\},v] = 1/9;$$

$$\text{para } S = \{5\}, \qquad (\sigma_{1/3})_5[\{1,4,5\},v] = 1/9.$$

Entonces:
$$v_T^{1/3}(\{i\}) = 3^0(\sigma_{1/3})_i[\{1,4,i\},v] - 0 = (\sigma_{1/3})_i[\{1,4,i\},v], \quad i = 2,3,5.$$

De aquí:
$$v_T^{1/3}(\{2\}) = \frac{1}{3}, \qquad v_T^{1/3}(\{3\}) = \frac{1}{9}, \qquad v_T^{1/3}(\{5\}) = \frac{1}{9}.$$

Ahora, para determinar los valores $v_T^{1/3}(S)$, $S \subseteq \{2,3,5\}$, $|S| = 2$, necesitamos:

para $S = \{2,3\}$, $\quad (\sigma_{1/3})_2[\{1,2,3,4\}, v] = 10/27, \quad (\sigma_{1/3})_3[\{1,2,3,4\}, v] = 4/27;$

para $S = \{2,5\}$, $\quad (\sigma_{1/3})_2[\{1,2,4,5\}, v] = 10/27, \quad (\sigma_{1/3})_5[\{1,2,4,5\}, v] = 4/27;$

para $S = \{3,5\}$, $\quad (\sigma_{1/3})_3[\{1,3,4,5\}, v] = 4/27, \quad (\sigma_{1/3})_5[\{1,3,4,5\}, v] = 4/27.$

Estos valores se han obtenido a partir de la EML del juego (N, v). Por ejemplo:

$$f_{\{1,2,3,4\}} = x_1x_2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3x_4,$$

$$\frac{\partial f_{\{1,2,3,4\}}}{\partial x_2}(\overline{\alpha}) = \alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{1/3})_2[\{1,2,3,4\}, v] = \frac{\partial f_{\{1,2,3,4\}}}{\partial x_2}(\overline{1/3}) = \frac{10}{27},$$

$$\frac{\partial f_{\{1,2,3,4\}}}{\partial x_3}(\overline{\alpha}) = 2\alpha^2 - 2\alpha^3 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{1/3})_3[\{1,2,3,4\}, v] = \frac{\partial f_{\{1,2,3,4\}}}{\partial x_3}(\overline{1/3}) = \frac{4}{27}.$$

Entonces, para $i, j = 2,3,5,\ i \neq j$,

$$\begin{aligned} v_T^{1/3}(\{i,j\}) =& \frac{1}{2}\ \Big[3^1\{(\sigma_{1/3})_i[\{1,4,i,j\}, v] + (\sigma_{1/3})_j[\{1,4,i,j], v)\} - \\ & -2^0(3-2)[v_T^{1/3}(\{i\}) + v_T^{1/3}(\{j\})]\Big], \end{aligned}$$

de donde:

$$v_T^{1/3}(\{2,3\}) = \frac{5}{9}, \qquad v_T^{1/3}(\{2,5\}) = \frac{5}{9}, \qquad v_T^{1/3}(\{3,5\}) = \frac{1}{3}.$$

Por último, para el propio subconjunto $T = \{2,3,5\}$ necesitamos:

$$(\sigma_{1/3})_2[N, v] = 34/81, \quad (\sigma_{1/3})_3[N, v] = 16/81, \quad (\sigma_{1/3})_5[N, v] = 16/81.$$

De aquí:

$$v_T^{1/3}(\{2,3,5\}) = \frac{1}{3}\Big[\ 3^2 \sum_{i=2,3,5} (\sigma_{1/3})_i[N, v] - 2^0(6-3) \sum_{i,j=2,3,5/i\neq j} v_T^{1/3}(\{i,j\})\ \Big] = 1.$$

Este juego que acabamos de construir es el juego reducido según el semivalor binomial para $\alpha = 1/3$ que jugarían los jugadores de $T = \{2,3,5\}$, de manera que por ese semivalor los pagos que obtendrían serían los mismos, para cada uno de los jugadores, que en el juego inicial (N, v).

Podemos comprobar ahora esta última afirmación. El juego reducido $v_T^{1/3}$ es un juego cooperativo de tres jugadores y está definido por su actuación sobre las diferentes coaliciones escritas en el orden habitual en la forma siguiente:

$$v_T^{1/3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

Su EML es:

$$f(x_2, x_3, x_5) = \frac{1}{9}(3x_2 + x_3 + x_5 + x_2x_3 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_3x_5),$$

$$\nabla f(\overline{\alpha}) = \frac{1}{9}(3 + 2\alpha + \alpha^2,\ 1 + 2\alpha + \alpha^2,\ 1 + 2\alpha + \alpha^2).$$

Entonces:

$$\sigma_{1/3}[T, v_T^{1/3}] = \nabla f(\overline{1/3}) = \left(\frac{34}{81}, \frac{16}{81}, \frac{16}{81}\right).$$

Así hemos comprobado que el semivalor binomial $\sigma_{1/3}$ verifica la propiedad de consistencia respecto al juego reducido $v_T^{1/3}$. Además, el teorema 5.43 de la sección anterior afirma que, de entre todos los semivalores que son 1/3-estándar para juegos bipersonales, éste es precisamente el único que es consistente con este juego reducido y con cualquier otro juego reducido que pudiera definirse en un subconjunto arbitrario de N por medio del semivalor $\sigma_{1/3}$.

6

Juegos indistinguibles

6.1 La intersección de los espacios nulos

En algunos casos, las soluciones de Shapley o de Banzhaf asignan un mismo vector de pagos a juegos diferentes. En general, fijado un semivalor σ definido sobre los juegos de G_N, puede suceder que juegos distintos obtengan un mismo vector de pagos. El estudio de esta situación deriva en la consideración de los juegos que siendo diferentes del juego nulo obtienen como vector de pagos el vector cero. El conjunto de estos juegos tiene estructura de subespacio vectorial de G_N y recibe el nombre de espacio nulo por el semivalor σ, $EN(\sigma)$.

El problema que pretendemos abordar consiste en determinar los juegos de G_N que, para cada semivalor que pueda considerarse, tengan asignado un mismo vector de pagos, a pesar de tratarse de juegos diferentes. El nombre de juegos indistinguibles proviene de esta característica: a la vista de los pagos asignados por cualquier semivalor, los juegos no pueden diferenciarse, es decir, los semivalores no consiguen discriminar un juego de otro indistinguible.

Para cada juego cooperativo $v \in G_N$, el conjunto de sus juegos indistinguibles forma una variedad lineal que pasa por v. El subespacio director de esta variedad está formado por la intersección de los espacios nulos por cualquier semivalor definido sobre G_N. En las dos primeras secciones de este capítulo se determina la dimensión de este subespacio y se construye una base del mismo formada por juegos del tipo más sencillo posible: estos juegos son los que se introducen bajo el nombre de juegos de conmutación.

Definición 6.1
En el espacio de juegos cooperativos de n jugadores G_N, dos juegos $v, v' \in G_N$ decimos que son indistinguibles por semivalores y escribimos $v \sim v'$ si y sólo si $\sigma[v] = \sigma[v']$ para todo semivalor σ definido sobre el espacio de juegos G_N.

Proposición 6.2
Dos juegos son indistinguibles por semivalores si y sólo si obtienen los mismos vectores de pagos por los semivalores de cualquier sistema de referencia.

Demostración
Si $v \sim v'$ se cumple $\sigma[v] = \sigma[v']$ $\forall\sigma$ semivalor sobre los juegos de G_N y, en particular, para los n semivalores de cualquier sistema de referencia $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$.

Si $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ es un sistema de referencia de semivalores sobre G_N cualquier semivalor σ puede escribirse como

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

entonces:

$$\sigma[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j[v] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j[v'] = \sigma[v']. \ \square$$

Observación 6.3
Por la linealidad de los semivalores,

$$v \sim v' \ \Leftrightarrow \ v - v' \sim 0.$$

Nos dedicamos, en consecuencia, a estudiar los juegos $v \in G_N$ tales que $\sigma[v] = 0$ para todo semivalor σ definido sobre el espacio de juegos G_N.

Escogido un sistema de referencia en el hiperplano de semivalores $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, consideramos la aplicación lineal $f_{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ definida por

$$\begin{array}{rccl} f_{\sigma_1 \dots \sigma_n}: & G_N & \rightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & v & \rightarrow & B = (b_{ij}) \qquad \text{donde } \ b_{ij} = (\sigma_j)_i[v], \ 1 \leq i, j \leq n. \end{array}$$

Con esta definición se verifica que los juegos $v \in G_N$ indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$ son precisamente los que pertenecen al núcleo de la aplicación, es decir:

$$\ker f_{\sigma_1 \dots \sigma_n} = \bigcap_{1 \leq j \leq n} EN(\sigma_j) = \bigcap_{\sigma} EN(\sigma),$$

donde la última intersección se entiende extendida a todos los semivalores definidos sobre G_N.

Al ser $\ker f_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \sim 0$, todos los juegos indistinguibles por semivalores de cualquier juego $v \in G_N$ forman una variedad lineal cuya dirección es justamente este núcleo, es decir:

$$v + \ker f_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \sim v.$$

Definición 6.4
Para un juego cooperativo cualquiera $v \in G_N$, $|N| = n$, definimos las siguientes cantidades:

$$a_{i,s}(v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ |S|=s}} v(S), \quad 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq s \leq n.$$

Con esta notación se verifica:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,s}(v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{S \ni j \\ |S|=s}} v(S) = s \sum_{S:|S|=s} v(S).$$

Proposición 6.5
Si denotamos por σ_{V_s}, $1 \leq s \leq n$, los semivalores vértices sobre los juegos de G_N, se cumple, para cada $i \in N$,

(a) $(\sigma_{V_1})_i[v] = a_{i,1}(v).$

(b) $(\sigma_{V_s})_i[v] = \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \left[\ a_{i,s}(v) - \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^{n} a_{j,s-1}(v) + a_{i,s-1}(v) \ \right], \quad 2 \le s \le n.$

Demostración
El semivalor vértice σ_{V_s}, $1 \le s \le n$, sobre los juegos de G_N es aquél cuyos coeficientes son

$$p_s = \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \ ; \quad p_t = 0, \ \ t \neq s.$$

(a) Para σ_{V_1} los coeficientes son $(1, 0, ..., 0)$,

$$(\sigma_{V_1})_i[v] = \sum_{\substack{S \ni i \\ |S|=1}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] = v(\{i\}) = a_{i,1}(v), \text{ para cada } i \in N.$$

(b) Para los s tales que $2 \le s \le n$ y cualquier $i \in N$:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{V_s})_i[v] &= \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \left[\ \sum_{S \ni i,\, |S|=s} v(S) - \sum_{S \ni i,\, |S|=s} v(S \setminus \{i\}) \ \right] \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \left[\ a_{i,s}(v) - \sum_{S \not\ni i,\, |S|=s-1} v(S) \ \right] \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \left[\ a_{i,s}(v) - \sum_{S: |S|=s-1} v(S) + \sum_{S \ni i,\, |S|=s-1} v(S) \ \right] \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \left[\ a_{i,s}(v) - \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^{n} a_{j,s-1}(v) + a_{i,s-1}(v) \ \right]. \ \square
\end{aligned}$$

Proposición 6.6
La intersección de los espacios nulos por cualquier semivalor definido sobre el espacio de juegos G_N tiene como expresión

$$\bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = \{v \in G_N \ / \ a_{i,s}(v) = 0, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le s \le n\}.$$

Demostración

Según la proposición 2.13, los semivalores vértices σ_{V_s}, $1 \leq s \leq n$, forman un sistema de referencia para semivalores sobre G_N. Entonces:

$$\bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = EN(\sigma_{V_1}) \cap EN(\sigma_{V_2}) \cap \cdots \cap EN(\sigma_{V_n}).$$

Para demostrar la expresión del enunciado construiremos la intersección de los n espacios nulos empezando por $EN(\sigma_{V_1})$ añadiendo correlativamente los espacios nulos hasta $EN(\sigma_{V_n})$. Así:

$$EN(\sigma_{V_1}) = \{v \in G_N \;/\; \sigma_{V_1}[v] = 0\} = \{v \in G_N \;/\; a_{i,1}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n\},$$

ya que por la proposición anterior $(\sigma_{V_1})_i[v] = a_{i,1}(v)$, $1 \leq i \leq n$.

A continuación

$$EN(\sigma_{V_1}) \cap EN(\sigma_{V_2}) = \{v \in G_N \;/\; \sigma_{V_1}[v] = \sigma_{V_2}[v] = 0\}.$$

Al verificarse, para cada $i \in N$,

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (\sigma_{V_1})_i[v] = a_{i,1}(v) \\[2ex] 0 = (\sigma_{V_2})_i[v] = \dfrac{1}{\binom{n-1}{1}} \left[\ a_{i,2}(v) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,1}(v) + a_{i,1}(v)\ \right] \end{array}\right\},$$

equivale a $a_{i,1}(v) = a_{i,2}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n$, de donde,

$$EN(\sigma_{V_1}) \cap EN(\sigma_{V_2}) = \{v \in G_N \;/\; a_{i,1}(v) = a_{i,2}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Supongamos ahora que para $s = k$ $(2 \leq k < n)$ se verifica:

$$EN(\sigma_{V_1}) \cap \cdots \cap EN(\sigma_{V_k}) = \{v \in G_N \;/\; a_{i,s}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq s \leq k\}.$$

Entonces, como para $s = k+1$ es

$$EN(\sigma_{V_1}) \cap \cdots \cap EN(\sigma_{V_{k+1}}) = \{v \in G_N \;/\; \sigma_{V_1}[v] = \cdots = \sigma_{V_{k+1}}[v] = 0\},$$

por la fórmula (b) de la proposición anterior:

$$0 = (\sigma_{V_{k+1}})_i[v] = \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \left[\; a_{i,k+1}(v) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(v) + a_{i,k}(v) \; \right], \quad \text{para cada } i \in N.$$

Por hipótesis $a_{i,k}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n$, de donde $a_{i,k+1}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n$, lo cual completa la demostración. □

Observación 6.7
Las n restricciones $a_{i,n}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n$, son equivalentes a la condición $v(N) = 0$, ya que

$$a_{i,n}(v) = \sum_{S \ni i,\, |S|=n} v(S) = v(N), \quad \text{para cada } i \in N.$$

Teorema 6.8
La intersección de los espacios nulos por cualquier semivalor definido sobre el espacio de juegos G_N verifica

$$\dim \bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = 2^n - n^2 + n - 2.$$

Demostración
En la expresión de la intersección de los espacios nulos por cualquier semivalor hallada en la proposición anterior

$$\bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = \{v \in G_N \ /\ a_{i,s}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq s \leq n-1;\ v(N) = 0\},$$

aparece un total de $(n-1)n+1$ restricciones que afectan a las componentes de los vectores del espacio de juegos cooperativos G_N, cuya dimensión es $2^n - 1$. Bastará probar que esas restricciones son ecuaciones linealmente independientes para poder afirmar que

$$\dim \bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = 2^n - 1 - [(n-1)n+1] = 2^n - n^2 + n - 2.$$

Para comprobar la independencia lineal de las restricciones, agrupamos éstas según el cardinal de las coaliciones a las que afectan:

$$a_{i,1}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n\,;\ \ldots\,; a_{i,n-1}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n\,;\ v(N) = 0.$$

Es evidente que una cualquiera de las restricciones afectando a un determinado cardinal es independiente de cualesquiera otras restricciones afectando a cardinales diferentes al considerado.

Las restricciones correspondientes a un mismo cardinal s $(1 \leq s \leq n-1)$ forman un sistema de n ecuaciones lineales con $\binom{n}{s}$ incógnitas.

Fijado el cardinal s $(1 \leq s \leq n-1)$ formamos la matriz del sistema supuesto el orden lexicográfico entre las coaliciones, escogiendo las columnas correspondientes a las incógnitas $v(S)$ para las siguientes coaliciones S:

$$
\begin{array}{l}
S_{1,1} = \{1, 2, ..., s-1, s\} \\
S_{2,1} = \{2, 3, ..., s, s+1\} \\
S_{3,1} = \{3, 4, ..., s+1, s+2\} \\
\cdots\cdots \\
S_{n-s-1,1} = \{n-s-1, n-s, ..., n-3, n-2\} \\
S_{n-s,1} = \{n-s, n-s+1, ..., n-2, n-1\} \\
S_{n-s,2} = \{n-s, n-s+1, ..., n-2, n\} \\
\cdots\cdots \\
S_{n-s,s} = \{n-s, n-s+2, ..., n-1, n\} \\
S_{n-s+1,1} = \{n-s+1, n-s+2, ..., n-1, n\}
\end{array}
$$

Si designamos como U_s y H_{s+1} las matrices

$$
U_s = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & 1 & \cdot & \vdots \\
1 & \vdots & \cdot & 0 \\
0 & 1 & & 1 \\
\vdots & 0 & \cdot & \vdots \\
\vdots & & \cdot & 1 \\
\vdots & & & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}, \quad
H_{s+1} = \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 0 \\
\vdots & \cdot & \cdot & 1 \\
1 & 0 & \cdot & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix},
$$

resultan ser $U_s \in \mathcal{M}_{n\times(n-s-1)}(\mathbb{R})$ y $H_{s+1} \in \mathcal{M}_{(s+1)\times(s+1)}(\mathbb{R})$.

Con estas notaciones, considerando las columnas correspondientes a las incógnitas $v(S_{1,1}), \ . \ . \ . \ , v(S_{n-s-1,1}), \ v(S_{n-s,1}), \ . \ . \ . \ , v(S_{n-s,s}), \ v(S_{n-s+1,1})$ obtenemos el siguiente menor de orden n del sistema de ecuaciones:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} U_s & 0 \\ \hline & H_{s+1} \end{array} \right) = \det H_{s+1} = (-1)^{Ent(s/2)}\, s.$$

Como que los valores de s verifican $1 \leq s \leq n-1$, el rango de la matriz del sistema de ecuaciones correspondiente es n, lo que garantiza la independencia lineal de las restricciones que afectan a cada uno de los cardinales de las coaliciones para $1 \leq s \leq n-1$. $\square$

Observación 6.9
Estamos considerando el subespacio vectorial de los juegos indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$,

$$\bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = \{v \in G_N \ / \ a_{i,s}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq s \leq n-1;\ v(N) = 0\},$$

y cada juego de G_N expresado mediante componentes agrupadas por los cardinales de las coaliciones, de forma que las primeras corresponden a $v(\{i\}), 1 \leq i \leq n$, después $v(\{i,j\}), 1 \leq i,j \leq n$, . . . , hasta $v(N)$.

Para cada uno de los cardinales de las coaliciones, desde 1 hasta $n-1$, aparecen n restricciones lineales independientes de manera que los grados de libertad resultan ser:

cardinal de las coaliciones	grados de libertad
$s = 1$	$\binom{n}{1} - n = 0$
$s = 2$	$\binom{n}{2} - n$
. . .	. . .
$s = n-2$	$\binom{n}{n-2} - n$
$s = n-1$	$\binom{n}{n-1} - n = 0$
$s = n$	$1 - 1 = 0$

Para los cardinales $1,\ n-1,\ n$ el número de restricciones independientes coincide con el de variables, de forma que la solución única es la solución nula. La suma de todos los grados de libertad nos dará la dimensión del subespacio de juegos indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$:

$$\dim \bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = \sum_{s=2}^{n-2} \left[\binom{n}{s} - n \right] = \sum_{s=2}^{n-2} \binom{n}{s} - (n-3)n = 2^n - n^2 + n - 2.$$

Para valores pequeños del cardinal n del conjunto de jugadores se verifica:

n	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\dim \bigcap_{\sigma} EN(\sigma)$	0	0	2	10	32	84	$\cdots$

En consecuencia, para $n = 2$ y para $n = 3$ todos los juegos cooperativos son distinguibles por semivalores, mientras que, para cardinal $n = 4$ la clase de equivalencia de juegos indistinguibles por semivalores es, para cada juego, un plano que pasa por dicho juego. A medida que aumenta el valor de n aumenta en orden exponencial la dimensión del subespacio de juegos indistinguibles del nulo.

Ejemplo 6.10
Determinación del subespacio de juegos de 4 jugadores indistinguibles por semivalores del juego nulo.

Empleando la nomenclatura introducida, estos juegos cumplirán:

$$a_{i,s}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq s \leq 3;\ \ v(N) = 0.$$

Según la observación anterior, las componentes de los juegos indistinguibles del juego nulo correspondientes a coaliciones de cardinal $s = 1$ y $s = 3$ son nulas, quedando las condiciones reducidas a

$$a_{i,2}(v) = 0,\ 1 \leq i \leq 4,$$

o lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{1,4\}) & & & & & & = 0 \\
v(\{1,2\}) & & & + v(\{2,3\}) + v(\{2,4\}) & & & = 0 \\
 & v(\{1,3\}) & & + v(\{2,3\}) & & + v(\{3,4\}) & = 0 \\
 & & v(\{1,4\}) & & + v(\{2,4\}) + v(\{3,4\}) & & = 0
\end{array}\right\} .$$

Las soluciones de este sistema homogéneo están constituidas por el subespacio vectorial de los juegos cooperativos de 4 jugadores siguiente:

$$< (0,0,0,0,1,-1,0,0,-1,1,0,0,0,0,0)\,,\ (0,0,0,0,1,0,-1,-1,0,1,0,0,0,0,0) > .$$

Proposición 6.11
Si $f = f(x_1, ..., x_n)$ es la EML del juego $v \in G_N$ se verifica:

$$v \sim 0 \ \Leftrightarrow\ \nabla f(\bar{\alpha}) = 0, \ \ \bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha), \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Demostración
La EML del juego $v \in G_N$ es $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} x_j \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v(S)$.

Si $v \sim 0$, $\sigma[v] = \sigma[0] = 0$ para todo semivalor σ definido sobre G_N y, en particular, para los semivalores del tipo σ_α con $\alpha \in [0,1]$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}) = (\sigma_\alpha)_i[v] = 0, \ i = 1, ..., n \ \Rightarrow\ \nabla f(\bar{\alpha}) = 0, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Recíprocamente, si $\nabla f(\bar{\alpha}) = 0$, $\bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, escogemos n números reales $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 1$, de manera que $\{\sigma_{\alpha_j}\}_{j=1,...,n}$ forma un sistema de referencia y cualquier σ semivalor sobre G_N se expresa como $\sigma = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{\alpha_j}$, entonces:

$$\sigma[v] = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{\alpha_j}[v] = \sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla f(\bar{\alpha}_j) = 0 \ \Rightarrow\ v \sim 0. \ \square$$

Ejemplo 6.12
Consideramos el juego cooperativo $v \in G_N$, $N = \{1,2,3,4\}$, definido en la forma:

$$v(\{1,2\}) = v(\{3,4\}) = 1, \ v(\{1,3\}) = v(\{2,4\}) = -1, \ v(S) = 0 \text{ en otro caso.}$$

Para probar que v es un juego indistinguible por semivalores del juego $0 \in G_N$ consideraremos su EML $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ que resulta ser:

$$x_1x_2(1-x_3)(1-x_4)-x_1x_3(1-x_2)(1-x_4)-x_2x_4(1-x_1)(1-x_3)+x_3x_4(1-x_1)(1-x_2).$$

Derivando:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2(1-x_3)(1-x_4) - x_3(1-x_2)(1-x_4) + x_2x_4(1-x_3) - x_3x_4(1-x_2),$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = -x_1x_2(1-x_3) + x_1x_3(1-x_2) - x_2(1-x_1)(1-x_3) + x_3(1-x_1)(1-x_2).$$

De aquí:

$$\nabla f(\bar{\alpha}) = (0,0,0,0), \;\; \bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha), \; \forall \alpha \in [0,1].$$

Definición 6.13
Para cualquier espacio de juegos cooperativos, definimos calibre del juego $v \in G_N$ en la forma:

$$cal(v) = |T_v|, \quad \text{donde } T_v = \{S \subseteq N \;/\; v(S) \neq 0\}.$$

Observación 6.14
El concepto de calibre cumple las propiedades

$$cal(v) \geq 0, \; \forall v \in G_N; \; cal(v) = 0 \text{ si y sólo si } v = 0;$$
$$cal(u+v) \leq cal(u) + cal(v), \; \forall u, v \in G_N.$$

Sin embargo, no se trata de una norma definida sobre G_N, puesto que, en general, $cal(\lambda v) \neq |\lambda| \, cal(v)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como pretendemos caracterizar los juegos $v \in G_N$ que sean indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$, la noción de calibre pretende medir, de alguna manera, la similitud que pueda haber entre los juegos indistinguibles del juego nulo con el propio juego nulo.

Proposición 6.15
Para cualquier espacio de juegos cooperativos G_N, no existen juegos indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$ que tengan calibre menor o igual a tres.

Demostración
Probaremos la afirmación del enunciado sucesivamente para los calibres 1, 2 y 3.

(a) Consideramos un juego $v \in G_N$ con $cal(v) = 1$. Existe una única coalición $S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$, tal que $v(S) \neq 0$. Si escogemos un elemento $i \in S$ verificará

$$a_{i,s}(v) = v(S) \neq 0, \quad s = |S|,$$

de donde v no es indistinguible por semivalores del juego $0 \in G_N$, según la proposición 6.6.

(b) Consideramos ahora un juego $v \in G_N$ con $cal(v) = 2$. Existen dos únicas coaliciones diferentes $S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1, S_2 \neq \emptyset$, tales que $v(S_1), v(S_2) \neq 0$. Si estas coaliciones tienen cardinales diferentes, actuando como en el apartado (a), v es distinguible por semivalores de $0 \in G_N$.

Suponemos entonces que $v(S_1), v(S_2) \neq 0,\ |S_1| = |S_2| = s,\ 1 \leq s \leq n-1,\ v(S) = 0$ si $S \neq S_1, S_2$. Al ser $S_1 \neq S_2$ y $|S_1| = |S_2|$, existirá algún $i \in S_1$ tal que $i \notin S_2$ cumpliendo

$$a_{i,s}(v) = v(S_1) \neq 0, \quad s = |S|,$$

y v es distinguible por semivalores de $0 \in G_N$.

(c) Por último, consideramos cualquier juego $v \in G_N$ con $cal(v) = 3$. Existirán tres únicas coaliciones diferentes $S_1, S_2, S_3 \subseteq N,\ S_1, S_2, S_3 \neq \emptyset$, tales que $v(S_i) \neq 0,\ i = 1, 2, 3$. Si uno de los cardinales de estas coaliciones es diferente a cualquiera de los otros dos, actuando como en el apartado (a) sobre la coalición de cardinal único, concluimos que v es distinguible por semivalores de $0 \in G_N$.

Suponemos entonces que $v(S_i) \neq 0,\ |S_i| = s,\ i = 1, 2, 3,\ 1 \leq s \leq n-1,\ v(S) = 0$ si $S \neq S_i,\ i = 1, 2, 3$ y que $v \sim 0$. Según la proposición 6.6, al ser $v \sim 0$,

$$a_{j,s}(v) = 0,\ 1 \leq j \leq n \ \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{n} a_{j,s}(v) = s \sum_{S:|S|=s} v(S) = 0,$$

que, en este caso, da lugar a:

$$v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) = 0,$$

$$v(S_1) = -a - b,\ v(S_2) = a,\ v(S_3) = b,\ \ a, b, -a - b \neq 0.$$

Al ser S_1, S_2, S_3 distintas, pero del mismo cardinal, existirá, al menos, un $i \in S_1$ tal que $i \notin S_2,\ i \notin S_3$ ó $i \notin S_2,\ i \in S_3$ ó $i \in S_2,\ i \notin S_3$. Para estos tres supuestos, respectivamente,

$$a_{i,s}(v) = v(S_1) = -a - b \neq 0,$$

$$a_{i,s}(v) = v(S_1) + v(S_3) = -a \neq 0,$$

$$a_{i,s}(v) = v(S_1) + v(S_2) = -b \neq 0.$$

Las tres posibilidades contradicen la suposición de que $v \sim 0$. $\square$

6.2 Juegos de conmutación

En la sección anterior hemos determinado la dimensión de la variedad de los juegos indistinguibles por semivalores respecto a un juego cualquiera. Además, hemos probado que no existen juegos indistinguibles que tomen únicamente uno, dos o tres valores sobre sus coaliciones que sean distintos a los del juego con el que, en concreto, se esté tratando.

En línea con estas consideraciones y trabajando siempre en referencia al juego nulo, definimos ahora unos juegos de tipo bastante simple que nos van a permitir conocer cuál es la estructura del conjunto de juegos indistinguibles por semivalores respecto al juego $0 \in G_N$, en el sentido de conocer qué elementos lo generan como subespacio vectorial en cada espacio de juegos G_N.

Definición 6.16
Consideramos espacios de juegos cooperativos G_N con $|N| \geq 4$.

Para un determinado cardinal de las coaliciones de jugadores s $(2 \leq s \leq n-2)$, dados un subconjunto $F \subseteq N$ con $card(F) = s-2$, cuatro jugadores $j_1, j_2, j_3, j_4 \in N \setminus F$ y un número real $k \neq 0$, definimos el juego de conmutación $v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}$ en la forma siguiente:

$$v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4} = k\,[1_{F\cup\{j_1,j_2\}} + 1_{F\cup\{j_3,j_4\}} - 1_{F\cup\{j_1,j_3\}} - 1_{F\cup\{j_2,j_4\}}],$$

donde $1_S \in G_N$ es el juego unidad definido como $1_S(T) = 0$ si $T \neq S$ y $1_S(S) = 1$.

En esta definición se ha de considerar $F \subseteq N$ como un subconjunto y no como una coalición, permitiendo, por lo tanto, que pueda ser $F = \emptyset$. En la definición del juego de conmutación aparecen cuatro coaliciones que toman valor no nulo; los elementos de F forman parte de esas cuatro coaliciones. En el caso en que las coaliciones sean de cardinal $s = 2$, no se encuentra ningún jugador común a todas ellas, siendo entonces $F = \emptyset$.

Ejemplo 6.17
Designamos por v^a el juego de conmutación cuando el cardinal de las coaliciones es $s = 2$, los jugadores son $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4)$ y $k = 1$. En este caso las coaliciones con valor no nulo adoptan el esquema siguiente:

<table>
<tr><td>$v^a(S) = 1$</td><td>$v^a(S) = -1$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{c}\boxed{1\ 2}\\ 3\ 4\end{array} \qquad \begin{array}{c}1\ 2\\ \boxed{3\ 4}\end{array}$</td><td>$\boxed{\begin{array}{c}1\\ 3\end{array}}\ \begin{array}{c}2\\ 4\end{array} \qquad \begin{array}{c}1\\ 3\end{array}\ \boxed{\begin{array}{c}2\\ 4\end{array}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$v^a(S) = 0$ en otro caso.</td></tr>
</table>

Si llamamos v^b al juego de conmutación definido como el anterior pero ahora con $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 3)$, tenemos el esquema siguiente:

<table>
<tr><td>$v^b(S) = 1$</td><td>$v^b(S) = -1$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{cc}\boxed{1\ 2}\\ 3\ 4\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc}1\ 2\\ \boxed{3\ 4}\end{array}$</td><td>$\begin{array}{cc}\boxed{1} & 2\\ 3 & \boxed{4}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc}1 & \boxed{2}\\ \boxed{3} & 4\end{array}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$v^b(S) = 0$ en otro caso.</td></tr>
</table>

Pensados como vectores de un espacio de juegos G_N con $|N| \geq 4$, los juegos v^a, v^b resultan ser linealmente independientes.

Estos dos juegos representan, para una determinada agrupación por parejas $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$, las dos posibles agrupaciones en parejas distintas que pueden formarse entre los elementos dados, esto es, $\{1, 3\}$ y $\{2, 4\}$ para v^a, $\{1, 4\}$ y $\{2, 3\}$ para v^b. En ambos casos, cada intercambio de parejas o conmutación supone cambio de signo en el valor atribuido a la coalición.

Ejemplo 6.18
Los juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 5$, con $F = \{1, 2, 3\}$, jugadores $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (4, 5, 6, 7)$ y $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (4, 5, 7, 6)$, designados respectivamente v^a y v^b, con $k = 1$, adoptan los esquemas que se detallan a continuación.

<table>
<tr><td>$v^a(S) = 1$</td><td>$v^a(S) = -1$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{ccc}\boxed{4} & & \boxed{5}\\ & \boxed{1\,2\,3} & \\ 6 & & 7\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc}4 & & 5\\ & \boxed{1\,2\,3} & \\ \boxed{6} & & \boxed{7}\end{array}$</td><td>$\begin{array}{ccc}\boxed{4} & & 5\\ & \boxed{1\,2\,3} & \\ \boxed{6} & & 7\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc}4 & & \boxed{5}\\ & \boxed{1\,2\,3} & \\ 6 & & \boxed{7}\end{array}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$v^a(S) = 0$ en otro caso.</td></tr>
</table>

$v^b(S) = 1$	$v^b(S) = -1$
$\begin{array}{ccc} \boxed{4} & & \boxed{5} \\ & \boxed{1\ 2\ 3} & \\ 6 & & 7 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 4 & & 5 \\ & \boxed{1\ 2\ 3} & \\ \boxed{6} & & \boxed{7} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \boxed{4} & & 5 \\ & \boxed{1\ 2\ 3} & \\ 6 & & \boxed{7} \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 4 & & \boxed{5} \\ & \boxed{1\ 2\ 3} & \\ \boxed{6} & & 7 \end{array}$
$v^b(S) = 0$ en otro caso.	

En ambos juegos, los elementos de F pertenecen a las cuatro coaliciones que toman valor no nulo, que en este ejemplo son los jugadores 1, 2 y 3. Los jugadores 4, 5, 6, 7 son los que conmutan, formando parte de dos coaliciones, una con valor 1 y otra con valor -1, al intercambiarse entre sí los elementos de las parejas formadas por estos jugadores.

Proposición 6.19
Los juegos de conmutación son juegos cooperativos de calibre 4 indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$ para $|N| \geq 4$.

Demostración
Emplearemos la EML para probar que son indistinguibles del juego nulo.

En el caso de juegos de conmutación para $s = 2$ ya se ha visto la propiedad en el ejemplo 6.12, en el caso particular $k = 1$ y $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$, $j_4 = 4$. El resto de posibilidades tendría un tratamiento similar.

Para cardinal de las coaliciones s, $2 < s \leq n - 2$, la EML de un juego de conmutación adopta la expresión siguiente:

$$f = k \prod_{j \in F} x_j \prod_{j \notin G} (1 - x_j) \left[x_{j_{s-1}} x_{j_s} (1 - x_{j_{s+1}})(1 - x_{j_{s+2}}) + x_{j_{s+1}} x_{j_{s+2}} (1 - x_{j_{s-1}}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1 - x_{j_s}) - x_{j_{s-1}} x_{j_{s+1}} (1 - x_{j_s})(1 - x_{j_{s+2}}) - x_{j_s} x_{j_{s+2}} (1 - x_{j_{s-1}})(1 - x_{j_{s+1}}) \right],$$

donde $F = \{j_1, ..., j_{s-2}\}$ y $G = F \cup \{j_{s-1}, j_s, j_{s+1}, j_{s+2}\}$.

Para $j \in F$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\alpha}) = k\,\alpha^{s-3}\alpha^{n-s-2} \cdot 0 = 0,\ \bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha),\ \alpha \in [0,1].$

Para $j \notin G$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\alpha}) = -k\,\alpha^{s-2}\alpha^{n-s-3} \cdot 0 = 0,\ \bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha),\ \alpha \in [0,1].$

Para $j = j_{s-1}, j_s, j_{s+1}, j_{s+2}$ estas variables aparecen únicamente en la expresión entre corchetes en la EML que se corresponde a la EML del caso $s = 2$ para estas mismas variables, de forma que las correspondientes derivaciones en $\bar{\alpha} = (\alpha, ..., \alpha),\ \alpha \in [0,1]$, son también nulas. $\square$

Proposición 6.20
Para cualquier espacio de juegos cooperativos G_N con $|N| \geq 4$, fijado un valor s del cardinal de las coaliciones de jugadores ($2 \leq s \leq n-2$), los juegos de conmutación respectivos generan un subespacio vectorial de dimensión $\binom{n}{s} - n$.

Demostración
Para probar la afirmación del enunciado construiremos a partir de juegos de conmutación una familia linealmente independiente, diferenciando los casos $s = 2$ y $s > 2$.

(a) Para $s = 2$, consideramos dos tipos de juegos de conmutación. El primer tipo de juegos es el constituido desde los juegos:

$$\begin{cases} v^a_{3,4}(\{1,2\}) = v^a_{3,4}(\{3,4\}) = 1, \\ v^a_{3,4}(\{1,3\}) = v^a_{3,4}(\{2,4\}) = -1, \\ v^a_{3,4}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^b_{3,4}(\{1,2\}) = v^b_{3,4}(\{3,4\}) = 1, \\ v^b_{3,4}(\{1,4\}) = v^b_{3,4}(\{2,3\}) = -1, \\ v^b_{3,4}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases}$$

hasta los juegos:

$$\begin{cases} v^a_{3,n}(\{1,2\}) = v^a_{3,n}(\{3,n\}) = 1, \\ v^a_{3,n}(\{1,3\}) = v^a_{3,n}(\{2,n\}) = -1, \\ v^a_{3,n}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^b_{3,n}(\{1,2\}) = v^b_{3,n}(\{3,n\}) = 1, \\ v^b_{3,n}(\{1,n\}) = v^b_{3,n}(\{2,3\}) = -1, \\ v^b_{3,n}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos están relacionados con coaliciones de jugadores desde $\{3,4\}$ hasta $\{3,n\}$, siendo, por tanto, en número $2(n-3) = 2n-6$. Estos juegos son linealmente independientes ya que los del tipo v^a son los únicos que toman valor diferente de cero sobre las coaliciones siguientes:

$$v^a_{3,4}(\{2,4\}) = \cdots = v^a_{3,n}(\{2,n\}) = -1,$$

sucediendo lo mismo con las coaliciones que se indican para los del tipo v^b:

$$v^b_{3,4}(\{1,4\}) = \cdots = v^b_{3,n}(\{1,n\}) = -1.$$

El segundo tipo de juegos que se escoge (para $n > 4$) está relacionado con las coaliciones de jugadores desde $\{4,5\}$ hasta $\{n-1,n\}$ y se trata de los siguientes:

$$\begin{cases} v_{4,5}(\{1,2\}) = v_{4,5}(\{4,5\}) = 1, \\ v_{4,5}(\{1,4\}) = v_{4,5}(\{2,5\}) = -1, \\ v_{4,5}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases} \cdots \begin{cases} v_{n-1,n}(\{1,2\}) = v_{n-1,n}(\{n-1,n\}) = 1, \\ v_{n-1,n}(\{1,n-1\}) = v_{n-1,n}(\{2,n\}) = -1, \\ v_{n-1,n}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El número de juegos de este tipo es el mismo que el de coaliciones desde la $\{4,5\}$ hasta la $\{n-1,n\}$ ordenadas lexicográficamente, es decir,

$$\binom{n}{2} - [n-1+n-2+n-3] = \binom{n}{2} - 3n + 6,$$

tratándose de juegos linealmente independientes entre sí y con los del tipo anterior, ya que cada uno de ellos es el único que atribuye valor no nulo a la coalición cuyos elementos coinciden con los subíndices del propio juego:

$$v_{i,j}(\{i,j\}) = 1, \quad 4 \le i < j \le n.$$

El número total de juegos que se ha considerado entre los del primer y los del segundo tipo resulta ser $\binom{n}{2} - n$, que es la cantidad requerida para el caso $s = 2$.

(b) Para $s > 2$ ($s \le n-2$) consideramos cuatro tipos de juegos de conmutación. El primer tipo de juegos es el constituido por los juegos:

$$\begin{cases} v^a_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s-1,s\}) = v^a_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s+1,k\}) = 1, \\ \\ v^a_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s-1,s+1\}) = v^a_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s,k\}) = -1, \\ \\ v^a_{s+1,k}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^b_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s-1,s\}) = v^b_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s+1,k\}) = 1, \\ \\ v^b_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s-1,k\}) = v^b_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s,s+1\}) = -1, \\ \\ v^b_{s+1,k}(S) = 0 \quad \text{en otro caso;} \end{cases}$$

donde k toma valores desde $s+2$ hasta n.

Considerando la variación de k, el número de juegos de este primer tipo es de $2[n-(s+2)+1] = 2(n-s-1)$. Estos juegos son linealmente independientes ya que los del tipo v^a son los únicos que toman valor diferente de cero sobre las coaliciones siguientes:

$$v^a_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s,k\}) = -1, \quad s+2 \leq k \leq n,$$

sucediendo lo mismo con las coaliciones que se indican para los del tipo v^b:

$$v^b_{s+1,k}(\{1,...,s-2,s-1,k\}) = -1, \quad s+2 \leq k \leq n.$$

El segundo tipo de juegos se considera sólo si $s \leq n-3$ y está relacionado con las coaliciones

$$\{1,...,s-2,s+2,s+3\},....,\{1,...,s-2,n-1,n\},$$

que tienen fijos los elementos $1,...,s-2$, variando los dos últimos elementos desde $\{s+2,s+3\}$ hasta $\{n-1,n\}$, en orden lexicográfico. Estos juegos están definidos en la forma:

$$\begin{cases} v_{i,j}(\{1,...,s-2,s-1,s\}) = v_{i,j}(\{1,...,s-2,i,j\}) = 1, & \\ v_{i,j}(\{1,...,s-2,s-1,i\}) = v_{i,j}(\{1,...,s-2,s,j\}) = -1, & s+2 \leq i < j \leq n. \\ v_{i,j}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} & \end{cases}$$

El número de juegos de este tipo es

$$\binom{n-(s+2)+1}{2} = \binom{n-s-1}{2},$$

tratándose de juegos linealmente independientes entre sí y con los del tipo anterior ya que cada uno de ellos es el único que atribuye valor no nulo a la coalición cuyos dos últimos elementos coinciden con los subíndices del propio juego:

$$v_{i,j}(\{1,...,s-2,i,j\}) = 1, \;\; s+2 \leq i < j \leq n.$$

En el supuesto $s \geq 4$ ($s \leq n-2$) se pasa a considerar el tercer tipo de juegos de conmutación relacionados con las coaliciones S de cardinal s tales que

$$S \ni 1 \;\text{ y }\; S \not\supset \{2,3,...,s-2\}.$$

Entre estas coaliciones aparecerán las siguientes $s-3$ que se caracterizan por dejar de contener un único elemento entre los de $\{2,3,...,s-2\}$ y el resto de elementos correlativos. Si designamos por T al subconjunto $\{1,2,...,s-2,s-1,s,s+1\}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} T\diagdown\{s-2\} &= \{1,2,...,s-4,s-3,s-1,s,s+1\} \\ T\diagdown\{s-3\} &= \{1,2,...,s-4,s-2,s-1,s,s+1\} \\ &\;\;\cdots \\ T\diagdown\{3\} &= \{1,2,4,...,s-2,s-1,s,s+1\} \\ T\diagdown\{2\} &= \{1,3,4,...,s-2,s-1,s,s+1\} \end{aligned}$$

Entonces, para cada S tal que $S \ni 1$, $S \not\supset \{2,3,...,s-2\}$, $S \neq T\diagdown\{s-2\}$, $T\diagdown\{s-3\}$, $\ldots, T\diagdown\{3\}$, $T\diagdown\{2\}$, descritos sus elementos en la forma

$$S = \{1, j_2, ..., j_{s-2}, j_{s-1}, j_s\}, \;\; 1 < j_2 < \cdots < j_{s-2} < j_{s-1} < j_s,$$

existirán, por lo menos, dos elementos $i, j \in N \setminus S$ tales que

$$1 < i < j < j_s \quad \wedge \quad i < j_{s-2},$$

de manera que podemos considerar los juegos:

$$\begin{cases} v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(\{1,..,i,..,j_{s-2},j\}) = v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(\{1,.....,j_{s-2},j_{s-1},j_s\}) = 1, \\ \\ v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(\{1,..,i,..,j_{s-2},j_s\}) = v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(\{1,.....,j_{s-2},j_{s-1},j\}) = -1, \\ \\ v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El número de juegos de este tipo será igual al de coaliciones que contienen el elemento 1, descontando las que contienen todos los elementos de $\{2, 3, ..., s-2\}$ y las $s-3$ coaliciones $T \setminus \{s-2\}, ..., T \setminus \{2\}$, es decir:

$$\binom{n-1}{s-1} - \binom{n-s+2}{2} - (s-3).$$

Estos juegos son linealmente independientes entre sí y con los de tipos anteriores, ya que dispuestas las coaliciones $S = \{1, j_2, ..., j_{s-2}, j_{s-1}, j_s\}$ del tipo que se considera en orden lexicográfico, cada juego es el primero que verifica

$$v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(\{1,.....,j_{s-2},j_{s-1},j_s\}) = 1,$$

siendo $v_{j_2,\ldots,j_{s-1},j_s}(S) = 0$ para cualquier coalición que ocupe un lugar posterior a $\{1,.....,j_{s-2},j_{s-1},j_s\}$ en orden lexicográfico.

Finalmente, el cuarto tipo de juegos de conmutación que se considera está relacionado con las coaliciones S tales que $S \not\ni 1$ y $S \neq \{2, 3, ..., s, s+1\}$. Así, si describimos cada una de estas coaliciones como

$$S = \{j_1, j_2, ..., j_s\},\ 1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_s,\ \{j_1, j_2, ..., j_s\} \neq \{2, 3, ..., s, s+1\},$$

existirá para cada una de estas S, al menos, un $j \in N \setminus S$ tal que $j \neq 1$, $j < j_p$, para cierto $p \leq s$, de manera que podemos considerar los juegos:

$$\begin{cases} v_{j_1,\ldots,j_s}(\{1,j_1,..,j_{s-2},j\}) = v_{j_1,\ldots,j_s}(\{j_1,..,j_{s-2},j_{s-1},j_s\}) = 1, \\ \\ v_{j_1,\ldots,j_s}(\{1,j_1,...,j_{s-2},j_s\}) = v_{j_1,\ldots,j_s}(\{j_1,...,j_{s-2},j_{s-1},j\}) = -1, \\ \\ v_{j_1,\ldots,j_s}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El número de juegos de este tipo será igual al de coaliciones de cardinal s que puedan formarse con $n-1$ elementos (que no contengan el 1), descontando la coalición $\{2,3,...,s,s+1\}$, es decir:

$$\binom{n-1}{s}-1.$$

Estos juegos son linealmente independientes entre sí y con los de tipos anteriores, ya que ordenadas lexicográficamente las coaliciones $S=\{j_1,j_2,...,j_s\}$ del tipo que se considera, cada juego es el primero que verifica

$$v_{j_1,...,j_s}(\{j_1,..,j_{s-2},j_{s-1},j_s\})=1,$$

siendo $v_{j_1,...,j_s}(S)=0$ para cualquier coalición que ocupe un lugar posterior a $\{j_1,..,j_{s-2},j_{s-1},j_s\})$ en orden lexicográfico.

Reuniendo los cuatro tipos de juegos de conmutación que se han descrito, su número resulta ser igual a:

$$\binom{n-1}{s}-1+\binom{n-1}{s-1}-\binom{n-s+2}{2}-(s-3)+\binom{n-s-1}{2}+2(n-s-1)=\binom{n}{s}-n.$$

Como estos juegos de conmutación para coaliciones de cardinal s $(2<s\leq n-2)$ son linealmente independientes, el subespacio vectorial que generan tiene la dimensión que establece el enunciado. $\square$

Teorema 6.21
Un juego cooperativo $v\in G_N,\ |N|\geq 4$, es indistinguible por semivalores del juego $0\in G_N$ si y sólo si es combinación lineal de juegos de conmutación.

Demostración
Según la proposición 6.19, todo juego de conmutación es indistinguible por semivalores del juego nulo. Por linealidad, toda combinación lineal de juegos de conmutación será, en consecuencia, indistinguible del juego $0\in G_N$.

Recíprocamente, por la proposición 6.20, para cada cardinal s de las coaliciones de jugadores, $2\leq s\leq n-2$, los juegos de conmutación respectivos generan un subespacio vectorial de dimensión $\binom{n}{s}-n$. Cada uno de estos subespacios está en suma directa con cualquiera de los otros, de manera que la dimensión de su suma resulta ser

$$\sum_{s=2}^{n-2}\left[\binom{n}{s}-n\right]=2^n-n^2+n-2,$$

exactamente igual a la dimensión de $\bigcap_\sigma EN(\sigma)$, donde σ es cualquier semivalor sobre los juegos de G_N.

Al estar todos los subespacios generados por juegos de conmutación incluidos en la intersección de los espacios nulos por semivalores, se sigue su igualdad, lo que prueba que todo juego indistinguible por semivalores de $0 \in G_N$ puede expresarse como combinación lineal de juegos de conmutación. $\square$

Ejemplo 6.22
Consideramos el caso en que el cardinal del conjunto de jugadores es $n = 7$. Se pretende determinar, empleando el procedimiento constructivo de la proposición 6.20, una familia de juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ formada por $\binom{7}{2} - 7 = 14$ juegos linealmente independientes.

El primer tipo de juegos estaría constituido por aquellos que toman los valores siguientes:

12	13	14	15	16	17	23	24	25	26	27	34	35	36	37
1	-1						-1				1			
1		-1				-1					1			
1	-1							-1				1		
1			-1			-1						1		
1	-1								-1				1	
1				-1		-1							1	
1	-1									-1				1
1					-1	-1								1

Este tipo de juegos son los relacionados con las coaliciones $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$ y $\{3,7\}$, donde sólo varía el último elemento. Al considerar para cada coalición un juego v^a y otro v^b, su número es de 8 juegos, que corresponde a la cantidad general $2n - 6$ para $n = 7$.

Puede observarse como cada uno de estos juegos es el único que atribuye valor no nulo a las coaliciones que se especifican:

$$v^a_{3,4}(\{2,4\}) = v^a_{3,5}(\{2,5\}) = v^a_{3,6}(\{2,6\}) = v^a_{3,7}(\{2,7\}) = -1,$$

$$v^b_{3,4}(\{1,4\}) = v^b_{3,5}(\{1,5\}) = v^b_{3,6}(\{1,6\}) = v^b_{3,7}(\{1,7\}) = -1,$$

lo que garantiza su independencia lineal.

Los subíndices en cada juego denotan la última coalición, en orden lexicográfico, para la que toman valor no nulo.

El segundo tipo de juegos sería:

12	13	14	15	16	17	23	24	25	26	27	...	37	45	46	47	56	57	67
1		-1						-1					1					
1		-1							-1					1				
1		-1								-1					1			
1			-1						-1							1		
1			-1							-1							1	
1				-1						-1								1

Este segundo tipo está relacionado con las coaliciones de jugadores $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{4,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$ y $\{6,7\}$. Su número es de 6 juegos, que corresponde a la cantidad general $\binom{n}{2} - 3n + 6$ para $n = 7$.

Cada uno de estos juegos es el único de entre los de su tipo y de entre los del tipo anterior que cumple

$$v_{4,5}(\{4,5\}) = v_{4,6}(\{4,6\}) = \cdot \cdot \cdot = v_{6,7}(\{6,7\}) = 1,$$

lo que asegura la independencia lineal de la unión de ambos tipos.

Otra vez, los subíndices en cada juego denotan la última coalición, en orden lexicográfico, para la que toman valor no nulo.

En las dos tablas que se han construido, las posiciones en blanco corresponden a valores nulos para la coalición correspondiente al juego de la fila.

Ejemplo 6.23
Consideramos el caso en que el cardinal del conjunto de jugadores es $n = 8$. Ahora se pretende determinar, empleando el procedimiento constructivo de la proposición 6.20, una familia de juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 4$ formada por $\binom{8}{4} - 8 = 62$ juegos linealmente independientes.

En estas condiciones, el primer y segundo tipo de juegos estaría constituido por los que toman los valores siguientes:

1234	1235	1236	1237	1238	1245	1246	1247	1248	1256	1257	1258	1267	1268	1278
1	-1					-1			1					
1		-1			-1				1					
1	-1						-1			1				
1			-1		-1					1				
1	-1							-1			1			
1				-1	-1						1			
1		-1					-1					1		
1		-1						-1					1	
1			-1					-1						1

Los juegos del primer tipo están relacionados con las coaliciones

$$\{1, 2, 5, 6\},\ \{1, 2, 5, 7\},\ \{1, 2, 5, 8\}.$$

Al considerar, para cada una de estas coaliciones, un juego v^a con $k = 1$ y un juego v^b con $k = 1$ obtenemos un número total de 6 juegos, que corresponde a la cantidad $2(n - s - 1)$ para $n = 8$ y $s = 4$. La condición que garantiza su independencia lineal es que cada uno de ellos es el único de su tipo que toma valor no nulo sobre las coaliciones que se detallan:

$$v^a_{5,6}(\{1, 2, 4, 6\}) = v^a_{5,7}(\{1, 2, 4, 7\}) = v^a_{5,8}(\{1, 2, 4, 8\}) = -1,$$

$$v^b_{5,6}(\{1, 2, 3, 6\}) = v^b_{5,7}(\{1, 2, 3, 7\}) = v^b_{5,8}(\{1, 2, 3, 8\}) = -1.$$

Estos juegos del primer tipo están relacionados con aquellas coaliciones que tienen fijos los $s-1=3$ primeros jugadores variando sólo el último. Por su lado, los juegos del segundo tipo están relacionados con aquellas coaliciones que mantienen fijos los $s-2=2$ primeros jugadores variando los dos últimos en orden lexicográfico a partir de la última coalición considerada en los del tipo primero, esto es:

$$\{1,2,6,7\},\ \{1,2,6,8\},\ \{1,2,7,8\}.$$

Ahora los juegos que se incorporan son los primeros que cumplen:

$$v_{6,7}(\{1,2,6,7\}) = v_{6,8}(\{1,2,6,8\}) = v_{7,8}(\{1,2,7,8\}) = 1,$$

tomando cada uno de ellos valor nulo sobre coaliciones que, en orden lexicográfico, ocupen lugares posteriores. Esto garantiza su independencia lineal entre sí y con los del primer tipo.

El número de juegos del segundo tipo es de 3, correspondiente a la cantidad general $\binom{n-s-1}{2}$ para $n=8$ y $s=4$.

Ambos tipos de juegos se han designado con dos subíndices correspondientes a los dos elementos finales de la última coalición para la que toman valor no nulo.

Para construir los juegos del tercer tipo hemos de considerar las coaliciones S que cumplen

$$S \ni 1 \ \text{ y } \ S \not\supset \{2\},$$

ya que, la condición general $S \not\supset \{2,3,...,s-2\}$ queda reducida a la segunda en el caso $s=4$. Además, el subconjunto $T=\{1,2,3,...,s,s+1\}$ es, en este caso, $T=\{1,2,3,4,5\}$, de manera que $T\setminus\{s-2\},...,T\setminus\{2\}$ se reduce a $T\setminus\{2\}$.

De esta forma, para cada coalición S tal que

$$S \ni 1,\ S \not\supset \{2\},\ S \neq \{1,3,4,5\},$$

existirán, por lo menos, dos elementos $i,j \in N\setminus S$, tales que $1<i<j$, siendo j menor que el último elemento de S y i menor que el antepenúltimo. Si i,j puede tener más de una posibilidad escogeremos los elementos menores.

Por ejemplo, para $S = \{1, 3, 4, 6\}$ necesariamente $i = 2$, $j = 5$. Entonces:

$$\begin{cases} v_{3,4,6}(\{1,2,3,5\}) = v_{3,4,6}(\{1,3,4,6\}) = 1, \\[2ex] v_{3,4,6}(\{1,2,3,6\}) = v_{3,4,6}(\{1,3,4,5\}) = -1, \\[2ex] v_{3,4,6}(S) = 0 \quad \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Este sería el primer juego de la tabla que se adjunta.

Por ejemplo, para $S = \{1, 5, 7, 8\}$ escogemos $i = 2$, $j = 3$. Entonces:

$$\begin{cases} v_{5,7,8}(\{1,2,3,5\}) = v_{5,7,8}(\{1,5,7,8\}) = 1, \\[2ex] v_{5,7,8}(\{1,2,5,8\}) = v_{5,7,8}(\{1,3,5,7\}) = -1, \\[2ex] v_{5,7,8}(S) = 0 \quad \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Mediante este proceso llegaríamos a construir el tercer tipo de juegos que se resumen en la siguiente tabla:

1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 3 7	1 2 3 8	...	1 2 5 8	1 2 6 7	1 2 6 8	1 2 7 8	1 3 4 5	1 3 4 6	1 3 4 7	1 3 4 8	1 3 5 6	1 3 5 7	1 3 5 8	1 3 6 7	...	1 5 7 8	1 6 7 8
	1	-1								-1	1									
	1		-1							-1		1								
	1			-1						-1			1							
1		-1								-1				1						
...																...				
...																	...			
...																		...		
	1					-1									-1				1	
		1						-1									-1			1

El número de juegos del tercer tipo es el mismo que el de coaliciones escritas en orden lexicográfico desde $\{1, 3, 4, 5\}$ hasta $\{1, 6, 7, 8\}$, exceptuando la coalición

$T \setminus \{2\} = \{1,3,4,5\}$, es decir, $\binom{6}{3} - 1 = 19$, correspondiente al caso general $\binom{n-1}{s-1} - \binom{n-s+2}{2} - (s-3)$ para $n = 8$ y $s = 4$.

Este tipo de juegos es tal que cada uno de ellos es el primero de entre los de su tipo y de entre los dos tipos anteriores en verificar

$$v_{3,4,6}(\{1,3,4,6\}) = v_{3,4,7}(\{1,3,4,7\}) = \cdots = v_{6,7,8}(\{1,6,7,8\}) = 1,$$

tomando cada uno valor nulo sobre coaliciones que, en orden lexicográfico, ocupen lugares posteriores. Ello garantiza la independencia lineal de los tres tipos de juegos. Cada uno de estos juegos se ha designado con tres subíndices que corresponden a los tres elementos finales que junto al 1 constituyen la última coalición sobre la que cada juego toma valor no nulo.

Finalmente, para construir el cuarto tipo de juegos hemos de considerar aquellas coaliciones S tales que

$$S \not\ni 1 \ \text{ y } \ S \neq \{2,3,4,5\}.$$

Para cada una de ellas podremos determinar, al menos, un elemento $j \in N \setminus S$ tal que $j \neq 1$ y que sea menor que alguno de los elementos de S. Otra vez, si existen diversas alternativas para j escogeremos el número menor.

Por ejemplo, para $S = \{2,3,4,6\}$ necesariamente $j = 5$. Entonces:

$$\begin{cases} v_{2,3,4,6}(\{1,2,3,5\}) = v_{2,3,4,6}(\{2,3,4,6\}) = 1, \\ \\ v_{2,3,4,6}(\{1,2,3,6\}) = v_{2,3,4,6}(\{2,3,4,5\}) = -1, \\ \\ v_{2,3,4,6}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este sería el primer juego de la tabla que se adjunta.

Por ejemplo, para $S = \{2,3,4,7\}$ podría ser $j = 5$ ó $j = 6$, pero escogemos $j = 5$. Entonces:

$$\begin{cases} v_{2,3,4,7}(\{1,2,3,5\}) = v_{2,3,4,7}(\{2,3,4,7\}) = 1, \\ \\ v_{2,3,4,7}(\{1,2,3,7\}) = v_{2,3,4,7}(\{2,3,4,5\}) = -1, \\ \\ v_{2,3,4,7}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este sería el segundo juego de la tabla que se adjunta.

Siguiendo este proceso llegaríamos a construir el cuarto tipo de juegos que pueden esquematizarse en la siguiente tabla:

1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 3 7	1 2 3 8	...	1 2 5 6	...	1 5 6 8	...	$\boxed{\begin{smallmatrix}2\\3\\4\\5\end{smallmatrix}}$	2 3 4 6	2 3 4 7	2 3 4 8	2 3 5 6	2 3 5 7	2 3 5 8	...	2 5 6 7	...	5 6 7 8
	1	-1								-1	1									
	1		-1							-1		1								
	1			-1						-1			1							
1		-1								-1				1						
1			-1							-1					1					
1				-1						-1						1				
...																	...			
...																		...		
...																			...	
						1		-1										-1		1

El número de juegos del cuarto tipo es el mismo que el de coaliciones escritas en orden lexicográfico desde $\{2, 3, 4, 5\}$ hasta $\{5, 6, 7, 8\}$, exceptuando la coalición $\{2, 3, 4, 5\}$, es decir, $\binom{7}{4} - 1 = 34$, correspondiente al caso general $\binom{n-1}{s} - 1$ para $n = 8$ y $s = 4$.

Este tipo de juegos es tal que cada uno de ellos es el primero de entre los de su tipo y de entre los tres tipos anteriores en verificar

$$v_{2,3,4,6}(\{2, 3, 4, 6\}) = v_{2,3,4,7}(\{2, 3, 4, 7\}) = \cdots = v_{5,6,7,8}(\{5, 6, 7, 8\}) = 1,$$

tomando cada uno valor nulo sobre coaliciones que, en orden lexicográfico, ocupen lugares posteriores. Ello garantiza la independencia lineal de los cuatro tipos de juegos. Cada uno de estos juegos se ha designado con cuatro subíndices que corresponden a los elementos de la última coalición sobre la que cada juego toma valor no nulo.

Nuevamente, las posiciones en blanco en cada tabla suponen valores nulos para la coalición correspondiente.

6.3 Cooperación modificada

En las secciones precedentes se ha tratado el problema de la descripción de los juegos indistinguibles por cualquier semivalor. A continuación se introduce el concepto de juego indistinguible por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición y se pretende describir los juegos indistinguibles en este nuevo sentido. En un primer estadio se observa cómo la condición de indistinguible se conserva o se pierde dependiendo del cardinal del conjunto de jugadores sobre el que está definido el juego.

A partir de la observación anterior se procede a estudiar condiciones necesarias para que un juego cooperativo no pueda distinguirse del juego nulo, sean cuales sean el semivalor empleado y la estructura de coalición que pueda formarse en el conjunto de jugadores. Se consigue probar que, para juegos con más de cuatro jugadores, la formación de estructuras de coalición consigue reducir de manera significativa la dimensión de los subespacios de juegos indistinguibles del nulo. El estudio concluye determinando una base para cada uno de estos subespacios formada por juegos que se obtienen a partir de los juegos de conmutación y que se introducen con el nombre de expandidos.

Definición 6.24
El juego cooperativo $v \in G_N$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición si para cualquier semivalor σ definido sobre G_N y cualquier estructura de coalición B en N se cumple

$$\sigma[v; B] = 0.$$

Respecto a la modificación de los semivalores para juegos con estructura de coalición en N deben diferenciarse dos casos, según si el cardinal del conjunto de jugadores es $|N| = 4$ ó $|N| \geq 5$.

Para $|N| = 4$ la introducción de los semivalores modificados para juegos con estructura de coalición no consigue modificar la condición de indistinguible por semivalores del juego $0 \in G_N$, mientras que para $|N| \geq 5$ puede conseguirse que se pierda dicha condición. Estas dos situaciones se concretan a continuación.

Proposición 6.25
Para $|N| = 4$, un juego $v \in G_N$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores si y sólo si es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

Demostración
En el caso $|N| = 4$ el subespacio de G_N formado por los juegos indistinguibles por semivalores del juego $0 \in G_N$ tiene dimensión 2. Una base está constituida por los juegos de conmutación denominados v^a y v^b:

$$v^a(\{1,2\}) = v^a(\{3,4\}) = 1,\ v^a(\{1,3\}) = v^a(\{2,4\}) = -1,\ v^a(S) = 0 \text{ en otro caso;}$$

$$v^b(\{1,2\}) = v^b(\{3,4\}) = 1,\ v^b(\{1,4\}) = v^b(\{2,3\}) = -1,\ v^b(S) = 0 \text{ en otro caso.}$$

Para probar que todo juego indistinguible por semivalores del juego $0 \in G_N$ es también indistinguible por cualquier semivalor modificado probaremos la afirmación sobre los juegos de la base y extenderemos por linealidad el resultado al resto de juegos del subespacio.

De esta forma, consideramos el juego v^a y todas las posibles estructuras de coalición sobre $N = \{1, 2, 3, 4\}$ distinguiendo los casos siguientes:

(a) Cuatro coaliciones individuales.

(b) Una coalición bipersonal afectando a una pareja de jugadores sobre la que v^a toma valor no nulo y dos coaliciones individuales.

(c) Una coalición bipersonal afectando a una pareja de jugadores sobre la que v^a toma valor nulo y dos coaliciones individuales.

(d) Dos coaliciones bipersonales afectando a sendas parejas sobre las que v^a toma valor no nulo.

(e) Dos coaliciones bipersonales afectando a sendas parejas sobre las que v^a toma valor nulo.

(f) Una coalición de tres jugadores y otra individual.

(g) Una coalición única de cuatro jugadores.

Los casos (a) y (g) correspondientes a las estructuras extremas de coalición mantienen, según la consecuencia 2.26, el pago por el semivalor modificado respecto al inicial

$$\sigma_i[v;B] = \sigma_i[v] = 0, \ \ i = 1,2,3,4,$$

tanto para $B = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ como para $B = \{\{1,2,3,4\}\}$.

Para abordar el resto de casos empleamos la EML del juego v^a

$$f = x_1x_2(1-x_3)(1-x_4) - x_1x_3(1-x_2)(1-x_4) - x_2x_4(1-x_1)(1-x_3) + x_3x_4(1-x_1)(1-x_2).$$

Caso (b). Estructura de coalición $B = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$. Para calcular $\sigma_1[v;B]$, siguiendo el proceso del teorema 2.31, obtenemos primero la EML modificada g_1 dejando inalteradas x_1, x_2, sustituyendo x_3 por y_2 y x_4 por y_3, y derivamos después respecto a x_1:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2(1-y_2)(1-y_3) - y_2(1-x_2)(1-y_3) + x_2y_3(1-y_2) - y_2y_3(1-x_2),$$

$$a_{pq}(1) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = \alpha_p - \alpha_q.$$

El valor $a_{pq}(1)$ es el elemento de la fila p columna q de la matriz $A(1)$ que permite calcular el semivalor modificado $\sigma_1[v;B]$. Si el semivalor σ se expresa como

$$\sigma = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \sigma_{\alpha_j}\,, \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \leq 1,$$

escribiendo $\Lambda^t = (\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ )$ obtenemos:

$$\sigma_1[v;B] = \Lambda^t\, A(1)\, \Lambda = 0.$$

Este resultado es consecuencia de que la matriz $A(1)$ es antisimétrica:

$$a_{pq}(1) = \alpha_p - \alpha_q = -(\alpha_q - \alpha_p) = -a_{qp}(1), \ \ 1 \leq p, q \leq 4.$$

Un tratamiento análogo prueba que $\sigma_2[v;B] = 0$.

Para calcular $\sigma_3[v; B]$, que es el modificado para un jugador de una de las coaliciones individuales, obtenemos g_2 transformando x_1, x_2 en y_1, x_4 en y_3 y reduciendo exponentes a la unidad:

$$g_2 = y_1(1 - x_3)(1 - y_3) + x_3y_3(1 - y_1),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_3} = -y_1(1 - y_3) + y_3(1 - y_1) \quad \Rightarrow \quad a_{pq}(3) = \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = 0,$$

de donde, $\sigma_3[v; B] = 0$. Análogamente, $\sigma_4[v; B] = 0$.

Caso (c). Estructura de coalición $B = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$. Para calcular $\sigma_1[v; B]$ obtenemos primero la EML modificada g_1 transformando x_2 en y_2 y x_3 en y_3, y derivamos posteriormente respecto a x_1:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = y_2(1 - y_3)(1 - x_4) - y_3(1 - y_2)(1 - x_4) + y_2x_4(1 - y_3) - y_3x_4(1 - y_2),$$

$$a_{pq}(1) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = \alpha_q(1 - \alpha_q)[1 - \alpha_p - 1 + \alpha_p + \alpha_p - \alpha_p] = 0.$$

En consecuencia, $\sigma_1[v; B] = 0$. Análogamente, $\sigma_4[v; B] = 0$.

Para calcular $\sigma_2[v; B]$, el correspondiente modificado para un jugador de una de las coaliciones individuales, obtenemos g_2 transformando x_1, x_4 en y_1, x_3 en y_3 y reduciendo exponentes a la unidad, resultando ser $g_2 = 0$. De aquí, $\sigma_2[v; B] = 0$. De la misma forma, $\sigma_3[v; B] = 0$.

Caso (d). Estructura de coalición $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Para calcular $\sigma_1[v; B]$ obtenemos primero la EML modificada g_1 transformando x_3, x_4 en y_2 y reduciendo exponentes a la unidad:

$$g_1 = x_1x_2(1 - y_2) + y_2(1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$a_{pq}(1) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = \alpha_p(1 - \alpha_q) - \alpha_q(1 - \alpha_p) = \alpha_p - \alpha_q.$$

Estando en las mismas condiciones que en el caso (b), $\sigma_1[v; B] = 0$.

Unos cálculos similares prueban que $\sigma_2[v; B] = \sigma_3[v; B] = \sigma_4[v; B] = 0$.

Caso (e). Estructura de coalición $B = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$. Para determinar g_1 se transforman x_2 y x_3 en y_2, se reducen exponentes a la unidad, obteniendo $g_1 = 0$. Por tanto, $\sigma_1[v;B] = \sigma_4[v;B] = 0$. De manera similar $\sigma_2[v;B] = \sigma_3[v;B] = 0$.

Caso (f). Estructura de coalición $B = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$. Se obtiene g_1 transformando x_4 en y_2. Entonces:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2(1-x_3)(1-y_2) - x_3(1-x_2)(1-y_2) + x_2y_2(1-x_3) - x_3y_2(1-x_2),$$

$$a_{pq}(1) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = \alpha_p(1-\alpha_p)[1-\alpha_q - 1 + \alpha_q + \alpha_q - \alpha_q] = 0.$$

En consecuencia, $\sigma_1[v;B] = 0$. Derivando ahora respecto a x_2:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1(1-x_3)(1-y_2) + x_1x_3(1-y_2) - y_2(1-x_1)(1-x_3) - x_3y_2(1-x_1),$$

$$a_{pq}(2) = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\overline{\alpha}_p, \overline{\alpha}_q) = \alpha_p - \alpha_q.$$

Otra vez, igual que en el caso (b), podemos concluir que $\sigma_2[v;B] = 0$. Un cálculo similar permite obtener que $\sigma_3[v;B] = 0$.

Por último, para determinar $\sigma_4[v;B]$ hemos de calcular g_2 a partir de la EML del juego v^a transformando x_1, x_2, x_3 en y_1 y reduciendo exponentes a la unidad. Obtenemos $g_2 = 0$ y concluimos que $\sigma_4[v;B] = 0$.

Todos estos cálculos concluyen la demostración de una implicación del enunciado de la propiedad. Para probar el recíproco basta tener en cuenta que si un juego es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por cualquier semivalor modificado para juegos con estructura de coalición, en particular, lo es por la estructura de coaliciones individuales, siendo los valores que asigna los mismos que asigna el semivalor sin modificación. $\square$

Proposición 6.26

Consideramos G_N con $|N| \geq 5$. Para cada juego de conmutación $v \in G_N$ existen una estructura de coalición B en N y un semivalor σ definido sobre G_N que consiguen distinguirlo del juego $0 \in G_N$, es decir, σ y B son tales que

$$\sigma[v;B] \neq 0.$$

Demostración
Diferenciamos dos casos según si $s = 2$ ó $s > 2$.

Para $s = 2$, consideramos, sin pérdida de generalidad, el juego de conmutación v con $F = \emptyset$ y jugadores $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4)$. Su EML para $k \neq 0$ es:

$$f = k \prod_{j \neq 1,2,3,4} (1 - x_j) \, [x_1 x_2 (1 - x_3)(1 - x_4) - x_1 x_3 (1 - x_2)(1 - x_4) -$$
$$- x_2 x_4 (1 - x_1)(1 - x_3) + x_3 x_4 (1 - x_1)(1 - x_2)].$$

Por la estructura de coalición $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, ..., n\}\}$, la EML modificada g_1 resulta ser

$$g_1 = k(1 - y_2) x_1 x_2,$$

ya que como $|N| \geq 5$ en la expresión del producto para $j \neq 1, 2, 3, 4$ aparece, por lo menos, $(1 - x_j)$ para $j = 5$. Después de reducir exponentes a la unidad sólo queda el primer término del interior del corchete. Entonces:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = k(1 - y_2) x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{1/2}, \overline{1/2}) = \frac{k}{4} \neq 0,$$

y el valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición distingue el juego v considerado del juego $0 \in G_N$.

Para $s > 2$ $(s \leq n - 2)$, consideramos el juego de conmutación v para el que se toma $F = \{1, ..., s - 2\}$ y jugadores que conmutan $s - 1, s, s + 1, s + 2$. Su EML para $k \neq 0$ es:

$$f = k \prod_{j \in F} x_j \prod_{j \notin G} (1 - x_j) \, [x_{s-1} x_s (1 - x_{s+1})(1 - x_{s+2}) - x_{s-1} x_{s+1} (1 - x_s) \cdot$$
$$\cdot (1 - x_{s+2}) - x_s x_{s+2} (1 - x_{s-1})(1 - x_{s+1}) + x_{s+1} x_{s+2} (1 - x_{s-1})(1 - x_s)],$$

donde $G = F \cup \{s - 1, s, s + 1, s + 2\}$.

Para el cardinal $s = n - 2$, el factor $\prod_{j \notin G}(1 - x_j)$ no figura en la expresión de la EML ya que $G = N$.

Por la estructura de coalición $B = \{\{1, ..., s-2, s+1, s+2\}, \{s-1, s, s+3, ..., n\}\}$, la EML modificada g_2 resulta ser

$$g_2 = k\, y_1(1 - x_{s-1})(1 - x_s) \prod_{j \notin G} (1 - x_j),$$

ya que como $|N| \geq 5$ y $s > 2$ el conjunto F contiene, al menos, el jugador 1, de manera que al sustituir todas las variables de los jugadores de la primera coalición por y_1 y reducir exponentes a la unidad queda únicamente el último término del interior del corchete. Entonces:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_{s-1}} = -k\, y_1(1 - x_s) \prod_{j \notin G} (1 - x_j) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_{s-1}}(\overline{1/2}, \overline{1/2}) = \frac{-k}{2^{n-s}} \neq 0,$$

y, otra vez, el valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición distingue el juego v considerado del juego $0 \in G_N$. $\square$

Proposición 6.27

Para $|N| \geq 4$, si el juego $v \in G_N$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición, entonces $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$.

Demostración

Si el juego $v \in G_N$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición, en particular, es indistinguible de $0 \in G_N$ por semivalores, de donde $v(S) = 0$, $|S| = 1, n-1$, y $v(N) = 0$, según la observación 6.9. Supongamos que existe alguna coalición $S \subseteq N$ con $v(S) \neq v(N \setminus S)$. Consideramos una de estas S de cardinal mínimo y la designamos por S', verificando $2 \leq |S'| \leq n/2$. La EML del juego $v \in G_N$ puede entonces escribirse como:

$$\begin{aligned} f \;=\; & \sum_{\substack{S \subset N \\ 2 \leq |S| < s'}} \Big[\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j)\, v(S) + \prod_{i \in N \setminus S} x_i \prod_{j \in S} (1 - x_j)\, v(N \setminus S) \Big] + \\ & + \sum_{\substack{S \subset N \\ |S| = s'}} \Big[\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j)\, v(S) + \prod_{i \in N \setminus S} x_i \prod_{j \in S} (1 - x_j)\, v(N \setminus S) \Big] + \\ & + \sum_{\substack{S \subset N \\ s' < |S| < n-s'}} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j)\, v(S). \end{aligned}$$

Tomando como estructura de coalición en N $B_{S'} = \{S', N \setminus S'\}$ determinamos la EML modificada g_1 correspondiente a los elementos de S'. Todas las variables para los elementos de $N \setminus S'$ se sustituyen por y_2 reduciendo después los exponentes a la unidad. De esta forma quedan en el primer sumatorio únicamente las coaliciones $S \subset S'$, en el segundo sumatorio exactamente la coalición S' y desaparecen todos los términos del tercer sumatorio, ya que al contener elementos de $N \setminus S'$ en S y en $N \setminus S$ aparecen factores como $y_2(1-y_2)$ que en la reducción pasan a ser nulos.

$$g_1 = \sum_{\substack{S \subset S' \\ s \geq 2}} \Big[(1-y_2) \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in S' \setminus S} (1-x_j)\, v(S) + y_2 \prod_{i \in S' \setminus S} x_i \prod_{j \in S} (1-x_j)\, v(N \setminus S) \Big] +$$
$$+ (1-y_2) \prod_{i \in S'} x_i\, v(S') + y_2 \prod_{j \in S'} (1-x_j)\, v(N \setminus S').$$

Si escogemos un elemento $k \in S'$ y derivamos respecto a la variable x_k:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} = & \sum_{\substack{S \subset S' \\ s \geq 2,\, S \ni k}} \Big[(1-y_2) \prod_{i \in S \setminus \{k\}} x_i \prod_{j \in S' \setminus S} (1-x_j)\, v(S) - \\ & - y_2 \prod_{i \in S' \setminus S} x_i \prod_{j \in S \setminus \{k\}} (1-x_j)\, v(N \setminus S) \Big] + \\ & + \sum_{\substack{S \subset S' \\ s \geq 2,\, S \not\ni k}} \Big[-(1-y_2) \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in S' \setminus (S \cup \{k\})} (1-x_j)\, v(S) + \\ & + y_2 \prod_{i \in S' \setminus (S \cup \{k\})} x_i \prod_{j \in S} (1-x_j)\, v(N \setminus S) \Big] + \\ & + (1-y_2) \prod_{i \in S' \setminus \{k\}} x_i\, v(S') - y_2 \prod_{j \in S' \setminus \{k\}} (1-x_j)\, v(N \setminus S'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\overline{1/2}, \overline{1/2}) = & \sum_{\substack{S \subset S' \\ s \geq 2,\, S \ni k}} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2^{s-1}} \frac{1}{2^{s'-s}}\, v(S) - \frac{1}{2} \frac{1}{2^{s'-s}} \frac{1}{2^{s-1}}\, v(N \setminus S) \right] + \\ & + \sum_{\substack{S \subset S' \\ s \geq 2,\, S \not\ni k}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2^{s}} \frac{1}{2^{s'-(s+1)}}\, v(S) + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{s'-(s+1)}} \frac{1}{2^{s}}\, v(N \setminus S) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{s'-1}} \left[v(S') - v(N \setminus S') \right]. \end{aligned}$$

En la expresión anterior los dos primeros sumatorios son nulos, ya que si $S \subset S'$, $|S| < |S'|$ y $v(S) = v(N \setminus S)$. Por el contrario, el tercer sumatorio es no nulo ya que $v(S') \neq v(N \setminus S')$ de manera que se llega a obtener

$$(\sigma_{1/2})_k[v; B_{S'}] \neq 0 \quad \text{para } k \in S',$$

y el valor de Banzhaf modificado para juegos con estructura de coalición distingue el juego v del juego $0 \in G_N$. $\square$

Observación 6.28
Según la proposición anterior, para determinar los juegos $v \in G_N$ indistinguibles del juego 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición, hemos de considerar juegos indistinguibles de 0 por semivalores que además verifiquen $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$.

(a) Para $|N| = 4$, la intersección de los espacios nulos por semivalores tiene dimensión 2:

$$\bigcap_{\sigma} EN(\sigma) = < v^a, v^b > .$$

Los juegos de conmutación v^a, v^b son, respectivamente,

$$\begin{aligned} v^a &= (0,0,0,0,1,-1,0,0,-1,1,0,0,0,0,0), \\ v^b &= (0,0,0,0,1,0,-1,-1,0,1,0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

Estos dos juegos y, en consecuencia, los juegos del subespacio que generan, verifican la condición $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$. En la proposición 6.25 está probado que para este cardinal del conjunto de jugadores los juegos indistinguibles del juego nulo por semivalores son exactamente los mismos que los indistinguibles por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

(b) Para $|N| = 5$, el subespacio de juegos indistinguibles de 0 por semivalores que además cumplen $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$, tiene dimensión $\binom{5}{2} - 5 = 5$.

Para comprobar esta última afirmación, basta pensar en el número de grados de libertad según los cardinales de las coaliciones en los juegos de 5 jugadores indistinguibles del juego 0 por semivalores, junto a la condición de "simetría" $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$. Para cardinales $s = 1, 4, 5$ no hay grados de libertad;

para cardinal $s = 2$, $\binom{5}{2} - 5 = 5$ grados de libertad y para cardinal $s = 3$ ningún grado de libertad, por ser $v(S) = v(N \setminus S)$ y $|N \setminus S| = 2$ cuando $|S| = 3$.

Considerando los juegos "simetrizados" de la base de juegos de conmutación para cardinal $s = 2$ con $n = 5$, empleando la notación correspondiente de la proposición 6.20 añadiendo $^{-}$, obtenemos una base del subespacio de juegos indistinguibles de 0 por semivalores intersección con el subespacio de los juegos $v \in G_N$ tales que $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$, $|N| = 5$. Estos juegos por su actución sobre las diferentes coaliciones son:

$$\begin{aligned}
\overline{v}^a_{3,4} &= (0,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,-1,0,1,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0),\\
\overline{v}^b_{3,4} &= (0,0,0,0,0,1,0,-1,0,-1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,-1,0,-1,0,1,0,0,0,0,0,0),\\
\overline{v}^a_{3,5} &= (0,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0,-1,0,1,0,0,1,0,-1,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0),\\
\overline{v}^b_{3,5} &= (0,0,0,0,0,1,0,0,-1,-1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,-1,-1,0,0,1,0,0,0,0,0,0),\\
\overline{v}_{4,5} &= (0,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,0,-1,0,0,1,1,0,0,-1,0,0,0,-1,0,1,0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

La EML del simetrizado de un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ ($n = 5$) coincide con la EML de un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$, donde el conjunto de jugadores tiene cardinal 4.

Comprobamos esta propiedad para el juego $\overline{v}^a_{3,4}$ designando por $\overline{f}$ su EML y por f la del juego de conmutación v^a. En este último juego los jugadores que conmutan son $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4)$.

$$\begin{aligned}
\overline{f} \;=\; & (1 - x_5)[x_1 x_2 (1 - x_3)(1 - x_4) - x_1 x_3 (1 - x_2)(1 - x_4) - \\
& \qquad - x_2 x_4 (1 - x_1)(1 - x_3) + x_3 x_4 (1 - x_1)(1 - x_2)] + \\
& + x_5 [x_1 x_2 (1 - x_3)(1 - x_4) - x_1 x_3 (1 - x_2)(1 - x_4) - \\
& \qquad - x_2 x_4 (1 - x_1)(1 - x_3) + x_3 x_4 (1 - x_1)(1 - x_2)],
\end{aligned}$$

$$\overline{f} = [(1 - x_5) + x_5] f = f.$$

Al coincidir la EML de $\overline{v}^a_{3,4}$ con la de v^a, $v^a \in G_M$, $|M| = 4$, siguiendo el procedimiento de la proposición 6.25, para cualquier semivalor $\sigma : G_N \to \mathbb{R}^N$, $|N| = 5$, y cualquier estructura de coalición B en N, se verifica:

$$\sigma_i[\overline{v}^a_{3,4}, B] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Por otro lado, $\sigma_5[\overline{v}^a_{3,4}, B] = 0$, ya que la variable x_5 no figura en la EML de $\overline{v}^a_{3,4}$.

Un resultado similar puede probarse para los demás juegos de conmutación simetrizados. Para $\overline{v}^b_{3,4}$, su EML coincide con la de $v^b \in G_M$, $|M| = 4$, juego definido como en el apartado (a) de esta misma observación. Para los juegos $\overline{v}^a_{3,5}$, $\overline{v}^b_{3,5}$, sus respectivas EML coinciden con las de juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ ($m = 4$), siendo en este caso los jugadores que conmutan $M = \{1, 2, 3, 5\}$, bastando nombrar de esta forma los jugadores en M. Finalmente, para el juego $\overline{v}_{4,5}$ los jugadores que conmutan son $1, 2, 4, 5$ y su EML es igual a la de un juego de conmutación para $|M| = 4$ con $M = \{1, 2, 4, 5\}$.

Como consecuencia de todas estas consideraciones, el siguiente enunciado resume la situación para los juegos de 5 jugadores.

Proposición 6.29
Para $|N| = 5$ y σ cualquier semivalor sobre G_N, todo juego $v \in \bigcap_\sigma EN(\sigma)$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición si y sólo si el juego v verifica $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$.

Demostración
Si el juego $v \in G_N$ es indistinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición ha de verificar, según la proposición 6.27, la condición $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$.

Recíprocamente, si $v \in G_N$, $|N| = 5$, verifica $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$, y es indistinguible del juego 0 por semivalores, entonces v es combinación lineal de simetrizados de juegos de conmutación para cardinal $s = 2$ con $n = 5$. Por la parte (b) de la observación anterior todos estos juegos son indistinguibles del juego $0 \in G_N$, $|N| = 5$, por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición y, por linealidad, el juego v cumple esa misma condición. $\square$

Proposición 6.30
Para $|N| \geq 6$, consideramos $v \in G_N$ cumpliendo $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$, y $v(\{i\}) = 0$, $\forall i \in N$. Si existe una coalición $S' \subseteq N$ con $3 \leq |S'| \leq n/2$ tal que

$$v(S') \neq \sum_{T \subset S',\, |T|=2} v(T),$$

entonces el juego v es distinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

Demostración
La EML f de un juego $v \in G_N$ cumpliendo $v(S) = v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\substack{S \subset N \\ |S| < n/2}} \Big[\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) + \prod_{i \in N \setminus S} x_i \prod_{j \in S} (1 - x_j) \Big] v(S) + \\ &\quad + \sum_{\substack{S \subset N \\ |S| = n/2}} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j)\, v(S). \end{aligned}$$

De los dos sumandos en la expresión de f, el segundo sólo aparece en el caso en que n sea un número par.

Por otro lado, en el caso que nos ocupa, el primer sumatorio presenta términos para $|S|$ cumpliendo $2 \leq |S| < n/2$, ya que $v(\{i\}) = 0$, $\forall i \in N$. De entre todas las coaliciones que verifican la desigualdad del enunciado escogemos una S' de cardinal mínimo y formamos en N la estructura de coalición $B_{S'} = \{S', N \setminus S'\}$

Suponiendo que S' es una de las coaliciones en el primer sumatorio de la EML f, es decir, $|S'| < n/2$, la EML modificada para los elementos de S' adopta la forma:

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{\substack{S \subset S' \\ 2 \leq s < s'}} \Big[(1 - y_2) \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in S' \setminus S} (1 - x_j) + y_2 \prod_{i \in S' \setminus S} x_i \prod_{j \in S} (1 - x_j) \Big] v(S) + \\ &\quad + \Big[(1 - y_2) \prod_{i \in S'} x_i + y_2 \prod_{j \in S'} (1 - x_j) \Big] v(S'), \end{aligned}$$

ya que el resto de coaliciones tienen algún o algunos elementos en común con $N \setminus S'$ sin contenerlos a todos, transformándose en la sustitución en productos en los que figuran potencias de y_2 y de $(1 - y_2)$, los cuales, posteriormente, se anulan en la reducción de exponentes de y_2 a la unidad.

A continuación consideramos un elemento $j_1 \in S'$, calculamos la derivada parcial de g_1 respecto a la variable x_{j_1} y sustituimos todas las variables por α, $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha},\overline{\alpha}) &= \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1\\ 2\leq s<s'}} \left[(1-\alpha)\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s} - \alpha\,\alpha^{s'-s}(1-\alpha)^{s-1}\right] v(S)+\\ &+ \sum_{\substack{S\subset S',\, S\not\ni j_1\\ 2\leq s<s'}} \left[-(1-\alpha)\alpha^{s}(1-\alpha)^{s'-s-1} + \alpha\,\alpha^{s'-s-1}(1-\alpha)^{s}\right] v(S)+\\ &+\left[(1-\alpha)\alpha^{s'-1} - \alpha(1-\alpha)^{s'-1}\right] v(S').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha},\overline{\alpha}) &= \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1\\ |S|=2}} \left[\alpha(1-\alpha)^{s'-1} - \alpha^{s'-1}(1-\alpha)\right] v(S)+\\ &+ \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1\\ 2<s<s'}} \left[\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1}\right] v(S)+\\ &+ \sum_{\substack{S\subset S',\, S\not\ni j_1\\ 2\leq s<s'-1}} \left[\alpha^{s'-s}(1-\alpha)^{s} - \alpha^{s}(1-\alpha)^{s'-s}\right] v(S)+\\ &+ \left[\alpha\,(1-\alpha)^{s'-1} - \alpha^{s'-1}(1-\alpha)\right] v(S'\setminus\{j_1\})+\\ &+\left[\alpha^{s'-1}(1-\alpha) - \alpha(1-\alpha)^{s'-1}\right] v(S').\end{aligned}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha},\overline{\alpha}) &= \alpha\,(1-\alpha)\left[(1-\alpha)^{s'-2} - \alpha^{s'-2}\right]\cdot\\ &\qquad\cdot\left\{ \sum_{S\subset S',\, S\ni j_1,\, |S|=2} v(S) + v(S'\setminus\{j_1\}) - v(S') \right\} +\\ &+ \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1\\ 2<s<s'}} \left[\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1}\right] v(S)+\\ &+ \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1\\ 2<t<s'}} \left[\alpha^{s'-t+1}(1-\alpha)^{t-1} - \alpha^{t-1}(1-\alpha)^{s'-t+1}\right] v(T\setminus\{j_1\}),\end{aligned}$$

donde en el último sumatorio se ha escrito $T = S\cup\{j_1\}$ para $S \not\ni j_1$, de manera que $t = s+1$ hace que $2 \leq s < s'-1$ dé lugar a $3 \leq t < s'$.

Escribimos $p_{s'}(\alpha)$ en lugar del polinomio $(1-\alpha)^{s'-2}-\alpha^{s'-2}$. Además $S'\setminus\{j_1\}$ tiene cardinal $s'-1$ de forma que $v(S'\setminus\{j_1\})$ es suma de los valores de las coaliciones bipersonales contenidas en $S'\setminus\{j_1\}$, ya que hemos escogido S' de cardinal mínimo no cumpliendo esta condición. Por tanto:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha},\overline{\alpha}) = \alpha\,(1-\alpha)p_{s'}(\alpha)\left[\sum_{\substack{S\subset S',\,S\ni j_1\\ |S|=2}} v(S) + \sum_{\substack{T\subseteq S'\setminus\{j_1\}\\ |T|=2}} v(T) - v(S')\right] +$$

$$+\sum_{\substack{S\subset S',\,S\ni j_1\\ 2<s<s'}} \left[\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1}\right]\left[v(S) - v(S\setminus\{j_1\})\right].$$

Se puede encontrar coaliciones S tales que $S\subset S'$, $S\ni j_1$, $2<s<s'$, en el caso en que $s'\geq 4$ ($s'\leq n/2$). En este supuesto, el segundo sumando de la expresión anterior puede escribirse como:

$$\sum_{\substack{S\subset S',\,S\ni j_1\\ 3\leq s<1+s'/2}} \left[\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1}\right]\left[v(S) - v(S\setminus\{j_1\})\right] +$$

$$+\sum_{\substack{T\subset S',\,T\ni j_1\\ 1+s'/2<t\leq s'-1}} \left[\alpha^{t-1}(1-\alpha)^{s'-t+1} - \alpha^{s'-t+1}(1-\alpha)^{t-1}\right]\left[v(T) - v(T\setminus\{j_1\})\right].$$

En la descomposición anterior no se ha considerado el caso $s=1+s'/2$ ya que si s' es impar $|S|$ no puede tomar ese valor, mientras que si s' es par el coeficiente correspondiente es nulo. En efecto, si suponemos $s'=2m$ entonces $s=|S|=1+s'/2=m+1$ y el coeficiente para esas coaliciones es:

$$\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1} = \alpha^{m}(1-\alpha)^{2m-m} - \alpha^{2m-m}(1-\alpha)^{m} = 0.$$

Ahora, en esta descomposición pueden identificarse los coeficientes de $v(S)$ para $3\leq s<1+s'/2$ con los de $v(T)$ para $1+s'/2<t\leq s'-1$,

$$\left.\begin{array}{l} t-1=s'-s+1\\ s-1=s'-t+1\end{array}\right\}\;\Rightarrow\;\; t=s'-s+2,$$

quedando el sumatorio reducido a:

$$\sum_{3\leq s<1+s'/2} \left[\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s'-s+1} - \alpha^{s'-s+1}(1-\alpha)^{s-1}\right]\cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1 \\ |S|=s}} [v(S) - v(S\setminus\{j_1\})] - \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1 \\ |T|=s'-s+2}} [v(T) - v(T\setminus\{j_1\})] \right].$$

Fijado un cardinal cualquiera s, $3 \leq s < 1 + s'/2$, la diferencia de sumatorios en la expresión anterior puede escribirse:

$$\sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1 \\ |S|=s}} [v(S) - v(S\setminus\{j_1\})] - \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1 \\ |T|=s'-s+2}} [v(T) - v(T\setminus\{j_1\})] =$$

$$= \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1 \\ |S|=s}} \left[\sum_{\substack{P\subset S \\ |P|=2}} v(P) - \sum_{\substack{Q\subseteq S\setminus\{j_1\} \\ |Q|=2}} v(Q) \right] - \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1 \\ |T|=s'-s+2}} \left[\sum_{\substack{P\subset T \\ |P|=2}} v(P) - \sum_{\substack{Q\subset T\setminus\{j_1\} \\ |Q|=2}} v(Q) \right] =$$

$$= \sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1 \\ |S|=s}} \left[\sum_{\substack{P\subset S,\, P\ni j_1 \\ |P|=2}} v(P) \right] - \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1 \\ |T|=s'-s+2}} \left[\sum_{\substack{P\subset T,\, P\ni j_1 \\ |P|=2}} v(P) \right] =$$

$$= \sum_{i=2}^{s'} v(\{j_1, j_i\}) \left[\sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1,\, j_i \\ |S|=s}} 1 - \sum_{\substack{T\subset S',\, T\ni j_1,\, j_i \\ |T|=s'-s+2}} 1 \right] =$$

$$= \sum_{i=2}^{s'} \left[\binom{s'-2}{s-2} - \binom{s'-2}{s'-s} \right] v(\{j_1, j_i\}) = 0,$$

suponiendo que $S' = \{j_1, j_2, ..., j_{s'}\}$.

Después de estas consideraciones, la fórmula obtenida para $\partial g_1/\partial x_{j_1}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha})$ queda reducida a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) &= \alpha\,(1-\alpha) p_{s'}(\alpha) \left[\sum_{\substack{S\subset S',\, S\ni j_1 \\ |S|=2}} v(S) + \sum_{\substack{T\subseteq S'\setminus\{j_1\} \\ |T|=2}} v(T) - v(S') \right] \\ &= \alpha\,(1-\alpha) p_{s'}(\alpha) \left[\sum_{T\subset S',\, |T|=2} v(T) - v(S') \right]. \end{aligned}$$

El polinomio $p_{s'}(\alpha) = (1-\alpha)^{s'-2} - \alpha^{s'-2}$ tiene como única raiz real $\alpha = 1/2$ para cualquier $s' \geq 3$, de manera que el coeficiente $\alpha\,(1-\alpha) p_{s'}(\alpha)$ es no nulo para

$\alpha \neq 0, 1, 1/2$. Por las condiciones del enunciado

$$v(S') \neq \sum_{T \subset S',\, |T|=2} v(T),$$

de donde se sigue que

$$(\sigma_\alpha)_{j_1}[v; B_{S'}] = \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) \neq 0 \quad \text{para } \alpha \neq 0, 1, 1/2,$$

y el juego $v \in G_N$ que se considera es distinguible del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

Queda por considerar el caso en que la coalición S' de cardinal mínimo cumpliendo las condiciones del enunciado es tal que $|S'| = n/2$. Si esto sucede n es par y los términos del segundo sumatorio en la expresión de la EML f del juego $v \in G_N$ pueden agruparse por parejas: S y $N \setminus S$ con $|S| = |N \setminus S| = n/2$, haciendo constar sólo la mitad de las coaliciones de cardinal $n/2$.

La coalición S' de cardinal $n/2$ que se considera pertenecerá a una o a otra mitad de las coaliciones de cardinal $n/2$, dispuestas éstas en orden lexicográfico, de manera que para describir los términos de este segundo sumatorio escogemos la mitad en la que se encuentre S'. Una vez realizada esta elección, actuando igual que en el supuesto anterior, $|S'| < n/2$, se llega a la misma conclusión. Esto completa la demostración. □

6.4 Juegos de conmutación expandidos

Definición 6.31
Consideramos espacios de juegos cooperativos G_N con $|N| \geq 5$. Si $v \in G_N$ es un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ que para $k \neq 0$ y jugadores $j_1, j_2, j_3, j_4 \in N$ toma los valores

$$\begin{cases} v(\{j_1, j_2\}) = v(\{j_3, j_4\}) = k, \\ v(\{j_1, j_3\}) = v(\{j_2, j_4\}) = -k, \\ v(S) = 0 \quad \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se define el expandido del juego de conmutación v como el juego ${}^{e}v \in G_N$ tal que, para cualquier subconjunto $T \subseteq N \setminus \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$, toma los valores:

$$\begin{cases} {}^{e}v(\{j_1, j_2\} \cup T) = {}^{e}v(\{j_3, j_4\} \cup T) = k, \\ {}^{e}v(\{j_1, j_3\} \cup T) = {}^{e}v(\{j_2, j_4\} \cup T) = -k, \\ {}^{e}v(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 6.32

Para cualquier G_N con $|N| \geq 4$ notaremos los juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ mediante 4 subíndices correspondientes a los 4 jugadores que conmutan. Esto es, si $j_1, j_2, j_3, j_4 \in N$ y $k \neq 0$:

$$\begin{cases} v_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\{j_1, j_2\}) = v_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\{j_3, j_4\}) = k, \\ v_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\{j_1, j_3\}) = v_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\{j_2, j_4\}) = -k, \\ v_{j_1,j_2,j_3,j_4}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cardinal de las coaliciones s, $3 \leq s \leq n-2$, empleamos como notación para las juegos de conmutación $v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}$, donde $F \subseteq N \setminus \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$, $F \neq \emptyset$, es el subconjunto de jugadores que pertenecen a las cuatro coaliciones sobre las que el juego toma valor no nulo, esto es:

$$\begin{cases} v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}(F \cup \{j_1, j_2\}) = v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}(F \cup \{j_3, j_4\}) = k, \\ v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}(F \cup \{j_1, j_3\}) = v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}(F \cup \{j_2, j_4\}) = -k, \\ v_{F;j_1,j_2,j_3,j_4}(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con estas notaciones, tal y como se ha definido el juego expandido ${}^{e}v$ de un juego de conmutación $v \in G_N$, se cumple:

$${}^{e}v_{j_1,j_2,j_3,j_4} = v_{j_1,j_2,j_3,j_4} + \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{j_1,j_2,j_3,j_4\} \\ T \neq \emptyset}} v_{T;j_1,j_2,j_3,j_4}.$$

Ejemplo 6.33

(a) En G_N con $|N| = 5$ el expandido ${}^{e}v$ del juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ con $k = 1$ y jugadores $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4)$ es:

$$\begin{cases} {}^{e}v(\{1,2\}) = {}^{e}v(\{3,4\}) = {}^{e}v(\{1,2,5\}) = {}^{e}v(\{3,4,5\}) = 1, \\ {}^{e}v(\{1,3\}) = {}^{e}v(\{2,4\}) = {}^{e}v(\{1,3,5\}) = {}^{e}v(\{2,4,5\}) = -1, \\ {}^{e}v(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se cumple: ${}^{e}v_{1,2,3,4} = v_{1,2,3,4} + v_{\{5\};1,2,3,4}$.

(b) En G_N con $|N| = 6$ el expandido ${}^{e}v$ del juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ con $k = 1$ y jugadores $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4)$ es:

$$\begin{cases} {}^{e}v(\{1,2\}) = {}^{e}v(\{3,4\}) = {}^{e}v(\{1,2,5\}) = {}^{e}v(\{1,2,6\}) = 1, \\ {}^{e}v(\{3,4,5\}) = {}^{e}v(\{3,4,6\}) = {}^{e}v(\{1,2,5,6\}) = {}^{e}v(\{3,4,5,6\}) = 1, \\ {}^{e}v(\{1,3\}) = {}^{e}v(\{2,4\}) = {}^{e}v(\{1,3,5\}) = {}^{e}v(\{1,3,6\}) = -1, \\ {}^{e}v(\{2,4,5\}) = {}^{e}v(\{2,4,6\}) = {}^{e}v(\{1,3,5,6\}) = {}^{e}v(\{2,4,5,6\}) = -1, \\ {}^{e}v(S) = 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se cumple: ${}^{e}v_{1,2,3,4} = v_{1,2,3,4} + v_{\{5\};1,2,3,4} + v_{\{6\};1,2,3,4} + v_{\{5,6\};1,2,3,4}$.

Proposición 6.34
En G_N con $|N| \geq 5$, si $v \in G_N$ es un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ y ${}^{e}v$ es su juego expandido, entonces:

(a) ${}^{e}v(S) = {}^{e}v(N \setminus S), \quad \forall S \subseteq N.$

(b) ${}^{e}v(S) = \displaystyle\sum_{T \subset S,\, |T|=2} {}^{e}v(T), \quad \forall S \subseteq N,\ 3 \leq |S| \leq n.$

(c) Si v tiene como jugadores que conmutan j_1, j_2, j_3, j_4 ($v = v_{j_1,j_2,j_3,j_4}$), ${}^{e}f$ es la EML del expandido ${}^{e}v$ y f es la EML del juego de conmutación $w_{j_1,j_2,j_3,j_4} \in G_C$, con $C = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$, se cumple: ${}^{e}f = f$.

Demostración
A lo largo de esta demostración consideramos que el juego de conmutación es $v = v_{1,2,3,4}$ con valor $k = 1$, siendo suficiente renombrar las variables para probar la propiedad para cualquier otro juego de conmutación.

(a) Para coaliciones $S \subset N$ con $1 \leq s \leq n - 1$:

- si $S \supseteq \{1, 2, 3, 4\},\ (N \setminus S) \not\ni 1, 2, 3, 4 \ \Rightarrow\ {}^{e}v(S) = 0 = {}^{e}v(N \setminus S)$;

supongamos que $\{j_1, j_2, j_3, j_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

- si $S \supseteq \{j_1, j_2, j_3\},\ (N \setminus S) \ni j_4 \ \Rightarrow {}^{e}v(S) = 0 = {}^{e}v(N \setminus S)$,

- si $S \supseteq \{j_1, j_2\}$, $(N \setminus S) \supseteq \{j_3, j_4\} \Rightarrow {}^e v(S) = v(\{j_1, j_2\}) = v(\{j_3, j_4\}) = {}^e v(N \setminus S)$.

Por otro lado: $N \supseteq \{1, 2, 3, 4\}$, ${}^e v(N) = 0 = {}^e v(\emptyset)$.

Estas consideraciones permiten afirmar que ${}^e v(S) = {}^e v(N \setminus S)$, $\forall S \subseteq N$.

(b) Para el juego expandido ${}^e v$ de un juego de conmutación v, las únicas coaliciones bipersonales que toman valor no nulo son las cuatro que provienen del propio juego de conmutación. Para cualquier $S \subseteq N$:

- si $S \supseteq \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

$$\sum_{T \subset S,\, |T|=2} {}^e v(T) = v(\{1, 2\}) + v(\{3, 4\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 4\}) = 0 = {}^e v(S);$$

- si $S \supseteq \{j_1, j_2, j_3\}$, $S \not\ni j_4$, entonces:

$$\sum_{T \subset S,\, |T|=2} {}^e v(T) = v(\{j_1, j_2\}) + v(\{j_1, j_3\}) + v(\{j_2, j_3\}) = 0 = {}^e v(S);$$

- si $S \supseteq \{j_1, j_2\}$, $S \not\ni j_3, j_4 \Rightarrow \displaystyle\sum_{T \subseteq S,\, |T|=2} {}^e v(T) = v(\{j_1, j_2\}) = {}^e v(S)$;

- si $S \ni j_1$, $S \not\ni j_2, j_3, j_4 \Rightarrow \displaystyle\sum_{T \subseteq S,\, |T|=2} {}^e v(T) = 0 = {}^e v(S)$;

- si $S \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \Rightarrow \displaystyle\sum_{T \subseteq S,\, |T|=2} {}^e v(T) = 0 = {}^e v(S)$.

(c) A partir de la expresión del juego expandido ${}^e v$ de un juego de conmutación $v \in G_N$ obtenida en la observación 6.32, podemos escribir para el juego que estamos considerando:

$${}^e v_{1,2,3,4} = v_{1,2,3,4} + \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{1,2,3,4\} \\ T \neq \emptyset}} v_{T;1,2,3,4}.$$

Como que la EML f del juego de conmutación $w_{1,2,3,4} \in G_C$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, es:

$$f = x_1 x_2 (1-x_3)(1-x_4) - x_1 x_3 (1-x_2)(1-x_4) - x_2 x_4 (1-x_1)(1-x_3) + x_3 x_4 (1-x_1)(1-x_2),$$

podemos escribir para la EML ${}^{e}f$ del juego expandido ${}^{e}v$:

$$ {}^{e}f = f \left[\prod_{j\in N\setminus C}(1-x_j) + \sum_{\substack{T\subset N\setminus C\\ T\neq\emptyset}} \prod_{i\in T} x_i \prod_{j\in N\setminus(C\cup T)}(1-x_j) + \prod_{i\in N\setminus C} x_i \right], $$

donde $C=\{1,2,3,4\}$ es el conjunto de jugadores que conmutan.

La función ${}^{e}f$ es la EML de un juego perteneciente a G_N con $|N|\geq 5$, mientras que f es la EML de un juego perteneciente a G_C con $|C|=4$. Así, las variables para ${}^{e}f$ son $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,...,x_n$, mientras que para f son x_1,x_2,x_3,x_4.

En el lado derecho de la igualdad anterior aparecen las variables separadas: x_1, x_2, x_3, x_4 figuran en f, mientras que $x_5,...,x_n$ figuran en la expresión que multiplica a f. Esta expresión es idénticamente igual a 1 para cualquier valoración de $x_5,...,x_n$ por 0 ó 1:

- si $(x_5,...,x_n)=(0,...,0)$ sólo el primer sumando es $\prod_{j\in N\setminus C}(1-x_j)=1$;

- si $(x_5,...,x_n)=(1,...,1)$ sólo el último sumando es $\prod_{i\in N\setminus C} x_i=1$;

- si $x_5,...,x_n$ toman el valor 1 para las variables correspondientes a jugadores de $T\subset N\setminus C$, $T\neq\emptyset$, y el resto de variables toman valor 0, el único sumando entre todos que alcanza el valor 1 es exactamene el correspondiente a la coalición T, $\emptyset\neq T\subset N\setminus C$.

En consecuencia ${}^{e}f=f$, quedando demostrada la propiedad. $\square$

Proposición 6.35
Si el juego $v\in G_N$ con $|N|\geq 5$ es un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s=2$, entonces su juego expandido ${}^{e}v$ es indistinguible del juego $0\in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

Demostración
Otra vez consideramos que el juego de conmutación es $v=v_{1,2,3,4}$ con valor $k=1$. La condición de indistinguible del juego $0\in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición se estudia por medio de la EML del juego que se

esté considerando, habiendo probado en la propiedad anterior que si ${}^{e}f$ es la EML del juego expandido ${}^{e}v$ y f es la EML del juego de conmutación $w_{1,2,3,4} \in G_C$, con $C = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces ${}^{e}f = f$.

Así, los jugadores de $C = \{1, 2, 3, 4\}$ cuando se forme cualquier estructura de coalición en N pueden encontrarse en diferentes bloques coalicionales tal y como sucede con los jugadores en la demostración de la proposición 6.25, sólo que ahora en cualquiera de los bloques coalicionales pueden encontrarse o no jugadores de entre el resto, es decir, de $N \setminus C = \{5, ..., n\}$.

Actuando como en aquella demostración, al ser ${}^{e}f = f$, las variables $x_5, ..., x_n$ no alteran los procesos de cálculo de los semivalores modificados, de manera que para cualquier estructura de coalición en N:

$$\sigma_i[{}^{e}v; B] = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Además, $\sigma_j[{}^{e}v; B] = 0,\ j = 5, ..., n$, ya que la variable x_j no figura en la EML ${}^{e}f$.

Para cualquier otro juego de conmutación expandido ${}^{e}v_{j_1,j_2,j_3,j_4},\ j_1, j_2, j_3, j_4 \in N$, basta renombrar las variables para concluir la misma afirmación. □

Teorema 6.36
Consideramos el espacio de juegos cooperativos G_N con $|N| \geq 5$.

(a) La dimensión del subespacio de juegos de G_N indistinguibles del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición es $\binom{n}{2} - n$.

(b) El subespacio anterior está generado por expandidos de juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$.

Demostración
A partir del método constructivo del apartado (a) de la proposición 6.20, para cada cardinal $n \geq 4$ del conjunto de jugadores N se consigue una familia linealmente independiente formada por $\binom{n}{2} - n$ juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$. Los juegos expandidos de la familia anterior siguen siendo linealmente independientes y, por la proposición 6.35, son indistinguibles del juego 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición. Así pues, el subespacio de dimensión $\binom{n}{2} - n$ que generan está incluido en el subespacio

de indistinguibles de 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición, para $|N| \geq 5$.

Por otro lado, según las proposiciones 6.27 y 6.30, para que $v \in G_N$ sea indistinguible del juego 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición es necesario que:

$$\begin{aligned} v(S) &= v(N \setminus S), && \forall S \subseteq N, && \text{si } n \geq 4; \\ v(S) &= \sum_{T \subset S,\, |T|=2} v(T), && 3 \leq s \leq n/2, && \text{si } n \geq 6. \end{aligned}$$

Además, para que un juego v sea indistinguible por semivalores modificados ha de ser, en particular, indistinguible por semivalores. Esta condición impone, como se probó en la observación 6.9, que:

$$v(S) = 0, \;\; s = 1,\, n-1; \;\; v(N) = 0.$$

En consecuencia, el valor de $v(S)$, $\forall S \subseteq N$, queda determinado por los valores de $v(T)$ para $|T| = 2$. Así la dimensión del subespacio de juegos indistinguibles de 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición es, como máximo, $\binom{n}{2} - n$ ya que éstos son los grados de libertad que según la observación 6.9 tienen los valores de $v(T)$, $|T| = 2$, para que el juego $v \in G_N$ sea indistinguible del juego 0 por semivalores.

Reuniendo las dos líneas de consideraciones, la dimensión del subespacio de juegos de G_N indistinguibles del juego $0 \in G_N$ por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición es $\binom{n}{2} - n$, estando este subespacio generado por expandidos de juegos de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$. $\square$

Observación 6.37
La propiedad que acaba de demostrarse engloba los resultados para los juegos de G_N, $|N| = 5$, obtenidos en el apartado (b) de la observación 6.28 y en la proposición 6.29, ya que en este caso el juego expandido de un juego de conmutación para cardinal de las coaliciones $s = 2$ coincide con su simetrizado: ${}^{e}v = \overline{v}$.

Para el caso $|N| = 4$, se puede considerar que si v es un juego de conmutación para $s = 2$ el expandido es el mismo juego: ${}^{e}v = v$. Por este motivo, los subespacios de indistinguibles de 0 por semivalores y por semivalores modificados coinciden, siendo su dimensión $\binom{4}{2} - 4 = 2$.

En la siguiente tabla se muestran, para valores pequeños del cardinal del conjunto de jugadores, las dimensiones de los subespacios de juegos indistinguibles del juego nulo.

cardinal de N	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	n	$\cdots$
$\dim G_N$	3	7	15	31	63	127	$\cdots$	$2^n - 1$	$\cdots$
$\dim \bigcap\limits_{\sigma} EN(\sigma)$	0	0	2	10	32	84	$\cdots$	$2^n - n^2 + n - 2$	$\cdots$
$\dim \bigcap\limits_{(\sigma,B)} EN(\sigma,B)$	0	0	2	5	9	14	$\cdots$	$\binom{n}{2} - n$	$\cdots$

En la notación habitual, $\bigcap_\sigma EN(\sigma)$ indica la intersección de los espacios nulos por semivalores σ definidos sobre cada G_N, es decir, el subespacio de juegos indistinguibles del juego 0 por semivalores, mientras que $\bigcap_{(\sigma,B)} EN(\sigma, B)$ pretende indicar el subespacio de indistinguibles de 0 por semivalores modificados para juegos con estructura de coalición.

Para cardinales $n = 2$ y $n = 3$, la dimensión de los subespacios de juegos indistinguibles por semivalores modificados es 0, ya que ésta es la dimensión que corresponde a los respectivos subespacios de indistinguibles por semivalores. La expresión $\binom{n}{2} - n$ adopta el valor adecuado para $n = 3$ pero no lo hace para $n = 2$, de manera que podemos considerar como fórmula general:

$$\dim \bigcap_{(\sigma,B)} EN(\sigma, B) = \binom{n}{2} - n, \;\; n \geq 3,$$

recordando que la dimensión es nula para $n = 2$.

7

Conclusiones

El creciente interés que los estudios de economía, de política o de ciencias sociales muestran por la Teoría de Juegos confirma que los juegos cooperativos con utilidad transferible son modelos adecuados para analizar situaciones de conflicto y cooperación que surgen en las actividades humanas. La Teoría de Juegos propone soluciones para este tipo de situaciones, ocupando un lugar destacado las propuestas por Shapley y por Banzhaf; ambas se basan en las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que pertenece, ponderadas según unos pesos preestablecidos. La generalización a cualquier sistema de ponderación, donde los pesos dependen del cardinal de las coaliciones, da lugar al concepto de semivalor introducido por Dubey, Neyman y Weber en 1981.

En el lenguaje de juegos cooperativos el término coalición equivale a subconjunto de jugadores. El conocimiento de las posibilidades de cada coalición en el desenlace del juego es el instrumento que permite construir los conceptos de solución antes mencionados. Las modificaciones en la cooperación por la formación de coaliciones fijas, denominadas bloques coalicionales, dan lugar a diferentes soluciones, entre las que cabe citar el valor coalicional, modificando la solución de Shapley, o el valor de Banzhaf modificado, introducidas ambas por Owen en 1977 y en 1981, respectivamente. Cuando las modificaciones en la cooperación se producen por restricciones en la cooperación debidas a falta de comunicación entre los jugadores aparecen conceptos de solución como el propuesto por Myerson en 1977, modelizando tales situaciones mediante grafos.

El conocimiento de un juego cooperativo con utilidad transferible supone la determinación de su función característica. A su vez, la extension multilineal, introducida por Owen en 1972, contiene toda la información de la función característica y permite calcular, mediante las manipulaciones adecuadas, los conceptos de solución de Shapley y de Banzhaf, así como sus respectivas modificaciones por la formación de estructuras de coalición.

El primer capítulo de la presente memoria se ha dedicado a introducir los juegos cooperativos con utilidad transferible, así como las soluciones que se han descrito, junto a otros contenidos entre los que destacamos el potencial para el valor de Shapley. Se ha considerado que esta introducción podría ayudar a una mejor comprensión de los conceptos y de los métodos que se desarrollarán en los sucesivos capítulos.

El segundo capítulo presenta una marcada influencia geométrica, estableciendo una familia de semivalores a partir de la cual se forman sistemas de referencia en el conjunto de semivalores, a imagen de ese mismo concepto en la geometría afín. Los semivalores binomiales que se introducen gozan de una posición privilegiada en su interpretación así como en el cálculo de sus pagos por medio de la EML. A su vez, los semivalores binomiales forman familias con un elemento para cada espacio de juegos cooperativos, pudiéndose construir semivalores inducidos en espacios de juegos con menor cardinal del conjunto de jugadores, con independencia del sistema de referencia escogido. Esta consideración permite generalizar el proceso que lleva del valor de Shapley al valor coalicional de Owen, dando lugar al concepto de semivalor modificado para juegos con estructura de coalición.

En consecuencia, una matriz cuyos elementos se obtienen a partir de la EML resume en sí misma los pagos a todos los jugadores por cualquier semivalor, mientras que otra matriz hace lo propio para cada jugador respecto a cualquier pago por semivalores modificados por una estructura de coalición. En ambos casos, la expresión lineal de cualquier semivalor a partir de los binomiales permite obtener las soluciones por medio de sencillos productos matriciales. El capítulo finaliza estableciendo unas propiedades que consiguen caracterizar axiomáticamente la modificación de la solución de Banzhaf para juegos con estructura de coalición.

En el tercer capítulo se emplean de modo particular técnicas y resultados provenientes del segundo capítulo con el objetivo de estudiar, desde el punto de vista de cualquier semivalor, las consecuencias de la formación de una única coalición bipersonal estable. Además de conseguir el cálculo efectivo de los resultados tanto a partir de la función característica como de la EML, este estudio consigue caracterizar diferentes semivalores en atención a su comportamiento respecto a esta situación de cooperación modificada. Comparando la asignación en el juego cociente a la coalición bipersonal respecto a la suma de asignaciones en el juego inicial, se concluye que, en general, siempre existen semivalores para los que el incremento es positivo y otros para los que es negativo; se determinan todos aquellos semivalores que ofrecen un determinado incremento, estableciendo el máximo y el mínimo alcanzables.

El cuarto capítulo se centra en la consideración de otra situación de cooperación modificada: la cooperación parcial modelizada por grafos de comunicación en el conjunto de jugadores. Allí se prueba que todo semivalor, como regla de asignación para estas situaciones de cooperación, cumple propiedades deseables según la formulación de Myerson. También se afirma que la normalización aditiva de cualquier semivalor verifica esas mismas propiedades, resultando que normalización aditiva y cooperación parcial son conceptos ampliamente compatibles. Además, se consigue determinar qué jugadores resultan más beneficiados o más perjudicados por la supresión de una arista de un grafo de cooperación y bajo qué circunstancias se producen esos incrementos, de forma que los efectos de la supresión se estudian y comparan para todos los agentes del juego.

El quinto capítulo está dedicado al potencial. Aquí se consigue definir y estructurar un concepto de potencial para cada semivalor construido de modo recurrente, en modo análogo a como Hart y Mas-Colell (1988) y Dragan (1995) introducen esos conceptos para las soluciones de Shapley y de Banzhaf, respectivamente. También se ofrece un procedimiento para calcular el potencial para cada semivalor binomial mediante manipulaciones adecuadas de la EML, permitiendo, por linealidad, obtener el potencial para todo semivalor efectuando un producto matricial. Otras nociones derivadas del potencial, como base potencial o espacio nulo, se extienden a todos los semivalores. Se resuelven problemas inversos como la determinación de los juegos que tienen una solución prefijada o la determinación del juego conocido el poder de éste y de sus juegos restringidos. Finalmente se consigue caracterizar cada semivalor entre los que tienen igual comportamiento sobre los juegos bipersonales y son consistentes con todos sus juegos reducidos.

El sexto capítulo supone una continuación del quinto en el sentido de que aborda el problema de la determinación del subespacio intersección de todos los espacios nulos por semivalores. En esta intersección se encuentran los juegos que no pueden distinguirse del nulo por ningún semivalor, de donde surge la denominación de juegos indistinguibles. La técnica para la obtención de la dimensión de ese subespacio así como de los juegos que lo generan proviene del segundo capítulo, puesto que vuelven a considerarse dos sistemas de referencia de semivalores: los semivalores vértices para calcular la dimensión y los semivalores binomiales para traducir la condición de indistinguible en términos de la EML. Resuelto el problema anterior con la introducción de los juegos de conmutación, se consideran semivalores modificados para juegos con estructura de coalición y se busca determinar el subespacio de indistinguibles del nulo por este tipo de soluciones. En este caso la técnica de resolución requiere necesariamente la extensión multilineal y sus correspondientes modificaciones, tal y como se establecieron en el segundo capítulo. Para los juegos de más de cuatro jugadores, la introducción de las estructuras de coalición consigue reducir de modo significativo la dimensión de cada subespacio de juegos indistinguibles del nulo.

El objetivo global de esta memoria es el de contribuir, en la medida de nuestras posibilidades, al desarrollo de la Teoría de Juegos en su vertiente dedicada a los juegos cooperativos y en el estudio de aquellas soluciones que se basan en medias de las contribuciones marginales de cada jugador, ponderadas según el cardinal de las coaliciones. Otros aspectos que deseamos destacar son los siguientes:

- Se ha generalizado a todos los semivalores conceptos como modificación para juegos con estructura de coalición, potencial o sus nociones derivadas empleando sistemas de referencia y extendiendo después los resultados al conjunto de los semivalores, mostrando de esta manera la adecuación de la estructura geométrica de los mismos para su estudio globalizado.
- El proceso que se inicia en cada semivalor binomial, pasa por unos sistemas de referencia y concluye en el conjunto de semivalores ha sido el camino habitual para obtener resultados, habiéndose llevado a cabo por dos vías

paralelas: por un lado se han definido y estructurado los conceptos a partir de la función característica, mientras que por otro, se han calculado los resultados empleando la extensión multilineal convenientemente modificada.

- El tratamiento de algunos problemas inversos merece una mención aparte, ya que no pueden abordarse considerando la linealidad que se ha puesto de manifiesto en la estructura de los semivalores. Se requiere, en cada caso, técnicas concretas para su resolución, variando significativamente el grado de dificultad de un problema a otro. El sexto y último capítulo trata sobre la resolución de dos problemas inversos. La extensión y complejidad de su tratamiento ha dado lugar al desarrollo completo del capítulo.

- A lo largo de este trabajo se han presentado diferentes ejemplos y se han aplicado sobre ellos los conceptos y las técnicas que se han introducido previamente con la finalidad de mostrar su adecuación para la resolución de las situaciones que se han descrito. Por medio de estos ejemplos se ha buscado evidenciar la validez de las actuaciones en referencia a cualquier semivalor sin tomar partido por alguno o algunos de los mismos, precisamente para poner énfasis en el carácter generalizador de los estudios que se han llevado a término.

- Como posibles derivaciones de esta memoria podrían citarse las siguientes líneas de trabajo: la generalización de la consideración de situaciones de cooperación modificada mediante el empleo de índices de cooperación en las coaliciones, la obtención de sistemas de propiedades que permitan la caracterización de diferentes semivalores, el estudio y la descripción de otras familias de semivalores y la introducción de conceptos y técnicas similares en el tratamiento de los r-juegos, en general, y de los 3-juegos, en particular.

8

Bibliografía

[1] **Amer, R.** (1995)
Juegos, valores e índices de cooperación.
Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya.

[2] **Amer, R.; Carreras, F.; Magaña, A.; Owen, G.** (1996)
Multilinear extensions and quotients of simple games.
Naval Research Logistics 43, núm. 1, págs. 103-118.

[3] **Amer, R.; Carreras, F.; Giménez, J. M.** (2000)
On the Banzhaf-Coleman index with a priori unions.
En: Documentos de trabajo del Departamento de Matemática Aplicada II. MA2-IR-00-00007. Universitat Politècnica de Catalunya.

[4] **Amer, R.; Giménez, J. M.** (2000)
Cooperación parcial en juegos cooperativos.
En: Documentos de trabajo del Departamento de Matemática Aplicada II. MA2-IR-00-00013. Universitat Politècnica de Catalunya.

[5] **Amer, R.; Giménez, J. M.** (2000)
Un concepto de potencial para semivalores sobre juegos cooperativos.
En: Documentos de trabajo del Departamento de Matemática Aplicada II. MA2-IR-00-00014. Universitat Politècnica de Catalunya.

[6] **Amer, R.; Giménez, J. M.** (2000)
Inseparable games by semivalues.
En: Documentos de trabajo del Departamento de Matemática Aplicada II. MA2-IR-00-00015. Universitat Politècnica de Catalunya.

[7] **Amer, R.; Carreras, F.; Giménez, J. M.** *(2001)*
The modified Banzhaf value for games with coalition structure: An axiomatic characterization.
Mathematical Social Sciences (*Aceptado.* Pendiente de publicación)

[8] **Amer, R.; Giménez, J. M.** (2001)
Una caracterización axiomática para la familia de semivalores binomiales.
En: Documentos de trabajo del Departamento de Matemática Aplicada II. MA2-IR-01-00009. Universitat Politècnica de Catalunya.

[9] **Aumann, R. J.; Drèze, J.** (1974)
Cooperative games with coalition structures.
International Journal of Game Theory 3, págs. 217-237.

[10] **Aumann, R. J.; Maschler, M.** (1985)
Game theoretic analysis of a bankrupty problem from the Talmud.
Journal of Economic Theory 36, págs. 195-213.

[11] **Banzhaf, J. F.** (1965)
Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis.
Rutgers Law Review 19, págs. 317-343.

[12] **Bergantiños, G.** (1993)
Aportaciones a la Teoría de Juegos.
Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Santiago de Compostela.

[13] **Borm, P.; van den Nouweland, A.; Owen, G.** (1993)
Cost allocation and communication.
Naval Research Logistics 40, págs. 733-744.

[14] **Calvo, E.; Santos, J. C.** (1997)
Potentials in cooperative TU-games.
Mathematical Social Sciences 34, págs. 175-190.

[15] **Carreras, F.; Owen, G.** (1988)
Evaluation of the Catalonian Parliament 1980-1984.
Mathematical Social Sciences 15, págs. 87-92.

[16] **Carreras, F.** (1991)
Restriction of simple games.
Mathematical Social Sciences 21, págs. 245-260.

[17] **Carreras, F.; Magaña, A.** (1994)
The multilinear extension and the modified Banzhaf-Coleman index.
Mathematical Social Sciences 28, págs. 215-222.

[18] **Castellet, M.; Llerena, I.** (1990)
Àlgebra Lineal i Geometria, 2ª ed.
Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

[19] **Chartrand, G.; Lesniak, L.** (1986)
Graphs and Digraphs.
Wadsworth & Brooks.

[20] **Coleman, J. S.** (1971)
Control of collectivities and the power of a collectivity to act.
Lieberman, B. (eds.) Social Choice. Gordon and Breach, New York, págs. 269-300.

[21] **Davis, M. D.** (1986)
Introducción a la Teoría de Juegos, 4ª ed.
Alianza Editorial. Madrid.

[22] **Dragan, I.** (1991)
The potential basis and the weighted Shapley value.
Libertas Mathematica 11, págs. 139-150.

[23] **Dragan, I.** (1995)
New mathematical properties of the Banzhaf value.
TR#300. Department of Mathematics. University of Texas at Arlington.

[24] **Dragan, I.** (1999)
Potential and consistency for semivalues of finite cooperative TU games.
International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra 9, núm. 2, págs. 85-97.

[25] **Driessen, T.** (1988)
Cooperative Games, Solutions and Applications.
Theory and Decisions Library. Kluwer Academic Press, The Nederlands.

[26] **Dubey, P.; Neyman, A.; Weber, R. J.** (1981)
Value theory without efficiency.
Mathematics of Operations Research 6, págs. 122-128.

[27] **Feltkamp, V.** (1995)
Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values.
International Journal of Game Theory 24, págs. 179-186.

[28] **Hart, S.; Mas-Colell, A.** (1988)
The potential of the Shapley value.
En: The Shapley value: Essays in honor of L. S. Shapley. (ed. por A. E. Roth). Cambridge University Press, págs. 127-137.

[29] **Hart, S.; Mas-Colell, A.** (1989)
Potential, value and consistency.
Econometrica 57, págs. 589-614.

[30] **Lehrer, E.** (1988)
An axiomatization of the Banzhaf value.
International Journal of Game Theory 17, págs. 89-99.

[31] **Lucas, W. F.** (1968)
A game with no solution
Bulletin of the American Mathematical Society 74, págs. 237-239.

[32] **Lucas, W. F.** (1969)
The proof that a game may not have a solution.
Transactions of the American Mathematical Society 137, págs. 219-229.

[33] **Lucas, W. F.; Rabie, M.** (1982)
Games with no solutions and empty Cores.
Mathematics of Operations Research 7, págs. 491-500.

[34] **Magaña, A.** (1996)
Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas.
Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya.

[35] **Myerson, R. B.** (1977)
Graphs and cooperation in games.
Mathematics of Operations Research 2, págs. 225-229.

[36] **Owen, G.** (1972)
Multilinear extensions of games.
Management Science 18, págs. 64-79.

[37] **Owen, G.** (1975)
Multilinear extensions and the Banzhaf value.
Naval Research Logistics Quarterly 22, págs. 741-750.

[38] **Owen, G.** (1977)
Values of games with a priori unions.
En: Essays in Mathematical Economics and Game Theory (ed. por R. Henn y O. Moeschlin). Springer-Verlag, págs. 76-88.

[39] **Owen, G.** (1978)
A characterization of the Banzhaf-Coleman index.
SIAM Journal of Applied Mathematics 35, págs. 315-327.

[40] **Owen, G.** (1981)
Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions.
En: Power, voting and voting power (ed. por M. J. Holler). Physica-Verlag, págs. 232-238.

[41] **Owen, G.; Winter, E.** (1992)
Multilinear extensions and the coalition value.
Games and Economic Behavior 4, págs. 582-587.

[42] **Owen, G.** (1995)
Game Theory, 3ª ed.
Academic Press.

[43] **Ruiz, L. M.; Valenciano, F.; Zarzuelo, J. M.** (1995)
The family of least square values for TU games.
En: Documentos de trabajo de Economía Aplicada DT5/1995. Universidad del País Vasco. Bilbao.

[44] **Ruiz, L. M.; Valenciano, F.; Zarzuelo, J. M.** (1996)
The least square prenucleolus and the least square nucleolus. Two values for TU games based on the excess vector.
International Journal of Game Theory 25, núm. 1, págs. 113-134.

[45] **Shapley, L. S.** (1953)
A value for n-person games.
En: Contributions to the Theory of Games II (ed. por H. W. Kuhn y A. W. Tucker). Princeton University Press, págs. 307-317.

[46] **Shapley, L. S.; Shubik, M.** (1954)
A method for evaluating the distribution of power in a committee system.
American Political Science Review 48, págs. 787-792.

[47] **Singleton, R. R.; Tyndall, W. F.** (1977)
Introducción a la Teoría de Juegos y a la Programación Lineal.
Editorial Labor. Barcelona.

[48] **Straffin, P. D.** (1988)
The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilistics.
En: The Shapley value: Essays in honor of L. S. Shapley. (ed. por A. E. Roth). Cambridge University Press, págs. 71-81.

[49] **von Neumann, J.; Morgenstern, O.** (1944)
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton University Press. Princeton. New Jersey.

[50] **Weber, R. J.** (1988)
Probabilistic values for games.
En: The Shapley value: Essays in honor of L. S. Shapley. (ed. por A. E. Roth). Cambridge University Press, págs. 101-119.

[51] **Young, H. P.** (1985)
Monotonic solutions of cooperative games.
International Journal of Game Theory 14, págs. 65-72.