

Universitat Politècnica de Catalunya
Programa de Doctorat de Matemàtica Aplicada
Departament de Matemàtica Aplicada III

Sobre l'ordenació de les arrels reals de les
derivades de polinomis a coeficients reals

Memòria presentada per
Josep Rubió Masegú
per optar al grau de Doctor per la
Universitat Politècnica de Catalunya

Director: **Dr. Eusebi Jarauta Bragulat**
Codirector: **Dr. Pere Rubió Díaz**

Manresa, Novembre de 2004

En record dels avis i del Joan,

A la família,

Agraïments

Vull expressar el meu agraïment més sincer a totes les persones que han seguit amb interès el desenvolupament d'aquest treball.

A en Eusebi Jarauta per haver-me conduït, juntament amb en Josep Ferrer Llop, en la línia de recerca d'aquesta tesi. Molt especialment vull agrair els consells i suport constant que m'ha donat durant tot aquest temps.

Al meu pare, Pere Rubió, qui va engrescar-me a iniciar aquesta tesi, donant lloc a apassionants i profitoses converses que han estat fonamentals per a la realització del treball. D'ell però, voldria sobretot destacar l'ànim i optimisme que m'ha sabut transmetre en els moments més difícils.

També vull fer constar la meva gratitud envers el professor José Luis Díaz per la seva disponibilitat en atendre i discutir les meves preguntes i comentaris durant el període de redacció de la tesi. A ell també li dec l'esforç que ha dedicat en una acurada revisió del treball. Moltíssimes gràcies.

A l'entorn familiar per la paciència i suport constant que han tingut durant tot aquest temps. Sense ells ben segur que aquest treball no hauria estat possible.

Als membres del Departament de Matemàtica Aplicada III de la UPC, i molt especialment als companys de la delegació del Vallès, voldria reconèixer la seva comprensió i generositat que ha permès que hagi pogut tenir una major dedicació en el treball. També vull fer menció especial als professors José Rodellar i Enrique Bedito per la confiança dipositada en mi, la qual cosa, sens dubte, ha influït positivament en la consecució de la tesi.

Finalment, voldria donar les gràcies a la Generalitat de Catalunya per haver-me concedit una beca FI/FIAP per a la realització del doctorat durant el període 1999-2002.

Resum. Alguns problemes clàssics sobre teoria analítica de polinomis estan relacionats amb un problema més general: determinar com estan ordenades les arrels reals d'un polinomi a coeficients reals i les arrels reals de totes les seves derivades.

Si ens restringim a l'ordenació entre arrels de derivades consecutives d'un polinomi, aquest problema pot formular-se de la següent manera. Sigui n un nombre natural no nul. Per a cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$ considerem variables indeterminades $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m(j)}^{(j)}$, que anomenarem variables de derivació j , i que considerarem lligades per les desigualtats $x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{m(j)}^{(j)}$. Definir un ordre entre variables de derivacions consecutives significa especificar, per a dues variables qualssevol de derivacions consecutives, diguem $x_{i_1}^{(j)}$ i $x_{i_2}^{(j+1)}$, una de les tres ordenacions següents: (i) $x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}$, (ii) $x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}$, o (iii) $x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}$. Llavors, el problema consisteix en determinar per a quines ordenacions entre variables de derivacions consecutives existeix un polinomi $P(x)$, de grau n , de manera que si les arrels reals de cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$, són els nombres $y_1^{(j)} < y_2^{(j)} < \dots < y_{r(j)}^{(j)}$, aleshores $r(j) = m(j)$ i entre arrels de derivades consecutives es verifiquen els lligams proposats. És a dir, si (i) $x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}$, (ii) $x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}$, o (iii) $x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}$, aleshores s'ha de complir (a) $y_{i_1}^{(j)} < y_{i_2}^{(j+1)}$, (b) $y_{i_1}^{(j)} = y_{i_2}^{(j+1)}$, o (c) $y_{i_1}^{(j)} > y_{i_2}^{(j+1)}$ respectivament. Si tal polinomi existeix aleshores es diu que l'ordenació proposada és representable per un polinomi.

El teorema de Rolle imposa restriccions en l'ordenació de les variables en el cas que aquesta ordenació sigui representable per polinomis. Concretament, si $x_i^{(j)} < x_{i+1}^{(j)}$ són dues variables consecutives amb una mateixa derivació j , aleshores ha d'existir una variable de derivació $j + 1$, $x_k^{(j+1)}$, tal que $x_i^{(j)} < x_k^{(j+1)} < x_{i+1}^{(j)}$. No obstant, les restriccions imposades pel teorema de Rolle no són suficients per a que una ordenació de les variables sigui representable per un polinomi.

En aquest sentit, ens proposem assolir els tres objectius següents:

- (1) Caracteritzar les ordenacions entre variables de derivacions consecutives que són representables per polinomis.
- (2) Classificar els polinomis en base a l'ordenació de les arrels de derivades consecutives i trobar certs nombres d'interès relacionats amb aquesta classificació, com per exemple el nombre de classes en que queden classificats els polinomis de grau n i el nombre de classes obertes de grau n (classes estables per pertorbacions).
- (3) Estudiar què succeeix quan es consideren ordenacions que inclouen lligams entre variables de derivacions no consecutives.

L'objectiu (1) s'ha assolit establint que les ordenacions entre variables de derivacions consecutives representables per polinomis coincideixen amb les ordenacions que satisfan les restriccions imposades per un resultat que generalitza el teorema de Rolle. Essencialment, s'ha obtingut el recíproc del teorema que diu que entre cada dues arrels reals consecutives d'un polinomi hi ha un nombre senar d'arrels de la derivada comptant multiplicitats.

L'objectiu (2) s'ha assolit classificant els polinomis segons l'ordenació que presenten les arrels de les seves derivades consecutives. Els nombres d'interès relacionats amb aquesta classificació s'han obtingut a partir de fórmules recurrents.

L'objectiu (3) s'ha assolit determinant els nombres n per als quals la mencionada generalització del teorema de Rolle és suficient per a que una ordenació de les variables que inclogui lligams entre variables de derivacions no consecutives sigui representable per un polinomi.

Índex

Introducció	5
Antecedents i motivació	5
Objectius	11
Estructura del treball	12
1 Preliminars	15
1.1 Conceptes bàsics i notacions	15
1.2 Interpolació de Birkhoff	18
1.3 Funcions nivell	23
1.3.1 Funcions nivell. Propietats.	25
1.3.2 Funcions conservatives	31
1.4 Una conseqüència del Teorema de Rouché	34
2 Configuracions completes	37
2.1 Grups d'una configuració	37
2.2 Configuracions completes i quasi-completes	43
2.3 Fórmules de la longitud	48
2.4 Test dels signes	51
3 Representació. Esquemes.	55
3.1 Les ρ -equivalències	55

3.2	Propietats de les ρ -equivalències	62
3.3	Representació	66
3.3.1	Representació per a longituds 1, 2, 3	67
3.3.2	No representació per a longituds $n \geq 4$ si $\rho \geq 2$	73
3.4	Esquemes	76
4	Esquelets i \mathcal{B}-configuracions	85
4.1	Propietats generals dels esquelets	85
4.2	\mathcal{B} -configuracions	90
4.3	Un teorema auxiliar	95
5	L'aplicació extensió	103
5.1	Definició i propietats generals	105
5.2	Continuïtat del polinomi anul·lador	111
5.3	Arrels veritables i latents	115
5.3.1	Arrels veritables i latents. Propietats generals.	117
5.3.2	Continuïtat de les funcions d'arrels veritables i latents	120
6	Representació per a \mathcal{B}-configuracions	129
6.1	Conceptes previs	129
6.2	Teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions	134
6.3	Consideracions addicionals	151
6.3.1	Nombre de graus de llibertat	151
6.3.2	Discussió sobre la unicitat	153
7	Eliminació de nodes	157
7.1	Caps complementàriament regulars	160
7.2	Un teorema sobre pertorbacions de polinomis	165
7.3	Resultats addicionals	170

<i>ÍNDEX</i>	3
7.4 Teoremes sobre eliminació de nodes	174
8 Teorema general de representació	181
8.1 Saturació d'una configuració completa	181
8.2 El teorema general de representació	188
8.3 Nombre de condicions addicionals	204
9 Nombre d'esquemes complets	209
9.1 Nombres auxiliars	209
9.1.1 Els nombres $e_n(d, p)$	213
9.1.2 Els nombres $e_n(d)$	218
9.2 Tipus de paritat d'un esquema complet	219
9.3 Nombre d'esquemes complets	221
9.4 Nombre d'esquemes complets de longitud $n \leq 100$	244
Conclusions i futures línies de recerca	249
Conclusions	249
Futures línies de recerca	258
Índex de notacions	261
Bibliografia	267

Introducció

Antecedents i motivació

La manera com estan ordenades les arrels reals d'un polinomi a coeficients reals i les arrels reals de totes les seves derivades té incidència en diversos àmbits de la matemàtica. Per exemple, aquesta ordenació influeix en la determinació dels signes de les derivades del polinomi en un punt i , per tant, en la localització de les arrels del polinomi aplicant mètodes com la regla d'acotació de Newton (Newton [41], 1707), el teorema de Budan-Fourier (Budan [5], 1807; Fourier [15], 1831) o la regla dels signes de Descartes (Descartes [10], 1637). Altres exemples d'àmbits influenciats per l'ordenació de les arrels són la representació gràfica de polinomis i la interpolació de Birkhoff (Birkhoff [3], 1906).

Un primer resultat sobre ordenació de les arrels és el teorema de Rolle, que estableix que entre cada dues arrels reals consecutives d'un polinomi hi ha com a mínim una arrel de la derivada. Aquest resultat, publicat per primer cop l'any 1691 (Rolle [45]), dóna intervals per a la localització de les arrels de la derivada que difícilment són millorables. Veure per exemple els treballs de Turán [54], 1946, i Peyser [43], 1967, dirigits a trobar intervals que contenen una arrel de la derivada del tipus $(a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2)$, on a i b són dues arrels consecutives d'un polinomi de grau n i $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ són nombres reals que depenen, essencialment, de a , b i n .

L'ordenació entre les arrels d'un polinomi i les arrels de la seva derivada està regida pel següent resultat, que en el que segueix anomenarem *teorema d'ordenació*.

Teorema *Sigui $f(x)$ un polinomi a coeficients reals de grau $n \geq 1$. Aleshores,*

- (i) Si a_1 i a_2 són dues arrels consecutives de f , el nombre d'arrels, comptant multiplicitats, de f' en l'interval (a_1, a_2) és senar.*
- (ii) Si $f(a) = 0$ i f no té arrels en l'interval $(a, +\infty)$, aleshores el nombre*

d'arrels, comptant multiplicitats, de f' en l'interval $(a, +\infty)$ és parell (possiblement amb cap arrel). Anàlogament, si $f(a) = 0$ i f no té arrels en l'interval $(-\infty, a)$, el nombre d'arrels, comptant multiplicitats, de f' en l'interval $(-\infty, a)$ és parell.

(iii) *Si f no té arrels reals, el nombre d'arrels reals de f' , comptant multiplicitats, és senar.*

L'apartat (i) d'aquest resultat generalitza el teorema de Rolle i també és vàlid per a funcions analítiques reals [33]. L'apartat (ii) és exclusiu per a polinomis i ja era conegut per Mitchell [40], 1918. L'apartat (iii) es dedueix fàcilment del Teorema Fonamental de l'Àlgebra (Euler [13], 1843; Gauss [16], 1863).

El teorema anterior, aplicat a totes les derivades d'un polinomi, proporciona informació sobre l'ordenació de les arrels de derivades consecutives del polinomi. Aquest teorema dona, per tant, una condició necessària en l'ordenació de les arrels.

Una qüestió recíproca és la de conèixer quines ordenacions són efectivament el resultat de les arrels de derivades consecutives d'un polinomi. Considerem nombres naturals $m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Per a cada j , $0 \leq j \leq n - 1$, siguin $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m(j)}^{(j)}$, les $m(j)$ variables indeterminades que anomenarem *variables de derivació j* . Aquestes variables les considerarem lligades per les desigualtats $x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{m(j)}^{(j)}$. A més, dues variables qualssevol de derivacions consecutives, diguem $x_{i_1}^{(j)}$ i $x_{i_2}^{(j+1)}$, estaran lligades per alguna de les ordenacions següents:

$$(1) x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}, (2) x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}, \text{ o } (3) x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}.$$

Un cop tenim aquestes variables i els seus lligams, aleshores queda definida una ordenació entre variables de derivacions consecutives.

Un problema obert consisteix en determinar per a quines ordenacions entre variables de derivacions consecutives existeix un polinomi $P(x)$, de grau n , de manera que el nombre d'arrels reals de cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$, és exactament $m(j)$. A més a més, si es consideren les arrels reals $y_1^{(j)} < y_2^{(j)} < \dots < y_{m(j)}^{(j)}$ de $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$, determinar si entre les arrels de derivades consecutives es verifiquen els lligams proposats. És a dir, si (1) $x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}$, (2) $x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}$, o (3) $x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}$, aleshores s'ha de complir (1) $y_{i_1}^{(j)} < y_{i_2}^{(j+1)}$, (2) $y_{i_1}^{(j)} = y_{i_2}^{(j+1)}$, o (3) $y_{i_1}^{(j)} > y_{i_2}^{(j+1)}$ respectivament. Si tal polinomi existeix aleshores es diu que l'ordenació proposada és *representable per un polinomi*.

El problema considerat es presenta de manera natural i, fins a on nosaltres sabem, sembla que no ha estat tractat. No obstant, és possible que matemàtics com Newton o Cauchy s'haguessin plantejat qüestions semblants sobre l'ordenació de les arrels de derivades consecutives d'un polinomi, encara que si van arribar a alguna conclusió al respecte, sembla que no n'ha quedat constància.

Definir un ordre entre variables de derivacions consecutives presenta dificultats tècniques, com per exemple que poden presentar-se inconsistències després d'aplicar la propietat transitiva. La manera de solucionar això és visualitzant gràficament l'ordenació de les variables $x_i^{(j)}$ mitjançant *esquemes*. Es consideren n còpies de la recta real, una per a cada derivació $j = 0, 1, \dots, n - 1$, i en cada recta es marquen $m(j)$ punts o *nodes*, que representen les $m(j)$ variables de derivació j , ordenades d'esquerra a dreta. L'ordenació entre variables de derivacions consecutives queda visualitzada segons la posició relativa entre nodes situats en rectes consecutives. Per exemple, l'esquema de la part (a) de la figura següent

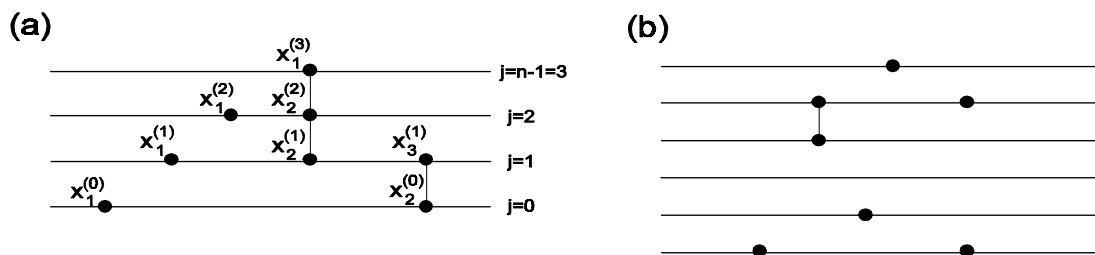


Figura 1. *Esquemes*.

indica que les variables de derivació 0 i 1 estan lligades per l'ordenació $x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < x_2^{(0)} = x_3^{(1)}$, les variables de derivació 1 i 2 per l'ordenació $x_1^{(1)} < x_1^{(2)} < x_2^{(1)} = x_2^{(2)} < x_3^{(1)}$, i les variables de derivació 2 i 3 per $x_1^{(2)} < x_2^{(2)} = x_1^{(3)}$. Observem que és redundant indicar la variable que correspon a cada node, així com la derivació que correspon a cada recta. El nombre n s'anomena *longitud* de l'esquema i coincideix amb $1 + j_{\max}$, on j_{\max} és la derivació més gran dels nodes de l'esquema. Per exemple, a la part (b) de la figura 1 hi ha representat un esquema de longitud $n = 1 + 5 = 6$, resultant en aquest cas l'ordenació $x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < x_2^{(0)}$ entre variables de derivació 0 i 1, l'ordenació $x_1^{(3)} = x_1^{(4)} < x_2^{(4)}$ per a les variables de derivació 3 i 4, i l'ordenació $x_1^{(4)} < x_1^{(5)} < x_2^{(4)}$ per a les variables de derivació 4 i 5.

Hi ha una bijecció entre ordenacions de variables de derivacions consecutives que no presenten inconsistències amb els esquemes i, en conseqüència, parlar d'ordenacions

consistents equival a parlar d'esquemes. Té sentit, doncs, el concepte d'*esquema representable per polinomis* com aquell esquema que produeix una ordenació entre variables de derivacions consecutives representable per un polinomi.

El teorema d'ordenació limita com poden ser els esquemes representables per polinomis. Així, l'esquema de la figura 1 (a) no pot ser representable per un polinomi $P(x)$, ja que si tal polinomi existís s'arribaria a una contradicció amb l'apartat (i) del teorema d'ordenació aplicat al polinomi $f(x) = P(x)$ i a les arrels consecutives $a_1 = x_1^{(0)}$ i $a_2 = x_2^{(0)}$ donat que la derivada f' tindria quatre arrels, i en particular un nombre parell d'arrels, comptant multiplicitats, en l'interval (a_1, a_2) . També s'arribaria a una contradicció amb l'apartat (i) quan s'aplica a $f(x) = P'(x)$ i a les arrels consecutives $a_1 = x_2^{(1)}$, $a_2 = x_3^{(1)}$, ja que en aquest cas f' no tindria arrels en l'interval (a_1, a_2) . L'esquema de la part (b) tampoc pot ser representable per un polinomi donat que el nombre d'arrels de f' quan $f(x) = P'''(x)$ en l'interval $(x_1^{(3)}, +\infty)$ és igual a 1, que és senar. En aquest cas s'arriba a una contradicció amb l'apartat (ii). També s'arribaria a una contradicció amb l'apartat (iii) aplicat a $f(x) = P''(x)$.

En canvi, per als esquemes següents

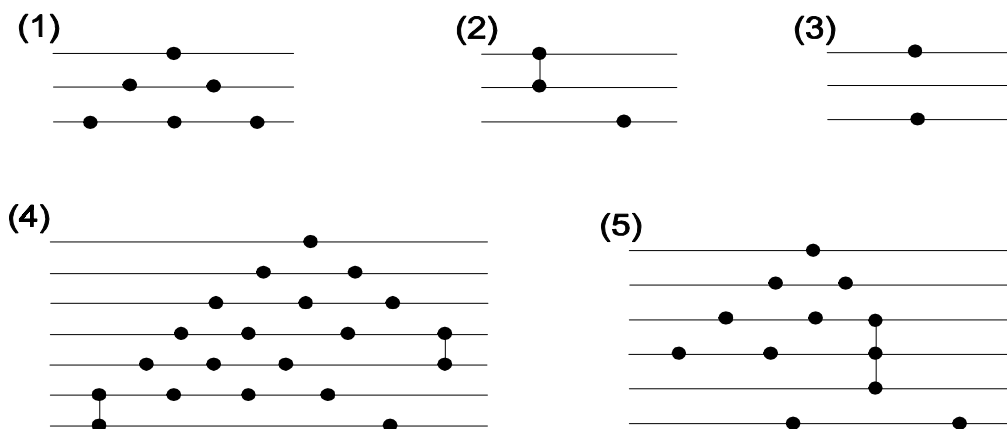


Figura 2. *Esquemes complets.*

no hi ha manera d'arribar a contradiccions amb cap de les propietats (i), (ii) i (iii) del teorema d'ordenació. Tals esquemes s'anomenen *esquemes complets*. Dit d'una altra manera, els esquemes complets són els esquemes compatibles amb el teorema d'ordenació. S'obté, doncs, que tot esquema representable per polinomis ha de ser complet.

Un dels principals objectius d'aquest treball és establir que tot esquema complet és representable per un polinomi, i, en conseqüència, obtenir que:

Els esquemes representables per polinomis coincideixen amb els esquemes complets.

Aquest resultat, anomenat *teorema de representació*, resol el problema esmentat abans sobre la determinació de les ordenacions entre variables de derivacions consecutives que són representables per polinomis. En efecte, les ordenacions entre variables de derivacions consecutives que són representables per polinomis són les ordenacions compatibles amb el teorema d'ordenació.

Tanmateix, aquest resultat és de fet el *recíproc del teorema d'ordenació*, ja que assegura que tota disposició de nodes o esquema complint les condicions del teorema d'ordenació prové de les arrels d'un polinomi i de les seves derivades. En particular, tots els lligams existents entre les arrels de derivades consecutives de polinomis han d'estar continguts en el teorema d'ordenació. Com a exemple, aplicant el teorema de representació a l'esquema de la figura 2 (4), s'obté l'existència d'un polinomi $P(x)$ de grau $n = 1 + j_{\max} = 7$ tal que la distribució de les seves arrels i arrels de les seves derivades ve donada per les condicions $(d_0), (d_1), \dots, (d_6)$ següents: (d_0) el polinomi P té exactament dues arrels reals diferents; la primera d'elles, i.e., la més petita, amb multiplicitat dos; l'altra és simple, (d_1) P' té exactament quatre arrels reals diferents, totes elles simples; la primera coincideix amb la primera arrel de P ; les altres tres estan situades entre les dues arrels de P , (d_2) P'' té quatre arrels reals diferents, totes elles simples amb excepció de la quarta, que és doble; la primera arrel de P'' està situada entre la primera i segona arrels de P' , la segona entre la segona i tercera de P' , la tercera entre la tercera i quarta de P' , i la quarta a la dreta de l'arrel més gran de P' . Així es pot anar continuant fins arribar a la condició (d_6) , que diu que $P^{(6)}$ té una única arrel, situada entre les dues arrels de $P^{(5)}$.

El nostre interès en l'obtenció d'aquest resultat prové de que ens va aparèixer de manera natural tractant de contribuir en el *problema de l'ordre-regularitat en interpolació de Birkhoff*, que és un dels problemes més importants en Anàlisi Numèrica i Teoria de l'Aproximació, i que ha donat lloc a molta activitat investigadora des de la dècada dels seixanta. Aquest consisteix en caracteritzar les *matrius d'incidència* que permeten interpolació única, conegudes amb el nom de matrius *ordre-regulars*. Destaquen les condicions necessàries d'ordre-regularitat obtingudes per Schoenberg [51], 1966, Lorentz i Zeller [34], 1971, i Lorentz [28], 1972; la caracterització de les matrius *condicionalment regulars* deguda a Ferguson [14]; i les condicions suficients d'ordre-regularitat obtingudes per Atkinson i Sharma [2], 1969. Un bon

recull dels resultats d'aquest període es troba en [33]. No obstant, a part dels resultats esmentats, poques millores significatives s'han obtingut sobre aquest problema. Finalment, mencionarem els treballs [18] i [47] sobre l'existència de zeros del *determinant de Vandermonde* generalitzat.

Vam veure que aquest problema es reduïa a estudiar l'existència de polinomis de grau estrictament més petit que n , de manera que si s'ordenen les arrels de la seva derivada j -èsima en la forma $y_1^{(j)} < y_2^{(j)} < \dots < y_{m(j)}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots$, aleshores es puguin extreure n arrels $y_{i_1}^{(j_1)}, y_{i_2}^{(j_2)}, \dots, y_{i_n}^{(j_n)}$ que estiguin ordenades entre elles segons un ordre preestablert (aquest ordre és definit a través de la matriu d'incidència). Si tal polinomi existeix, la matriu d'incidència és ordre-singular, és a dir, no ordre-regular. Així que, de fet, el coneixement de l'ordenació entre totes les arrels dels polinomis i de les seves derivades permet decidir sobre aquest problema pel fet o no que un subconjunt de n arrels $y_{i_1}^{(j_1)}, y_{i_2}^{(j_2)}, \dots, y_{i_n}^{(j_n)}$ tingui l'ordenació del problema exigít. Això ens va portar a estudiar les ordenacions possibles entre les arrels dels polinomis i de les seves derivades i, com a primer pas, estudiar si les ordenacions entre les arrels de derivades consecutives, compatibles amb el teorema d'ordenació, eren representables per polinomis.

Establert el teorema de representació, poden considerar-se altres tipus d'ordenacions més exigents que la de derivades consecutives. És a dir, ordenacions que inclouen lligams entre variables de derivacions no consecutives. Aquí hi entra, per exemple, l'estudi de les *ordenacions típiques*, que és quan dues variables qualssevol $x_{i_1}^{(j_1)}$ i $x_{i_2}^{(j_2)}$ estan lligades per alguna ordenació. També hi entren ordenacions parcials de la típica com per exemple la que dues variables $x_{i_1}^{(j_1)}$ i $x_{i_2}^{(j_2)}$ estan lligades per alguna ordenació sempre que j_1 i j_2 no difereixin en més de dues unitats. Per tal que aquestes ordenacions puguin ser representables per polinomis (i.e. existeixi un polinomi complint tots els lligams proposats), és necessari que l'ordenació que indueixen entre variables de derivacions consecutives sigui compatible amb el teorema d'ordenació. No és pas cert que totes les ordenacions compatibles amb el teorema d'ordenació siguin representables per polinomis si $n \geq 4$. Això ho veurem a la secció 3.3. De fet, si només exigim l'ordenació de totes les variables que tenen derivacions consecutives i, addicionalment, l'ordenació entre variables que tenen derivacions k i $k + 2$, on $k \geq 1$ és un nombre fixat, aleshores existeixen ordenacions d'aquest tipus i compatibles amb el teorema d'ordenació, que no es poden representar per polinomis.

Els únics treballs que hem trobat en la literatura sobre l'ordenació de les arrels de derivades de polinomis es refereixen a l'ordenació típica, i tenen com a punt de

partida l'article d'Anderson [1], 1993, on s'estudia l'ordenació de les arrels d'un polinomi de grau quatre amb quatre arrels reals i diferents, i s'arriba a la conclusió que per a $n = 4$ existeixen ordenacions típiques que no són representables per polinomis. Notem que això és un cas particular del que hem esmentat abans. Altres treballs van dirigits a comptar, per a $n = 3, 4$ i 5 , el nombre d'ordenacions típiques amb $m(j) = n - j$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, i sense igualtats entre variables, i.e., amb $x_{i_1}^{(j_1)} \neq x_{i_2}^{(j_2)}$, que són representables per polinomis ([24],[25]). Aquests treballs mostren la dificultat de l'obtenció de resultats de representació per a l'ordenació típica, fent-se necessari treballar amb ordenacions molt particulars. Aquesta dificultat fa que a [26] i [27] s'estudiïn les ordenacions que es presenten entre les arrels d'un polinomi i les arrels de només una de les seves derivades.

La caracterització de les ordenacions més exigents que la de derivades consecutives que són representables per polinomis és un problema que avui dia sembla inabordable donat que requereix teoremes de distribució d'arrels de derivades no consecutives de polinomis que en l'actualitat es desconeixen i, en tot cas, només es disposa de l'aplicació iterada del teorema d'ordenació. Aquesta no existència d'un resultat anàleg al teorema d'ordenació per a arrels de derivades no consecutives fa que d'entrada no es coneixin quines ordenacions entre variables tenen la possibilitat de ser representables per polinomis, així que tot el que es pot fer és intentar decidir, per a certes ordenacions molt particulars, quines són representables per polinomis i quines no ho són, tal com es corrobora en les directrius dels treballs mencionats sobre l'ordenació típica. És per això que el teorema de representació que hem obtingut és el resultat de representació possiblement més complet que es pot donar actualment.

Objectius

L'objectiu principal d'aquest treball és establir que tot esquema complet és representable per un polinomi (teorema de representació). A més, si és possible, determinar quan aquest polinomi es pot escollir satisfent altres condicions addicionals. Aquí hi entra, per exemple, estudiar quan es poden prefixar els valors concrets d'algunes de les arrels del polinomi o de les seves derivades. En definitiva, establir graus de llibertat en la determinació del polinomi.

El segon objectiu del treball és classificar els polinomis en base a l'ordenació de les arrels de derivades consecutives. Aquesta classificació es farà mitjançant la correspondència que hi ha amb els esquemes representables per polinomis que, pel

teorema de representació, coincideixen amb els esquemes complets. Sobre aquesta classificació incidirem especialment en els dos punts següents: (a) trobar, si és possible, el nombre de classes en que queden classificats els polinomis de grau n , i (b) caracteritzar les classes de polinomis obertes, és a dir, que són subconjunts oberts de $\mathbb{R}_n[x]$, l'espai de polinomis de grau més petit o igual que n . La caracterització de les classes de polinomis obertes connecta amb saber quan al fer una pertorbació d'un polinomi, l'esquema del polinomi pertorbat i el del polinomi inicial coincideixen.

El tercer objectiu del treball és veure que quan $n \geq 4$, existeixen ordenacions entre variables, més exigents que la de derivades consecutives i compatibles amb el teorema d'ordenació, que no són representables per polinomis. Tanmateix també estudiarem el cas $n \leq 3$ caracteritzant, si és possible, totes les ordenacions típiques que són representables per polinomis.

Estructura del treball

Per tal d'assolir els objectius del treball serà necessari crear una terminologia adient que permeti, d'una banda, formalitzar i treballar amb els conceptes anteriorment presentats, i d'altra, desenvolupar la demostració del teorema de representació, la qual cosa requereix utilitzar conceptes fins ara no establerts que necessiten d'un llenguatge adequat. Així, deixarem de parlar de variables i introduïrem els *nodes* com parells (x, j) de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, essent x l'abscissa del node i j la derivació, i les *configuracions* com els conjunts finits de nodes. Els nodes, i per extensió les configuracions, admeten una representació geomètrica en el pla via la inclusió natural $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^2$. Les ordenacions entre variables es recuperaran definint certes relacions d'equivalència en el conjunt de totes les configuracions.

El treball està organitzat en nou capítols. Els capítols 1, 2 i 3 corresponen a la terminologia i propietats generals. Els capítols 4, 5, 6, 7 i 8 corresponen a la demostració del teorema de representació i el capítol 9 al càlcul del nombre de classes d'equivalència en que queden classificats els polinomis de grau n , $n \geq 1$, en base al seu esquema.

En el capítol 1 es presenta la terminologia que s'utilitzarà durant la resta del treball. Aquí s'introdueixen els conceptes de *node*, de *configuració* i el d'*espectre d'un polinomi*, que és la configuració que correspon a les arrels d'un polinomi P i de les seves derivades. És a dir, la configuració formada per tots els nodes (x, j) tals

que $P^{(j)}(x) = 0$. En aquest capítol també s'estableixen alguns resultats clàssics sobre interpolació de Birkhoff que s'aprofitaran més endavant. Les funcions nivell, utilitzades en diversos aspectes de la interpolació de Birkhoff, s'estudien a fons per formular les *extensions* en el capítol 5. Finalment, mitjançant el teorema de Rouché es relaciona l'espectre d'un polinomi amb l'espectre d'un dels seus pertorbats.

En el capítol 2 s'introdueixen les *configuracions completes* com aquelles que no entren en contradicció amb el teorema d'ordenació. La reorganització dels nodes d'una configuració en *grups de nodes* és útil de cara a simplificar notacions. També es presenta el concepte de *configuració quasi-completa*, que és aquella que no entra en contradicció amb el teorema de Rolle. Posteriorment es prova que tot espectre és una configuració completa. Finalment, es tracten algunes de les propietats elementals de les configuracions completes i quasi-completes, que són: la fórmula de la longitud i conseqüències; i el test dels signes, que permet calcular el signe que pren un polinomi i totes les seves derivades en cada punt $x \in \mathbb{R}$, a partir de la coneixença del seu espectre.

En el capítol 3 es donen tot un seguit de relacions d'equivalència, definides en el conjunt de configuracions, de manera que les classes obtingudes per aquestes relacions d'equivalència es corresponen amb les ordenacions entre les variables presentades anteriorment. Així, per a $\rho = 1$ s'obté la *1-equivalència* o *equivalència*, la qual produeix com a classes d'equivalència els *esquemes* (ordenacions entre variables de derivacions consecutives). En general, per a $\rho = 0, 1, 2, \dots$ s'obté la ρ -equivalència, que és la que correspon a ordenar les variables que tenen derivacions que difereixen com a molt en ρ unitats. També es considera el cas $\rho = +\infty$, que és el que es correspon amb l'ordenació típica (totes les variables lligades). Posteriorment es prova que tota configuració completa de longitud n , $1 \leq n \leq 3$, és ρ -equivalent a un espectre quan $\rho = +\infty$. Això significa que totes les ordenacions típiques amb $n \leq 3$ i compatibles amb el teorema d'ordenació, són representables per polinomis. A continuació es classifiquen els polinomis de grau n , $1 \leq n \leq 3$, en base a l'ordenació típica que presenten i s'explicita aquesta classificació en funció dels seus coeficients. També es provarà que per a $n \geq 4$ existeixen configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents a un espectre. Això significa que per a tot $n \geq 4$ existeixen ordenacions entre variables de derivacions que difereixen en una o dues unitats, i compatibles amb el teorema d'ordenació, que no es poden representar per polinomis. Finalment, es classifiquen els polinomis en funció del seu esquema i es caracteritzen les classes de polinomis que són obertes a partir dels *esquemes simples*.

Els capítols 4, 5, 6, 7 i 8 corresponen a la demostració del teorema de representació,

que estableix que tota configuració completa és equivalent a un espectre.

En el capítol 4 s'introdueixen els conceptes d'*esquelet* i de *nodes veritables* d'una configuració quasi-completa. Essencialment, els esquelets són subconjunts de les configuracions quasi-completes formats per nodes que s'han escollit d'una manera molt especial; la informació dels nodes no escollits està continguda en els nodes veritables. En aquest capítol també es presenta un nou tipus de configuracions completes, les *B-configuracions*, i s'estudia la seva relació amb els esquelets que són Pólya i conservatius.

En el capítol 5 s'analitza el moviment de les abscisses dels nodes d'una configuració. Per a cada tria de les abscisses s'obté una configuració diferent, presentant-se així una àmplia gamma de configuracions que queden incloses dins el concepte d'*aplicació extensió*. Posteriorment es presenta la noció d'*arrels veritables i latents* i es demostra la seva continuïtat en funció de les abscisses.

En el capítol 6 s'estableix el teorema de representació per a les *B*-configuracions. És a dir, es prova que tota *B*-configuració és equivalent a l'espectre d'un polinomi. Un cop això, es fa un recompte del nombre de graus de llibertat en la determinació del polinomi i, finalment, es discuteix la unicitat d'aquest polinomi.

En el capítol 7 s'estudia, via el teorema de la funció implícita, l'existència de pertorbacions d'un polinomi de manera que l'espectre del polinomi pertorbat s'obtingui suprimint uns quants nodes de l'espectre del polinomi inicial (*eliminació de nodes*).

En el capítol 8 es demostra el *teorema de representació*. Així mateix, també es dóna la versió d'aquest resultat que incorpora condicions addicionals o graus de llibertat en la determinació del polinomi, i que s'anomena *teorema general de representació*. Com a conseqüència del teorema de representació, es completa un resultat de Mikusiński [39], 1949, sobre l'existència de polinomis que tenen un nombre d'arrels reals, i un nombre d'arrels reals de les seves derivades, prefixat. Finalment es fa un recompte del nombre de condicions addicionals que proporciona el teorema general de representació en la determinació del polinomi.

En el capítol 9 es troben fórmules recurrents per al càlcul del nombre d'esquemes complets de longitud n i per al càlcul del nombre d'esquemes complets i simples de longitud n . Es finalitza donant taules d'aquests nombres per a $1 \leq n \leq 100$.

Capítol 1

Preliminars

En aquest capítol presentarem els conceptes bàsics relatius a configuracions, així com les propietats, la major part d'elles conegudes, que necessitarem en els capítols posteriors.

1.1 Conceptes bàsics i notacions

Per \mathbb{N} i \mathbb{R} denotem, respectivament, el conjunt dels nombres naturals i el conjunt dels nombres reals. Si no es diu el contrari tots els polinomis que considerarem seran polinomis d'una variable a coeficients reals, és a dir, elements de $\mathbb{R}[x]$. Si $n \in \mathbb{N}$, els conjunts

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_n[x] &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P) \leq n\} \\ \mathbb{R}_n^*[x] &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P) = n\}\end{aligned}$$

són, respectivament, els polinomis de grau menor o igual que n , i els polinomis de grau exactament n . Finalment, per $\#X$ denotem el cardinal d'un conjunt X .

Un *node* és un element de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Així, els nodes són parells $\alpha = (x, j)$ on x és un nombre real anomenat *abscissa* de α , i j és un nombre natural anomenat *derivació* de α . Si f és una funció real de variable real definida en un entorn d'un punt $x \in \mathbb{R}$, i derivable j cops en x , el *valor de f en $\alpha = (x, j)$* és la derivada j -èssima de f en el punt x , i denotarem aquest valor per $f[\alpha] = f^{(j)}(x)$. La funció f és *nul·la* en α si $f[\alpha] = 0$.

Una *configuració* A és un conjunt finit de nodes. En general, el conjunt buit $A = \emptyset$ no el considerarem com a configuració. Si f és una funció real de variable

real suficientment regular, direm que f s'anul·la sobre A si f és nul·la en tots els nodes de A .

Les configuracions poden representar-se en el pla \mathbb{R}^2 , dibuixant tots els seus nodes. Així, si

$$A = \left\{ (-2, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (3, 0), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3) \right\}$$

aleshores la seva representació és

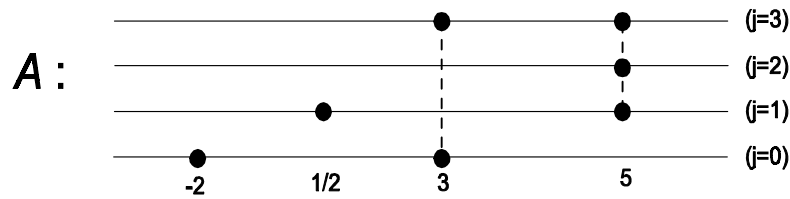


Figura 1.1. Representació geomètrica de A .

Els nodes de A els estem representant amb punts; o sovint també mitjançant creus "x". Les línies verticals, contínues o discontinües, que uneixen dos nodes, només les posarem si volem remarcar que els dos nodes implicats tenen la mateixa abscissa.

La *longitud* d'una configuració A és el nombre ℓ_A definit per $\ell_A = 1 + j_{\max}$, on j_{\max} és la derivació més gran dels nodes de A . Observem que $\ell_A \geq 1$. Per exemple, la configuració de la figura 1.1 té longitud $\ell_A = 1 + 3 = 4$.

El conjunt format per totes les abscisses dels nodes de A el denotarem per ab_A ,

$$\text{ab}_A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists j \in \mathbb{N} \text{ amb } (x, j) \in A\} \quad (1.1)$$

Notem que aquest conjunt sempre és finit.

Anomenem *èpsilon de A* al mínim de les semidistàncies entre les abscisses de A . És a dir,

$$\varepsilon_A = \min \left\{ \frac{|x - y|}{2} \mid x, y \in \text{ab}_A, x \neq y \right\} \quad (1.2)$$

L'èpsilon de A estarà definit sempre que $\#\text{ab}_A \geq 2$. Quan $\#\text{ab}_A = 1$ aleshores definim $\varepsilon_A = +\infty$. Observem que si (x, j) i (y, k) són dos nodes de A amb abscissa diferent, aleshores $|x - y| \geq 2\varepsilon_A$.

Si $\alpha = (x, j)$ és un node de A , anomenem *multiplicitat* de α en A al nombre natural $m \geq 1$ que satisfà $(x, j) \in A$, $(x, j + 1) \in A$, \dots , $(x, j + m - 1) \in A$, però $(x, j + m) \notin A$. Aquest nombre m es denota per $\text{mult}_A[\alpha]$. Per exemple, si A és

la configuració de la figura 1.1 aleshores $\text{mult}_A[(-2, 0)] = 1$, $\text{mult}_A[(5, 1)] = 3$ i $\text{mult}_A[(5, 2)] = 2$.

Un node $\alpha = (x, j) \in A$ és un *peu* de A si $(x, j - 1) \notin A$. Observem que la suma de les multiplicitats de tots els peus de A coincideix amb $\sharp A$. Per a qualsevol node $\alpha = (x, j) \in A$, les condicions $(x, j - 1) \in A$, $(x, j - 2) \in A$, \dots , $(x, j - k) \in A$, i $(x, j - k - 1) \notin A$, determinen un peu $(x, j - k)$ de A , que anomenarem *peu de α* i denotarem per $\text{peu}_A[\alpha]$.

Anàlogament, un node $\alpha = (x, j) \in A$ és un *cap* de A si $(x, j + 1) \notin A$; o equivalentment, si α té multiplicitat 1 en A . Per a qualsevol node $\alpha = (x, j) \in A$, les condicions $(x, j + 1) \in A$, $(x, j + 2) \in A$, \dots , $(x, j + k) \in A$, i $(x, j + k + 1) \notin A$, determinen un cap $(x, j + k)$ de A que anomenarem *cap de α* i denotarem per $\text{cap}_A[\alpha]$. Notem que el cap d'un node $\alpha = (x, j) \in A$ es pot definir directament amb la fórmula $\text{cap}_A[\alpha] = (x, j + \text{mult}_A[\alpha] - 1)$.

Sigui (x, j) un peu de A de multiplicitat m i considerem el seu cap $(x, j + m - 1)$. Aleshores, per a qualsevol node (x, j') de A amb abscissa x , són equivalents: (i) el peu de (x, j') és (x, j) , (ii) el cap de (x, j') és $(x, j + m - 1)$, i (iii) $j \leq j' \leq j + m - 1$.

Altra definició que utilitzarem tot sovint és la relativa al nombre de nodes de certa derivació. Si $j \in \mathbb{N}$, el nombre de nodes de A que tenen derivació j , i el nombre de nodes de A que tenen derivació més petita o igual que j , es denoten respectivament per $m_A(j)$ i $M_A(j)$. És a dir,

$$\begin{aligned} m_A(j) &= \sharp\{(x, j') \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j') \in A, j' = j\} \\ M_A(j) &= \sharp\{(x, j') \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j') \in A, 0 \leq j' \leq j\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Notem que $M_A(j) = \sum_{j'=0}^j m_A(j')$. Posarem també $m_A(-1) = M_A(-1) = 0$. Queden definides doncs, per a cada configuració A , les funcions m_A i M_A , que depenen de l'índex $j \geq -1$ i que prenen valors naturals. Òbviament $m_A(\ell_A - 1) \geq 1$ i $m_A(j) = 0$ per a $j \geq \ell_A$. Anàlogament, $M_A(\ell_A - 2) < \sharp A = M_A(j)$ si $j \geq \ell_A - 1$.

L'*espectre d'un polinomi* $P \in \mathbb{R}[x]$ de grau $n \geq 1$, és el conjunt de nodes amb derivació més petita o igual que $n - 1$ anul·lats per P . És a dir,

$$Z(P) = \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid P^{(j)}(x) = 0, j \leq n - 1\}.$$

Aquest conjunt és una configuració, ja que per a cada derivació j hi ha com a molt $n - j$ arrels de $P^{(j)}$. La seva longitud $\ell_{Z(P)}$ és igual a n donat que $P^{(n-1)}$ és un polinomi de grau 1, i per tant té una arrel real. A la següent figura es presenten alguns exemples d'espectres.

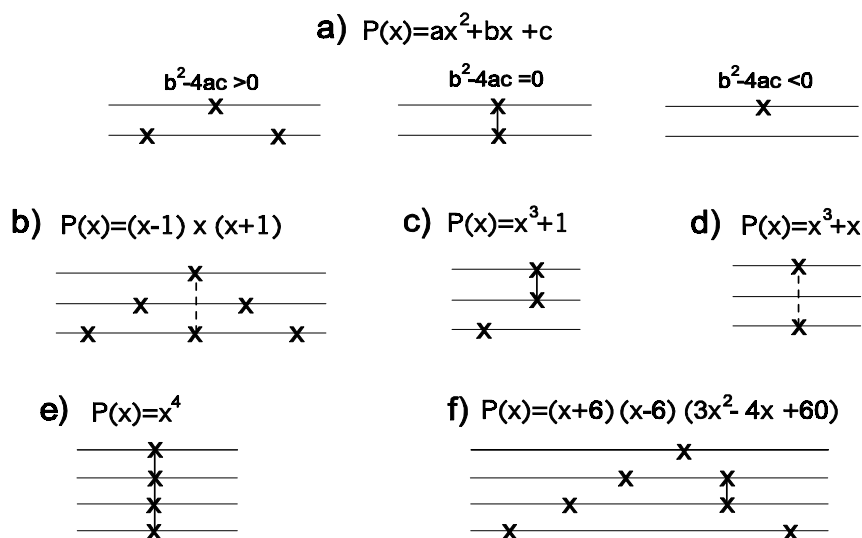


Figura 1.2. Polinomis P i els seus espectres $Z(P)$ (sense marcar abscisses).

L'espectre d'un polinomi P conté tota la informació possible sobre les arrels de P i de les seves derivades successives, i té la propietat que si P és nul en un node α de derivació menor o igual que n , aleshores α ha de pertànyer a $Z(P)$ (notem que $P^{(n)}$ és una constant no nul·la i per tant la derivació de α no pot ser n). Per altra banda, la multiplicitat en $Z(P)$ d'un node $(x, j) \in Z(P)$ coincideix amb la multiplicitat usual del polinomi $P^{(j)}$ en el punt x .

Direm que una configuració A és un *espectre* si hi ha algun polinomi a coeficients reals P , $\deg(P) \geq 1$, tal que A és l'espectre de P . Si tal polinomi existeix, ha de tenir grau igual a la longitud de A .

Finalment, observem que els conceptes presentats en aquesta secció complementen la terminologia utilitzada en [3], treball que donà nom a la interpolació de Birkhoff, i que presentem a continuació.

1.2 Interpolació de Birkhoff

G. D. Birkhoff [3], l'any 1906, planteja el següent problema: *donats n nodes, trobar un polinomi $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ que prengui valors prefixats en els n nodes*. Sota la hipòtesi d'existència i unicitat de tal polinomi, estudia l'error comès a l'aproximar una funció pel seu polinomi interpolador en els n nodes. Aquest tipus d'interpolació, que generalitza la *interpolació de Lagrange* (obtinguda quan els n nodes són

de la forma $(x_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$), la *interpolació d'Hermite* (nodes de la forma (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, r$; $j = 0, 1, \dots, p_i$) i la *interpolació de Taylor* (nodes de la forma (a, j) , $j = 0, 1, \dots, n - 1$), és coneguda com la *interpolació de Birkhoff*.

Més tard, l'any 1966, Schoenberg [51] rescriu el problema d'interpolació de Birkhoff en termes de matrius d'incidència, que és una terminologia equivalent a la de [3], i de forma que la transcripció dels resultats d'una a altra notació és òbvia. Per conveniència nosaltres mantindrem la notació inicial de [3].

Així, donada una configuració A qualsevol de n nodes, el *problema d'interpolació de Birkhoff* consisteix en trobar un polinomi $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ satisfent el sistema d'equacions

$$P[\alpha] = c_\alpha \quad \text{si } \alpha \in A \quad (1.4)$$

on les c_α , $\alpha \in A$, són dades reals donades. Cada node $\alpha \in A$ té associada l'equació $P[\alpha] = c_\alpha$, obtenint en total n equacions. Es diu que la configuració A és *regular* si per a qualsevol tria de les dades c_α , el sistema (1.4) té solució única $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. En cas contrari es diu que A és *singular*.

Escrivint els polinomis $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ en la forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!}$, el sistema (1.4) es redueix a resoldre el sistema lineal

$$V(A) \cdot a = c \quad (1.5)$$

on $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ és el vector d'incògnites, $c = (c_\alpha)_{\alpha \in A}$ és el vector de dades i $V(A)$ és la $n \times n$ matriu de coeficients

$$V(A) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{y^{-j}}{(-j)!} & \frac{y^{1-j}}{(1-j)!} & \cdots & \frac{y^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \end{array} \right)_{(y,j) \in A} \quad (1.6)$$

amb el conveni que per a tot nombre real y és $\frac{y^h}{h!} = 0$ si $h < 0$, i $\frac{y^h}{h!} = 1$ si $h = 0$. L'expressió (1.6) només dona una fila (fila corresponent al node $(y, j) \in A$) de la matriu $V(A)$, a l'igual que la fórmula $c = (c_\alpha)_{\alpha \in A}$. Les files de $V(A)$ i de c estan ordenades amb algun ordre sobre els nodes de A , com per exemple l'ordre lexicogràfic: $(y_1, j_1) < (y_2, j_2)$ si $y_1 < y_2$, o $y_1 = y_2$ i $j_1 < j_2$.

La matriu $V(A)$ s'anomena *matriu de Vandermonde* de A . Aquesta matriu també depèn de l'ordre escollit per als nodes de A , però l'única diferència entre dues matrius de Vandermonde de A obtingudes d'ordenar els nodes de forma diferent és una permutació entre les seves files. Així, quan parlem de $V(A)$ suposarem sempre que hem fixat prèviament l'ordre sobre els nodes de A . El seu determinant $D(A) = \det V(A)$ s'anomena *determinant de Vandermonde* de A .

De (1.5) s'obtenen els següents enuncisats equivalents: (i) A és regular, (ii) $D(A) \neq 0$, (iii) el polinomi nul $P = 0$ és l'únic polinomi $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ que s'anul·la sobre A .

A continuació donarem alguns conceptes amb la finalitat d'establir condicions necessàries o suficients per a la regularitat d'una configuració.

Lema 1.1. *Per a una configuració A de n nodes i longitud ℓ , les dues condicions següents són equivalents:*

$$(i) \quad M_A(j) \geq j + 1 \quad \text{si } j = 0, 1, \dots, n - 1$$

$$(ii) \quad M_A(j) \geq j + 1 \quad \text{si } j = 0, 1, \dots, \ell - 1$$

A més, si (i) o (ii) és certa, aleshores $\ell \leq n$.

Demostració. Suposem que (i) és certa. Com que $M_A(n - 1) \geq n > M_A(\ell - 2)$, és $n - 1 > \ell - 2$ i per tant $\ell \leq n$. Això implica que (ii) és certa. Suposem ara (ii). És complex que $n = M_A(\ell - 1) \geq \ell$. Si $0 \leq j \leq \ell - 1$, de (ii) es desprèn que $M_A(j) \geq j + 1$, i si $\ell \leq j \leq n - 1$ aleshores $M_A(j) = n \geq j + 1$. En definitiva, també es satisfà (i). \square

La condició (i) o (ii) del lema anterior es coneix amb el nom de *condició de Pólya* [44]. En cas de verificar-se, es diu que A és una configuració Pólya.

El següent resultat és degut a Schoenberg [51]. Per facilitar la referència s'inclou la seva demostració.

Teorema 1.2. *Tota configuració regular és una configuració Pólya.*

Demostració. Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que A és una configuració de n nodes que no satisfà la condició de Pólya i hem de veure que A és singular. Si $m_A(0) = 0$ aleshores ja estem, puix que el polinomi constant $P = 1$ s'anul·la sobre A i per tant A és singular. Suposem ara $m_A(0) \geq 1$ i considerem un nombre natural $j_0 \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ tal que $M_A(j_0) \leq j_0$. Aquest j_0 verifica $j_0 \geq M_A(j_0) \geq m_A(0) \geq 1$. Considerem també un polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{j_0} a_k \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{R}_{j_0}[x]$ no nul satisfent el sistema d'equacions

$$P^{(j)}(x) = 0 \quad \text{si } (x, j) \in A, j \leq j_0 \tag{1.7}$$

L'existència de tal polinomi és deguda a que el sistema (1.7), que està format per $M_A(j_0)$ equacions amb les $j_0 + 1$ incògnites a_k , es redueix a un sistema lineal

homogeni $V \cdot a = 0$, on a és el vector de les incògnites a_k i V és una matriu de coeficients amb menys files que columnes ($M_A(j_0)$ files i $j_0 + 1$ columnes). Aquest polinomi P verifica $\deg(P) \leq j_0 \leq n - 1$ i s'anul·la sobre tot A . En efecte, si $\alpha \in A$ és un node de derivació j , $j \geq j_0 + 1$, serà $P^{(j)} = 0$ i per tant $P[\alpha] = 0$. Concloem que A és singular i això completa la demostració. \square

Definició 1.3. Sigui A una configuració. Un node $\alpha = (x, j) \in A$ és *suportat* en A si existeixen dos nodes $(x_1, j_1) \in A$ i $(x_2, j_2) \in A$ tals que $x_1 < x < x_2$, $j_1 < j$ i $j_2 < j$. Observem que si α és suportat la seva derivació j és com a mínim 1.

El concepte de configuració conservativa, o de matriu d'incidència conservativa, ha tingut diversos significats ([3],[33],[53]), tots ells molt semblants. Direm que una configuració A és *quasi-conservativa* si tots els peus de A que són suportats tenen multiplicitat parell; o el que és el mateix, si A no té peus suportats de multiplicitat senar. La configuració A és *conservativa* si tots els peus de A de derivació no nul·la tenen multiplicitat parell. Òbviament, si A és conservativa, A és també quasi-conservativa. Com a exemple, a la figura 1.3 hi ha representades tres configuracions. Els nodes encerclats són els peus suportats. La primera (a) no és quasi-conservativa donat que el peu suportat té multiplicitat senar. La segona (b) és quasi-conservativa però no conservativa i la tercera (c) és conservativa.

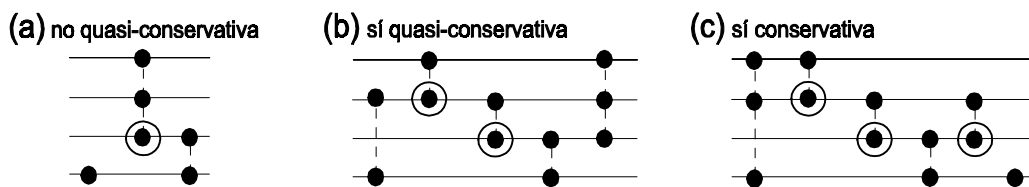


Figura 1.3

El següent teorema, degut a K. Atkinson i A. Sharma [2], dóna una condició suficient de regularitat. Altres demostracions d'aquest resultat es troben en ([52], [34],[33]).

Teorema 1.4. Si A és una configuració Pólya i quasi-conservativa aleshores A és regular. \square

Com a conseqüència, tota configuració Pólya i conservativa és regular.

Finalment, si A és una configuració de n nodes i m és un nombre natural no nul,

a la matriu de n files i m columnes

$$V_m(A) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{y^{-j}}{(-j)!} & \frac{y^{1-j}}{(1-j)!} & \cdots & \frac{y^{m-1-j}}{(m-1-j)!} \end{array} \right)_{(y,j) \in A} \quad (1.8)$$

amb el conveni usual $\frac{y^h}{h!} = 0$ si $h < 0$, $\frac{y^h}{h!} = 1$ si $h = 0$, l'anomenarem *matriu de Vandermonde de A amb m columnes*. L'expressió (1.8) només dóna la fila corresponent al node $(y, j) \in A$, havent d'ordenar les files de $V_m(A)$ segons un ordre predefinit sobre els nodes de A . Quan $m = n$ aquesta matriu coincideix amb la matriu de Vandermonde de A .

La matriu $V_m(A)$ és la matriu del sistema lineal que apareix quan s'intenta trobar un polinomi $P \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$ satisfent el sistema (1.4). Com abans, l'única diferència entre dues matrius de Vandermonde de A , amb m columnes, obtingudes d'ordenar els nodes de A de forma diferent, és una permutació de files. En particular el seu rang només depèn de A i de m (no depèn de l'ordre escollit).

Si A és una configuració i P és un polinomi que s'anul·la sobre A , qualsevol polinomi Q del tipus $Q = \lambda P$, on $\lambda \neq 0$ i real, també s'anul·la sobre A . El següent resultat es troba parcialment en ([9],[50]). Per a la seva versió completa veure [49].

Teorema 1.5. *Sigui A una configuració regular de n nodes. Aleshores, existeix un únic polinomi $P(x)$ de grau n i amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre A . L'espectre $Z(P)$ d'aquest polinomi P conté la configuració A i, a més a més, P ve donat per la fórmula*

$$P(x) = \frac{(-1)^n}{D(A)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{x^1}{1!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^n}{n!} \\ & & & V_{n+1}(A) & \end{array} \right|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

on tant les files de $D(A)$ com les files de $V_{n+1}(A)$ estan ordenades amb el mateix ordre sobre els nodes de A .

Demostració. La demostració s'inclou per facilitar la referència. Observem primer que l'espectre de tot polinomi P de grau n que s'anul·li sobre A ha de contenir la configuració A . En efecte, pel teorema 1.2 i el lema 1.1, la longitud ℓ de A és com a molt n , i per tant tots els nodes de A tenen derivació com a molt $n-1$. Com que P és de grau n , això implica $A \subseteq Z(P)$.

La unicitat del polinomi es dedueix de que si P i Q són dos polinomis de grau n amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$ i nuls sobre A , aleshores $P - Q$ té grau estrictament

menor que n i s'anul·la sobre A . Per ser A regular haurà de ser $P - Q = 0$ i per tant $P = Q$. Si veiem que el polinomi P definit per la fórmula (1.9) satisfà les hipòtesis de l'enunciat ja estarem. Amb tal finalitat, posem

$$A = \{(x_1, j_1), (x_2, j_2), \dots, (x_n, j_n)\}, \text{ amb } (x_1, j_1) < (x_2, j_2) < \dots < (x_n, j_n).$$

L'expressió (1.9) es rescriu en la forma

$$P(x) = \frac{(-1)^n}{D(A)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{x^1}{1!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^n}{n!} \\ \frac{x_1^{-j_1}}{(-j_1)!} & \frac{x_1^{1-j_1}}{(1-j_1)!} & \dots & \frac{x_1^{n-1-j_1}}{(n-1-j_1)!} & \frac{x_1^{n-j_1}}{(n-j_1)!} \\ \frac{x_2^{-j_2}}{(-j_2)!} & \frac{x_2^{1-j_2}}{(1-j_2)!} & \dots & \frac{x_2^{n-1-j_2}}{(n-1-j_2)!} & \frac{x_2^{n-j_2}}{(n-j_2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_n^{-j_n}}{(-j_n)!} & \frac{x_n^{1-j_n}}{(1-j_n)!} & \dots & \frac{x_n^{n-1-j_n}}{(n-1-j_n)!} & \frac{x_n^{n-j_n}}{(n-j_n)!} \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

El desenvolupament del determinant de (1.10) per la primera fila estableix que $\deg(P) \leq n$ i que el coeficient principal de P és

$$\frac{(-1)^n (-1)^n D(A)}{D(A) n!} = \frac{(-1)^{2n}}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Que P s'anul·la sobre A prové de derivar l'expressió (1.10). En efecte, si $i = 1, 2, \dots, n$, la derivada $P^{(j_i)}(x_i)$ s'obté de canviar la primera fila del determinant de (1.10) per la fila $\left(\frac{x_i^{-j_i}}{(-j_i)!}, \frac{x_i^{1-j_i}}{(1-j_i)!}, \dots, \frac{x_i^{n-j_i}}{(n-j_i)!} \right)$, obtenint així dues files iguals. Per tant $P[(x_i, j_i)] = 0$. \square

1.3 Funcions nivell

La fusió de dues files d'una matriu d'incidència fou introduïda per S. Karlin i J.M. Karon en [23]; més tard, G.G. Lorentz en [31] estudia la fusió de vàries files formulada a partir de funcions nivell. Vàries aplicacions de les fusions a la interpolació de Birkhoff, tals com la regularitat o el desenvolupament de Taylor del determinant de Vandermonde, poden trobar-se en ([23],[31],[35],[33]). No obstant, a part d'ésser una eina útil per formular les fusions, les funcions nivell també apareixen en altres aspectes de la interpolació de Birkhoff, com per exemple en les extensions de Rolle ([32],[33]).

En el que segueix es consideren funcions $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *finites*, en el sentit que $m(j)$ val zero per a j prou gran. La funció “majúscula” $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ està definida a

partir de les sumes parcials, $M(j) = \sum_{j'=0}^j m(j')$, $j \geq 0$. Observem que M i m es determinen mútuament, i que la condició de finitud sobre m és equivalent a que M estacioni (i.e., que $M(j)$ sigui constant per a j prou gran). Si $j = -1$ posarem sempre $m(-1) = M(-1) = 0$. Com a exemple, les funcions $m = m_A$ i $M = M_A$ d'una configuració A són funcions d'aquest tipus.

Per a una funció $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ finita, posem

$$\rho(m) = \sum_{j=0}^{+\infty} (m(j) - 1)_+$$

on $x_+ = x$ si $x \geq 0$, i $x_+ = 0$ si $x < 0$. Notem que $\rho(m)$ és finit i que $\rho(m) = 0$ si i només si $m \leq 1$.

Suposem ara $\rho(m) \geq 1$. Considerem el nombre natural $j_0 \in \mathbb{N}$ més petit possible satisfent $m(j_0) \geq 2$, i sigui $p \geq 1$ el nombre natural que satisfà les condicions

$$\begin{aligned} m(j_0) \geq 2, m(j_0 + 1) \geq 1, m(j_0 + 2) \geq 1, \dots \\ \dots, m(j_0 + p - 1) \geq 1, m(j_0 + p) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Considerem també la funció $\overline{m} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida per

$$\overline{m}(j) = \begin{cases} m(j), & \text{si } j \neq j_0, j_0 + p \\ m(j_0) - 1, & \text{si } j = j_0 \\ 1, & \text{si } j = j_0 + p \end{cases}, \quad j \in \mathbb{N} \quad (1.12)$$

Per a \overline{m} tenim $\rho(\overline{m}) = \rho(m) - 1$.

Després d'aplicar la iteració anterior $\rho(m)$ vegades, $m \rightarrow \overline{m} \rightarrow \overline{\overline{m}} \rightarrow \dots$, arribarem a una funció m^* que satisfà $\rho(m^*) = \rho(m) - \rho(m) = 0$, o sigui, m^* només pren valors 0 o 1. Donat que a cada pas $m \rightarrow \overline{m}$ es manté la suma total $\sum_{j=0}^{+\infty} m(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \overline{m}(j)$, es té

$$\sum_{j=0}^{+\infty} m(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} m^*(j) = \#\{j \mid m^*(j) = 1\} \quad (1.13)$$

És a dir, el nombre final de uns que pren m^* és la suma $\sum_{j=0}^{+\infty} m(j)$, la qual coincideix amb $M(j)$ per a j prou gran.

Com a exemple, a continuació calculem m^* per a certa m . Les funcions $m, \overline{m}, \overline{\overline{m}}, \dots$ que es van obtenint les escrivim com a matrius-fila (i.e, per exemple per a m posem

$m = [m(0), m(1), \dots]$:

$$\begin{aligned}
m &= [2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & \mathbf{0}] \\
\overline{m} &= [1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & \mathbf{0}] \\
\overline{\overline{m}} &= [1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & \mathbf{0}] \\
\overline{\overline{\overline{m}}} &= [1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & \mathbf{0}] \\
\overline{\overline{\overline{\overline{m}}}} &= [1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & \mathbf{0}] \\
\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{m}}}}} &= [1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & \mathbf{0}] = m^*
\end{aligned}$$

Notem que tant en la construcció de \overline{m} com en els raonaments posteriors no hem utilitzat que j_0 sigui el mínim possible satisfent $m(j_0) \geq 2$. Podem demanar-nos si s'acaba obtenint la mateixa funció m^* quan a cada pas $m \rightarrow \overline{m}$ només demanem que j_0 verifiqui $m(j_0) \geq 2$. La resposta serà afirmativa, i totes aquestes funcions m^* coincidiran amb una funció anomenada *funció nivell* de m .

1.3.1 Funcions nivell. Propietats.

En aquest apartat, seguint ([31],[33]), donem la definició de funció nivell i estudiem les seves propietats.

Definició 1.6. Sigui $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció finita. La *funció nivell* de m es denota per m° i només pren valors 0 o 1. Es defineix recurrentment per: $m^\circ(0) = 1$ si i només si $m(0) \geq 1$, i si hem definit els valors $m^\circ(j')$, $j' = 0, 1, \dots, j-1$, i conseqüentment també $M^\circ(j-1) = \sum_{j'=0}^{j-1} m^\circ(j')$, aleshores

$$m^\circ(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } M(j) - M^\circ(j-1) \geq 1 \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases} \quad (1.14)$$

Com és usual posarem $m^\circ(-1) = M^\circ(-1) = 0$.

Observem que el valor $m^\circ(j)$ només depèn dels valors $m(j')$ amb $0 \leq j' \leq j$. Per inducció en $j \in \mathbb{N}$ és fàcil veure que $M^\circ(j) \leq M(j)$ si $j \geq 0$, és a dir,

$$M^\circ \leq M \quad (1.15)$$

Com a conseqüència podem substituir el terme “en cas contrari” de (1.14) per “ $M(j) - M^\circ(j-1) = 0$ ”, i si $m(j) \geq 1$ aleshores $m^\circ(j) = 1$. De (1.15) també es desprèn que m° és finita (M estaciona $\Rightarrow M^\circ$ estaciona). Una altra propietat

senzilla de veure a partir de la definició és que si inicialment m només pren valors 0 o 1 aleshores $m^\circ = m$.

Proposició 1.7. *Sigui $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció finita. Suposem que $j_0 \in \mathbb{N}$ és tal que $m(j_0) \geq 2$ (no necessàriament el mínim possible satisfent aquesta condició). Llavors,*

- (i) *Si $\tilde{m} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ és la funció definida per $\tilde{m}(j_0) = m(j_0) - 1$, $\tilde{m}(j_0 + 1) = m(j_0) + 1$, i $\tilde{m}(j) = m(j)$ si $j \neq j_0, j_0 + 1$, aleshores $\tilde{m}^\circ = m^\circ$.*
- (ii) *Si $p \geq 1$ està definit per les condicions de (1.11) i $\overline{m} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ està definida exactament com en (1.12), aleshores $\overline{m}^\circ = m^\circ$.*

Demostració. (i) Procedirem per inducció en $j \geq 0$ veient que $\tilde{m}^\circ(j) = m^\circ(j)$. El cas $j = 0$ trivialment es verifica quan $j_0 \neq 0$ donat que $\tilde{m}(0) = m(0)$ i per tant $\tilde{m}^\circ(0) = m^\circ(0)$. Quan $j_0 = 0$ aleshores el cas $j = 0$ se segueix del fet d'ésser $m(j_0) \geq 2$. Suposem ara que $\tilde{m}^\circ(j') = m^\circ(j')$ per a $j' = 0, 1, \dots, j - 1$, i hem de veure que $\tilde{m}^\circ(j) = m^\circ(j)$. Observem que de la hipòtesi d'inducció es desprèn que $\tilde{M}^\circ(j - 1) = M^\circ(j - 1)$. Distingirem, igual que en el cas $j = 0$, dos casos: (1) $j \neq j_0$, per al qual és $\tilde{M}(j) - \tilde{M}^\circ(j - 1) = \tilde{M}(j) - M^\circ(j - 1) = M(j) - M^\circ(j - 1)$ i per tant $\tilde{m}^\circ(j) = m^\circ(j)$, i (2) $j = j_0$, d'on directament $\tilde{m}^\circ(j) = m^\circ(j) = 1$ donat que per a aquest valor de j es té $\tilde{m}(j) \geq 1$ i $m(j) \geq 1$. Pel principi d'inducció això completa la demostració.

(ii) S'obté immediatament aplicant p cops l'apartat (i). □

Notem que l'apartat (ii) de la proposició anterior implica que després de $\rho(m)$ iteracions, $m \rightarrow \overline{m} \rightarrow \overline{\overline{m}} \rightarrow \dots \rightarrow m^*$, on inclús a cada iteració $m \rightarrow \overline{m}$ no fem necessari que j_0 sigui el mínim possible satisfent $m(j_0) \geq 2$, arribarem a la funció nivell m° . En efecte, de la proposició anterior i d'ésser $m^* \leq 1$ resulta $m^\circ = \overline{m}^\circ = (\overline{\overline{m}})^\circ = \dots = (m^*)^\circ = m^*$.

A continuació estudiem les propietats més elementals de les funcions nivell. Per a una funció $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ finita considerem els nombres $\mu(j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, definits recurrentment per

$$\mu(0) = m(0), \quad \mu(j) = (\mu(j - 1) - 1)_+ + m(j) \quad \text{si } j \geq 1 \quad (1.16)$$

Dit d'una altra manera, si $j \geq 0$ aleshores

$$\mu(j) = (\dots((m(0) - 1)_+ + m(1) - 1)_+ \dots + m(j - 1) - 1)_+ + m(j) \quad (1.17)$$

Es compleix que

$$\mu(j) = M(j) - M^o(j-1), \quad j \geq 0, \quad (1.18)$$

i en particular que $\mu(j) \geq 1$ si i només si $m^o(j) = 1$. La igualtat (1.18) es demostra per inducció en j . En efecte, quan $j = 0$ és trivialment certa. Suposem que la igualtat és certa per a $j-1$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \mu(j) &= (\mu(j-1) - 1)_+ + m(j) = (M(j-1) - M^o(j-2) - 1)_+ + m(j) \\ &= M(j-1) - M^o(j-2) - m^o(j-1) + m(j) = M(j) - M^o(j-1) \end{aligned}$$

i ja hem acabat. Com a conseqüència,

Proposició 1.8. *Si $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció finita. Llavors,*

(i) *Si definim recurrentment $v(j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, per*

$$v(0) = 0, \quad v(j) = (v(j-1) + m(j-1) - 1)_+ \quad \text{si } j \geq 1, \quad (1.19)$$

aleshores $v(j) = M(j-1) - M^o(j-1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$

(ii) *Si existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que $M(n-1) = M^o(n-1)$ i considerem la funció $\tilde{m} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ donada per $\tilde{m}(j) = m(n+j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, llavors $\tilde{m}^o(j) = m^o(n+j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. En particular els valors $m^o(j')$, $j' \geq n$, no depenen dels valors $m(0), m(1), \dots, m(n-1)$.*

(iii) *Si $m_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ és una altra funció finita amb $m \leq m_1$ aleshores $m^o \leq m_1^o$.*

Demostració. Per a $j \geq 0$ siguin $\mu(j)$, $\tilde{\mu}(j)$ i $\mu_1(j)$ els nombres definits a (1.16) per a les funcions de l'enunciat m , \tilde{m} i m_1 respectivament.

Per provar (i) posem $v'(j) = \mu(j) - m(j)$, $j \geq 0$. Quan $j = 0$ es té $v'(0) = \mu(0) - m(0) = 0$, i si $j \geq 1$

$$\begin{aligned} v'(j) &= \mu(j) - m(j) = (\mu(j-1) - 1)_+ - m(j) = (\mu(j-1) - m(j-1) + m(j-1) - 1)_+ \\ &= (v'(j-1) + m(j-1) - 1)_+ . \end{aligned}$$

Així que els $v'(j)$ i els $v(j)$ satisfan la mateixa fórmula recurrent i per tant són iguals, resultant $v(j) = v'(j) = \mu(j) - m(j) = M(j-1) - M^o(j-1)$.

(ii) Serà suficient veure que $\tilde{\mu}(j) = \mu(n+j)$ si $j \geq 0$, però aquestes igualtats són trivialment certes procedint per inducció en j . En efecte, si $j = 0$ és $\tilde{\mu}(0) = \tilde{m}(0) = m(n) = M(n) - M^o(n-1) = \mu(n)$. Suposem $\tilde{\mu}(j-1) = \mu(n+j-1)$. Aleshores, $\tilde{\mu}(j) = (\tilde{\mu}(j-1) - 1)_+ + \tilde{m}(j) = (\mu(n+j-1) - 1)_+ + m(n+j) = \mu(n+j)$.

Per demostrar (iii) utilitzarem (1.17), d'on es desprèn que $\mu(j) \leq \mu_1(j)$ per a tot $j \geq 0$. \square

La hipòtesi $m \leq m_1$ en l'apartat (iii) és més forta que la hipòtesi $M \leq M_1$. Sota aquesta última veurem més endavant que $M^o \leq M_1^o$.

Lema 1.9. *Siguin $m_1, m_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dues funcions finites i $g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ una funció a valors 0 o 1 amb $G \leq M_1 + M_2$. Aleshores $G \leq M_1^o + M_2$.*

Demostració. Provarem que $G(j) \leq M_1^o(j) + M_2(j)$ per inducció en $j \in \mathbb{N}$. Si $j = 0$ cal veure $g(0) \leq m_1^o(0) + m_2(0)$. Això només pot ser fals quan $g(0) = 1$ i $m_1^o(0) = m_2(0) = 0$. En aquest cas, de $m_1^o(0) = 0$ obtenim $m_1(0) = 0$, arribant a una contradicció amb $g(0) \leq m_1(0) + m_2(0)$.

Sigui ara $j \geq 1$ i suposem $G(j-1) \leq M_1^o(j-1) + M_2(j-1)$. Hem de veure que $G(j) \leq M_1^o(j) + M_2(j)$. Degut a la hipòtesi d'inducció, la desigualtat anterior només pot ser falsa si $g(j) = 1$ i $m_1^o(j) = m_2(j) = 0$. En aquest cas però, utilitzant que $m_1^o(j) = 0$, i consegüentment també $M_1(j) = M_1^o(j-1)$, tindrem $G(j) \leq M_1(j) + M_2(j) = M_1^o(j-1) + M_2(j) \leq M_1^o(j) + M_2(j)$. \square

Teorema 1.10. *Siguin $m, m_1, m_2, m_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funcions finites. Es verifiquen:*

- (i) Si $g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ i $G \leq M$ llavors $G \leq M^o$.
- (ii) Si $M_1 \leq M_2$ aleshores $M_1^o \leq M_2^o$.
- (iii) $(m_1 + m_2)^o = (m_1^o + m_2)^o = (m_1^o + m_2^o)^o$.
- (iv) $(m_1 + m_2 + m_3)^o = ((m_1 + m_2)^o + m_3)^o = (m_1 + (m_2 + m_3)^o)^o$.

Demostració. (i) S'obté aplicant el lema anterior amb $m_2 = 0$. (ii) Resulta de que $M_1^o \leq M_1 \leq M_2$ i d'aplicar l'apartat (i) a les funcions $g = m_1^o$, $m = m_2$.

(iii) Per a qualssevol $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funcions finites denotem $(A + B)^o$ la funció majúscula de $(a + b)^o$. És a dir, $(A + B)^o(j) = \sum_{j'=0}^j (a + b)^o(j')$. La segona igualtat de (iii) s'obté aplicant dos cops la primera. Per tant serà suficient veure la igualtat $(m_1 + m_2)^o = (m_1^o + m_2)^o$, o el que és el mateix, $(M_1 + M_2)^o = (M_1^o + M_2)^o$. Tenim que $M_1^o + M_2 \leq M_1 + M_2$ i per tant $(M_1^o + M_2)^o \leq (M_1 + M_2)^o$. L'altra desigualtat prové de que $(M_1 + M_2)^o \leq M_1 + M_2$. D'aquí que, pel lema 1.9, $(M_1 + M_2)^o \leq M_1^o + M_2$, i aplicant ara l'apartat (i) d'aquest teorema resulta $(M_1 + M_2)^o \leq (M_1^o + M_2)^o$.

(iv) Resulta de $(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2) + m_3$ i de l'apartat (iii) que acabem de veure. \square

Una condició important és la que es dóna a la següent definició.

Definició 1.11. Siguin $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció i $n \in \mathbb{N}$. Es diu que m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si

$$M(n-1) - M(j-1) = \sum_{j'=j}^{n-1} m(j') \leq n-j \quad \text{per a } j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.20)$$

i $m(j) = 0$ per a $j \geq n$.

Observem que quan $j = 0$ la desigualtat (1.20) es converteix en $M(n-1) \leq n$. Per altra banda, si A és una configuració de n nodes, la funció $m = m_A$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si, i només si, A és una configuració Pólya. En efecte, tant si m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n com si A és una configuració Pólya hem de tenir $M(n-1) = n$, ja que el nombre de nodes de A és n , i per tant les desigualtats de (1.20) i les desigualtats $M(j') \geq j' + 1$, $j' = 0, 1, \dots, n-1$, passen a ser les mateixes simplement fent el canvi $j' = j - 1$.

Per a una funció m qualsevol (finita) sempre hi ha algun n tal que m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n . Això prové de que si $m(j) = 0$ per a $j \geq n^*$, és immediat veure que m satisfà la condició de Pólya per sobre amb $n = \max\{n^* - 1 + M(n^* - 1), n^*\}$. Altres propietats que es deriven de (1.20) són: (i) si m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n i $n' \geq n$, llavors m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n' , i (ii) si $m_1 \leq m_2$ i m_2 satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , m_1 també satisfà la condició de Pólya per sobre amb n .

Teorema 1.12. Siguin $m, m_1, m_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funcions finites i $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Si m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , aleshores $M^o(n-1) = M(n-1)$ i $m^o(j) = 0$ per a $j \geq n$.
- (ii) La funció $m_1 + m_2$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si i només si $m_1 + m_2$ la satisfà.

Demostració. (i) Per l'apartat (ii) de la proposició 1.8 serà suficient veure que $M^o(n-1) = M(n-1)$. Considerem la funció $g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ donada per $g(j) = 1$

si $n - M(n - 1) \leq j < n$, i $g(j) = 0$ en cas contrari. La funció G és

$$G(j) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq j < n - M(n - 1) \\ j + 1 - n + M(n - 1), & \text{si } n - M(n - 1) \leq j < n \\ M(n - 1), & \text{si } j \geq n \end{cases} \quad (1.21)$$

De (1.20) i (1.21) s'obté fàcilment que $G \leq M$, i aplicant l'apartat (i) del teorema 1.10, $G \leq M^\circ$. En particular $M^\circ(n - 1) \geq G(n - 1) = M(n - 1)$ i per tant $M^\circ(n - 1) = M(n - 1)$.

(ii) Per provar aquest apartat necessitem del següent resultat.

Lema 1.13. *Per a qualsevol funció finita $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i qualsevol nombre natural n , les dues condicions següents són equivalents:*

(a) m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n

(b) m° satisfà la condició de Pólya per sobre amb n

Demostració. (a) \Rightarrow (b) Si m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , aplicant l'apartat (i) del teorema 1.12 tindrem $m^\circ(j) = 0$ per a $j \geq n$. D'altra banda, com que $m^\circ \leq 1$, totes les desigualtats de (1.20) són trivialment satisfetes per a la funció $m = m^\circ$. Per tant, m° també satisfà la condició de Pólya per sobre amb n .

(b) \Rightarrow (a) Suposem que m° satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , i en particular que $m^\circ(j) = 0$ si $j \geq n$. Això implica que $m(j) = 0$ per a $j \geq n$. Considerem ara un $n' \geq n$ de manera que m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n' . Per l'apartat (i) del teorema 1.12 tindrem $M(n - 1) = M(n' - 1) = M^\circ(n' - 1) = M^\circ(n - 1)$ i per tant, si $j = 0, 1, \dots, n - 1$, $M(n - 1) - M(j - 1) = M^\circ(n - 1) - M(j - 1) \leq M^\circ(n - 1) - M^\circ(j - 1) \leq n - j$. \square

Aplicant el lema anterior, la funció $m_1 + m_2$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si i només si la funció $(m_1 + m_2)^\circ = (m_1^\circ + m_2)^\circ$ la satisfà, que torna a ser equivalent a que $m_1^\circ + m_2$ la satisfaci. Hem acabat la demostració del teorema. \square

La igualtat (1.13) és una conseqüència del teorema anterior, ja que fixant un n de forma que la funció m satisfaci la condició de Pólya per sobre amb n , resulta $M^\circ(n - 1) = M(n - 1)$ i $m^\circ(j) = m(j) = 0$ per a $j \geq n$, i en particular $\sum_{j=0}^{+\infty} m(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} m^\circ(j)$.

Si $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ és una funció finita, es defineix el *coeficient de col·lisió de m* , $\alpha[m]$,

per

$$\alpha[m] = \sum_{j=0}^{\infty} [M(j) - M^o(j)] \quad (1.22)$$

La suma anterior és finita degut a que si $n \in \mathbb{N}$ és tal que m satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , del teorema 1.12, apartat (i), es dedueix que $\alpha[m] = \sum_{j=0}^{n-1} [M(j) - M^o(j)]$. Notem que $\alpha[m] \geq 0$, i $\alpha[m] = 0 \Leftrightarrow M = M^o \Leftrightarrow m = m^o \Leftrightarrow m \leq 1$. Altres propietats interessants del coeficient de col·lisió es troben en [33].

Si A és una configuració posem $m_A^o = (m_A)^o$ i $M_A^o = (M_A)^o$. Una aplicació del teorema 1.12 és el següent corol·lari.

Corol·lari 1.14. *Sigui A una configuració de n nodes. Són equivalents:*

(i) *A és una configuració Pólya.*

(ii) *$m_A^o(j) = 1$ per a $0 \leq j \leq n - 1$, i $m_A^o(j) = 0$ per a $j \geq n$.*

Demostració. Si A és una configuració Pólya, la funció $m = m_A$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n . Aplicant ara l'apartat (i) del teorema 1.12 obtenim que $m_A^o(j) = 0$ per a $j \geq n$ i $M_A^o(n - 1) = M_A(n - 1) = n$. Això últim implica $m_A^o(j) = 1$ per a $j \leq n - 1$, ja que $m_A^o \leq 1$. Tenim doncs (ii).

Que (ii) implica (i) és trivial donat que $M_A \geq M_A^o$. □

1.3.2 Funcions conservatives

Definició 1.15. Siguin k i p dos nombres naturals amb $p \geq 1$. A la funció $m_{(k,p)} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definida per $m_{(k,p)}(j) = 1$ si $k \leq j \leq k + p - 1$, i $m_{(k,p)}(j) = 0$ en cas contrari, l'anomenarem *seqüència de tipus (k, p)* . Direm que la seqüència $m_{(k,p)}$ és *conservativa* si $k = 0$, o bé $k \geq 1$ i p és parell.

Dues seqüències m_1 i m_2 són *disjunt* si la condició $m_1(j_1) = m_2(j_2) = 1$ implica $|j_1 - j_2| \geq 1$, on $|x|$ denota el valor absolut de x . És a dir, m_1 i m_2 són disjunt si i només si tenen suport disjunt, o equivalentment, $m_1 + m_2 \leq 1$. Si $m_1 = m_{(k_1,p_1)}$ i $m_2 = m_{(k_2,p_2)}$, són disjunt si i només si $k_1 + p_1 \leq k_2$, o $k_2 + p_2 \leq k_1$.

Dues seqüències m_1, m_2 són *completament disjunt* si la condició $m_1(j_1) = m_2(j_2) = 1$ implica $|j_1 - j_2| \geq 2$. Observem que les seqüències $m_1 = m_{(k_1,p_1)}$ i $m_2 = m_{(k_2,p_2)}$ són completament disjunt si i només si $k_1 + p_1 + 1 \leq k_2$, o $k_2 + p_2 + 1 \leq k_1$.

Si $m : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ és una funció finita a valors 0 o 1, m es descompon de manera única com a suma de seqüències completament disjundes dos a dos. Per exemple, representant les funcions com a matrius-fila,

$$[1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0|0] = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|0] + [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0|0] \\ + [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|0] .$$

A aquestes seqüències les anomenarem *seqüències de m* . Direm que una funció $m : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ és *conservativa* si totes les seves seqüències són conservatives.

El resultat més important d'aquesta secció és el següent teorema.

Teorema 1.16. *Suposem que $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, són r funcions a valors 0 o 1. Sigui $m_{(k,p)}$ una seqüència de la funció nivell $(\sum_{i=1}^r m_i)^o$, amb p senar. Llavors hi ha d'haver alguna seqüència d'alguna funció m_i , $1, 2, \dots, r$, tal que el tipus d'aquesta seqüència és de la forma (k^*, p^*) amb p^* senar i $k^* \geq k$.*

Abans de provar el teorema establirem els següents resultats:

Lema 1.17. *Siguin $m_1 = m_{(k_1, p_1)}$ i $m_2 = m_{(k_2, p_2)}$ dues seqüències. Aleshores*

$$(m_1 + m_2)^o = \begin{cases} m_1 + m_2, & \text{si } m_1, m_2 \text{ són completament disjundes} \\ m_{(\min\{k_1, k_2\}, p_1 + p_2)}, & \text{si } m_1, m_2 \text{ no són completament disjundes} \end{cases}$$

Demostració. Si m_1 i m_2 són completament disjundes també són disjundes, i, per tant, $m_1 + m_2 \leq 1$ i $(m_1 + m_2)^o = m_1 + m_2$. Suposem ara que m_1 i m_2 no són completament disjundes. En aquest cas l'expressió de la seva suma $m_1 + m_2$ escrita com a matriu-fila és

$$m_1 + m_2 = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_a, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b-a}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{c-b}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{d-c}, 0, 0, 0, \dots] \quad (1.23)$$

on $a = \min\{k_1, k_2\}$, $b = \max\{k_1, k_2\}$, $c = \min\{k_1 + p_1, k_2 + p_2\}$, $d = \max\{k_1 + p_1, k_2 + p_2\}$. Utilitzant ara la successió de passos $m_1 + m_2 \rightarrow \overline{m_1 + m_2} \rightarrow \overline{\overline{m_1 + m_2}} \rightarrow \dots \rightarrow (m_1 + m_2)^* = (m_1 + m_2)^o$, al final arribarem a que els $c - b$ dosos de (1.23) s'han transformat en uns, i que han aparegut $c - b$ uns a continuació de l'últim 1 que apareix en (1.23). És a dir,

$$(m_1 + m_2)^o = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_a, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b-a}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{c-b}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{d-c}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{c-b}, 0, 0, 0, \dots] .$$

Així que $(m_1 + m_2)^\circ$ és la seqüència de tipus (k, p) , on $k = a = \min\{k_1, k_2\}$ i $p = (b-a) + (c-b) + (d-c) + (c-b) = d+c-(a+b) = k_1+p_1+k_2+p_2-(k_1+k_2) = p_1+p_2$, quedant demostrat el lema. \square

Lema 1.18. *Suposem que $r \geq 1$ és un nombre natural i que m_1, m_2, \dots, m_r són r seqüències de tipus respectius $(k_1, p_1), (k_2, p_2), \dots, (k_r, p_r)$. Sigui $m_{(k,p)}$ una seqüència de la funció nivell $(\sum_{i=1}^r m_i)^\circ$, amb p senar. Llavors hi ha d'haver alguna seqüència m_i , $i = 1, 2, \dots, r$, tal que el seu tipus (k_i, p_i) verifica (i) p_i és senar, i (ii) $k_i \geq k$.*

Demostració. Per inducció en r . Si $r = 1$ tindrem $(\sum_{i=1}^r m_i)^\circ = m_1 = m_{(k_1, p_1)}$, que implica $m_{(k_1, p_1)} = m_{(k,p)}$ i per tant $(k_1, p_1) = (k, p)$.

Suposem $r \geq 2$ i que l'enunciat és vàlid per a $r - 1$ seqüències. Hem de veure que també ho és per a r seqüències. En efecte, si totes les seqüències m_i , $i = 1, 2, \dots, r$, són completament disjunctes dos a dos tindrem $\sum_{i=1}^r m_i \leq 1$ i $(\sum_{i=1}^r m_i)^\circ = \sum_{i=1}^r m_i$. D'aquí que les seqüències m_i , $i = 1, 2, \dots, r$, són les seqüències de la funció $(\sum_{i=1}^r m_i)^\circ$ i, conseqüentment, hi ha d'haver algun i amb $m_{(k,p)} = m_{(k_i, p_i)}$.

Suposem ara que hi ha com a mínim dues seqüències de les m_i , $i = 1, 2, \dots, r$, que no són completament disjunctes. Sense pèrdua de generalitat, reordenant les m_i si cal, podem suposar que m_{r-1} i m_r no són completament disjunctes. En virtut del teorema 1.10 (iii) i del lema 1.17 resulta

$$\left(\sum_{i=1}^r m_i\right)^\circ = \left(\sum_{i=1}^{r-2} m_i + (m_{r-1} + m_r)^\circ\right)^\circ = \left(\sum_{i=1}^{r-2} m_i + m'\right)^\circ$$

on m' és la seqüència de tipus $(\min\{k_{r-1}, k_r\}, p_{r-1} + p_r)$. Podem aplicar la hipòtesi d'inducció a les $r - 1$ seqüències $m_1, m_2, \dots, m_{r-2}, m'$, obtenint que passa alguna de les dues possibilitats següents: (i) hi ha un $i = 1, 2, \dots, r - 2$ amb p_i senar i amb $k_i \geq k$, i per tant en aquest cas ja hem acabat, o (ii) $p_{r-1} + p_r$ és senar i $k \leq \min\{k_{r-1}, k_r\}$. En aquest cas també hem acabat donat que p_{r-1} o bé p_r ha de ser senar. \square

Demostració del teorema 1.16. Per demostrar el teorema només cal descompondre cada m_i en suma de les seves seqüències i després aplicar el lema 1.18. \square

Finalment, provarem un resultat que és conseqüència del teorema anterior i que farem servir més endavant.

Corol·lari 1.19. Si $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, són r funcions conservatives aleshores $(\sum_{i=1}^r m_i)^o$ també és una funció conservativa.

Demostració. Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix almenys una seqüència de la funció $(\sum_{i=1}^r m_i)^o$, diguem $m_{(k,p)}$, que no és conservativa. És a dir, $k \geq 1$ i p és senar. Pel teorema anterior existirà alguna seqüència d'alguna funció m_i tal que el tipus d'aquesta seqüència és de la forma (k^*, p^*) amb p^* senar i $k^* \geq k \geq 1$. Això contradiu el fet que m_i és conservativa, i per tant ja hem acabat. \square

1.4 Una conseqüència del Teorema de Rouché

L'objectiu d'aquest apartat és veure com es relaciona l'espectre d'un polinomi amb l'espectre d'un dels seus pertorbats. El resultat fonamental que utilitzarem és el clàssic *Teorema de Rouché* ([46],[8]). Per facilitar la lectura l'enunciem a continuació.

Teorema 1.20. Siguin Ω un obert del pla complex i $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dues funcions analítiques tals que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \partial D(a, r)$, on el disc $D(a, r)$ és tal que la seva adherència està continguda en Ω . Aleshores,

$$\sum_{\substack{z \in D(a, r) \\ g(z)=0}} \text{mult}(g, z) = \sum_{\substack{z \in D(a, r) \\ f(z)=0}} \text{mult}(f, z)$$

on per a una funció analítica h , $\text{mult}(h, z)$ denota la multiplicitat usual de h en z . \square

Una conseqüència ben coneguda del Teorema de Rouché és que els zeros d'un polinomi són funcions contínues dels seus coeficients ([7],[37],[42]). Aquest resultat és un cas especial del teorema de Hurwitz [21] i està contingut en el següent teorema, que per facilitar la referència s'inclou la demostració.

Teorema 1.21. Sigui $f(z) = \sum_{s=0}^n a_s \frac{z^s}{s!}$ un polinomi a coeficients complexos amb $a_n \neq 0$ i siguin z_1, z_2, \dots, z_k les seves arrels diferents dos a dos. Llavors, per a tot nombre real $\varepsilon > 0$, amb $\varepsilon \leq \min_{i \neq j} \{|z_i - z_j|/2\}$ si $k \geq 2$, existeix un $\delta > 0$ de manera que si $\tilde{f}(z) = \sum_{s=0}^n \tilde{a}_s \frac{z^s}{s!}$ és un polinomi de grau n amb $|\tilde{a}_s - a_s| < \delta$, $s = 0, 1, \dots, n$, aleshores el nombre d'arrels, comptant multiplicitats, de \tilde{f} en cada

disc $D(z_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, k$, és exactament $\text{mult}(f, z_i)$. En particular, les n arrels complexes de f es troben en $\bigcup_{i=1}^k D(z_i, \varepsilon)$.

Demostració. Si ε és com en l'enunciat, f no pot tenir cap arrel en $\partial D(z_i, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, k$. Considerem els nombres

$$r = \min_{1 \leq i \leq k} \{ \min \{ |f(z)| : z \in \partial D(z_i, \varepsilon) \} \}$$

$$h = \max_{1 \leq i \leq k} \{ \max \{ |z| : z \in \partial D(z_i, \varepsilon) \} \}$$

i prenem $\delta = r / (\sum_{s=0}^n \frac{h^s}{s!})$. Sigui $\tilde{f}(z) = \sum_{s=0}^n \tilde{a}_s \frac{z^s}{s!}$ com en l'enunciat. Si $z \in \partial D(z_i, \varepsilon)$ tindrem

$$|\tilde{f}(z) - f(z)| \leq \max_{0 \leq s \leq n} \{ |\tilde{a}_s - a_s| \} \sum_{s=0}^n \frac{h^s}{s!} < \delta \sum_{s=0}^n \frac{h^s}{s!} = r \leq |f(z)|.$$

Pel Teorema de Rouché \tilde{f} té exactament $\text{mult}(f, z_i)$ arrels en $D(z_i, \varepsilon)$ comptant multiplicitats. El polinomi \tilde{f} no pot tenir més arrels donat que té grau n i ja n'hem trobat $\text{mult}(f, z_1) + \dots + \text{mult}(f, z_k) = n$. Això completa la demostració. \square

Una conseqüència del teorema anterior és el següent corol·lari.

Corol·lari 1.22. *Sigui $f(x) = \sum_{s=0}^n a_s \frac{x^s}{s!}$ un polinomi a coeficients reals amb $a_n \neq 0$ i siguin x_1, x_2, \dots, x_m , $m \leq n$, les seves arrels reals diferents dos a dos. Existeix un $\varepsilon_0 > 0$, amb $\varepsilon_0 < \min_{i \neq j} \{ |x_i - x_j| / 2 \}$ si $m \geq 2$, tal que per a tot nombre real ε satisfent $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existeix un $\delta > 0$ de manera que si $\tilde{f}(x) = \sum_{s=0}^n \tilde{a}_s \frac{x^s}{s!}$ és un polinomi de grau n a coeficients reals amb $|\tilde{a}_s - a_s| < \delta$, $s = 0, 1, \dots, n$, aleshores es verifiquen:*

- (i) Si $x \in \mathbb{R}$ i $\tilde{f}(x) = 0$ llavors $|x - x_i| < \varepsilon$ per a algun $i = 1, 2, \dots, m$.
- (ii) Per a cada $i = 1, 2, \dots, m$, existeix un nombre parell $\sigma = \sigma(i) \geq 0$ tal que

$$\sum_{\substack{|x-x_i| < \varepsilon \\ \tilde{f}(x)=0}} \text{mult}(\tilde{f}, x) = \text{mult}(f, x_i) - \sigma$$

Demostració. Siguin z_1, z_2, \dots, z_k , amb $k \geq m$, les arrels de f . Prenem un $\varepsilon_0 > 0$ qualsevol tal que l'adherència $\overline{D(z_i, \varepsilon_0)}$ no talli l'eix real per a cada arrel z_i no real de f , i fent-lo encara més petit podem suposar $\varepsilon_0 < \min_{i \neq j} \{ |z_i - z_j| / 2 \}$ si $k \geq 2$. Notem que aquesta última desigualtat implica $\varepsilon_0 < \min_{i \neq j} \{ |x_i - x_j| / 2 \}$ si $m \geq 2$.

Anem a veure que aquest ε_0 satisfà les condicions de l'enunciat. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Aplicant el teorema 1.21 a f i a ε , s'obté un $\delta > 0$ que veurem que és el que estem buscant. És a dir, hem de provar que per a tot polinomi $\tilde{f}(x) = \sum_{s=0}^n \tilde{a}_s \frac{x^s}{s!}$ de grau n a coeficients reals i amb $|\tilde{a}_s - a_s| < \delta$ si $s = 0, \dots, n$, es verifiquen les conclusions (i) i (ii) de l'enunciat. Si $x \in \mathbb{R}$ i $\tilde{f}(x) = 0$, pel teorema 1.21 serà $|x - z_i| < \varepsilon$ per a algun $i = 1, \dots, k$, i per ser $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, z_i té que ser arrel real de f . Per tant (i) està provat. Sigui ara $1 \leq i \leq m$. Pel teorema 1.21, \tilde{f} té exactament $\text{mult}(f, x_i)$ arrels en $D(x_i, \varepsilon)$ comptant multiplicitats. Com que f és a coeficients reals, si $z \in D(x_i, \varepsilon)$ és arrel de f llavors la seva conjugada $\bar{z} \in D(x_i, \varepsilon)$ també és arrel de \tilde{f} i amb la mateixa multiplicitat. Així, el nombre d'arrels no reals de \tilde{f} en $D(x_i, \varepsilon)$, comptant multiplicitats, és parell. Prenent σ aquest nombre, resulta (ii). \square

Aplicant el corol·lari 1.22 a cada derivada $f = P^{(j)}$ d'un polinomi P s'obté el següent resultat, que relaciona l'espectre d'un polinomi amb l'espectre d'un dels seus pertorbats.

Teorema 1.23. *Sigui $P(x) = \sum_{s=0}^n a_s \frac{x^s}{s!}$ un polinomi a coeficients reals de grau n . Hi ha un ε_0 , amb $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P)}$, on $\varepsilon_{Z(P)}$ és l'èpsilon de $Z(P)$, tal que per a tot nombre real ε satisfent $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existeix un $\delta > 0$ de manera que si $Q(x) = \sum_{s=0}^n b_s \frac{x^s}{s!}$ és un polinomi de grau n a coeficients reals amb $|b_s - a_s| < \delta$, $s = 0, \dots, n$, aleshores es satisfan les dues propietats següents:*

- (i) *Si $(y, j) \in Z(Q)$, existeix un node $(x, j) \in Z(P)$ amb $|y - x| < \varepsilon$.*
- (ii) *Per a tot $(x, j) \in Z(P)$, existeix un nombre parell $\sigma \geq 0$ tal que*

$$\sum_{\substack{(y,j) \in Z(Q) \\ |y-x| < \varepsilon}} \text{mult}_{Z(Q)}[(y, j)] = \text{mult}_{Z(P)}[(x, j)] - \sigma \quad (1.24)$$

\square

Capítol 2

Configuracions completes

En aquest capítol introduïrem els conceptes de configuració completa i de configuració quasi-completa, i estudiarem les seves propietats més importants. La primera secció conté la terminologia de grups de nodes, molt utilitzada en els capítols posteriors, i també emprada per donar el concepte de configuració completa a la secció 2.2. Tanmateix, a la secció 2.2 també veurem que els espectres són configuracions completes. A les seccions següents estudiarem altres propietats de les configuracions completes i quasi-completes, tals com la fórmula de la longitud i el test dels signes.

2.1 Grups d'una configuració

Definició 2.1. Sigui A una configuració. Direm que dos nodes $(x_1, j) \in A$, $(x_2, j) \in A$, amb una mateixa derivació j , són *consecutius* de A , si $x_1 < x_2$ i a més a més no hi ha nodes en A que tinguin derivació j i abscissa compresa estrictament entre x_1 i x_2 , i.e., no hi ha nodes en A del tipus (x, j) amb $x_1 < x < x_2$.

Siguin $(x_1, j), (x_2, j), \dots, (x_k, j)$ tots els nodes de A que tenen derivació j , ordenats de forma que $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Òbviament es verifica que $k = m_A(j)$. Els parells de nodes consecutius de A que tenen derivació j són tots els parells del tipus $(x_i, j), (x_{i+1}, j)$, amb $i = 1, 2, \dots, k - 1$. En particular hi ha exactament $(k - 1)_+ = (m_A(j) - 1)_+$ parells de nodes consecutius de A de derivació j .

Direm que un node $(x_d, j) \in A$ és *extrem-dret* de A si no hi ha nodes en A que tinguin derivació j i abscissa estrictament més gran que x_d , i.e., no hi ha nodes en A del tipus (x, j) amb $x > x_d$. Anàlogament, un node $(x_e, j) \in A$ és *extrem-*

esquerra de A si no hi ha nodes en A que tinguin derivació j i abscissa més petita, estrictament, que x_e .

Si $m_A(j) \geq 1$, hi ha exactament un node extrem-dret de derivació j i un node extrem-esquerra de derivació j , que coincideixen si $m_A(j) = 1$.

Definició 2.2. Sigui A una configuració. A continuació establirem una partició de A en subconjunts anomenats *grups de nodes* o simplement *grups*. Aquí el mot grup no té cap connotació algebraica, sinó que només representa certa col·lecció de nodes.

Els grups de la configuració A poden ser de tres tipus: grups interiors, grups exteriors o grups atípics.

- **Grups interiors.** Suposem que $(a, j-1)$, $(b, j-1)$ són dos nodes consecutius de A de derivació $j-1$, on j és un nombre natural no nul, de manera que per a aquests dos nodes es satisfà la següent condició addicional:

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, j) \in A \text{ i } a < x < b \quad (2.1)$$

és a dir, existeix com a mínim un node de A que té derivació j i abscissa compresa entre a i b . Siguin (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, els nodes de A que tenen derivació j i abscissa compresa entre a i b , ordenats de forma que $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$. Suposem que la multiplicitat en A de cada (x_i, j) és m_i . El subconjunt \mathfrak{g} de A donat per

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{i=1}^k \{(x_i, j), (x_i, j+1), \dots, (x_i, j+m_i-1)\} \quad (2.2)$$

està format per tots aquells nodes α de A tals que el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, té derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre a i b . Aquest subconjunt queda determinat pels nodes consecutius $(a, j-1)$, $(b, j-1)$ i pot definir-se directament amb l'expressió

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{\substack{(x,j) \in A \\ a < x < b}} \{(x, j), (x, j+1), \dots, (x, j + \text{mult}_A[(x, j)] - 1)\} \quad (2.3)$$

Als subconjunts \mathfrak{g} de A construïts a partir de dos nodes consecutius de A , $(a, j-1)$, $(b, j-1)$, per als quals es satisfà la condició (2.1), els anomenarem *grups interiors* de A . Com a exemple, a la figura 2.1 s'indiquen tots els grups interiors (marcats amb el símbol (int)) d'una configuració A . Observem que

els nodes consecutius $(a, j - 1), (b, j - 1)$ que s'han utilitzat per construir un grup interior \mathfrak{g} , estan completament determinats per \mathfrak{g} . Denotarem aquests nodes per $\sigma_A^-(\mathfrak{g}) = (a, j - 1)$ i $\sigma_A^+(\mathfrak{g}) = (b, j - 1)$.

- **Grups exteriors.** Sigui $(b, j - 1)$ un node extrem-dret de A de derivació $j - 1$, on j és un nombre natural no nul, i de manera que per a aquest node es satisfà la següent condició addicional:

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, j) \in A \text{ i } x > b \quad (2.4)$$

és a dir, existeix com a mínim un node de A que té derivació j i abscissa més gran que b . Aquest node $(b, j - 1)$ determina el subconjunt \mathfrak{g} de A donat per

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{\substack{(x,j) \in A \\ x > b}} \{(x, j), (x, j + 1), \dots, (x, j + \text{mult}_A[(x, j)] - 1)\}, \quad (2.5)$$

és a dir, \mathfrak{g} està format pels nodes α de A tals que el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, té derivació j i abscissa estrictament més gran que b . A qualsevol subconjunt \mathfrak{g} de A construït a partir d'un node extrem-dret de A , $(b, j - 1)$, per al qual es satisfà la condició (2.4), l'anomenarem *grup exterior-dret* de A . A la figura 2.1 s'indiquen tots els grups exteriors-dret (marcats amb el símbol (ext-d)) d'una configuració A . El node extrem-dret $(b, j - 1)$ que s'ha utilitzat per construir un grup exterior-dret \mathfrak{g} està completament determinat per \mathfrak{g} , i denotarem aquest node per $\sigma_A^-(\mathfrak{g}) = (b, j - 1)$.

Anàlogament, si $(a, j - 1)$ és un node extrem-esquerra de A per al qual es satisfà la condició addicional

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, j) \in A \text{ i } x < a \quad (2.6)$$

aleshores es considera el subconjunt \mathfrak{g} de A donat per

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{\substack{(x,j) \in A \\ x < a}} \{(x, j), (x, j + 1), \dots, (x, j + \text{mult}_A[(x, j)] - 1)\} \quad (2.7)$$

Els subconjunts \mathfrak{g} de A construïts a partir d'un node extrem-esquerra de A , $(a, j - 1)$, per al qual es satisfà la condició (2.6), seran anomenats *grups exteriors-esquerra* de A (veure figura 2.1). Com abans, el node extrem-esquerra $(a, j - 1)$ que s'ha utilitzat per construir un grup exterior-esquerra \mathfrak{g} està completament determinat per \mathfrak{g} , i denotarem aquest node per $\sigma_A^+(\mathfrak{g}) = (a, j - 1)$.

Direm que un subconjunt \mathfrak{g} de A és un *grup exterior* si \mathfrak{g} és un grup exterior-dret o exterior-esquerra.

- **Grups atípics.** Sigui $j \geq 0$ un nombre natural per al qual es satisfan les condicions

$$m_A(j-1) = 0, m_A(j) \geq 1 \quad (2.8)$$

Aquest nombre j determina el subconjunt \mathfrak{g} de A donat per

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{(x,j) \in A} \{(x, j), (x, j+1), \dots, (x, j + \text{mult}_A[(x, j)] - 1)\}, \quad (2.9)$$

o sigui, \mathfrak{g} està format pels nodes α de A tals que el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, té derivació j . Als subconjunts \mathfrak{g} de A construïts a partir d'un nombre natural j satisfent (2.8) els anomenarem *grups atípics* de A .

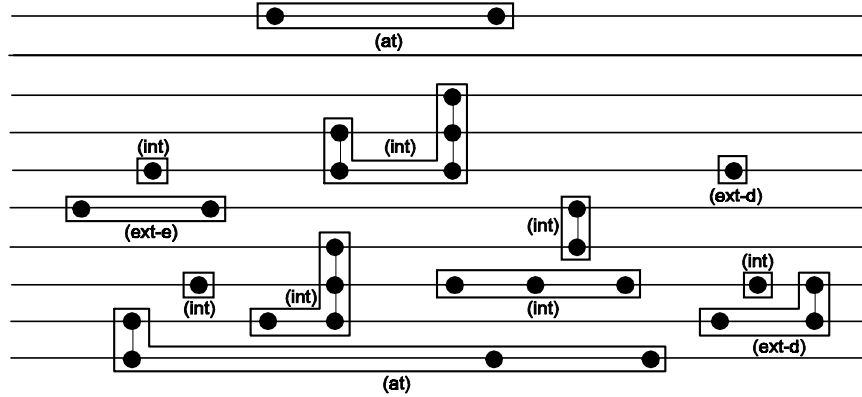


Figura 2.1. Grups d'una configuració.

(int): grups interiors; (ext-d): grups exteriors-dret; (ext-e): grups exteriors-esquerra; (at): grups atípics.

En general, direm que un subconjunt \mathfrak{g} de A és un *grup* de A si \mathfrak{g} és un grup interior, exterior o atípic de A . La *derivació* d'un grup \mathfrak{g} és la derivació més petita dels nodes de \mathfrak{g} . Per exemple, els grups donats en (2.3), (2.5), (2.7) i (2.9) tenen tots ells derivació j .

Observem que si $\alpha \in \mathfrak{g}$ aleshores el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, també pertany a \mathfrak{g} i té derivació igual a la derivació j de \mathfrak{g} . En particular, si existeix algun grup de A que té derivació j , aleshores hi ha d'haver com a mínim un peu de A que té derivació j . Això implica que per a la derivació j d'un grup \mathfrak{g} hem de tenir $m_A(j) \geq 1$, i consegüentment

$$0 \leq j \leq \ell_A - 1 .$$

A més a més,

- (a) Si \mathfrak{g} és interior aleshores $m_A(j-1) \geq 2$, i en particular $j \geq 1$. En efecte, els nodes consecutius $\sigma_A^-(\mathfrak{g})$, $\sigma_A^+(\mathfrak{g})$ que determinen \mathfrak{g} tenen derivació $j-1$.
- (b) Si \mathfrak{g} és exterior aleshores $m_A(j-1) \geq 1$, i en particular $j \geq 1$. Aquest fet prové de que el node extrem $\sigma_A^-(\mathfrak{g})$ o $\sigma_A^+(\mathfrak{g})$ que determina \mathfrak{g} , té derivació $j-1 \geq 0$.
- (c) Si \mathfrak{g} és atípic aleshores $m_A(j-1) = 0$. En efecte, la seva derivació coincideix amb el nombre natural j , satisfent les condicions de (2.8), que determina \mathfrak{g} .

Els grups que tenen certa derivació $j \geq 0$ es poden donar de forma simultània. Siguin $(x_i, j-1)$, $i = 1, 2, \dots, k$, els nodes de A que tenen derivació $j-1$, ordenats de forma que $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Es verifica que $k = m_A(j-1)$. Els peus de A que tenen derivació j són tots aquells nodes de A que tenen derivació j i abscissa diferent de tots els x_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Siguin

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} = +\infty .$$

Per a cada $i = 0, 1, \dots, k$ considerem el subconjunt de A

$$\mathfrak{g}_i = \bigcup_{\substack{(x,j) \in A \\ x_i < x < x_{i+1}}} \{(x, j), (x, j+1), \dots, (x, j + \text{mult}_A[(x, j)] - 1)\} \quad (2.10)$$

És a dir, \mathfrak{g}_i està format pels nodes α de A tals que el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, té derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre x_i i x_{i+1} . En particular, \mathfrak{g}_i és no buit si i només si hi ha com a mínim un node de A que té derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre x_i i x_{i+1} . Els subconjunts \mathfrak{g}_i que són no buits, $i = 0, 1, \dots, k$, són precisament els grups de A de derivació j . Si $k = 0$ i \mathfrak{g}_0 és no buit, \mathfrak{g}_0 és el grup atípic de derivació j . Si $k \geq 1$ i \mathfrak{g}_0 és no buit (resp. \mathfrak{g}_k és no buit), \mathfrak{g}_0 és el grup exterior-esquerra de derivació j (resp. \mathfrak{g}_k és el grup exterior-dret de derivació j). Finalment, si $k \geq 2$, els subconjunts \mathfrak{g}_i , $1 \leq i \leq k-1$, que són no buits són els grups interiors de derivació j . A partir d'aquí es poden fer els següents comentaris:

Comentari 2.3.

- (i) Els grups de A que tenen derivació j són disjunts dos a dos.
- (ii) Hi ha algun grup de A de derivació j si i només si hi ha algun peu de A que té derivació j . En efecte, hi ha algun peu de A que té derivació j si i només si hi ha algun node de A que té derivació j i abscissa diferent de tots els x_i , $i = 1, 2, \dots, k$; o equivalentment, algun \mathfrak{g}_i , $i = 0, 1, \dots, k$, és no buit.

- (iii) La reunió dels grups de A que tenen derivació j coincideix amb el subconjunt de A format per tots aquells nodes α de A tals que el seu peu, $\text{peu}_A[\alpha]$, té derivació j . Aquest fet prové de que la reunió dels grups de derivació j coincideix amb la reunió dels \mathfrak{g}_i , $i = 0, 1, \dots, k$ (si algun \mathfrak{g}_i és buit, aquest no afecta a la reunió anterior).
- (iv) El nombre de grups interiors de A que tenen derivació j és com a molt $(k-1)_+ = (m_A(j-1)-1)_+$. A més, hi ha igualtat (és a dir, hi ha exactament $(m_A(j-1)-1)_+$ grups interiors de derivació j) si i només si la condició (2.1) és satisfeta per a qualsevol parella $(a, j-1), (b, j-1)$ de nodes consecutius de A de derivació $j-1$.

Proposició 2.4. *Els grups d'una configuració A formen una partició de A . És a dir, són disjunts dos a dos i la seva reunió és tot A .*

Demostració. Que la reunió dels grups de A és tot A prové de la propietat (iii) anterior perquè si $\alpha \in A$ i j és la derivació del seu peu, aleshores α pertany a algun grup de A que té derivació j . Anem a veure que els grups de A són disjunts dos a dos. La propietat (i) anterior assegura que els grups d'una mateixa derivació són disjunts dos a dos. Suposem que $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ són dos grups de A de derivacions respectives j, j' , i tals que $j \neq j'$. Per reducció a l'absurd, si existís un node $\alpha \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}'$, el peu d'aquest node hauria de tenir derivació j , però també derivació j' . Això es contradia amb que $j \neq j'$. \square

La proposició anterior dóna sentit a la següent definició.

Definició 2.5. Sigui A una configuració. Direm que un node $\alpha \in A$ és un *node interior, exterior o atípic* de A si el grup \mathfrak{g} de A tal que $\alpha \in \mathfrak{g}$ és interior, exterior o atípic respectivament. Els nodes exteriors es subdivideixen en nodes exteriors-dret i nodes exteriors-esquerra, d'acord amb si el seu grup corresponent és un grup exterior-dret o exterior-esquerra.

A continuació enunciem un lema que necessitarem més endavant.

Lema 2.6. *Considerem una configuració A i un nombre natural $j \geq 0$. Sigui $A_j = \{(x, j') \in A \mid j' \leq j\}$ el conjunt format pels nodes de A que tenen derivació més petita o igual que j . Aleshores,*

- (i) Si α és un node de A_j amb abscissa màxima, α és un node atípic o exterior-dret de A .
- (ii) Si α és un node de A_j amb abscissa mínima, α és un node atípic o exterior-esquerra de A .

Demostració. Els apartats (i) i (ii) són simètrics. Provarem (i). Sigui $\alpha = (x^*, j^*)$ un node de A_j amb abscissa màxima. Si (x^*, j^*) fos un node interior o exterior-esquerra de A tindríem que $(x^*, j^*) \in \mathfrak{g}$ per a cert grup \mathfrak{g} interior o exterior-esquerra de A . El node $\sigma_A^+(\mathfrak{g})$ també és de A_j però té abscissa més gran, estrictament, que x^* . Això contradueix que x^* és màxima, i per reducció a l'absurd el lema queda demostrat. \square

2.2 Configuracions completes i quasi-completes

Definició 2.7. Una configuració A és *quasi-completa* si per a qualsevol parell $(a, j-1), (b, j-1)$ de nodes consecutius de A , hi ha com a mínim un node de A que té derivació j i abscissa estrictament compresa entre a i b .

Observem que A és quasi-completa si i només si la condició (2.1) és sempre satisfeta, siguin quins siguin els nodes consecutius $(a, j-1), (b, j-1)$ de A . En particular, si A és quasi-completa, el nombre de grups interiors de A que tenen derivació j és el màxim possible i igual a $(m_A(j-1) - 1)_+$. Recíprocament, si A és una configuració tal que per a tot $j \geq 0$ el nombre de grups interiors de A que tenen derivació j és igual a $(m_A(j-1) - 1)_+$, aleshores A és quasi-completa. Per altra banda, si P és un polinomi el teorema de Rolle assegura que el seu espectre $Z(P)$ és una configuració quasi-completa.

Siguin N una configuració quasi-completa i $j \geq 0$. Per a cada grup interior de N de derivació j podem escollir un node d'aquest grup que tingui derivació j . En total haurem escollit $(m_N(j-1) - 1)_+$ nodes de N , puix que $(m_N(j-1) - 1)_+$ és el nombre de grups interiors de N que tenen derivació j , essent aquests nodes diferents entre ells i tots de derivació j . Això mostra la desigualtat $m_N(j) \geq (m_N(j-1) - 1)_+$, vàlida per a tot $j \geq 0$. Fent $j = \ell_N, j = \ell_N - 1, j = \ell_N - 2, \dots$ en la desigualtat anterior, obtenim que

$$0 = m_N(\ell_N) \geq m_N(\ell_N - 1) - 1 \geq m_N(\ell_N - 2) - 2 \geq \dots \geq m_N(\ell_N - k) - k.$$

Això és,

$$m_N(\ell_N - k) \leq k, \quad k = 1, 2, \dots, \ell_N \quad (2.11)$$

Les desigualtats (2.11) són vàlides per a qualsevol configuració quasi-completa. Observem que quan $k = 1$ la desigualtat (2.11) esdevé igualtat, ja que sempre es verifica $m_N(\ell_N - 1) \geq 1$. Això significa que a la derivació més gran on encara hi podem trobar nodes, només n'hi ha un. Més endavant presentarem un refinament de les desigualtats anteriors.

Definició 2.8. Una configuració N és *completa* si és quasi-completa i satisfà les tres propietats següents:

- (i) Tot grup interior de N està format per un nombre senar de nodes.
- (ii) Tot grup exterior de N està format per un nombre parell de nodes.
- (iii) Si $j = 1, 2, \dots, \ell_N - 1$ és tal que $m_N(j - 1) = 0$, aleshores $m_N(j) \geq 1$ i a més a més el grup atípic de N que té derivació j està format per un nombre senar de nodes.

Observem que la condició (iii) no és aplicable quan $j = 0$ i per tant podríem tenir $m_N(0) = 0$. També pot passar que $m_N(0) \geq 1$, però que el grup atípic de N que té derivació 0 estigui format per un nombre parell de nodes.

La resta d'aquesta secció va encaminada a demostrar que tot espectre és una configuració completa.

Si f és una funció real definida en un entorn de $x_0 \in \mathbb{R}$ i $f(x_0) = 0$, es diu que f admet *multiplicitat* en x_0 si existeix un nombre natural $m \geq 1$ tal que (i) f admet derivada m -èssima en x_0 , i (ii) $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Si tal nombre m existeix és únic i es denota per $\text{mult}(f, x_0)$.

Lema 2.9. *Suposem que a i b són dos nombres reals tals que $a < b$.*

- (i) *Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en l'interval (a, b) . Suposem que $f(a) = f(b) = 0$, que $f(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, que f' té un nombre finit d'arrels en (a, b) i que per a tota arrel x de f' en (a, b) , f' admet multiplicitat en x . Sota aquestes condicions, la suma de les multiplicitats de les arrels de f' a l'interval (a, b) és senar. És a dir, el nombre*

$$\sum_{\substack{x \in (a, b) \\ f'(x) = 0}} \text{mult}(f', x) \tag{2.12}$$

és senar.

(ii) Sigui $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, +\infty)$ i derivable en $(a, +\infty)$. Suposem que $f(a) = 0$, que $f(x) \neq 0 \forall x > a$, que f' té un nombre finit d'arrels en $(a, +\infty)$ i que per a tota arrel x de f' en $(a, +\infty)$, f' admet multiplicitat en x . Sigui M l'arrel més gran de f' a l'interval $(a, +\infty)$, amb el benentès que si f' no té arrels en $(a, +\infty)$ aleshores $M = a$. Llavors, el nombre

$$\sum_{\substack{x > a \\ f'(x)=0}} \text{mult}(f', x) \quad (2.13)$$

és (a) parell si $ff' > 0$ a l'interval $(M, +\infty)$, i (b) senar si $ff' < 0$ a l'interval $(M, +\infty)$.

(iii) Sigui $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, i derivable a l'interval $(-\infty, a)$. Suposem que $f(a) = 0$, que $f(x) \neq 0 \forall x < a$, que f' té un nombre finit d'arrels en $(-\infty, a)$ i que per a tota arrel x de f' en $(-\infty, a)$, f' admet multiplicitat en x . Sigui M l'arrel més petita de f' a l'interval $(-\infty, a)$, amb el benentès que si f' no té arrels en $(-\infty, a)$ aleshores $M = a$. Llavors, el nombre

$$\sum_{\substack{x < a \\ f'(x)=0}} \text{mult}(f', x) \quad (2.14)$$

és (a) senar si $ff' > 0$ a l'interval $(-\infty, M)$, i (b) parell si $ff' < 0$ a l'interval $(-\infty, M)$.

Comentari 2.10. Aquest lema es troba parcialment en ([33],[40]). A l'apartat (i), pel teorema de Rolle f' té com a mínim una arrel, així que la suma (2.12) és no buida. A l'apartat (ii) podria ser que f' no tingués arrels en $(a, +\infty)$, i per tant hem d'interpretar en aquest cas que la suma (2.13) és igual a zero. Anàlogament per a l'apartat (iii). Notem que, a l'apartat (ii), pel teorema de Bolzano aplicat a f i el de Darboux aplicat a f' , tant f com f' tenen signe constant a l'interval $(M, +\infty)$ i per tant es verifica alguna de les condicions (a) o (b). A la mateixa conclusió s'arriba per a l'apartat (iii).

Demostració del lema. (i) Sigui $g = f'$ i siguin $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ les arrels de g en (a, b) . Posem també $x_0 = a$, $x_{k+1} = b$. Pel teorema de Darboux, g té signe constant a cada interval (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$. Sigui $s_i = +1$ (resp. $s_i = -1$) si g és positiva (resp. negativa) en (x_i, x_{i+1}) . Com que g admet multiplicitat

$m_i = \text{mult}(g, x_i)$ en x_i , pel teorema de Taylor tenim

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{j=0}^{m_i} \frac{g^{(j)}(x_i)}{j!} (x - x_i)^j + o(|x - x_i|^{m_i}) \\ &= \frac{g^{(m_i)}(x_i)}{m_i!} (x - x_i)^{m_i} + o(|x - x_i|^{m_i}) \\ &= \left(\frac{g^{(m_i)}(x_i)}{m_i!} + o(1) \right) (x - x_i)^{m_i} \end{aligned}$$

D'aquí que g canvia de signe en x_i si i només si m_i és senar; o dit d'altra manera, per a $i = 1, 2, \dots, k$ és $s_i = (-1)^{m_i} s_{i-1}$. L'aplicació reiterada d'aquestes igualtats estableix que

$$s_k = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_k} s_0 \quad (2.15)$$

Si provem que $s_k = -s_0$ ja haurèm acabat. Però això és trivial degut al fet que $f(a) = f(b) = 0$ i que $f(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. En efecte, sigui $\text{sgn}(f) \in \{-1, +1\}$ el signe de f en (a, b) . Pel teorema del valor mitjà aplicat a l'interval $[a, x_1]$ existirà un $\xi \in (a, x_1)$ amb $f(x_1) - f(a) = f'(\xi)(x_1 - a)$, i com que $f(a) = 0$ i $f'(\xi)$ té signe s_0 , resulta que el signe de $f(x_1)$ és s_0 i per tant $\text{sgn}(f) = s_0$. Anàlogament, existirà un punt $\xi \in (x_k, b)$ amb $f(b) - f(x_k) = f'(\xi)(b - x_k)$; per tant $-f(x_k)$, que té signe $-\text{sgn}(f) = -s_0$, té també signe igual a s_k i conseqüentment $s_k = -s_0$.

(ii) Sigui $g = f'$ i siguin $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ les arrels de g en $(a, +\infty)$. Observem que $k = 0$ si g no té arrels en $(a, +\infty)$. Posem també $x_0 = a$ i $x_{k+1} = +\infty$. Amb aquestes notacions es té $M = x_k$. Anàlogament a la demostració de l'apartat anterior, g té signe constant $s_i \in \{-1, 1\}$ a cada interval (x_i, x_{i+1}) , i a més a més $s_i = (-1)^{m_i} s_{i-1}$ si $i = 1, 2, \dots, k$, on m_i és la multiplicitat de g en x_i . Així, (2.15) continua essent vàlida. El teorema del valor mitjà aplicat de manera anàloga a l'apartat (i) estableix que $s_0 = \text{sgn}(f)$. En virtut d'això i de (2.15) resulta

$$s_k \text{sgn}(f) = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_k} \text{sgn}^2(f) = (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_k} \quad (2.16)$$

Observem que si $k = 0$ la fórmula anterior també és vàlida, ja que trivialment $s_k \text{sgn}(f) = s_0 s_0 = +1 = (-1)^0$. Ara, per definició dels signes, $s_k \text{sgn}(f)$ és $+1$ si i només si $ff' > 0$ a l'interval $(M, +\infty)$, i $s_k \text{sgn}(f)$ és -1 si i només si $ff' < 0$ a l'interval $(M, +\infty)$. Una conseqüència immediata d'això i de (2.16) és la paritat del nombre donat en (2.13).

L'apartat (iii) prové d'aplicar l'apartat (ii) a la funció $h : [-a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $h(x) = f(-x)$. Com que $h(x)h'(x) = -f(-x)f'(-x)$, la relació dels signes entre f i f' va canviada respecte de l'apartat (ii). \square

El següent resultat, anomenat *teorema d'ordenació*, relaciona les arrels d'un polinomi amb les arrels de la seva derivada.

Teorema 2.11. *Sigui $f(x)$ un polinomi a coeficients reals de grau $n \geq 1$.*

- (i) *Si $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ i $f(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, aleshores la suma de les multiplicitats de les arrels de f' a l'interval (a, b) és senar.*
- (ii) *Si $f(a) = 0$ i $f(x) \neq 0 \forall x > a$, la suma de les multiplicitats de les arrels de f' a l'interval $(a, +\infty)$ és parell. Anàlogament, si $f(a) = 0$ i $f(x) \neq 0 \forall x < a$, la suma de les multiplicitats de les arrels de f' a l'interval $(-\infty, a)$ és parell.*
- (iii) *Si f no té arrels reals, la suma de les multiplicitats de les arrels reals de f' és senar.*

Demostració. Com que f té grau $n \geq 1$, la seva derivada té un nombre finit d'arrels i admet multiplicitat en cadascuna d'elles. El lema 2.9 (i) prova l'apartat (i). Per veure la primera part de l'apartat (ii) només cal demostrar que f i f' tenen el mateix signe a l'interval $(M, +\infty)$, on M està definit com en l'apartat (ii) del lema anterior. Escrivint el polinomi f en la forma $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, tindrem que $f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1}x^i$, i per tant $f(x)$ i $f'(x)$ tenen el mateix signe i igual al signe de a_n per a x prou gran. La segona part de l'apartat (ii) s'obté utilitzant l'apartat (iii) del lema 2.9. En efecte, si x és suficientment petit, el signe de $f(x)$ és $(-1)^n \text{sgn}(a_n)$. En canvi, per a x prou petit el signe de $f'(x)$ és $(-1)^{n-1} \text{sgn}(a_n)$, oposat al signe de $f(x)$. L'últim apartat es dedueix del fet que si f no té arrels reals aleshores el seu grau és parell. La derivada f' té grau senar, així que f' té un nombre senar d'arrels reals comptant multiplicitats. \square

Finalment obtenim el resultat més important d'aquesta secció.

Teorema 2.12. *Si P és un polinomi a coeficients reals de grau $n \geq 1$ aleshores el seu espectre $Z(P)$ és una configuració completa.*

Demostració. Que $Z(P)$ és una configuració quasi-completa és una conseqüència immediata de l'apartat (i) del teorema 2.11. Si \mathfrak{g} és un grup interior de $Z(P)$, el seu nombre de nodes coincideix amb alguna suma del tipus $\sum_{x \in (a, b), f'(x)=0} \text{mult}(f', x)$, on $f = P^{(j-1)}$ per a cert $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, i a, b són tals que $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ i $f(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Pel teorema 2.11 aquesta suma és senar. Si \mathfrak{g} és un grup exterior-dret de $Z(P)$, el seu nombre de nodes coincideix amb alguna suma del

tipus $\sum_{x>a, f'(x)=0} \text{mult}(f', x)$, on $f = P^{(j-1)}$ per a cert $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, i a és tal que $f(a) = 0$ i $f(x) \neq 0 \forall x > a$. De nou, pel teorema anterior aquesta suma és parell. De manera anàloga es veu que els grups exteriors-esquerra de $Z(P)$ tenen un nombre parell de nodes. Sigui ara $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ amb $m_{Z(P)}(j-1) = 0$. El polinomi $P^{(j-1)}$ no té arrels reals, resultant del teorema anterior que la derivada $P^{(j)}$ té un nombre senar d'arrels reals comptant multiplicitats, i en particular $m_{Z(P)}(j) \geq 1$. Aquest nombre d'arrels, comptant multiplicitats, coincideix amb el nombre de nodes del grup atípic de $Z(P)$ que té derivació j . \square

2.3 Fórmules de la longitud

En aquesta secció presentem les fórmules de la longitud, que seran de gran utilitat per a les configuracions quasi-completes.

Teorema 2.13. *Sigui N una configuració quasi-completa. Sigui e_N el nombre de grups interiors que hi ha a N , i*

$$\begin{aligned} \tau_N &= \#\{j \in \{1, 2, \dots, \ell_N - 1\} \mid m_N(j-1) = 0\} \\ &= \#\{j \in \{0, 1, 2, \dots, \ell_N - 1\} \mid m_N(j) = 0\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aleshores,

$$\#N + \tau_N = \ell_N + e_N \quad (2.18)$$

i

$$\ell_N = \tau_N + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}} (\#\mathfrak{g} - 1) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{ext})} \cup \mathcal{G}_N^{(\text{at})}} \#\mathfrak{g} \quad (2.19)$$

on $\mathcal{G}_N^{(\text{int})}$, $\mathcal{G}_N^{(\text{ext})}$ i $\mathcal{G}_N^{(\text{at})}$ són els conjunts formats, respectivament, pels grups interiors, exteriors i atípics de N .

Les expressions (2.18) i (2.19) són les fórmules de la longitud.

Demostració. Primer observem que $e_N = \#\mathcal{G}_N^{(\text{int})}$. Si $j \geq 0$, el nombre de grups interiors de N que tenen derivació j és exactament $(m_N(j-1) - 1)_+$. Sumant les quantitats anteriors per a $j = 1, 2, \dots, \ell_N - 1$, resulta

$$e_N = \sum_{j=1}^{\ell_N-1} (m_N(j-1) - 1)_+ .$$

Fent ara el canvi $j' = j - 1$ i tenint en compte que $m_N(\ell_N - 1) = 1$, resulta

$$e_N = \sum_{j'=0}^{\ell_N-2} (m_N(j') - 1)_+ = \sum_{j'=0}^{\ell_N-1} (m_N(j') - 1)_+ = \sum_{j=0}^{\ell_N-1} [m_N(j) - 1 + \delta(j)]$$

on $\delta(j) = 1$ si $m_N(j) = 0$, i $\delta(j) = 0$ si $m_N(j) \geq 1$. Agrupant termes,

$$e_N = \#N - \ell_N + \sum_{j=0}^{\ell_N-1} \delta(j) = \#N - \ell_N + \tau_N .$$

Això completa la demostració de la fórmula (2.18).

Per veure (2.19) només cal restar e_N als dos costats de (2.18), obtenint

$$\ell_N = \tau_N + \#N - e_N = \tau_N + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N} \#\mathfrak{g} - \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(int)}} 1 ,$$

on \mathcal{G}_N denota el conjunt format per tots els grups de N . De l'expressió anterior i de la descomposició $\mathcal{G}_N = \mathcal{G}_N^{(int)} \cup \mathcal{G}_N^{(ext)} \cup \mathcal{G}_N^{(at)}$ es deriva (2.19). \square

La fórmula de la longitud, en la seva versió (2.19), té el següent significat geomètric. Considerem, per exemple, la configuració quasi-completa N de la següent figura

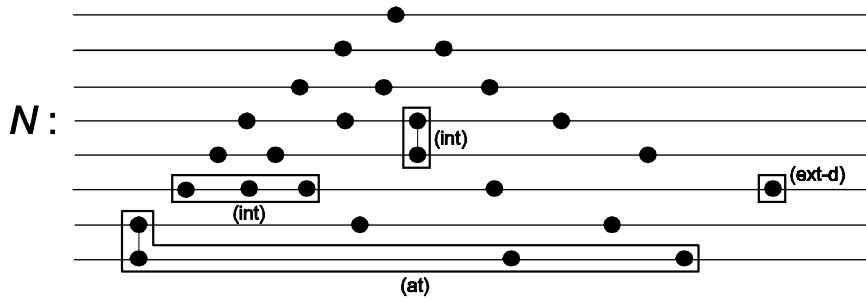


Figura 2.2

on hi ha marcats els grups de N que contribueixen en els sumatoris de (2.19). Aquests són:

- Els grups interiors formats per com a mínim dos nodes (els grups interiors que tenen un únic node no hi contribueixen perquè aquests verifiquen $\#\mathfrak{g} - 1 = 0$). De grups d'aquest tipus n'hi ha dos, un format per tres nodes i l'altre per dos.

- Tots els grups exteriors i tots els grups atípics. Hi ha un únic grup exterior, format per un node, i un únic grup atípic, format per quatre nodes.

Per altra banda es verifica $\tau_N = 0$. La fórmula (2.19) diu que en efecte $\ell_N = 0 + (3 - 1) + (2 - 1) + 1 + 4 = 8$.

Conseqüència del teorema anterior és el següent resultat.

Corol·lari 2.14. *Siguin N una configuració quasi-completa, $j \in \{0, 1, \dots, \ell_N - 1\}$, i $n_N(j)$ el nombre de nodes de N , comptant multiplicitats, que tenen derivació j . És a dir,*

$$n_N(j) = \sum_{\substack{\alpha \in N \\ j_\alpha = j}} \text{mult}_N[\alpha] \quad (2.20)$$

on j_α denota la derivació d'un node α . Aleshores $n_N(j) \leq \ell_N - j$. Si a més N és completa, els nombres $n_N(j)$ i $\ell_N - j$ tenen la mateixa paritat.

Demostració. Vegem-ho primer quan $j = 0$. Si $m_N(0) \geq 1$, el grup atípic de N de derivació 0 té exactament $n_N(0)$ nodes i per tant, de (2.19) es desprèn que $\ell_N \geq n_N(0)$. Aquesta desigualtat també és vàlida si $m_N(0) = 0$, ja que en aquest cas és $n_N(0) = 0$. Si a més N és completa i per $j_{\mathfrak{g}}$ denotem la derivació d'un grup \mathfrak{g} , aleshores τ_N coincideix amb el nombre de grups atípics \mathfrak{g} de N tals que $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$. En efecte, hi ha tants grups atípics amb $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$ com nombres naturals $j \in \{1, 2, \dots, \ell_N - 1\}$ satisfent $m_N(j - 1) = 0$ i $m_N(j) \geq 1$. Aquest nombre coincideix amb τ_N en virtut de la condició (iii) de la definició 2.8. Emprant ara la fórmula de la longitud (2.19), resulta

$$\begin{aligned} \ell_N &= \tau_N + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}} (\#\mathfrak{g} - 1) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{ext})}} \#\mathfrak{g} + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{at})}, j_{\mathfrak{g}} \geq 1} \#\mathfrak{g} + n_N(0) \\ &= \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}} (\#\mathfrak{g} - 1) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{ext})}} \#\mathfrak{g} + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{at})}, j_{\mathfrak{g}} \geq 1} (\#\mathfrak{g} + 1) + n_N(0). \end{aligned}$$

La definició de configuració completa assegura que tots els termes que es troben dins els sumatoris de la fórmula anterior són parells.

Suposem ara $1 \leq j \leq \ell_N - 1$. Considerem la configuració N' obtinguda de suprimir primer els nodes de N que tenen derivació més petita o igual que $j - 1$, i després disminuir les derivacions dels nodes restants en j unitats. És a dir,

$$N' = \{(x, j' - j) \mid (x, j') \in N, j' \geq j\}.$$

És trivial veure que N' és quasi-completa, i completa si N ho és. A més $\ell_{N'} = \ell_N - j$ i $n_{N'}(0) = n_N(j)$. Aplicant el cas $j = 0$ a N' tindrem $n_N(j) = n_{N'}(0) \leq \ell_{N'} = \ell_N - j$, i de la mateixa paritat si N és completa. \square

Comentari 2.15.

1. El corol·lari anterior generalitza les desigualtats (2.11) per a configuracions quasi-completes, ja que $m_N(j) \leq n_N(j) \leq \ell_N - j$, o el que és el mateix $m_N(\ell_N - k) \leq k$.
2. La propietat que $n_N(j)$ i $\ell_N - j$ tenen la mateixa paritat si N és completa, és trivial quan N és un espectre. En efecte, si P és un polinomi a coeficients reals de grau ℓ_N tal que N és l'espectre de P , aleshores $n_N(j)$ és la suma de les multiplicitats de les arrels reals de $P^{(j)}$. Per ser $P^{(j)}$ de grau $\ell_N - j$, aquesta suma de multiplicitats és més petita o igual que $\ell_N - j$ i a més a més amb la mateixa paritat.

2.4 Test dels signes

Sigui A una configuració de longitud n . L'objectiu d'aquesta secció és definir, per a cada node α que no pertany a A i que té derivació més petita o igual que n , el seu signe que denotarem per $\text{sgn}_A[\alpha]$, i posteriorment procedirem a estudiar-ne les seves propietats.

Sigui A una configuració de longitud n . Considerem el conjunt

$$\Gamma = \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq j \leq n, (x, j) \notin A\}.$$

Notem que tot node de derivació n pertany a Γ .

Definició 2.16. Si $(x, j) \in \Gamma$, definim el *signe de (x, j) en A* per

$$\text{sgn}_A[(x, j)] = (-1)^{n-j+\theta}$$

on

$$\theta = \sum_{\substack{(x', j) \in A \\ x' < x}} \text{mult}_A[(x', j)] \quad (2.21)$$

És a dir, θ és el nombre de nodes de A , comptant multiplicitats, que tenen derivació j i abscissa estrictament més petita que x .

Observem que la suma (2.21) és nul·la si no hi ha nodes en A que tinguin derivació j i abscissa més petita que x . En particular per a $j = n$ obtenim sempre $\text{sgn}_A[(x, n)] = (-1)^{n-n} = +1$. Si $0 \leq j < n$ i x és suficientment petit, i.e., $x < \min\{y \mid (y, j) \in A\}$, s'obté $\text{sgn}_A[(x, j)] = (-1)^{n-j}$. En canvi, si $0 \leq j < n$ i x és suficientment gran, el nombre θ de (2.21) passa a ser

$$\theta = \sum_{(x', j) \in A} \text{mult}_A[(x', j)] = \sum_{\substack{\alpha \in A \\ j_\alpha = j}} \text{mult}_A[\alpha] \quad (2.22)$$

on j_α denota la derivació d'un node α . Quan A és completa, aquest nombre θ és exactament el nombre $n_A(j)$ del corol·lari 2.14, i per tant té la mateixa paritat que $n - j$. Això implica que en aquest cas tindrem $\text{sgn}_A[(x, j)] = +1$. A continuació sintetitzem aquestes propietats en la següent proposició.

Proposició 2.17. *Sigui A una configuració de longitud n . Per a cada $0 \leq j \leq n$ siguin $(x_{j1}, j), (x_{j2}, j), \dots, (x_{j, m_A(j)}, j)$ els nodes de A de derivació j , ordenats per ordre creixent d'abscisses (i.e., $x_{j1} < x_{j2} < \dots < x_{j, m_A(j)}$). Posem també $x_{j0} = -\infty, x_{j, m_A(j)+1} = +\infty$. Si j, s són dos nombres naturals amb $0 \leq j \leq n, 0 \leq s \leq m_A(j)$, i x és un nombre real amb*

$$x_{js} < x < x_{j, s+1} \quad (2.23)$$

aleshores

$$\text{sgn}_A[(x, j)] = (-1)^{n-j + \sum_{s'=1}^s \text{mult}_A[(x_{js'}, j)]} \quad (2.24)$$

En particular, fixat $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, el signe $\text{sgn}_A[(x, j)]$ com a funció de x és constant sobre els intervals $(x_{js}, x_{j, s+1})$. A l'interval $(-\infty, x_{j1})$ aquest signe val $(-1)^{n-j}$. Si A és completa, aquest signe val $+1$ a l'interval $(x_{j, m_A(j)}, +\infty)$. \square

El fet que el signe $\text{sgn}_A[(x, j)]$ com a funció de x sigui constant sobre intervals del tipus (2.23) fa que es puguin representar fàcilment els signes en un gràfic. A la següent figura hi ha representades dues configuracions A_1 i A_2 amb els signes corresponents a cada interval. Notem que A_2 és completa.

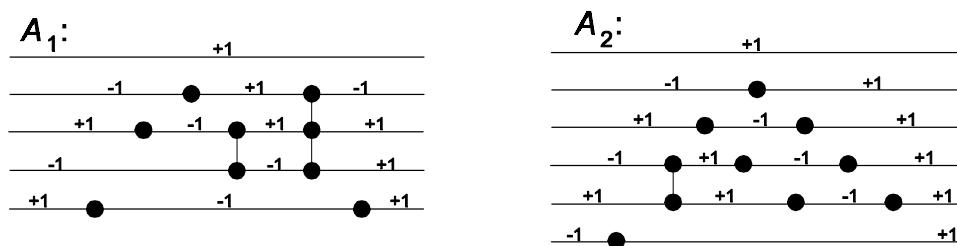


Figura 2.3. Test dels signes de A_1 i A_2 .

Al gràfic obtingut d'aquesta forma per a una configuració A , l'anomenarem *test dels signes* de A . Tot seguit presentem el resultat principal d'aquesta secció.

Teorema 2.18. *Sigui $P(x)$ un polinomi de grau $n \geq 1$ amb coeficient principal positiu, i sigui $Z(P)$ el seu espectre. Aleshores, per a cada node (x, j) amb $j \leq n$ i tal que $(x, j) \notin Z(P)$, el signe de $P[(x, j)]$ és igual a $\text{sgn}_{Z(P)}[(x, j)]$.*

Demostració. Siguin $(x_{j1}, j), (x_{j2}, j), \dots, (x_{j, m_{Z(P)}(j)}, j)$ els nodes de $Z(P)$ de derivació j , ordenats per ordre creixent d'abscisses. Posem $x_{j0} = -\infty$ i $x_{j, m_{Z(P)}(j)+1} = +\infty$. En virtut de la proposició 2.17 serà suficient veure que per a tot $s = 0, 1, 2, \dots, m_{Z(P)}(j)$ i tot nombre real x amb $x_{js} < x < x_{j, s+1}$, el signe de $P^{(j)}(x)$ coincideix amb el nombre

$$(-1)^{n-j+\sum_{s'=1}^s \text{mult}_{Z(P)}[(x_{js'}, j)]} \quad (2.25)$$

Per veure aquest fet procedirem per inducció en s . Si $s = 0$ hem de veure que per a qualsevol $x < x_{j1}$ el signe de $P^{(j)}(x)$ és $(-1)^{n-j}$. Això és conseqüència de que $P^{(j)}$ és un polinomi de grau $n - j$ amb coeficient principal positiu i de que $P^{(j)}$ no s'anul·la en cap punt de l'interval $(-\infty, x_{j1})$.

Suposem ara $s \geq 1$. Hem de veure que si $x_{js} < x < x_{j, s+1}$, el signe de $P^{(j)}(x)$ coincideix amb el nombre (2.25). Tenim que $x_{j, s-1} < x_{js} < x_{j, s+1}$ i que x_{js} és l'única arrel de $P^{(j)}$ a l'interval $(x_{j, s-1}, x_{j, s+1})$. La fórmula de Taylor aplicada a la funció $P^{(j)}$ en el punt $x = x_{js}$ estableix que si $\text{mult}(P^{(j)}, x_{js})$ és parell, el signe de $P^{(j)}$ a l'interval $(x_{j, s-1}, x_{js})$ coincideix amb el signe de $P^{(j)}$ a l'interval $(x_{js}, x_{j, s+1})$, i que si $\text{mult}(P^{(j)}, x_{js})$ és senar aleshores els signes de $P^{(j)}$ en els intervals $(x_{j, s-1}, x_{js})$ i $(x_{js}, x_{j, s+1})$ són oposats. D'aquest fet i de la hipòtesi d'inducció es desprèn que el signe de $P^{(j)}$ a l'interval $(x_{js}, x_{j, s+1})$ és

$$(-1)^{\text{mult}_{Z(P)}[(x_{js}, j)]} (-1)^{n-j+\sum_{s'=1}^{s-1} \text{mult}_{Z(P)}[(x_{js'}, j)]} = (-1)^{n-j+\sum_{s'=1}^s \text{mult}_{Z(P)}[(x_{js'}, j)]}$$

i per tant coincideix amb el nombre (2.25), tal com volíem veure. \square

El teorema anterior té interès perquè només coneixent l'espectre $Z(P)$ podem determinar el signe de $P^{(j)}(x)$ en funció de la posició de x en l'eix real. A més, també pot aplicar-se a qualsevol polinomi real $P(x)$ amb coeficient principal negatiu, només canviant $\text{sgn}_{Z(P)}[(x, j)]$ de l'enunciat per $-\text{sgn}_{Z(P)}[(x, j)]$. Aquest fet prové d'aplicar el teorema 2.18 al polinomi $Q(x) = -P(x)$.

Capítol 3

Representació. Esquemes.

En aquest capítol presentarem, per a cada $\rho = 0, 1, \dots$ o bé $\rho = +\infty$, una relació d'equivalència definida en el conjunt de totes les configuracions, anomenada ρ -equivalència i representada per \sim_ρ . Posteriorment ens centrarem en estudiar per a quines d'aquestes relacions d'equivalència és certa la propietat que tota configuració completa és ρ -equivalent o congruent a un espectre.

En el que segueix farem servir la següent notació per a conjunts de configuracions. \mathcal{C} , \mathcal{C}_n i \mathcal{C}_n^* són, respectivament, el conjunt de totes les configuracions, el conjunt de totes les configuracions de longitud més petita o igual que n , i el conjunt de totes les configuracions de longitud exactament n . Per $\widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{\mathcal{C}}_n$ i $\widehat{\mathcal{C}}_n^*$ denotarem els mateixos conjunts restringits a configuracions completes.

3.1 Les ρ -equivalències

Definició 3.1. Considerem una aplicació $\Psi : A \rightarrow B$ entre dues configuracions A i B . La imatge d'un node $\alpha \in A$ serà denotada per $\Psi[\alpha]$, i la d'un subconjunt $A' \subseteq A$ per $\Psi[A']$. Direm que Ψ *conserva derivacions* si per a tot node $\alpha \in A$ la derivació de α és igual a la derivació de $\Psi[\alpha]$. L'aplicació Ψ *conserva l'ordre entre les abscisses de dos nodes* α i α' de A si es compleix que

$$\left. \begin{array}{l} ab_\alpha < ab_{\alpha'} \\ ab_\alpha = ab_{\alpha'} \\ ab_\alpha > ab_{\alpha'} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ab_{\Psi[\alpha]} < ab_{\Psi[\alpha']} \\ ab_{\Psi[\alpha]} = ab_{\Psi[\alpha']} \\ ab_{\Psi[\alpha]} > ab_{\Psi[\alpha']} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

on per a qualsevol node β , ab_β denota l'abscissa de β .

Observem que si Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes α i α' , el recíproc de (3.1) també es compleix. És a dir, si l'abscissa de $\Psi[\alpha]$ és menor estricta, igual o major estricta que l'abscissa de $\Psi[\alpha']$ aleshores l'abscissa de α és menor estricta, igual o major estricta que l'abscissa de α' respectivament.

Suposem ara que $\rho \geq 0$ és un nombre natural o bé $\rho = +\infty$. Direm que Ψ conserva ρ -abscisses si Ψ conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes α, α' de A tals que les seves derivacions respectives j_α i $j_{\alpha'}$ difereixen com a molt en ρ unitats (i.e., $|j_\alpha - j_{\alpha'}| \leq \rho$). Notem que per simetria és suficient comprovar que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses de nodes α, α' tals que $j_\alpha \leq j_{\alpha'} \leq j_\alpha + \rho$.

Per exemple, quan $\rho = 0$, Ψ ha de conservar l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes d'igual derivació. En canvi, si $\rho = +\infty$, Ψ ha de conservar l'ordre entre les abscisses de dos nodes qualssevol de A .

És fàcil veure que es compleixen les propietats següents:

1. Si $0 \leq \rho' \leq \rho \leq +\infty$ i Ψ conserva ρ -abscisses aleshores Ψ conserva ρ' -abscisses.
2. Si Ψ conserva $(\ell_A - 1)$ -abscisses, on ℓ_A és la longitud de A , aleshores Ψ conserva ∞ -abscisses. En efecte, les derivacions de dos nodes de A no poden diferir en més de $\ell_A - 1$ unitats.
3. Una condició equivalent a que Ψ conservi ρ -abscisses és la següent:

Si α i α' són dos nodes de A tals que les seves derivacions respectives j_α i $j_{\alpha'}$ compleixen que $|j_\alpha - j_{\alpha'}| \leq \rho$, aleshores

$$\text{ab}_\alpha < \text{ab}_{\alpha'} \Leftrightarrow \text{ab}_{\Psi[\alpha]} < \text{ab}_{\Psi[\alpha']}$$

Tot seguit enunciem un lema que farem servir per introduir la 0-equivalència.

Lema 3.2. *Considerem dues configuracions A i B . Són equivalents:*

- (i) *Existeix una aplicació bijectiva entre A i B , $\Psi : A \rightarrow B$, que conserva derivacions.*
- (ii) *$m_A(j) = m_B(j)$ per a tot $j \geq 0$.* □

Definició 3.3. Si es satisfà qualsevol de les condicions del lema anterior, direm que A i B són dues configuracions 0-*equivalents*. La relació $A \sim_0 B$ si A i B són 0-*equivalents* és una relació d'equivalència en el conjunt \mathcal{C} de totes les configuracions, anomenada 0-*equivalència* i representada per \sim_0 .

És clar que si A i B són 0-*equivalents* aleshores tenen el mateix nombre de nodes i la mateixa longitud. A més a més, podem considerar l'única aplicació bijectiva entre A i B , $\Psi_{A,B} : A \rightarrow B$, que conserva derivacions i que conserva 0-*abscisses*. És a dir, conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes d'igual derivació. Explícitament, si posem $m(j) = m_A(j) = m_B(j)$ per a $j = 0, 1, \dots, i$

$$(x_{j1}, j), (x_{j2}, j), \dots, (x_{j,m(j)}, j), \quad (\text{resp. } (y_{j1}, j), (y_{j2}, j), \dots, (y_{j,m(j)}, j))$$

són tots els nodes de A que tenen derivació j ordenats de forma que $x_{j1} < x_{j2} < \dots < x_{j,m(j)}$ (resp. tots els nodes de B de derivació j amb $y_{j1} < y_{j2} < \dots < y_{j,m(j)}$), llavors $\Psi_{A,B}$ ve donada per

$$\Psi_{A,B}[(x_{ji}, j)] = (y_{ji}, j), \quad i = 1, 2, \dots, m(j), \quad j \geq 0.$$

A aquesta aplicació $\Psi_{A,B} : A \rightarrow B$ l'anomenarem *identificació natural* entre A i B , i està definida sempre que A i B siguin 0-*equivalents*.

Observem que $\Psi_{A,B}$ està identificant el primer node de A de derivació j (és a dir, el que té abscissa més petita) amb el primer node de B de derivació j , el segon node de A de derivació j amb el segon node de B de derivació j , i així successivament fins arribar al $m(j)$ -èssim node de A de derivació j (el que té abscissa més gran), que queda identificat amb el $m(j)$ -èssim node de B de derivació j .

Algunes propietats senzilles que es deriven són: (i) si α i α' són dos nodes consecutius de A aleshores $\Psi_{A,B}[\alpha]$ i $\Psi_{A,B}[\alpha']$ són dos nodes consecutius de B , (ii) si α és un node extrem-dret de A (resp. extrem-esquerra de A) aleshores $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és extrem-dret de B (resp. extrem-esquerra de B), i (iii) si A, B i C són tres configuracions 0-*equivalents* entre elles, aleshores

$$\Psi_{A,A} = Id, \quad \Psi_{A,B}^{-1} = \Psi_{B,A}, \quad \Psi_{B,C} \circ \Psi_{A,B} = \Psi_{A,C} \quad (3.2)$$

A continuació introduïm les ρ -*equivalències*, $1 \leq \rho \leq +\infty$.

Definició 3.4. Signi $\rho \geq 1$ un nombre natural o bé $\rho = +\infty$. Direm que dues configuracions A i B són ρ -*equivalents* si són 0-*equivalents* i a més a més la identificació natural $\Psi_{A,B}$ entre A i B conserva ρ -*abscisses*.

De (3.2) es dedueix que la relació $A \sim_\rho B$ si A i B són ρ -equivalents és una relació d'equivalència en el conjunt \mathcal{C} de totes les configuracions, anomenada ρ -equivalència i representada per \sim_ρ . Donat que $\Psi_{A,B}$ conserva 0-abcisses, per comprovar que $\Psi_{A,B}$ conserva ρ -abcisses és suficient veure que $\Psi_{A,B}$ conserva l'ordre entre les abcisses de totes les parelles de nodes α, α' de A tals que $j_\alpha + 1 \leq j_{\alpha'} \leq j_\alpha + \rho$.

La següent proposició proporciona una caracterització més directa de les equivalències \sim_ρ .

Proposició 3.5. *Sigui $\rho \geq 0$ un nombre natural o bé $\rho = +\infty$. Per a dues configuracions A i B , són equivalents:*

- (a) $A \sim_\rho B$
- (b) *Existeix una aplicació bijectiva entre A i B , $\Psi : A \rightarrow B$, que conserva derivacions i que conserva ρ -abcisses.*

A més, si es satisfà qualsevol d'aquestes condicions, l'aplicació Ψ és única i coincideix amb la identificació natural $\Psi_{A,B}$.

Demostració. Si A i B són ρ -equivalents, la identificació natural $\Psi = \Psi_{A,B}$ satisfà les propietats de (b). Recíprocament, suposem que existeix una aplicació bijectiva $\Psi : A \rightarrow B$ satisfent les propietats de (b). Les configuracions A i B són 0-equivalents atès que Ψ és bijectiva i conserva derivacions. Com que Ψ conserva ρ -abcisses resulta $\Psi = \Psi_{A,B}$, ja que Ψ també conserva 0-abcisses. Concloem que $A \sim_\rho B$. A més, acabem de veure que l'aplicació Ψ de (b) coincideix, forçosament, amb $\Psi_{A,B}$. \square

La condició (b) de la proposició anterior permet provar que dues configuracions són ρ -equivalents sense necessitat de parlar de les identificacions naturals, i ni tan sols cal demostrar prèviament que les dues configuracions són 0-equivalents.

Finalment, interpretarem geomètricament (en termes de gràfics) el significat de les equivalències \sim_ρ .

- **Cas $\rho = 0$.** Aquí hi ha poc a dir. Dues configuracions són 0-equivalents si tenen el mateix nombre de nodes a cada derivació (veure figura 3.1). Això implica que les classes d'equivalència del conjunt quocient \mathcal{C} / \sim_0 es confonen amb les funcions $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ finites ($m(j) = 0$ per a j prou gran) i no

idènticament nul·les. Hem de prendre funcions no nul·les perquè el conjunt buit $A = \emptyset$ no l'hem considerat com a configuració.

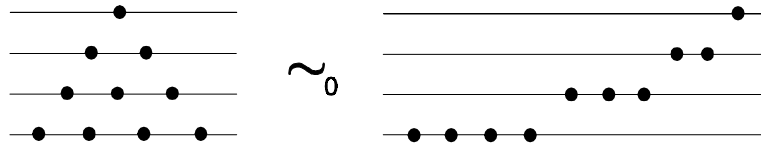


Figura 3.1. Equivalència \sim_0 .

- **Cas $\rho = 1$.** Dues configuracions són 1-equivalents si tenen el mateix nombre de nodes a cada derivació, i a més a més, la identificació natural $\Psi_{A,B}$ conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes de la forma $(x, j), (x', j + 1)$ (derivacions consecutives). Això està esquematitzat a la figura 3.2 (a), on les situacions (i), (ii) i (iii) en A impliquen, per als nodes identificats en B , les situacions (i), (ii) i (iii) respectivament.

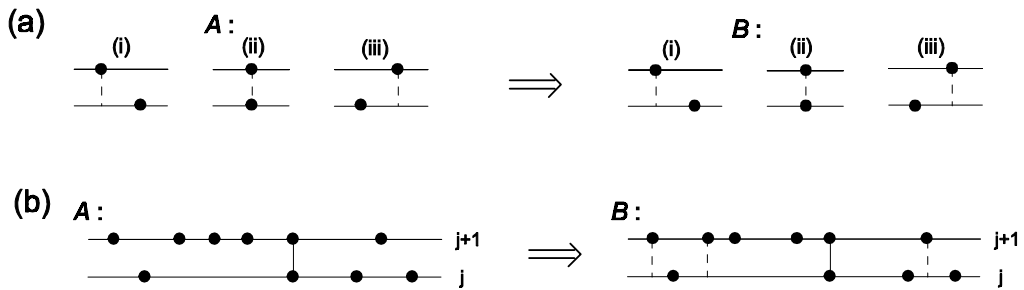
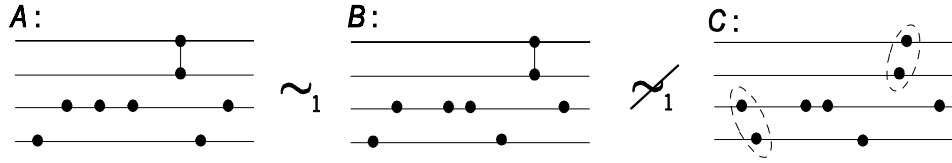


Figura 3.2

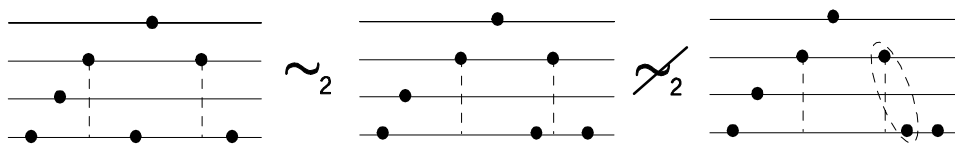
Així, si A i B són 1-equivalents, l'ordre entre les abscisses dels nodes de B que tenen derivacions consecutives queda completament determinat per l'ordre entre les abscisses dels nodes de A que tenen derivacions consecutives (veure figura 3.2 (b)), i viceversa.

Determinar si dues configuracions són 1-equivalents és senzill. Només cal fixar-nos en els seus gràfics respectius, comptar el nombre de nodes de cada derivació (que ha de coincidir en A i en B), i veure que es conserva l'ordre entre abscisses de nodes de derivacions consecutives. Com a exemple, de les tres configuracions següents,

Figura 3.3. Equivalència \sim_1 .

A és 1-equivalent a B , però ni A ni B són 1-equivalents a C (no es conserva l'ordre entre les abscisses dels parells de nodes encerclats). Observem que no es fa necessari marcar abscisses ni indicar l'ordre entre abscisses de nodes que tinguin derivacions que difereixin en 2 o més unitats. L'única informació que l'equivalència \sim_1 requereix de les configuracions és la informació més bàsica que proporcionen els seus gràfics. És a dir, l'ordre entre abscisses de nodes que tenen derivacions iguals o consecutives. En particular, les classes d'equivalència del conjunt quocient \mathcal{C}/\sim_1 vindran determinades per gràfics de configuracions, on només és necessari indicar quin és l'ordre entre abscisses de nodes que tenen derivacions iguals o consecutives.

- **Cas $2 \leq \rho < +\infty$.** És una generalització del cas $\rho = 1$, simplement que ara s'ha de conservar l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes de la forma $(x, j), (x', j + \rho')$ amb $1 \leq \rho' \leq \rho$ (nodes amb derivacions diferint com a molt en ρ unitats). Per exemple, quan $\rho = 2$ obtenim la següent figura.

Figura 3.4. Equivalència \sim_2 .

Les classes d'equivalència del conjunt quocient \mathcal{C}/\sim_ρ vindran determinades per gràfics de configuracions, amb les línies verticals necessàries per a que quedi ben clar, per a tots els parells de nodes tals que les seves derivacions difereixin com a molt en ρ unitats, quin és l'ordre entre les seves abscisses.

- **Cas $\rho = +\infty$.** En aquest cas és necessari conèixer l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes. Això s'aconsegueix si en el gràfic d'una configuració A , es marca una línia vertical per a cada abscissa $x \in \text{ab}_A$ i després

s'acaben de posar els nodes de A sobre d'aquestes línies, com per exemple es fa a la figura 3.5 (a).

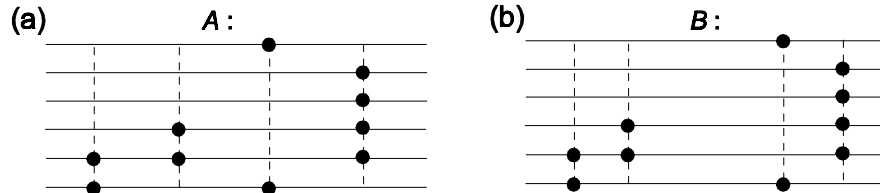


Figura 3.5. Equivalència \sim_∞ .

Si en un gràfic d'aquest tipus convenim en que no importen els valors concrets de les abscisses, i conseqüentment tampoc importa la distància que hi ha entre les línies verticals, aleshores dues configuracions A i B són ∞ -equivalents si i només si proporcionen el mateix gràfic. És a dir, els gràfics de A i de B han de tenir el mateix nombre de línies verticals, i si s'ordenen aquestes línies d'esquerra a dreta, la primera corresponent a l'abscissa més petita, la segona a la segona abscissa més petita, i així successivament, aleshores les derivacions dels nodes que ocupen cada línia i -èssima de A han de coincidir amb les derivacions dels nodes que ocupen la línia i -èssima de B . Per exemple, les configuracions A i B de la figura 3.5 proporcionen, en aquest sentit, un mateix gràfic, essent per tant configuracions ∞ -equivalents. Les classes d'equivalència del conjunt quocient $\mathcal{C} / \sim_\infty$ vindran determinades per gràfics d'aquest tipus, formats per línies verticals i nodes sobre d'aquestes línies.

Aquest concepte de gràfic pot formalitzar-se utilitzant *matrius d'incidència* [51]. Si A és una configuració i $x_1 < x_2 < \dots < x_h$ són els elements del conjunt d'abscisses ab_A , la matriu d'incidència de A és la matriu $E = [e_{ij}]_{i=1, j=0}^{h, \infty}$ de h files i infinites columnes donada per

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, j) \in A \\ 0, & \text{si } (x_i, j) \notin A \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq h, j \geq 0.$$

La informació que proporciona el gràfic de A queda recollida a la matriu E , ja que el nombre h de files de E és el nombre de línies verticals del gràfic, i una entrada $e_{ij} = 1$ en la fila i -èssima de la matriu E significa que la i -èssima línia vertical del gràfic està ocupada per un node de derivació j . Per exemple, la informació de la figura 3.5 (a) queda recollida a la següent matriu definida

per blocs:

$$E = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

La igualtat de gràfics es tradueix en igualtat de matrius i, per tant, dues configuracions són ∞ -equivalents si i només si tenen la mateixa matriu d'incidència. D'aquesta forma, les matrius d'incidència proporcionen una descripció completa de les classes d'equivalència del conjunt quocient $\mathcal{C} / \sim_\infty$.

3.2 Propietats de les ρ -equivalències

En aquesta secció estudiarem quins dels conceptes definits prèviament als capítols 1 i 2 són invariants per les equivalències \sim_ρ . Les propietats que veurem vénen motivades per la interpretació geomètrica de les equivalències \sim_ρ .

Ja hem vist, a la secció anterior, que si A i B són dues configuracions 0-equivalents aleshores tenen la mateixa longitud i el mateix nombre de nodes. També hem vist que si α, α' són dos nodes consecutius de A , aleshores $\Psi_{A,B}[\alpha], \Psi_{A,B}[\alpha']$ són dos nodes consecutius de B , i que si α és un node extrem-dret de A (resp. extrem-esquerra de A) aleshores $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és extrem-dret de B (resp. extrem-esquerra de B). Per definició es satisfà $m_A(j) = m_B(j)$ si $j \geq 0$, i per tant $M_A(j) = M_B(j)$, $j \geq 0$. Això implica que A és una configuració Pólya si i només si B ho és.

Lema 3.6. *Siguin A i B dues configuracions 1-equivalents.*

(a) *Suposem que $(x, j), (x, j+1), \dots, (x, j+p)$ són $p+1$ nodes tals que almenys un d'ells, diguem (x, j_0) , $j \leq j_0 \leq j+p$, pertany a A . Sigui $(y, j_0) = \Psi_{A,B}[(x, j_0)]$. Aleshores, són equivalents:*

(a.1) *Tots els nodes $(x, j), (x, j+1), \dots, (x, j+p)$ pertanyen a A*

(a.2) *Tots els nodes $(y, j), (y, j+1), \dots, (y, j+p)$ pertanyen a B*

A més, en aquest cas $(y, j') = \Psi_{A,B}[(x, j')]$ per a tot $j' = j, j+1, \dots, j+p$.

(b) *Siguin a, b i j_0 nombres tals que compleixen una de les quatre condicions següents: (i) $(a, j_0), (b, j_0)$ són dos nodes de A amb $a < b$, (ii) $a = -\infty$ i (b, j_0) és un node de A , (iii) $b = +\infty$ i (a, j_0) és un node de A , (iv) $a = -\infty$, $b = +\infty$, i j_0 és un nombre natural qualsevol. Posem $(a', j_0) = \Psi_{A,B}[(a, j_0)]$*

si a és finit, $(b', j_0) = \Psi_{A,B}[(b, j_0)]$ si b és finit, $a' = -\infty$ si $a = -\infty$, i $b' = +\infty$ si $b = +\infty$.

Considerem un nombre natural j tal que $|j - j_0| \leq 1$ i suposem que (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, són tots els nodes de A que tenen derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre a i b , ordenats de forma que $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$. Siguin $(y_i, j) = \Psi_{A,B}[(x_i, j)]$, $i = 1, 2, \dots, k$, les imatges d'aquests nodes. Aleshores:

- (i) $a' < y_1 < y_2 < \dots < y_k < b'$, i
- (ii) Els nodes (y_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, són exactament tots els nodes de B que tenen derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre a' i b' .

Demostració. (a) Suposem primer que es satisfà (a.1). Aplicant que $\Psi_{A,B}$ conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes del tipus (x, j') , $(x, j' + 1)$, on $j' = j, j + 1, \dots, j + p - 1$, obtenim que l'abscissa dels nodes $\Psi_{A,B}[(x, j')]$, $j' = j, j + 1, \dots, j + p$, ha de ser la mateixa. Això implica $\Psi_{A,B}[(x, j')] = (y, j')$ per a tot $j' = j, j + 1, \dots, j + p$, ja que $(y, j_0) = \Psi_{A,B}[(x, j_0)]$ té abscissa y . En particular obtenim (a.2). Que (a.2) implica (a.1) prové de fer servir la implicació anterior, que ja sabem que és certa, amb els papers de A i B intercanviats.

A més, en cas de satisfer-se (a.1) o (a.2), quan hem provat la implicació (a.1) \Rightarrow (a.2) ja hem vist que $(y, j') = \Psi_{A,B}[(x, j')]$ si $j' = j, j + 1, \dots, j + p$.

(b) Les desigualtats $a' < y_1 < y_2 < \dots < y_k < b'$ són una conseqüència immediata de que $\Psi_{A,B}$ conserva 1-abscisses. Per provar (ii) procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix un node $(y, j) \in B$ de derivació j , amb $a' < y < b'$, i diferent de tots els (y_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$. L'antiimatge d'aquest node, $(x, j) = \Psi_{A,B}^{-1}[(y, j)]$, té derivació j , és diferent de tots els (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, i a més $a < x < b$ (aquest últim fet és degut a que $\Psi_{A,B}$ conserva 1-abscisses). Hem trobat doncs un nou node, $(x, j) \in A$, diferent de tots els (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, amb derivació j i abscissa compresa estrictament entre a i b ; contradicció. \square

Una conseqüència del resultat anterior és el següent corol·lari.

Corol·lari 3.7. *Siguin A i B dues configuracions 1-equivalents.*

- (i) $\Psi_{A,B}$ conserva multiplicitats, peus, caps, peus de nodes i caps de nodes. Això és, si $\alpha \in A$ aleshores

1. $\text{mult}_B[\Psi_{A,B}[\alpha]] = \text{mult}_A[\alpha]$.

2. α és peu de A (resp. cap de A) si i només si $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és peu de B (resp. cap de B).
 3. $\text{peu}_B[\Psi_{A,B}[\alpha]] = \Psi_{A,B}[\text{peu}_A[\alpha]]$, $\text{cap}_B[\Psi_{A,B}[\alpha]] = \Psi_{A,B}[\text{cap}_A[\alpha]]$.
- (ii) $n_A(j) = n_B(j)$ per a tot $j \geq 0$, on $n_A(j)$ (resp. $n_B(j)$) és el nombre de nodes de A , comptant multiplicitats, que tenen derivació j (resp. el nombre de nodes de B , comptant multiplicitats, que tenen derivació j).
- (iii) La imatge $\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}]$ d'un grup \mathfrak{g} de A és un grup de B . Aquests dos grups tenen la mateixa derivació i són del mateix tipus. A més, si \mathfrak{g} és interior o exterior-dret aleshores $\Psi_{A,B}[\sigma_A^-(\mathfrak{g})] = \sigma_B^-(\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}])$, i si \mathfrak{g} és interior o exterior-esquerra, $\Psi_{A,B}[\sigma_A^+(\mathfrak{g})] = \sigma_B^+(\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}])$. Amb altres paraules, el node o nodes que determinen $\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}]$ són la imatge, per $\Psi_{A,B}$, dels nodes que determinen \mathfrak{g} .
- (iv) Un node $\alpha \in A$ és un node interior, exterior (exterior-dret, exterior-esquerra) o atípic de A si i només si $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és interior, exterior (exterior-dret, exterior-esquerra) o atípic de B respectivament.
- (v) Sigui $(x, j) \in A$ un cap de A , i $(y, j) = \Psi_{A,B}[(x, j)]$. Aleshores el signe del node $(x, j + 1)$ en A és igual al signe de $(y, j + 1)$ en B . És a dir,

$$\text{sgn}_A[(x, j + 1)] = \text{sgn}_B[(y, j + 1)] .$$

Anàlogament, si $(x, j) \in A$ és un peu de A amb $j \geq 1$ i $(y, j) = \Psi_{A,B}[(x, j)]$, aleshores $\text{sgn}_A[(x, j - 1)] = \text{sgn}_B[(y, j - 1)]$.

Demostració. L'apartat (i) és una conseqüència directa de l'apartat (a) del lema anterior, i (ii) de que $\Psi_{A,B}$ conserva multiplicitats.

(iii) Suposem, per exemple, que \mathfrak{g} és el grup interior de A determinat pels nodes consecutius $\sigma_A^-(\mathfrak{g}) = (a, j - 1)$, $\sigma_A^+(\mathfrak{g}) = (b, j - 1)$. Siguin (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, els nodes de A que tenen derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre a i b , ordenats de forma que $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$, i suposem que la multiplicitat en A de cada (x_i, j) és m_i . El grup \mathfrak{g} ve donat explícitament per

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{i=1}^k \{(x_i, j), (x_i, j + 1), \dots, (x_i, j + m_i - 1)\} .$$

Siguin també $(y_i, j) = \Psi_{A,B}[(x_i, j)]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Del lema anterior, apartat (a), es desprèn que la imatge de \mathfrak{g} és

$$\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}] = \bigcup_{i=1}^k \{(y_i, j), (y_i, j + 1), \dots, (y_i, j + m_i - 1)\} \quad (3.3)$$

Anem a veure que $\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}]$ és un grup interior de B . Els nodes $(a', j-1) = \Psi_{A,B}[(a, j-1)]$ i $(b', j-1) = \Psi_{A,B}[(b, j-1)]$ són consecutius en B perquè els nodes $(a, j-1)$ i $(b, j-1)$ ho són en A . En el lema 3.6, apartat (b), s'estableix que $a' < y_1 < y_2 < \dots < y_k < b'$ i que els nodes (y_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, són exactament tots els nodes de B que tenen derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre a' i b' . Tenint ara en compte que $\Psi_{A,B}$ conserva multiplicitats, i que per tant la multiplicitat en B de cada (y_i, j) és m_i , obtenim, de (3.3), que $\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}]$ és el grup interior de B determinat pels nodes consecutius $(a', j-1), (b', j-1)$. Observem que aquests dos nodes que determinen $\Psi_{A,B}[\mathfrak{g}]$ són $(a', j-1) = \Psi_{A,B}[\sigma_A^-(\mathfrak{g})]$ i $(b', j-1) = \Psi_{A,B}[\sigma_A^+(\mathfrak{g})]$. Els altres casos per a \mathfrak{g} (exterior, atípic) són anàlegs a l'anterior.

L'apartat (iv) trivialment es dedueix de (iii).

(v) Suposem que (x, j) és un cap de A . Els signes $\text{sgn}_A[(x, j+1)]$ i $\text{sgn}_B[(y, j+1)]$ són, respectivament, $(-1)^{n-(j+1)+\theta}$ i $(-1)^{n-(j+1)+\theta'}$, on θ i θ' vénen donats per

$$\theta = \sum_{\substack{(x', j+1) \in A \\ x' < x}} \text{mult}_A[(x', j+1)] ; \theta' = \sum_{\substack{(y', j+1) \in B \\ y' < y}} \text{mult}_B[(y', j+1)] .$$

Ara bé, com que $\Psi_{A,B}$ conserva 1-abscisses, els nodes de A del tipus $(x', j+1)$ amb $x' < x$, es corresponen, per $\Psi_{A,B}$, amb els nodes de B del tipus $(y', j+1)$ amb $y' < y$. Això implica $\theta = \theta'$, puix que $\Psi_{A,B}$ conserva multiplicitats, i per tant $\text{sgn}_A[(x, j+1)] = \text{sgn}_B[(y, j+1)]$. De forma anàloga, si (x, j) és un peu de A s'obté $\text{sgn}_A[(x, j-1)] = \text{sgn}_B[(y, j-1)]$. \square

Proposició 3.8. *Siguin A i B dues configuracions 1-equivalents. Aleshores: (i) A és quasi-completa si i només si B ho és, (ii) A és completa si i només si B ho és, i (iii) A és conservativa si i només si B ho és.*

Demostració. És suficient veure la implicació (\Rightarrow) de (i), (ii) i (iii). Si A és quasi-completa, pel lema 3.6, apartat (b), B també és quasi-completa. Si A és completa aleshores B també és completa, ja que pel corol·lari 3.7 (iii), els grups de A es corresponen amb els grups de B . Si A és conservativa (i.e., tots els peus de A de derivació com a mínim 1 tenen multiplicitat parell), utilitzant que $\Psi_{A,B}$ conserva multiplicitats obtenim que B també és conservativa. \square

El corol·lari 3.7 i la proposició 3.8 estableixen, almenys de forma plausible, que la majoria dels conceptes prèviament definits als capítols 1 i 2 són invariants per l'equivalència \sim_1 . Diem la majoria perquè el concepte de node suportat no és invari-

ant per \sim_1 , i conseqüentment tampoc ho és el de configuració quasi-conservativa. En canvi, aquests conceptes sí que són invariants per l'equivalència \sim_∞ , tal com mostra la següent proposició.

Proposició 3.9. *Siguin A i B dues configuracions ∞ -equivalents.*

- (i) *Un node $\alpha \in A$ és suportat en A si i només si $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és suportat en B .*
- (ii) *A és quasi-conservativa si i només si B és quasi-conservativa.*

Demostració. És suficient veure la implicació (\Rightarrow) de (i) i (ii). Suposem que $\alpha = (x, j) \in A$ és un node suportat en A . Amb altres paraules, existeixen dos nodes $(x_1, j_1) \in A$ i $(x_2, j_2) \in A$ tals que $x_1 < x < x_2$, $j_1 < j$ i $j_2 < j$. Siguin $(y, j) = \Psi_{A,B}[(x, j)]$, $(y_1, j_1) = \Psi_{A,B}[(x_1, j_1)]$, $(y_2, j_2) = \Psi_{A,B}[(x_2, j_2)]$. Com que $\Psi_{A,B}$ conserva ∞ -abscisses, es tenen les desigualtats $y_1 < y < y_2$, $j_1 < j$ i $j_2 < j$, i per tant $\Psi_{A,B}[\alpha]$ és suportat en B . Suposem ara que A és quasi-conservativa. És a dir, tots els peus de A que són suportats tenen multiplicitat parell. De l'apartat (i) que acabem de veure i de que $\Psi_{A,B}$ conserva peus i multiplicitats es dedueix que B també és quasi-conservativa. \square

Acabem amb una observació de la que en farem ús tot sovint.

Observació 3.10. *Sigui $P(x)$ un polinomi no constant, i a, b i λ tres nombres reals amb $a > 0$, $\lambda \neq 0$. Aleshores, l'espectre del polinomi $Q(x) = \lambda P(ax + b)$ és ∞ -equivalent a l'espectre de P .*

En efecte, calculant les derivades del polinomi Q resulta

$$Z(Q) = \left\{ \left(\frac{x-b}{a}, j \right) \mid (x, j) \in Z(P) \right\}.$$

L'aplicació $\Psi : Z(P) \rightarrow Z(Q)$ donada per $\Psi[(x, j)] = \left(\frac{x-b}{a}, j \right)$ és bijectiva, conserva derivacions i conserva ∞ -abscisses. Aquest últim fet prové de que $a > 0$.

3.3 Representació

Definició 3.11. Sigui $0 \leq \rho \leq +\infty$. Direm que l'equivalència \sim_ρ té la *propietat de representació* si es compleix que:

tota configuració completa és ρ -equivalent a un espectre.

És a dir, si per a tota configuració completa N , hi ha un espectre Z tal que $Z \sim_\rho N$. Això és el mateix que demanar que tota classe d'equivalència del conjunt quocient $\widehat{\mathcal{C}} / \sim_\rho$ sigui representable per un espectre (i.e. contingui, com a mínim, un espectre). D'aquí ve el nom de propietat de representació.

Si la propietat de representació és satisfeta, sigui quina sigui la configuració completa N que triem existirà un polinomi P tal que $Z(P) \sim_\rho N$. Això es traduirà en propietats sobre l'ordenació de les arrels del polinomi P i de les seves derivades. Com que el procés anterior es pot anar repetint per a cada configuració completa N , la propietat de representació no és més que un resultat d'existència de polinomis amb certa ordenació de les seves arrels i arrels de les seves derivades.

Observem que si $0 \leq \rho' \leq \rho \leq +\infty$ i l'equivalència \sim_ρ té la propietat de representació, aleshores l'equivalència $\sim_{\rho'}$ també la té.

La resta d'aquesta secció s'estructura de la següent manera.

- A la subsecció 3.3.1 veurem que la propietat de representació sempre és certa quan ens restringim a configuracions completes de longitud com a molt tres. Exactament, mostrarem que tota configuració completa de longitud $n \in \{1, 2, 3\}$ és ∞ -equivalent, i per tant ρ -equivalent si $0 \leq \rho \leq +\infty$, a un espectre. Aquest fet també ens servirà per establir una classificació dels polinomis de grau n , $1 \leq n \leq 3$, en base als seus espectres.
- A la subsecció 3.3.2 mostrarem que per a tot nombre natural $n \geq 4$ existeixen configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents, i per tant no ρ -equivalents si $\rho \geq 2$, a un espectre. En particular obtindrem el resultat principal d'aquesta secció, que diu que cap equivalència \sim_ρ , $\rho \geq 2$, té la propietat de representació.

3.3.1 Representació per a longituds 1, 2, 3

A continuació establim que tota configuració completa de longitud 1, 2 o 3 és ∞ -equivalent a un espectre.

Teorema 3.12. *Es verifiquen els apartats següents.*

- (i) *Tota configuració completa de longitud 1 és ∞ -equivalent a l'espectre següent,*

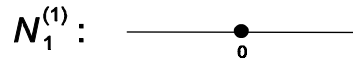


Figura 3.6

que és l'espectre del polinomi $P(x) = x$.

- (ii) Tota configuració completa de longitud 2 és ∞ -equivalent a un, i només un, dels tres espectres següents,

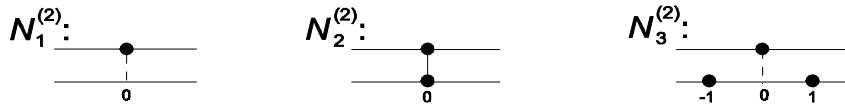


Figura 3.7

que són els espectres dels polinomis $P(x) = x^2+1$, $P(x) = x^2$, i $P(x) = x^2-1$ respectivament.

- (iii) Tota configuració completa de longitud 3 és ∞ -equivalent a un, i només un, dels tretze espectres $N_i^{(3)}$, $i = 1, 2, \dots, 13$. A la figura 3.8 hi ha els espectres dels polinomis $P(x) = (x + 1)x(x - 2)$, $P(x) = (x + 1)x(x - 1)$, i $P(x) = (x + 2)x(x - 1)$ respectivament.

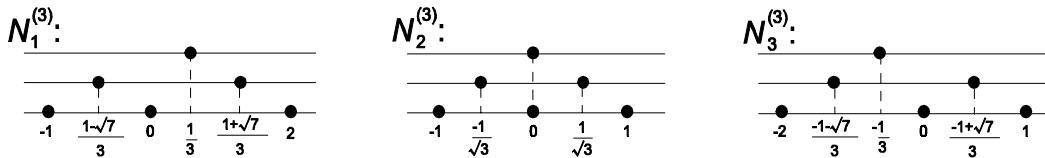


Figura 3.8

A la figura 3.9 hi ha els espectres dels polinomis $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$, $P(x) = (x + 1)(x - 1)^2$, i $P(x) = x^3$ respectivament.

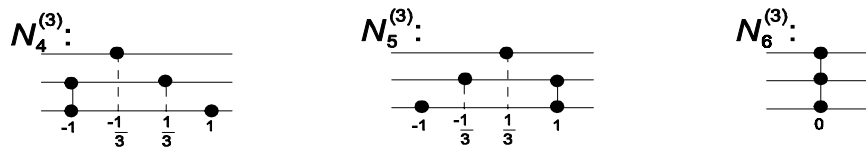


Figura 3.9

A la figura 3.10 hi ha els espectres dels polinomis $P(x) = x^3 - 3x - 18$, $P(x) = x^3 - 3x + 18$, $P(x) = x^3 - 1$, i $P(x) = x^3 + 1$ respectivament.

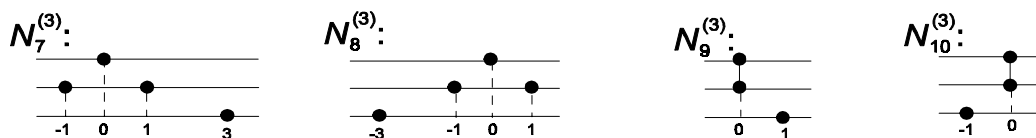


Figura 3.10

Finalment, a la figura 3.11 hi ha els espectres dels polinomis $P(x) = x^3 + x - 2$, $P(x) = x^3 + x$, i $P(x) = x^3 + x + 2$ respectivament.

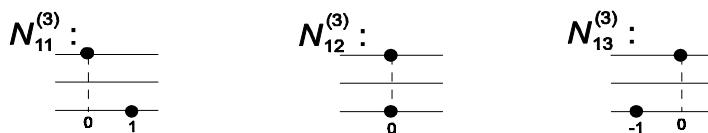


Figura 3.11

Demostració. Observem que de les configuracions anteriors no n'hi ha dues que siguin ∞ -equivalents. Per tant, només cal veure que tota configuració completa de longitud 1, 2 o 3 és ∞ -equivalent a alguna de les configuracions de l'enunciat. Per a longitud 1 és trivial. Si N és una configuració completa de longitud 1 aleshores $m_N(0) = m_N(\ell_N - 1) = 1$, i per tant $N = \{(a, 0)\}$ per a cert nombre real a . Això implica $N \sim_\infty N_1^{(1)}$.

Per als apartats (ii) i (iii) utilitzarem el corol·lari 2.14.

Sigui N una configuració completa de longitud 2. Tenim $m_N(1) = m_N(\ell_N - 1) = 1$. Pel corol·lari 2.14 sabem que o bé $n_N(0) = 0$ o bé $n_N(0) = 2$. Si $n_N(0) = 0$, N no té nodes de derivació 0, obtenint que N és de la forma $N = \{(a, 1)\}$, $a \in \mathbb{R}$. Per tant en aquest cas $N \sim_\infty N_1^{(2)}$. Suposem ara $n_N(0) = 2$. Haurà de ser $1 \leq m_N(0) \leq 2$. Si $m_N(0) = 2$, considerem els dos nodes $(a, 0), (b, 0)$ de N que tenen derivació 0, amb $a < b$. Per ser N quasi-completa, l'únic node de N que té derivació 1 ha de tenir la seva abscissa compresa, estrictament, entre a i b . D'aquí que $N = \{(a, 0), (c, 1), (b, 0)\}$ on $a < c < b$, implicant $N \sim_\infty N_3^{(2)}$. Finalment suposem $n_N(0) = 2$ i $m_N(0) = 1$. Estem en la situació $(a, 0), (a, 1) \in N$ per a cert $a \in \mathbb{R}$, essent $(a, 0)$ l'únic node de N que té derivació 0. Això implica $N = \{(a, 0), (a, 1)\}$, i en particular $N \sim_\infty N_2^{(2)}$.

Sigui ara N una configuració completa de longitud 3. Es compleix $m_N(2) = m_N(\ell_N - 1) = 1$. Altre cop pel corol·lari 2.14 sabem que $n_N(0) = 1$ o $n_N(0) = 3$, i que $n_N(1) = 0$ o $n_N(1) = 2$.

1. Cas $n_N(0) = 1$. Tenim $(a, 0) \in N$ per a cert $a \in \mathbb{R}$, essent $(a, 0)$ l'únic node de N que té derivació 0, i a més $(a, 1)$ no pertany a N . Com que $m_N(1) \leq n_N(1) \leq 2$, hi ha tres possibilitats per a $m_N(1)$:

- (i) $m_N(1) = 0$. Si $(b, 2)$ és l'únic node de N que té derivació 2 aleshores $N = \{(a, 0), (b, 2)\}$. En funció de si $b < a$, $b = a$, o $b > a$, N és ∞ -equivalent a $N_{11}^{(3)}$, $N_{12}^{(3)}$, o $N_{13}^{(3)}$ respectivament
- (ii) $m_N(1) = 1$. Per ser $n_N(1) = 0$ o 2, forçosament $n_N(1) = 2$. Així, si $(b, 1)$ és l'únic node de N de derivació 1, tindrem també $(b, 2) \in N$. El node $(b, 2)$ és l'únic node de N de derivació 2, i per tant $N = \{(a, 0), (b, 1), (b, 2)\}$. Això implica que $N \sim_{\infty} N_9^{(3)}$ si $b < a$, i $N \sim_{\infty} N_{10}^{(3)}$ si $b > a$. Notem que el cas $b = a$ no es pot donar, ja que $(a, 1)$ no és un node de N .
- (iii) $m_N(1) = 2$. Considerem els dos nodes de N , $(b, 1), (c, 1)$, que tenen derivació 1, amb $b < c$. Òbviament $b \neq a$ i $c \neq a$. Hi ha tres possibilitats: (1) $b < c < a$, (2) $a < b < c$, i (3) $b < a < c$. En els casos (1) i (2), utilitzant que N és quasi-completa es dedueix que l'únic node de N de derivació 2 ha de tenir la seva abscissa compresa, estrictament, entre b i c . Això implica que N és ∞ -equivalent a $N_7^{(3)}$ en el cas (1), i ∞ -equivalent a $N_8^{(3)}$ en el cas (2). El cas (3) no es pot donar, ja que N hauria de ser d'alguna de les tres formes següents,

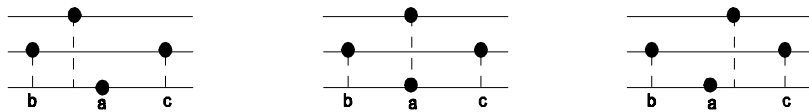


Figura 3.12

però cap d'aquestes configuracions és completa. En efecte, el grup exterior-dret determinat pel node de derivació 0 de cadascuna d'elles té cardinal 1, que és senar.

2. Cas $n_N(0) = 3$. Hi ha tres possibilitats per a $m_N(0)$:

- (i) $m_N(0) = 1$. Si $(a, 0)$ és l'únic node de derivació 0 de N , els nodes $(a, 0), (a, 1), (a, 2)$ són de N . Com que $n_N(1) = 0$ o 2, $(a, 1)$ és l'únic node de N que té derivació 1. Arribem a que N és ∞ -equivalent a $N_6^{(3)}$.

- (ii) $m_N(0) = 2$. Tindrem exactament dos nodes, $(a, 0)$ i $(b, 0)$, $a < b$, que són de N i tenen derivació 0. Un d'aquests nodes té multiplicitat 2 i l'altre multiplicitat 1. Suposem, per exemple, que $\text{mult}_N[(a, 0)] = 2$ i $\text{mult}_N[(b, 0)] = 1$. Utilitzant que N és quasi-completa hi ha d'haver un node, $(c, 1) \in N$, tal que $a < c < b$. No hi poden haver més nodes de N que tinguin derivació 1 a part de $(a, 1)$ i $(c, 1)$, ja que $n_N(1) = 0$ o 2. Emprant altre cop que N és quasi-completa, l'únic node de N de derivació 2 té la seva abscissa compresa, estrictament, entre a i c . Arribem doncs a que N és ∞ -equivalent a $N_4^{(3)}$. De forma anàloga, si $\text{mult}_N[(a, 0)] = 1$ i $\text{mult}_N[(b, 0)] = 2$ aleshores N és ∞ -equivalent a $N_5^{(3)}$.
- (iii) $m_N(0) = 3$. Tenim exactament tres nodes, $(a, 0)$, $(b, 0)$ i $(c, 0)$, $a < b < c$, que són de N i tenen derivació 0. Utilitzant que N és quasi-completa trobem dos nodes de derivació 1, $(x, 1) \in N$ i $(y, 1) \in N$, complint $a < x < b < y < c$. Com abans ($n_N(1) = 0$ o 2), no hi pot haver cap més node de N que tingui derivació 1 a part de $(x, 1)$ i $(y, 1)$. Tornant a aplicar que N és quasi-completa, l'únic node de N de derivació 2, diguem $(u, 2) \in N$, satisfà $x < u < y$. En funció de si $u < b$, $u = b$ o $u > b$ arribem a que N és ∞ -equivalent a $N_3^{(3)}$, $N_2^{(3)}$ o $N_1^{(3)}$ respectivament. \square

Acabarem donant una classificació dels polinomis de grau n , $1 \leq n \leq 3$.

Sigui $r_n = 1, 3$ o 13 en funció de si $n = 1, 2$ o 3 respectivament. Considerem també les configuracions $N_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, r_n$, del teorema anterior. L'únic que ens interessarà d'un polinomi $P \in \mathbb{R}_n^*[x]$ és la seva *configuració associada*, definida com l'única configuració de les $N_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, r_n$, que satisfà $Z(P) \sim_\infty N_i^{(n)}$. El teorema anterior assegura que $N_i^{(n)}$ està ben definida, ja que $Z(P)$ és en particular una configuració completa. El fet que totes les configuracions $N_i^{(n)}$ siguin espectres mostra que cap d'elles és supèrflua, és a dir, que tota $N_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, r_n$, és la configuració associada de, com a mínim, un polinomi. Per a dos polinomis $P, Q \in \mathbb{R}_n^*[x]$, direm que $P \sim_\infty Q$ si els polinomis P i Q tenen la mateixa configuració associada. La relació \sim_∞ és una relació d'equivalència en el conjunt $\mathbb{R}_n^*[x]$, que permet classificar els polinomis en funció de la configuració associada que tenen. Una manera equivalent de definir-la és

$$P \sim_\infty Q \Leftrightarrow Z(P) \sim_\infty Z(Q) .$$

El cardinal del conjunt quocient $\mathbb{R}_n^*[x] / \sim_\infty$ és exactament r_n , ja que les classes

d'equivalència vénen determinades per les configuracions $N_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, r_n$. Notem que per afirmar això, el fet clau és que cap de les configuracions $N_i^{(n)}$ és supèrflua (en cas contrari, si hi haguessin configuracions supèrflues, el nombre de classes d'equivalència seria estrictament menor que r_n).

D'aquesta forma, els polinomis de grau 1 estan en una sola classe, els de grau 2 en $r_2 = 3$ classes i els de grau 3 en $r_3 = 13$ classes.

Finalment, donarem explícitament totes les classes d'equivalència.

- **Cas n = 1.** L'única classe és $\mathbb{R}_1^*[x]$.
- **Cas n = 2.** Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un polinomi de grau 2. En funció de si el seu discriminant $\delta = \delta(P) = b^2 - 4ac$ és positiu, zero o negatiu s'obté la següent taula:

$\delta = b^2 - 4ac$	configuració associada
$\delta > 0$	$N_3^{(2)}$
$\delta = 0$	$N_2^{(2)}$
$\delta < 0$	$N_1^{(2)}$

Com a conseqüència, les tres classes d'equivalència de $\mathbb{R}_2^*[x]/\sim_\infty$ són les següents: $\{P \in \mathbb{R}_2^*[x] \mid \delta(P) > 0\}$, $\{P \in \mathbb{R}_2^*[x] \mid \delta(P) = 0\}$ i $\{P \in \mathbb{R}_2^*[x] \mid \delta(P) < 0\}$.

- **Cas n = 3.** Calcularem, per a cada polinomi P de grau tres, la seva configuració associada. Podem suposar que P és mònic atès que els polinomis P i λP tenen la mateixa configuració associada si $\lambda \neq 0$ és constant. Sigui $P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomi mònic de grau 3. Fent la transformació $x \mapsto x - \frac{a_2}{3}$ no s'altera la configuració associada (els polinomis $P(x)$ i $P(x - \frac{a_2}{3})$ tenen espectres ∞ -equivalents). En definitiva, podem suposar que P és de la forma $P(x) = x^3 + px + q$, on

$$p = -\frac{1}{3}a_2^2 + a_1$$

$$q = \frac{2}{27}a_2^3 - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$$

El discriminant de P és $\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. En funció de δ, p i q s'obté la següent taula:

$\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$	configuració associada	
$\delta > 0$	$p > 0$	$\begin{cases} q > 0 & N_{13}^{(3)} \\ q = 0 & N_{12}^{(3)} \\ q < 0 & N_{11}^{(3)} \end{cases}$
	$p = 0$	$\begin{cases} q > 0 & N_{10}^{(3)} \\ q < 0 & N_9^{(3)} \end{cases}$
	$p < 0$	$\begin{cases} q > 0 & N_8^{(3)} \\ q < 0 & N_7^{(3)} \end{cases}$
$\delta = 0$	$p = 0$	$\begin{cases} q = 0 & N_6^{(3)} \end{cases}$
	$p < 0$	$\begin{cases} q > 0 & N_5^{(3)} \\ q < 0 & N_4^{(3)} \end{cases}$
$\delta < 0$	$p < 0$	$\begin{cases} q > 0 & N_3^{(3)} \\ q = 0 & N_2^{(3)} \\ q < 0 & N_1^{(3)} \end{cases}$

Els casos que falten en la taula anterior (per exemple el cas $\delta > 0$, $p = 0$ i $q = 0$) no es poden donar. És senzill ara acabar d'explicitar les tretze classes en que queden classificats els polinomis de grau 3, només cal desfer els canvis que hem fet al polinomi P (convertir-lo en mònic i la transformació $x \mapsto x - \frac{a_2}{3}$).

3.3.2 No representació per a longituds $n \geq 4$ si $\rho \geq 2$

En aquest apartat provarem que per a tot $n \geq 4$ hi ha configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents a un espectre. Conseqüentment, cap equivalència \sim_ρ , $\rho \geq 2$, té la propietat de representació.

Siguin u i v dos nombres naturals no nuls i $n = u + v$. En el que segueix, $P(x)$ és el polinomi de grau n

$$P(x) = (x + 1)^u(x - 1)^v .$$

Lema 3.13. *Sigui Q un polinomi amb $Z(Q) \sim_1 Z(P)$. Aleshores $Z(Q) \sim_\infty Z(P)$.*

Demostració. De les propietats invariants de l'equivalència \sim_1 sabem que el grau de Q és n i que Q té exactament dues arrels reals a i b , $a < b$, amb multiplicitats

respectives u i v . Com que $u + v = n$ resulta

$$Q(x) = C(x - a)^u(x - b)^v \quad (3.4)$$

per a certa constant $C \neq 0$. De (3.4) es dedueix que

$$Q(x) = \tilde{C}P\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)$$

on $\tilde{C} \neq 0$ és una altra constant, i que per tant $Z(Q) \sim_\infty Z(P)$ (veure l'observació 3.10). \square

Lema 3.14. *Sigui N una configuració completa amb $N \sim_1 Z(P)$ i $N \approx_2 Z(P)$. Aleshores N no pot ser 2-equivalent a un espectre.*

Demostració. És conseqüència del lema anterior. Suposem que $N \sim_2 Z(Q)$ per a cert polinomi Q . Tindrem $Z(Q) \sim_1 N \sim_1 Z(P)$, i per tant $Z(Q) \sim_\infty Z(P)$. Això implica $N \sim_2 Z(Q) \sim_2 Z(P)$, que es contradueix amb que $N \approx_2 Z(P)$. \square

Com a exemple d'aplicació del lema anterior, en el següent paràgraf demostrem que, almenys per a $n = 4$, hi ha configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents a un espectre. Això també servirà per il·lustrar la demostració de la propera proposició.

Considerem el polinomi P quan $u = v = 2$, $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$. El seu espectre $Z(P)$ està representat en la part (a) de la següent figura.

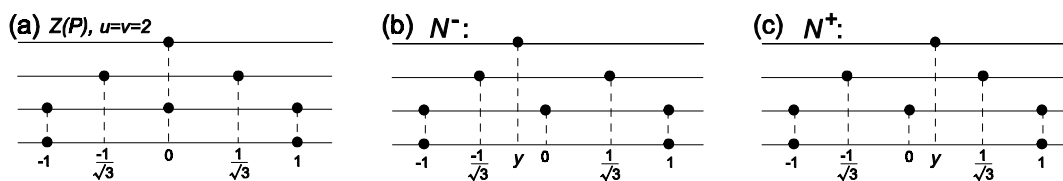


Figura 3.13. No representació per a $n = 4$, $\rho = 2$.

La configuració completa N^- de la part (b) està obtinguda a partir de $Z(P)$ només que reemplaçant el node $(0, 3)$ de $Z(P)$ per un nou node $(y, 3)$, on y és un nombre real amb $-\frac{1}{\sqrt{3}} < y < 0$. El mateix per a N^+ , però ara $0 < y < \frac{1}{\sqrt{3}}$. De les configuracions N^- , N^+ , $Z(P)$, no n'hi ha dues que siguin 2-equivalents, però totes elles són 1-equivalents entre si. En particular el lema 3.14 assegura que ni N^- ni N^+ poden ser 2-equivalents a un espectre.

Concloem així que hi ha configuracions completes de longitud $n = 4$ que no són 2-equivalents a un espectre.

Proposició 3.15. *Per a cada nombre natural $n \geq 4$ hi ha configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents a un espectre.*

Demostració. Siguin $u \geq 2$ i $v \geq 2$ dos nombres naturals amb $u + v = n$, i sigui P el polinomi $P(x) = (x + 1)^u(x - 1)^v$. Fent servir el teorema de Rolle i inducció matemàtica en $j = 0, 1, \dots, n - 1$, és fàcil veure que:

- (i) Totes les arrels de $P^{(j)}$ són reals. Les que són diferents de $x = -1$ i de $x = 1$ són simples i estan a l'interval $(-1, 1)$.
- (ii) $x = -1$ (resp. $x = 1$) és arrel de $P^{(j)}$ si i només si $j \leq u - 1$ (resp. $j \leq v - 1$).

Aquestes dues propietats, juntament amb la hipòtesi $u \geq 2$, $v \geq 2$, asseguren que les tres arrels de $P^{(n-3)}$ són reals i simples. Siguin $y_1 < y_2 < y_3$ les arrels de $P^{(n-3)}$. Aplicant el teorema de Rolle trobem les dues arrels de $P^{(n-2)}$, x_1 i x_2 , amb $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < y_3$. Tornant a aplicar ara el teorema de Rolle sabem que l'única arrel y^* de $P^{(n-1)}$ compleix $x_1 < y^* < x_2$. En definitiva, si representem els nodes de $Z(P)$ que tenen derivació $n - 3$, $n - 2$ i $n - 1$, estarem en alguna de les tres situacions següents:

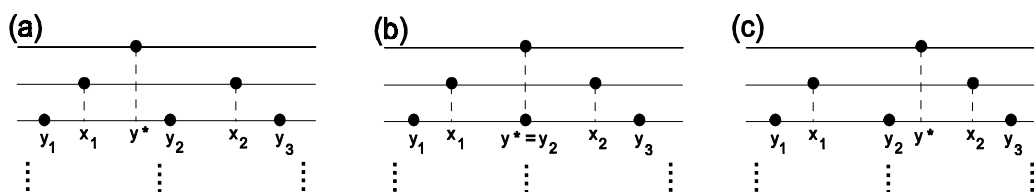


Figura 3.14. Espectre de P .

La situació (a) es presenta quan $y^* < y_2$, la (b) quan $y^* = y_2$, i la (c) quan $y^* > y_2$. No serà necessari determinar la situació (a), (b) o (c) en que ens trobem, en tindrem prou sabent que passa algun dels tres casos (a), (b) o (c).

Definim a continuació tres configuracions N^- , N^0 i N^+ de la següent forma. Totes elles estan obtingudes a partir de $Z(P)$ només que reemplaçant el node $(y^*, n - 1)$ de $Z(P)$ per un nou node $(y, n - 1)$, on y és un nombre real. És a dir, només es diferencien de $Z(P)$ en el node $(y^*, n - 1)$, que l'hem transformat en el node $(y, n - 1)$. Per a N^- el nombre real y el prenem satisfent $x_1 < y < y_2$. Per a N^0 prenem exactament $y = y_2$, i per a N^+ prenem y satisfent $y_2 < y < x_2$. A la figura 3.15 hi ha representades aquestes tres configuracions.

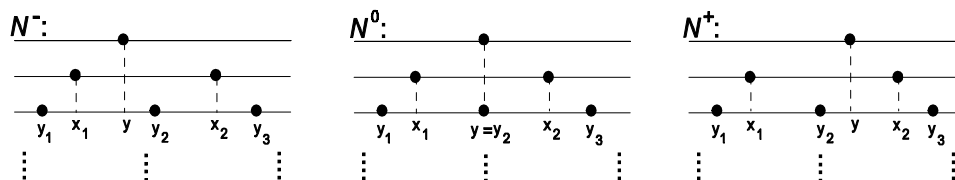


Figura 3.15

Les configuracions N^- , N^0 i N^+ són completes, tenen longitud n i són 1-equivalents entre elles, però no n'hi ha dues d'elles que siguin 2-equivalents. A més a més, l'espectre $Z(P)$ és 2-equivalent a una i només una d'elles. Exactament, si $y^* < y_2$ aleshores $Z(P) \sim_2 N^-$, si $y^* = y_2$ aleshores $Z(P) \sim_2 N^0$, i si $y^* > y_2$ aleshores $Z(P) \sim_2 N^+$. De les tres configuracions N^- , N^0 i N^+ , les dues que no són 2-equivalents a $Z(P)$ estan sota les hipòtesis del lema 3.14, i per tant cap d'aquestes dues configuracions pot ser 2-equivalent a un espectre. Això completa la demostració. \square

Conseqüentment,

Corol·lari 3.16. *Si $\rho \geq 2$ aleshores l'equivalència \sim_ρ no té la propietat de representació.* \square

3.4 Esquemes

A la secció anterior hem introduït la propietat de representació i hem vist que si $\rho \geq 2$, aquesta ja no s'assolia. En els capítols posteriors ens ocuparem del cas $\rho = 1$ i en el capítol 8 donarem el teorema de representació, que diu que per a $\rho = 1$ sí que s'assoleix la propietat de representació. És a dir, provarem que tota configuració completa és 1-equivalent a un espectre. Com a conseqüència, l'equivalència \sim_0 també tindrà la propietat de representació.

Com que a partir d'ara el que ens interessarà és l'equivalència \sim_1 , per simplificar notacions anomenarem *equivalència* (\sim) a l'equivalència \sim_1 i parlarem de *configuracions equivalents* en lloc de configuracions 1-equivalents.

Definició 3.17. Els elements del conjunt quocient \mathcal{C}/\sim s'anomenen *esquemes*. La *longitud* d'un esquema $E \in \mathcal{C}/\sim$ és la longitud d'un representant qualsevol

$A \in E$. Aquesta té sentit perquè dues configuracions 0-equivalents, i en particular dues configuracions equivalents, tenen la mateixa longitud.

Com ja hem indicat a la secció 3.1, els esquemes poden representar-se geomètricament mitjançant el gràfic d'una configuració. D'aquest gràfic, l'única informació rellevant és l'ordre entre abscisses de nodes que tenen derivacions iguals o consecutives. Per exemple, a la figura 3.16 hi ha representats dos esquemes E_1 i E_2 de longituds respectives 4 i 5.



Figura 3.16. Esquemes.

El conjunt format per tots els esquemes el denotarem per \mathcal{E} , el format per tots els esquemes de longitud més petita o igual que n per \mathcal{E}_n , i el format pels esquemes de longitud exactament n per \mathcal{E}_n^* .

Direm que un esquema és *complet* si tots els seus representants són configuracions completes. La proposició 3.8 estableix que per a que un esquema sigui complet, és necessari i suficient que contingui alguna configuració completa. Com a exemple, l'esquema E_2 de la figura 3.16 és complet. Denotem per $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_n$ i $\widehat{\mathcal{E}}_n^*$ els conjunts formats, respectivament, pels esquemes complets, pels esquemes complets de longitud menor o igual que n , i pels esquemes complets de longitud n .

Comentari 3.18. Observem que per als conjunts d'esquemes anteriorment definits es tenen les igualtats

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{C}/\sim, \quad \mathcal{E}_n = \mathcal{C}_n/\sim, \quad \mathcal{E}_n^* = \mathcal{C}_n^*/\sim, \\ \widehat{\mathcal{E}} &= \widehat{\mathcal{C}}/\sim, \quad \widehat{\mathcal{E}}_n = \widehat{\mathcal{C}}_n/\sim, \quad \widehat{\mathcal{E}}_n^* = \widehat{\mathcal{C}}_n^*/\sim \end{aligned} \quad (3.5)$$

La primera prové de la pròpia definició d'esquema, mentre que les altres són conseqüència de que els conjunts \mathcal{C}_n , \mathcal{C}_n^* , $\widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{\mathcal{C}}_n$ i $\widehat{\mathcal{C}}_n^*$ són saturats en \mathcal{C} . En general, si X és un conjunt on hi tenim definida una relació d'equivalència, denotada \sim , es diu que un subconjunt $Y \subseteq X$ és *saturat* en X si sempre que $y \in Y$, $x \in X$ i $y \sim x$ aleshores $x \in Y$. En aquest cas, no és difícil veure que les classes d'equivalència de X/\sim que admeten com a representant un element de Y , coincideixen amb les classes d'equivalència de X/\sim tals que tot representant seu és de Y , i també coincideixen amb les classes d'equivalència del conjunt quocient Y/\sim . Això implica

la resta d'igualtats de (3.5).

Com a conseqüència del teorema 3.12 obtenim el nombre d'esquemes complets que tenen longitud n , $1 \leq n \leq 3$.

Corol·lari 3.19. $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^* = 1$, $\#\widehat{\mathcal{E}}_2^* = 3$, $\#\widehat{\mathcal{E}}_3^* = 9$.

Demostració. Si N és una configuració completa de longitud n , denotem per $[N]$ a l'esquema que conté N , és a dir, la classe de N . Aquest esquema és complet i té longitud n . Això és, $[N] \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*$. Considerem les configuracions $N_i^{(n)}$, $1 \leq n \leq 3$, $i = 1, 2, \dots, r_n$, del teorema 3.12, on $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ i $r_3 = 13$. Sabem que tota configuració completa de longitud n , $1 \leq n \leq 3$, és equivalent a almenys una $N_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, r_n$. Això implica que

$$\widehat{\mathcal{E}}_n^* = \{[N_i^{(n)}] \mid i = 1, 2, \dots, r_n\}, 1 \leq n \leq 3.$$

Quan $n = 1$ obtenim $\widehat{\mathcal{E}}_1^* = \{[N_1^{(1)}]\}$, i per tant $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^* = 1$. Així, en aquest cas ja hem acabat.

Quan $n = 2$ tenim $\widehat{\mathcal{E}}_2^* = \{[N_1^{(2)}], [N_2^{(2)}], [N_3^{(2)}]\}$. És fàcil veure que de les tres configuracions $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$ i $N_3^{(2)}$ no n'hi ha dues que siguin equivalents. Això implica que les classes $[N_1^{(2)}]$, $[N_2^{(2)}]$, $[N_3^{(2)}]$ són diferents i per tant $\#\widehat{\mathcal{E}}_2^* = 3$.

Quan $n = 3$ s'ha d'observar que $N_1^{(3)} \sim N_2^{(3)} \sim N_3^{(3)}$ i que $N_{11}^{(3)} \sim N_{12}^{(3)} \sim N_{13}^{(3)}$. Aquestes són les úniques relacions entre les $N_i^{(3)}$. És a dir, si $3 \leq i < i' \leq 11$ aleshores $N_i^{(3)} \approx N_{i'}^{(3)}$. Això implica que les classes $[N_i^{(3)}]$, $i = 3, 4, \dots, 11$, són els elements diferents de $\widehat{\mathcal{E}}_3^*$ i per tant $\#\widehat{\mathcal{E}}_3^* = 9$. \square

L'esquema d'un polinomi P de grau $n \geq 1$ és l'esquema $E(P)$ que té com a representant l'espectre del polinomi P , i.e., $E(P) = [Z(P)] \in \mathcal{E}$. Aquest esquema és complet i té longitud n . És a dir, $E(P) \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*$.

Per extensió, un *esquema de polinomis* és tot aquell esquema de la forma $E(P)$ per a cert polinomi P ; o el que és el mateix, és tot aquell esquema que es pot representar per un espectre.

Tot esquema de polinomis és un esquema complet però el recíproc no és necessàriament cert.

Proposició 3.20. *Són equivalents:*

(i) *L'equivalència \sim té la propietat de representació.*

(ii) *Tot esquema complet es pot representar per un espectre.*

(iii) *Tot esquema complet és un esquema de polinomis.* □

La proposició anterior mostra que si l'equivalència \sim té la propietat de representació, els esquemes complets coincideixen amb els esquemes de polinomis. En aquest cas doncs, estudiar esquemes complets serà equivalent a estudiar esquemes de polinomis, i per tant també serà, en cert sentit, equivalent a estudiar espectres.

Sigui $\overline{\mathbb{R}}_0[x]$ el conjunt format pels polinomis a coeficients reals no constants (de grau com a mínim 1). L'equivalència \sim induïx una relació d'equivalència en $\overline{\mathbb{R}}_0[x]$ donada per $P \sim Q$ si $Z(P) \sim Z(Q)$. Dit d'una altra manera, $P \sim Q$ si $E(P) = E(Q)$. En particular P i Q han de tenir el mateix grau. Aquesta relació d'equivalència pot ser extesa a tot $\mathbb{R}[x]$ només que agrupant els polinomis constants dins una mateixa classe (classe dels polinomis constants o classe de grau 0). Tanmateix, per simplicitat, treballarem normalment a $\overline{\mathbb{R}}_0[x]$.

Queda definida, doncs, una classificació dels polinomis (polinomis no constants) en base als seus espectres. Dos polinomis estan a una mateixa classe si els seus espectres guarden certes analogies geomètriques, les que provenen de ser espectres equivalents. Aquesta classificació dels polinomis és anàloga a la considerada al final de la secció 3.3.1 per a l'equivalència \sim_∞ .

En el que segueix denotem per \mathcal{R} al conjunt quocient

$$\mathcal{R} = \overline{\mathbb{R}}_0[x] / \sim .$$

Les classes $F \in \mathcal{R}$ seran anomenades *classes de polinomis* o, si no hi ha lloc a confusió, simplement classes. Per a una classe de polinomis $F \in \mathcal{R}$ podem definir el *grau* de F com el grau d'un qualsevol dels seus representants. Denotem per \mathcal{R}_n i \mathcal{R}_n^* els subconjunts de \mathcal{R} formats per les classes de grau menor o igual que n , i les classes de grau n respectivament. Els elements de \mathcal{R}_n^* , és a dir, les classes de grau n , formen una partició de $\mathbb{R}_n^*[x]$. De fet es té $\mathcal{R}_n^* = \mathbb{R}_n^*[x] / \sim$, puix que $\mathbb{R}_n^*[x]$ és saturat en $\overline{\mathbb{R}}_0[x]$.

Sigui

$$\mathcal{S} : \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}} \tag{3.6}$$

l'aplicació definida per $\mathcal{S}(F) = E(P)$, on $P \in F$ és un representant qualsevol de F . Explícitament,

$$\mathcal{S}([P]) = [Z(P)] \quad \text{si } P \in \overline{\mathbb{R}}_0[x] ,$$

on els claudàtors denoten classes. Aquesta aplicació està ben definida i és injectiva. Si $F \in \mathcal{R}$ és una classe de polinomis de grau n , la seva imatge $\mathcal{S}(F)$ té longitud n . Això implica $\mathcal{S}(\mathcal{R}_n^*) \subseteq \widehat{\mathcal{E}}_n^*$, $n \geq 1$.

Proposició 3.21. *Són equivalents:*

- (i) *L'equivalència \sim té la propietat de representació.*
- (ii) *\mathcal{S} és bijectiva.*
- (iii) *$\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \widehat{\mathcal{E}}$ (és a dir, \mathcal{S} és exhaustiva).*
- (iv) *$\mathcal{S}(\mathcal{R}_n^*) = \widehat{\mathcal{E}}_n^*$ per a tot $n \geq 1$.* □

La proposició anterior posa de manifest la influència de la propietat de representació en la classificació que hem obtingut dels polinomis. Si l'equivalència \sim té la propietat de representació aleshores les classes de polinomis s'identificaran, via l'aplicació \mathcal{S} , amb els esquemes complets. De l'apartat (iv) obtindrem, en particular,

$$\#\mathcal{R}_n^* = \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*, \quad n \geq 1 \tag{3.7}$$

El nombre del primer costat de la igualtat anterior, $\#\mathcal{R}_n^*$, és el nombre de classes de polinomis en queda dividit $\mathbb{R}_n^*[x]$. En virtut de (3.7) aquest nombre de classes podrà ser obtingut a partir del cardinal de $\widehat{\mathcal{E}}_n^*$, el nombre d'esquemes complets de longitud n .

Observem també que les mateixes consideracions són vàlides si la relació d'equivalència \sim l'extenem a tot $\mathbb{R}[x]$, només que en aquest cas s'ha de considerar un element distingit, denotat τ , amb la condició de que $\tau \notin \widehat{\mathcal{E}}$, i es considera l'aplicació $\mathcal{S}' : \mathbb{R}[x]/\sim \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}} \cup \{\tau\}$ definida com l'extensió de \mathcal{S} tal, que a la classe dels polinomis constants li fa correspondre l'element τ .

A continuació donem el concepte de classes de polinomis obertes i d'esquemes simples.

Definició 3.22. Sigui $F \in \mathcal{R}$ una classe de polinomis i n el grau de F . Direm que F és una *classe oberta* si F és un subconjunt obert de $\mathbb{R}_n^*[x]$. Aquí es considera $\mathbb{R}_n^*[x]$ amb la seva topologia usual. Denotem per \mathcal{R}^o , \mathcal{R}_n^o i $\mathcal{R}_n^{*,o}$ els conjunts formats, respectivament, per les classes obertes, classes obertes de grau més petit o igual que n , i classes obertes de grau exactament n .

Un esquema $E \in \mathcal{E}$ és *simple* si tots els seus representants són configuracions simples. Per configuració simple entenem aquella configuració tal que tots els seus nodes tenen multiplicitat 1, és a dir, està formada només per nodes simples. Si $A \sim B$, A és simple si i només si B ho és. Això implica que per a que un esquema sigui simple és suficient que un representant seu sigui una configuració simple. Denotem per $\widehat{\mathcal{E}}^s$, $\widehat{\mathcal{E}}_n^s$ i $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$ els conjunts formats, respectivament, pels esquemes complets simples, pels esquemes complets simples de longitud més petita o igual que n , i pels esquemes complets simples de longitud n .

Corol·lari 3.23. $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s} = 1$, $\#\widehat{\mathcal{E}}_2^{*,s} = 2$, $\#\widehat{\mathcal{E}}_3^{*,s} = 4$.

Demostració. Repetint la demostració del corol·lari 3.19 només queda comprovar quines de les configuracions $N_i^{(n)}$ són simples. Per a $n = 1$, $N_1^{(1)}$ és simple. Això implica $\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s} = \{[N_1^{(1)}]\}$ i en particular $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s} = 1$. Si $n = 2$, $N_1^{(2)}$ i $N_3^{(2)}$ són simples però $N_2^{(2)}$ no ho és. Per tant $\widehat{\mathcal{E}}_2^{*,s} = \{[N_1^{(2)}], [N_3^{(2)}]\}$, resultant $\#\widehat{\mathcal{E}}_2^{*,s} = 2$. Finalment, si $n = 3$, de les configuracions $N_i^{(3)}$, $i = 3, 4, \dots, 11$, les úniques que són simples són $N_3^{(3)}$, $N_7^{(3)}$, $N_8^{(3)}$ i $N_{11}^{(3)}$, resultant $\widehat{\mathcal{E}}_3^{*,s} = \{[N_3^{(3)}], [N_7^{(3)}], [N_8^{(3)}], [N_{11}^{(3)}]\}$. En particular $\#\widehat{\mathcal{E}}_3^{*,s} = 4$. \square

Anem a veure que les classes de polinomis obertes es corresponen amb els esquemes complets i simples. Això serà conseqüència del següent resultat.

Lema 3.24. *Sigui $P(x) = \sum_{s=0}^n a_s \frac{x^s}{s!}$ un polinomi a coeficients reals de grau n . Són equivalents:*

- (a) *Existeix un $\delta > 0$ de manera que si $Q(x) = \sum_{s=0}^n b_s \frac{x^s}{s!}$ és un polinomi de grau n amb $|b_s - a_s| < \delta$, $s = 0, \dots, n$, aleshores $Z(Q) \sim Z(P)$.*
- (b) *$Z(P)$ és simple.*

Demostració. (b) \Rightarrow (a) Aplicant el teorema 1.23 al polinomi P obtenim un $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P)}$, i un $\delta > 0$, tals que tot polinomi $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_s \frac{x^s}{s!}$ de grau n i amb $|b_s - a_s| < \delta$, $s = 0, \dots, n$, verifica les propietats següents:

- (i) Si $(y, j) \in Z(Q)$, existeix un node $(x, j) \in Z(P)$ amb $|y - x| < \varepsilon_0$.
- (ii) Per a tot $(x, j) \in Z(P)$, existeix un nombre parell $\sigma \geq 0$ tal que

$$\sum_{\substack{(y,j) \in Z(Q) \\ |y-x| < \varepsilon_0}} \text{mult}_{Z(Q)}[(y, j)] = \text{mult}_{Z(P)}[(x, j)] - \sigma \quad (3.8)$$

Com que $Z(P)$ és simple, a (3.8) es té $\text{mult}_{Z(P)}[(x, j)] = 1$. Això implica $\sigma = 0$ i que el primer costat de la igualtat (3.8) és igual a 1; o equivalentment, hi ha un únic node $(y, j) \in Z(Q)$ que satisfà $|y - x| < \varepsilon_0$. En definitiva, es té la següent propietat:

- (iii) Per a tot node $(x, j) \in Z(P)$ existeix un únic node $(y, j) \in Z(Q)$ amb $|y - x| < \varepsilon_0$.

A cada $(x, j) \in Z(P)$ fem-li correspondre aquest únic node $(y, j) \in Z(Q)$, $|y - x| < \varepsilon_0$. Obtenim així una aplicació

$$\Psi : Z(P) \longrightarrow Z(Q)$$

que conserva derivacions i és bijectiva. Aquest últim fet és degut a la propietat (i) i a que $\varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P)}$.

Anem a veure que Ψ conserva 1-abcisses. Siguin $(x_1, j_1), (x_2, j_2) \in Z(P)$ amb $|j_1 - j_2| \leq 1$, i siguin $(y_i, j_i) = \Psi[(x_i, j_i)]$, $i = 1, 2$. Per definició de Ψ es satisfan les desigualtats

$$|y_1 - x_1| < \varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P)}, \quad |y_2 - x_2| < \varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P)} \quad (3.9)$$

Per veure que Ψ conserva 1-abcisses hem de veure que les condicions (1) $x_1 < x_2$, i (2) $y_1 < y_2$, són equivalents. Si $x_1 < x_2$, de (3.9) i de la definició de l'èpsilon de $Z(P)$ es desprèn que $y_1 < x_1 + \varepsilon_{Z(P)} \leq x_2 - \varepsilon_{Z(P)} < y_2$. Suposem ara $y_1 < y_2$. No pot passar $x_1 > x_2$, ja que en aquest cas, aplicant la implicació (1) \Rightarrow (2) que acabem de veure als nodes $(x_2, j_2), (x_1, j_1)$ (o sigui, intercanviats d'ordre) obtindríem $y_2 < y_1$, que es contradia amb que $y_1 < y_2$. Tampoc pot passar $x_1 = x_2$ donat que en aquest cas hauria de ser $j_1 = j_2$ (recordem que els nodes de $Z(P)$ són simples), i per tant resultaria $(y_1, j_1) = \Psi[(x_1, j_1)] = \Psi[(x_2, j_2)] = (y_2, j_2)$, que és contradicció amb $y_1 < y_2$. En definitiva només pot passar que $x_1 < x_2$.

Hem vist que Ψ és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abcisses. Això implica $Z(Q) \sim Z(P)$. Queda provada la implicació (b) \Rightarrow (a), ja que el δ proporcionat pel teorema 1.23 satisfà l'apartat (a).

(a) \Rightarrow (b) Suposem que existeix algun node (x_0, j) de $Z(P)$ amb multiplicitat més gran o igual que 2. Per a cada $\varepsilon > 0$, sigui el polinomi

$$Q_\varepsilon(x) = P(x) + \varepsilon \frac{x^j}{j!} \quad (3.10)$$

La condició (a) assegura que si ε és suficientment petit aleshores $Z(Q_\varepsilon) \sim Z(P)$, i en particular $Z(Q_\varepsilon)$ té nodes de derivació j amb multiplicitat més gran o igual

que 2. Així, si ε suficientment petit, hi ha un nombre real x_ε amb

$$Q_\varepsilon^{(j)}(x_\varepsilon) = Q_\varepsilon^{(j+1)}(x_\varepsilon) = 0 \quad (3.11)$$

De (3.10) i (3.11) resulta

$$P^{(j)}(x_\varepsilon) = -\varepsilon \quad \text{i} \quad P^{(j+1)}(x_\varepsilon) = 0 \quad (3.12)$$

De la segona igualtat de (3.12) es desprèn que tots els x_ε són arrels del polinomi fix $P^{(j+1)}$. Això implica que els x_ε varien en un conjunt finit, entrant en contradicció amb que $P^{(j)}(x_\varepsilon) = -\varepsilon$ si ε és suficientment petit. \square

Proposició 3.25. *Si $F \in \mathcal{R}$, F és oberta si i només si $\mathcal{S}(F)$ és simple.*

Demostració. F és oberta si i només si la condició (a) del lema 3.24 és satisfeta per a tot $P \in F$, o equivalentment, $Z(P)$ és simple per a tot $P \in F$. Això és el mateix que dir que $\mathcal{S}(F)$ és simple. \square

Com a conseqüència,

Corol·lari 3.26. *Si l'equivalència \sim té la propietat de representació aleshores $\mathcal{S}(\mathcal{R}^o) = \widehat{\mathcal{E}}^s$ i $\mathcal{S}(\mathcal{R}_n^{*,o}) = \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$ per a tot $n \geq 1$.* \square

En particular, en cas de satisfer-se la propietat de representació resultarà

$$\sharp \mathcal{R}_n^{*,o} = \sharp \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}, \quad n \geq 1 \quad (3.13)$$

i per tant, es podrà comptar el nombre de classes de polinomis de grau n que són obertes a partir del nombre d'esquemes complets de longitud n que són simples.

Capítol 4

Esquelets i \mathcal{B} -configuracions

En aquest capítol presentarem el concepte d'esquelet d'una configuració quasi-completa i analitzarem les seves propietats. També introduïrem una nova classe de configuracions completes, les \mathcal{B} -configuracions, i estudiarem la relació existent entre les \mathcal{B} -configuracions i les configuracions que són Pólya i conservatives. Aquesta relació o dualitat es farà via esquelets.

4.1 Propietats generals dels esquelets

Definició 4.1. Sigui N una configuració quasi-completa. Anomenem *esquelet* de N a qualsevol configuració obtinguda a partir de N després d'haver tret un node de cada grup interior de N . Això significa que prèviament hem d'haver triat, per a cada grup interior \mathfrak{g} de N , un node de \mathfrak{g} que denotarem per $\sigma_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$. L'esquelet resultant d'aquesta tria de nodes és la configuració

$$A = N \setminus \{\sigma_{\mathfrak{g}} \mid \mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}\}$$

on $\mathcal{G}_N^{(\text{int})}$ denota el conjunt format per tots els grups interiors de N . Observem que A conté tots els nodes exteriors i atípics de N . En el que segueix, ens referirem al node $\sigma_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$ com el node que hem tret a \mathfrak{g} per formar A .

Com a exemples d'esquelets, a la figura 4.1 hi ha representades tres configuracions quasi-completes i un esquelet per a cadascuna d'elles. Convindrem en dibuixar els nodes de l'esquelet A amb punts, mentre que els nodes que hem tret a N per formar A (i.e., nodes de $N \setminus A$) amb creus.

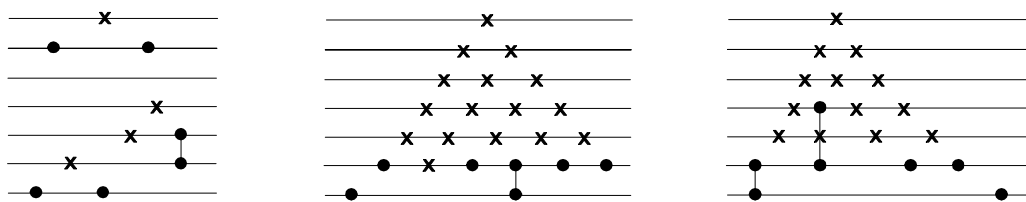


Figura 4.1. Esquelets.

Si N no té grups interiors, l'únic esquelet de N és $A = N$. En cas contrari, el nombre d'esquelets de N és

$$\prod_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}} \#\mathfrak{g}$$

ja que per a cada grup interior \mathfrak{g} , hi ha exactament $\#\mathfrak{g}$ possibilitats de triar un node de \mathfrak{g} . En particular sempre existeix, com a mínim, un esquelet.

De la fórmula de la longitud (2.18) resulta

$$\#A = \#N - e_N = \ell_N - \tau_N \quad (4.1)$$

És a dir, tots els esquelets d'una configuració quasi-completa N tenen el mateix nombre de nodes, i igual a $\ell_N - \tau_N$. Quan $\tau_N = 0$ (i.e., $m_N(j) \geq 1$ si $j = 0, 1, \dots, \ell_N - 1$) aquest nombre de nodes coincideix amb la longitud de N .

Observació 4.2. *Siguin $(x, j) \in N$ un node interior de N i A un esquelet de N . Aleshores existeixen dos nodes de A , $(x_1, j_1), (x_2, j_2) \in A$, amb $j_1 < j$, $j_2 < j$ i $x_1 < x < x_2$.*

Aquest fet és una conseqüència d'aplicar el lema 2.6 a la configuració N i als nodes $\sigma_N^+(\mathfrak{g})$ i $\sigma_N^-(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és el grup de N que conté el node (x, j) , i de tenir en compte que l'esquelet A conté tots els nodes exteriors i atípics de N . Podem dir, per tant, que si (x, j) és un node interior de N aleshores és suportat en A .

Definició 4.3. *Sigui N una configuració quasi-completa i A un esquelet seu. Considerem la següent partició de A : $A = [N|A]^- \cup [N|A]^+$ on*

$$\begin{aligned} [N|A]^+ &= \{(x, j) \in A \mid (x, j + \text{mult}_A[(x, j)]) \in N\} \\ [N|A]^- &= \{(x, j) \in A \mid (x, j + \text{mult}_A[(x, j)]) \notin N\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

El significat d'aquests conjunts és el següent. Si (x, j) és un node de A , la seva multiplicitat m en A verifica $(x, j) \in A$, $(x, j + 1) \in A$, \dots , $(x, j + m - 1) \in A$, i

$(x, j + m) \notin A$, havent-hi per tant dues possibilitats: (i) $(x, j + m) \in N$, que es realitza quan $(x, j + m)$ és un dels nodes que hem tret a N per formar A , i (ii) $(x, j + m) \notin N$. Els nodes $(x, j) \in A$ per als quals es satisfà (i) són els que hem agrupat a $[N|A]^+$, mentre que la resta de nodes de A són els nodes de $[N|A]^-$.

Per a les dues primeres configuracions de la figura 4.1 tots els nodes de A són de $[N|A]^-$, mentre que per a la tercera ho són tots amb l'excepció del node de A que té derivació 1 i multiplicitat en N igual a tres. Aquest node pertany a $[N|A]^+$.

Definició 4.4. Si N és una configuració quasi-completa i A és un esquelet de N , a la configuració

$$V_{[N|A]} = [N|A]^+ \cup (N \setminus A) \tag{4.3}$$

l'anomenarem *configuració de nodes veritables del parell* $[N|A]$. Veure per exemple la següent figura, on els nodes veritables són els que queden a l'interior dels rectangles.

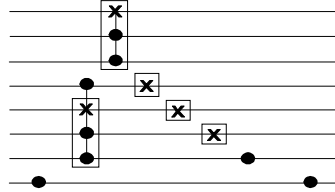


Figura 4.2. Nodes veritables

És fàcil veure que si per a cada node $(x, j) \in N \setminus A$, amb peu $(x, j_0) = \text{peu}_N[(x, j)]$, es considera el conjunt $S_{(x,j)}$ format per tots els nodes de la forma (x, j') , on $j_0 \leq j' \leq j$, aleshores $V_{[N|A]}$ coincideix amb la reunió de tots els $S_{(x,j)}$ amb $(x, j) \in N \setminus A$.

Algunes propietats senzilles que es deriven són:

- (i) $V_{[N|A]} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_N^{(\text{int})}} \mathfrak{g}$. És a dir, els nodes veritables de $[N|A]$ són nodes interiors de N .
- (ii) Si $(a, j - 1), (b, j - 1)$ són dos nodes consecutius de N , aleshores existeix un únic node veritable de $[N|A]$ que té derivació j i abscissa estrictament compresa entre a i b . Aquest únic node és el peu en N de $\sigma_{\mathfrak{g}}$ (node que hem tret a \mathfrak{g} per formar A), on \mathfrak{g} és el grup interior de N determinat pels nodes consecutius $(a, j - 1), (b, j - 1)$.

- (iii) Si $(x, j-1) \in N$, les condicions (1) $(x, j-1) \in [N|A]^+$ i (2) $(x, j) \in V_{[N|A]}$, són equivalents.

El següent resultat diu essencialment que els nombres $m_{V_{[N|A]}}(j)$ només depenen dels nombres $m_A(j)$, $j = 0, 1, \dots$, i en particular no depenen de N .

Teorema 4.5. *Siguin A un esquelet d'una configuració quasi-completa N i $V = V_{[N|A]}$ la configuració de nodes veritables de $[N|A]$.*

- (i) *Es verifica la següent recurrència: $m_V(0) = 0$, i*

$$m_V(j) = (m_V(j-1) + m_A(j-1) - 1)_+ \quad (4.4)$$

per a tot $j \geq 1$.

- (ii) $m_V(j) = M_A(j-1) - M_A^o(j-1)$ per a tot $j \geq 0$.

- (iii) $\#V = \sum_{j=0}^{\infty} [M_A(j) - M_A^o(j)] = \alpha[m_A]$.

Aquí m_A^o és la funció nivell de m_A i $\alpha[m_A]$ el coeficient de col·lisió (veure (1.22)).

Demostració. És clar que (ii) implica (iii). Vegem (i) i (ii).

(i) $m_V(0) = 0$ prové de que tot node veritable és un node interior de N . Sigui $j \geq 1$ i hem de veure que es compleix (4.4). Suposem primer $m_N(j-1) = 0$. Raonant com abans (tot node veritable és interior) es dedueix que el primer costat de (4.4) és $m_V(j) = 0$. El segon costat també és $(0 + 0 - 1)_+ = 0$, i per tant (4.4) queda provat.

Suposem ara $m_N(j-1) \geq 1$. Siguin $(x_1, j-1), (x_2, j-1), \dots, (x_{m_N(j-1)}, j-1)$ els nodes de N que tenen derivació $j-1$, ordenats per ordre creixent d'abscisses. Com que tot node veritable és un node interior de N , no hi pot haver cap node $(x, j) \in V$ amb $x < x_1$ o $x > x_{m_N(j-1)}$. D'altra banda, per a cada $i = 1, 2, \dots, m_N(j-1) - 1$ hi ha un únic node $(x, j) \in V$ amb $x_i < x < x_{i+1}$. Això implica que hi ha exactament $m_N(j-1) - 1$ nodes de V que tenen derivació j i abscissa diferent de tots els x_i , $i = 1, 2, \dots, m_N(j-1)$. Observem també que si $i = 1, 2, \dots, m_N(j-1)$, les condicions (1) $(x_i, j) \in V$ i (2) $(x_i, j-1) \in [N|A]^+$, són equivalents. Per tant, hi ha tants nodes veritables de derivació j que tenen abscissa igual a algun x_i , com nodes de $[N|A]^+$ que tenen derivació $j-1$.

En total tenim

$$\begin{aligned} m_V(j) &= m_N(j-1) - 1 + m_{[N|A]^+}(j-1) \\ &= m_{[N|A]^-}(j-1) + m_V(j-1) - 1 + m_{[N|A]^+}(j-1) \\ &= m_V(j-1) + m_A(j-1) - 1, \end{aligned}$$

resultant així (4.4).

(ii) Aquest apartat és conseqüència de que els nombres $v(j) = m_V(j)$, $j \geq 0$, satisfan la recurrència (1.19) i per tant, per la proposició 1.8 resulta $m_V(j) = M_A(j-1) - M_A^o(j-1)$. \square

El resultat anterior té diverses conseqüències.

Corol·lari 4.6. *Siguin A un esquelet d'una configuració quasi-completa N i $j \geq 0$ un nombre natural. Aleshores $m_N(j) = 0$ si, i només si, $m_A^o(j) = 0$.*

Demostració. De la definició de funció nivell resulta $m_A^o(j) = 0$ si, i només si, $M_A(j) - M_A^o(j-1) = 0$. Ara, del teorema anterior (ii) es dedueix que $M_A(j) - M_A^o(j-1) = m_A(j) + m_{V_{[N|A]}}(j)$. Aquest últim nombre, suma de dos enters positius, val zero si i només si $m_A(j) = m_{V_{[N|A]}}(j) = 0$, o el que és el mateix, $m_N(j) = 0$. \square

Corol·lari 4.7. *Sigui N una configuració quasi-completa de longitud n . Són equivalents:*

- (i) $\tau_N = 0$
- (ii) *Existeix un esquelet de N que té exactament n nodes.*
- (iii) *Tot esquelet de N té exactament n nodes.*
- (iv) *Existeix un esquelet de N que satisfà la condició de Pólya.*
- (v) *Tots els esquelets de N són configuracions Pólya.*

Demostració. (i), (ii) i (iii) són equivalents en virtut de (4.1). Per altra banda (v) \Rightarrow (iv). Vegem que (i) \Rightarrow (v) i que (iv) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (v) De $\tau_N = 0$ es desprèn que $m_N(j) \geq 1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, i pel corol·lari 4.6, $m_A^o(j) = 1$ per a $j = 0, 1, \dots, n-1$, on A és un esquelet qualsevol de N . Això implica que A és Pólya, tal com s'ha vist en el corol·lari 1.14.

(iv) \Rightarrow (i) Si A és un esquelet satisfent la condició de Pólya, aplicant de nou el corol·lari 1.14 es dedueix que $m_A^o(j) = 1$ si $j = 0, 1, \dots, \#A - 1$, i $m_A^o(j) = 0$ per a

$j \geq \sharp A$. D'aquí que $m_N(j) \geq 1$ si i només si $j \leq \sharp A - 1$. Això implica $n = \sharp A$, i per tant, de (4.1), $\tau_N = 0$. \square

4.2 \mathcal{B} -configuracions

Definició 4.8. Es diu que una configuració N és \mathcal{B} -configuració si és quasi-completa i verifica les tres propietats següents:

- (i) Si \mathfrak{g} és un grup interior de N , aleshores existeix un únic node de \mathfrak{g} que té derivació igual a la derivació de \mathfrak{g} , i tal que la seva multiplicitat en N és senar.
- (ii) Si \mathfrak{g} és un grup exterior de N , tots els nodes de \mathfrak{g} que tenen derivació igual a la derivació de \mathfrak{g} tenen multiplicitat en N parell.
- (iii) $\tau_N = 0$. És a dir, $m_N(j) \geq 1$ per a $j = 0, 1, \dots, \ell_N - 1$.

La condició (i) significa que entre cada dos nodes consecutius de N hi ha un únic node de N que té derivació una unitat més gran que la dels nodes consecutius i multiplicitat senar. En canvi, la condició (ii) significa que tots els nodes situats a la dreta d'un node extrem-dret, o a l'esquerra d'un node extrem-esquerra, i que tenen derivació una unitat més gran que la del node extrem, tenen multiplicitat parell. D'aquestes dues condicions es dedueix que el nombre de nodes de tot grup interior és senar, i que el nombre de nodes de tot grup exterior és parell. Finalment, la condició (iii) implica que N és completa. És a dir, si N és \mathcal{B} -configuració aleshores N és completa. Observem també que de la condició (iii) es dedueix que N té un únic grup atípic, que és el que té derivació 0.

Si \mathfrak{g} és un grup interior de N denotem per $\sigma_N(\mathfrak{g})$ a l'únic node de \mathfrak{g} que té derivació igual a la derivació de \mathfrak{g} i multiplicitat en N senar.

Lema 4.9. *Siguin N una \mathcal{B} -configuració i α un node de N . Són equivalents:*

- (i) $\alpha = \sigma_N(\mathfrak{g})$ per a algun grup interior \mathfrak{g} de N .
- (ii) α és un peu de N de derivació major o igual que 1 i multiplicitat en N senar.

Demostració. Que (i) implica (ii) es deriva de la definició de $\sigma_N(\mathfrak{g})$.

(ii) \Rightarrow (i) Sigui \mathfrak{g} el grup de N tal que $\alpha \in \mathfrak{g}$. Com que α és un peu de N , la derivació j de α coincideix amb la derivació de \mathfrak{g} , resultant que \mathfrak{g} no pot ser un grup atípic donat que per hipòtesi $j \geq 1$ i l'únic grup atípic de N té derivació 0. Així, \mathfrak{g} és un grup interior o exterior de derivació igual a la derivació de α . De les condicions (i) i (ii) de la definició 4.8 es desprèn que \mathfrak{g} és interior i que $\alpha = \sigma_N(\mathfrak{g})$, ja que α té en N multiplicitat senar. \square

Com a exemples, a la següent figura hi ha representades tres \mathcal{B} -configuracions. Els nodes encerclats són els de la forma $\sigma_N(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior format per com a mínim dos nodes.

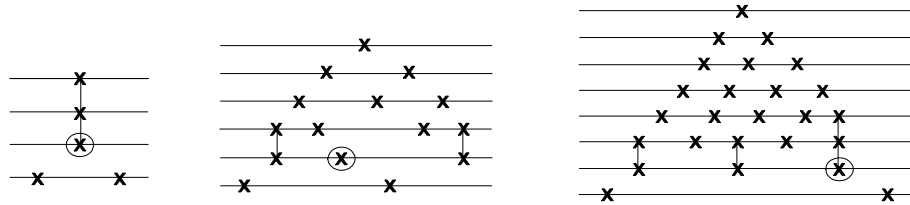


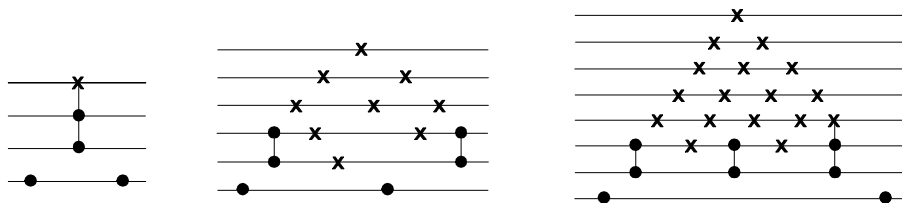
Figura 4.3. \mathcal{B} -configuracions.

És fàcil veure, fent servir el corol·lari 3.7, que si N i N' són dues configuracions equivalents aleshores N és \mathcal{B} -configuració si, i només si, N' ho és. A més a més, si $\Psi = \Psi_{N,N'}$ és la identificació natural entre N i N' aleshores $\Psi[\sigma_N(\mathfrak{g})] = \sigma_{N'}(\Psi[\mathfrak{g}])$.

A continuació introduïm l'esquelet associat a una \mathcal{B} -configuració, que tindrà un paper especial dintre de tots els seus possibles esquelets.

Definició 4.10. Sigui N una \mathcal{B} -configuració. Per a cada grup interior \mathfrak{g} de N , sigui $\sigma_{\mathfrak{g}}$ el cap en N de $\sigma_N(\mathfrak{g})$. És a dir, $\sigma_{\mathfrak{g}} = \text{cap}_N[\sigma_N(\mathfrak{g})] \in \mathfrak{g}$. L'*esquelet associat* a N és l'esquelet que resulta de treure a N els nodes de la forma $\sigma_{\mathfrak{g}}$, on \mathfrak{g} recorre tots els grups interiors de N .

Del lema 4.9 es desprèn que els nodes que estem traient a N per formar A són precisament els caps β de N tals que el seu peu, $\text{peu}_N[\beta]$, té derivació major o igual que 1 i multiplicitat en N senar. Com a exemple, els esquelets associats a les configuracions de la figura 4.3 estan representats a la figura 4.4, els nodes dels quals, com és usual, estan marcats amb punts.

Figura 4.4. Esquelets associats a \mathcal{B} -configuracions.

Si N i N' són dues \mathcal{B} -configuracions equivalents i A, A' són respectivament els seus esquelets associats, aleshores $\Psi[A] = A'$ on $\Psi = \Psi_{N,N'}$ és la identificació natural entre N i N' .

Proposició 4.11. *Sigui N una \mathcal{B} -configuració de longitud n . El seu esquelet associat A , té les propietats següents:*

- (i) *Tot peu de A és peu de N .*
- (ii) *A té exactament n nodes.*
- (iii) *A és una configuració Pólya i conservativa.*
- (iv) *A és una configuració regular.*

Demostració. Que tot peu de A és peu de N es deriva del fet que tots els nodes que hem tret a N per formar A són caps de N . Que A té n nodes i que és Pólya prové del corol·lari 4.7 donat que $\tau_N = 0$. Que A és conservativa és conseqüència immediata de la construcció de A . En efecte, per formar A hem tret el cap en N dels peus de N que tenen derivació $j \geq 1$ i multiplicitat senar, quedant així transformats, en A , amb nodes de multiplicitat parell; la resta de peus de N que tenen derivació $j \geq 1$ continuen amb multiplicitat parell. La regularitat de A prové del teorema 1.4. \square

La propietat (iii) de la proposició anterior estableix que tota \mathcal{B} -configuració admet, com a mínim, un esquelet Pólya i conservatiu. El recíproc d'aquest fet també és cert, tal com es mostra en el següent resultat.

Proposició 4.12. *Sigui N una configuració quasi-completa. N és \mathcal{B} -configuració si, i només si, existeix un esquelet de N Pólya i conservatiu.*

Demostració. Si N és \mathcal{B} -configuració, l'esquelet associat a N és Pólya i conservatiu. Recíprocament, suposem que N és una configuració quasi-completa tal que admet

un esquelet A Pólya i conservatiu. Hem de veure que N és \mathcal{B} -configuració, és a dir, que es compleixen les condicions (i), (ii) i (iii) de la definició 4.8. La tercera prové del corol·lari 4.7 perquè al ser A Pólya resulta $\tau_N = 0$. Les dues primeres es deriven del fet que A és conservativa. En efecte, sigui \mathfrak{g} un grup interior o exterior de N de certa derivació $j \geq 1$. En qualsevol cas \mathfrak{g} és de la forma

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{i=1}^k \{(x_i, j), (x_i, j+1), \dots, (x_i, j+m_i-1)\}$$

on els (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$, són nodes de N que tenen derivació j , i els nombres m_i són les multiplicitats en N dels (x_i, j) , $i = 1, 2, \dots, k$.

Si \mathfrak{g} és exterior, per la definició d'esquelet tots els nodes de \mathfrak{g} pertanyen a A . Això implica que si $i = 1, 2, \dots, k$, la multiplicitat en A del node (x_i, j) és exactament m_i , i per tant m_i és un nombre parell atès que (x_i, j) és un peu de A de derivació $j \geq 1$. Així, N verifica la condició (ii) de la definició 4.8.

Si \mathfrak{g} és un grup interior, hi ha un únic node de \mathfrak{g} , diguem (x_{i_0}, j') , $1 \leq i_0 \leq k$, $j \leq j' \leq j + m_{i_0} - 1$, que no pertany a A . És a dir, estem considerant el node (x_{i_0}, j') que hem tret a \mathfrak{g} per formar A . En particular, si $i \neq i_0$, tots els nodes $(x_i, j), (x_i, j+1), \dots, (x_i, j+m_i-1)$ són nodes de A , implicant que la multiplicitat en A de (x_i, j) és exactament m_i , essent per tant m_i un nombre parell (com abans, (x_i, j) és un peu de A de derivació $j \geq 1$). Finalment, quan $i = i_0$ es té $m_{i_0} = 1 + u + v$, on

$$\begin{aligned} u &= j' - j = \text{mult}_A[(x_{i_0}, j)], \\ v &= j + m_{i_0} - 1 - j' = \text{mult}_A[(x_{i_0}, j' + 1)], \end{aligned}$$

amb el conveni que si $j' = j$ o $j' = j + m_{i_0} - 1$ aleshores $\text{mult}_A[(x_{i_0}, j)] = 0$ i $\text{mult}_A[(x_{i_0}, j' + 1)] = 0$ respectivament. Donat que els nodes $(x_{i_0}, j), (x_{i_0}, j' + 1)$ són peus de A amb derivació major o igual que 1, els nombres u i v són parells, i per tant $m_{i_0} = 1 + u + v$ és un nombre senar.

En definitiva, (x_{i_0}, j) és l'únic node de \mathfrak{g} que té derivació j i multiplicitat en N senar. Això prova la condició (i) de la definició 4.8 i ja hem acabat. \square

Anem a veure finalment el resultat més important d'aquesta secció. Del teorema 1.4 es dedueix que tota configuració A Pólya i conservativa és regular. En particular, si n és el nombre de nodes de A , segons el teorema 1.5 existeix un únic polinomi de grau n que s'anul·la sobre A .

Teorema 4.13. *Sigui A una configuració Pólya i conservativa de n nodes. Sigui $P(x)$ l'únic polinomi de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre A . Aleshores A és un esquelet de $Z(P)$ i, en particular, $Z(P)$ és \mathcal{B} -configuració.*

Demostració. Sigui $Z = Z(P)$. Aleshores $A \subseteq Z$ i la longitud de Z és igual a n . Considerem, per a cada grup \mathfrak{g} de Z , la intersecció $\mathfrak{g} \cap A$. Si la derivació de \mathfrak{g} no és zero, el cardinal de $\mathfrak{g} \cap A$ coincideix amb una suma de multiplicitats en A d'uns quants peus de A que tenen derivació com a mínim 1. Com que A és conservativa, aquesta suma de multiplicitats és parell, i per tant $\sharp(\mathfrak{g} \cap A)$ és parell.

Per als grups \mathfrak{g} de Z considerem el nombre

$$k_{\mathfrak{g}} = \sharp \mathfrak{g} - \sharp(\mathfrak{g} \cap A) \quad (4.5)$$

Observem que $k_{\mathfrak{g}}$ és el nombre de nodes de \mathfrak{g} que no són de A , $k_{\mathfrak{g}} = \sharp(\mathfrak{g} \setminus A)$. Per als grups interiors es té $k_{\mathfrak{g}} \geq 1$. En efecte, si \mathfrak{g} fos un grup interior (i en particular de derivació no nul·la) amb $k_{\mathfrak{g}} = 0$, el nombre de nodes de \mathfrak{g} seria $\sharp \mathfrak{g} = \sharp(\mathfrak{g} \cap A)$, que és un nombre parell. Això es contradiu amb que Z és completa.

Denotem respectivament per $\mathcal{G}_Z^{(\text{int})}$, $\mathcal{G}_Z^{(\text{ext})}$ i $\mathcal{G}_Z^{(\text{at})}$ els conjunts formats pels grups interiors, exteriors i atípics de Z , i per \mathcal{G}_Z el conjunt format per tots els grups de Z . Substituint (4.5) en la fórmula de la longitud (2.19) s'obté

$$\begin{aligned} n &= \tau_Z + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{int})}} [\sharp(\mathfrak{g} \cap A) + (k_{\mathfrak{g}} - 1)] + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{ext})} \cup \mathcal{G}_Z^{(\text{at})}} [\sharp(\mathfrak{g} \cap A) + k_{\mathfrak{g}}] \\ &= \tau_Z + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z} \sharp(\mathfrak{g} \cap A) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{int})}} (k_{\mathfrak{g}} - 1) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{ext})} \cup \mathcal{G}_Z^{(\text{at})}} k_{\mathfrak{g}} \\ &= n + \tau_Z + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{int})}} (k_{\mathfrak{g}} - 1) + \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{ext})} \cup \mathcal{G}_Z^{(\text{at})}} k_{\mathfrak{g}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

A l'última igualtat de (4.6) s'ha utilitzat que $\sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z} \sharp(\mathfrak{g} \cap A) = \sharp(Z \cap A) = \sharp A = n$. De (4.6) es deriven diverses conseqüències: (i) $\tau_Z = 0$, (ii) $k_{\mathfrak{g}} = 1$ si \mathfrak{g} és interior, i (iii) $k_{\mathfrak{g}} = 0$ per als altres grups de Z (exteriors o atípics). Així, si \mathfrak{g} és interior podem considerar l'únic node de \mathfrak{g} que no pertany a A , i que denotarem per $\sigma_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g} \setminus A$. Per als grups exteriors o atípics tindrem $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \cap A$. Per tant,

$$A = \bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z} (\mathfrak{g} \cap A) = \left(\bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z} \mathfrak{g} \right) \setminus \left\{ \sigma_{\mathfrak{g}} \mid \mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{int})} \right\} = Z \setminus \left\{ \sigma_{\mathfrak{g}} \mid \mathfrak{g} \in \mathcal{G}_Z^{(\text{int})} \right\}$$

d'on resulta que A és un esquelet de Z . Finalment, que Z és \mathcal{B} -configuració es deriva immediatament de la proposició 4.12. \square

Del teorema anterior sorgeixen de manera natural dues qüestions:

- (i) Sabem que A és esquelet de $Z(P)$ i que $Z(P)$ és \mathcal{B} -configuració. És cert que A és l'esquelet associat a $Z(P)$? La resposta és que en general no. Per exemple, la configuració $A = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 2), (0, 3)\}$ representada a la figura 4.5 (a) mitjançant punts, és Pólya i conservativa, però no és pas l'esquelet associat a l'espectre del polinomi P de grau $n = 4$ que s'anul·la sobre A (veure la mateixa figura, on els nodes marcats amb creus són els nodes de $Z(P) \setminus A$).
- (ii) La segona qüestió fa referència a si el teorema 4.13 pot generalitzar-se a configuracions Pólya i quasi-conservatives. Recordem que el teorema 1.4, i per tant també el teorema 1.5, eren aplicables a aquest tipus de configuracions. La resposta novament torna a ser negativa. És a dir, hi ha configuracions A , Pólya i quasi-conservatives, de manera que A no és esquelet de $Z(P)$. Això passa per exemple amb la configuració $A = \{(0, 0), (1, 1), (4, 1)\}$ representada amb punts a la figura 4.5 (b). El càlcul de P i de $Z(P)$ mostra que les creus d'aquesta figura són els nodes de $Z(P) \setminus A$, posant de manifest que A no és un esquelet de $Z(P)$.

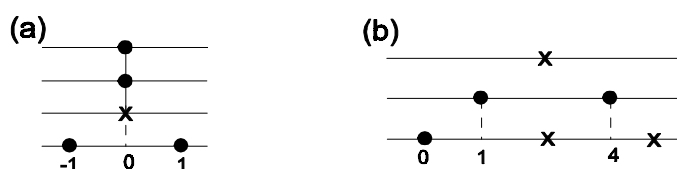


Figura 4.5

4.3 Un teorema auxiliar

En aquesta secció donarem un resultat auxiliar que diu que si A és una configuració quasi-conservativa, aleshores tota funció f que s'anul·la sobre A també s'anul·la sobre una configuració quasi-completa N tal que A és esquelet de N . Aquest resultat ve a ser una generalització del teorema 4.13, i l'incloem per dues raons. La primera és que farem ús d'una conseqüència seva posteriorment. La segona és que l'aplicarem per donar una demostració del teorema de K. Atkinson i A. Sharma [2], que hem enunciat al capítol 1 i que hem utilitzat al final de la secció anterior (proposició 4.11 i teorema 4.13).

La construcció de la configuració quasi-completa N del resultat que presentarem es basa en l'aplicació reiterada del teorema de Rolle. És per això que N també es coneix, en el llenguatge de matrius d'incidència, amb el nom d'*extensió de Rolle* ([29],[32],[33]). Aquest resultat és la versió anàloga del lema 5.1 de [33], però escrit en el llenguatge adequat per a aquest treball. A més, combinant-lo amb el teorema 4.5 es generalitza el lema 5.3 de [33] donat que a l'haver considerat els nodes de $[N|A]^+$ com a nodes veritables, no cal restringir-nos a nodes sense *duplicació* a l'hora de comptar $m_N(j)$. Finalment, també inclourem els requeriments mínims de regularitat de la funció f .

En el que segueix es considera una configuració A . Els nombres a i b estan definits, respectivament, com l'abscissa més petita dels nodes de A i l'abscissa més gran dels nodes de A . És a dir,

$$a = \min ab_A, b = \max ab_A \quad (4.7)$$

També es considerarà el nombre

$$n = 1 + \max\{j \in \mathbb{N} \mid m_A^o(j) = 1\} \quad (4.8)$$

Dit d'una altra manera, n és el nombre natural més petit possible per al qual $m_A^o(n) = m_A^o(n+1) = m_A^o(n+2) = \dots = 0$.

Lema 4.14. *Es verifiquen les següents condicions:*

- (i) $n \geq \max\{\sharp A, \ell_A\}$.
- (ii) $M_A^o(n-1) = M_A(n-1) = \sharp A$.
- (iii) *Si N és una configuració quasi-completa tal que A és esquelet de N , aleshores $\ell_N = n$. A més, l'abscissa de tots els nodes de N pertany a l'interval $[a, b]$.*

Demostració. Que $n \geq \ell_A$ es dedueix del fet que $m_A(\ell_A-1) \geq 1$, d'on $m_A^o(\ell_A-1) = 1$ i per tant $n \geq \ell_A$. Per altra banda, m_A^o satisfà la condició de Pólya per sobre amb n , i pel teorema 1.12, apartats (i) i (ii), $M_A^o(n-1) = M_A(n-1) = \sharp A$. Aquesta última igualtat és deguda a que $n \geq \ell_A$. S'obté així l'apartat (ii) i també que $n \geq \sharp A$, ja que $m_A^o \leq 1$.

Per a l'apartat (iii) utilitzem el corol·lari 4.6, del qual es dedueix que $\ell_N = n$. Finalment, que l'abscissa de tots els nodes de N pertany a l'interval $[a, b]$ és immediat per als nodes de A , mentre que per als nodes de $N \setminus A$ es deriva de l'observació 4.2. \square

Per $C^{(n-1)}([a, b])$ denotem l'espai de funcions reals derivables $n - 1$ cops amb continuïtat a l'interval $[a, b]$. Quan $a = b$, $C^{(n-1)}([a, b])$ està format per les funcions definides en un entorn de a i derivables $n - 1$ cops en a .

Lema 4.15. *Suposem que A és quasi-conservativa i que $f \in C^{(n-1)}([a, b])$ és una funció que s'anul·la sobre A . Siguin $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)$ els nodes de A que tenen derivació 0 ordenats per ordre creixent d'abscisses (en particular $k = m_A(0)$). Aleshores,*

(i) *Existeixen $k - 1$ nodes (y_i, j_i) , $i = 1, 2, \dots, k - 1$, tals que cadascun d'ells, diguem (y_i, j_i) , verifica les propietats següents:*

(a) $x_i < y_i < x_{i+1}$, $1 \leq j_i \leq n - 1$, $(y_i, j_i) \notin A$.

(b) f és nul·la en (y_i, j_i) .

(c) Tots els nodes $(y_i, 1), (y_i, 2), \dots, (y_i, j_i - 1)$ són nodes de A .

(ii) *Suposem que (y_i, j_i) , $i = 1, 2, \dots, k - 1$, són $k - 1$ nodes verificant les propietats de l'apartat anterior. Sigui B la configuració obtinguda d'afegir a A els nodes (y_i, j_i) , $i = 1, 2, \dots, k - 1$, i B' la configuració obtinguda de disminuir la derivació dels nodes de B en una unitat. És a dir,*

$$B' = \{(x, j - 1) \mid (x, j) \in B, j \geq 1\}.$$

Aleshores B' és quasi-conservativa i la funció nivell de $m_{B'}$, $m_{B'}^o$, val

$$m_{B'}^o(j) = m_A^o(j + 1), j \geq 0 \tag{4.9}$$

Demostració. Observem que l'apartat (i) no té sentit quan $k \leq 1$ i per tant hem de suposar $k \geq 2$. En canvi, l'apartat (ii) també cal demostrar-lo quan $k \leq 1$. En aquest cas $B' = A'$, on A' s'obté de disminuir la derivació dels nodes de A en una unitat.

(i) Hem de definir, per a cada $i = 1, 2, \dots, k - 1$, un node (y_i, j_i) satisfent les condicions de l'apartat (i).

Sigui $g = f'$. Si g té algun zero y a l'interval (x_i, x_{i+1}) de manera que $(y, 1) \notin A$, aleshores definim $(y_i, j_i) = (y, 1)$. Aquest node satisfà totes les condicions de l'apartat (i) i per tant en aquest cas ja hem acabat.

Suposem ara que per a tot zero y de g a l'interval (x_i, x_{i+1}) es verifica que $(y, 1) \in A$. En aquest cas el nombre de zeros de f a l'interval $[x_i, x_{i+1}]$ és finit. En efecte, si fos infinit, aplicant el teorema de Rolle trobaríem també un nombre infinit de zeros

de $f' = g$ en (x_i, x_{i+1}) , que es contradia amb el fet que A és un conjunt finit. Sigui ξ el zero més petit de f a l'interval $(x_i, x_{i+1}]$. Tenim $f(x_i) = f(\xi) = 0$ i $f(x) \neq 0$ si $x_i < x < \xi$. Siguin també $(z_1, 1), (z_2, 1), \dots, (z_r, 1)$ els nodes de A de derivació 1 amb abscissa a l'interval (x_i, ξ) (els nombres z_s , $s = 1, 2, \dots, r$, són precisament els zeros de g a l'interval (x_i, ξ)). Posem $m_s = \text{mult}_A[(z_s, 1)]$, $s = 1, \dots, r$. De ser A quasi-conservativa i tenir $x_i < z_s < x_{i+1}$ es deriva que cada m_s és parell. Per altra banda, $M_A^o(n-1) = \sharp A \geq k + \sum_{s'=1}^r m_{s'} \geq 2 + m_s$, i per tant $n-1 \geq m_s + 1$, $s = 1, \dots, r$. En particular $g = f'$ admet derivada m_s -èssima en cada z_s .

A continuació provem que $g^{(m_s)}(z_s) = 0$ per a algun s . En efecte, si fos $g^{(m_s)}(z_s) \neq 0$ per a tot s , g tindria ben definida la multiplicitat en cada z_s , essent aquesta multiplicitat igual a m_s , que és parell. Això es contradia amb el lema 2.9 (i), que estableix que el nombre $\sum_{s=1}^r m_s$ és un nombre senar. Per tant existeix algun $s^* \in \{1, \dots, r\}$ tal que $g^{(m_{s^*})}(z_{s^*}) = 0$. Definim ara $(y_i, j_i) = (z_{s^*}, m_{s^*} + 1)$. Per construcció, aquest node satisfà totes les condicions de l'apartat (i) i ja hem acabat.

Anem a veure (ii). La prova de que B' és quasi-conservativa és immediata, així que només veurem (4.9). Amb tal finalitat, i per fixar idees, suposarem que $k \geq 2$. Si $k \leq 1$, (4.9) es derivarà de forma anàloga.

Per a $i = 1, 2, \dots, k-1$ sigui A_i la configuració obtinguda a partir de A només que traient a A els nodes $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_i, 0)$, i després afegint els nodes $(y_1, j_1), (y_2, j_2), \dots, (y_i, j_i)$. És a dir,

$$A_i = (A \setminus \{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_i, 0)\}) \cup \{(y_1, j_1), (y_2, j_2), \dots, (y_i, j_i)\}.$$

Posem també $A_0 = A$.

L'única diferència entre A_{k-1} i B radica en els nodes de derivació 0 (A_{k-1} només en té un, $(x_k, 0)$, mentre que B té tots els $(x_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, k$) i en particular $A'_{k-1} = B'$, on A'_{k-1} és la configuració obtinguda de disminuir la derivació dels nodes de A_{k-1} en una unitat. Això implica que

$$m_{B'}(j) = m_{A'_{k-1}}(j) = m_{A_{k-1}}(j+1), \quad j \geq 0 \quad (4.10)$$

Per altra banda, les configuracions $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ verifiquen la següent recurrència: $A_0 = A$, i per a tot $i \geq 0$, A_{i+1} s'obté a partir de A_i només que traient el node (x_{i+1}, j_{i+1}) i després afegint el node (y_{i+1}, j_{i+1}) . És a dir,

$$A_{i+1} = (A_i \setminus \{(x_{i+1}, 0)\}) \cup \{(y_{i+1}, j_{i+1})\}, \quad i = 0, 1, \dots, k-2.$$

En particular, per a $i = 0, 1, \dots, k-2$ i $j \geq 0$,

$$m_{A_{i+1}}(j) = \begin{cases} m_{A_i}(j), & \text{si } j \neq 0, j_{i+1} \\ m_{A_i}(0) - 1, & \text{si } j = 0 \\ m_{A_i}(j_{i+1}) + 1, & \text{si } j = j_{i+1} \end{cases}$$

Això implica que $m_{A_{i+1}}^o = m_{A_i}^o$. En efecte, $m_{A_{i+1}}$ s'obté a partir de m_{A_i} després d'aplicar j_{i+1} passos $m \rightarrow \tilde{m}$ especificats en la proposició 1.7 (i). Aquests consisteixen en anar desplaçant un 1, inicialment contingut en el valor $m_{A_i}(0)$, de derivació en derivació. Notem que la proposició 1.7 és aplicable donat que $m_{A_i}(0) = k - i \geq 2$ i que $m_{A_i}(j) \geq 1$ si $j = 1, \dots, j_{i+1} - 1$. Aquest últim fet prové de que A_i conté tots els nodes de la forma (y_i, j) , $j = 1, 2, \dots, j_i - 1$.

S'obté així que $m_{A_{k-1}}^o = m_{A_{k-2}}^o = \dots = m_{A_0}^o = m_A^o$. Finalment, donat que $m_{A_{k-1}}(0) = 1$, i en particular que $M_{A_{k-1}}(0) = M_{A_{k-1}}^o(0) = 1$, de (4.10) i de la proposició 1.8 (ii) resulta

$$m_{B'}^o(j) = m_{A_{k-1}}^o(j+1) = m_A^o(j+1), j \geq 0.$$

Això completa la demostració. □

Com a exemple, a la figura 4.6 (a) hi ha representada una configuració A quasi-conservativa. A la part (b) hi ha una possible situació per als nodes (y_i, j_i) , és a dir, satisfent les propietats de l'apartat (i) del lema anterior. Finalment, a (c) hi ha representada, per a aquests nodes (y_i, j_i) , la configuració B' de l'apartat (ii).

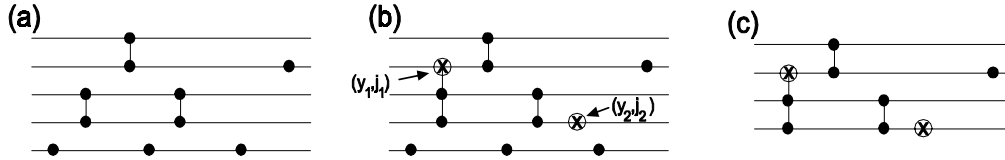


Figura 4.6. (a) A ; (b) $A \cup \{(y_i, j_i)\}_{1 \leq i \leq k-1} = B$; (c) B' .

Teorema 4.16. *Siguin A una configuració quasi-conservativa, a, b i n els nombres definits a (4.7) i (4.8), i $f \in C^{(n-1)}([a, b])$ una funció que s'anul·la sobre A . Aleshores, existeix una configuració quasi-completa N de manera que A és esquelet de N i tal que f s'anul·la sobre N .*

Abans de donar la demostració d'aquest resultat farem els següents comentaris:

1. Si $m_A(j) \leq 1$, $j \geq 0$, el teorema és trivial inclús quan A no és quasi-conservativa. En efecte, en aquest cas la configuració $N = A$ és quasi-completa, A és esquelet de N i f s'anul·la sobre N . Així, l'interès del teorema radica quan $m_A(j) \geq 2$ per a algun j . Observem que això implica $a < b$.
2. La condició de regularitat sobre f és suficient per a que el teorema tingui sentit. En efecte, de la definició de a i b , i de la desigualtat $n \geq \ell_A$ del

lema 4.14, es deriva que f està definida sobre els nodes de A . Tanmateix, f també està definida sobre els nodes de N un cop donem per assumit que A és esquelet de N , doncs així ho estableix el lema 4.14 (iii). Acabem observant que la condició $f \in C^{(n-1)}([a, b])$ és el requeriment mínim sobre la regularitat de f , ja que en cas de no satisfer-se, no es pot assegurar que f estigui definida sobre els nodes de N que tenen derivació màxima, i.e., derivació igual a $n-1$.

Demostració del teorema. Procedirem per inducció sobre n . Si $n = 1$, del lema 4.14 (i) es deriva que $\sharp A = \ell_A = 1$; o el que és el mateix, A és de la forma $A = \{(a, 0)\}$ per a cert $a \in \mathbb{R}$. La configuració $N = A$ és quasi-completa, A és esquelet de N i f s'anul·la sobre N .

Suposem $n \geq 2$. Siguin $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)$ els nodes de A que tenen derivació 0, ordenats per ordre creixent d'abscisses. El lema 4.15 proporciona $k-1$ nodes, (y_i, j_i) , $i = 1, 2, \dots, k-1$, verificant les propietats de l'apartat (i). Considerem la configuració B' definida exactament com a l'apartat (ii) del lema 4.15. Paral·lelament veure la figura 4.6.

Definim els nombres a' , b' i n' com els nombres (4.7) i (4.8) però referits a la configuració B' . Es compleix que $a \leq a' \leq b' \leq b$. El lema 4.15 (ii) mostra que B' és quasi-conservativa i que

$$n' = 1 + \max\{j \in \mathbb{N} \mid m_{B'}^o(j) = 1\} = 1 + \max\{j \in \mathbb{N} \mid m_A^o(j+1) = 1\} = n - 1.$$

D'aquí s'obté que $f' \in C^{(n'-1)}([a', b'])$. Per altra banda f' s'anul·la sobre B' . Podem aplicar, per tant, la hipòtesi d'inducció a B' i a f' , obtenint una configuració quasi-completa N' tal que B' és esquelet de N' i tal que f' s'anul·la sobre N' . A la figura 4.7 (a) hi ha una possible configuració N' continuant amb l'exemple de la figura 4.6.

Prenem

$$N = \{(x, j+1) \mid (x, j) \in N'\} \cup \{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)\}.$$

És a dir, N és la configuració obtinguda d'augmentar la derivació dels nodes de N' en una unitat, i després afegir els nodes $(x_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Veure la figura 4.7 (b).

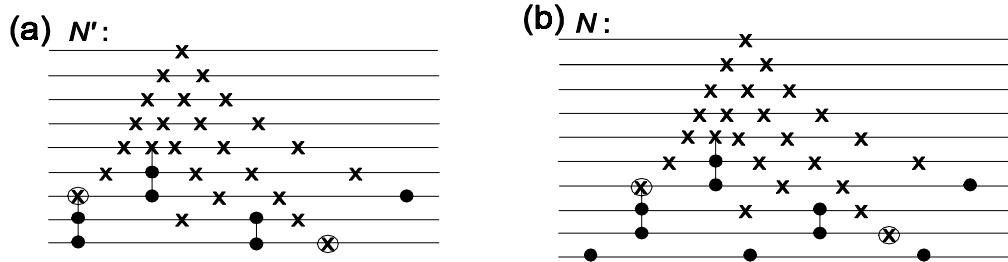


Figura 4.7

Per construcció N és quasi-completa (N' ho és i $(y_i, 1) \in N$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$) i f s'anul·la sobre N . Per altra banda, és immediat acabar de comprovar que A és esquelet de N , i això completa la demostració. \square

Corol·lari 4.17. *Siguin A una configuració quasi-conservativa, a, b i n els nombres definits a (4.7) i (4.8), i $f \in C^{(n-1)}([a, b])$ una funció que s'anul·la sobre A . Aleshores, si $j \geq 0$ és un nombre natural tal que $m_A^o(j) = 1$, $f^{(j)}$ té com a mínim un zero a l'interval $[a, b]$.*

Demostració. El teorema 4.16 proporciona una configuració quasi-completa N tal que A és esquelet de N i f és nul·la sobre N . Si $m_A^o(j) = 1$, del corol·lari 4.6 es dedueix que $m_N(j) \geq 1$ i per tant $f^{(j)}$ té algun zero a $[a, b]$. \square

Una altra conseqüència és el teorema 1.4, [2].

Corol·lari 4.18. *Si A és una configuració Pólya i quasi-conservativa, A és regular.*

Demostració. En primer lloc, del corol·lari 1.14 es desprèn que el nombre n definit a (4.8) coincideix amb $\sharp A$. Si suposem que A no és regular aleshores existeix un polinomi no idènticament nul P , de grau $r = \deg(P) < \sharp A$, que s'anul·la sobre A . Del corol·lari 4.17 es dedueix que qualsevol derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq \sharp A - 1$, té zeros reals, ja que $n = \sharp A$. En particular, si $j = r$ aleshores el polinomi $P^{(r)}$, que és una constant no nul·la, té zeros reals, la qual cosa és impossible. Per tant A és una configuració regular. \square

Capítol 5

L'aplicació extensió

En aquest capítol donarem les eines imprescindibles per al capítol següent, tals com l'aplicació extensió i la continuïtat de les arrels veritables i latents.

Per a una funció $m : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, finita i a valors 0 o 1, considerem el seu suport usual, denotat $\text{supp}(m) = \{j \in \mathbb{N} \mid m(j) = 1\}$. Si $y \in \mathbb{R}$, posem

$$S_m^y = \{(y, j) \mid j \in \mathbb{N}, m(j) = 1\} \quad (5.1)$$

La representació geomètrica de la configuració S_m^y consisteix en considerar una línia vertical d'abscissa y , i després acabar de col·locar els nodes de S_m^y sobre d'aquesta línia, que ocupen les derivacions j per a les quals és $m(j) = 1$. Clarament $\#S_m^y = \#\text{supp}(m)$, i si $j \geq 0$, $m_{S_m^y}(j) = m(j)$ i $M_{S_m^y}(j) = M(j)$.

Més en general, siguin h funcions finites $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, h$, totes elles a valors 0 o 1. Per a cada tria de h nombres reals y_i , $i = 1, 2, \dots, h$, podem formar les configuracions $S_{m_1}^{y_1}, S_{m_2}^{y_2}, \dots, S_{m_h}^{y_h}$. Fixem-nos que l'abscissa y_i va associada només a la funció m_i . La reunió de les configuracions anteriors és la configuració

$$E(\vec{y}) = \bigcup_{i=1}^h S_{m_i}^{y_i} = \{(y_i, j) \mid 1 \leq i \leq h, j \geq 0, m_i(j) = 1\} \quad (5.2)$$

on \vec{y} denota el vector $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_h) \in \mathbb{R}^h$. Per exemple, quan les funcions m_i , $i = 1, 2, 3, 4$, vénen donades per

$$\begin{aligned} m_1 &= [1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots] \\ m_2 &= [0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots] \\ m_3 &= [1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots] \\ m_4 &= [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots] \end{aligned} \quad (5.3)$$

aleshores la representació geomètrica de $E(\vec{y})$, per a diferents valors de \vec{y} , és la de la figura 5.1. A la part (a) quan $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$, a (b) si $y_1 < y_2 = y_3 < y_4$, i a (c) si $y_2 < y_1 < y_3 < y_4$.

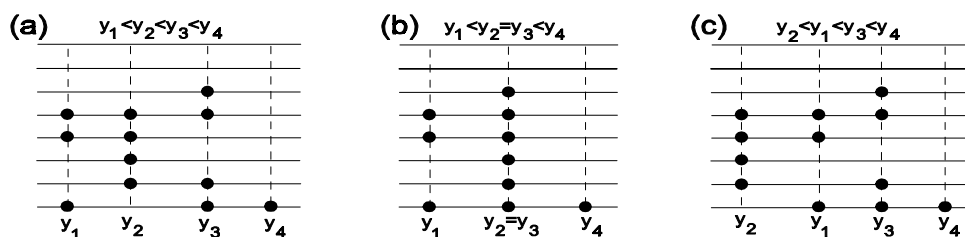


Figura 5.1. $E(\vec{y})$ per a diversos valors de \vec{y} .

Observem que l'única diferència entre (a) i (c) és una permutació entre les línies verticals corresponents a les abscisses y_1 i y_2 , deguda a l'ordenació diferent de les components de \vec{y} .

Si $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ és tal que les configuracions $S_{m_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, h$, són disjunts dos a dos, aleshores, aplicant cardinals a (5.2), obtenim que $E(\vec{y})$ té cardinal constant i igual n , on

$$n = \sum_{i=1}^h \# \text{supp}(m_i) .$$

Això per exemple passa si les components y_i , $i = 1, 2, \dots, h$, són diferents dos a dos (figura 5.1, (a) i (c)). En canvi, quan les configuracions $S_{m_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, h$, no són disjunts dos a dos, el nombre de nodes de $E(\vec{y})$ és menor que n , com passa per exemple en la figura 5.1 (b). Això fa que ens haguem de replantejar una altra definició per a $E(\vec{y})$, denotada $\text{Ext}(\vec{y})$, de manera que amb aquesta nova definició obtinguem sempre n nodes, i de manera que recuperem $E(\vec{y})$ quan els $S_{m_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, h$, siguin disjunts dos a dos.

La construcció de les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, la donarem a la secció següent, formulada a partir de funcions nivell. Aquesta construcció està inspirada en [12] i [33, pàg. 63], amb l'única diferència que nosaltres la necessitem en tots els punts $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. L'aplicació $\text{Ext}: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathcal{C}^{*,n}$ tal, que a $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ li fa correspondre la configuració $\text{Ext}(\vec{y}) \in \mathcal{C}^{*,n}$, on $\mathcal{C}^{*,n}$ denota el conjunt de les configuracions de n nodes, serà anomenada *aplicació extensió*. Hem optat per aquest nom pel simple fet que aquesta aplicació és una extensió, a tot \mathbb{R}^h , de l'aplicació $\vec{y} \mapsto E(\vec{y})$ quan aquesta última només es considera definida en els punts que proporcionen n nodes (punts $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ tals que les configuracions $S_{m_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, h$, són disjunts dos a dos).

També veurem les propietats més elementals de les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. En particular caracteritzarem el cas Pólya i conservatiu, és a dir, donarem les condicions necessàries i suficients que han de verificar les funcions m_i , $i = 1, 2, \dots, h$, per tal que $\text{Ext}(\vec{y})$ sigui sempre (i.e., per a tot $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$) una configuració Pólya i conservativa.

Observem que en el cas Pólya i conservatiu sempre podem considerar el polinomi de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre $\text{Ext}(\vec{y})$. Aquest polinomi depèn de \vec{y} i es denota per $P(\vec{y}; \cdot)$, indicant així la seva dependència en \vec{y} . Per a $x \in \mathbb{R}$, el valor d'aquest polinomi en x és $P(\vec{y}; x)$. El teorema 4.13 estableix que $\text{Ext}(\vec{y})$ és un esquelet de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$, i per tant té sentit parlar de la configuració de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$.

Posteriorment provarem que el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ varia contínuament amb $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. Aquest fet complementa [12], on es prova la continuïtat de $Q_f(\vec{y}; \cdot)$ respecte de $\vec{y} \in \{\vec{y} \in \mathbb{R}^h \mid y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_h\}$, on $Q_f(\vec{y}; \cdot)$ és el polinomi de grau menor que n que interpola certa funció f , suficientment regular, en els nodes de $\text{Ext}(\vec{y})$.

Finalment estudiarem els nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ i presentarem el resultat principal del capítol, que estableix que aquests nodes veritables varien amb certa continuïtat respecte de $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.

5.1 Definició i propietats generals

En el que segueix I és el conjunt d'índexs $I = \{1, 2, \dots, h\}$, on $h \geq 1$ és un nombre natural donat. Suposarem també donades funcions no nul·les i finites $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $i \in I$. Aquestes funcions es poden denotar conjuntament mitjançant el vector $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_h)$. També es considerarà el nombre natural n definit per

$$n = \sum_{i \in I} \# \text{supp}(m_i) \quad (5.4)$$

És a dir, n és el nombre total de uns assolit per les funcions m_i , $i \in I$. Observem que $n \geq h$.

Els vectors \vec{y} de \mathbb{R}^h els posem en la forma $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_h)$. Els conjunts

$$\begin{aligned} D(\mathbb{R}^h) &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^h \mid y_i \neq y_{i'} \text{ si } i \neq i'\} \\ D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h) &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^h \mid S_{m_i}^{y_i} \cap S_{m_{i'}}^{y_{i'}} = \emptyset \text{ si } i \neq i'\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

estàn formats, respectivament, pels vectors de \mathbb{R}^h amb components diferents dos

a dos, i pels vectors \vec{y} de \mathbb{R}^h tals que les configuracions $S_{m_1}^{y_1}, S_{m_2}^{y_2}, \dots, S_{m_h}^{y_h}$ són disjunctes dos a dos (o tals que la configuració $E(\vec{y})$ de (5.2) té n nodes). Notem que $S_{m_i}^{y_i} \cap S_{m_{i'}}^{y_{i'}} = \emptyset$ si, i només si, $y_i \neq y_{i'}$ ó $\text{supp}(m_i) \cap \text{supp}(m_{i'}) = \emptyset$. En particular es té la inclusió $D(\mathbb{R}^h) \subseteq D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$.

Lema 5.1. $D(\mathbb{R}^h)$ i $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ són oberts densos de \mathbb{R}^h .

Demostració. Clarament $D(\mathbb{R}^h)$ és un obert dens (el seu complementari $\mathbb{R}^h \setminus D(\mathbb{R}^h)$ és una reunió finita d'hiperplans). En particular, $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ també és dens. Per tant només cal veure que $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ és obert, però això és conseqüència de que si $\vec{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_h^0) \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ i $\varepsilon = \min_{i, i' \in I, y_i^0 \neq y_{i'}^0} \{|y_i^0 - y_{i'}^0|/2\}$, aleshores la bola, amb norma infinit, de centre \vec{y}^0 i radi ε està continguda a $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. \square

Tot vector \vec{y} de \mathbb{R}^h determina una partició de I . Això és, per a dos elements $i, i' \in I$ posem $i \equiv_{\vec{y}} i'$ si $y_i = y_{i'}$. La relació $\equiv_{\vec{y}}$ és una relació d'equivalència en I que depèn, en general, del vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. Aquesta relació d'equivalència proporciona una partició de I en classes d'equivalència, de manera que dos elements $i, i' \in I$ estan a una mateixa classe si les components $y_i, y_{i'}$ són iguals. Observem que el cardinal del conjunt quocient $I / \equiv_{\vec{y}}$ és com a molt h , essent igual a h si i només si $\vec{y} \in D(\mathbb{R}^h)$. Els elements del conjunt quocient $I / \equiv_{\vec{y}}$ seran denotats amb la lletra ι .

Per a una classe $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, el valor comú de les components $y_i, i \in \iota$, l'escriurem y_ι . És a dir, posarem

$$y_\iota = y_i \quad \text{si } i \in \iota \quad (5.6)$$

Les abscisses $y_\iota, \iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, són diferents dos a dos i descriuen totes les components $y_i, i = 1, 2, \dots, h$. Això és, el conjunt $\{y_\iota \mid \iota \in I / \equiv_{\vec{y}}\}$ coincideix amb el conjunt $\{y_i \mid i \in I\}$.

Per altra banda, si $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, la funció

$$m_\iota = \sum_{i \in \iota} m_i \quad (5.7)$$

és la suma de les $m_i, i \in \iota$. La funció nivell m_ι^o és coneguda, en el llenguatge de matrius d'incidència, com la fusió de les funcions $m_i, i \in \iota$.

Definició 5.2. Si $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, es defineix la configuració $\text{Ext}(\vec{y})$ per

$$\text{Ext}(\vec{y}) = \bigcup_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} S_{m_\iota^o}^{y_\iota} \quad (5.8)$$

És a dir, és la reunió de les configuracions de la forma $S_{m_i^o}^{y_i}$, on $\iota \in I/ \equiv_{\vec{y}}$. Recordem que cada configuració $S_{m_i^o}^{y_i}$ consisteix en una línia vertical d'abscissa y_i , ocupada per nodes en les derivacions j tals que $m_i^o(j) = 1$.

Com a exemple, suposem que les m_i , $i = 1, 2, 3, 4$, són les funcions de (5.3), i sigui \vec{y} el vector $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Quan $y_1 < y_2 = y_3 < y_4$, el conjunt quocient $I/ \equiv_{\vec{y}}$ està format per les classes $\{1\}$, $\{2, 3\}$ i $\{4\}$. Conseqüentment, en aquest cas hem de considerar les fusions $m_{\{1\}}^o = m_1^o$, $m_{\{2,3\}}^o = (m_2 + m_3)^o$ i $m_{\{4\}}^o = m_4^o$, que produeixen la representació geomètrica de $\text{Ext}(\vec{y})$ donada en la figura 5.2 (a). És interessant comparar-la amb la de la figura 5.1 (b). Si en el mateix exemple suposem $y_2 = y_3 < y_1 < y_4$, l'única diferència que es produeix és una permutació entre les dues primeres línies verticals de la figura 5.2 (a), obtenint en aquest cas la configuració de la part (b).

Com a altre exemple, sigui $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ amb $y_1 = y_2 < y_3 = y_4$. En aquest cas hem de considerar les fusions $m_{\{1,2\}}^o = (m_1 + m_2)^o$ i $m_{\{3,4\}}^o = (m_3 + m_4)^o$, obtenint la representació de $\text{Ext}(\vec{y})$ de la figura 5.2 (c). Si permutem les dues línies verticals d'aquesta figura obtindrem la representació de $\text{Ext}(\vec{y})$ quan $y_1 = y_2 > y_3 = y_4$.

Les parts (d) i (e) d'aquesta figura corresponen a altres exemples de $\text{Ext}(\vec{y})$.

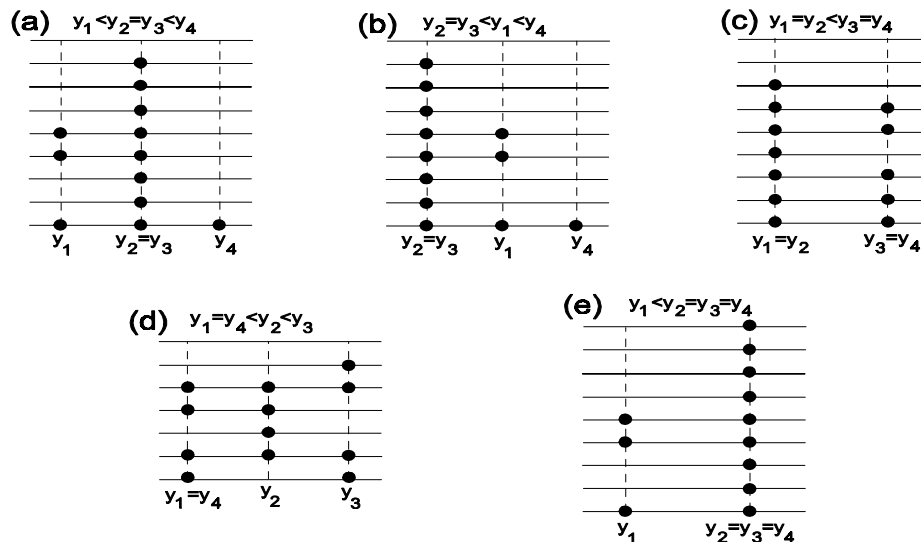


Figura 5.2. $\text{Ext}(\vec{y})$ per a diversos valors de \vec{y} .

Per a una classe $\iota \in I/ \equiv_{\vec{y}}$, el nombre de uns assolit per la funció m_i^o és el cardinal del seu suport, $\#\text{supp}(m_i^o)$. De la igualtat (1.13) i recordant que m^* coincidia amb

la funció nivell d'una funció m (veure també el comentari que segueix al teorema 1.12) resulta, per a j prou gran,

$$\#\text{supp}(m_\iota^o) = M_\iota(j) = \sum_{i \in \iota} M_i(j) = \sum_{i \in \iota} \#\text{supp}(m_i)$$

i aplicant ara cardinals a (5.8),

$$\begin{aligned} \#\text{Ext}(\vec{y}) &= \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} \#\text{supp}(m_\iota^o) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} \sum_{i \in \iota} \#\text{supp}(m_i) \\ &= \sum_{i \in I} \#\text{supp}(m_i) = n. \end{aligned}$$

És a dir, les configuracions de la forma $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, tenen n nodes.

Proposició 5.3. Sempre es té la inclusió $\bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i} \subseteq \text{Ext}(\vec{y})$. A més a més, són equivalents:

- (i) $\bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i} = \text{Ext}(\vec{y})$
- (ii) $\#(\bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i}) = \#\text{Ext}(\vec{y}) = n$
- (iii) $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$
- (iv) Per a tot $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$, $m_\iota \leq 1$

Demostració. Si $(x, j) \in \bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i}$ aleshores $x = y_i$ i $m_i(j) = 1$ per a cert $i \in I$. Si considerem ara el $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$ tal que $i \in \iota$, resulta $y_\iota = y_i = x$ i $m_\iota(j) \geq m_i(j) \geq 1$. D'aquí que $m_\iota^o(j) = 1$ i, per tant, $(x, j) \in S_{m_\iota^o}^{y_\iota} \subseteq \text{Ext}(\vec{y})$.

Anem a veure que (i),(ii),(iii) i (iv) són equivalents. Clarament (i) i (ii) són equivalents perquè ja hem provat la inclusió $\bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i} \subseteq \text{Ext}(\vec{y})$. Per altra banda, sempre es verifica

$$\# \left(\bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i} \right) \leq \sum_{i \in I} \#S_{m_i}^{y_i} = \sum_{i \in I} \#\text{supp}(m_i) = n = \#\text{Ext}(\vec{y}) \quad (5.9)$$

D'aquí que es satisfà (ii) si, i només si, l'única desigualtat de (5.9) es converteix en igualtat; o equivalentment, els $S_{m_i}^{y_i}$, $i \in I$, són disjunts dos a dos. Això últim és el mateix que demanar que $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, és a dir, (iii). Finalment, (iv) és equivalent a que si $i \neq i'$ i a més a més $y_i = y_{i'}$, aleshores $\text{supp}(m_i) \cap \text{supp}(m_{i'}) = \emptyset$; o el que és el mateix, que $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. \square

D'aquesta proposició es desprèn que si $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ aleshores $\text{Ext}(\vec{y})$ coincideix amb la configuració $E(\vec{y}) = \bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i}$ considerada en (5.2).

L'objectiu del que resta de secció és caracteritzar el cas Pólya i conservatiu. Necessitem però un lema previ, que recull algunes propietats generals de les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.

Lema 5.4. *Sigui $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.*

(i) *Els nombres $m_{\text{Ext}(\vec{y})}(j)$ i $M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j)$, $j \geq 0$, vénen donats per*

$$m_{\text{Ext}(\vec{y})}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} m_{\iota}^{\circ}(j), \quad M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} M_{\iota}^{\circ}(j) \quad (5.10)$$

En particular $M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j) \leq \sum_{i \in I} M_i(j)$.

(ii) *Suposem que per a cada $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$ les seqüències de la funció m_{ι}° són les seqüències*

$$m_{(k_{\iota,1}, p_{\iota,1})}, m_{(k_{\iota,2}, p_{\iota,2})}, \dots, m_{(k_{\iota,r(\iota)}, p_{\iota,r(\iota)})}.$$

Aleshores els peus de $\text{Ext}(\vec{y})$ són exactament els nodes $(y_{\iota}, k_{\iota,s})$, on $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$, $s = 1, \dots, r(\iota)$. A més a més, la multiplicitat en $\text{Ext}(\vec{y})$ del peu $(y_{\iota}, k_{\iota,s})$ és $p_{\iota,s}$.

(iii) *L'èpsilon de $\text{Ext}(\vec{y})$ és*

$$\varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y})} = \min_{\iota, \iota' \in I/\equiv_{\vec{y}}, \iota \neq \iota'} \left\{ \frac{|y_{\iota} - y_{\iota'}|}{2} \right\} = \min_{i, i' \in I, y_i \neq y_{i'}} \left\{ \frac{|y_i - y_{i'}|}{2} \right\}$$

amb el conveni que si el conjunt $I/\equiv_{\vec{y}}$ està format per un únic element, aleshores $\varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y})} = +\infty$.

Demostració. L'apartat (i) prové de que les configuracions $S_{m_{\iota}^{\circ}}^{y_{\iota}}$, $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$, són disjunctes dos a dos (els y_{ι} són diferents dos a dos), i per tant, aplicant cardinals a (5.8), $m_{\text{Ext}(\vec{y})}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} m_{S_{m_{\iota}^{\circ}}^{y_{\iota}}}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} m_{\iota}^{\circ}(j)$. L'altra igualtat de (5.10) s'obté de manera anàloga. En particular obtenim que

$$M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} M_{\iota}^{\circ}(j) \leq \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} M_{\iota}(j) = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} \sum_{i \in \iota} M_i(j) = \sum_{i \in I} M_i(j).$$

L'apartat (ii) és conseqüència de la definició de $\text{Ext}(\vec{y})$ i de la definició de les seqüències d'una funció finita a valors 0 o 1.

Finalment, l'apartat (iii) resulta de la definició de $\text{Ext}(\vec{y})$ i de la igualtat $\{y_\iota \mid \iota \in I/\equiv_{\vec{y}}\} = \{y_i \mid i \in I\}$. \square

Proposició 5.5. *Es verifiquen les propietats següents.*

(a) *Són equivalents:*

- (a.1) *Per a tot $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, $\text{Ext}(\vec{y})$ és una configuració Pólya.*
- (a.2) *Existeix un $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ tal que $\text{Ext}(\vec{y})$ satisfà la condició de Pólya.*
- (a.3) *La funció $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n .*

(b) *Són equivalents:*

- (b.1) *Per a tot $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, $\text{Ext}(\vec{y})$ és una configuració conservativa.*
- (b.2) *Existeix un $\vec{y} \in D(\mathbb{R}^h)$ tal que $\text{Ext}(\vec{y})$ és conservativa.*
- (b.3) *Per a tot $i \in I$, m_i és una funció conservativa.*

(c) *Són equivalents:*

- (c.1) *Per a tot $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, $\text{Ext}(\vec{y})$ és Pólya i conservativa.*
- (c.2) *Existeix un $\vec{y} \in D(\mathbb{R}^h)$ tal que $\text{Ext}(\vec{y})$ és Pólya i conservativa.*
- (c.3) *Les funcions m_i , $i \in I$, són conservatives i la suma $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n .*

Demostració. (a) El teorema 1.12 (ii) estableix que la funció $\sum_{i \in I} m_i = \sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} m_\iota$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si, i només si, la funció $\sum_{\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}} m_\iota^o$ la satisfà. Però pel lema 5.4 (i), aquesta última funció coincideix amb $m_{\text{Ext}(\vec{y})}$, i per tant satisfà la condició de Pólya per sobre amb n si i només si $\text{Ext}(\vec{y})$ és una configuració Pólya (una configuració A satisfà la condició de Pólya si, i només si, la funció m_A satisfà la condició de Pólya per sobre amb $n = \sharp A$). Com que els raonaments anteriors són vàlids per a tots els punts $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, obtenim que (a.1), (a.2) i (a.3) són equivalents.

(b) Suposem primer que per a tot $i \in I$, m_i és conservativa. Sigui $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. Del corol·lari 1.19 es dedueix que si $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$, la funció $m_\iota^o = (\sum_{i \in \iota} m_i)^o$ també és conservativa. D'aquest fet i del lema 5.4 (ii) s'obté que $\text{Ext}(\vec{y})$ és conservativa. Suposem ara que existeix un $\vec{y} \in D(\mathbb{R}^h)$ tal que $\text{Ext}(\vec{y})$ és conservativa. Altre cop pel lema 5.4 (ii), sabem que totes les funcions m_ι^o , $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$, han de ser conservatives. Per altra banda, com que $\vec{y} \in D(\mathbb{R}^h)$, si $i \in I$ aleshores el $\iota \in I/\equiv_{\vec{y}}$ que compleix $i \in \iota$ està format només per l'índex i , $\iota = \{i\}$. Això implica que $m_\iota = m_i \leq 1$, i per tant $m_i = m_\iota = m_\iota^o$. És a dir, m_i és conservativa.

L'apartat (c) es deriva dels apartats (a) i (b). \square

5.2 Continuïtat del polinomi anul·lador

En aquesta secció suposarem que totes les m_i , $i \in I$, són conservatives, i que la suma $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb $n = \sum_{i \in I} \# \text{supp}(m_i)$. Això implica que $\text{Ext}(\vec{y})$ és sempre una configuració Pólya i conservativa.

En particular, $\overline{\text{Ext}}(\vec{y})$ és una configuració regular. Podem considerar, per tant, el polinomi $P(x)$ de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre $\text{Ext}(\vec{y})$. El teorema 4.13 estableix que $\text{Ext}(\vec{y})$ és un esquelet de $Z(P)$ i que $Z(P)$ és \mathcal{B} -configuració. Com que en general el polinomi P depèn de \vec{y} , denotarem aquest polinomi per $P(\vec{y}; \cdot)$. Així, per a $x \in \mathbb{R}$ el valor de P en x és $P(x) = P(\vec{y}; x)$.

El resultat principal d'aquesta secció estableix que el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ varia contínuament amb $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. És a dir, els coeficients d'aquest polinomi són funcions contínues de \vec{y} . Enunciem a continuació un lema ([4],[11]) que farem servir en la demostració del resultat esmentat.

Lema 5.6. *Siguin X, Y dos espais mètrics i $D \subseteq X$ un obert dens de X . Si $\Phi : X \rightarrow Y$ és una aplicació tal, que la seva restricció a D és contínua, i tal que per a tot $x^* \in X \setminus D$ es té $\lim_{x \rightarrow x^*, x \in D} \Phi(x) = \Phi(x^*)$, aleshores Φ és contínua. \square*

Teorema 5.7. *Suposem que les m_i , $i \in I$, són conservatives i que la suma $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n . Per a cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ considerem el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre $\text{Ext}(\vec{y})$. Aleshores, els coeficients del polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ són funcions contínues de $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.*

Demostració del teorema. Considerem l'aplicació

$$\Phi : \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$$

donada per $\Phi(\vec{y}) = P(\vec{y}; \cdot)$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. Tot es redueix a provar que Φ és contínua. A \mathbb{R}^h considerarem la norma de l'infinit, i a $\mathbb{R}_n[x]$ la norma de l'infinit dels coeficients dels polinomis. És a dir, si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ aleshores $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} \{|a_k|\}$. Per veure que Φ és contínua aplicarem el lema 5.6 quan $D = D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, tot i que els raonaments que farem també valen si $D = D(\mathbb{R}^h)$.

Provarem primer que Φ és contínua a tot $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. En efecte, per a cada $i \in I$ ordenem els elements del suport de m_i en la forma

$$\text{supp}(m_i) = \{j_{i1}, j_{i2}, \dots, j_{i,k_i}\}, \text{ on } j_{i1} < j_{i2} < \dots < j_{i,k_i} \quad (5.11)$$

Si $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, és $\text{Ext}(\vec{y}) = \bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i}$ i, per tant, de (5.11) resulta

$$\text{Ext}(\vec{y}) = \{(y_1, j_{1,1}), (y_1, j_{1,2}), \dots, (y_1, j_{1,k_1}), (y_2, j_{2,1}), (y_2, j_{2,2}), \dots, \dots, (y_h, j_{h,1}), (y_h, j_{h,2}), \dots, (y_h, j_{h,k_h})\} \quad (5.12)$$

Aquesta expressió per a $\text{Ext}(\vec{y})$ és vàlida en els punts $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. Notem que els nombres j_{is} , $1 \leq i \leq h$, $1 \leq s \leq k_i$, són fixos (no depenen de \vec{y}), així que variant $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, a l'expressió (5.12) només varien les components y_i . Per altra banda, la mateixa expressió proporciona un ordre per als nodes de $\text{Ext}(\vec{y})$. És a dir,

$$(y_1, j_{1,1}) < (y_1, j_{1,2}) < \dots < (y_1, j_{1,k_1}) < (y_2, j_{2,1}) < \dots < (y_h, j_{h,k_h}).$$

La fórmula explícita (1.9) del teorema 1.5 estableix que

$$P(\vec{y}; x) = \frac{(-1)^n}{D(\text{Ext}(\vec{y}))} \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{x^1}{1!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^n}{n!} \\ \hline & & & & V_{n+1}(\text{Ext}(\vec{y})) \end{array} \right|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

on tant les files del determinant de Vandermonde $D(\text{Ext}(\vec{y}))$ com les files de $V_{n+1}(\text{Ext}(\vec{y}))$ estan ordenades amb l'ordre escollit. Si $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, de (5.12) es desprèn que les entrades de la matriu $V_{n+1}(\text{Ext}(\vec{y}))$ són de la forma $\frac{y_i^{r-j_{is}}}{(r-j_{is})!}$, on $r = 0, 1, \dots, n$, i per tant, varien contínuament amb \vec{y} , $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. El mateix passa per a les entrades del determinant $D(\text{Ext}(\vec{y}))$. A més a més, $D(\text{Ext}(\vec{y}))$ no s'anul·la mai degut a que $\text{Ext}(\vec{y})$ és regular. De tot això resulta que $P(\vec{y}; \cdot)$ és continu en $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, ja que el desenvolupament del determinant de (5.13) per la primera fila (fila corresponent a les potències de x), mostra que el coeficient de $P(\vec{y}; \cdot)$ que acompanya a cada potència x^r , $0 \leq r \leq n$, és continu en \vec{y} . Concloem així que la restricció de Φ a $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ és contínua.

Signi ara $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^h \setminus D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, $\vec{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_h^*)$. Pel lema 5.6 serà suficient veure

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{y}^*, \vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)} \Phi(\vec{y}) = \Phi(\vec{y}^*)$$

per demostrar que Φ és contínua. Amb altres paraules hem de veure que si $\varepsilon > 0$ aleshores hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta, \vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h) \implies \|P(\vec{y}; \cdot) - P(\vec{y}^*; \cdot)\| < \varepsilon \quad (5.14)$$

Sigui doncs $\varepsilon > 0$. Considerem, per a cada $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, els elements del suport de $m_{\iota^*}^o$ ordenats en la forma

$$\text{supp}(m_{\iota^*}^o) = \{j_{\iota^*,1}, j_{\iota^*,2}, \dots, j_{\iota^*,k_{\iota^*}}\}, \quad j_{\iota^*,1} < j_{\iota^*,2} < \dots < j_{\iota^*,k_{\iota^*}} \quad (5.15)$$

Els nombres $j_{\iota^*,s}$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, són fixos (només depenen de \vec{y}^* que també és fix) i la configuració $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ val

$$\text{Ext}(\vec{y}^*) = \{(y_{\iota^*}^*, j_{\iota^*,s}) \mid \iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}, s = 1, 2, \dots, k_{\iota^*}\} \quad (5.16)$$

Sigui

$$B = \{(z_{\iota^*,s}, j_{\iota^*,s}) \mid \iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}, s = 1, 2, \dots, k_{\iota^*}\} \quad (5.17)$$

on cada $z_{\iota^*,s}$ és un nombre real proper a $y_{\iota^*}^*$. Quan $z_{\iota^*,s} = y_{\iota^*}^*$ per a tot $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$ i tot $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, aleshores B coincideix amb $\text{Ext}(\vec{y}^*)$. Per altra banda, si tots els $z_{\iota^*,s}$ satisfan $|z_{\iota^*,s} - y_{\iota^*}^*| < \varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y}^*)}$, la configuració B té n nodes. Ara afirmem que existeix un $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y}^*)}$, de manera que si

$$|z_{\iota^*,s} - y_{\iota^*}^*| < \delta, \quad \iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}, \quad 1 \leq s \leq k_{\iota^*}, \quad (5.18)$$

aleshores B és una configuració regular de n nodes i

$$\left\| Q - P(\vec{y}^*; \cdot) \right\| < \varepsilon, \quad (5.19)$$

on $Q(x)$ és el polinomi de grau n , amb coeficient principal $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre B . Aquest fet és conseqüència de les consideracions següents: (i) si prenem $0 < \delta < \varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y}^*)}$, (5.18) implica que B té n nodes, (ii) les entrades del determinant de Vandermonde de B , $D(B)$, són de la forma $\frac{z_{\iota^*,s}^{r-j_{\iota^*,s}}}{(r-j_{\iota^*,s})!}$, $r = 0, 1, \dots, n-1$, i per tant són funcions contínues en les variables $z_{\iota^*,s}$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$. Quan $z_{\iota^*,s} = y_{\iota^*}^*$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, aquest determinant és no nul, ja que en aquest cas $B = \text{Ext}(\vec{y}^*)$, que és regular. Per tant existeix un δ_0 , $0 < \delta_0 < \varepsilon_{\text{Ext}(\vec{y}^*)}$, de manera que si $|z_{\iota^*,s} - y_{\iota^*}^*| < \delta_0$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, aleshores B és una configuració regular de n nodes. Finalment, les entrades de la matriu $V_{n+1}(B)$ també són funcions contínues en les variables $z_{\iota^*,s}$, puix que també són de la forma $\frac{z_{\iota^*,s}^{r-j_{\iota^*,s}}}{(r-j_{\iota^*,s})!}$. De l'expressió (1.9) per al polinomi $Q(x)$ que s'anul·la sobre B es desprèn, de manera anàloga a quan vèiem que el polinomi $P(\vec{y}^*; \cdot)$ de (5.13) era continu en \vec{y}^* , que els coeficients de Q són funcions contínues en les variables $z_{\iota^*,s}$. Aplicant

aquesta continuïtat en el punt $z_{\iota^*,s} = y_{\iota^*}^*$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, s'obté un $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, de manera que si es compleix (5.18) aleshores B és regular, té n nodes i es verifica (5.19). Observem que per a això últim cal utilitzar que si $z_{\iota^*,s} = y_{\iota^*}^*$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $1 \leq s \leq k_{\iota^*}$, el polinomi que s'anul·la sobre B coincideix amb el polinomi $P(\vec{y}^*; \cdot)$, ja que en aquest cas $B = \text{Ext}(\vec{y}^*)$.

En el que segueix demostrarem que per a aquest δ obtingut es verifica (5.14). Amb això ja haurem acabat la demostració del teorema. Sigui doncs $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ amb $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$. Per a cada $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$ considerem la configuració

$$\text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y}) = \bigcup_{i \in \iota^*} S_{m_i}^{y_i}.$$

Es verifiquen:

- (i) $\text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y})$ és un subconjunt de $\text{Ext}(\vec{y})$.
- (ii) $\text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y})$ és una configuració conservativa. Això es dedueix del fet que les funcions m_i són conservatives.
- (iii) Les abscisses dels nodes de $\text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y})$ estan totes a l'interval $(y_{\iota^*}^* - \delta, y_{\iota^*}^* + \delta)$.
En efecte, si $i \in \iota^*$ es té $|y_i - y_{\iota^*}^*| = |y_i - y_i^*| \leq \|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$.
- (iv) Si $j \geq 0$ aleshores

$$m_{\text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y})}(j) = \sum_{i \in \iota^*} m_i(j) = m_{\iota^*}(j).$$

Del corol·lari 4.17 aplicat a $A = \text{Ext}_{\iota^*}(\vec{y})$ i $f = P(\vec{y}; \cdot)$ es dedueix que si $m_{\iota^*}^o(j) = 1$ aleshores el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ s'anul·la sobre algun node de derivació j i amb abscissa a l'interval $(y_{\iota^*}^* - \delta, y_{\iota^*}^* + \delta)$. Així, de (5.15), per a tot $s = 1, 2, \dots, k_{\iota^*}$ hi haurà un node $(z_{\iota^*,s}, j_{\iota^*,s})$ amb $|z_{\iota^*,s} - y_{\iota^*}^*| < \delta$ i tal que $P(\vec{y}; \cdot)$ s'anul·la sobre ell. Com que aquest procés el podem anar fent per a cada $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, obtindrem nombres $z_{\iota^*,s}$, $\iota^* \in I / \equiv_{\vec{y}^*}$, $s = 1, 2, \dots, k_{\iota^*}$, satisfent (5.18) i tals que $P(\vec{y}; \cdot)$ s'anul·la sobre B , on B és la configuració de (5.17). D'aquí que $P(\vec{y}; \cdot)$ coincideix amb Q , el polinomi de grau n , amb coeficient principal $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre B . En particular, de (5.19) obtenim que $\|P(\vec{y}; \cdot) - P(\vec{y}^*; \cdot)\| = \|Q - P(\vec{y}^*; \cdot)\| < \varepsilon$, tal com volíem veure. \square

5.3 Arrels veritables i latents

Iniciem aquesta secció amb un petit recull de les notacions i resultats precedents. Les funcions m_i , $i \in I$, són totes conservatives i la suma $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb $n = \sum_{i \in I} \# \text{supp}(m_i)$. Amb això, si $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, $\text{Ext}(\vec{y})$ és una configuració de n nodes que és Pólya i conservativa. Pel teorema 4.13 sabem que $\text{Ext}(\vec{y})$ és un esquelet de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ i que $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ és \mathcal{B} -configuració. En el teorema 5.7 s'ha establert que el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ varia contínuament amb $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.

Podem considerar la configuració $V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}$ de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$. Si $j = 0$ o $j \geq n$, el nombre de nodes veritables que tenen derivació j és igual a zero. En efecte, per a $j = 0$ aquest fet és trivial mentre que si $j \geq n$ prové de que la longitud de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ és igual a n . En canvi, per a $1 \leq j \leq n - 1$, del teorema 4.5 (ii) obtenim que $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) = M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j - 1) - M_{\text{Ext}(\vec{y})}^o(j - 1)$. El sumand $M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j - 1)$ està calculat en el lema 5.4 (i), mentre que $M_{\text{Ext}(\vec{y})}^o(j - 1)$ val j segons el corol·lari 1.14. De tot això, i de que $M_\iota^o(j - 1) \leq M_\iota(j - 1)$, resulta

$$\begin{aligned} m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) &= \sum_{\iota \in I / \equiv \vec{y}} M_\iota(j - 1) - j \\ &\leq \sum_{\iota \in I / \equiv \vec{y}} M_\iota(j - 1) - j \\ &= \sum_{i \in I} M_i(j - 1) - j \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aquest últim nombre no depèn \vec{y} (només depèn de les funcions m_i , $i \in I$). El denotarem per $\text{ver}(j)$. És a dir,

$$\text{ver}(j) = \sum_{i \in I} M_i(j - 1) - j, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (5.21)$$

Tenim, per tant, $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) \leq \text{ver}(j)$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Lema 5.8. *Un vector \vec{y} pertany a $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ si, i només si, per a tot $j = 1, 2, \dots, n - 1$ el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tenen derivació j és exactament $\text{ver}(j)$. És a dir,*

$$m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) = \text{ver}(j), \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (5.22)$$

Demostració. Suposem primer $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. En aquest cas l'única desigualtat que apareix en (5.20) es converteix en igualtat, ja que per la proposició 5.3 sabem que $m_\iota^o = m_\iota$ si $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, i per tant $M_\iota^o = M_\iota$ per a $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$. Obtenim així (5.22). Suposem ara que es verifica (5.22) i, per reducció a l'absurd, suposarem que $\vec{y} \notin D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. Per la proposició 5.3 serà $m_\iota \neq m_\iota^o$ per a cert $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, i per tant $M_\iota(j') > M_\iota^o(j')$ per a algun $j' \geq 0$. Forçosament és $j' \leq n - 2$. En efecte, la funció m_ι satisfà la condició de Pólya per sobre amb n (recordem que la suma $\sum_{i \in I} m_i$ la satisfà, i que $m_\iota \leq \sum_{i \in I} m_i$) resultant del teorema 1.12 que $M_\iota(j) = M_\iota^o(j)$ si $j \geq n - 1$. D'aquí que $j' \leq n - 2$. Finalment, el nombre $j = j' + 1$ satisfà $1 \leq j \leq n - 1$ i $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) < \text{ver}(j)$, ja que l'única desigualtat de (5.20) es converteix en desigualtat estricta; això es contradueix amb (5.22). \square

El lema anterior estableix que per als punts $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ es manté constant (no depèn de \vec{y}), inclús si tallem a cada derivació $j \geq 0$. En canvi, per als punts $\vec{y} \in \mathbb{R}^h \setminus D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ hi ha una pèrdua de nodes veritables deguda a les fusions atès que en general tindrem $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) \leq \text{ver}(j)$, essent la desigualtat anterior estricta almenys per a algun j . El nombre de nodes veritables de derivació j que s'han perdut pot ésser calculat exactament tenint en compte (5.20) i (5.21), resultant que

$$\begin{aligned} \text{ver}(j) - m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) &= \sum_{i \in I} M_i(j - 1) - \sum_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} M_\iota^o(j - 1) \\ &= \sum_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} [M_\iota(j - 1) - M_\iota^o(j - 1)] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Com a exemple, considerem les funcions m_i , $i = 1, 2, 3$, donades per $m_1 = m_2 = [0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots]$ i $m_3 = [1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots]$. Els punts de la figura 5.3 són els nodes de $\text{Ext}(\vec{y})$ per a diferents valors de \vec{y} , mentre que la resta de nodes de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ són els nodes marcats amb creus donat que $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ admet $\text{Ext}(\vec{y})$ com a esquelet.

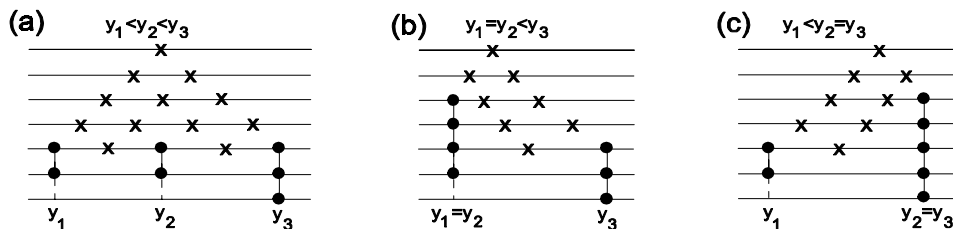


Figura 5.3. Pèrdua de nodes veritables.

En qualsevol de les tres possibilitats anteriors es té $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^+ = \emptyset$ (veure definició 4.3), així que la configuració de nodes veritables coincideix amb $Z(P(\vec{y}; \cdot)) \setminus \text{Ext}(\vec{y})$, és a dir, coincideix amb la configuració formada pels nodes marcats amb creus. En el cas (a), com que $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ no s'ha perdut cap node veritable. En canvi, si comparem aquest cas amb els casos (b) i (c), veurem que tant en el cas (b) com en el (c) s'ha perdut un node veritable de derivació dos, dos nodes veritables de derivació tres i un node veritable de derivació quatre.

Siguin $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ i $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Sabem que hi ha exactament $\text{ver}(j)$ nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tenen derivació j . Podem considerar, per tant, les abscisses $x_1 < x_2 < \dots < x_{\text{ver}(j)}$ d'aquests nodes veritables. Les abscisses x_s , $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$, depenen de $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ i de $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, així que en general tindrem $x_s = x_s(\vec{y}; j)$, $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$. Si fixem j i s , la funció tal que a cada $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ li fa correspondre el valor $x_s(\vec{y}; j) \in \mathbb{R}$ es denotarà per $x_s(\cdot; j)$. Obtenim així les funcions

$$x_s(\cdot; j) : D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad 1 \leq s \leq \text{ver}(j), 1 \leq j \leq n-1 \quad (5.24)$$

L'objectiu principal d'aquesta secció és estendre les $x_s(\cdot; j)$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, $1 \leq j \leq n-1$, a tot \mathbb{R}^h , de forma que aquesta extensió sigui contínua, resultant en particular que les funcions $x_s(\cdot; j)$ de (5.24) són funcions contínues.

5.3.1 Arrels veritables i latents. Propietats generals.

Definició 5.9. Considerem un punt $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ i un nombre natural $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Per a cada node $\alpha \in Z(P(\vec{y}; \cdot))$ que tingui derivació j , definim $l_{\vec{y}; j}[\alpha]$ tal com segueix. Si $\alpha \notin \text{Ext}(\vec{y})$ aleshores $l_{\vec{y}; j}[\alpha] = 1$, i si $\alpha \in \text{Ext}(\vec{y})$,

$$l_{\vec{y}; j}[\alpha] = \begin{cases} 1 + M_\iota(j-1) - M_\iota^o(j-1), & \text{si } \alpha \in [Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^+ \\ M_\iota(j-1) - M_\iota^o(j-1), & \text{si } \alpha \in [Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^- \end{cases} \quad (5.25)$$

on ι és l'únic $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$ per al qual $\alpha = (y_\iota, j)$.

L'únic $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$ per al qual $\alpha = (y_\iota, j)$ està ben definit, ja que els y_ι , $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, són diferents dos a dos i el node α pertany a $\text{Ext}(\vec{y})$. A més a més, observem que per a aquest ι tindrem $m_\iota^o(j) = 1$; o el que és el mateix, $M_\iota(j) - M_\iota^o(j-1) \geq 1$.

Els nombres $l_{\vec{y}; j}[\alpha]$ són nombres naturals i estan definits sempre que la derivació del node $\alpha \in Z(P(\vec{y}; \cdot))$ sigui igual a j . Per als nodes veritables del parell

$[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, es té $l_{\vec{y};j}[\alpha] \geq 1$. A més a més, quan $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ aleshores $l_{\vec{y};j}[\alpha] = 1$ si α és un node veritable de $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, i $l_{\vec{y};j}[\alpha] = 0$ en cas contrari. Això prové de que si $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, tots els termes $M_{\iota}(j-1) - M_{\iota}^o(j-1)$ de (5.25) són nuls.

Lema 5.10. *Siguin $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ i $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Aleshores, la suma de tots els $l_{\vec{y};j}[\alpha]$, on α varia dins del conjunt format pels nodes de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ que tenen derivació j , és igual a $\text{ver}(j)$. És a dir,*

$$\sum_{\substack{\alpha \in Z(P(\vec{y}; \cdot)) \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] = \text{ver}(j) \quad (5.26)$$

on j_{α} denota la derivació d'un node α .

Demostració. Sigui $E = \text{Ext}(\vec{y})$ i $Z = Z(P(\vec{y}; \cdot))$. Amb aquestes notacions, el sumatori de (5.26) s'escriu en la forma següent:

$$\sum_{\substack{\alpha \in Z \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] = \sum_{\substack{\alpha \in Z \setminus E \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] + \sum_{\substack{\alpha \in [Z|E]^+ \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] + \sum_{\substack{\alpha \in [Z|E]^- \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] \quad (5.27)$$

El primer sumatori anterior val $m_{Z \setminus E}(j)$, ja que si $\alpha \in Z \setminus E$ és un node de derivació j aleshores $l_{\vec{y};j}[\alpha] = 1$. Per als altres dos sumatoris hem d'utilitzar (5.25). Per simplicitat, si $\alpha \in E$, l'únic $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$ per al qual $\alpha = (y_{\iota}, j)$ serà denotat per $\iota[\alpha]$. Continuant en (5.27) hom obté, després d'haver tret l'1 que apareix en (5.25) corresponent als nodes $\alpha \in [Z|E]^+$,

$$\sum_{\substack{\alpha \in Z \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] = m_{Z \setminus E}(j) + m_{[Z|E]^+}(j) + \sum_{\substack{\alpha \in E \\ j_{\alpha} = j}} [M_{\iota[\alpha]}(j-1) - M_{\iota[\alpha]}^o(j-1)] \quad (5.28)$$

Clarament $m_{Z \setminus E}(j) + m_{[Z|E]^+}(j) = m_{V_{[Z|E]}}(j)$. Per altra banda, tenint en compte la igualtat $\{\alpha \in E \mid j_{\alpha} = j\} = \{(y_{\iota}, j) \mid \iota \in I / \equiv_{\vec{y}}, m_{\iota}^o(j) = 1\}$ resulta, continuant en (5.28),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha \in Z \\ j_{\alpha} = j}} l_{\vec{y};j}[\alpha] &= m_{V_{[Z|E]}}(j) + \sum_{\substack{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}} \\ m_{\iota}^o(j) = 1}} [M_{\iota}(j-1) - M_{\iota}^o(j-1)] \\ &= m_{V_{[Z|E]}}(j) + \sum_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} [M_{\iota}(j-1) - M_{\iota}^o(j-1)] = \text{ver}(j). \end{aligned}$$

L'última igualtat prové de (5.23), mentre que la penúltima de que si $m_{\iota}^o(j) = 0$ aleshores $M_{\iota}(j) - M_{\iota}^o(j-1) = 0$, que implica $M_{\iota}(j-1) - M_{\iota}^o(j-1) = 0$. \square

Definició 5.11. Siguin $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, i suposem que $z_1 < z_2 < \dots < z_r$ són les abscisses dels nodes de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ que tenen derivació j , on $r = m_{Z(P(\vec{y}; \cdot))}(j)$. Pel lema anterior, el vector

$$R(\vec{y}; j) = \underbrace{(z_1, z_1, \dots, z_1)}_{l_{\vec{y}; j}[(z_1, j)]}, \underbrace{(z_2, z_2, \dots, z_2)}_{l_{\vec{y}; j}[(z_2, j)]}, \dots, \underbrace{(z_r, z_r, \dots, z_r)}_{l_{\vec{y}; j}[(z_r, j)]} \quad (5.29)$$

té exactament $\text{ver}(j)$ components. Cadascuna d'aquestes components depèn del punt $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ i de $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. A la component s -èsima de $R(\vec{y}; j)$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, la podem denotar per $x_s(\vec{y}; j)$. És a dir, posem

$$R(\vec{y}; j) = (x_1(\vec{y}; j), x_2(\vec{y}; j), \dots, x_{\text{ver}(j)}(\vec{y}; j)) \quad (5.30)$$

Els nombres reals $x_s(\vec{y}; j)$ depenen de s , de j i de \vec{y} , essent el rang d'aquests arguments $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, $1 \leq j \leq n-1$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. De la pròpia definició es deriven les propietats següents:

- (i) $x_1(\vec{y}; j) \leq x_2(\vec{y}; j) \leq \dots \leq x_{\text{ver}(j)}(\vec{y}; j)$.
- (ii) Si $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, el node $(x_s(\vec{y}; j), j)$ pertany a $Z(P(\vec{y}; \cdot))$. En efecte, de (5.29) i (5.30), $x_s(\vec{y}; j)$ coincideix amb l'abscissa d'un node de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ que té derivació j .

Definició 5.12. Quan fixem j i s , s'obté una funció $x_s(\cdot; j) : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ que depèn de la variable $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. A les funcions així obtingudes,

$$x_s(\cdot; j) : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}; \quad 1 \leq s \leq \text{ver}(j), \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

les anomenarem *funcions d'arrels veritables i latents*.

El nom prové de que el vector $R(\vec{y}; j)$ de (5.29) té com a components les abscisses dels nodes veritables de derivació j del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, i possiblement també altres components degudes als termes $M_t(j-1) - M_t^o(j-1)$ de (5.25). Aquestes noves components són comptabilitzades com a arrels latents, i que com a conseqüència del teorema 5.16, vindran a representar les abscisses dels nodes veritables que s'han perdut a causa de les fusions.

Les funcions d'arrels veritables i latents són extensions a tot \mathbb{R}^h de les funcions considerades a (5.24). En efecte, siguin $1 \leq j \leq n-1$ i $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$. Els nombres $l_{\vec{y}; j}[(z_{r'}, j)]$, $r' = 1, 2, \dots, r$, que apareixen en (5.29), són coneguts i valen

$l_{\vec{y};j}[(z_{r'}, j)] = 1$ si $(z_{r'}, j)$ és un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, i $l_{\vec{y};j}[(z_{r'}, j)] = 0$ en cas contrari. Això significa que les components del vector $R(\vec{y}; j)$ són exactament les abscisses dels nodes veritables de derivació j del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, on aquestes abscisses estan ordenades per ordre creixent; o, amb altres paraules, si $a_1 < a_2 < \dots < a_{\text{ver}(j)}$ són les abscisses dels nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tenen derivació j , aleshores $x_s(\vec{y}; j) = a_s$, $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$.

Proposició 5.13. *Sigui $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.*

(i) *Suposem que $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ compleix $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) = \text{ver}(j)$. És a dir, el nombre de nodes veritables de derivació j del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ coincideix amb $\text{ver}(j)$. Suposem també que $a_1 < a_2 < \dots < a_{\text{ver}(j)}$ són les abscisses dels nodes veritables de derivació j del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$. Aleshores $x_s(\vec{y}; j) = a_s$ per a tot $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$.*

(ii) *Si $1 \leq j \leq n-1$ i $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, aleshores*

$$\min_{i \in I} \{y_i\} \leq x_s(\vec{y}; j) \leq \max_{i \in I} \{y_i\}$$

Demostració. (i) Com que $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) = \text{ver}(j)$, de (5.23) es dedueix que tots els nombres de la forma $M_{\iota}(j-1) - M_{\iota}^{\circ}(j-1)$, on $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, valen zero. Això implica que $l_{\vec{y};j}[\alpha] = 1$ si $\alpha \in V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}$, i $l_{\vec{y};j}[\alpha] = 0$ en cas contrari, obtenint que $R(\vec{y}; j) = (a_1, a_2, \dots, a_{\text{ver}(j)})$ i conseqüentment $x_s(\vec{y}; j) = a_s$, $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$.

L'apartat (ii) és una conseqüència de l'observació 4.2 i de que tot nombre $x_s(\vec{y}; j)$ és l'abscissa d'un node de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$, resultant que

$$\min_{i \in I} \{y_i\} = \min \text{ab}_{\text{Ext}(\vec{y})} \leq x_s(\vec{y}; j) \leq \max \text{ab}_{\text{Ext}(\vec{y})} = \max_{i \in I} \{y_i\}.$$

□

5.3.2 Continuitat de les funcions d'arrels veritables i latents

L'objectiu d'aquesta secció és provar que les funcions d'arrels veritables i latents són funcions contínues.

Necessitarem dos lemes previs. El primer és de caire general, vàlid per a parells $[N|A]$ qualssevol on A és un esquelet de N . Recordem que en el teorema 4.5 hem

calculat el nombre de nodes veritables de derivació j del parell $[N|A]$, $j \geq 0$, en funció dels nombres $m_A(j)$, $j \geq 0$. La demostració d'aquest teorema també serveix per obtenir cotes inferiors del nombre de nodes veritables que tenen derivació j i abscissa en un interval donat.

Si B és una configuració i $a < b$ són dos nombres reals, per $B^{a,b}$ denotem la configuració formada pels nodes de B que tenen abscissa a l'interval (a, b) .

Lema 5.14. *Sigui A un esquelet d'una configuració quasi-completa N i considerem la configuració $V = V_{[N|A]}$ de nodes veritables del parell $[N|A]$. Siguin $a < b$ dos nombres reals. Llavors,*

$$(i) \quad m_{V^{a,b}}(j) \geq (m_{V^{a,b}}(j-1) + m_{A^{a,b}}(j-1) - 1)_+, \quad j \geq 0 \quad (5.31)$$

(ii) *Si $0 \leq j_0^* \leq j^*$ són dos nombres naturals aleshores*

$$m_{V^{a,b}}(j^*) \geq m_{V^{a,b}}(j_0^*) + \left(\sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{A^{a,b}}(j) \right) - (j^* - j_0^*).$$

Demostració. Per a l'apartat (i) repetirem la demostració del teorema 4.5 (i), però només considerant els nodes que tenen la seva abscissa a l'interval (a, b) . Sigui $j \geq 0$. Si $m_{N^{a,b}}(j-1) = 0$ aleshores el segon costat de la desigualtat (5.31) val zero i ja hem fet. Suposem ara que $m_{N^{a,b}}(j-1) \geq 1$. Siguin $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ les abscisses dels nodes de $N^{a,b}$ que tenen derivació $j-1$. Observem que $r = m_{N^{a,b}}(j-1) \geq 1$, i que totes les abscisses x_s , $s = 1, 2, \dots, r$, estan, per definició, en l'interval (a, b) . Els nodes de la forma $(x_s, j-1)$, $(x_{s+1}, j-1)$, on $s = 1, 2, \dots, r-1$, són consecutius de N , i per tant sabem que hi ha un, i només un, node veritable del parell $[N|A]$ que té derivació j i abscissa compresa, estrictament, entre x_s i x_{s+1} . En particular aquest node té la seva abscissa a l'interval (a, b) , és a dir, pertany a $V^{a,b}$. Com que això ho podem anar fent per a cada $s = 1, 2, \dots, r-1$, haurem trobat, com a mínim, $r-1$ nodes diferents de $V^{a,b}$, tots ells de derivació j , però essent l'abscissa de tots ells diferent dels x_s , $s = 1, 2, \dots, r$. Diem com a mínim perquè en principi hi poden haver nodes de $V^{a,b}$ de derivació j que tinguin la seva abscissa estrictament menor que x_1 , o major que x_r .

Per altra banda, si $s = 1, 2, \dots, r$, les condicions (1) $(x_s, j-1) \in ([N|A]^+)^{a,b}$, i (2) $(x_s, j) \in V^{a,b}$, són equivalents (podem posar els superíndexs a, b perquè totes les abscisses x_s pertanyen a l'interval (a, b)). Per tant, dels (x_s, j) , $s = 1, 2, \dots, r$, n'hi ha exactament $m_{([N|A]^+)^{a,b}}(j-1)$ que pertanyen a $V^{a,b}$.

En total doncs hem trobat, com a mínim, $r - 1 + m_{([N|A]^+)^{a,b}}(j - 1)$ nodes diferents de $V^{a,b}$, tots ells amb derivació j . Si substituïm el valor $r = m_{N^{a,b}}(j - 1)$ tindrem

$$m_{V^{a,b}}(j) \geq m_{N^{a,b}}(j - 1) - 1 + m_{([N|A]^+)^{a,b}}(j - 1).$$

Tenint en compte la descomposició $N = [N|A]^- \cup [N|A]^+ \cup (N \setminus A)$, i que en aquesta descomposició s'hi poden incloure els superíndexs a, b , és fàcil veure que $m_{V^{a,b}}(j) \geq m_{V^{a,b}}(j - 1) + m_{A^{a,b}}(j - 1) - 1$, d'on resulta (5.31).

L'apartat (ii) és conseqüència d'aplicar reiteradament (5.31) sense el subíndex $+$, primer a $j = j_0^* + 1$, després a $j = j_0^* + 2$, i així successivament fins a $j = j^*$. \square

Lema 5.15. *Siguin $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^h$ i $\varepsilon > 0$. Existeix un $\delta > 0$ de manera que si (z^*, j^*) és un node de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ i $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ amb $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$, aleshores el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tenen derivació j^* i abscissa en l'interval $(z^* - \varepsilon, z^* + \varepsilon)$ és com a mínim $l_{\vec{y}^*; j^*}[(z^*, j^*)]$. És a dir,*

$$\#\{(z, j^*) \in V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]} \mid |z - z^*| < \varepsilon\} \geq l_{\vec{y}^*; j^*}[(z^*, j^*)] \quad (5.32)$$

Demostració. Podem suposar que $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, on ε^* és l'èpsilon de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$. Més encara, si apliquem el teorema 1.23 a $P = P(\vec{y}^*; \cdot)$ i considerem el nombre real ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon^*$, que s'obté d'aquest teorema, aleshores podem suposar $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. D'aquesta forma, la resta de l'enunciat del teorema 1.23 és aplicable al nombre ε . És a dir, existeix un $\delta_1 > 0$ de manera que si Q és un polinomi de grau n amb $\|Q - P(\vec{y}^*; \cdot)\| < \delta_1$, aleshores les propietats (i) i (ii) del teorema són satisfetes.

Considerem tal δ_1 . La continuïtat en \vec{y} del polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ mostra que hi ha $\delta > 0$ de manera que si $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$ aleshores $\|P(\vec{y}; \cdot) - P(\vec{y}^*; \cdot)\| < \delta_1$. Observem que això implica que per als punts $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ tals que $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$, les conclusions (i) i (ii) del teorema 1.23 són aplicables a $Q = P(\vec{y}; \cdot)$ i $P = P(\vec{y}^*; \cdot)$. Tal δ el podem suposar suficientment petit de manera que

$$0 < \delta < \varepsilon < \varepsilon^*.$$

La resta de la demostració va encaminada a provar que aquest δ verifica l'enunciat del lema. Sigui doncs $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ amb $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$ i considerem un node qualsevol (z^*, j^*) de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$. Les conclusions (i) i (ii) del teorema 1.23 prenen la forma següent:

- (i) Si (x, j) és un node de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$, existeix un altre node $(x_0, j) \in Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$.
- (ii) Per a tot node $(x_0, j) \in Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$, existeix un nombre parell $\sigma \geq 0$ de manera que

$$\sum_{\substack{(x,j) \in Z(P(\vec{y}; \cdot)) \\ |x-x_0| < \varepsilon}} \text{mult}_{Z(P(\vec{y}; \cdot))}[(x, j)] = \text{mult}_{Z(P(\vec{y}^*; \cdot))}[(x_0, j)] - \sigma \quad (5.33)$$

Tot es redueix a provar la desigualtat (5.32), és a dir, que existeixen com a mínim $l_{\vec{y}^*; j^*}[(z^*, j^*)]$ nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tenen derivació j^* i abscissa en l'interval $(z^* - \varepsilon, z^* + \varepsilon)$. Procedirem segons els dos casos possibles.

1. $(z^*, j^*) \notin \text{Ext}(\vec{y}^*)$.

Per definició és $l_{\vec{y}^*; j^*}[(z^*, j^*)] = 1$, així que hem de veure que com a mínim hi ha un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que té derivació j^* i abscissa en l'interval $(z^* - \varepsilon, z^* + \varepsilon)$. Com que $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ és una configuració conservativa i $(z^*, j^*) \notin \text{Ext}(\vec{y}^*)$, la multiplicitat en $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ del node (z^*, j^*) és senar. Així, la igualtat (5.33) aplicada al node $(x_0, j) = (z^*, j^*)$ estableix que el primer costat de la igualtat també és senar (recordem que σ és parell). En particular hi ha d'haver un node, diguem (z, j^*) , que pertany a $Z(P(\vec{y}; \cdot))$, té derivació j^* i té abscissa z en l'interval $(z^* - \varepsilon, z^* + \varepsilon)$.

Si veiem que (z, j^*) és un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ ja hauré acabat, ja que aquest node tindrà derivació j^* i abscissa en l'interval $(z^* - \varepsilon, z^* + \varepsilon)$. Serà suficient demostrar que $(z, j^*) \notin \text{Ext}(\vec{y})$ donat que això implica $(z, j^*) \in Z(P(\vec{y}; \cdot)) \setminus \text{Ext}(\vec{y})$ i, per tant, que (z, j^*) és un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$.

Per reducció a l'absurd suposem que $(z, j^*) \in \text{Ext}(\vec{y})$. De la proposició 5.3 es deriva que existeix un $i \in I$ tal que $z = y_i$ i $m_i(j^*) = 1$. Observem que d'això últim resulta $(y_i^*, j^*) \in S_{m_i}^{y_i^*}$ i, en conseqüència, $(y_i^*, j^*) \in \text{Ext}(\vec{y}^*)$.

Els nodes (z^*, j^*) i (y_i^*, j^*) són nodes de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ amb abscissa diferent, puix que el primer d'ells no pertany a $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ mentre que l'altre sí, i en particular $|z^* - y_i^*| \geq 2\varepsilon^*$. Tenint ara en compte que $|z - z^*| < \varepsilon$, $z = y_i$, i $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta < \varepsilon$, arribem a la següent contradicció

$$2\varepsilon^* \leq |z^* - y_i^*| \leq |z^* - z| + |z - y_i^*| = |z^* - z| + |y_i - y_i^*| < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon^* .$$

Per tant en aquest cas ja hem acabat.

2. $(z^*, j^*) \in \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})$.

En aquest cas el node (z^*, j^*) és de la forma $(y_{\iota^*}^*, j^*)$ per a un únic $\iota^* \in I / \equiv_{\overrightarrow{y^*}}$. En el que segueix deixarem de parlar del node (z^*, j^*) i ens referirem sempre al node $(y_{\iota^*}^*, j^*)$. Donat que $(y_{\iota^*}^*, j^*) \in \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})$, es té $m_{\iota^*}^o(j^*) = 1$.

Hem de provar que el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]$ que tenen derivació j^* i abscissa en l'interval $(y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon)$ és, com a mínim, $l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)]$. El valor exacte de $l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)]$ ve donat en (5.25), resultant

$$l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)] = \Delta + M_{\iota^*}(j^* - 1) - M_{\iota^*}^o(j^* - 1), \quad (5.34)$$

on $\Delta = 1$ si $(y_{\iota^*}^*, j^*) \in [Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]^+$, i $\Delta = 0$ en cas contrari, i.e., $(y_{\iota^*}^*, j^*) \in [Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]^-$.

El nombre $l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)]$ encara es pot posar de forma més convenient. Considerem el peu, en $\text{Ext}(\overrightarrow{y^*})$, de $(y_{\iota^*}^*, j^*)$. Aquest peu és de la forma $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$, on $0 \leq j_0^* \leq j^*$, essent $m_{\iota^*}^o(j) = 1$ si $j_0^* \leq j \leq j^*$, i $m_{\iota^*}^o(j_0^* - 1) = 0$. D'això últim resulta $M_{\iota^*}(j_0^* - 1) = M_{\iota^*}^o(j_0^* - 2) = M_{\iota^*}^o(j_0^* - 1)$, i per tant, continuant en (5.34),

$$l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)] = \Delta + \sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{\iota^*}(j) - \sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{\iota^*}^o(j) = \Delta + \sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{\iota^*}(j) - (j^* - j_0^*).$$

En el que segueix, si B és una configuració definim B^ε com la configuració formada pels nodes de B que tenen la seva abscissa en l'interval $(y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon)$. Observem que amb les notacions utilitzades en el lema 5.14 es té $B^\varepsilon = B^{y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon}$ i per tant, de l'apartat (ii) d'aquest lema aplicat al parell $[N|A] = [Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]$, resulta

$$m_{(V_{[Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]^\varepsilon})}^{\varepsilon}(j^*) \geq m_{(V_{[Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]^\varepsilon})}^{\varepsilon}(j_0^*) + \sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{(\text{Ext}(\overrightarrow{y^*}))^\varepsilon}(j) - (j^* - j_0^*) \quad (5.35)$$

Fixem-nos que el nombre del primer costat, $m_{(V_{[Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]^\varepsilon})}^{\varepsilon}(j^*)$, és precisament el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\overrightarrow{y^*}; \cdot)) | \text{Ext}(\overrightarrow{y^*})]$ que tenen derivació j^* i abscissa en l'interval $(y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon)$, el qual volem veure que és major o igual que $l_{\overrightarrow{y^*}; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)]$. Per altra banda, la proposició 5.3 estableix $\text{Ext}(\overrightarrow{y^*}) = \bigcup_{i \in I} S_{m_i}^{y_i}$. D'aquí es desprèn que

$$(\text{Ext}(\overrightarrow{y^*}))^\varepsilon = \bigcup_{i \in \iota^*} S_{m_i}^{y_i} \quad (5.36)$$

En efecte, si $i \in \iota^*$ aleshores $|y_i - y_{\iota^*}| = |y_i - y_i^*| \leq \left\| \vec{y} - \vec{y}^* \right\| < \delta < \varepsilon$, i si $i \notin \iota^*$ tindrem $|y_i - y_{\iota^*}| \geq |y_i^* - y_{\iota^*}| - |y_i - y_i^*| \geq 2\varepsilon^* - \delta > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. En particular, de (5.36) es dedueix que $m_{(\text{Ext}(\vec{y}))^\varepsilon}(j) = m_{\iota^*}(j)$, $j \geq 0$, i substituint això en (5.35) obtenim

$$\begin{aligned} m_{(V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^\varepsilon})(j^*)} &\geq m_{(V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^\varepsilon})(j_0^*)} + \sum_{j=j_0^*}^{j^*-1} m_{\iota^*}(j) - (j^* - j_0^*) \\ &= m_{(V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^\varepsilon})(j_0^*)} - \Delta + l_{\vec{y}^*; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)] \end{aligned} \quad (5.37)$$

D'aquí es desprèn que si $\Delta = 0$ aleshores ja hem acabat, ja que en aquest cas es té $m_{(V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^\varepsilon})(j^*)} \geq l_{\vec{y}^*; j^*}[(y_{\iota^*}^*, j^*)]$.

Suposem finalment $\Delta = 1$, o, amb altres paraules, que el node $(y_{\iota^*}^*, j^*)$ era inicialment a $[Z(P(\vec{y}^*; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y}^*)]^+$. Tenint en compte (5.37), si demostrem que $m_{(V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^\varepsilon})(j_0^*)} \geq 1$ aleshores també haurem acabat. Això significa que hem de trobar, com a mínim, un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que tingui derivació j_0^* i abscissa en l'interval $(y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon)$.

Amb tal finalitat, recordem que el node $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$ era el peu en $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ de $(y_{\iota^*}^*, j^*)$, i que per tant aquest node també pertany a $[Z(P(\vec{y}^*; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y}^*)]^+$. De les propietats bàsiques dels esquelets això implica dues coses. Primera, que $j_0^* \geq 1$ puix que $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$ és un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}^*; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y}^*)]$. I segona, que la multiplicitat en $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ de $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$ és senar. Aquest últim fet es deriva de que $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$ és un peu de $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ que té derivació $j_0^* \geq 1$, que $\text{Ext}(\vec{y}^*)$ és conservativa, i de que $(y_{\iota^*}^*, j_0^*)$ pertany a $[Z(P(\vec{y}^*; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y}^*)]^+$.

Apliquem ara (5.33) al node $(x_0, j) = (y_{\iota^*}^*, j_0^*)$. El segon costat de (5.33) és senar, i per tant també ho és el primer. En particular ha d'existir un node $(x, j_0^*) \in Z(P(\vec{y}; \cdot))$ tal que $|x - y_{\iota^*}^*| < \varepsilon$ i de forma que la seva multiplicitat en $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ és senar.

Si veiem que el node (x, j_0^*) és un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ aleshores ja haurem acabat, ja que per construcció aquest node té derivació j_0^* i abscissa en l'interval $(y_{\iota^*}^* - \varepsilon, y_{\iota^*}^* + \varepsilon)$. Si $(x, j_0^*) \notin \text{Ext}(\vec{y})$ no hi ha res a demostrar (directament és un node veritable), així que podem suposar $(x, j_0^*) \in \text{Ext}(\vec{y})$. En aquest cas (x, j_0^*) és un peu de $\text{Ext}(\vec{y})$ donat que $m_{\iota^*}^o(j_0^* - 1) = 0$, que implica $m_{\iota^*}(j_0^* - 1) = 0$ i per tant $m_{(\text{Ext}(\vec{y}))^\varepsilon}(j_0^* - 1) = 0$.

Així que (x, j_0^*) és un peu de $\text{Ext}(\vec{y})$ de derivació $j_0^* \geq 1$. Com que $\text{Ext}(\vec{y})$ és conservativa, la multiplicitat d'aquest peu en $\text{Ext}(\vec{y})$ és parell. Però per

construcció la multiplicitat d'aquest peu, en $Z(P(\vec{y}; \cdot))$, és senar. D'aquí que $(x, j_0^*) \in [Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]^+$, essent, en particular, un node veritable del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$. Això completa la demostració. \square

Teorema 5.16. *Les funcions d'arrels veritables i latents $x_s(\cdot; j) : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, $1 \leq j \leq n-1$, són funcions contínues.*

Demostració. Fixem $j = 1, 2, \dots, n-1$. La continuïtat de les funcions d'arrels veritables i latents $x_s(\cdot; j)$, $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$, és equivalent a la continuïtat, en $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, del vector $R(\vec{y}; j)$ de (5.29), ja que les components d'aquest vector són precisament les $x_s(\cdot; j)$, $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$.

Hem de veure, per tant, que l'aplicació $R(\cdot; j) : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ver}(j)}$ tal que a cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ li fa correspondre $R(\vec{y}; j) \in \mathbb{R}^{\text{ver}(j)}$, és contínua. Per demostrar això podem fer ús del lema 5.6, que estableix que és suficient veure

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{y}^* \\ \vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)}} R(\vec{y}; j) = R(\vec{y}^*; j),$$

on \vec{y}^* és un punt qualsevol de \mathbb{R}^h . Observem que al prendre $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^h$ qualsevol, obtindrem directament que la restricció de $R(\cdot; j)$ a $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ és contínua.

Fixem doncs $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^h$. Tot es redueix a provar que si $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que

$$\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h), \|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta \Rightarrow \|R(\vec{y}; j) - R(\vec{y}^*; j)\| < \varepsilon \quad (5.38)$$

Suposem donat tal ε . Considerem les abscisses $z_1^* < z_2^* < \dots < z_r^*$ dels nodes de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ que tenen derivació j . El vector $R(\vec{y}^*; j)$ val

$$R(\vec{y}^*; j) = \underbrace{(z_1^*, z_1^*, \dots, z_1^*)}_{l_1^*} \underbrace{(z_2^*, z_2^*, \dots, z_2^*)}_{l_2^*} \dots \underbrace{(z_r^*, z_r^*, \dots, z_r^*)}_{l_r^*} \quad (5.39)$$

on $l_i^* = l_{\vec{y}^*; j}[(z_i^*, j)]$ si $i = 1, 2, \dots, r$. Observem també que l'èpsilon de $Z(P(\vec{y}^*; \cdot))$ és el nombre

$$\varepsilon_{Z(P(\vec{y}^*; \cdot))} = \min_{1 \leq i \leq r-1} \left\{ \frac{z_{i+1}^* - z_i^*}{2} \right\}$$

i que, sense pèrdua de generalitat, podem suposar $0 < \varepsilon < \varepsilon_{Z(P(\vec{y}^*; \cdot))}$.

Si apliquem el lema 5.15 obtenim un $\delta > 0$ de manera que si $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ i $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$, el nombre de nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ que

tenen derivació j i abscissa en l'interval $(z_i^* - \varepsilon, z_i^* + \varepsilon)$ és, com a mínim, l_i^* . Això és vàlid per a tot $i = 1, 2, \dots, r$.

En el que segueix demostrem que per a aquest δ es satisfà (5.38). Considerem doncs un punt $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ amb $\|\vec{y} - \vec{y}^*\| < \delta$. Per a cada $i = 1, 2, \dots, r$ existeixen l_i^* nodes diferents (z_{it}, j) , $t = 1, 2, \dots, l_i^*$, tots ells nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ i amb abscissa z_{it} en l'interval $(z_i^* - \varepsilon, z_i^* + \varepsilon)$. Podem suposar aquests nodes ordenats de manera que $z_{i1} < z_{i2} < \dots < z_{i, l_i^*}$. Amb aquest ordre, juntament amb el fet que $\varepsilon < \varepsilon_{Z(P(\vec{y}^*; \cdot))}$, resulta

$$z_{1,1} < z_{1,2} < \dots < z_{1, l_1^*} < z_{2,1} < z_{2,2} < \dots < z_{2, l_2^*} < z_{3,1} < \dots < z_{r, l_r^*} .$$

Per altra banda, com que $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ es verifica $m_{V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}}(j) = \text{ver}(j)$. Però els (z_{it}, j) , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq t \leq l_i^*$, són $\sum_{i=1}^r l_i^* = \text{ver}(j)$ nodes diferents de $V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}$ amb derivació j , resultant que els nodes (z_{it}, j) , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq t \leq l_i^*$, són tots els nodes de $V_{[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]}$ de derivació j . Si tornem a tenir en compte que $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, de tot això resulta

$$R(\vec{y}; j) = (z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1, l_1^*}, z_{2,1}, z_{2,2}, \dots, z_{2, l_2^*}, z_{3,1}, \dots, z_{r, l_r^*}) \quad (5.40)$$

Finalment, de (5.39) i (5.40),

$$\left\| R(\vec{y}; j) - R(\vec{y}^*; j) \right\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq t \leq l_i^*}} \{ |z_{it} - z_i^*| \} < \varepsilon .$$

Hem obtingut (5.38) i això completa la demostració. \square

Capítol 6

Representació per a \mathcal{B} -configuracions

En aquest capítol enunciam i provarem el *teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions*. Aquest teorema estableix que tota \mathcal{B} -configuració és equivalent a un espectre, i que aquest espectre es pot escollir satisfent certes condicions addicionals.

6.1 Conceptes previs

Sigui N una \mathcal{B} -configuració de longitud n . El conjunt format per tots els peus de N , denotat \mathcal{P}_N , es divideix en els tres subconjunts següents:

$$\mathcal{P}_N = Y \cup T \cup U \tag{6.1}$$

on:

- Y està format pels peus de N que són atípics o exteriors. Els peus atípics coincideixen amb els nodes de N que tenen derivació zero, i tots els peus exteriors tenen multiplicitat parell (veure definició 4.8).
 - T està format pels peus de N que són interiors i que tenen multiplicitat en N parell.
 - U està format pels peus de N que són interiors i que tenen multiplicitat en N senar.
- Qualsevol de les dues definicions següents també és vàlida: (a) U consisteix

en els peus de N que tenen derivació no nul·la i multiplicitat senar, o (b) U consisteix en els nodes de la forma $\sigma_N(\mathfrak{g})$ on \mathfrak{g} és un grup interior de N . Recordem que per a un grup interior \mathfrak{g} , $\sigma_N(\mathfrak{g})$ és l'únic node de \mathfrak{g} amb derivació igual a la derivació de \mathfrak{g} , i tal que la seva multiplicitat en N és senar.

El nombre de nodes de U coincideix amb e_N , el nombre de grups interiors de N , que per la fórmula de la longitud val $e_N = \sharp N + \tau_N - \ell_N = \sharp N + 0 - n = \sharp N - n$.

Com a exemple, a la següent figura hi ha representada una \mathcal{B} -configuració N tot indicant els peus que pertanyen a Y i a T . La resta de peus de N , i.e., els que no estan encerclats, són els nodes de U .

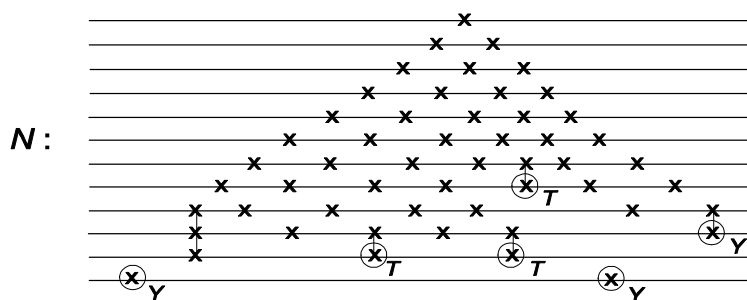


Figura 6.1. Nodes de Y i de T .

A partir d'ara ens centrarem en els nodes de Y o de T donat que els graus de llibertat que proporcionarà el teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions, és a dir, les condicions addicionals que podrem demanar a l'espectre Z tal que $N \sim Z$, s'introdueixen a partir d'aquests nodes. Avançant continguts, aquest teorema estableix que si Ψ és la identificació natural entre N i Z , que sabem que conserva 1-abscisses, aleshores els nodes de la forma $\Psi[\alpha]$, $\alpha \in Y$, els podrem prefixar per endavant, mentre que els nodes de la forma $\Psi[\alpha]$, $\alpha \in T$, tindran la seva abscissa lligada per una proporció (prefixada) amb l'abscissa d'altres nodes.

Observem que, com que Ψ conserva derivacions, prefixar els nodes de la forma $\Psi[\alpha]$, $\alpha \in Y$, és el mateix que prefixar les abscisses d'aquests nodes, abscisses que poden ser denotades per $y^0[\alpha]$, $\alpha \in Y$. Aquestes abscisses no poden ser nombres reals qualssevol, sinó que han de satisfer certes restriccions. Fixem-nos, per exemple, en la configuració N de la figura 6.2, on els nodes α_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, són els nodes de Y . Les línies transversals de sobre indiquen que s'ha d'acabar de completar la configuració N de la manera més senzilla possible (posant un node de derivació $j + 1$ entre cada dos nodes consecutius de derivació j).

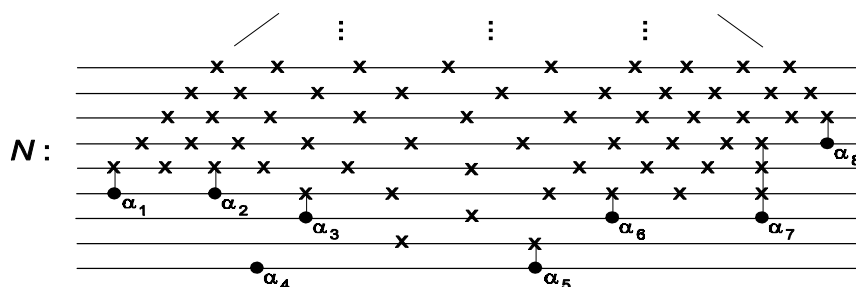


Figura 6.2. Nodes de \$Y\$.

Si volem que les abscisses dels nodes \$\Psi[\alpha]\$, \$\alpha \in Y\$, siguin els nombres prefixats \$y^0[\alpha]\$, \$\alpha \in Y\$, s'hauran de satisfer les restriccions que provenen del fet que la identificació natural \$\Psi\$ conserva 1-abscisses. Entre elles hi trobem les següents:

$$y^0[\alpha_1] < y^0[\alpha_2] < y^0[\alpha_3], y^0[\alpha_4] < y^0[\alpha_5] < y^0[\alpha_6] < y^0[\alpha_7] < y^0[\alpha_8] \quad (6.2)$$

La desigualtat \$y^0[\alpha_3] < y^0[\alpha_4]\$ no apareix en (6.2) ja que aquesta no pot deduir-se del fet que \$\Psi\$ conserva 1-abscisses.

Per tal de donar la definició general de les restriccions que imposarem als nombres \$y^0[\alpha]\$, \$\alpha \in Y\$, ordenarem primer els nodes de \$Y\$ com en l'exemple anterior. Observem que els tres primers, i.e., \$\alpha_1, \alpha_2\$ i \$\alpha_3\$, corresponen als nodes de \$Y\$ que són exteriors-esquerra, els dos següents són els de derivació zero (atípics) i els tres últims els exteriors-dret. Els exteriors-esquerra han estat ordenats per ordre decreixent de derivació i després, pels que tenen igual derivació, per ordre creixent d'abscisses. Els de derivació zero per ordre creixent d'abscisses i els exteriors-dret per ordre creixent de derivació i després, pels d'igual derivació, per ordre creixent d'abscisses. Més exactament:

Definició 6.1. Sigui \$N\$ una \$\mathcal{B}\$-configuració i considerem el conjunt \$Y\$ format pels peus de \$N\$ que són atípics o exteriors. Definim un ordre (\$<\$) en \$Y\$ de la forma següent:

Tot node de \$Y\$ exterior-esquerra és menor que tot node de \$Y\$ de derivació zero (atípic), i tot node de derivació zero és menor que tot node de \$Y\$ exterior-dret. Per a nodes \$(x, j), (x', j') \in Y\$ d'un mateix tipus (tots dos exteriors-esquerra, atípics o exteriors-dret), posem:

- Quan tots dos són exteriors-esquerra, \$(x, j) < (x', j')\$ si \$j > j'\$, o \$j = j'\$ i \$x < x'\$.
- Si tots dos són atípics, \$(x, 0) < (x', 0)\$ si \$x < x'\$.

(c) Si tots dos són exteriors-dret, $(x, j) < (x', j')$ si $j < j'$, o $j = j'$ i $x < x'$.

Signuin ara nombres reals $y^0[\alpha]$, $\alpha \in Y$. Direm que aquests nombres són una *tria inicial d'abscisses per a Y* si respecten l'ordre predefinit en Y . És a dir, si es compleix:

$$(x, j) < (x', j') \Rightarrow y^0[(x, j)] < y^0[(x', j')] \tag{6.3}$$

Així doncs, en l'exemple de la figura 6.2 s'han de satisfer totes les desigualtats $y^0[\alpha_1] < y^0[\alpha_2] < y^0[\alpha_3] < y^0[\alpha_4] < \dots < y^0[\alpha_8]$, que són les desigualtats de (6.2) juntament amb la nova restricció $y^0[\alpha_3] < y^0[\alpha_4]$. Recordem que aquesta última no era deduïble del fet que la identificació natural entre N i Z conservés 1-abscisses, així que pot ésser considerada com a restricció addicional.

Hem de pensar, per tant, que la hipòtesi de que els nombres $y^0[\alpha]$, $\alpha \in Y$, siguin una tria inicial d'abscisses per a Y és una mica restrictiva, ja que en general introdueix desigualtats noves.

Centrem-nos ara en els nodes de T .

Definició 6.2. Sigui $\alpha \in T$. Els nodes $\sigma_N^-[\alpha]$, $\sigma_N[\alpha]$ i $\sigma_N^+[\alpha]$ estan definits, respectivament, per $\sigma_N^-(\mathfrak{g}), \sigma_N(\mathfrak{g})$ i $\sigma_N^+(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és el grup (interior) de N tal que $\alpha \in \mathfrak{g}$. Veure figura 6.3 (a).

Si j és la derivació de α , els nodes $\sigma_N^-[\alpha]$ i $\sigma_N^+[\alpha]$ tenen derivació $j - 1$, mentre que $\sigma_N[\alpha]$ continua tenint derivació j . Les abscisses de α i de $\sigma_N[\alpha]$ queden situades entre les abscisses de $\sigma_N^-[\alpha]$ i $\sigma_N^+[\alpha]$. Si N' és una altra configuració equivalent a N (en particular N' també és \mathcal{B} -configuració) i Ψ és la identificació natural entre N i N' , aleshores $\Psi[\sigma_N^-[\alpha]]$, $\Psi[\sigma_N[\alpha]]$ i $\Psi[\sigma_N^+[\alpha]]$ coincideixen, respectivament, amb els nodes $\sigma_{N'}^-[\Psi[\alpha]]$, $\sigma_{N'}[\Psi[\alpha]]$ i $\sigma_{N'}^+[\Psi[\alpha]]$. Aquest fet prové de que per als grups interiors \mathfrak{g} es verifica $\Psi[\sigma_N^-(\mathfrak{g})] = \sigma_{N'}^-(\Psi[\mathfrak{g}])$, $\Psi[\sigma_N(\mathfrak{g})] = \sigma_{N'}(\Psi[\mathfrak{g}])$ i $\Psi[\sigma_N^+(\mathfrak{g})] = \sigma_{N'}^+(\Psi[\mathfrak{g}])$.

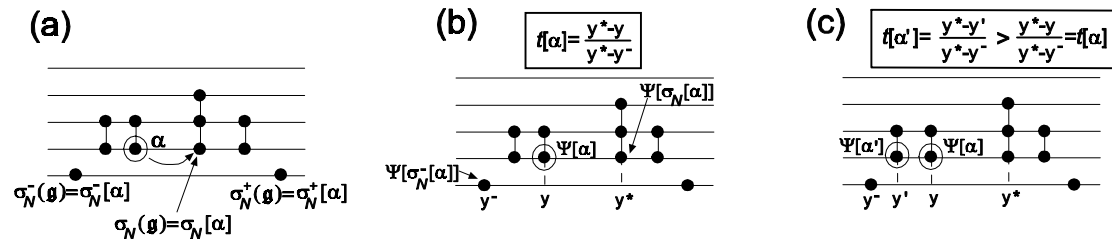


Figura 6.3

Suposem ara que $\alpha \in T$ és un node amb abscissa menor que l'abscissa de $\sigma_N[\alpha]$, i considerem en aquest cas els nodes $\sigma_N^-[\alpha]$, α i $\sigma_N[\alpha]$. Si Z és un espectre amb $Z \sim N$, les imatges d'aquests tres nodes per la identificació natural $\Psi = \Psi_{N,Z}$ són $\Psi[\sigma_N^-[\alpha]]$, $\Psi[\alpha]$ i $\Psi[\sigma_N[\alpha]]$, que tindran certes abscisses respectives y^- , y i y^* (veure figura 6.3 (b)). Per construcció i perquè Ψ conserva 1-abscisses, aquestes abscisses estan directament ordenades, és a dir $y^- < y < y^*$. La proporció entre elles és el nombre

$$t[\alpha] = \frac{y^* - y}{y^* - y^-} \tag{6.4}$$

Es compleix que $0 < t[\alpha] < 1$, i si $\alpha' \in T$ és un altre node que pertany al mateix grup (interior) que α , i amb abscissa menor que l'abscissa de α , aleshores $t[\alpha'] > t[\alpha]$. Veure figura 6.3 (c).

Anàlogament, quan l'abscissa de α és més gran que l'abscissa de $\sigma_N[\alpha]$, aleshores es consideren els nodes $\sigma_N[\alpha]$, α i $\sigma_N^+[\alpha]$, així com les seves imatges $\Psi[\sigma_N[\alpha]]$, $\Psi[\alpha]$ i $\Psi[\sigma_N^+[\alpha]]$ (veure ara la figura 6.4). Les abscisses respectives d'aquestes imatges y^* , y i y^+ satisfan $y^* < y < y^+$, essent la proporció entre elles el nombre

$$t[\alpha] = \frac{y - y^*}{y^+ - y^*} \tag{6.5}$$

Tornem a tenir $0 < t[\alpha] < 1$, i si $\alpha' \in T$ és un altre node que pertany al mateix grup que α , i amb abscissa major que l'abscissa de α , aleshores $t[\alpha'] > t[\alpha]$.

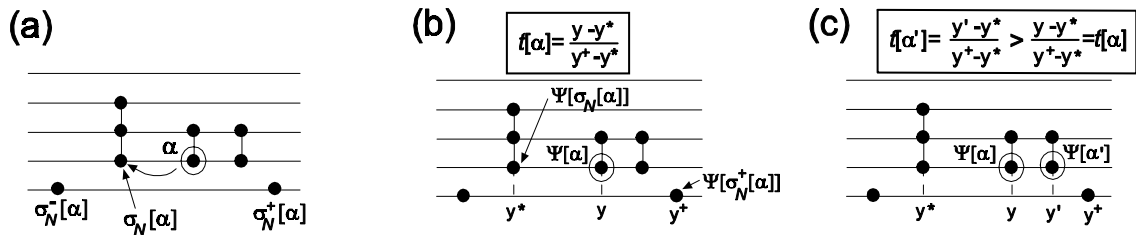


Figura 6.4

El teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions assegurarà que aquestes proporcions $t[\alpha], \alpha \in T$, les podem prefixar per endavant. Hem vist però que s'han de verificar certes restriccions que sintetitzem a continuació.

Definició 6.3. Siguin nombres reals $t[\alpha], \alpha \in T$. Aquests nombres són una *proporció inicial per a T* si es verifiquen les dues condicions següents:

- (i) $0 < t[\alpha] < 1$ per a tot $\alpha \in T$.
- (ii) Si $(x_1, j), (x_2, j)$ són dos nodes de T que pertanyen a un mateix grup (interior) \mathfrak{g} de N , i $\sigma_N(\mathfrak{g}) = (x^*, j)$, aleshores es verifica $t[(x_1, j)] > t[(x_2, j)]$ si $x_1 < x_2 < x^*$, i $t[(x_1, j)] < t[(x_2, j)]$ si $x^* < x_1 < x_2$.

La condició (ii) només és aplicable a nodes d'un mateix grup \mathfrak{g} i tals que la seva abscissa està a un mateix costat respecte de l'abscissa de $\sigma_N(\mathfrak{g})$. Finalment, observem que ambdues condicions (i) i (ii) són necessàries si volem que els nombres $t[\alpha], \alpha \in T$, acabin representant les proporcions (6.4) i (6.5).

6.2 Teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions

Tenint en compte les consideracions precedents, a continuació enunciem i provem el resultat principal d'aquest capítol.

Teorema 6.4 [de representació per a \mathcal{B} -configuracions]

Sigui N una \mathcal{B} -configuració. Considerem els conjunts Y i T formats, respectivament, pels peus de N de derivació zero (atípics) o peus exteriors, i pels peus de N interiors amb multiplicitat parell. Sigui $y^0[\alpha], \alpha \in Y$, una tria inicial d'abscisses per a Y , i $t[\alpha], \alpha \in T$, una proporció inicial per a T .

Aleshores, existeix un espectre Z equivalent a N de manera que si Ψ és la identificació natural entre N i Z , es verifiquen:

- (a) Per a tot $\alpha \in Y$, $\Psi[\alpha] = (y^0[\alpha], j)$ on j denota la derivació de α .
- (b) Si $\alpha = (x, j)$ és un node de T i $\sigma_N[\alpha] = (x^*, j)$, aleshores

$$\Psi[\alpha] = \begin{cases} ((1 - t[\alpha])y^* + t[\alpha]y^-, j), & \text{si } x < x^* \\ ((1 - t[\alpha])y^* + t[\alpha]y^+, j), & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (6.6)$$

on y^-, y^ i y^+ són les abscisses de $\Psi[\sigma_N^-(\alpha)], \Psi[\sigma_N(\alpha)]$ i $\Psi[\sigma_N^+(\alpha)]$ respectivament.*

Abans de començar la demostració incloem alguns comentaris i un exemple.

Comentari 6.5. L'espectre Z que proporciona el teorema també és \mathcal{B} -configuració, puix que Z és equivalent a N . A l'apartat (b) els nodes $\Psi[\sigma_N^-(\alpha)], \Psi[\sigma_N(\alpha)]$ i

$\Psi[\sigma_N^+[\alpha]]$ coincideixen, respectivament, amb els nodes $\sigma_Z^-[\Psi[\alpha]]$, $\sigma_Z[\Psi[\alpha]]$ i $\sigma_Z^+[\Psi[\alpha]]$, i per tant en aquest apartat poden substituir-se els uns pels altres.

Finalment, la igualtat (6.6) estableix que l'abscissa de $\Psi[\alpha]$ és una combinació lineal convexa de les abscisses y^* i y^- si $x < x^*$, i de les abscisses y^* i y^+ si $x > x^*$. Aquesta igualtat pot posar-se en la forma

$$t[\alpha] = \begin{cases} \frac{y^*-y}{y^*-y^-}, & \text{si } x < x^* \\ \frac{y-y^*}{y^+-y^*}, & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (6.7)$$

on y denota l'abscissa de $\Psi[\alpha]$, recuperant així (6.4) i (6.5). Els denominadors de (6.7) no s'anul·len mai, ja que Ψ conserva 1-abscisses i conseqüentment $y^- < y^* < y^+$.

Exemple 6.6. Com a exemple d'aplicació, a la figura 6.5 hi ha representada una \mathcal{B} -configuració N , on els nodes marcats amb punts són els nodes de $Y \cup T$. Els α_i , $i = 1, 2, 3$, són els nodes de Y , mentre que els β_i , $i = 1, 2, 3$, són els nodes de T .

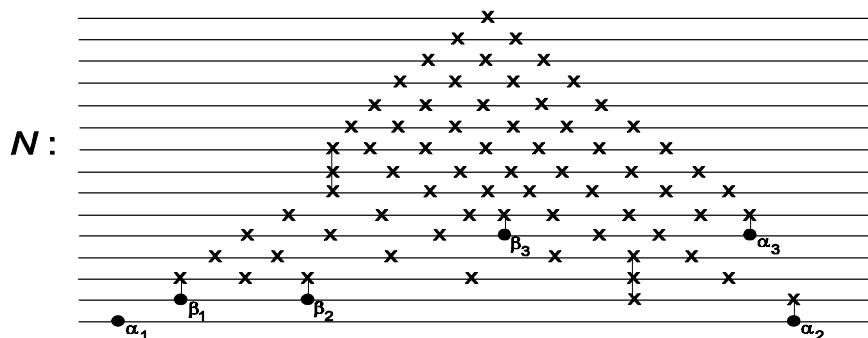


Figura 6.5

Com a dades inicials s'ha de donar una tria inicial d'abscisses per a Y , $y^0[\alpha_i]$, $i = 1, 2, 3$, amb les restriccions $y^0[\alpha_1] < y^0[\alpha_2] < y^0[\alpha_3]$, i una proporció inicial per a T , $t[\beta_i]$, $i = 1, 2, 3$, que són tres nombres reals compresos entre 0 i 1, i amb $t[\beta_1] > t[\beta_2]$. Del teorema 6.4 es desprèn l'existència d'un espectre Z , $Z \sim N$, de manera que la identificació natural Ψ satisfà les propietats (a) i (b) corresponents. La propietat (a) estableix que $\Psi[\alpha_1] = (y^0[\alpha_1], 0)$, $\Psi[\alpha_2] = (y^0[\alpha_2], 0)$ i $\Psi[\alpha_3] = (y^0[\alpha_3], 4)$, mentre que la propietat (b) permet obtenir proporcions entre les abscisses d'alguns nodes.

A la figura 6.6 hi ha representat aquest espectre Z . Els nombres r, r' i r_i , $i = 1, 2, 3$, que apareixen en aquesta figura són distàncies entre abscisses (abscisses unides per

una fletxa) que, després d'aplicar (6.6) als nodes $\alpha = \beta_i$, $i = 1, 2, 3$ (per a $\alpha = \beta_1$ i $\alpha = \beta_2$ s'ha de considerar el cas " $x < x^*$ " de (6.6), mentre que per a $\alpha = \beta_3$ el cas " $x > x^*$ "), resulta

$$\frac{r_1}{r} = t[\beta_1], \frac{r_2}{r} = t[\beta_2], \frac{r_3}{r'} = t[\beta_3].$$

És a dir, els quocients r_1/r , r_2/r i r_3/r' són les proporcions prefixades $t[\beta_i]$.

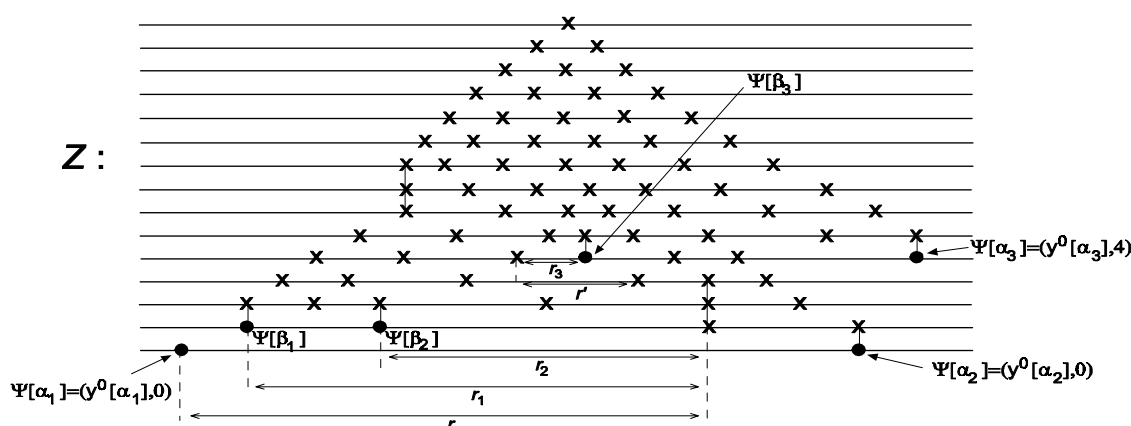


Figura 6.6. Espectre Z obtingut del teorema 6.4.

Observem que hem dibuixat el node $\Psi[\alpha_3]$ amb l'abscissa més gran que la del node $\Psi[\alpha_2]$ donat que $y^0[\alpha_3] > y^0[\alpha_2]$. Això no passava a N , on l'abscissa de α_3 era menor que l'abscissa de α_2 .

Sintetitzant, hem obtingut un espectre Z equivalent a N , amb nodes de derivació zero i nodes exteriors prefixats per endavant, i amb proporcions entre abscisses de certs nodes també prefixades. Rescribint això en termes de polinomis obtenim l'existència d'un polinomi mònic P , de grau igual a $\ell_Z = 15$, i de manera que la distribució de les arrels de P i de les seves derivades successives es correspon amb la de la figura 6.6. Observem que, a part del fet d'ésser N i $Z(P)$ configuracions equivalents, les arrels del polinomi P són conegudes (corresponen als nodes de derivació zero), a l'igual que certes arrels de derivades de P corresponents als nodes exteriors. Les proporcions r_1/r , r_2/r i r_3/r' lliguen algunes de les arrels de P i de les seves derivades.

Demostració del teorema. La demostració ocupa la resta de la secció i està estructurada en tres parts.

La part I és de caire introductori, essencialment dedicada a posar noms als objectes que s'utilitzaran en la resta de la demostració.

A la part II es localitza un espectre Z com a candidat a satisfer totes les condicions del teorema. En aquesta part també es defineix una aplicació $\Psi : N \rightarrow Z$ i se'n veuen algunes de les seves propietats.

La part III conté la demostració de que Ψ és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abscisses. Per la proposició 3.5 això implica que $N \sim Z$ i que Ψ és la identificació natural entre N i Z .

PART I

Sigui N la configuració de l'enunciat del teorema, de certa longitud n , i on hi tenim definida una tria inicial d'abscisses per a Y i una proporció inicial per a T .

L'esquelet associat a N es denota per A . Recordem que A està format per tots els nodes de N excepte els caps dels nodes de la forma $\sigma_N(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és grup interior de N . La proposició 4.11 estableix que A és una configuració de n nodes, Pólya, conservativa, i que tot peu de A és peu de N . Podem concretar més si tenim en compte la descomposició (6.1) per als peus de N , de la qual s'obté la següent descomposició per a \mathcal{P}_A , el conjunt format pels peus de A ,

$$\mathcal{P}_A = Y \cup T \cup \tilde{U} \tag{6.8}$$

on \tilde{U} és el conjunt format pels nodes de U (és a dir, nodes de la forma $\sigma_N(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és grup interior de N) tals que la seva multiplicitat en N és major o igual que 2. Això prové de que els nodes de U que tenen multiplicitat en N igual a 1 coincideixen amb el seu cap, i conseqüentment no pertanyen a A .

La multiplicitat en A dels nodes de Y o de T coincideix amb la seva multiplicitat en N . En canvi, per als nodes de \tilde{U} la seva multiplicitat en A disminueix en una unitat respecte de la de N .

Respecte als conjunts $[N|A]^+$ i $[N|A]^-$, definició 4.3, els nodes de Y o de T són nodes de $[N|A]^+$, mentre que els nodes de \tilde{U} pertanyen a $[N|A]^+$.

En el que segueix posarem $\mathcal{P}_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h\}$, on els $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, h$, són els peus de A diferents dos a dos. Alguns dels α_i són nodes de Y , altres de T i la resta de \tilde{U} , però de totes maneres no els ordenarem de cap forma especial.

Per a cada peu $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, h$, sigui A_i el conjunt format pels nodes de A tals que el seu peu en A és igual a α_i . Explícitament, si $\alpha_i = (x_i, k_i)$ i p_i denota la

multiplicitat en A de α_i , aleshores

$$A_i = \{(x_i, k_i), (x_i, k_i + 1), (x_i, k_i + 2), \dots, (x_i, k_i + p_i - 1)\} \quad (6.9)$$

Aquests subconjunts A_i , $i = 1, 2, \dots, h$, formen una partició de A i són coneguts amb el nom de *seqüències* de A , [3].

Podem considerar, per a cada $i = 1, 2, \dots, h$, la funció $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definida com la funció m_{A_i} . És a dir, si $j \geq 0$, $m_i(j)$ és igual a $m_{A_i}(j)$, el nombre de nodes de A_i que tenen derivació j . Amb la terminologia utilitzada a (6.9) es té que si $j \geq 0$ aleshores

$$m_i(j) = m_{A_i}(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } k_i \leq j \leq k_i + p_i - 1 \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases} \quad (6.10)$$

Les funcions m_i , $i = 1, 2, \dots, h$, són finites, a valors 0 o 1, i cap d'elles és idènticament nul·la. Podem fer ús, per tant, de l'aplicació extensió associada a les funcions m_i , $i = 1, 2, \dots, h$ (veure capítol 5). En el que segueix mantindrem la mateixa terminologia, és a dir, $I = \{1, 2, \dots, h\}$, $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_h)$, $D(\mathbb{R}^h)$ i $D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$, etc. El nombre n de (5.4) concorda amb la longitud n de N , ja que

$$\sum_{i \in I} \#\text{supp}(m_i) = \sum_{i \in I} \#\text{supp}(m_{A_i}) = \sum_{i \in I} \#A_i = \#A = \ell_N = n \quad (6.11)$$

Recordem que cada vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ proporcionava una relació d'equivalència en I denotada $\equiv_{\vec{y}}$. Si $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$, el valor comú de les components y_i , $i \in \iota$, era denotat y_ι , i la suma de les funcions m_i , $i \in \iota$, denotada m_ι . Finalment es definien les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, totes elles formades per n nodes.

El lema següent conté informació addicional sobre les funcions m_i , deguda a que aquestes s'han obtingut a partir de A .

Lema 6.7.

- (i) Es té la igualtat de funcions $\sum_{i \in I} m_i = m_A$. A més a més, $\sum_{i \in I} \#\text{supp}(m_i) = \#A = \ell_N = n$.
- (ii) Les funcions m_i , $i \in I$, són conservatives i la suma $\sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n .

Demostració. Per a l'apartat (i) només cal veure que $\sum_{i \in I} m_i = m_A$. En efecte, si $j \geq 0$, $m_A(j)$ és el nombre de nodes de A que tenen derivació j , però tenint

en compte la descomposició de A en els subconjunts A_i , $i = 1, 2, \dots, h$, resulta $m_A(j) = \sum_{i \in I} m_{A_i}(j) = \sum_{i \in I} m_i(j)$.

(ii) De (6.10) es desprèn que m_i és la seqüència de tipus (k_i, p_i) , i per tant, com que A és conservativa, m_i és una funció conservativa (la multiplicitat p_i en A del peu $\alpha_i = (x_i, k_i)$ és parell si $k_i \geq 1$). Finalment, de l'apartat (i) que acabem de veure i del fet que A és una configuració Pólya, es dedueix que la funció $m_A = \sum_{i \in I} m_i$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb $n = \sharp A$. \square

D'aquest lema i de l'apartat (c) de la proposició 5.5 es desprèn que estem dins del cas Pólya i conservatiu, i.e., les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, són configuracions de n nodes Pólya i conservatives. Podem fer ús, per tant, dels resultats de les seccions 5.2 i 5.3. Recordem que per a $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, el polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ estava definit com l'únic polinomi de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre $\text{Ext}(\vec{y})$. El teorema 5.7 estableix que aquest polinomi varia contínuament amb $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$. Per altra banda, el teorema 4.13 assegura que $\text{Ext}(\vec{y})$ és un esquelet de $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ i que $Z(P(\vec{y}; \cdot))$ és \mathcal{B} -configuració.

Considerem les funcions d'arrels veritables i latents $x_s(\cdot; j) : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n - 1$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$. Aquí $\text{ver}(j)$ val

$$\text{ver}(j) = \sum_{i \in I} M_i(j - 1) - j = M_A(j - 1) - j, \quad (6.12)$$

on per a l'última igualtat hem fet servir el lema 6.7 (i). Quan $\vec{y} \in D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$ es verifica que $x_1(\vec{y}; j) < x_2(\vec{y}; j) < \dots < x_{\text{ver}(j)}(\vec{y}; j)$, essent aquests nombres les abscisses dels nodes veritables de derivació j del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$.

Podem tornar enrera i centrar-nos en el parell $[N|A]$. Pel teorema 4.5 (ii), el nombre de nodes veritables de $[N|A]$ que tenen derivació j és $m_{V_{[N|A]}}(j) = M_A(j - 1) - M_A^0(j - 1) = M_A(j - 1) - j$, on per a l'última igualtat s'ha utilitzat que A és Pólya. Fixem-nos que aquest nombre coincideix amb $\text{ver}(j)$. Té sentit doncs, considerar els nodes

$$(x_{j1}, j), (x_{j2}, j), \dots, (x_{j, \text{ver}(j)}, j)$$

com els nodes veritables de derivació j del parell $[N|A]$, ordenats per ordre creixent d'abscisses. Observem que els nombres x_{js} , $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, són les abscisses dels nodes veritables de derivació j del parell $[N|A]$ ordenades en forma creixent, mentre que els nombres $x_s(\vec{y}; j)$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, són les funcions d'arrels veritables i latents en el punt $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$.

PART II

Per construir l'espectre Z del teorema necessitem prèviament definir una funció contínua $F : [a, b]^h \rightarrow [a, b]^h$, on $[a, b]^h$ és l'interval h -dimensional $[a, b]^h \subseteq \mathbb{R}^h$, i a i b són, respectivament, el valor més petit i el valor més gran de la tria inicial d'abscisses per a Y . És a dir,

$$a = \min_{\alpha \in Y} \{y^0[\alpha]\}, \quad b = \max_{\alpha \in Y} \{y^0[\alpha]\}.$$

Es té $a \leq b$, produint-se igualtat si i només si Y està format per un únic element.

La funció F es construeix a partir de les seves components, $F = (F_1, F_2, \dots, F_h)$. Cada component F_i és una funció definida a $[a, b]^h$ i que pren valors a $[a, b]$. Aquesta va associada al peu α_i de A i es defineix segons els tres casos possibles derivats de (6.8):

Cas 1: $\alpha_i \in Y$. En aquest cas $F_i : [a, b]^h \rightarrow [a, b]$ és la funció constant $F_i(\vec{y}) = y^0[\alpha_i]$ si $\vec{y} \in [a, b]^h$. Observem que F_i està ben definida (pren valors a l'interval $[a, b]$) i és contínua.

Cas 2: $\alpha_i \in \tilde{U}$. En aquest cas α_i és un node veritable del parell $[N|A]$, ja que $\alpha_i \in [N|A]^+$. Això implica que el node α_i té associat un únic $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$ de forma que $\alpha_i = (x_{js}, j)$, on j denota la derivació de α_i . En aquest cas es defineix la funció F_i per $F_i(\vec{y}) = x_s(\vec{y}; j)$ si $\vec{y} \in [a, b]^h$. És a dir, F_i és la restricció a l'interval $[a, b]^h$ de la funció d'arrels veritables i latents $x_s(\cdot; j)$. Observem que està ben definida (pren valors a $[a, b]$) donat que en virtut de la proposició 5.13 (ii), per als punts $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_h) \in [a, b]^h$ es té $a \leq \min_{i \in I} \{y_i\} \leq x_s(\vec{y}; j) \leq \max_{i \in I} \{y_i\} \leq b$. A més a més, pel teorema 5.16 sabem que F_i és contínua.

Cas 3: $\alpha_i \in T$. El node $\sigma_N[\alpha_i]$ és un node veritable del parell $[N|A]$, així que $\sigma_N[\alpha_i]$ té associat un únic $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$ de forma que $\sigma_N[\alpha_i] = (x_{js}, j)$, on j denota la derivació comuna de α_i i de $\sigma_N[\alpha_i]$. Hi ha dues possibilitats, que l'abscissa de α_i sigui menor que l'abscissa x_{js} de $\sigma_N[\alpha_i]$, que correspon al cas 3.1, o que en cas contrari sigui més gran, cas 3.2. Cadascun d'aquests casos encara es bifurcarà en dos subcasos més, d'acord amb el que segueix.

- **Cas 3.1:** *L'abscissa de α_i és menor que la de $\sigma_N[\alpha_i]$.* Aquí es considera el node $\sigma_N^{\bar{}}[\alpha_i]$, que és un node de derivació $j - 1$ i amb abscissa més petita que l'abscissa de α_i . Per a $\sigma_N^{\bar{}}[\alpha_i]$ hi ha dues possibilitats: que sigui un node de A , cas 3.1.1, o que en cas contrari no pertanyi a A , cas 3.1.2.
 - **Cas 3.1.1:** $\sigma_N^{\bar{}}[\alpha_i] \in A$. En aquest cas podem considerar el peu en A de $\sigma_N^{\bar{}}[\alpha_i]$, que coincidirà amb cert $\alpha_{i'}$, $1 \leq i' \leq h$. Amb altres paraules,

estem considerant l'únic $i' = 1, 2, \dots, h$ tal que $\sigma_N^-[\alpha_i] \in A_{i'}$. Es defineix aleshores la funció F_i per

$$F_i(\vec{y}) = (1 - t[\alpha_i])x_s(\vec{y}; j) + t[\alpha_i]y_{i'}, \text{ si } \vec{y} \in [a, b]^h \quad (6.13)$$

Recordem que $t[\alpha_i]$ era el valor de la proporció inicial per a T en α_i . Si $\vec{y} \in [a, b]^h$, de la proposició 5.13 (ii) i de les desigualtats $0 < t[\alpha_i] < 1$ es dedueix que $a \leq F_i(\vec{y}) \leq b$, és a dir, F_i està ben definida. A més a més, pel teorema 5.16 sabem que F_i és contínua.

- **Cas 3.1.2:** $\sigma_N^-[\alpha_i] \notin A$. En aquest cas $\sigma_N^-[\alpha_i]$ és un node veritable del parell $[N|A]$ de derivació $j - 1$, així que té sentit considerar l'únic $s' = 1, 2, \dots, \text{ver}(j - 1)$ per al qual $\sigma_N^-[\alpha_i] = (x_{j-1, s'}, j - 1)$. Es defineix F_i per

$$F_i(\vec{y}) = (1 - t[\alpha_i])x_s(\vec{y}; j) + t[\alpha_i]x_{s'}(\vec{y}; j - 1), \text{ si } \vec{y} \in [a, b]^h \quad (6.14)$$

Si $\vec{y} \in [a, b]^h$ tornem a tenir $a \leq F_i(\vec{y}) \leq b$, i pel teorema 5.16, F_i és contínua.

- **Cas 3.2:** *L'abscissa de α_i és major que la de $\sigma_N[\alpha_i]$.* Aquest cas és el simètric del cas 3.1, considerant-se ara el node $\sigma_N^+[\alpha_i]$ i separant segons els dos subcasos possibles.

- **Cas 3.2.1:** $\sigma_N^+[\alpha_i] \in A$. Es considera el peu en A de $\sigma_N^+[\alpha_i]$, que coincideix amb cert $\alpha_{i'}$, $1 \leq i' \leq h$. La funció F_i ve definida per

$$F_i(\vec{y}) = (1 - t[\alpha_i])x_s(\vec{y}; j) + t[\alpha_i]y_{i'}, \text{ si } \vec{y} \in [a, b]^h \quad (6.15)$$

F_i pren valors a $[a, b]$ i és contínua.

- **Cas 3.2.2:** $\sigma_N^+[\alpha_i] \notin A$. El node $\sigma_N^+[\alpha_i]$ és veritable del parell $[N|A]$ i té derivació $j - 1$. Si $s' = 1, 2, \dots, \text{ver}(j - 1)$ és tal que $\sigma_N^+[\alpha_i] = (x_{j-1, s'}, j - 1)$, aleshores es defineix F_i per

$$F_i(\vec{y}) = (1 - t[\alpha_i])x_s(\vec{y}; j) + t[\alpha_i]x_{s'}(\vec{y}; j - 1), \text{ si } \vec{y} \in [a, b]^h \quad (6.16)$$

F_i torna a prendre valors a $[a, b]$ i és contínua.

Observem que les expressions (6.15) i (6.16) coincideixen amb (6.13) i (6.14) respectivament.

Queden definides així h funcions $F_i : [a, b]^h \rightarrow [a, b]$, $1 \leq i \leq h$, totes elles contínues. La funció $F : [a, b]^h \rightarrow [a, b]^h$ donada per $F(\vec{y}) = (F_1(\vec{y}), F_2(\vec{y}), \dots, F_h(\vec{y}))$ si $\vec{y} \in [a, b]^h$, és contínua i pren valors en el seu domini $[a, b]^h$. Com que $[a, b]^h$ és homeomorf al disc h -dimensional tancat, el *teorema del punt fix de Brouwer* assegura que F té un punt fix. És a dir, existeix un $\vec{y} \in [a, b]^h$ tal que $F(\vec{y}) = \vec{y}$; o el que és el mateix, per a aquest \vec{y} es verifiquen les equacions

$$y_i = F_i(\vec{y}), \quad i = 1, 2, \dots, h \quad (6.17)$$

Cadascuna de les equacions anteriors té un significat diferent depenent del cas utilitzat en la definició de F_i . Un petit detall és que si $a = b$ aleshores el teorema del punt fix de Brouwer no és aplicable, ja que l'interval $[a, b]^h$ es redueix a un únic punt i per tant no és homeomorf al disc h -dimensional tancat, però trivialment aquest punt és un punt fix de F .

En el que segueix es considera un punt fix qualsevol \vec{y} de F . Així, \vec{y} és un punt per al qual es verifiquen les equacions (6.17). També en el que segueix, i de cara a simplificar notacions, la configuració $\text{Ext}(\vec{y})$ serà denotada per E ,

$$E = \text{Ext}(\vec{y}),$$

mentre que l'espectre del polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ el denotarem per Z . És a dir,

$$Z = Z(P(\vec{y}; \cdot)).$$

La resta de la demostració anirà encaminada a provar que Z verifica les condicions del teorema.

A continuació es construeix una aplicació $\Psi : N \rightarrow Z$. La imatge $\Psi[\alpha]$ d'un node $\alpha \in N$ de derivació j es defineix per casos, segons si $\alpha \in A$ o si $\alpha \notin A$:

- Si $\alpha \in A$ aleshores es considera el peu, en A , del node α , que coincideix amb cert α_i , $i = 1, 2, \dots, h$. En aquest cas la imatge $\Psi[\alpha]$ ve definida per $\Psi[\alpha] = (y_i, j)$. Observem que $\Psi[\alpha] \in E$, ja que al ser el peu de α igual a α_i resulta $m_{A_i}(j) = 1$, i per la proposició 5.3 això implica que $(y_i, j) \in S_{m_i}^{y_i} \subseteq E$. En particular $\Psi[\alpha]$ és un node de Z .
- Si $\alpha \notin A$ aleshores α és un node veritable del parell $[N|A]$. Així, existeix un únic $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$ tal que $\alpha = (x_{j_s}, j)$. La imatge de α es defineix en aquest cas per $\Psi[\alpha] = (x_s(\vec{y}); j, j)$. De les propietats elementals de les funcions d'arrels veritables i latents (veure els comentaris que segueixen a la definició 5.11) resulta que $\Psi[\alpha] \in Z$.

La imatge $\Psi[\alpha]$ d'un node $\alpha \in N$ de derivació j pot esquematitzar-se com

$$\Psi[\alpha] = \begin{cases} (y_i, j), & \text{si } \alpha \in A, \text{ peu}_A[\alpha] = \alpha_i \\ (x_s(\vec{y}; j), j), & \text{si } \alpha \in N \setminus A, \alpha = (x_{js}, j) \end{cases} \quad (6.18)$$

Obtenim així una aplicació $\Psi : N \rightarrow Z$ que trivialment conserva derivacions. A més a més ja hem vist que la imatge dels nodes de A queda dins de E . És a dir, $\Psi[A] \subseteq E$. De les equacions (6.17) resulta immediatament el següent lema.

Lema 6.8. *Es verifiquen les propietats següents:*

- (i) Si α és un node de Y i j és la seva derivació, aleshores $\Psi[\alpha] = (y^0[\alpha], j)$.
- (ii) Sigui (x_{js}, j) , $j \geq 0$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, un node veritable del parell $[N|A]$ de forma que (x_{js}, j) és peu de N . Aleshores $\Psi[(x_{js}, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j)$.
- (iii) Si $\alpha = (x, j)$ és un node de T i $\sigma_N[\alpha] = (x^*, j)$, aleshores

$$\Psi[\alpha] = \begin{cases} ((1 - t[\alpha])y^* + t[\alpha]y^-, j), & \text{si } x < x^* \\ ((1 - t[\alpha])y^* + t[\alpha]y^+, j), & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (6.19)$$

on y^- , y^* i y^+ són les abscisses de $\Psi[\sigma_N^-(\alpha)]$, $\Psi[\sigma_N[\alpha]]$ i $\Psi[\sigma_N^+(\alpha)]$ respectivament.

Demostració. (i) Sigui $\alpha \in Y$. Aquest node coincideix amb cert α_i , $i = 1, 2, \dots, h$. La construcció de F_i correspon al cas 1 perquè $\alpha_i = \alpha \in Y$, i per tant, de (6.17), $y_i = F_i(\vec{y}) = y^0[\alpha_i] = y^0[\alpha]$. Per altra banda $\Psi[\alpha] = \Psi[\alpha_i] = (y_i, j)$, així que $\Psi[\alpha] = (y^0[\alpha], j)$.

(ii) Considerem el node (x_{js}, j) . Si no pertany a A , de la pròpia definició de Ψ s'obté $\Psi[(x_{js}, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j)$. Suposem que $(x_{js}, j) \in A$. En aquest cas, com que (x_{js}, j) és un peu de N també és un peu de A , resultant que $(x_{js}, j) \in \tilde{U}$ i a més a més $(x_{js}, j) = \alpha_i$ per a cert $1 \leq i \leq h$. La construcció de F_i correspon al cas 2, i per tant $y_i = F_i(\vec{y}) = x_s(\vec{y}; j)$. Finalment, de la definició de Ψ es dedueix que $\Psi[(x_{js}, j)] = (y_i, j) = (x_s(\vec{y}; j), j)$.

(iii) Sigui $\alpha = (x, j) \in T$ i $\sigma_N[\alpha] = (x^*, j)$. La imatge de α és $\Psi[\alpha] = \Psi[\alpha_i] = (y_i, j) = (F_i(\vec{y}), j)$, on $i = 1, 2, \dots, h$ és tal que $\alpha = \alpha_i$. Donat que $\alpha = \alpha_i \in T$, la construcció de F_i correspon al cas 3. Per tal de desglossar el valor $F_i(\vec{y})$, posarem el node $\sigma_N[\alpha]$ en la forma $\sigma_N[\alpha] = (x_{js}, j)$ i suposarem, per exemple, que $x < x^* = x_{js}$, és a dir, el cas 3.1 per a F_i . Tenint en compte que $\Psi[\alpha] = (F_i(\vec{y}), j)$ i (6.19), tot es redueix a provar la igualtat

$$F_i(\vec{y}) = (1 - t[\alpha])y^* + t[\alpha]y^- \quad (6.20)$$

El nombre y^* és conegut i val $y^* = x_s(\vec{y}; j)$, ja que de l'apartat (ii) del present lema es deriva que $\Psi[\sigma_N[\alpha]] = (x_s(\vec{y}; j), j)$. Hi ha dues possibilitats:

- $\sigma_N^-[\alpha] \in A$ (i.e. cas 3.1.1 per a F_i). Aquí es considera el peu en A del node $\sigma_N^-[\alpha]$, que és de la forma $\alpha_{i'}$, $1 \leq i' \leq h$. L'expressió de $F_i(\vec{y})$ ve donada en (6.13). De la definició de i' s'obté que $\Psi[\sigma_N^-[\alpha]] = (y_{i'}, j-1)$, així que el nombre y^- val $y^- = y_{i'}$. Substituint en (6.13) els valors $y^- = y_{i'}$ i $y^* = x_s(\vec{y}; j)$ s'obté finalment (6.20). En aquest cas ja hem acabat.
- $\sigma_N^-[\alpha] \notin A$ (cas 3.1.2 per a F_i). Hem de considerar l'únic $s' = 1, 2, \dots, \text{ver}(j-1)$ per al qual $\sigma_N^-[\alpha_i] = (x_{j-1, s'}, j-1)$, obtenint ara l'expressió (6.14) per a $F_i(\vec{y})$. De la definició de Ψ es dedueix que $\Psi[\sigma_N^-[\alpha]] = (x_{s'}(\vec{y}; j-1), j-1)$, és a dir, $y^- = x_{s'}(\vec{y}; j-1)$. Substituint en (6.14) els valors $y^- = x_{s'}(\vec{y}; j-1)$ i $y^* = x_s(\vec{y}; j)$ s'obté novament (6.20), tal com volíem veure.

El cas $x > x^* = x_{j_s}$ és anàleg a l'anterior. □

Observem que els apartats (i) i (iii) del lema anterior són les conclusions (a) i (b) del teorema 6.4. Més ben dit, ho seran quan haguem provat que Ψ és la identificació natural entre N i Z .

PART III

L'objectiu ara és provar que Ψ és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abcisses. Que conserva derivacions ja ho sabem, així que només cal veure que és bijectiva i conserva 1-abcisses.

Per a cada $j = 0, 1, \dots, n-1$, sigui

$$\Psi_j : \{(x, j') \in N \mid j' \leq j\} \longrightarrow \{(x, j') \in Z \mid j' \leq j\}$$

l'aplicació definida per $\Psi_j[\alpha] = \Psi[\alpha]$. És a dir, Ψ_j és la restricció de Ψ als nodes de N que tenen derivació com a molt j , però canviant també el conjunt d'arribada Z pels nodes de Z que tenen derivació com a molt j . Ψ_j està ben definida perquè Ψ conserva derivacions. Per aquest mateix fet Ψ_j també conserva derivacions. D'altra banda, quan $j = n-1$ aleshores Ψ_{n-1} coincideix amb Ψ , ja que n és la longitud de N i de Z .

Per provar que Ψ és bijectiva i conserva 1-abcisses procedirem per inducció en j , prenent com a hipòtesi d'inducció que Ψ_j és bijectiva i conserva 1-abcisses. Això

és, primer veurem que aquesta hipòtesi és satisfeta quan $j = 0$, i després que si és satisfeta per a $j - 1$, aleshores també ho és per a j .

Lema 6.9. Ψ_0 és bijectiva i conserva 1-abcisses.

Demostració. Vegem primer que Ψ_0 és exhaustiva. Sigui $(z, 0)$ un node de Z de derivació zero. Aquest node pertany a E donat que E és un esquelet de Z . Recordant ara la definició de la configuració $\text{Ext}(\vec{y}) = E$, això significa que hi ha un $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$ de manera que $z = y_\iota$ i $m_\iota^o(0) = 1$. En particular $m_\iota(0) = \sum_{i \in \iota} m_i(0) \geq 1$, i conseqüentment ha d'existir un $i \in \iota$ amb $m_i(0) = 1$. Per a aquest i es té $y_i = y_\iota = z$, essent el node α_i un node de derivació 0 donat que $m_i(0) = 1$. De tot això resulta $\Psi_0[\alpha_i] = (y_i, 0) = (y_\iota, 0) = (z, 0)$, i, en particular, $(z, 0)$ és la imatge d'un node de N de derivació zero. Hem vist que Ψ_0 és exhaustiva.

Que Ψ_0 és injectiva i conserva 1-abcisses és conseqüència del següent. Els nodes de N de derivació zero són nodes de Y i per tant, pel lema 6.8 (i), la imatge d'aquests nodes és coneguda i val $\Psi_0[\alpha] = (y^0[\alpha], 0)$. La condició (6.3) en la definició de tria inicial d'abcisses per a Y assegura que Ψ_0 és injectiva i conserva 1-abcisses. \square

En el que segueix es considera un nombre natural $j = 1, 2, \dots, n - 1$ de manera que Ψ_{j-1} és bijectiva i conserva 1-abcisses. L'objectiu és demostrar que Ψ_j també és bijectiva i conserva 1-abcisses.

Sigui $0 \leq j' \leq j - 1$. Com que Ψ_{j-1} és bijectiva i $\Psi[A] \subseteq E$, resulta

$$\begin{aligned} M_A(j') &= \#\{(x, j'') \in A \mid j'' \leq j'\} = \#\Psi[\{(x, j'') \in A \mid j'' \leq j'\}] \\ &\leq \#\{(x, j'') \in E \mid j'' \leq j'\} = M_E(j') \end{aligned} \quad (6.21)$$

però comptant cardinals,

$$\begin{aligned} M_A(j') &= \sum_{i \in I} M_i(j') = \sum_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} M_\iota(j') \\ &\geq \sum_{\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}} M_\iota^o(j') = M_{\text{Ext}(\vec{y})}(j') = M_E(j') \end{aligned} \quad (6.22)$$

Això implica $M_A(j') = M_E(j')$ i que les desigualtats que apareixen en (6.21) i (6.22) són igualtats.

Lema 6.10. *Es verifiquen les propietats següents:*

- (i) *Siguin $0 \leq j' \leq j - 1$ i $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$. Aleshores $M_\iota(j') = M_\iota^o(j')$ i $m_\iota(j') = m_\iota^o(j')$.*

$$(ii) \Psi[\{(x, j'') \in A \mid j'' \leq j\}] = \{(x, j'') \in E \mid j'' \leq j\}.$$

(iii) Si $1 \leq j' \leq j$ aleshores $x_1(\vec{y}; j') < x_2(\vec{y}; j') < \dots < x_{\text{ver}(j')}(\vec{y}; j')$, essent aquests nombres les abscisses dels nodes veritables de derivació j' del parell $[Z|E]$.

Demostració. (i) La desigualtat que apareix en (6.22) és una igualtat, i per tant $M_\iota(j') = M_\iota^o(j')$. Aplicant això també al nombre $j' - 1$ s'obté que $m_\iota(j') = M_\iota(j') - M_\iota(j' - 1) = M_\iota^o(j') - M_\iota^o(j' - 1) = m_\iota^o(j')$.

(ii) La desigualtat de (6.21) quan $j' = j - 1$ és una igualtat, obtenint-se que

$$\Psi[\{(x, j'') \in A \mid j'' \leq j - 1\}] = \{(x, j'') \in E \mid j'' \leq j - 1\}.$$

Això mostra que per acabar de veure (ii) només resta veure que

$$\Psi[\{(x, j'') \in A \mid j'' = j\}] = \{(x, j'') \in E \mid j'' = j\} \quad (6.23)$$

La inclusió \subseteq de (6.23) és immediata perquè $\Psi[A] \subseteq E$. Anem a veure la inclusió \supseteq . Sigui $(x, j) \in E$ i considerem el $\iota \in I / \equiv_{\vec{y}}$ tal que $x = y_\iota$, $m_\iota^o(j) = 1$. Això últim és equivalent a $1 \leq M_\iota(j) - M_\iota^o(j - 1)$, però si substituïm en aquesta desigualtat $M_\iota^o(j - 1)$ per $M_\iota(j - 1)$ (veure l'apartat (i)) s'obté que $m_\iota(j) = \sum_{i \in \iota} m_i(j) \geq 1$, i per tant hi ha un $i \in \iota$ amb $m_i(j) = 1$. Això mostra que hi ha un node de A , diguem α , que té derivació j i de manera que el seu peu és el node α_i . La imatge de α val $\Psi[\alpha] = (y_i, j) = (y_\iota, j) = (x, j)$. Hem obtingut la inclusió \supseteq de (6.23), i per tant queda provat l'apartat (ii).

L'apartat (iii) no és res més que l'apartat (i) de la proposició 5.13. Observem que aquesta és aplicable donat que de (5.23) i de l'apartat (i) que acabem de veure es dedueix que $m_{V_{[Z|E]}}(j') = \text{ver}(j')$. \square

Com a conseqüència,

Lema 6.11. *Es verifiquen les següents igualtats:*

$$\Psi[\{(x, j'') \in N \setminus A \mid j'' \leq j - 1\}] = \{(x, j'') \in Z \setminus E \mid j'' \leq j - 1\} \quad (6.24)$$

$$\Psi[\{(x, j'') \in [N|A]^+ \mid j'' \leq j - 1\}] = \{(x, j'') \in [Z|E]^+ \mid j'' \leq j - 1\} \quad (6.25)$$

$$\Psi[\{(x, j'') \in [N|A]^- \mid j'' \leq j - 1\}] = \{(x, j'') \in [Z|E]^- \mid j'' \leq j - 1\} \quad (6.26)$$

$$\Psi[\{(x, j'') \in V_{[N|A]} \mid j'' \leq j - 1\}] = \{(x, j'') \in V_{[Z|E]} \mid j'' \leq j - 1\} \quad (6.27)$$

Demostració. La igualtat (6.26) és conseqüència de (6.27) atès que $[N|A]^- = N \setminus V_{[N|A]}$, $[Z|E]^- = Z \setminus V_{[Z|E]}$ i Ψ_{j-1} és bijectiva. Per altra banda, (6.25) és conseqüència de (6.27) i del lema 6.10 (ii). Aquest mateix lema també estableix (6.24). En definitiva, només cal demostrar (6.27).

Vegem primer la inclusió \subseteq de (6.27). Considerem un node $(x, j'') \in V_{[N|A]}$ amb $j'' \leq j-1$. Hem de veure que la imatge d'aquest node, $\Psi[(x, j'')]$, pertany a $V_{[Z|E]}$. Si $(x, j'') \in N \setminus A$ aleshores ja estem, ja que del lema 6.10 (ii) i de que Ψ_{j-1} és bijectiva s'obté que $\Psi[(x, j'')] \in Z \setminus E \subseteq V_{[Z|E]}$.

Podem suposar, per tant, $(x, j'') \in [N|A]^+$. Sigui $\alpha_i = (x, j_0)$ el peu en A de (x, j'') . Les imatges de (x, j'') i $(x, j_0) = \alpha_i$ són, respectivament, $\Psi[(x, j'')] = (y_i, j'')$ i $\Psi[(x, j_0)] = (y_i, j_0)$. El node (x, j_0) és un peu de N donat que és un peu de A , i com que $(x, j'') \in [N|A]^+$, (x, j_0) també pertany a $[N|A]^+$. Això implica que $\alpha_i = (x, j_0)$ és un peu de N veritable del parell $[N|A]$. Per tant, si posem $\alpha_i = (x_{j_0, s}, j_0)$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j_0)$, el lema 6.8 (ii) estableix que $\Psi[\alpha_i] = (y_i, j_0) = (x_s(\overrightarrow{y}; j_0), j_0)$, i en particular, pel lema 6.10 (iii) sabem que $\Psi[\alpha_i] = (y_i, j_0) \in V_{[Z|E]}$.

Els nodes de la forma (x, j') , $j_0 \leq j' \leq j''$, són tots de A , així que les seves imatges (y_i, j') , $j_0 \leq j' \leq j''$, són nodes de E . La primera d'elles, (y_i, j_0) , hem vist que és veritable del parell $[Z|E]$. Això implica que tots els nodes (y_i, j') , $j_0 \leq j' \leq j''$, són veritables del parell $[Z|E]$, i en particular també ho és el node $(y_i, j'') = \Psi[(x, j'')]$. En definitiva hem vist $\Psi[(x, j'')] = (y_i, j'') \in V_{[Z|E]}$, quedant provada la inclusió \subseteq .

Per acabar de provar (6.27) podem utilitzar la inclusió que acabem de veure i només resta demostrar que els conjunts de cada costat de (6.27) tenen el mateix cardinal. En efecte,

$$\begin{aligned} \#\Psi\{(x, j'') \in V_{[N|A]} \mid j'' \leq j-1\} &= \#\{(x, j'') \in V_{[N|A]} \mid j'' \leq j-1\} = \sum_{j''=0}^{j-1} \text{ver}(j'') \\ \#\{(x, j'') \in V_{[Z|E]} \mid j'' \leq j-1\} &= \sum_{j''=0}^{j-1} \text{ver}(j'') \end{aligned}$$

L'última igualtat s'ha derivat del lema 6.10 (iii). □

No serà necessari utilitzar-ho, però de (6.27) i de que Ψ_{j-1} conserva l'ordre entre les abscisses de nodes d'igual derivació, es dedueix que $\Psi[(x_{j', s}, j')] = (x_s(\overrightarrow{y}; j'), j')$ si $1 \leq j' \leq j-1$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j')$.

Fins ara hem vist propietats de Ψ que es deriven del fet que Ψ_{j-1} és bijectiva i conserva 1-abscisses. La major part d'aquestes propietats només involucren nodes

amb derivació menor o igual que $j - 1$.

En el que segueix es considerarà el nombre $m(j-1) = m_N(j-1) = m_Z(j-1)$, així com les abscisses $w_1 < w_2 < \dots < w_{m(j-1)}$ (resp. $w'_1 < w'_2 < \dots < w'_{m(j-1)}$) dels nodes de N que tenen derivació $j - 1$ (resp. dels nodes de Z que tenen derivació $j - 1$). Donat que Ψ_{j-1} conserva 1-abscisses es té $\Psi[(w_k, j - 1)] = (w'_k, j - 1)$ si $k = 1, 2, \dots, m(j - 1)$.

Els nodes (x_{js}, j) , $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, són nodes interiors de N perquè són veritables del parell $[N|A]$, i en conseqüència $w_1 \leq x_{js} \leq w_{m(j-1)}$ si $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$. Tenint en compte el lema 6.10 (iii), el mateix raonament també mostra que $w'_1 \leq x_s(\vec{y}; j) \leq w'_{m(j-1)}$ si $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$.

Lema 6.12. *Es verifiquen els següents apartats:*

- (i) *Sigui $s = 1, 2, \dots, \text{ver}(j)$. Si $w_k < x_{js} < w_{k+1}$, on $1 \leq k \leq m(j - 1) - 1$, aleshores $w'_k < x_s(\vec{y}; j) < w'_{k+1}$. Anàlogament, si $x_{js} = w_k$, on $1 \leq k \leq m(j - 1)$, aleshores $x_s(\vec{y}; j) = w'_k$.*
- (ii) *Si $1 \leq k \leq m(j - 1)$ i $(w_k, j) \in N$, aleshores $\Psi[(w_k, j)] = (w'_k, j)$.*
- (iii) *Si $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$ aleshores $\Psi[(x_{js}, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j)$.*
- (iv) *Si (x, j) és un node de N de derivació j amb $x < w_1$, aleshores $y^0[(x, j)] < w'_1$. Anàlogament, si $(x, j) \in N$ i $x > w_{m(j-1)}$, aleshores $y^0[(x, j)] > w'_{m(j-1)}$.*

Comentari 6.13. A l'apartat (i) d'aquest lema sempre existeix un k satisfent $w_k < x_{js} < w_{k+1}$ o bé $x_{js} = w_k$, ja que $w_1 \leq x_{js} \leq w_{m(j-1)}$. El node (x, j) considerat a l'apartat (iv) pertany a Y , puix que és un peu exterior de N i per tant té sentit el valor $y^0[(x, j)]$.

Demostració del lema. (i) De les propietats elementals d'esquelets, sabem que per a cada $k = 1, 2, \dots, m(j - 1) - 1$ hi ha un únic node $(x, j) \in V_{[N|A]}$ amb $w_k < x < w_{k+1}$ (resp. hi ha un únic node $(x, j) \in V_{[Z|E]}$ amb $w'_k < x < w'_{k+1}$). A més a més, si $k = 1, 2, \dots, m(j - 1)$ aleshores

$$(w_k, j) \in V_{[N|A]} \Leftrightarrow (w'_k, j) \in V_{[Z|E]} \quad (6.28)$$

Aquest fet prové de que les condicions (1) $(w_k, j) \in V_{[N|A]}$, i (2) $(w_k, j-1) \in [N|A]^+$, són equivalents. Per (6.25) aquesta última condició és equivalent a que el node $\Psi[(w_k, j - 1)] = (w'_k, j - 1)$ pertanyi a $[Z|E]^+$; o el que és el mateix, a que el node (w'_k, j) pertanyi a $V_{[Z|E]}$. S'obté així (6.28).

Tot això implica que els nodes veritables de derivació j del parell $[N|A]$ i els

nodes veritables de derivació j del parell $[Z|E]$ estan situats de la mateixa manera respecte dels nodes de derivació $j - 1$ de N i de Z respectivament (veure figura 6.7).

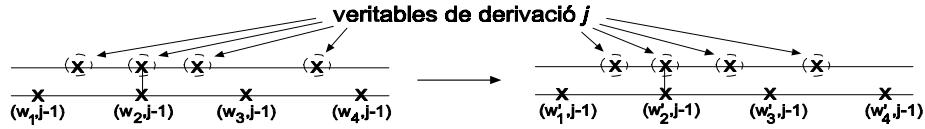


Figura 6.7

Tenint ara en compte que els nombres x_{j_s} i els $x_s(\vec{y}; j)$, $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$, són les abscisses dels nodes veritables de derivació j dels parells $[N|A]$ i $[Z|E]$ respectivament, ordenades en forma creixent, s'acaba obtenint l'apartat (i).

(ii) Sigui k tal que $(w_k, j) \in N$ i hem de veure que $\Psi[(w_k, j)] = (w'_k, j)$. Suposem primer que els dos nodes $(w_k, j - 1)$, (w_k, j) pertanyen a A . Considerem en aquest cas el peu en A de $(w_k, j - 1)$. Aquest peu és de la forma α_i , $i = 1, 2, \dots, h$, i també coincideix amb el peu de (w_k, j) . De la definició de Ψ es desprèn que $\Psi[(w_k, j - 1)] = (y_i, j - 1)$, però com que $\Psi[(w_k, j - 1)]$ també coincideix amb $(w'_k, j - 1)$, tindrem $y_i = w'_k$. Si calculem ara la imatge de (w_k, j) resulta $\Psi[(w_k, j)] = (y_i, j) = (w'_k, j)$, tal com volíem veure.

El cas $(w_k, j - 1) \in N \setminus A$ i $(w_k, j) \in N \setminus A$ no es pot donar perquè A és un esquelet de N . Igualment tampoc es pot donar que $(w_k, j - 1) \in N \setminus A$ i $(w_k, j) \in A$, ja que tot peu de A és un peu de N .

Només resta veure el cas $(w_k, j - 1) \in A$ i $(w_k, j) \in N \setminus A$. Aquí tenim $(w_k, j) = (x_{j_s}, j)$ per a cert $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$. De la definició de Ψ es dedueix que $\Psi[(w_k, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j)$, mentre que de l'apartat (i) que acabem de veure $x_s(\vec{y}; j) = w'_k$. En definitiva $\Psi[(w_k, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j) = (w'_k, j)$, tal com volíem veure.

(iii) Sigui $1 \leq s \leq \text{ver}(j)$ i hem de veure que $\Psi[(x_{j_s}, j)] = (x_s(\vec{y}; j), j)$. Si el node (x_{j_s}, j) és un peu de N aleshores ja hem acabat (veure el lema 6.8 (ii)). Suposem que (x_{j_s}, j) no és peu de N . En aquest cas $(x_{j_s}, j) = (w_k, j)$ per a cert $1 \leq k \leq m(j - 1)$. De l'apartat (i) del present lema es dedueix que $x_s(\vec{y}; j) = w'_k$, i aplicant l'apartat (ii) resulta $\Psi[(x_{j_s}, j)] = (w'_k, j) = (x_s(\vec{y}; j), j)$.

(iv) Sigui (x, j) un node de N amb $x < w_1$. Dintre de tots els nodes de Z que tenen derivació menor o igual que $j - 1$, en considerarem un, diguem (x^*, j^*) , que tingui abscissa mínima. Notem que això implica $x^* \leq w'_1$. El node $\beta = \text{peu}_Z[(x^*, j^*)]$ té derivació menor o igual que $j - 1$ i abscissa x^* mínima, essent β un node atípic o exterior-esquerra de Z (veure el lema 2.6). Com que Ψ_{j-1} és bijectiva i conserva

1-abscisses, tindrem $\beta = \Psi[\gamma]$ per a cert peu γ de N , essent γ un node atípic o exterior-esquerra de N . D'això últim es deriva que $\gamma \in Y$. Donat que la derivació del node (x, j) és més gran que la derivació de γ , per a l'ordre predefinit en Y es té $(x, j) < \gamma$, i per tant, de (6.3), $y^0[(x, j)] < y^0[\gamma]$. Finalment, del lema 6.8 (i) resulta $x^* = y^0[\gamma]$, i conseqüentment $y^0[(x, j)] < y^0[\gamma] = x^* \leq w'_1$.

En el cas $x > w_{m(j-1)}$ el raonament és anàleg a l'anterior. \square

Conseqüència dels resultats anteriors és el següent corol·lari.

Corol·lari 6.14. *Si Ψ_{j-1} és bijectiva i conserva 1-abscisses, aleshores Ψ_j també és bijectiva i conserva 1-abscisses.*

Demostració. Que Ψ_j és exhaustiva prové de ser-ho Ψ_{j-1} , dels apartats (ii) i (iii) del lema 6.10 i de l'apartat (iii) del lema anterior (en virtut d'aquest apartat tot node $\beta \in Z \setminus E$ de derivació j pertany a la imatge de Ψ_j).

La injectivitat de Ψ_j serà conseqüència de que Ψ_j conserva 1-abscisses. Per tant només cal veure això últim. Continuant amb les notacions del lema 6.12, hom obté les propietats (a), (b) i (c) següents:

- (a) Siguin $x_1 < x_2 < \dots < x_q$ les abscisses dels nodes de N que tenen derivació j i abscissa estrictament menor que w_1 , i siguin $(x'_i, j) = \Psi[(x_i, j)]$, $1 \leq i \leq q$, les seves imatges. Aleshores $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_q < w'_1$.

Això es deriva del lema 6.8 (i), del lema 6.12 (iv) i de (6.3).

Anàlogament, si $x_1 < x_2 < \dots < x_q$ són les abscisses dels nodes de N que tenen derivació j i abscissa estrictament major que $w_{m(j-1)}$, aleshores, per a les imatges $(x'_i, j) = \Psi[(x_i, j)]$, $1 \leq i \leq q$, es té $w'_{m(j-1)} < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_q$.

- (b) Sigui $1 \leq k \leq m_N(j-1) - 1$ i suposem que $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ són les abscisses dels nodes de N que tenen derivació j i abscissa estrictament compresa entre w_k i w_{k+1} . Siguin $(x'_i, j) = \Psi[(x_i, j)]$, $1 \leq i \leq m$, les imatges d'aquests nodes. Aleshores $w'_k < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_m < w'_{k+1}$.

En efecte, sigui (x_r, j) l'únic node de tots els (x_i, j) , $1 \leq i \leq m$, que té multiplicitat en N senar. Aquest node és un node veritable del parell $[N|A]$, i per tant és de la forma (x_{j_s}, j) . Pel lema anterior, apartats (i) i (iii), això implica $w'_k < x'_r < w'_{k+1}$. Ara, si $1 \leq i < r$ el lema 6.8 (iii) estableix que $x'_i = (1-t[(x_i, j)])x'_r + t[(x_i, j)]w'_k = x'_r - t[(x_i, j)](x'_r - w'_k)$, mentre que si $r < i \leq m$ aleshores $x'_i = (1-t[(x_i, j)])x'_r + t[(x_i, j)]w'_{k+1} = x'_r + t[(x_i, j)](w'_{k+1} - x'_r)$. D'això i de les restriccions que verifica la proporció inicial per a T s'obté que $w'_k < x'_1 < \dots < x'_{r-1} < x'_r < x'_{r+1} < \dots < x'_m < w'_{k+1}$, tal com volíem veure.

(c) Si $(w_k, j) \in N$ aleshores $\Psi[(w_k, j)] = (w'_k, j)$.

Aquest fet prové de l'apartat (ii) del lema 6.12.

Aquestes propietats estan esquematitzades en el següent exemple.

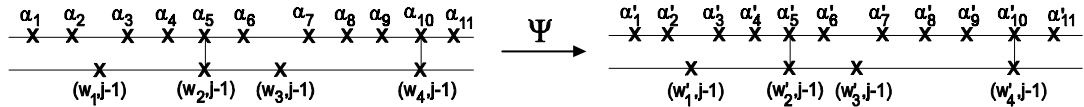


Figura 6.8. $\Psi[\alpha_i] = \alpha'_i, i = 1, 2, \dots, 11$

De les propietats (a), (b) i (c) es desprèn que Ψ_j conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes $\alpha_1, \alpha_2 \in N$ tals que les seves derivacions respectives j_1 i j_2 verifiquen $j - 1 \leq j_1, j_2 \leq j$. Això, juntament amb que Ψ_{j-1} conserva 1-abscisses, mostra que Ψ_j conserva 1-abscisses. \square

Pel principi d'inducció matemàtica queda doncs provat que Ψ és bijectiva i conserva 1-abscisses.

Sintetitzant, hem obtingut un espectre Z i una aplicació bijectiva $\Psi : N \rightarrow Z$ que conserva derivacions i conserva 1-abscisses. La proposició 3.5 estableix que Z és equivalent a N i que Ψ és la identificació natural entre N i Z . D'aquest fet i dels apartats (i) i (iii) del lema 6.8 s'acaben de desprendre els apartats (a) i (b) del teorema 6.4. Això completa la demostració. \square

6.3 Consideracions addicionals

En aquesta secció analitzarem un parell d'aspectes relacionats amb el teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions, que són: el nombre de graus de llibertat i la discussió sobre la unicitat.

6.3.1 Nombre de graus de llibertat

En el que segueix es considera una \mathcal{B} -configuració N de longitud n . El teorema 6.4 estableix l'existència d'un polinomi P tal que $Z(P) \sim N$ i de manera que el seu espectre $Z(P)$ verifica les propietats (a) i (b) del teorema. El grau de P és igual

a n donat que n és la longitud de N . Sense pèrdua de generalitat podem suposar que P és mònic.

Aquest polinomi P depèn de l'elecció de la tria inicial d'abscisses per a Y i de la proporció inicial per a T . Variant aquesta elecció, anirem obtenint tota una família de polinomis que depèn dels paràmetres $y^0[\alpha]$, $\alpha \in Y$, i $t[\alpha]$, $\alpha \in T$, o també anomenats *graus de llibertat*. Observem que el nombre total de graus de llibertat és $\sharp Y + \sharp T$. Aquests paràmetres varien en un cert obert de \mathbb{R}^k , $k = \sharp Y + \sharp T$, ja que les restriccions a que estan sotmesos (veure definicions 6.1 i 6.3) són desigualtats estrictes. A més a més, no és difícil veure que eleccions diferents de paràmetres proporcionen polinomis diferents, ja que aquests paràmetres queden determinats un cop conegut l'espectre Z (són les abscisses d'alguns nodes de Z , o proporcions entre abscisses de nodes de Z).

El nombre de graus de llibertat o paràmetres, $\sharp Y + \sharp T$, pot ésser calculat més explícitament si prenem atenció a la descomposició (6.1). Recordem que el cardinal de U l'havíem calculat a partir de la fórmula de la longitud, resultant $\sharp U = \sharp N - n$. D'això es dedueix que

$$\sharp Y + \sharp T = \sharp \mathcal{P}_N - \sharp U = h - (\sharp N - n) = n - (\sharp N - h), \quad (6.29)$$

on $h = \sharp \mathcal{P}_N$ és el nombre de peus de N . En particular, el nombre $\sharp Y + \sharp T$ de graus de llibertat és més petit o igual que n , essent igual a n si i només si $\sharp N - h = 0$, és a dir, quan tots els nodes de N tenen multiplicitat 1 (N és una configuració simple).

En general però, tindrem $\sharp Y + \sharp T < n$. Aquest fet pot fer pensar que el teorema 6.4 no proporciona el màxim nombre de graus de llibertat possible (que és igual a n , el nombre de coeficients d'un polinomi mònic de grau n), i que per tant el teorema 6.4 no és òptim en quant al nombre de graus de llibertat. Aquest raonament però, és fals. Hem de tenir present que, a part d'ésser polinomis mònics de grau n , els polinomis que estem considerant estan sotmesos a altres restriccions, les que provenen del fet que el seu espectre és equivalent a N . Fixem-nos, per exemple, en la configuració N de la figura 6.9 (a).

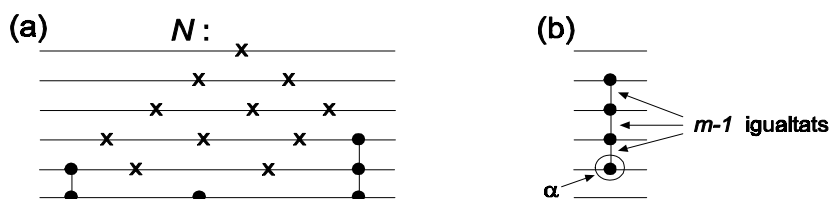


Figura 6.9

Si P és un polinomi mònic tal que el seu espectre és equivalent a N , aleshores P té tres arrels reals $b_1 < b_2 < b_3$ amb multiplicitats respectives 2, 1 i 3, resultant que P és de la forma $P(x) = (x - b_1)^2(x - b_2)(x - b_3)^3$. El polinomi P té grau sis però només depèn dels tres paràmetres b_1, b_2 i b_3 . Aquesta pèrdua de paràmetres és conseqüència de que el polinomi P ha de verificar les igualtats $P'(b_1) = P(b_1)$ i $P''(b_3) = P'(b_3) = P(b_3)$, igualtats degudes a que la identificació natural $\Psi_{N,Z(P)}$ conserva multiplicitats. Hi ha tres igualtats, que restant-les al grau del polinomi obtenim que en efecte P depèn de $6 - 3 = 3$ paràmetres.

En general, si P és un polinomi mònic amb $Z(P) \sim N$, cada peu α de N amb multiplicitat m determina $m - 1$ igualtats entre les derivades de P (veure figura 6.9 (b)). Com que això ho podem anar repetint per a cada peu de N , obtindrem en total

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} (\text{mult}_N[\alpha] - 1) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} \text{mult}_N[\alpha] - \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} 1 = \#N - h$$

igualtats. Si al grau n de P li restem aquest nombre d'igualtats resulta que P depèn de $n - (\#N - h)$ paràmetres.

En definitiva, hem provat que els polinomis P de grau n i tals que $Z(P) \sim N$ depenen de $n - (\#N - h)$ paràmetres. Això fa preveure que $n - (\#N - h)$ és el nombre màxim de graus de llibertat que pot arribar a proporcionar un teorema de l'estil del teorema 6.4. A més a més sabem, de (6.29), que el teorema 6.4 proporciona aquest nombre màxim de graus de llibertat.

Els raonaments anteriors són suficients per fer plausible que el nombre de graus de llibertat obtingut és màxim; o amb altres paraules, que *el teorema 6.4 és òptim, en el sentit que proporciona el nombre màxim de graus de llibertat possible.*

6.3.2 Discussió sobre la unicitat

Sigui N una \mathcal{B} -configuració de longitud n i suposem donades una tria inicial d'abscisses per a Y i una proporció inicial per a T . Podem formular la següent qüestió: *és cert que hi ha un únic polinomi mònic P de manera que el seu espectre $Z(P)$ verifiqui totes les condicions exigides en el teorema 6.4?* Això és, l'espectre $Z(P)$ ha de ser equivalent a N i a més a més s'han de verificar les propietats (a) i (b) del teorema.

En resposta a la qüestió anterior sembla que sí que hi haurà unicitat. Per exemple, un argument en favor de la unicitat és la conclusió obtinguda en la secció anterior sobre els graus de llibertat. La proposició següent demostra la unicitat en un cas

concret, quan tots els grups interiors de N estan formats per un únic node. Notem que sota aquesta hipòtesi no cal parlar de la proporció inicial per a T , ja que $T = \emptyset$.

Proposició 6.15. *Sigui N una \mathcal{B} -configuració tal que tot grup interior de N té cardinal 1. Sigui $y^0[\alpha], \alpha \in Y$, una tria inicial d'abscisses per a Y . Aleshores, hi ha un únic polinomi mònic P tal que $Z(P) \sim N$ i tal que si Ψ és la identificació natural entre N i $Z(P)$, aleshores per a tot node $\alpha \in Y$ es té $\Psi[\alpha] = (y^0[\alpha], j)$, on j denota la derivació de α .*

Demostració. Observem en primer lloc que la configuració N admet un únic esquelet, ja que els grups interiors de N tenen un únic node. Aquest esquelet, denotat A , coincideix amb l'esquelet associat a N i està format pels nodes de N que són atípics o exteriors. Per la proposició 4.11 sabem que el nombre de nodes de A és igual a n , la longitud de N , i que A és una configuració Pólya i conservativa.

Sigui ara P un polinomi mònic satisfent les condicions de l'enunciat. És a dir, amb $N \sim Z(P)$ i de manera que si Ψ és la identificació natural entre N i $Z(P)$ aleshores per a tot $\alpha \in Y$ es verifica $\Psi[\alpha] = (y^0[\alpha], j)$, on j és la derivació de α . A continuació provem que el polinomi P està completament determinat.

Considerem la configuració $B = \Psi[A]$. Aquesta configuració té n nodes, és Pólya i és conservativa, ja que $B \sim A$. En particular B és una configuració regular de n nodes. Ara afirmem que B està completament determinada per la tria inicial d'abscisses per a Y . En efecte, sigui (x, j) un node de A i considerem el seu peu $(x, j_0) = \text{peu}_N[(x, j)]$. El node (x, j) és un node atípic o exterior de N , i en conseqüència el node (x, j_0) pertany a Y . D'aquí que $\Psi[(x, j_0)] = (y^0[(x, j_0)], j_0)$. Utilitzant que Ψ conserva 1-abscisses s'obté que la imatge de (x, j) és $\Psi[(x, j)] = (y^0[(x, j_0)], j)$ i està completament determinada per la tria inicial d'abscisses per a Y , tal com volíem veure.

El polinomi P té grau n , és mònic i s'anul·la sobre la configuració regular B , que té n nodes. Això implica que $P(x) = n!Q(x)$ on $Q(x)$ és l'únic polinomi de grau n , amb coeficient principal $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre B . Com que B està determinada, el polinomi Q està completament determinat i és únic, resultant que P també està completament determinat i és únic. Notem finalment que de la igualtat $P(x) = n!Q(x)$ i de l'expressió (1.9) per al polinomi Q , s'obté una expressió explícita per a P . \square

Quan N admet grups interiors de cardinal major que 1 la resposta sobre la unicitat és més complexa. Acabarem aquesta secció indicant com provar la unicitat en tres

casos senzills. Això és, quan N és alguna de les tres configuracions representades a la següent figura.

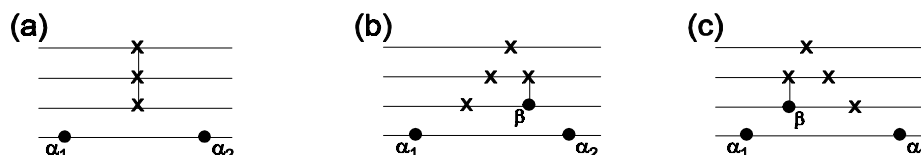


Figura 6.10. Unicitat en els casos senzills.

En qualsevol d'aquests tres casos resulta $Y = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. En el cas (a) tenim $T = \emptyset$, mentre que en (b) i (c) $T = \{\beta\}$.

En el cas (a) s'ha de demostrar la unicitat del polinomi mònic P , $\deg(P) = 4$, que verifica $N \sim Z(P)$ i tal que per a la identificació natural Ψ es té $\Psi[\alpha_1] = a$ i $\Psi[\alpha_2] = b$, on $a < b$ són dos nombres reals prefixats. De tot això es desprèn que les arrels de P són els nombres prefixats a i b , i que la derivada P' admet una arrel amb multiplicitat tres. És a dir, per a cert $y \in \mathbb{R}$ es verifica $P'(y) = P''(y) = P'''(y) = 0$. És fàcil veure que l'únic polinomi que satisfà totes aquestes condicions és el polinomi

$$P(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^4,$$

obtenint en aquest cas unicitat.

En el cas (b), el polinomi mònic P de grau 4 a considerar té dues arrels prefixades $a < b$, la seva derivada P' admet una arrel real y de multiplicitat dos (i.e., $P'(y) = P''(y) = 0$), i si c és la tercera arrel de P' aleshores s'ha de verificar $y = (1-t)c + tb$, on $0 < t < 1$ és una proporció prefixada ($t = t[\beta]$). Pot demostrar-se que aquestes condicions determinen un únic polinomi P , i que per tant hi ha unicitat.

El cas (c) és simètric del cas (b), obtenint-se de nou unicitat.

Recapitulant els resultats d'aquesta secció, s'ha provat la unicitat en un cas parcial (proposició 6.15) i s'han donat tres exemples on hi ha unicitat. Restava per veure què passa en el cas general. Cal dir que hi ha indicis, tals com la unicitat en els casos ja provats, o el recompte dels graus de llibertat de la secció anterior, que fan pensar que també hi ha unicitat en aquest cas.

Capítol 7

Eliminació de nodes

En aquest capítol analitzarem l'existència de petites pertorbacions d'un polinomi de manera que l'espectre d'aquestes pertorbacions s'obtingui suprimint uns quants nodes de l'espectre del polinomi inicial. Tot seguit presentem un breu resum del capítol que incorpora, d'una banda, les definicions necessàries per precisar les pertorbacions que es consideraran, i d'altra banda, un petit esbós dels seus resultats principals.

Sigui

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} \quad (7.1)$$

un polinomi a coeficients reals de grau n amb coeficient principal $\frac{1}{n!}$. En el que segueix, els nodes

$$(y_1^*, j_1), (y_2^*, j_2), \dots, (y_h^*, j_h)$$

són els peus de $Z(P^*)$ diferents dos a dos, essent m_1, m_2, \dots, m_h les seves respectives multiplicitats en $Z(P^*)$. Amb això, es té la descomposició

$$Z(P^*) = \{(y_i^*, j) \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \quad (7.2)$$

Considerem pertorbacions del polinomi P^* de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$$

on cada a_k , $0 \leq k \leq n-1$, és un nombre real proper a a_k^* .

Definició 7.1. Sigui Δ^* un subconjunt de $Z(P^*)$, possiblement buit. Una pertorbació P de P^* és una *pertorbació que elimina Δ^** , si l'espectre de P es pot posar en la forma

$$Z(P) = \{(y_i, j) \mid (y_i^*, j) \notin \Delta^*, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \quad (7.3)$$

on els y_i són nombres reals satisfent les desigualtats $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}$, $i = 1, 2, \dots, h$.

Com a exemple, els nodes marcats amb punts de la figura 7.1 són els nodes d'un espectre $Z(P^*)$, mentre que els nodes encerclats són els nodes de Δ^* . Els nodes marcats amb creus són els nodes de $Z(P)$, on P és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* .

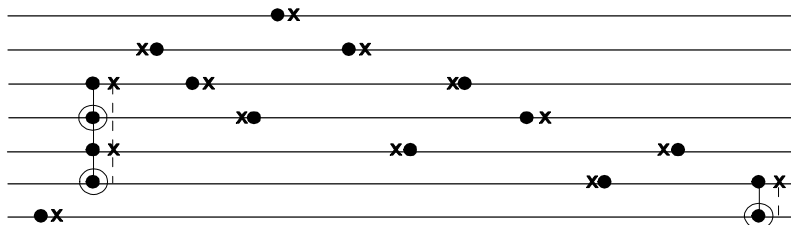


Figura 7.1. Eliminació de nodes.

Observem que els nodes corresponents a Δ^* han estat eliminats per P .

Les expressions (7.2) i (7.3) es poden escriure de manera més compacta identificant cada node de $Z(P^*)$, diguem el node (y_i^*, j) , $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, amb el seu parell (i, j) corresponent. Més precisament, sigui χ el conjunt

$$\chi = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \quad (7.4)$$

Donat que χ és equipotent a $Z(P^*)$, parlar de nodes o de subconjunts de $Z(P^*)$ és el mateix que parlar de nodes o de subconjunts de χ . Així, a $\Delta^* \subseteq Z(P^*)$ li correspon

$$\chi' = \{(i, j) \in \chi \mid (y_i^*, j) \in \Delta^*\} \subseteq \chi \quad (7.5)$$

Tenint en compte (7.4) i (7.5), resulta

$$Z(P^*) = \{(y_i^*, j)\}_{(i,j) \in \chi}, \quad Z(P^*) \setminus \Delta^* = \{(y_i^*, j)\}_{(i,j) \in \chi \setminus \chi'}$$

A més a més, si P és una pertorbació de P^* aleshores (7.3) pren la forma

$$Z(P) = \{(y_i, j)\}_{(i,j) \in \chi \setminus \chi'}$$

Observem també que si P és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* , de les desigualtats $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}$, $i = 1, 2, \dots, h$, es dedueix que l'aplicació

$$\Psi : Z(P^*) \longrightarrow \{(y_i, j)\}_{(i,j) \in \chi}$$

definida per $\Psi[(y_i^*, j)] = (y_i, j)$ si $(i, j) \in \chi$, és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abscisses. La seva restricció a $Z(P^*) \setminus \Delta^*$ produeix una aplicació bijectiva entre $Z(P^*) \setminus \Delta^*$ i $Z(P)$, que també conserva derivacions i conserva 1-abscisses. Per tant, si P és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* , aleshores

$$Z(P) \sim Z(P^*) \setminus \Delta^* \tag{7.6}$$

Definició 7.2. Sigui P^* el polinomi (7.1). Un subconjunt $\Delta^* \subseteq Z(P^*)$ és *eliminable* si per a tot $\delta > 0$ existeix un polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, amb $|a_k - a_k^*| < \delta$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, tal que P elimina Δ^* . És a dir, Δ^* és eliminable si existeixen pertorbacions de P^* , tan pròximes com vulguem a P^* , que eliminen Δ^* .

Per altra banda, un subconjunt $\Delta^* \subseteq Z(P^*)$ és *parell* si la multiplicitat en $Z(P^*)$ dels nodes de Δ^* és parell. Com a exemple, els nodes encerclats de la figura 7.1 constitueixen un subconjunt parell de $Z(P^*)$, i el conjunt buit $\Delta^* = \emptyset$ sempre és parell. En termes del conjunt χ' de (7.5), Δ^* és parell si i només si $j_i + m_i - j$ és parell per a tot $(i, j) \in \chi'$.

Tenint en compte les definicions anteriors, tot seguit presentem un resum dels continguts del capítol que, de forma breu, direm que gira entorn de la caracterització dels subconjunts eliminables de $Z(P^*)$, i està dividit en quatre seccions. A les tres primeres hi ha els continguts necessaris per obtenir els resultats principals del capítol.

- A la primera secció introduïrem el concepte de caps complementàriament regulars i analitzarem la seva existència.
- La secció següent conté un resultat general sobre pertorbacions de polinomis que serà utilitzat més endavant.
- La tercera secció està dedicada a les conseqüències del teorema 1.23, com són: la que estableix que tot subconjunt eliminable de $Z(P^*)$ és parell, i la que dóna un criteri suficient per demostrar que una pertorbació de P^* elimina un subconjunt parell de $Z(P^*)$.

- Finalment, l'última secció conté els resultats principals del capítol, on s'estableix que els subconjunts eliminables de $Z(P^*)$ coincideixen amb els subconjunts parells. Notem que això caracteritza els subconjunts eliminables de $Z(P^*)$. A més, també generalitzarem el fet que tot subconjunt parell de $Z(P^*)$ és eliminable establint que tot subconjunt parell es pot eliminar per una pertorbació P de P^* que verifica, a més a més, altres propietats.

7.1 Caps complementàriament regulars

Signin $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ i h el nombre de peus de $Z(P^*)$. Els nombres n, h i $\sharp Z(P^*)$ estan lligats per la desigualtat

$$n + h > \sharp Z(P^*) \quad (7.7)$$

En efecte, per veure (7.7) és suficient demostrar la desigualtat $\ell_N + h > \sharp N$, on N és una configuració completa i h és el nombre de peus de N . Aquesta desigualtat és trivial degut a que si escollim un peu de cada grup interior o atípic de N , i tenim en compte que el nombre de grups atípics de N de derivació no nul·la coincideix amb el nombre τ_N de (2.17), obtindrem $h \geq e_N + \tau_N + \delta$, on $\delta = 1$ si $m_N(0) \geq 1$ i $\delta = 0$ si $m_N(0) = 0$. Finalment, de la fórmula de la longitud resulta

$$\ell_N + h \geq \ell_N + e_N + \tau_N + \delta = \sharp N + 2\tau_N + \delta > \sharp N$$

donat que no es pot donar simultàniament $\tau_N = \delta = 0$. En definitiva $\ell_N + h > \sharp N$ i per tant (7.7) queda establert.

Definició 7.3. Sigui h_0 un nombre natural complint

$$(\sharp Z(P^*) - n)_+ \leq h_0 < h \quad (7.8)$$

Tal h_0 existeix en virtut de (7.7). Direm que h_0 caps de $Z(P^*)$, $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^* \in Z(P^*)$, són *complementàriament regulars*, si la matriu de Vandermonde amb n columnes de la configuració $A = Z(P^*) \setminus \{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*\}$ té rang igual a $\sharp A$, que coincideix amb el seu nombre de files.

Observem en primer lloc que la matriu $V_n(A)$ té sempre com a mínim tantes columnes com files, ja que el nombre de files de $V_n(A)$ és $\sharp Z(P^*) - h_0$, el nombre de nodes de A , mentre que de (7.8) es desprèn que $\sharp Z(P^*) - h_0 \leq \sharp Z(P^*) - (\sharp Z(P^*) - n)_+ \leq n$. En segon lloc, el fet que els caps $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*$ siguin complementàriament regulars només depèn del conjunt $\{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*\}$.

Com a exemple, si $P^*(x) = \frac{1}{2!}(x^2 - 1)$ aleshores $Z(P^*) = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ i $(\#Z(P^*) - n)_+ = 1$. Tots els nodes de $Z(P^*)$ són caps de $Z(P^*)$, mentre que la condició (7.8) estableix $1 \leq h_0 < 3$. Prenent $h_0 = 1$ i considerant un node qualsevol de $Z(P^*)$, un breu càlcul de rangs mostra que aquest node és complementàriament regular.

Un cas en el que podem determinar fàcilment caps que siguin complementàriament regulars és quan $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració. Si $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració, de la fórmula de la longitud i de $\tau_{Z(P^*)} = 0$ resulta

$$(\#Z(P^*) - n)_+ = (e_{Z(P^*)} - \tau_{Z(P^*)})_+ = e_{Z(P^*)}.$$

Proposició 7.4. *Suposem que $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració. Siguin $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{h_0}^*$ els peus de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar i derivació diferent de zero. Aleshores $h_0 = e_{Z(P^*)} = (\#Z(P^*) - n)_+$ i els caps $\beta_i^* = \text{cap}_{Z(P^*)}[\alpha_i^*]$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars.*

Demostració. Pel lema 4.9, els peus de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar i derivació diferent de zero coincideixen amb els nodes de la forma $\sigma_{Z(P^*)}(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior de $Z(P^*)$. Això implica dues coses. Primera, que $h_0 = e_{Z(P^*)} = (\#Z(P^*) - n)_+$, i segona, que la configuració

$$A = Z(P^*) \setminus \{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*\}$$

és l'esquelet associat a $Z(P^*)$, ja que aquest esquelet consistia en treure precisament tots els caps dels nodes de la forma $\sigma_{Z(P^*)}(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior de $Z(P^*)$. Per la proposició 4.11 sabem que l'esquelet A té n nodes i és regular, i per tant, la matriu $V_n(A)$ és quadrada, coincideix amb la matriu de Vandermonde de A , i és regular. En particular el seu rang coincideix amb el seu nombre de files, resultant que els caps β_i^* , $1 \leq i \leq h_0$, són complementàriament regulars. \square

Tot seguit enunciem un resultat general sobre el rang de matrius de Vandermonde que proporcionarà, d'una banda, un criteri per determinar caps complementàriament regulars de $Z(P^*)$, i d'altra, una generalització del resultat anterior en el cas que $Z(P^*)$ no és \mathcal{B} -configuració.

Sigui A una configuració de longitud ℓ , i sigui p el nombre de peus suportats de A que tenen multiplicitat senar. Clarament, A és quasi-conservativa si i només si $p = 0$. Per a un nombre natural $j = 0, 1, \dots, \ell - 1$, o bé $j = -1$, sigui $S_A(j)$ el nombre de peus suportats de A que tenen multiplicitat senar i derivació més petita

o igual que $j + 1$. Es compleix que

$$0 = S_A(-1) \leq S_A(0) \leq S_A(1) \leq \dots \leq S_A(\ell - 2) = S_A(\ell - 1) = p \quad (7.9)$$

El nombre

$$\vartheta = \max_{-1 \leq j \leq \ell - 1} \{j + 1 - M_A(j) - S_A(j)\} \quad (7.10)$$

es coneix amb el nom de *defecte quasi-Pólya* de la configuració A . Observem que, a l'haver inclòs el valor $j = -1$ en (7.10), es té $\vartheta \geq 0$. Per altra banda, si A és una configuració Pólya aleshores $\vartheta = 0$.

A continuació donem una condició suficient per a que la matriu de Vandermonde tingui rang màxim [48].

Teorema 7.5. *Sigui A una configuració. Siguin p i ϑ , respectivament, el nombre de peus suportats de A que tenen multiplicitat senar, i el defecte quasi-Pólya de A . Si n és un nombre natural amb*

$$n \geq \#A + p + \vartheta,$$

aleshores la matriu de Vandermonde de A amb n columnes té rang màxim i igual al seu nombre de files $\#A$. \square

El teorema anterior proporciona un criteri per determinar si uns quants caps de $Z(P^*)$, escollits prèviament, són complementàriament regulars. Per exemple, suposem que $Z(P^*)$ admet la representació geomètrica de la figura 7.2. Els nou nodes marcats amb creus són caps de $Z(P^*)$, i suposem que volem demostrar que aquests caps són complementàriament regulars.

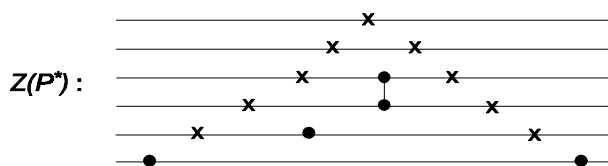


Figura 7.2

Amb tal finalitat, primerament hem de veure que es verifica (7.8) quan $h_0 = 9$. En efecte,

$$n = 6, \quad h = 13, \quad \#Z(P^*) = 14, \quad \text{i} \quad (\#Z(P^*) - n)_+ = 8.$$

Finalment, cal veure que si A és la configuració formada pels nodes marcats amb punts de la figura 7.2 aleshores la matriu de Vandermonde de A , amb $n = 6$

columnes, té rang igual al seu nombre de files $\sharp A$. El teorema 7.5 estableix que per veure això és suficient veure la desigualtat

$$6 \geq \sharp A + p + \vartheta, \quad (7.11)$$

on p i ϑ són, respectivament, el nombre de peus suportats de A que tenen multiplicitat senar, i el defecte quasi-Pólya de A . Donat que $\sharp A = 5$, $p = 1$ (l'únic peu suportat de A que té multiplicitat senar és el node de A que té derivació 1) i $\vartheta = 0$ (A és una configuració Pólya), la desigualtat (7.11) és satisfeta i, per tant, els caps escollits de $Z(P^*)$ són complementàriament regulars.

Corol·lari 7.6. *Siguin $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{h_0}^*$ els peus suportats de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar. Aleshores h_0 verifica (7.8) i els caps $\beta_i^* = \text{cap}_{Z(P^*)}[\alpha_i^*]$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars.*

Comentari 7.7.

1. Aquest corol·lari generalitza la proposició 7.4. En efecte, quan $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració, els peus suportats de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar coincideixen amb els nodes de $Z(P^*)$ de la forma $\sigma_{Z(P^*)}(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior de $Z(P^*)$; o el que és el mateix, coincideixen amb els peus de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar i derivació diferent de zero.
2. Com a conseqüència del corol·lari s'obté que sempre hi ha un nombre natural h_0 satisfent (7.8) de manera que existeixen h_0 caps de $Z(P^*)$ que són complementàriament regulars.

Demostració del corol·lari. Cal veure dues coses. Primera, que el nombre h_0 (i.e., nombre de peus suportats de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar) verifica la condició (7.8). I segona, que la matriu de Vandermode amb n columnes de la configuració

$$A = Z(P^*) \setminus \{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*\}$$

té rang igual al seu nombre de files $\sharp A = \sharp Z(P^*) - h_0$. Anem a veure primer algunes de les propietats de la configuració A .

- (a) A és quasi-conservativa.

En efecte, sigui α un peu suportat de A . Hem de veure que la seva multiplicitat en A és parell. Com que la configuració A està inclosa a $Z(P^*)$ i tots els nodes β_i^* , $i = 1, 2, \dots, h_0$, són caps de $Z(P^*)$, α és un peu suportat de $Z(P^*)$. Poden passar dues coses: que la multiplicitat de α en $Z(P^*)$ sigui senar o que sigui parell. El primer cas es presenta quan α coincideix amb un dels

nodes $\alpha_i^*, i = 1, 2, \dots, h_0$, i consegüentment en aquest cas la multiplicitat de α en A passa a ser parell (els caps $\beta_i^*, i = 1, 2, \dots, h_0$, no són nodes de A), mentre que en el segon cas la multiplicitat de α en A continua essent parell. En definitiva, la multiplicitat de α en A sempre és parell, i per tant A és quasi-conservativa.

(b) Hi ha un esquelet B de $Z(P^*)$ que conté la configuració A .

Per veure aquest fet considerem, per a cada grup $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_{Z(P^*)}^{(\text{int})}$ (grup interior de $Z(P^*)$), un node d'aquest grup, denotat $\alpha_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$, que tingui derivació igual a la derivació de \mathfrak{g} i tal que la seva multiplicitat en $Z(P^*)$ sigui senar. L'existència d'aquest node es deriva del fet que $Z(P^*)$ és una configuració completa. Es compleix que $\alpha_{\mathfrak{g}}$ és un peu suportat de $Z(P^*)$ amb multiplicitat senar, ja que és suportat pels nodes $\sigma_{Z(P^*)}^-(\mathfrak{g}), \sigma_{Z(P^*)}^+(\mathfrak{g})$ que determinen \mathfrak{g} , i per tant $\alpha_{\mathfrak{g}}$ coincideix amb algun $\alpha_i^*, i = 1, 2, \dots, h_0$. Això implica que l'esquelet resultant de treure a $Z(P^*)$ tots els caps de la forma $\text{cap}_{Z(P^*)}[\alpha_{\mathfrak{g}}]$, $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_{Z(P^*)}^{(\text{int})}$, conté la configuració A .

De la propietat (b) es dedueix que el nombre de nodes de A , $\sharp Z(P^*) - h_0$, és més petit o igual que el nombre de nodes de l'esquelet B . El nombre de nodes de B és $n - \tau_{Z(P^*)}$ (veure (4.1)), resultant que $\sharp Z(P^*) - h_0 \leq n - \tau_{Z(P^*)}$; o, equivalentment, $h_0 \geq \sharp Z(P^*) - n + \tau_{Z(P^*)}$. Això últim implica $h_0 \geq (\sharp Z(P^*) - n)_+$ i per tant la condició (7.8) es verifica. Notem que la desigualtat $h_0 < h$ de (7.8) és trivial perquè si considerem un node de $Z(P^*)$ que tingui derivació mínima, aquest node és un peu de $Z(P^*)$ no suportat.

Finalment anem a veure que la matriu $V_n(A)$ té rang igual al seu nombre de files $\sharp A = \sharp Z(P^*) - h_0$. En virtut del teorema 7.5, per demostrar això serà suficient veure la desigualtat

$$n \geq \sharp A + \max_{-1 \leq j \leq \ell_A - 1} \{j + 1 - M_A(j)\} \quad (7.12)$$

Observem que en aquest cas tant p com els nombres $S_A(j), j = 0, 1, \dots$ valen zero, ja que A és quasi-conservativa i es verifica (7.9). La desigualtat (7.12) és equivalent a les desigualtats

$$\sharp A - M_A(j) \leq n - (j + 1), \quad j = 0, 1, \dots, \ell_A - 1, \quad (7.13)$$

però donat que $\sharp A = M_A(n - 1)$ i $\ell_A \leq n$, si demostrem que la funció $m = m_A$ satisfà la condició de Pólya per sobre amb n aleshores les desigualtats (7.13) es compliran, i per tant ja haurem acabat.

Anem a veure doncs que la funció m_A satisfà la condició de Pólya per sobre amb n . Per la propietat (b) anterior sabem que hi ha un esquelet B de $Z(P^*)$ que conté la configuració A . Del corol·lari 4.6 es deriva que $m_B^o(j) = 0$ per a $j \geq n$, i per tant la funció nivell m_B^o satisfà la condició de Pólya per sobre amb n . El teorema 1.12 (ii) assegura que m_B també la satisfà i com que B conté A (i en particular $m_A \leq m_B$), m_A també la satisfà. Això completa la demostració. \square

7.2 Un teorema sobre pertorbacions de polinomis

En el que segueix utilitzarem el següent conveni. Si $\{z_{ij}\}_{(i,j) \in \chi}$ són nombres reals, on χ és un subconjunt finit de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la notació $(z_{ij})_{(i,j) \in \chi}$ representarà el vector de $\mathbb{R}^{\#\chi}$ que té per components els nombres z_{ij} ordenats amb l'ordre lexicogràfic sobre els parells (i, j) . És a dir, $(i, j) < (i', j')$ si $i < i'$, o $i = i'$ i $j < j'$. Explícitament, si

$$\chi = \{(k_1, p_1), (k_2, p_2), \dots, (k_m, p_m)\}, \text{ amb } (k_1, p_1) < (k_2, p_2) < \dots < (k_m, p_m),$$

aleshores $(z_{ij})_{(i,j) \in \chi} = (z_{k_1, p_1}, z_{k_2, p_2}, \dots, z_{k_m, p_m})$. Quan χ és el conjunt definit a (7.4), es té

$$(z_{ij})_{(i,j) \in \chi} = (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} = (z_{1, j_1}, z_{1, j_1+1}, \dots, z_{1, j_1+m_1-1}, z_{2, j_2}, z_{2, j_2+1}, \dots, \dots, z_{2, j_2+m_2-1}, \dots, z_{h, j_h}, z_{h, j_h+1}, \dots, z_{h, j_h+m_h-1})$$

essent el nombre de components del vector $(z_{ij})_{(i,j) \in \chi}$ igual a $\#Z(P^*)$.

Teorema 7.8. *Considerem el polinomi $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Siguin (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, els peus de $Z(P^*)$ diferents dos a dos, i sigui m_i la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$. Suposem que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars, on h_0 és un nombre natural satisfent (7.8).*

Existeixen dos oberts $U \subseteq \mathbb{R}^{h-h_0}$, $V \subseteq \mathbb{R}^{\#Z(P^)}$, amb $(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*) \in U$, $\vec{0} \in V$, i funcions analítiques reals*

$$\begin{aligned} a_k &: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ y_i &: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, h_0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

tals que:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_k(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*; \vec{0}) &= a_k^*, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ y_i(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*; \vec{0}) &= y_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, h_0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

(2) Si $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$, aleshores el polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ verifica les igualtats

$$P[(y_i, j)] = z_{ij}, \quad 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1 \quad (7.16)$$

Aquí els coeficients a_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, i les abscisses y_i , $i = 1, 2, \dots, h_0$, són el valor de les funcions (7.14) en el punt $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) \in U \times V$. És a dir,

$$\begin{aligned} a_k &= a_k(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}), \quad k = 0, \dots, n-1 \\ y_i &= y_i(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}), \quad i = 1, \dots, h_0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Demostració. Per a cada $i = 1, 2, \dots, h$, i cada $j = j_i, j_i + 1, \dots, j_i + m_i - 1$, sigui

$$F_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{\#Z(P^*)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la funció definida per

$$F_{ij}(\vec{a}; \vec{y}; (z_{i'j'})_{i'=1; j'=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) = P[(y_i, j)] - z_{ij}, \quad (7.18)$$

on P és el polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ és un vector de \mathbb{R}^n , $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_h)$ és un vector de \mathbb{R}^h , i $(z_{i'j'})_{i'=1; j'=j_i}^{h; j_i+m_i-1}$ és un vector de $\mathbb{R}^{\#Z(P^*)}$ amb components ordenades segons l'ordre lexicogràfic sobre els parells (i', j') . El terme $P[(y_i, j)]$ de (7.18) és el valor del polinomi P en el node (y_i, j) , que explícitament és

$$P[(y_i, j)] = P^{(j)}(y_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{y_i^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{y_i^{n-j}}{(n-j)!} \quad (7.19)$$

La funció F_{ij} no depèn de les variables $y_{i'}$ si $i' \neq i$, i tampoc de les variables $z_{i'j'}$ si $(i', j') \neq (i, j)$. Per altra banda, la substitució de (7.19) en (7.18) posa de manifest que F_{ij} és un polinomi de diverses variables i, en particular, és una funció analítica real. A més a més $F_{ij}(a_0^*, \dots, a_{n-1}^*; y_1^*, \dots, y_h^*; \vec{0}) = 0$. En efecte, quan $\vec{a} = (a_0^*, \dots, a_{n-1}^*)$ el polinomi P passa a ser P^* i per tant $P[(y_i, j)] - z_{ij} = P^*[(y_i^*, j)] - 0 = 0$. Aquesta última igualtat és deguda a que $(y_i^*, j) \in Z(P^*)$.

Sigui ara

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{\#Z(P^*)} \longrightarrow \mathbb{R}^{\#Z(P^*)}$$

la funció tal que les seves funcions components són les F_{ij} , $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, on aquestes components estan ordenades lexicogràficament. És a dir,

$$F = (F_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} = (F_{1j_1}, \dots, F_{1,j_1+m_1-1}, \dots, F_{h,j_h}, \dots, F_{h,j_h+m_h-1}).$$

La funció F és analítica real i $F(a_0^*, \dots, a_{n-1}^*; y_1^*, \dots, y_h^*; \vec{0}) = \vec{0}$. En el que segueix, per simplificar notacions, considerarem el punt

$$\vec{p} = (a_0^*, \dots, a_{n-1}^*; y_1^*, \dots, y_h^*; \vec{0})$$

que serà anomenat punt inicial. Aquest punt verifica $F(\vec{p}) = \vec{0}$.

Tot seguit calcularem el jacobià de F respecte de les variables $a_0, \dots, a_{n-1}, y_1, \dots, y_{h_0}$, i l'avaluarem en el punt inicial \vec{p} . Aquest jacobià és la matriu

$$M = \frac{\partial F}{\partial(a_0, \dots, a_{n-1}; y_1, \dots, y_{h_0})} \Big|_{\vec{p}}.$$

El nombre de files de M és igual a $\#Z(P^*)$, el nombre de components de F . En canvi, el seu nombre de columnes és $n+h_0$. De (7.8) es dedueix que $n+h_0 \geq \#Z(P^*)$ i per tant M té com a mínim tantes columnes com files. Per al càlcul de M cal derivar cada funció component F_{ij} respecte de cada variable.

(i) Derivant respecte de a_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, resulta

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial a_k} \Big|_{\vec{p}} = \frac{y_i^{k-j}}{(k-j)!} \Big|_{\vec{p}} = \frac{(y_i^*)^{k-j}}{(k-j)!} \quad (7.20)$$

La primera igualtat de (7.20) s'obté de substituir (7.19) en (7.18). Així,

$$\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial a_0} \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial a_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial a_{n-1}} \right) \Big|_{\vec{p}} = \left(\frac{(y_i^*)^{-j}}{(-j)!} \quad \frac{(y_i^*)^{1-j}}{(1-j)!} \quad \dots \quad \frac{(y_i^*)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \right).$$

Aquesta última fila és la fila corresponent al node $(y_i^*, j) \in Z(P^*)$ de la matriu de Vandermonde $V_n(Z(P^*))$. D'això resulta que

$$\frac{\partial F}{\partial(a_0, \dots, a_{n-1})} \Big|_{\vec{p}} = V_n(Z(P^*)).$$

Com que les components de F estan ordenades lexicogràficament, les files de la matriu $V_n(Z(P^*))$ estan ordenades amb el següent ordre sobre els nodes de $Z(P^*)$:

$$(y_1^*, j_1) < (y_1^*, j_1 + 1) < \dots < (y_1^*, j_1 + m_1 - 1) < (y_2^*, j_2) < (y_2^*, j_2 + 1) < \dots < (y_h^*, j_h) < (y_h^*, j_h + 1) < \dots < (y_h^*, j_h + m_h - 1).$$

(ii) Derivant respecte de $y_{i'}$ si $i' \neq i$, s'obté

$$\left. \frac{\partial F_{ij}}{\partial y_{i'}} \right|_{\vec{p}} = 0$$

donat que F_{ij} no depèn de la variable $y_{i'}$.

(iii) Derivant respecte de y_i resulta

$$\left. \frac{\partial F_{ij}}{\partial y_i} \right|_{\vec{p}} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{(y_i^*)^{k-(j+1)}}{(k-(j+1))!} + \frac{(y_i^*)^{n-(j+1)}}{(n-(j+1))!} = P^*[(y_i^*, j+1)].$$

Quan $j < j_i + m_i - 1$ tindrem $P^*[(y_i^*, j+1)] = 0$, ja que $(y_i^*, j+1) \in Z(P^*)$. En canvi, si $j = j_i + m_i - 1$ aleshores $P^*[(y_i^*, j+1)]$ és diferent de zero donat que $(y_i^*, j_i + m_i) \notin Z(P^*)$.

En definitiva, la matriu M és de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial (a_0, \dots, a_{n-1})} & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_{h_0}} \\ \hline \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{h_0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

on els nombres $c_i, i = 1, 2, \dots, h_0$, són nombres reals no nuls situats en les files que corresponen als nodes $(y_i^*, j_i + m_i - 1), i = 1, \dots, h_0$, de la matriu $V_n(Z(P^*))$. En el que segueix farem ús del següent resultat.

Lema 7.9. *M té rang màxim i igual al seu nombre de files $\#Z(P^*)$.*

Demostració. L'expressió de les últimes h_0 columnes de M (columnes corresponents a les derivades respecte y_1, y_2, \dots, y_{h_0}), mostra que aquestes columnes sempre es poden incloure en un menor maximal de M , ja que cadascuna d'elles està formada per zeros excepte una entrada. Així que el rang de M és màxim si i només si la matriu que resulta de suprimir les últimes h_0 columnes de M i les files corresponents a les entrades c_1, c_2, \dots, c_{h_0} , també té rang màxim. Aquesta nova matriu és $V_n(A)$, la matriu de Vandermonde amb n columnes de la configuració

$$A = Z(P^*) \setminus \{(y_i^*, j_i + m_i - 1) \mid i = 1, 2, \dots, h_0\}.$$

Com que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1), i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars, $V_n(A)$ té rang màxim i per tant M també té rang màxim. \square

Tenim doncs que M té rang igual al seu nombre de files $\#Z(P^*)$. Per altra banda $F(\vec{p}) = \vec{0}$ i F és una funció analítica real. El teorema de la funció implícita estableix que si considerem un menor maximal de M no nul, aleshores les variables $a_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$, o $y_i, i = 1, 2, \dots, h_0$, tals que les columnes $\frac{\partial F}{\partial a_k}$ o $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ intervenen en aquest menor, poden posar-se en funció de les variables restants. Si una variable $a_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$, o $y_i, i = 1, 2, \dots, h_0$, és tal que la columna $\frac{\partial F}{\partial a_k}$ o $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ no intervé en el menor maximal, encara que sigui una variable independent la podem considerar dependent fent-li correspondre el valor constant $a_k = a_k^*$ o $y_i = y_i^*$. Tenint això en compte, obtindrem un entorn obert U del punt $(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*) \in \mathbb{R}^{h-h_0}$, un entorn obert V del punt $\vec{0} \in \mathbb{R}^{\#Z(P^*)}$, i funcions diferenciables

$$\begin{aligned} a_k & : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \\ y_i & : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, h_0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

tals que satisfan la condició (1) de l'enunciat i tals que si $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{i'j'})_{i'=1; j'=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$, aleshores

$$F(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; y_1, y_2, \dots, y_{h_0}, y_{h_0+1}, \dots, y_h; (z_{i'j'})_{i'=1; j'=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) = \vec{0} \quad (7.22)$$

on els nombres $a_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$ i els $y_i, i = 1, 2, \dots, h_0$, estan definits com en (7.17). Desglossant ara la igualtat (7.22) component a component, i recordant la

definició (7.18) de les funcions F_{ij} , s'acaba obtenint la condició (2) de l'enunciat. Finalment, que les funcions (7.21) són analítiques reals és conseqüència del fet que F ho és. \square

El teorema anterior essencialment mostra que existeixen pertorbacions de P^* tals que sobre els nodes de la configuració

$$\{(y_i, j) \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\}$$

prenen valors petits i prefixats z_{ij} . Els nombres y_i , $i = 1, 2, \dots, h$, són pròxims als y_i^* , i d'aquests, els $h - h_0$ últims (i.e. $y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h$) es poden prefixar localment.

Així, les variables y_i , $i = h_0 + 1, h_0 + 2, \dots, h$, i les variables z_{ij} , $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, poden ésser considerades com a variables independents (localment es poden prefixar). En total de variables independents n'hi ha $h - h_0 + \sharp Z(P^*)$, i per tant, com més petit sigui h_0 més variables independents tindrem. Això fa que interressi trobar h_0 caps de $Z(P^*)$ complementàriament regulars, on h_0 és el nombre natural més petit satisfent (7.8). És a dir, $h_0 = (\sharp Z(P^*) - n)_+$. Observem que quan $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració, la proposició 7.4 estableix que aquest nombre mínim de caps complementàriament regulars és assolible.

7.3 Resultats addicionals

Aquest apartat conté resultats sobre pertorbacions del polinomi P^* que es deriven, essencialment, del teorema 1.23. En el que segueix $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, essent (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, els peus de $Z(P^*)$ diferents dos a dos, i m_i la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) .

Lema 7.10. *Existeixen dos nombres reals $\varepsilon_0 > 0$ i $\delta_0 > 0$, amb $\varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P^*)}$, tals que tot polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ satisfent $|a_k - a_k^*| < \delta_0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, verifica les condicions següents:*

- (a) *Si $(y, j) \in Z(P)$, existeix un node $(y_i^*, j) \in Z(P^*)$, $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, de manera que $|y - y_i^*| < \varepsilon_0$.*
- (b) *Per a tot $(y_i^*, j) \in Z(P^*)$, $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, existeix un nombre*

parell $\sigma \geq 0$ tal que

$$\sum_{\substack{(y,j) \in Z(P) \\ |y-y_i^*| < \varepsilon_0}} \text{mult}_{Z(P)}[(y,j)] = \text{mult}_{Z(P^*)}[(y_i^*,j)] - \sigma = j_i + m_i - j - \sigma \quad (7.23)$$

- (c) Per a tot $i = 1, 2, \dots, h$, i per a tot nombre real y de l'interval $[y_i^* - \varepsilon_0, y_i^* + \varepsilon_0]$, el nombre $P[(y, j_i + m_i)]$ és diferent de zero i té el mateix signe que el nombre $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$. En particular aquest signe no depèn de y .

Demostració. Els polinomis de la forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ convergeixen uniformement a P^* quan els coeficients a_k convergeixen als a_k^* , $k = 0, \dots, n-1$. Podem considerar, per tant, un $\delta' > 0$ i un $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < \varepsilon_{Z(P^*)}$, de manera que si $|a_k - a_k^*| < \delta'$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, aleshores per a tot $i = 1, 2, \dots, h$, i tot $y \in \mathbb{R}$ amb $|y - y_i^*| \leq \varepsilon'$, el signe de $P[(y, j_i + m_i)]$ és igual al signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$. Aquest fet mostra que si en l'enunciat del lema prenem $\delta_0 \leq \delta'$ i $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'$, aleshores la condició (c) es verifica.

Les condicions (a) i (b) són conseqüència d'aplicar el teorema 1.23 al polinomi P^* . En efecte, d'aquest teorema es deriva l'existència d'un nombre real $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'$, i d'un $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \leq \delta'$, tals que tot polinomi del tipus $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, $|a_k - a_k^*| < \delta_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, verifica les condicions (a) i (b) del present lema (aquestes condicions no són res més que les condicions (i) i (ii) de teorema 1.23), completant així la demostració. \square

Una conseqüència del resultat anterior és el següent corol·lari.

Corol·lari 7.11. *Sigui Δ^* un subconjunt eliminable de $Z(P^*)$. Aleshores Δ^* és parell.*

Demostració. Siguin ε_0 i δ_0 els nombres del lema 7.10 i sigui $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, amb $|a_k - a_k^*| < \delta_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, una pertorbació de P^* que elimina Δ^* . L'espectre de P ve donat en (7.3), on els y_i són nombres reals tals que $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}$, $i = 1, 2, \dots, h$. En particular, si (y_i^*, j) , $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, és un node que pertany a Δ^* , aleshores a $Z(P)$ no hi ha nodes de la forma (y, j) amb $|y - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}$. Donat que $\varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P^*)}$, a $Z(P)$ tampoc hi ha nodes de la forma (y, j) , $|y - y_i^*| < \varepsilon_0$, i per tant en aquest cas el primer terme de (7.23) és igual a zero. Això implica que el nombre $\text{mult}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j)] = \sigma$ és parell. En definitiva, hem vist que tots els nodes de Δ^* tenen en $Z(P^*)$ multiplicitat parell, i per tant que Δ^* és parell. \square

El següent lema conté una propietat sobre funcions reals de variable real que serà necessària més endavant. Aquesta propietat es prova de manera elemental utilitzant el teorema del valor mitjà i el teorema de Darboux.

Lema 7.12. *Sigui $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable, on I és un interval obert de \mathbb{R} . Suposem que f té un mínim en el punt $a \in I$, que $f(a) > 0$ i que b és un altre punt de I amb $f(b) = 0$. Aleshores existeix un punt $c \in I$, $\min\{a, b\} < c < \max\{a, b\}$, tal que $f'(c) = 0$. Anàlogament, si f té un màxim en el punt $a \in I$, $f(a) < 0$ i b és un altre punt de I amb $f(b) = 0$, aleshores existeix un punt $c \in I$, $\min\{a, b\} < c < \max\{a, b\}$, de manera que $f'(c) = 0$. \square*

La següent proposició proporciona un senzill criteri per assegurar que una pertorbació P de P^* elimina un subconjunt parell de $Z(P^*)$.

Proposició 7.13. *Siguin $\varepsilon_0 > 0$ i $\delta_0 > 0$ els nombres del lema 7.10, $\varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P^*)}$, i sigui Δ^* un subconjunt parell de $Z(P^*)$. Considerem nombres reals y_1, y_2, \dots, y_h tals que $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, h$. Sigui $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ un polinomi amb $|a_k - a_k^*| < \delta_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

Suposem que es verifiquen les següents condicions:

- (i) $P[(y_i, j)] = 0$ per a tots aquells i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, tals que $(y_i^*, j) \notin \Delta^*$.
- (ii) Si i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, són tals que $(y_i^*, j) \in \Delta^*$, aleshores $P[(y_i, j)]$ és diferent de zero i té el mateix signe que el nombre $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$.

Lavors, l'espectre de P ve donat per

$$Z(P) = \{(y_i, j) \mid (y_i^*, j) \notin \Delta^*, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \quad (7.24)$$

i, en particular, P és una pertorbació de P^ que elimina Δ^* .*

Comentari 7.14. En virtut del teorema 2.18, el signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$ és igual a $\text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j_i + m_i)]$, el signe del node $(y_i^*, j_i + m_i)$ en $Z(P^*)$, i per tant, aquest signe és fàcilment determinable a partir del test dels signes de la configuració $Z(P^*)$.

Demostració de la proposició. Per hipòtesi es verifica la inclusió \supseteq de (7.24), així que només cal veure la inclusió \subseteq . Procedirem per reducció a l'absurd suposant que

existeixen nodes de $Z(P)$ que no pertanyen a la configuració del segon costat de (7.24). Sigui $(y, j) \in Z(P)$ un d'aquests nodes amb derivació j màxima possible. Pel lema 7.10 (a) sabem que existeix un node $(y_i^*, j) \in Z(P^*)$, $i = 1, 2, \dots, h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, de manera que $|y - y_i^*| < \varepsilon_0$. Hi ha dues possibilitats:

- **Cas 1:** $(y_i^*, j) \notin \Delta^*$.

Per hipòtesi es verifica $P[(y_i, j)] = 0$. Això implica $P^{(j)}(y_i) = 0 = P^{(j)}(y)$ i a més a més $y \neq y_i$. Aquest últim fet és degut a que el node (y_i, j) pertany a la configuració del segon costat de (7.24), mentre que el node (y, j) no hi pertany. El teorema de Rolle assegura que hi ha un punt c comprès estrictament entre y_i i y tal que $P^{(j+1)}(c) = 0$. En particular $(c, j+1) \in Z(P)$. L'abscissa c verifica $c \neq y_i$ i

$$\begin{aligned} y_i^* - \varepsilon_{Z(P^*)} < y_i^* - \varepsilon_0 < \min\{y_i, y\} < c \\ < \max\{y_i, y\} < y_i^* + \varepsilon_0 < y_i^* + \varepsilon_{Z(P^*)} \end{aligned} \quad (7.25)$$

D'això, juntament amb les desigualtats $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_0 < \varepsilon_{Z(P^*)}$, $i = 1, 2, \dots, h$, es desprèn que el node $(c, j+1)$ no pot pertànyer a la configuració del segon costat de (7.24), entrant en contradicció amb que el node (y, j) té derivació màxima possible.

- **Cas 2:** $(y_i^*, j) \in \Delta^*$.

Per hipòtesi el nombre $P[(y_i, j)]$ és diferent de zero (i conseqüentment $y \neq y_i$, ja que $P[(y, j)] = 0$) i té signe igual al signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$. Sigui ara j' el nombre natural més petit possible per al qual

$$P[(y_i, j+1)] = P[(y_i, j+2)] = \dots = P[(y_i, j'-1)] = 0, \quad P[(y_i, j')] \neq 0 \quad (7.26)$$

El nombre j' compleix $j+1 \leq j' \leq j_i + m_i$, puix que del lema 7.10 (c) resulta $P[(y_i, j_i + m_i)] \neq 0$. A més a més,

- Els nombres $P[(y_i, j)]$ i $P[(y_i, j')]$ tenen el mateix signe i igual al signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$.
- $j' - j$ és un nombre parell.

En efecte, si $j' = j_i + m_i$ la propietat (i) és conseqüència del lema 7.10 (c), mentre que la propietat (ii) prové de que Δ^* és parell (en aquest cas $j' - j = j_i + m_i - j$ és un nombre parell). Quan $j' < j_i + m_i$ la propietat (i) es deriva de la hipòtesi (ii) de la present proposició, ja que el signe de $P[(y_i, j')]$ també ha de coincidir amb el signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$, mentre que la propietat (ii) prové d'utilitzar altre cop que Δ^* és parell (en aquest cas

$j' - j = (j_i + m_i - j) - (j_i + m_i - j')$, que és la diferència de dos nombres parells).

De (7.26), de les propietats (i) i (ii) anteriors, i de la fórmula de Taylor aplicada a la funció $f = P^{(j)}$ en el punt y_i , es deriva que si $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)] > 0$ aleshores la funció f té un mínim en y_i , mentre que si $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)] < 0$ aleshores f té un màxim en y_i . Així, la funció f verifica les hipòtesis del lema 7.12 quan $a = y_i$ i $b = y$, resultant que existeix un punt c , $\min\{y_i, y\} < c < \max\{y_i, y\}$, tal que $f'(c) = 0$; o equivalentment, $P[(c, j + 1)] = 0$. Obtenim d'aquesta forma un nou node $(c, j + 1) \in Z(P)$ tal que la seva abscissa torna a complir les desigualtats (7.25) i $c \neq y_i$. Això torna a implicar que el node $(c, j + 1)$ no pot pertànyer a la configuració del segon costat de (7.24), entrant en contradicció amb el fet que (y, j) té derivació màxima possible.

Amb això s'acaba la demostració. □

7.4 Teoremes sobre eliminació de nodes

En aquesta secció establirem els resultats principals sobre eliminació de nodes.

Sigui $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Suposem que els nodes (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, són els peus de $Z(P^*)$ diferents dos a dos, i sigui m_i la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$. Suposem que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars, on h_0 és un nombre natural satisfent (7.8).

El teorema 7.8 assegura que existeixen dos entorns oberts $U \subseteq \mathbb{R}^{h-h_0}$, $V \subseteq \mathbb{R}^{\#Z(P^*)}$, amb $(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*) \in U$ i $\vec{0} \in V$, i funcions analítiques reals $a_k : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $y_i : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, satisfent les propietats (1) i (2) corresponents. Per continuïtat, reduint els entorns U i V si cal, podem suposar que per a tot $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i tot $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$ es verifiquen les desigualtats

$$\begin{aligned} \left| a_k(y_{h_0+1}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) - a_k^* \right| &< \delta_0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ \left| y_i(y_{h_0+1}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) - y_i^* \right| &< \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, h_0 \\ |y_i - y_i^*| &< \varepsilon_0, \quad i = h_0 + 1, \dots, h \end{aligned} \quad (7.27)$$

on $\varepsilon_0 > 0$ i $\delta_0 > 0$ són els nombres del lema 7.10. Observem que les desigualtats $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_0$, $i = h_0 + 1, \dots, h$ de (7.27), provenen de reduir directament l'entorn U i no requereixen de la continuïtat.

Proposició 7.15. *Suposem que els entorns U i V del teorema 7.8 s'han pres suficientment petits per tal que si $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$, aleshores les desigualtats de (7.27) es verifiquin. Sigui Δ^* un subconjunt parell de $Z(P^*)$.*

Siguin $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$, i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$ un vector satisfent les dues condicions següents:

- (i) $z_{ij} = 0$ per a tots aquells i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, tals que $(y_i^*, j) \notin \Delta^*$.
- (ii) Si i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, són tals que $(y_i^*, j) \in \Delta^*$, aleshores z_{ij} és diferent de zero i té el mateix signe que el nombre $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$.

Considerem, per al punt $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h; (z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}) \in U \times V$, els coeficients $a_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, i les abscisses $y_i, i = 1, 2, \dots, h_0$, definits com en (7.17), i sigui P el polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Aleshores,

(a) *L'espectre de P és*

$$Z(P) = \{(y_i, j) \mid (y_i^*, j) \notin \Delta^*, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\}.$$

(b) *P és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* .*

(c) *$P[(y_i, j)] = z_{ij}$ per a tots aquells i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, tals que $(y_i^*, j) \in \Delta^*$.*

Demostració. Només cal aplicar l'apartat (2) del teorema 7.8, que assegura que P verifica les igualtats (7.16), i després la proposició 7.13. Observem que aquesta última és aplicable donat que, a l'haver reduït els entorns U i V d'acord amb (7.27), els coeficients del polinomi P verifiquen $|a_k - a_k^*| < \delta_0, k = 0, 1, \dots, n-1$, i les abscisses y_1, y_2, \dots, y_h satisfan $|y_i - y_i^*| < \varepsilon_0, i = 1, 2, \dots, h$. L'apartat (c) es deriva de les igualtats (7.16). \square

Tot seguit donem un resultat que caracteritza tots els subconjunts eliminables de $Z(P^*)$.

Teorema 7.16. *Siguin $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ i Δ^* un subconjunt de $Z(P^*)$. Aleshores, Δ^* és eliminable si i només si Δ^* és parell.*

Demostració. El corol·lari 7.11 estableix que tot subconjunt eliminable és parell. Sigui ara Δ^* un subconjunt parell, i hem de veure que és eliminable. Del corol·lari

7.6 es desprèn que per a cert nombre natural h_0 verificant (7.8), existeixen h_0 caps complementàriament regulars $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^* \in Z(P^*)$. Podem considerar una ordenació dels peus de $Z(P^*)$, (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, de manera que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, coincideixin amb els caps complementàriament regulars $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{h_0}^*$. Amb aquesta ordenació dels peus de $Z(P^*)$, el teorema 7.8 és aplicable.

Signin U i V els entorns obtinguts d'aplicar aquest teorema, i suposem que estan reduïts de manera que les desigualtats (7.27) es verifiquin en tots els punts $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$. Podem escollir dos punts qualssevol, $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$, de manera que el punt $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1}$ compleixi les condicions (i) i (ii) de la proposició 7.15. L'apartat (b) d'aquesta proposició estableix que el polinomi P corresponent és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* , i com que P és tan pròxim com vulguem a P^* (les funcions a_i són contínues), Δ^* és eliminable. \square

Acabarem el capítol amb una versió feble de la proposició 7.15, però suficient per al que necessitarem més endavant. A continuació introduïm la següent terminologia.

Signin (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, els peus de $Z(P^*)$, m_i la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, i Δ^* un subconjunt de $Z(P^*)$. Els conjunts

$$\begin{aligned} \chi &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \\ \chi' &= \{(i, j) \in \chi \mid (y_i^*, j) \in \Delta^*\} \end{aligned} \quad (7.28)$$

han estat considerats a (7.4) i (7.5). El seu nombre d'elements és $\sharp Z(P^*)$ i $\sharp \Delta^*$ respectivament. En el que segueix, i d'acord amb la terminologia presentada a l'inici de la secció 7.2, la notació $(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'}$ representarà el vector de $\mathbb{R}^{\sharp \chi'}$ tal que les seves components són els nombres reals w_{ij} , i de manera que aquestes components estan ordenades per l'ordre lexicogràfic sobre els parells $(i, j) \in \chi'$.

Signi W el conjunt format pels vectors $(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in \mathbb{R}^{\sharp \chi'}$ tals que cada component seva, w_{ij} , $(i, j) \in \chi'$, és no nul·la i té signe igual al signe de $P^*[(y_i^*, j_i + m_i)]$; o el que és el mateix, el signe de w_{ij} és igual a $\text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j_i + m_i)]$. Explícitament,

$$W = \{(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in \mathbb{R}^{\sharp \chi'} \mid \text{sgn}(w_{ij}) = \text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j_i + m_i)] \text{ si } (i, j) \in \chi'\} \quad (7.29)$$

Per determinar W en cada cas, caldrà fer ús del test dels signes de $Z(P^*)$. Per exemple, en la figura 7.3 (a) hi ha representats un espectre $Z(P^*)$ (correspon als nodes marcats amb punts), un subconjunt parell Δ^* (nodes encerclats) i una

ordenació dels peus de $Z(P^*)$. Observem que, amb el subconjunt Δ^* escollit i aquesta ordenació dels peus de $Z(P^*)$, es té $\Delta^* = \{(y_1^*, 2), (y_4^*, 3)\}$ i per tant $\chi' = \{(1, 2), (4, 3)\}$.

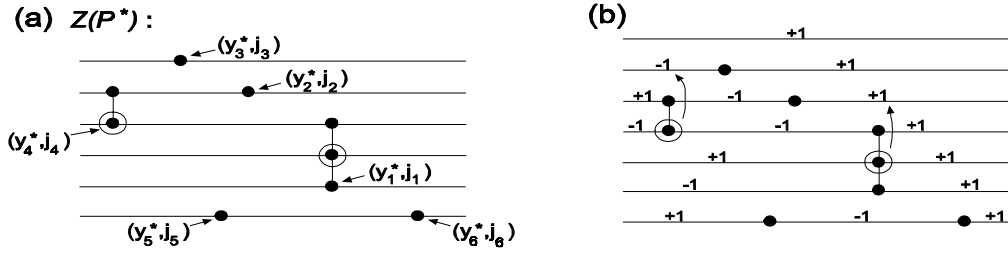


Figura 7.3. Determinació de W .

La part (b) d'aquesta figura conté el test dels signes de $Z(P^*)$. També hi ha indicat, per a cada node $(y_i^*, j) \in \Delta^*$, el seu node corresponent $(y_i^*, j_i + m_i)$ que determina el signe de w_{ij} . Per al node $(y_1^*, 2) \in \Delta^*$ resulta $\text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_1^*, j_1 + m_1)] = +1$, mentre que per al node $(y_4^*, 3) \in \Delta^*$ es té $\text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_4^*, j_4 + m_4)] = -1$. De tot això es desprèn que

$$W = \{(w_{1,2}, w_{4,3}) \in \mathbb{R}^2 \mid w_{1,2} > 0, w_{4,3} < 0\}.$$

En general, per a $\delta > 0$ sigui

$$W_\delta = \{(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in W \mid |w_{ij}| < \delta \text{ si } (i, j) \in \chi'\} \quad (7.30)$$

És a dir, W_δ és la intersecció de W amb el conjunt format pels vectors de $\mathbb{R}^{\#\chi'}$ tals que les seves components tenen valor absolut menor que δ . En l'exemple de la figura 7.3 es té

$$W_\delta = \{(w_{1,2}, w_{4,3}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < w_{1,2} < \delta, -\delta < w_{4,3} < 0\} \quad (7.31)$$

Teorema 7.17. *Considerem el polinomi $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Sigui (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, els peus de $Z(P^*)$ diferents dos a dos, i sigui m_i la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$. Suposem que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars, on h_0 és un nombre natural satisfent (7.8). Sigui Δ^* un subconjunt parell de $Z(P^*)$.*

Existeix un nombre real $\delta > 0$ i funcions analítiques reals $a_k : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $y_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, on W_δ és el conjunt de (7.30), tals que:

(a) Si $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, aleshores

$$\lim_{\substack{\vec{w} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{w} \in W_\delta}} a_k(\vec{w}) = a_k^*, \quad \lim_{\substack{\vec{w} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{w} \in W_\delta}} y_i(\vec{w}) = y_i^* \quad (7.32)$$

(b) Per a tot $\vec{w} \in W_\delta$ es té $|y_i(\vec{w}) - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}$, $i = 1, 2, \dots, h_0$.

(c) Si $\vec{w} = (w_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{X}'} \in W_\delta$, $P_{\vec{w}}$ és el polinomi $P_{\vec{w}}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\vec{w}) \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$, i y_i , $i = 1, 2, \dots, h$, són les abscisses definides per $y_i = y_i(\vec{w})$ si $i = 1, 2, \dots, h_0$, i $y_i = y_i^*$ si $i = h_0 + 1, h_0 + 2, \dots, h$, aleshores l'espectre de $P_{\vec{w}}$ és

$$Z(P_{\vec{w}}) = \{(y_i, j) \mid (y_i^*, j) \notin \Delta^*, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\}; \quad (7.33)$$

$P_{\vec{w}}$ és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* ; i $P_{\vec{w}}[(y_i, j)] = w_{ij}$ per a tots aquells i, j , $1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, tals que $(y_i^*, j) \in \Delta^*$.

Demostració. Siguin $a_k : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i $y_i : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, les funcions del teorema 7.8, on els oberts U i V s'han reduït de manera que les desigualtats (7.27) es verifiquin en tots els punts $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ i $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$. Reduint encara més l'entorn V , podem suposar que V és un interval de la forma $V = (-\delta, \delta)^{\#Z(P^*)}$, on $\delta > 0$ és un nombre real. Si en les funcions anteriors el vector $(y_{h_0+1}, y_{h_0+2}, \dots, y_h) \in U$ es considera constant i igual a $(y_{h_0+1}^*, y_{h_0+2}^*, \dots, y_h^*)$, i les components del vector $(z_{ij})_{i=1; j=j_i}^{h; j_i+m_i-1} \in V$ es prenen de manera que $z_{ij} = 0$ si $(y_i^*, j) \notin \Delta^*$, i $z_{ij} = w_{ij}$ si $(y_i^*, j) \in \Delta^*$, aleshores obtindrem, per restricció, funcions $a_k : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $y_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, satisfent totes les propietats del present teorema. En efecte, l'apartat (a) és trivial a partir de l'apartat (1) del teorema 7.8, l'apartat (b) prové de les desigualtats (7.27), i (c) s'obté com a conseqüència de la proposició 7.15. \square

El teorema anterior, en el cas que $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració, serà de gran importància posteriorment. Observem que en aquest cas, ordenant els peus de $Z(P^*)$, (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, de manera que els h_0 primers coincideixin amb els peus de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar i derivació diferent de zero, aleshores, segons la proposició 7.4, els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars i, en particular, amb aquesta ordenació dels peus de $Z(P^*)$, el teorema 7.17 es pot aplicar.

Com a exemple d'aplicació del teorema 7.17, i continuant amb la figura 7.3, considerem l'espectre $Z(P^*)$, el subconjunt Δ^* i l'ordenació dels peus de $Z(P^*)$ indicats

en aquesta figura. Observem que $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració i que l'ordenació escollida per als peus de $Z(P^*)$ està feta de manera que els h_0 primers coincideixen amb els peus de $Z(P^*)$ que tenen multiplicitat senar i derivació diferent de zero. Aquí $h_0 = e_{Z(P^*)} = 3$ i $n = 6$.

El teorema 7.17 estableix l'existència de funcions analítiques reals $a_k : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, 5$, $y_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, on W_δ és el conjunt (7.31), complint els apartats (a), (b) i (c) del teorema. Per tal de veure el significat de cadascun d'aquests apartats considerem, per a cada $\vec{w} = (w_{1,2}, w_{4,3}) \in W_\delta$, el polinomi $P_{\vec{w}}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\vec{w}) \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. L'apartat (a) mostra que si el vector $\vec{w} \in W_\delta$ tendeix a zero aleshores el polinomi $P_{\vec{w}}$ tendeix a P^* , i que les abscisses $y_i(\vec{w})$, $i = 1, 2, 3$, tendeixen a les abscisses inicials y_i^* . L'apartat (c) estableix que l'espectre de $P_{\vec{w}}$ ve donat per

$$Z(P_{\vec{w}}) = \{(y_1(\vec{w}), 1), (y_1(\vec{w}), 3), (y_2(\vec{w}), 4), (y_3(\vec{w}), 5), (y_4^*, 4), (y_5^*, 0), (y_6^*, 0)\}$$

i que el valor del polinomi $P_{\vec{w}}$ en els nodes $(y_1(\vec{w}), 2)$ i $(y_4^*, 3)$ és, respectivament, $w_{1,2}$ i $w_{4,3}$. Aquest apartat també assegura que $P_{\vec{w}}$ és una pertorbació de P^* que elimina Δ^* . Notem que aquest fet es dedueix immediatament a partir de les desigualtats de l'apartat (b).

Finalment, a la següent figura hi ha representat l'espectre del polinomi $P_{\vec{w}}$, així com el valor de $P_{\vec{w}}$ en els nodes $(y_1(\vec{w}), 2)$ i $(y_4^*, 3)$.

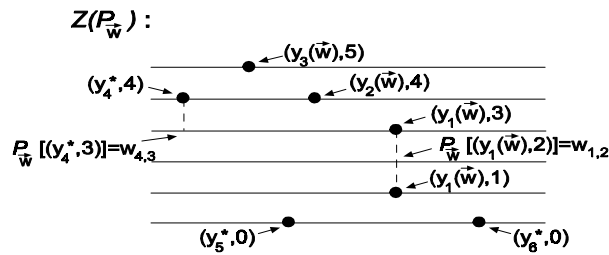


Figura 7.4

Capítol 8

Teorema general de representació

En aquest capítol donarem el *teorema de representació*, que estableix que tota configuració completa és equivalent a un espectre. Amb altres paraules, que l'equivalència \sim té la propietat de representació. Aquest resultat es generalitzarà en el *teorema general de representació*, que mostra que l'espectre es pot escollir satisfent certes condicions addicionals. Finalment, veurem que aquest nombre de condicions addicionals és el nombre màxim de condicions addicionals que en un principi es pot esperar trobar, de manera anàloga al recompte de graus de llibertat obtingut a la secció 6.3.1 per al teorema 6.4.

La primera secció està dedicada a la construcció de la saturació d'una configuració completa i a veure les seves propietats més importants, la segona conté els teoremes de representació i la tercera està dedicada a comptar el nombre de condicions addicionals.

8.1 Saturació d'una configuració completa

En el que segueix N és una configuració completa de longitud n . Si \mathfrak{g} és un grup de N , denotem $j_{\mathfrak{g}}$ la derivació de \mathfrak{g} , i $R_{\mathfrak{g}}$ el conjunt format pels nodes de \mathfrak{g} que tenen derivació $j_{\mathfrak{g}}$ i multiplicitat en N senar. És a dir,

$$R_{\mathfrak{g}} = \{(x, j_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{g} \mid \text{mult}_N[(x, j_{\mathfrak{g}})] \text{ és senar}\} \quad (8.1)$$

Sigui $r_{\mathfrak{g}}$ el cardinal de $R_{\mathfrak{g}}$. Aplicant congruències de nombres enters mòdul dos,

resulta

$$r_{\mathfrak{g}} = \sum_{(x, j_{\mathfrak{g}}) \in R_{\mathfrak{g}}} 1 \stackrel{(2)}{\equiv} \sum_{(x, j_{\mathfrak{g}}) \in R_{\mathfrak{g}}} \text{mult}_N[(x, j_{\mathfrak{g}})] \stackrel{(2)}{\equiv} \sum_{(x, j_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{g}} \text{mult}_N[(x, j_{\mathfrak{g}})] = \sharp \mathfrak{g} .$$

És a dir, la paritat de $r_{\mathfrak{g}}$ coincideix amb la paritat de $\sharp \mathfrak{g}$, però com que N és completa es dedueix que: (i) si \mathfrak{g} és interior, $r_{\mathfrak{g}}$ és senar; (ii) si \mathfrak{g} és exterior, $r_{\mathfrak{g}}$ és parell; (iii) si \mathfrak{g} és atípic de derivació $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$, $r_{\mathfrak{g}}$ és senar; (iv) si \mathfrak{g} és atípic de derivació $j_{\mathfrak{g}} = 0$, $r_{\mathfrak{g}}$ té la mateixa paritat que la longitud n de N . Aquest fet és conseqüència del corol·lari 2.14, ja que amb les notacions d'aquest corol·lari resulta $n_N(0) = \sharp \mathfrak{g} \leq \ell_N - 0 = n$, essent $\sharp \mathfrak{g}$ i n de la mateixa paritat.

Per altra banda, si N era inicialment \mathcal{B} -configuració, aleshores $r_{\mathfrak{g}} = 1$ si \mathfrak{g} és interior i $r_{\mathfrak{g}} = 0$ si \mathfrak{g} és exterior.

Definició 8.1. Tot seguit introduïm, per a cada grup \mathfrak{g} de N que tingui derivació $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$, un conjunt $S_{\mathfrak{g}}$. Aquest conjunt es defineix per casos segons si \mathfrak{g} és interior, exterior o atípic. Abans però, considerem els nodes de $R_{\mathfrak{g}}$ ordenats per ordre creixent d'abscisses. És a dir,

$$R_{\mathfrak{g}} = \{(x_{\mathfrak{g},1}, j_{\mathfrak{g}}), (x_{\mathfrak{g},2}, j_{\mathfrak{g}}), \dots, (x_{\mathfrak{g},r_{\mathfrak{g}}}, j_{\mathfrak{g}})\}, \quad x_{\mathfrak{g},1} < x_{\mathfrak{g},2} < \dots < x_{\mathfrak{g},r_{\mathfrak{g}}} \quad (8.2)$$

1. **Cas \mathfrak{g} interior.** En aquest cas es defineix

$$S_{\mathfrak{g}} = \{(x_{\mathfrak{g},i}, j_{\mathfrak{g}} - 1) \mid i = 1, 2, \dots, r_{\mathfrak{g}}; i \text{ parell}\} \quad (8.3)$$

A la següent figura hi ha representat un grup interior \mathfrak{g} . Els nodes encerclats són els nodes de $R_{\mathfrak{g}}$, mentre que les circumferències són els nodes de $S_{\mathfrak{g}}$.

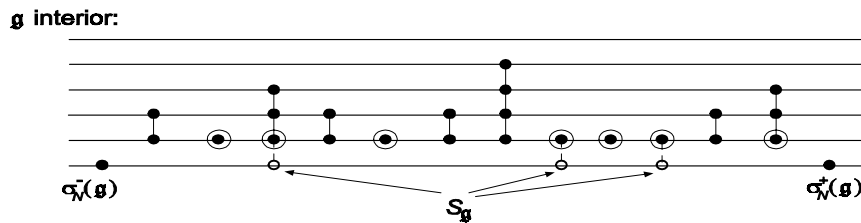


Figura 8.1

2. **Cas \mathfrak{g} exterior.** Segons si \mathfrak{g} és exterior-dret o exterior-esquerra, es defineix

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{g}} &= \{(x_{\mathfrak{g},i}, j_{\mathfrak{g}} - 1) \mid i = 1, 2, \dots, r_{\mathfrak{g}}; i \text{ parell}\} \text{ si } \mathfrak{g} \text{ és exterior-dret,} \\ S_{\mathfrak{g}} &= \{(x_{\mathfrak{g},i}, j_{\mathfrak{g}} - 1) \mid i = 1, 2, \dots, r_{\mathfrak{g}}; i \text{ senar}\} \text{ si } \mathfrak{g} \text{ és exterior-esquerra} \end{aligned} \tag{8.4}$$

A la següent figura hi ha representats un grup exterior-dret i un grup exterior-esquerra. Com abans, els nodes encerclats són els nodes de $R_{\mathfrak{g}}$ mentre que les circumferències són els nodes de $S_{\mathfrak{g}}$:

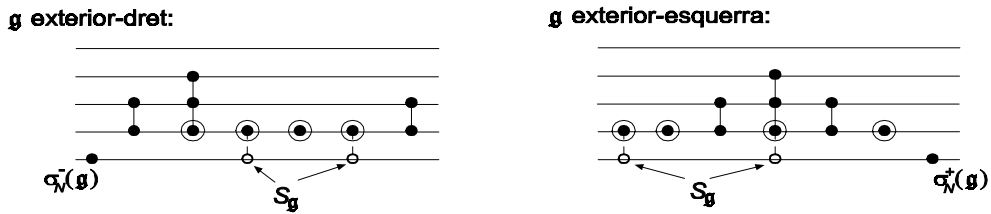


Figura 8.2

3. **Cas \mathfrak{g} atípic de derivació $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$.** En aquest cas

$$S_{\mathfrak{g}} = \{(x_{\mathfrak{g},i}, j_{\mathfrak{g}} - 1) \mid i = 1, 2, \dots, r_{\mathfrak{g}}; i \text{ senar}\} \tag{8.5}$$

A la següent figura hi ha representat un grup atípic de derivació $j_{\mathfrak{g}} \geq 1$, així com el seu conjunt corresponent $S_{\mathfrak{g}}$.

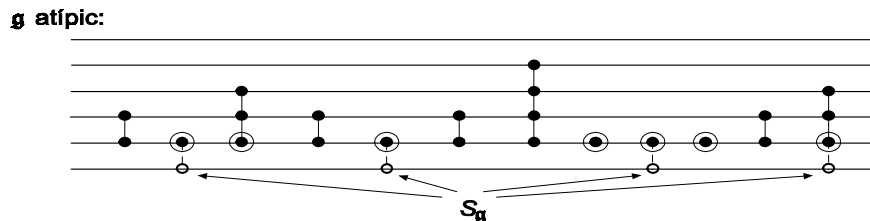


Figura 8.3

Observem que $S_{\mathfrak{g}}$ és el conjunt buit si, i només si, \mathfrak{g} és un grup interior amb $r_{\mathfrak{g}} = 1$, o \mathfrak{g} és un grup exterior amb $r_{\mathfrak{g}} = 0$.

Definició 8.2. Anomenem *saturació de N* a la configuració

$$N^* = N \cup \bigcup_{\substack{\mathfrak{g} \text{ grup de } N, \\ j_{\mathfrak{g}} \geq 1}} S_{\mathfrak{g}} \tag{8.6}$$

Es verifica que $N \subseteq N^*$ i $\ell_{N^*} = \ell_N = n$. Això últim prové del fet que els nodes que s'han afegit a N (és a dir, nodes d'algun $S_{\mathfrak{g}}$) tenen derivació més petita que $n - 1$.

A la figura 8.4 hi ha diversos exemples de configuracions completes N i de les seves saturacions. Els nodes marcats amb punts són els nodes de N , mentre que les circumferències són els nodes de $N^* \setminus N$.

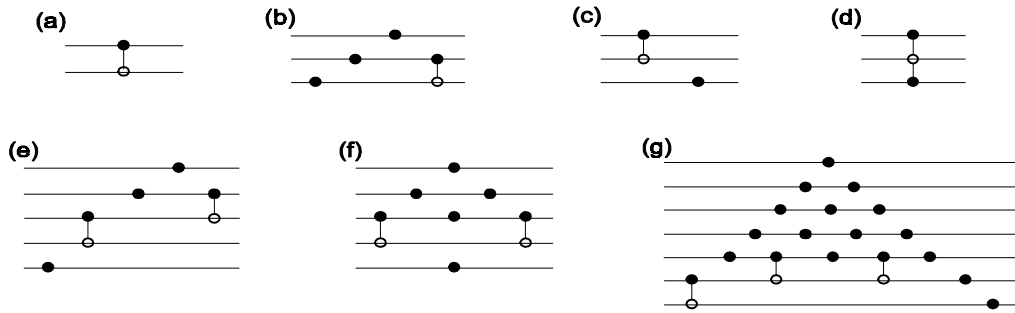


Figura 8.4. Configuracions completes i les seves saturacions.

Un exemple més complex és el següent:

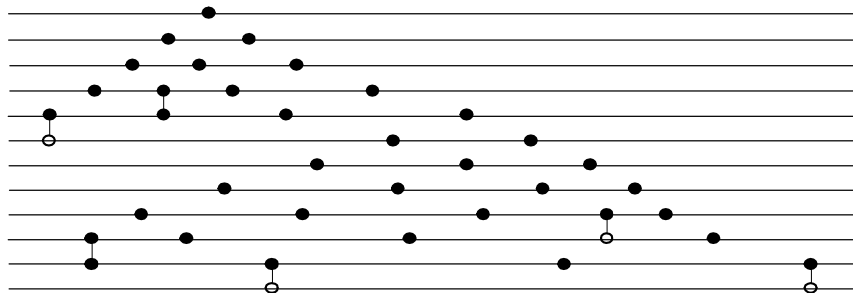


Figura 8.5

Notem que en tots aquests exemples N^* és \mathcal{B} -configuració, i que la multiplicitat en N^* dels nodes de $N^* \setminus N$ és parell.

Lema 8.3. *Considerem la saturació N^* d'una configuració completa N .*

- (i) *Si $\alpha \in N^* \setminus N$ aleshores la multiplicitat en N^* de α és parell.*
- (ii) *Si $\alpha \in N$, els nombres $\text{mult}_N[\alpha]$ i $\text{mult}_{N^*}[\alpha]$ tenen la mateixa paritat.*
- (iii) *Si $j \geq 0$ és un nombre natural i I és un interval obert de \mathbb{R} aleshores*

$$\begin{aligned} \{(x, j) \in N \mid x \in I, \text{mult}_N[(x, j)] \text{ és senar}\} \\ = \{(x, j) \in N^* \mid x \in I, \text{mult}_{N^*}[(x, j)] \text{ és senar}\}. \end{aligned}$$

És a dir, els nodes de N que tenen derivació j , abscissa en I i multiplicitat senar coincideixen amb els nodes de N^ que tenen derivació j , abscissa en I i multiplicitat senar.*

- (iv) *Siguin $(a, j - 1), (b, j - 1)$ dos nodes consecutius de N^* . Existeix un únic node de N , $(x, j) \in N$, que té derivació j , abscissa x complint $a < x < b$, i multiplicitat en N senar.*
- (v) *Sigui $(x_d, j - 1)$ un node extrem-dret de N^* . Si (x, j) és un node de N que té derivació j i abscissa x complint $x > x_d$, aleshores la multiplicitat en N de (x, j) és parell. Anàlogament, si $(x_e, j - 1)$ és un node extrem-esquerra de N^* i (x, j) és un node de N amb derivació j i abscissa x complint $x < x_e$, la multiplicitat en N de (x, j) és parell.*

Demostració. (i) Procedirem per inducció decreixent sobre la derivació de α . Sigui $\alpha = (x, j_0)$ un node de $N^* \setminus N$ amb derivació màxima possible i hem de veure que la seva multiplicitat en N^* és parell. Donat que $(x, j_0) \in N^* \setminus N$, el node $(x, j_0 + 1)$ pertany a cert $R_{\mathfrak{g}}$ on \mathfrak{g} és un grup de N . D'aquí que la multiplicitat en N de $(x, j_0 + 1)$ és senar. Si $m = \text{mult}_N[(x, j_0 + 1)]$ denota aquesta multiplicitat, també tindrem $m = \text{mult}_{N^*}[(x, j_0 + 1)]$ puix que j_0 és màxim. De tot això resulta $\text{mult}_{N^*}[(x, j_0)] = 1 + \text{mult}_{N^*}[(x, j_0 + 1)] = 1 + m$, que és un nombre parell.

Suposem ara $1 \leq j \leq j_0$ i que l'apartat (i) és cert per als nodes de $N^* \setminus N$ que tenen derivació més gran o igual que j . Hem de veure que també és cert per als nodes que tenen derivació $j - 1$. Sigui doncs $\alpha = (x, j - 1)$ un node de $N^* \setminus N$ amb derivació $j - 1$. Com abans, tindrem $(x, j) \in R_{\mathfrak{g}}$ per a cert grup \mathfrak{g} de N i per tant la multiplicitat en N del node (x, j) és senar. Denotem per $m = \text{mult}_N[(x, j)]$ aquesta multiplicitat. Es verifica que

$$\text{mult}_{N^*}[(x, j - 1)] = \begin{cases} 1 + m, & \text{si } (x, j + m) \notin N^* \\ 1 + m + \text{mult}_{N^*}[(x, j + m)], & \text{si } (x, j + m) \in N^* \end{cases} \quad (8.7)$$

i per tant, quan $(x, j + m) \notin N^*$ la multiplicitat en N^* del node $\alpha = (x, j - 1)$ és parell. Així, si $(x, j + m) \notin N^*$ aleshores ja hem acabat. Suposem finalment $(x, j + m) \in N^*$. Per definició de $m = \text{mult}_N[(x, j)]$ forçosament és $(x, j + m) \notin N$, resultant que $(x, j + m) \in N^* \setminus N$. La hipòtesi d'inducció aplicada al node $(x, j + m)$ assegura que el nombre $\text{mult}_{N^*}[(x, j + m)]$ és parell. D'això i de (8.7) es dedueix que la multiplicitat en N^* del node $\alpha = (x, j - 1)$ és parell, tal com volíem veure. Per inducció l'apartat (i) està provat.

Els apartats (ii) i (iii) s'obtenen immediatament aplicant l'apartat (i).

Anem a veure (iv). De la definició dels conjunts $S_{\mathfrak{g}}$ en (8.3), (8.4) i (8.5), i de la definició de N^* , és fàcil veure que per als nodes consecutius $(a, j - 1)$ i $(b, j - 1)$ de N^* s'ha de verificar un dels quatre casos següents:

Cas 1: $(a, j - 1) = (x_{\mathfrak{g}, i-1}, j - 1)$ i $(b, j - 1) = (x_{\mathfrak{g}, i+1}, j - 1)$, on \mathfrak{g} és un grup de N de derivació $j_{\mathfrak{g}} = j$, i i és un nombre natural amb $2 \leq i \leq r_{\mathfrak{g}} - 1$. Aquest cas es presenta quan $(a, j - 1) \in N^* \setminus N$ i $(b, j - 1) \in N^* \setminus N$.

Cas 2: $(a, j - 1) = (x_{\mathfrak{g}, r_{\mathfrak{g}}-1}, j - 1)$ i $(b, j - 1) = \sigma_N^+(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior o exterior-esquerra de N de derivació $j_{\mathfrak{g}} = j$ i amb $r_{\mathfrak{g}} \geq 2$. Aquest cas es presenta quan $(a, j - 1) \in N^* \setminus N$ i $(b, j - 1) \in N$.

Cas 3: $(a, j - 1) = \sigma_N^-(\mathfrak{g})$ i $(b, j - 1) = (x_{\mathfrak{g}, 2}, j - 1)$, on \mathfrak{g} és un grup interior o exterior-dret de N de derivació $j_{\mathfrak{g}} = j$ i amb $r_{\mathfrak{g}} \geq 2$. Aquest cas passa quan $(a, j - 1) \in N$ i $(b, j - 1) \in N^* \setminus N$.

Cas 4: $(a, j - 1) = \sigma_N^-(\mathfrak{g})$ i $(b, j - 1) = \sigma_N^+(\mathfrak{g})$, on \mathfrak{g} és un grup interior de N de derivació $j_{\mathfrak{g}} = j$ i $r_{\mathfrak{g}} = 1$. Aquest cas es presenta quan $(a, j - 1) \in N$ i $(b, j - 1) \in N$.

En qualsevol dels casos anteriors hi ha existència i unicitat del node (x, j) de l'apartat (iv). En efecte, en el cas 1 aquest node és $(x, j) = (x_{\mathfrak{g}, i}, j)$; en el cas 2 és $(x, j) = (x_{\mathfrak{g}, r_{\mathfrak{g}}}, j)$; en el cas 3 és $(x, j) = (x_{\mathfrak{g}, 1}, j)$; i en el cas 4 és $(x, j) = (x_{\mathfrak{g}, 1}, j)$. Per tant (iv) està provat.

(v) Procedirem per reducció a l'absurd. Sigui $(x_d, j - 1)$ un node extrem-dret de N^* i suposem que existeix un node $(x, j) \in N$ que té abscissa $x > x_d$ i multiplicitat en N senar. Podem considerar el grup \mathfrak{g} de N tal que $(x, j) \in \mathfrak{g}$. Donat que $(x_d, j - 1)$ és un node extrem-dret de N^* , (x, j) és un peu de N i per tant el grup \mathfrak{g} té derivació $j_{\mathfrak{g}} = j$. A més a més $r_{\mathfrak{g}} \geq 1$, ja que el node (x, j) té multiplicitat en N senar. Utilitzant altre cop que $(x_d, j - 1)$ és un node extrem-dret de N^* s'obté que \mathfrak{g} és un grup atípic o exterior-dret de N . El node $(x_{\mathfrak{g}, r_{\mathfrak{g}}}, j - 1)$ pertany a N^* i la seva abscissa verifica $x_{\mathfrak{g}, r_{\mathfrak{g}}} \geq x > x_d$. Això contradueix el fet que $(x_d, j - 1)$ és un node extrem-dret de N^* . \square

El següent teorema recull les propietats més importants de la saturació d'una configuració completa.

Teorema 8.4. *Sigui N una configuració completa de longitud n . La seva saturació N^* satisfà les propietats següents: (i) $N \subseteq N^*$, (ii) $\ell_{N^*} = n$, (iii) N^* és \mathcal{B} -configuració, (iv) els nodes de $N^* \setminus N$ tenen multiplicitat parell en N^* , i (v) N és \mathcal{B} -configuració si i només si $N^* = N$.*

Demostració. Els apartats (i) i (ii) són conseqüència de la definició de N^* , mentre que (iv) és l'apartat (i) del lema 8.3. Per altra banda, si N era inicialment \mathcal{B} -configuració, tots els conjunts $S_{\mathfrak{g}}$ són buits, resultant $N^* = N$. Aquest fet demostra la implicació (\Rightarrow) de (v). L'altra implicació de (v) serà conseqüència de l'apartat (iii). Per tant, tot es redueix a provar (iii).

Cal veure, doncs, que la saturació N^* és \mathcal{B} -configuració. Que N^* és quasi-completa es deriva de l'apartat (iv) del lema anterior, ja que si $(a, j - 1), (b, j - 1)$ són dos nodes consecutius de N^* , el node (x, j) que resulta d'aquell apartat té derivació j , pertany a N^* i la seva abscissa compleix $a < x < b$. Per tant, només cal veure que es verifiquen les propietats (i), (ii) i (iii) de la definició 4.8 per a N^* .

Anem a demostrar primer que $\tau_{N^*} = 0$. Això ho veurem per reducció a l'absurd. Suposem que $m_{N^*}(j - 1) = 0$ per a cert $j = 1, 2, \dots, n$. Donat que $N \subseteq N^*$ forçosament és $m_N(j - 1) = 0$, i com que N és completa, $m_N(j) \geq 1$. Sigui \mathfrak{g} el grup atípic de N que té derivació j . El conjunt $S_{\mathfrak{g}}$, que està format per nodes de derivació $j - 1$, és no buit. Això implica que $m_{N^*}(j - 1) \geq 1$, que es contradueix amb $m_{N^*}(j - 1) = 0$.

Anem a veure ara que per a tot grup interior \mathfrak{g}^* de N^* , existeix un únic node de \mathfrak{g}^* que té derivació igual a la derivació de \mathfrak{g}^* i tal que la seva multiplicitat en N^* és senar. Això és equivalent a demostrar que per a dos nodes consecutius qualssevol $(a, j - 1), (b, j - 1) \in N^*$, hi ha un únic node de N^* que té derivació j , abscissa estrictament compresa entre a i b , i multiplicitat en N^* senar. Aquest fet és immediat aplicant l'apartat (iv) del lema anterior als nodes $(a, j - 1), (b, j - 1)$ i l'apartat (iii) del mateix lema al nombre j i a l'interval $I = (a, b)$.

Finalment cal veure que si \mathfrak{g}^* és un grup exterior de N^* , la multiplicitat en N^* dels nodes de \mathfrak{g}^* que tenen derivació igual a la derivació de \mathfrak{g}^* és parell. Això es dedueix del lema 8.3 utilitzant primer l'apartat (v) al node extrem-dret $\sigma_{N^*}^-(\mathfrak{g}^*) = (x_d, j - 1)$ si \mathfrak{g}^* és un grup exterior-dret o al node extrem-esquerra $\sigma_{N^*}^+(\mathfrak{g}^*) = (x_e, j - 1)$ si \mathfrak{g}^* és un grup exterior-esquerra, i després l'apartat (iii) a l'interval $I = (x_d, +\infty)$ o $I = (-\infty, x_e)$, depenent de si \mathfrak{g}^* és exterior-dret o exterior-esquerra. Això completa la demostració. \square

8.2 El teorema general de representació

Tenint en compte les consideracions precedents, tot seguit enunciem i demostrem el teorema de representació.

Teorema 8.5 [Teorema de representació]

L'equivalència \sim té la propietat de representació. És a dir, tota configuració completa és equivalent a un espectre.

Demostració. Sigui N una configuració completa de longitud n . Del teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions aplicat a N^* (teorema 6.4) es dedueix que N^* és equivalent a un espectre Z^* . Aquest espectre té longitud n ja que n és la longitud de N^* , i per tant $Z^* = Z(P^*)$ on P^* és un polinomi de grau n de la forma $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$.

Sigui Ψ la identificació natural entre N^* i $Z(P^*)$. Donat que la multiplicitat en N^* dels nodes de $N^* \setminus N$ és parell, la multiplicitat en $Z(P^*)$ dels nodes de $\Psi[N^* \setminus N]$ també és parell. Això significa que $\Delta^* = \Psi[N^* \setminus N]$ és un subconjunt parell de $Z(P^*)$, i per tant, $\Psi[N^* \setminus N]$ és un subconjunt eliminable de $Z(P^*)$ (veure el teorema 7.16). En particular, existeix una pertorbació de P^* de la forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ que elimina Δ^* . Tenint ara en compte que

$$\Delta^* = \Psi[N^* \setminus N] = \Psi[N^*] \setminus \Psi[N] = Z(P^*) \setminus \Psi[N],$$

resulta

$$Z(P) \sim Z(P^*) \setminus \Delta^* = \Psi[N] \sim N.$$

És a dir, l'espectre $Z(P)$ és equivalent a la configuració inicial N , completant així la demostració. \square

Abans d'establir el teorema general de representació farem alguns comentaris sobre la demostració anterior. Observem que aquesta ha estat basada, essencialment, en els teoremes 6.4 i 7.16. Ara bé,

- Del teorema 6.4 només s'ha utilitzat el fet que tota \mathcal{B} -configuració és equivalent a un espectre, sense tenir en compte els graus de llibertat proporcionats per aquest teorema. Recordem que aquests graus de llibertat per a la configuració N^* provenen de considerar una tria inicial d'abscisses per a Y^* , denotada $y^{0,*}[\alpha]$, $\alpha \in Y^*$, i una proporció inicial per a T^* , $t^*[\alpha]$, $\alpha \in T^*$, on Y^* i T^* són els conjunts formats, respectivament, pels peus de N^* de

derivació zero (peus atípics) o peus exteriors, i pels peus de N^* interiors amb multiplicitat parell. El teorema 6.4 assegura aleshores que existeix un espectre Z^* amb $Z^* \sim N^*$ i de manera que la identificació natural $\Psi = \Psi_{N^*, Z^*}$ verifica les condicions següents:

- (a) $\Psi[\alpha] = (y^{0,*}[\alpha], j)$ per a tot $\alpha \in Y^*$, on j denota la derivació de α .
- (b) Si $\alpha = (x, j)$ és un node de T^* i $\sigma_{N^*}[\alpha] = (x^*, j)$, aleshores

$$\Psi[\alpha] = \begin{cases} ((1 - t^*[\alpha])y^* + t^*[\alpha]y^-, j), & \text{si } x < x^* \\ ((1 - t^*[\alpha])y^* + t^*[\alpha]y^+, j), & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (8.8)$$

on y^- , y^* i y^+ són les abscisses de $\Psi[\sigma_{N^*}^-[\alpha]]$, $\Psi[\sigma_{N^*}[\alpha]]$ i $\Psi[\sigma_{N^*}^+[\alpha]]$ respectivament (veure la definició 6.2 per als nodes $\sigma_{N^*}^-[\alpha]$, $\sigma_{N^*}[\alpha]$, $\sigma_{N^*}^+[\alpha]$).

- Del teorema 7.16 s'ha utilitzat el fet que tot subconjunt parell de $Z(P^*)$ és eliminable. Aquest fet era generalitzat en el teorema 7.17.

En base a aquestes consideracions, tot seguit presentem el teorema general de representació.

Teorema 8.6 [Teorema general de representació]

Sigui N una configuració completa de longitud n , i sigui N^ la seva saturació. Considerem els conjunts Y^* i T^* formats, respectivament, pels peus de N^* de derivació zero (atípics) o peus exteriors, i pels peus interiors de N^* que tenen multiplicitat parell. Sigui $y^{0,*}[\alpha]$, $\alpha \in Y^*$, una tria inicial d'abscisses per a Y^* , i $t^*[\alpha]$, $\alpha \in T^*$, una proporció inicial per a T^* . Considerem, també, nombres reals $\varepsilon^*[\alpha]$, $\alpha \in T^*$, estrictament positius.*

Existeix un nombre real $\delta > 0$ de manera que si es consideren nombres reals no nuls w_α , $\alpha \in N^ \setminus N$, on cada w_α verifica les dues condicions següents:*

- (1) $-\delta < w_\alpha < \delta$
- (2) Si $\alpha = (x, j)$ i m denota la multiplicitat en N^* de α , llavors el signe de w_α és igual a $\text{sgn}_{N^*}[(x, j + m)]$,

aleshores existeix una configuració H^ tal que $H^* \sim N^*$ i de manera que la identificació natural entre N^* i H^* , denotada Ψ^* , satisfà les propietats següents:*

- (i) Per a tot $\alpha \in Y^*$, $\Psi^*[\alpha] = (y^{0,*}[\alpha], j)$ on j denota la derivació de α .

(ii) Si $\alpha = (x, j)$ és un node de T^* i $\sigma_{N^*}[\alpha] = (x^*, j)$, aleshores

$$\Psi^*[\alpha] = \begin{cases} ((1 - t_\alpha)y^* + t_\alpha y^-, j), & \text{si } x < x^* \\ ((1 - t_\alpha)y^* + t_\alpha y^+, j), & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (8.9)$$

on y^- , y^* i y^+ són les abscisses de $\Psi^*[\sigma_{N^*}^-[\alpha]]$, $\Psi^*[\sigma_{N^*}[\alpha]]$ i $\Psi^*[\sigma_{N^*}^+[\alpha]]$ respectivament, i t_α és un nombre real satisfent $|t_\alpha - t^*[\alpha]| < \varepsilon^*[\alpha]$. Quan $N = N^*$ aleshores t_α és igual a $t^*[\alpha]$.

(iii) La configuració $\Psi^*[N]$ coincideix amb l'espectre d'un polinomi $P(x)$ de grau n i amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$. En particular $N \sim Z(P)$. A més a més, aquest polinomi verifica

$$P[\Psi^*[\alpha]] = w_\alpha \quad \text{si } \alpha \in N^* \setminus N \quad (8.10)$$

Comentari 8.7.

1. Els apartats (i) i (ii) expressen propietats de la configuració H^* anàlogues a les dels apartats (a) i (b) del teorema 6.4, només que ara, a l'apartat (ii) apareix una proporció desconeguda t_α en lloc de $t^*[\alpha]$. En general $t_\alpha \neq t^*[\alpha]$, però donat que els nombres $\varepsilon^*[\alpha]$, $\alpha \in T^*$, es poden prendre suficientment petits i que $|t_\alpha - t^*[\alpha]| < \varepsilon^*[\alpha]$, t_α és un nombre proper a $t^*[\alpha]$.
2. El teorema generalitza el teorema 8.5 ja que l'apartat (iii) assegura que N és equivalent a l'espectre d'un polinomi P . Notem que la identificació natural entre N i $Z(P)$ no és res més que la restricció de Ψ^* a N . És a dir, l'aplicació $\Psi : N \rightarrow Z(P)$ definida per $\Psi[\alpha] = \Psi^*[\alpha]$ si $\alpha \in N$.
3. Quan $N = N^*$, i.e., quan N és \mathcal{B} -configuració, el teorema es redueix al teorema 6.4. Observem que en aquest cas l'apartat (ii) diu que t_α coincideix, en efecte, amb $t^*[\alpha]$.

Per tant aquest teorema també generalitza el teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions.

Demostració del teorema. Podem suposar que $N \neq N^*$. Sigui \mathcal{P}_{N^*} el conjunt de tots els peus de N^* . Considerem també el conjunt U^* format pels peus interiors de N^* que tenen multiplicitat senar; o el que és el mateix, U^* consisteix en els peus de N^* que tenen derivació no nul·la i multiplicitat senar. La descomposició (6.1) aplicada a la configuració N^* estableix que

$$\mathcal{P}_{N^*} = Y^* \cup T^* \cup U^* .$$

En el que segueix posarem $\mathcal{P}_{N^*} = \{(x_1^*, j_1), (x_2^*, j_2), \dots, (x_h^*, j_h)\}$, on els (x_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, són els peus de N^* diferents dos a dos, i suposarem que la multiplicitat en N^* de cada (x_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, és m_i . Podem suposar, també, que els (x_i^*, j_i) estan ordenats de manera que

$$U^* = \{(x_i^*, j_i)\}_{i=1}^{h_0}, Y^* = \{(x_i^*, j_i)\}_{i=h_0+1}^{h_1}, T^* = \{(x_i^*, j_i)\}_{i=h_1+1}^h \quad (8.11)$$

El nombre de nodes de U^* , h_0 , coincideix amb el nombre de grups interiors de N^* . És a dir $h_0 = e_{N^*}$.

El teorema 6.4 aplicat a N^* assegura que existeix un espectre Z^* , $Z^* \sim N^*$, de manera que la identificació natural entre N^* i Z^* , denotada Ψ , verifica les propietats (a) i (b) del teorema (aquestes propietats han estat explicitades en els punts (a) i (b) que segueixen al teorema 8.5). Com que la longitud de Z^* és igual a n , Z^* és de la forma $Z^* = Z(P^*)$ on $P^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ és un polinomi de grau n . A més a més $Z(P^*)$ és \mathcal{B} -configuració, ja que $Z(P^*) = Z^* \sim N^*$. Els peus de $Z(P^*)$ són els nodes

$$(y_i^*, j_i) = \Psi[(x_i^*, j_i)], \quad i = 1, 2, \dots, h, \quad (8.12)$$

essent la multiplicitat en $Z(P^*)$ de cada (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h$, igual a m_i .

Tenint en compte (8.11) i (8.12), les propietats (a) i (b) verificades per la identificació natural Ψ es rescriuen de la següent manera. La propietat (a) estableix que

$$y_i^* = y^{0,*}[(x_i^*, j_i)], \quad i = h_0 + 1, h_0 + 2, \dots, h_1 \quad (8.13)$$

mentre que (b) admet el següent enunciat: si $i = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h$, aleshores

$$y_i^* = \begin{cases} (1 - t^*[(x_i^*, j_i)])y_{i'}^* + t^*[(x_i^*, j_i)]y_{i'-}, & \text{si } x_i^* < x_{i'}^* \\ (1 - t^*[(x_i^*, j_i)])y_{i'}^* + t^*[(x_i^*, j_i)]y_{i'+}, & \text{si } x_i^* > x_{i'}^* \end{cases} \quad (8.14)$$

on el nombre $i' = 1, 2, \dots, h_0$ està definit per la condició

$$(x_{i'}^*, j_{i'}) = \sigma_{N^*}[(x_i^*, j_i)] \quad (8.15)$$

(i en particular $j_{i'} = j_i$), mentre que $i^- = 1, 2, \dots, h$, $i^+ = 1, 2, \dots, h$ són els nombres tals que $(x_{i^-}^*, j_{i^-})$ és el peu en N^* del node $\sigma_{N^*}^-[(x_i^*, j_i)]$, i $(x_{i^+}^*, j_{i^+})$ és el peu en N^* del node $\sigma_{N^*}^+[(x_i^*, j_i)]$. És a dir,

$$(x_{i^-}^*, j_{i^-}) = \text{peu}_{N^*}[\sigma_{N^*}^-[(x_i^*, j_i)]], \quad (x_{i^+}^*, j_{i^+}) = \text{peu}_{N^*}[\sigma_{N^*}^+[(x_i^*, j_i)]] \quad (8.16)$$

A continuació aplicarem el teorema 7.17 al polinomi P^* tenint en compte les consideracions següents:

1. Els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars de $Z(P^*)$.

En efecte, donat que $\Psi[U^*] = \{(y_i^*, j_i)\}_{i=1}^{h_0}$, els (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h_0$, són els peus de $Z(P^*)$ que són interiors i tals que la seva multiplicitat en $Z(P^*)$ és senar; o, amb altres paraules, els (y_i^*, j_i) , $i = 1, 2, \dots, h_0$, són els peus de $Z(P^*)$ que tenen derivació no nul·la i multiplicitat en $Z(P^*)$ senar. La proposició 7.4 assegura que els caps $(y_i^*, j_i + m_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, són complementàriament regulars.

2. El conjunt

$$\Delta^* = \Psi[N^* \setminus N] = \Psi[N^*] \setminus \Psi[N] = Z(P^*) \setminus \Psi[N]$$

és un subconjunt parell de $Z(P^*)$. Aquest fet es demostra de la mateixa manera que en el teorema 8.5.

Es verifiquen doncs les hipòtesis del teorema 7.17. Abans d'aplicar aquest teorema, observem que el conjunt χ' de (7.28) pren ara la forma

$$\begin{aligned} \chi' &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1, (y_i^*, j) \in \Psi[N^* \setminus N]\} \\ &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1, (x_i^*, j) \in N^* \setminus N\}, \end{aligned}$$

mentre que el conjunt W de (7.29) és

$$\begin{aligned} W &= \{(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in \mathbb{R}^{\#\chi'} \mid \text{sgn}(w_{ij}) = \text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j_i + m_i)] \text{ si } (i, j) \in \chi'\} \\ &= \{(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in \mathbb{R}^{\#\chi'} \mid \text{sgn}(w_{ij}) = \text{sgn}_{N^*}[(x_i^*, j_i + m_i)] \text{ si } (i, j) \in \chi'\}. \end{aligned}$$

En efecte, del corol·lari 3.7 (v) resulta $\text{sgn}_{Z(P^*)}[(y_i^*, j_i + m_i)] = \text{sgn}_{N^*}[(x_i^*, j_i + m_i)]$.

Del teorema 7.17 s'obté un $\delta > 0$ i funcions analítiques reals $a_k : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $y_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, h_0$, on W_δ és el conjunt

$$W_\delta = \{(w_{ij})_{(i,j) \in \chi'} \in W \mid |w_{ij}| < \delta \text{ si } (i, j) \in \chi'\},$$

complint les propietats (a), (b) i (c) del teorema. Per extensió, per a $i = h_0 + 1, \dots, h$ definim la funció constant $y_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ per $y_i(\vec{w}) = y_i^*$, $\vec{w} \in W_\delta$. Considerem, també, la família de polinomis $P_{\vec{w}}$, $\vec{w} \in W_\delta$, considerada a l'apartat (c). És a dir, $P_{\vec{w}}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\vec{w}) \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Es verifiquen:

- (a) Si $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 1, 2, \dots, h$, aleshores

$$\lim_{\substack{\vec{w} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{w} \in W_\delta}} a_k(\vec{w}) = a_k^*, \quad \lim_{\substack{\vec{w} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{w} \in W_\delta}} y_i(\vec{w}) = y_i^* \quad (8.17)$$

(b) Per a tot $\vec{w} \in W_\delta$,

$$|y_i(\vec{w}) - y_i^*| < \varepsilon_{Z(P^*)}, \quad i = 1, 2, \dots, h \quad (8.18)$$

(c) Si $\vec{w} = (w_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{X}'} \in W_\delta$, aleshores:

$$\begin{aligned} Z(P_{\vec{w}}) &= \{(y_i(\vec{w}), j) \mid (y_i^*, j) \notin \Delta^*, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \\ &= \{(y_i(\vec{w}), j) \mid (x_i^*, j) \in N, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\}, \end{aligned} \quad (8.19)$$

$P_{\vec{w}}$ és una pertorbació que elimina Δ^* i, a més a més, $P_{\vec{w}}[(y_i(\vec{w}), j)] = w_{ij}$ per a tots aquells i, j , $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, tals que $(x_i^*, j) \in N^* \setminus N$.

En el que segueix, si $\vec{w} \in W_\delta$, es denota per $H_{\vec{w}}^*$ la configuració

$$H_{\vec{w}}^* = \{(y_i(\vec{w}), j) \mid 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\} \quad (8.20)$$

Observem que de les desigualtats (8.18) es deriva que l'aplicació

$$\Psi_{\vec{w}} : Z(P^*) \rightarrow H_{\vec{w}}^* \quad (8.21)$$

donada per $\Psi_{\vec{w}}[(y_i^*, j)] = (y_i(\vec{w}), j)$, $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$, és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abscisses.

Per a cada $i = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h$, siguin i', i^+, i^- els nombres definits per les condicions (8.15) i (8.16). Depenent de si $x_i^* < x_{i'}^*$ o $x_i^* > x_{i'}^*$, es defineix la funció $t_i : W_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ per

$$t_i(\vec{w}) = \begin{cases} \frac{y_{i'}(\vec{w}) - y_i(\vec{w})}{y_{i'}(\vec{w}) - y_{i^-}(\vec{w})}, & \text{si } x_i^* < x_{i'}^* \\ \frac{y_i(\vec{w}) - y_{i'}(\vec{w})}{y_{i^+}(\vec{w}) - y_{i'}(\vec{w})}, & \text{si } x_i^* > x_{i'}^* \end{cases}, \quad \vec{w} \in W_\delta \quad (8.22)$$

Els denominadors de (8.22) no s'anul·len mai, ja que de (8.15) i (8.16) s'obté $x_{i^-}^* < x_{i'}^* < x_{i^+}^*$, i com que Ψ conserva 1-abscisses, $y_{i^-}^* < y_{i'}^* < y_{i^+}^*$. D'això i de les desigualtats (8.18) es desprèn que $y_{i^-}(\vec{w}) < y_{i'}(\vec{w}) < y_{i^+}(\vec{w})$. Així, t_i està ben definida i és analítica real. De (8.17) i (8.14) resulta

$$\lim_{\substack{\vec{w} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{w} \in W_\delta}} t_i(\vec{w}) = t^*[(x_i^*, j_i)].$$

Això implica que el nombre δ es pot suposar suficientment petit per tal que per a tot $\vec{w} \in W_\delta$ es tingui

$$|t_i(\vec{w}) - t^*[(x_i^*, j_i)]| < \varepsilon^*[(x_i^*, j_i)] \quad (8.23)$$

Com que aquest procés es pot repetir per a cada $i = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h$, les desigualtats (8.23) són vàlides per a tot $i = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h$, i tot $\vec{w} \in W_\delta$.

La resta de la demostració va encaminada a provar que per a aquest δ es verifiquen totes les propietats de l'enunciat del teorema. Siguin doncs $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$, nombres reals no nuls satisfent les propietats (1) i (2) de l'enunciat. Els nombres $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$, tenen associat de manera natural el vector $\vec{w} = (w_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{X}'} \in W_\delta$ definit per $w_{ij} = w_{(x_i^*, j)}$ si $(x_i^*, j) \in N^* \setminus N$, $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$.

Sigui $H^* = H_{\vec{w}}^*$ la configuració de (8.20). Sigui també $\Psi^* : N^* \rightarrow H^*$ la composició de l'aplicació $\Psi_{\vec{w}}$ de (8.21) amb Ψ . És a dir, $\Psi^* = \Psi_{\vec{w}} \circ \Psi$. Aquesta aplicació ve donada explícitament per $\Psi^*[(x_i^*, j)] = (y_i(\vec{w}), j)$, $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$. A més a més Ψ^* és bijectiva, conserva derivacions i conserva 1-abscisses, ja que tant $\Psi_{\vec{w}}$ com Ψ compleixen aquestes mateixes propietats.

Anem a veure que es verifica la propietat (i) de l'enunciat. Sigui $\alpha \in Y^*$ i hem de veure que $\Psi^*[\alpha] = (y^{0,*}[\alpha], j)$, on j denota la derivació de α . Com que $\alpha \in Y^*$, α és de la forma $\alpha = (x_i^*, j_i)$ per a cert $i = h_0 + 1, h_0 + 2, \dots, h_1$, i per tant $\Psi^*[\alpha] = \Psi^*[(x_i^*, j_i)] = (y_i(\vec{w}), j_i)$. Ara, com que $h_0 + 1 \leq i \leq h_1$ es té $y_i(\vec{w}) = y_i^* = y^{0,*}[(x_i^*, j_i)]$, ja que es compleix (8.13). Hem vist (i).

Anem a veure (ii). Sigui α un node de T^* . Com que $\alpha \in T^*$, α és de la forma $\alpha = (x_i^*, j_i)$ per a cert $i = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h$. La seva imatge val $\Psi^*[\alpha] = \Psi^*[(x_i^*, j_i)] = (y_i(\vec{w}), j_i)$. Considerem els nombres i', i^+, i^- definits per les condicions (8.15) i (8.16). Aïllant $y_i(\vec{w})$ de (8.22) s'obté

$$y_i(\vec{w}) = \begin{cases} (1 - t_i(\vec{w}))y_{i'}(\vec{w}) + t_i(\vec{w})y_{i^-}(\vec{w}), & \text{si } x_i^* < x_{i'}^* \\ (1 - t_i(\vec{w}))y_{i'}(\vec{w}) + t_i(\vec{w})y_{i^+}(\vec{w}), & \text{si } x_i^* > x_{i'}^* \end{cases} \quad (8.24)$$

Per altra banda el nombre $t_\alpha = t_i(\vec{w})$ verifica $|t_\alpha - t^*[(x_i^*, j_i)]| < \varepsilon^*[(x_i^*, j_i)]$. De tot això en resulta l'apartat (ii) atès que $y_i(\vec{w})$ és l'abscissa de $\Psi^*[\alpha]$ i els nombres $y_{i^-}(\vec{w}), y_{i'}(\vec{w}), y_{i^+}(\vec{w})$ de (8.24) coincideixen, respectivament, amb els nombres y^-, y^*, y^+ de (8.9).

Anem a veure (iii). La configuració $\Psi^*[N]$ és

$$\Psi^*[N] = \{(y_i(\vec{w}), j) \mid (x_i^*, j) \in N, 1 \leq i \leq h, j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1\}$$

que, per (8.19), coincideix amb l'espectre del polinomi $P_{\vec{w}}$. Finalment, sigui α un node de $N^* \setminus N$. Considerem els nombres i, j tals que $\alpha = (x_i^*, j)$, on $1 \leq i \leq h$, $j_i \leq j \leq j_i + m_i - 1$. Donat que $\alpha = (x_i^*, j) \in N^* \setminus N$, es verifica $P_{\vec{w}}[(y_i(\vec{w}), j)] = w_{ij}$.

Amb altres paraules $P_{\vec{w}}[\Psi^*[\alpha]] = w_{ij} = w_{(x_i^*, j)} = w_\alpha$. Per tant el polinomi $P = P_{\vec{w}}$ verifica totes les condicions de l'apartat (iii). Això completa la demostració. \square

Tot seguit es presenten alguns exemples d'aplicació del teorema anterior.

Exemple 8.8. Considerem la configuració completa N representada a la figura 8.6 (a). A la part (b) d'aquesta figura s'hi troba la seva saturació N^* , on els nodes α_1 i α_2 corresponen als nodes de Y^* .

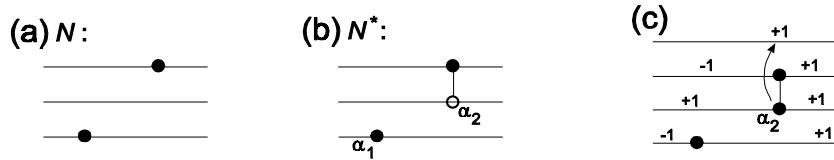


Figura 8.6

En aquest cas $T^* = \emptyset$, així que com a dades inicials en el teorema 8.6 només cal donar la tria inicial d'abscisses per a Y^* . Tanmateix, aquesta tria ve determinada per dos nombres reals $a_1 = y^{0,*}[\alpha_1]$ i $a_2 = y^{0,*}[\alpha_2]$ complint $a_1 < a_2$. Considerem el $\delta > 0$ que s'obté del teorema i siguin $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$, nombres reals no nuls satisfent les condicions (1) i (2) de l'enunciat. Donat que $N^* \setminus N = \{\alpha_2\}$, aquests es redueixen a un únic nombre $w = w_{\alpha_2} \neq 0$, el qual ha de verificar $0 < w < \delta$. El fet que w sigui positiu prové de que si α_2 el posem en la forma $\alpha_2 = (x, 1)$, aleshores la condició (2) estableix que el signe de w té que ser igual al signe en N^* del node $(x, 3)$. Aquest signe és $+1$ tal com es desprèn del test dels signes de N^* representat a la figura 8.6 (c).

La configuració H^* que s'obté del teorema verifica, entre d'altres, $H^* \sim N^*$. L'apartat (i) estableix $\Psi^*[\alpha_1] = (a_1, 0)$ i $\Psi^*[\alpha_2] = (a_2, 1)$, on Ψ^* és la identificació natural entre N^* i H^* , mentre que l'apartat (ii) no és aplicable donat que $T^* = \emptyset$. A la figura 8.7 (a) hi ha representada la configuració H^* . Observem que en aquest cas H^* queda completament determinada per l'elecció dels nombres a_1 i a_2 .



Figura 8.7

L'apartat (iii) estableix que la configuració $\Psi^*[N]$ és l'espectre d'un polinomi P , de la forma $P(x) = \sum_{k=0}^2 a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^3}{3!}$, verificant $P[\Psi^*[\alpha_2]] = w_{\alpha_2} = w$. Dit d'altra manera, $P[(a_2, 1)] = P'(a_2) = w$. A la figura 8.7 (b) hi ha representat l'espectre del polinomi P , així com el valor w que pren el polinomi P en el node $(a_2, 1)$.

Observem que el polinomi P , a part de verificar $N \sim Z(P)$, verifica les condicions addicionals següents: (1) l'única arrel de P és el nombre prefixat a_1 , (2) l'única arrel de P'' és el nombre prefixat a_2 , i (3) la derivada de P en a_2 és igual al valor prefixat w . En total doncs hi ha tres condicions addicionals per al polinomi P , que vénen determinades pels valors dels paràmetres a_1, a_2 i w . Observem que w és un paràmetre local perquè ha de complir $0 < w < \delta$. Finalment, notem també que la desigualtat $a_1 < a_2$ assegura que la identificació natural entre N i $Z(P)$ conserva 2-abscisses, i que per tant en aquest exemple és $N \sim_2 Z(P)$.

Exemple 8.9. Considerem la configuració completa N representada a la figura 8.8 (a). A la part (b) s'hi troba la seva saturació N^* , on els nodes α_1, α_2 i α_3 corresponen als nodes de Y^* .

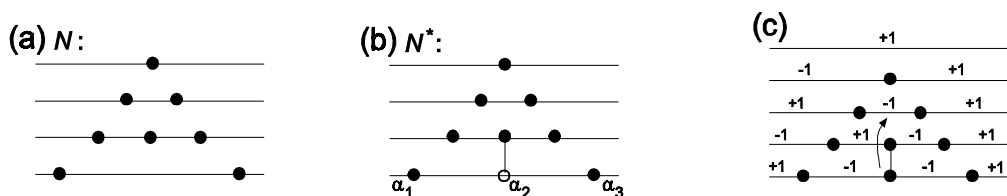


Figura 8.8

Es té $T^* = \emptyset$, així que com abans, només és necessari definir la tria inicial d'abscisses per a Y^* , la qual vindrà determinada per tres nombres reals $a_1 = y^{0,*}[\alpha_1]$, $a_2 = y^{0,*}[\alpha_2]$ i $a_3 = y^{0,*}[\alpha_3]$ satisfent $a_1 < a_2 < a_3$. Considerem el $\delta > 0$ que s'obté del teorema. Els nombres $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$, satisfent les condicions (1) i (2) de l'enunciat es redueixen a un únic nombre $w = w_{\alpha_2} \neq 0$ complint $-\delta < w < 0$. Observem que ara w és negatiu donat que si posem α_2 en la forma $\alpha_2 = (x, 0)$, del test dels signes de N^* representat a la figura 8.8 (c) es desprèn que $\text{sgn}_{N^*}[(x, 2)] = -1$ i per tant $\text{sgn}(w) = -1$.

La configuració H^* del teorema està representada a la figura 8.9 (a), on en aquesta figura s'ha tingut en compte l'apartat (i), d'on resulta $\Psi^*[\alpha_1] = (a_1, 0)$, $\Psi^*[\alpha_2] = (a_2, 0)$ i $\Psi^*[\alpha_3] = (a_3, 0)$. L'apartat (ii) no és aplicable.

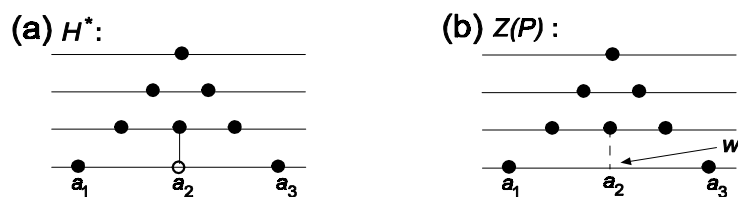


Figura 8.9

Finalment, l'apartat (iii) assegura que la configuració $\Psi^*[N]$ és l'espectre d'un polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^3 a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^4}{4!}$, el qual verifica $P[\Psi^*[a_2]] = w_{\alpha_2} = w$. És a dir, $P[(a_2, 0)] = P(a_2) = w$. A la figura 8.9 (b) hi ha representat l'espectre de P , així com el valor $P(a_2) = w$.

Observem que a part d'ésser $N \sim Z(P)$, el polinomi P verifica quatre condicions addicionals. Això és, les dues arrels de P són dos nombres reals prefixats $a_1 < a_3$, la segona arrel de P' (i.e., la segona arrel més petita) és un nombre prefixat a_2 , i el valor de P en a_2 és un altre nombre prefixat w (aquest últim localment ja que $-\delta < w < 0$).

Exemple 8.10. A la figura 8.10 hi ha representades una configuració completa N i la seva saturació N^* .

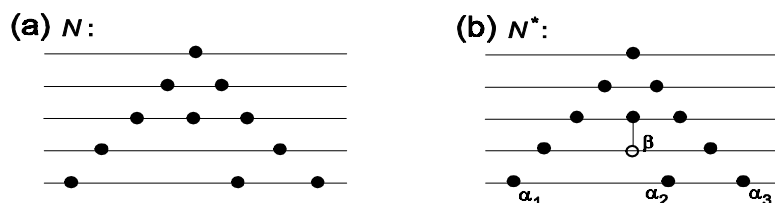


Figura 8.10

En aquest cas és $Y^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ i $T^* = \{\beta\}$. Així que donar una tria inicial d'abscisses per a Y^* és equivalent a donar tres nombres reals $a_1 = y^{0,*}[\alpha_1]$, $a_2 = y^{0,*}[\alpha_2]$ i $a_3 = y^{0,*}[\alpha_3]$ amb la condició $a_1 < a_2 < a_3$. Per altra banda, una proporció inicial per a T^* vindrà determinada per un nombre $t = t^*[\beta]$ satisfent $0 < t < 1$. En l'enunciat del teorema 8.6 també es requereix donar un nombre real positiu $\varepsilon = \varepsilon^*[\beta]$. Considerem el $\delta > 0$ del teorema. Els nombres $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$, de l'enunciat es redueixen a un únic nombre $w = w_\beta \neq 0$ complint $-\delta < w < 0$. És fàcil construir el test dels signes de N^* per provar que en efecte el signe de w és negatiu.

Del teorema es dedueix l'existència d'una configuració H^* , $H^* \sim N^*$, de manera que la identificació natural $\Psi^* = \Psi_{N^*, H^*}$ satisfà les propietats (i), (ii) i (iii) corresponents. La propietat (i) estableix $\Psi^*[\alpha_1] = (a_1, 0)$, $\Psi^*[\alpha_2] = (a_2, 0)$ i $\Psi^*[\alpha_3] = (a_3, 0)$, mentre que la propietat (ii) permet obtenir proporcions entre les abscisses d'alguns nodes. A la figura 8.11 (a) hi ha representada la configuració H^* . Els nombres r_1 i r que apareixen en aquesta figura són distàncies entre abscisses de nodes que, després d'aplicar (8.9) al node $\alpha = \beta$, resulta $r_1/r = t_\beta$, on t_β és un nombre complint $|t_\beta - t| < \varepsilon$. Dit d'una altra manera, es verifica

$$\left| \frac{r_1}{r} - t \right| < \varepsilon.$$

Finalment, de la propietat (iii) s'obté que la configuració $\Psi^*[N]$ és l'espectre d'un polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^4 a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^5}{5!}$ amb $P[\Psi^*[\beta]] = w_\beta = w$. A la figura 8.11 (b) hi ha representat l'espectre de P i el valor $P[\Psi^*[\beta]] = w$.

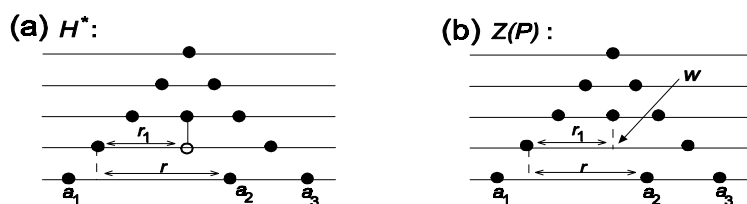


Figura 8.11

Com a condicions addicionals per al polinomi P hem obtingut, d'una banda, les tres arrels prefixades $a_1 < a_2 < a_3$, i d'altra, el valor del polinomi P en el node $\Psi^*[\beta]$, que és igual a w . La proporció r_1/r no és coneguda ja que en general $r_1/r \neq t$, però és tan pròxima com vulguem a t . Finalment cal remarcar que en aquest exemple la identificació natural entre N i $Z(P)$, denotada Ψ , conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes α_2 i $\tilde{\beta}$, on $\tilde{\beta}$ és el node que queda just a sobre de β . És a dir, el node de N que té derivació 2 i la mateixa abscissa que β . Aquest fet no és deduïble només a partir del fet que Ψ conserva 1-abscisses (els nodes α_2 i $\tilde{\beta}$ tenen derivacions que difereixen en dues unitats), sinó que s'obté com a conseqüència de que Ψ és la restricció a N de la identificació natural Ψ^* .

Exemple 8.11. A la figura 8.12 hi ha representades una configuració completa N i la seva saturació N^* .

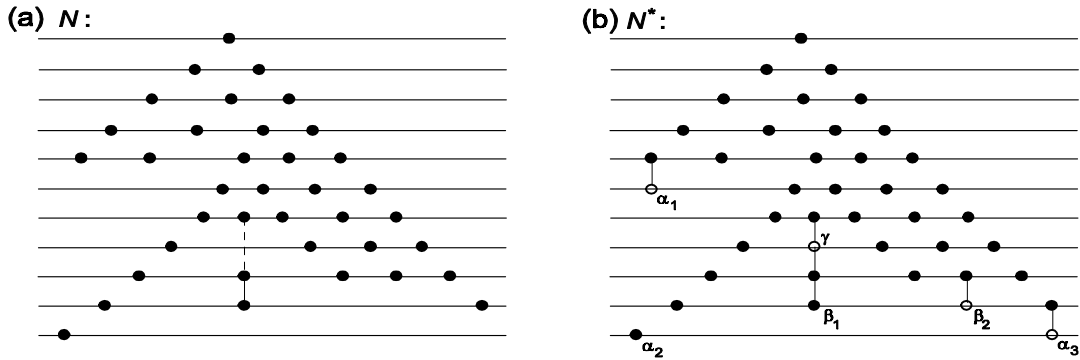


Figura 8.12

En aquest cas és $Y^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ i $T^* = \{\beta_1, \beta_2\}$, així que la tria inicial d'abscisses per a Y^* vindrà determinada per tres nombres $a_1 = y^{0,*}[\alpha_1]$, $a_2 = y^{0,*}[\alpha_2]$ i $a_3 = y^{0,*}[\alpha_3]$ complint $a_1 < a_2 < a_3$, i la proporció inicial per a T^* per dos nombres $t_1 = t^*[\beta_1]$ i $t_2 = t^*[\beta_2]$ satisfent $0 < t_1 < t_2 < 1$. Suposem també donats dos nombres reals positius $\varepsilon_1 = \varepsilon^*[\beta_1]$ i $\varepsilon_2 = \varepsilon^*[\beta_2]$. Considerem el $\delta > 0$ del teorema. Donat que $N^* \setminus N = \{\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \gamma\}$, cal prendre quatre nombres reals no nuls $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_3}, w_{\beta_2}, w_\gamma$, on les condicions (1) i (2) per a cadascun d'ells estableixen, respectivament,

$$0 < w_{\alpha_1} < \delta, \quad 0 < w_{\alpha_3} < \delta, \quad -\delta < w_{\beta_2} < 0, \quad -\delta < w_\gamma < 0.$$

Aquestes desigualtats provenen de construir el test dels signes de N^* .

Del teorema es desprèn l'existència d'una configuració H^* , $H^* \sim N^*$, de manera que la identificació natural $\Psi^* = \Psi_{N^*, H^*}$ satisfà les propietats (i), (ii) i (iii) corresponents. La propietat (i) estableix $\Psi^*[\alpha_1] = (a_1, 5)$, $\Psi^*[\alpha_2] = (a_2, 0)$ i $\Psi^*[\alpha_3] = (a_3, 0)$, mentre que la propietat (ii) permet obtenir proporcions entre les abscisses d'alguns nodes. A la figura 8.13 (a) hi ha representada aquesta configuració H^* . Els nombres r_1, r_2 i r són distàncies entre abscisses de nodes que, després d'aplicar (8.9) als nodes $\alpha = \beta_i$, $i = 1, 2$, resulta $r_i/r = t_{\beta_i}$, on t_{β_i} és un nombre complint $|t_{\beta_i} - t_i| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2$. És a dir,

$$\left| \frac{r_1}{r} - t_1 \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{r_2}{r} - t_2 \right| < \varepsilon_2.$$

Finalment, de la propietat (iii) es dedueix que la configuració $\Psi^*[N]$ és l'espectre d'un polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{10} a_k \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{11}}{11!}$, el qual verifica $P[\Psi^*[\alpha_1]] = w_{\alpha_1}$, $P[\Psi^*[\alpha_3]] = w_{\alpha_3}$, $P[\Psi^*[\beta_2]] = w_{\beta_2}$ i $P[\Psi^*[\gamma]] = w_\gamma$. Totes aquestes condicions per al polinomi P estan esquematitzades a la figura 8.13 (b).

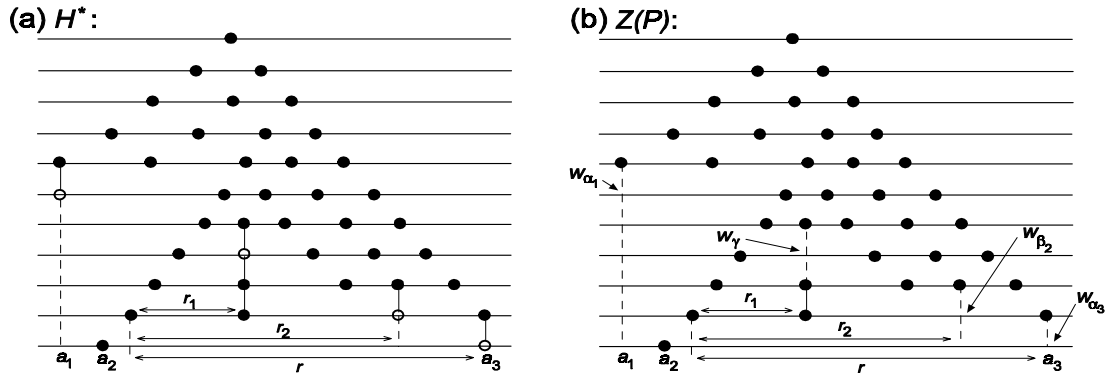


Figura 8.13

En aquest exemple hem pogut prefixar l'única arrel a_2 del polinomi P , l'arrel més gran a_3 de P' , i l'arrel més petita de $P^{(6)}$, que és igual a a_1 . També hem pogut prefixar els valors $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_3}, w_{\beta_2}$ i w_γ que pren el polinomi P en els nodes $\Psi^*[\alpha_1], \Psi^*[\alpha_3], \Psi^*[\beta_2]$ i $\Psi^*[\gamma]$. Les proporcions r_1/r i r_2/r són tan pròximes com vulguem a t_1 i t_2 respectivament, així que poden considerar-se quasi prefixades. Observem finalment que la identificació natural Ψ entre N i $Z(P)$ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\tilde{\gamma}}$, on $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\tilde{\gamma}}$ són els nodes de N que tenen derivacions 4 i 2 respectivament, i que tenen la mateixa abscissa que γ . És a dir, l'abscissa de $\Psi[\tilde{\gamma}]$ és igual a l'abscissa de $\Psi[\tilde{\tilde{\gamma}}]$. Aquest fet esdevé de que Ψ és la restricció a N de la identificació natural Ψ^* .

El següent resultat és una conseqüència del teorema 8.6.

Teorema 8.12. *Considerem una configuració completa N . Sigui $k = m_N(0)$ el nombre de nodes de N que tenen derivació zero. Aleshores, per a cada tria de k nombres reals $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, existeix un polinomi P tal que $Z(P) \sim N$ i de manera que les arrels reals de P són precisament els nombres a_1, a_2, \dots, a_k .*

Demostració. Siguin $(c_i, 0), i = 1, 2, \dots, k$, els nodes de N que tenen derivació zero, ordenats de manera que $c_1 < c_2 < \dots < c_k$. Aquests nodes també són nodes de N^* i per tant $(c_i, 0) \in Y^*, i = 1, 2, \dots, k$. D'això i de les desigualtats $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ i $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, es dedueix que existeix una tria inicial d'abscisses per a Y^* , $y^{0,*}[\alpha], \alpha \in Y^*$, de manera que $y^{0,*}[(c_i, 0)] = (a_i, 0), i = 1, 2, \dots, k$. Podem aplicar el teorema 8.6 a aquesta tria inicial d'abscisses, a una proporció inicial per a T^* qualsevol, i a nombres reals estrictament positius $\varepsilon^*[\alpha], \alpha \in T^*$, qualsevol.

Sigui H^* una de les configuracions que resulten d'aplicar aquest teorema. És a dir, un cop s'han prefixat els nombres $w_\alpha, \alpha \in N^* \setminus N$. La identificació natural $\Psi^* = \Psi_{N^*, H^*}$ verifica $\Psi^*[(c_i, 0)] = (a_i, 0), i = 1, 2, \dots, k$, doncs així ho estableix l'apartat (i) del teorema, mentre que el polinomi P de l'apartat (iii) compleix $\Psi^*[N] = Z(P)$. Això implica dues coses. Primera, que $N \sim Z(P)$, i segona, que els nodes de derivació zero de $Z(P)$ són les imatges, per Ψ^* , dels nodes de derivació zero de N . Donat que $\Psi^*[(c_i, 0)] = (a_i, 0), i = 1, 2, \dots, k$, les arrels de P són els nombres $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. \square

Finalment, farem referència a un resultat degut a Mikusiński [39] i que estableix que si $[a, b]$ és un interval tancat de \mathbb{R} i $m(j), j = 0, 1, \dots, n-1$, són nombres naturals verificant $m(j) \geq m(j-1) - 1$ per a $j = 1, 2, \dots, n-1$, i $m(n-1) \leq 1$ (notem que aquí $m(n-1)$ no és cap producte, sinó que és el valor de $m(j)$ quan $j = n-1$) aleshores existeix un polinomi $P(x)$ de grau $n-1 + m(n-1)$ de manera que cada derivada $P^{(j)}, 0 \leq j \leq n-1$, té exactament $m(j)$ arrels a l'interval $[a, b]$, totes elles simples. Com a conseqüència dels teoremes de representació, a continuació establirem una generalització d'aquest resultat en el sentit que controlarem totes les arrels del polinomi P i de les seves derivades. És a dir, no només les contingudes a l'interval $[a, b]$.

Corol·lari 8.13. *Es verifiquen els apartats següents:*

- (a) *Sigui $P(x)$ un polinomi a coeficients reals de grau n tal que totes les seves arrels reals, i arrels reals de les seves derivades, són simples. Sigui $m(j)$ el nombre d'arrels reals de $P^{(j)}, 0 \leq j \leq n-1$. Aleshores, $m(n-1) = 1$ i $m(j) = m(j-1) - 1 + p_j$ per a $j = 1, 2, \dots, n-1$, on $p_j \geq 0$ és un nombre parell.*
- (b) *Siguin $m(j), j = 0, 1, \dots, n-1$, nombres naturals tals que $m(n-1) = 1$ i $m(j) = m(j-1) - 1 + p_j, j = 1, 2, \dots, n-1$, on $p_j \geq 0$ és un nombre parell. Aleshores, existeix un polinomi $P(x)$ a coeficients reals de grau n tal que totes les seves arrels reals, i arrels reals de les seves derivades, són simples, i de manera que el nombre d'arrels reals de cada derivada $P^{(j)}, 0 \leq j \leq n-1$, és exactament $m(j)$. A més, les $m(0)$ arrels del polinomi P es poden prefixar per endavant.*

Demostració. (a) És suficient veure que si N és una configuració completa de longitud n i simple aleshores $m_N(n-1) = 1$ i $m_N(j) = m_N(j-1) - 1 + p_j, j = 1, \dots, n-1$, on $p_j \geq 0$ és un nombre parell. Donat que N és quasi-completa

resulta $m_N(n-1) = 1$ i $m_N(j) = m_N(j-1) - 1 + p_j$, $j = 1, \dots, n-1$, on els p_j són nombres naturals, en principi no necessàriament parells. Utilitzant el corol·lari 2.14 i tenint en compte que N és simple, i en particular que $n_N(j) = m_N(j)$ per a $j = 0, 1, \dots, n-1$, s'obté que $m_N(j)$ té la mateixa paritat que $n-j$. Això implica que $m_N(j)$ i $m_N(j-1)$ són de diferent paritat, obtenint que p_j ha de ser parell.

(b) Considerem els nombres $m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ de l'apartat (b), així com les diferències $p_j = m(j) - [m(j-1) - 1]$. Per a $j = 1, 2, \dots, n-1$ sigui

$$\tilde{p}_j = \begin{cases} p_j, & \text{si } m(j-1) \geq 1 \\ p_j - 1, & \text{si } m(j-1) = 0 \end{cases} .$$

Considerem també les configuracions $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_{n-1} = N$ definides recurrentment per: (i) N_0 és una configuració formada per $m(0)$ nodes qualssevol de derivació zero, i sense nodes de derivació diferent de zero, i (ii) per a $j = 1, 2, \dots, n-1$, N_j és la configuració obtinguda a partir de N_{j-1} només que afegint, per una banda, un node de derivació j per a cada parella de nodes consecutius de N_{j-1} amb derivació $j-1$, i amb l'abscissa d'aquest node compresa estrictament entre les abscisses dels dos nodes consecutius; i d'altra banda, \tilde{p}_j nodes suplementaris de derivació j , essent l'abscissa d'aquests nodes més gran que l'abscissa de qualsevol node de N_{j-1} . Queden definides, doncs, les configuracions N_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$. A la figura 8.14 hi ha representada la configuració $N = N_{n-1}$ en el cas que $n = 7$, $m(0) = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 0$, $p_3 = 2$, i $p_4 = p_5 = p_6 = 0$. Amb punts hi ha marcats els nodes de derivació zero i els $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_{n-1}$ nodes suplementaris que s'han afegit. La resta de nodes de N , i.e., els que estan indicats amb creus, són els que provenen de parelles de nodes consecutius.

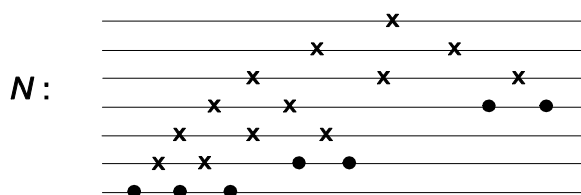


Figura 8.14

El nombre de nodes de N que tenen derivació zero és $m(0)$. A més, si $1 \leq j \leq n-1$ aleshores

$$m_N(j) = (m_N(j-1) - 1)_+ + \tilde{p}_j , \quad (8.25)$$

ja que els nodes de N que tenen derivació j provenen, d'una banda, de totes les $(m_N(j-1) - 1)_+$ parelles possibles de nodes consecutius de N de derivació $j-1$,

i d'altra banda, dels \tilde{p}_j nodes suplementaris que s'han afegit. Utilitzant (8.25) i inducció matemàtica en j es dedueix que

$$m_N(j) = m(j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8.26)$$

En efecte, quan $j = 0$ trivialment és $m_N(0) = m(0)$. Si $j \geq 1$ i suposem que $m_N(j-1) = m(j-1)$, aleshores, de (8.25) s'obté que $m_N(j) = (m(j-1) - 1)_+ + \tilde{p}_j$. Si $m(j-1) \geq 1$, utilitzant això i que $\tilde{p}_j = p_j$ resulta $m_N(j) = m(j-1) - 1 + p_j = m(j)$, i per tant en aquest cas ja hem acabat. Finalment, si $m(j-1) = 0$ aleshores tindrem $m_N(j) = (0 - 1)_+ + p_j - 1 = m(j-1) - 1 + p_j = m(j)$, obtenint novament que $m_N(j) = m(j)$. Per inducció (8.26) està provat.

És fàcil veure que la configuració N és completa, simple i de longitud n . En efecte, que N és simple és trivial i que la seva longitud és n prové de $m_N(n-1) = m(n-1) = 1$. Anem a veure que és completa. Que és quasi-completa és immediat de la construcció de N , ja que entre cada dos nodes consecutius de derivació j n'hi ha un, i només un, de derivació $j+1$. Els grups interiors de N tenen un únic node, i en particular estan formats per un nombre senar de nodes. Si \mathfrak{g} és un grup exterior de N de certa derivació j , forçosament serà $m(j-1) \geq 1$. Per construcció \mathfrak{g} és exterior-dret i està format pels $\tilde{p}_j = p_j$ nodes suplementaris que s'han afegit en la construcció de N_j . Com que p_j és parell, el nombre de nodes de \mathfrak{g} és parell. Finalment, sigui $j = 1, 2, \dots, n-1$ tal que $m_N(j-1) = 0$. Tindrem que $m_N(j) = m(j) = m(j-1) - 1 + p_j = p_j - 1$, d'on resulta que $m_N(j) \geq 1$ i que el grup atípic de N que té derivació j està format per exactament $p_j - 1$ nodes. En particular el nombre de nodes d'aquest grup atípic és senar. De tot això es desprèn que N és completa.

El teorema 8.12 aplicat a la configuració N assegura que existeix un polinomi P de grau n , amb $Z(P) \sim N$, i de manera que les seves $m(0)$ arrels es poden prefixar per endavant. Clarament $Z(P)$ és una configuració simple i $m_{Z(P)}(j) = m_N(j) = m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Això implica que el nombre d'arrels reals de cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n-1$, és exactament $m(j)$, essent totes aquestes arrels simples. Això completa la demostració. \square

Observem que el punt clau de la demostració de l'apartat (b) ha estat provar l'existència d'una configuració completa i simple N amb longitud n i amb $m_N(j) = m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Un cop això s'ha aplicat el teorema 8.12 obtenint un polinomi P amb les propietats adequades. A més, s'han trobat $m(0)$ graus de llibertat per al polinomi P , que corresponen a les seves $m(0)$ arrels. És fàcil veure que:

1. Si s'aplica el teorema general de representació en comptes del teorema 8.12, aleshores s'obtenen nous graus de llibertat per al polinomi P . Més concretament, també es podran prefixar per endavant algunes de les arrels de les derivades de P i els valors de les derivades en algunes abscisses. El fet de no haver tingut en compte aquests graus de llibertat en l'enunciat del corol·lari ha estat perquè així s'obté un enunciat més simple.
2. Hi ha moltes altres formes de construir una configuració completa i simple N , de longitud n , i amb $m_N(j) = m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Per exemple, els \tilde{p}_j nodes suplementaris de derivació j que s'han utilitzat en la definició de N_j es poden repartir col·locant-ne uns quants (en nombre parell) entre nodes consecutius de N_{j-1} de derivació $j - 1$, i altres amb l'abscissa més petita (o més gran) que l'abscissa de qualsevol node de N_{j-1} , també en nombre parell. Això donarà lloc a una àmplia gamma de configuracions completes i simples N , totes elles de longitud n i amb $m_N(j) = m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Aplicant el teorema general de representació a cadascuna d'elles s'obtenen polinomis P amb uns graus de llibertat de naturalesa ben diferent.

8.3 Nombre de condicions addicionals

En el teorema 8.6 el polinomi P de l'apartat (iii) té grau n , coeficient principal $\frac{1}{n!}$ i verifica $Z(P) \sim N$ entre d'altres condicions addicionals, on per *condició addicional* entenem qualsevol condició satisfeta pel polinomi P que no es derivi del fet que $Z(P) \sim N$. L'objectiu d'aquest apartat és comptar aquest nombre de condicions addicionals.

En el que segueix P és el polinomi del teorema 8.6 i Ψ és la identificació natural entre N i $Z(P)$. Dit d'una altra manera, Ψ és la restricció a N de la identificació natural $\Psi^* = \Psi_{N^*, H^*}$. Per a un node $\alpha = (x, j) \in N^*$, posem $\tilde{\alpha} = \alpha$ si α pertany a N , i $\tilde{\alpha} = (x, j + 1)$ si α no pertany a N . Notem que el node $\tilde{\alpha}$ sempre és de N i que l'abscissa del node $\Psi[\tilde{\alpha}]$ coincideix amb l'abscissa de $\Psi^*[\alpha]$.

Del teorema 8.6 s'obtenen quatre tipus de condicions addicionals per al polinomi P .

1. *Condicions que provenen de la tria inicial d'abscisses per a Y^* .*

De l'apartat (i) del teorema es desprèn que cada element de la tria inicial d'abscisses per a Y^* determina l'abscissa d'un node de $Z(P)$. En efecte, si

α és un node de Y^* , l'abscissa de $\Psi[\tilde{\alpha}]$ queda completament determinada i val $y^{0,*}[\alpha]$. Per tant, en total hi ha

$$\sharp Y^* \quad (8.27)$$

condicions addicionals degudes a la tria inicial d'abscisses per a Y^* .

2. *Condicions que provenen de la proporció inicial per a T^* .*

Cada element de la proporció inicial per a T^* determina localment la proporció existent entre les abscisses de tres nodes de $Z(P)$. En efecte, sigui $\alpha = (x, j)$ un node de T^* . De l'apartat (ii) del teorema resulta, en particular, que tres dels quatre nodes

$$\Psi^*[\alpha], \Psi^*[\sigma_{N^*}^-[\alpha]], \Psi^*[\sigma_{N^*}[\alpha]], \Psi^*[\sigma_{N^*}^+[\alpha]] \quad (8.28)$$

tenen la seva abscissa lligada per una proporció t_α , on $|t_\alpha - t^*[\alpha]| < \varepsilon^*[\alpha]$. Per tant, prenent $\varepsilon^*[\alpha]$ suficientment petit, la proporció t_α serà tan pròxima com vulguem a $t^*[\alpha]$ i queda determinada localment. Tenint ara en compte que les abscisses dels nodes de (8.28) coincideixen respectivament amb les abscisses dels nodes

$$\Psi[\tilde{\alpha}], \Psi\left[\widetilde{\sigma_{N^*}^-[\alpha]}\right], \Psi\left[\widetilde{\sigma_{N^*}[\alpha]}\right], \Psi\left[\widetilde{\sigma_{N^*}^+[\alpha]}\right] \quad (8.29)$$

resulta que tres d'aquests quatre nodes també tenen la seva abscissa lligada per la proporció t_α . Donat que els nodes de (8.29) són tots ells de $Z(P)$, obtenim que en efecte cada node $\alpha \in T^*$ determina localment la proporció existent entre les abscisses de tres nodes de $Z(P)$. Com que això és vàlid per a cada $\alpha \in T^*$, en total hi ha

$$\sharp T^* \quad (8.30)$$

condicions addicionals degudes a la proporció inicial per a T^* .

3. *Condicions degudes a l'elecció dels nombres w_α , $\alpha \in N^* \setminus N$.*

Per l'apartat (iii) sabem que si $\alpha \in N^* \setminus N$ aleshores el polinomi P verifica $P[\Psi^*[\alpha]] = w_\alpha$. En total hi ha

$$\sharp(N^* \setminus N) = \sharp N^* - \sharp N \quad (8.31)$$

condicions addicionals degudes a l'elecció dels nombres w_α , $\alpha \in N^* \setminus N$.

4. *Condicions que provenen del fet que Ψ és la restricció de Ψ^* a N .*

La identificació natural Ψ conserva l'ordre entre les abscisses de certs nodes

que tenen derivacions que difereixen en dues unitats. En efecte, si α és un node que pertany a $N^* \setminus N$, com que Ψ^* conserva 1-abscisses i l'abscissa de $\Psi^*[\alpha]$ és igual a l'abscissa de $\Psi[\tilde{\alpha}]$, obtenim que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $\tilde{\alpha}$ i β , on β és un node qualsevol de N amb derivació $j-1$. Aquest fet està esquematitzat a la següent figura, on les situacions (i), (ii) i (iii) en N produeixen les situacions (i), (ii) i (iii) en $Z(P)$ respectivament.

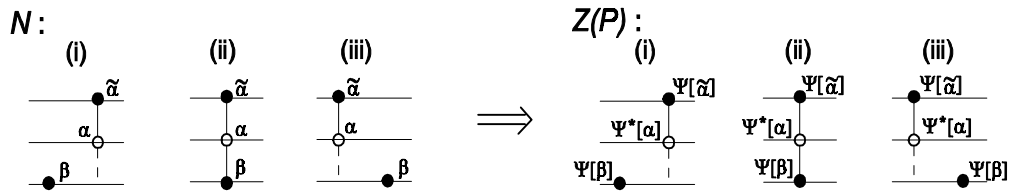


Figura 8.15

En el cas (ii) hi ha igualtat entre les abscisses dels nodes $\Psi[\tilde{\alpha}]$ i $\Psi[\beta]$. Aquest fet és important ja que permet assegurar que hi ha igualtat entre abscisses de nodes de $Z(P)$ que tenen derivacions que difereixen en dues unitats. Més concretament, per a cada node $\alpha = (x, j)$ que pertany a $N^* \setminus N$ i tal que el node $(x, j - 1)$ pertany a N , s'obté igualtat entre les abscisses dels nodes $\Psi[(x, j - 1)]$ i $\Psi[(x, j + 1)]$. Per tant, en total, d'igualtat d'abscisses d'aquest tipus n'hi ha tantes com el cardinal

$$\epsilon = \#\{(x, j) \in N^* \setminus N \mid (x, j - 1) \in N\} \tag{8.32}$$

El següent resultat l'utilitzarem més endavant.

Lema 8.14. *El nombre ϵ de (8.32) verifica*

$$\#\mathcal{P}_N = \#\mathcal{P}_{N^*} + \epsilon$$

on \mathcal{P}_N i \mathcal{P}_{N^*} són els conjunts formats, respectivament, pels peus de N i pels peus de N^* .

Demostració. Si $(x, j - 1)$ és un node de $N^* \setminus N$ aleshores el node (x, j) pertany a N . A partir d'això és senzill veure que $\mathcal{P}_N = A \cup B$, on

$$\begin{aligned} A &= \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j - 1) \in N^* \setminus N\} \\ B &= \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j) \in N, (x, j - 1) \notin N^*\}. \end{aligned}$$

Els conjunts A i B són disjunts i per tant $\#\mathcal{P}_N = \#A + \#B$. D'altra banda, A admet la descomposició $A = A_1 \cup A_2$, on

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j-1) \in N^* \setminus N, (x, j-2) \in N\} \\ A_2 &= \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid (x, j-1) \in N^* \setminus N, (x, j-2) \notin N^*\}. \end{aligned}$$

Aquest fet és conseqüència de que no es pot donar simultàniament $(x, j-1) \in N^* \setminus N$ i $(x, j-2) \in N^* \setminus N$. De tot això resulta

$$\#\mathcal{P}_N = \#A_1 + \#A_2 + \#B.$$

El cardinal de A_1 és igual al nombre ϵ de (8.32), mentre que la suma $\#A_2 + \#B$ coincideix amb el cardinal de \mathcal{P}_{N^*} . En efecte, donat que

$$\begin{aligned} \#A_2 &= \#\{(x, j) \in N^* \setminus N \mid (x, j-1) \notin N^*\} \\ \#B &= \#\{(x, j) \in N \mid (x, j-1) \notin N^*\} \end{aligned}$$

es té

$$\#A_2 + \#B = \#\{(x, j) \in N^* \mid (x, j-1) \notin N^*\} = \#\mathcal{P}_{N^*}$$

En definitiva hem provat que $\#\mathcal{P}_N = \epsilon + \#\mathcal{P}_{N^*}$, tal com volíem veure. \square

La suma dels nombres (8.27), (8.30), (8.31) i (8.32) és el nombre total de condicions addicionals. Aquest nombre el denotarem c_a . És a dir,

$$c_a = \#Y^* + \#T^* + \#N^* - \#N + \epsilon \quad (8.33)$$

Tenint ara en compte que el conjunt de tots els peus de N^* es descompon en la forma $\mathcal{P}_{N^*} = Y^* \cup T^* \cup U^*$, on U^* és el conjunt format pels peus interiors de N^* que tenen multiplicitat senar, resulta

$$\#Y^* + \#T^* = \#\mathcal{P}_{N^*} - \#U^* = \#\mathcal{P}_{N^*} - e_{N^*} = \#\mathcal{P}_{N^*} - (\#N^* - n) \quad (8.34)$$

on per a l'última igualtat s'ha utilitzat la fórmula de la longitud. De (8.33), (8.34) i el lema 8.14 s'obté

$$\begin{aligned} c_a &= \#\mathcal{P}_{N^*} - (\#N^* - n) + \#N^* - \#N + \#\mathcal{P}_N - \#\mathcal{P}_{N^*} \\ &= \#\mathcal{P}_N + n - \#N = n - (\#N - \#\mathcal{P}_N) \end{aligned} \quad (8.35)$$

És a dir, el nombre total de condicions addicionals és $c_a = n - (\#N - \#\mathcal{P}_N)$.

Anem a veure ara que aquest nombre c_a és el nombre màxim de condicions addicionals que a priori podíem esperar. En efecte, el polinomi P té grau n i coeficient principal prefixat. Per tant, en principi aquest polinomi depèn de n paràmetres lliures, però com que el seu espectre verifica $Z(P) \sim N$, cada peu de N amb multiplicitat m determina $m - 1$ igualtats entre abscisses de nodes de $Z(P)$. En total doncs, hi ha

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} (\text{mult}_N[\alpha] - 1) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} \text{mult}_N[\alpha] - \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_N} 1 = \#N - \#\mathcal{P}_N$$

igualtats entre abscisses de nodes de $Z(P)$. Així que de fet P depèn de $n - (\#N - \#\mathcal{P}_N)$ paràmetres lliures, que és exactament el nombre c_a de condicions addicionals verificades pel polinomi P .

Com a conclusió d'aquest apartat s'obté que *el nombre de condicions addicionals obtingudes en el teorema 8.6 és el màxim possible*. Observem que aquesta conclusió és anàloga a l'obtinguda en la secció 6.3.1, només que allà les condicions addicionals del teorema 6.4 anaven totes elles associades a paràmetres o graus de llibertat.

Capítol 9

Nombre d'esquemes complets

En aquest capítol es donen fórmules per al càlcul del nombre d'esquemes complets de longitud n , i del nombre d'esquemes complets i simples de longitud n , $n \geq 1$. En virtut del teorema de representació, aquests nombres coincideixen respectivament amb el nombre de classes de polinomis de grau n , $\#\mathcal{R}_n^*$, i el nombre de classes de polinomis obertes de grau n , $\#\mathcal{R}_n^{*,o}$.

Les fórmules obtingudes no són explícites, sinó que requereixen haver calculat prèviament uns nombres definits recurrentment en n . Finalment, mitjançant l'ajut de l'ordinador s'utilitzaran aquestes fórmules per donar el nombre d'esquemes complets de longitud n , i el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n quan $n \leq 100$.

9.1 Nombres auxiliars

En aquest apartat introduïrem certs nombres que necessitarem més endavant.

Per a un multi-índex $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m) \in \mathbb{N}^m$ sigui $|\mathbf{q}| = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_m$. És ben coneguda la igualtat

$$\#\{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^m \mid |\mathbf{q}| = q\} = \binom{q + m - 1}{m - 1}, \quad (9.1)$$

vàlida per a $m, q \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Definició 9.1. Siguin d, m i q tres nombres naturals amb $0 \leq d \leq m$. Es defineix el nombre $F_{dm}(q)$ de la següent manera. Quan $d \geq 1$ aleshores

$$F_{dm}(q) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^m \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_1)(1 + 2\mathbf{q}_2) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_d) \quad (9.2)$$

i si $d = 0$,

$$F_{0m}(q) = \begin{cases} \binom{q+m-1}{m-1}, & \text{si } m \geq 1 \\ 0, & \text{si } m = 0 \text{ i } q \geq 1 \\ 1, & \text{si } m = q = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Observem que quan $d \geq 1$, cada sumand de (9.2) només involucra les d primeres components de \mathbf{q} . A més a més, s'obté el mateix nombre $F_{dm}(q)$ si es consideren d components qualssevol de \mathbf{q} , no necessàriament les d primeres. Això és, si σ_i , $i = 1, 2, \dots, d$, són nombres naturals amb $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_d \leq m$, aleshores

$$F_{dm}(q) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^m \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_{\sigma_1})(1 + 2\mathbf{q}_{\sigma_2}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\sigma_d}).$$

Aquest fet és conseqüència de que al permutar les components d'un multi-índex \mathbf{q} , s'obté un nou multi-índex \mathbf{p} que verifica $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$.

Com a exemple, quan $d = m = 1$ resulta

$$F_{1,1}(q) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N} \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}) = 1 + 2q \quad (9.4)$$

i quan $d = m = 2$,

$$\begin{aligned} F_{2,2}(q) &= \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^2 \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_1)(1 + 2\mathbf{q}_2) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=q}} (1 + 2i)(1 + 2j) \\ &= \sum_{i=0}^q (1 + 2i)(1 + 2(q - i)) = \frac{(q + 1)(2q^2 + 4q + 3)}{3} \end{aligned} \quad (9.5)$$

L'última igualtat s'obté utilitzant que $\sum_{i=0}^q i = \frac{q(q+1)}{2}$, $\sum_{i=0}^q i^2 = \frac{q(q+1)(2q+1)}{6}$.

En general, per calcular de forma eficient els valors $F_{dm}(q)$, $q \geq 0, 0 \leq d \leq m$, utilitzarem el següent resultat.

Proposició 9.2. *Siguin d, m i q tres nombres naturals amb $1 \leq d \leq m$. Aleshores*

$$F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q F_{ss}(k) F_{d-s, m-s}(q-k) \quad (9.6)$$

sempre que $0 \leq s \leq d$.

Demostració. Quan $s = 0$ la igualtat (9.6) s'obté immediatament de (9.3). Suposem que $1 \leq s < d$. Per a un multi-índex $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m)$, siguin $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^s$ i $\bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-s}$ els multi-índexs obtinguts de separar les components de \mathbf{q} en la forma

$$\mathbf{q} = \underbrace{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s)}_{\bar{\mathbf{q}}} \underbrace{(\mathbf{q}_{s+1}, \mathbf{q}_{s+2}, \dots, \mathbf{q}_d, \dots, \mathbf{q}_m)}_{\bar{\bar{\mathbf{q}}}}.$$

Abreujadament posarem $\mathbf{q} = (\bar{\mathbf{q}}; \bar{\bar{\mathbf{q}}})$. Es verifica que

$$\begin{aligned} F_{dm}(q) &= \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^m \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_1) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_s)(1 + 2\mathbf{q}_{s+1}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_d) \\ &= \sum_{\substack{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^s, \bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-s} \\ |\bar{\mathbf{q}}| + |\bar{\bar{\mathbf{q}}}| = q}} (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_s)(1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_{d-s}) \quad (9.7) \end{aligned}$$

Aquest fet és conseqüència d'escriure els multi-índexs $\bar{\mathbf{q}}$ i $\bar{\bar{\mathbf{q}}}$ en la forma $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \dots, \bar{\mathbf{q}}_s)$, $\bar{\bar{\mathbf{q}}} = (\bar{\bar{\mathbf{q}}}_1, \bar{\bar{\mathbf{q}}}_2, \dots, \bar{\bar{\mathbf{q}}}_{m-s})$. Continuant en (9.7) resulta

$$F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q \sum_{\substack{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^s, \bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-s} \\ |\bar{\mathbf{q}}|=k, |\bar{\bar{\mathbf{q}}}|=q-k}} (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_s)(1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_{d-s}) \quad (9.8)$$

i utilitzant la propietat distributiva,

$$\begin{aligned} F_{dm}(q) &= \sum_{k=0}^q \left(\sum_{\substack{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^s \\ |\bar{\mathbf{q}}|=k}} (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_s) \right) \left(\sum_{\substack{\bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-s} \\ |\bar{\bar{\mathbf{q}}}|=q-k}} (1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\bar{\mathbf{q}}}_{d-s}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^q F_{ss}(k) F_{d-s, m-s}(q-k) \end{aligned}$$

i per tant, quan $1 \leq s < d$ ja hem acabat. Suposem finalment $s = d$ i hem de veure que $F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q F_{dd}(k)F_{0,m-d}(q-k)$. Això és trivial quan $m = d$, així que podem suposar $m > d$. En aquest cas, separant les components de \mathbf{q} com abans, $\mathbf{q} = (\bar{\mathbf{q}}; \bar{\bar{\mathbf{q}}})$, $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^d$, $\bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-d}$, la igualtat (9.8) continua essent vàlida, d'on

$$\begin{aligned} F_{dm}(q) &= \sum_{k=0}^q \sum_{\substack{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^d, \bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-d} \\ |\bar{\mathbf{q}}|=k, |\bar{\bar{\mathbf{q}}}|=q-k}} (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_d) \\ &= \sum_{k=0}^q \#\{\bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{N}^{m-d} \mid |\bar{\bar{\mathbf{q}}}| = q - k\} \sum_{\substack{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}^d \\ |\bar{\mathbf{q}}|=k}} (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_1) \cdots (1 + 2\bar{\mathbf{q}}_d) \\ &= \sum_{k=0}^q \binom{q - k + m - d - 1}{m - d - 1} F_{dd}(k) = \sum_{k=0}^q F_{dd}(k)F_{0,m-d}(q - k) \end{aligned}$$

i també hem acabat. □

D'aquesta proposició es deriven vàries conseqüències.

- Quan $s = d$ resulta

$$\begin{aligned} F_{dm}(q) &= \sum_{k=0}^q F_{dd}(k)F_{0,m-d}(q - k) \\ &= \sum_{k=0}^q F_{dd}(k) \binom{q - k + m - d - 1}{m - d - 1} \end{aligned} \quad (9.9)$$

Aquest últim pas és vàlid sempre que $m > d$, i permet calcular $F_{dm}(q)$ a partir de nombres del tipus $F_{dd}(k)$, $0 \leq k \leq q$. Per exemple, de (9.4) i (9.5) obtenim que si $m > 1$ aleshores

$$F_{1m}(q) = \sum_{k=0}^q (1 + 2k) \binom{q - k + m - 2}{m - 2} \quad (9.10)$$

i si $m > 2$,

$$F_{2m}(q) = \sum_{k=0}^q \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3)}{3} \binom{q - k + m - 3}{m - 3} \quad (9.11)$$

- Quan $s = 1$ resulta

$$F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q (1 + 2k)F_{d-1,m-1}(q - k) \quad (9.12)$$

Això és una fórmula recurrent perquè permet calcular $F_{dm}(q)$ a partir de nombres del tipus $F_{d-1,m-1}(q')$, $0 \leq q' \leq q$. Després de d iteracions arribarem als nombres $F_{0,m-d}(q')$, $0 \leq q' \leq q$, tots ells coneguts.

- Quan $s = 2$ resulta

$$F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q \frac{(k+1)(2k^2+4k+3)}{3} F_{d-2,m-2}(q-k) \quad (9.13)$$

Això permet calcular $F_{dm}(q)$ a partir dels nombres $F_{d-2,m-2}(q')$, $0 \leq q' \leq q$. Després de $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ iteracions s'arriba als nombres $F_{0,m-d}(q')$, $0 \leq q' \leq q$, si d és parell, i als nombres $F_{1,m-d+1}(q')$, $0 \leq q' \leq q$, si d és senar. Aquests poden calcular-se mitjançant (9.10) o bé emprant una iteració de (9.12).

9.1.1 Els nombres $e_n(d, p)$

Per a un nombre natural $n \geq 1$, sigui

$$V_n = \{(d, p) \in \mathbb{N}^2 \mid d + 2p \leq n, d \stackrel{(2)}{\equiv} n\} \quad (9.14)$$

on la notació $d \stackrel{(2)}{\equiv} n$ indica que els nombres d i n tenen la mateixa paritat. Per exemple, $V_1 = \{(1, 0)\}$, $V_2 = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0)\}, \dots$. Fent el canvi $d = n - 2i$, $i \geq 0$, resulta

$$V_n = \left\{ (n - 2i, p) \mid 0 \leq p \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}.$$

En particular el cardinal de V_n és

$$\#V_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^i 1 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (i+1) = \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right)}{2}.$$

Definició 9.3. Es defineixen recurrentment els nombres $\{e_n(d, p)\}_{n \geq 1, (d,p) \in V_n}$ per

$$e_1(1, 0) = 1 \quad (9.15)$$

i si $n \geq 2$ i $(d, p) \in V_n$ aleshores

$$e_n(d, p) = \sum_{\substack{(d', p') \in V_{n-1} \\ d' \geq d+2p-1}} \binom{d+p+\frac{d'+1-(d+2p)}{2}}{d+p} F_{d,d'+1}(p') e_{n-1}(d', p') \quad (9.16)$$

Observem que fixat n , l'expressió anterior permet calcular cada nombre $e_n(d, p)$, amb $(d, p) \in V_n$, a partir dels nombres del tipus $e_{n-1}(d', p')$, $(d', p') \in V_{n-1}$, i per tant és una fórmula recursiva en n . Quan $n = 1$ es té $V_1 = \{(1, 0)\}$ i conseqüentment a (9.15) queda definit l'únic $e_1(d, p)$ amb $(d, p) \in V_1$. Notem també que el nombre $\frac{d'+1-(d+2p)}{2}$ que apareix a (9.16) és en efecte un nombre natural, ja que $d' + 1 \geq d + 2p$ i

$$d' + 1 - (d + 2p) \stackrel{(2)}{\equiv} d' + 1 - d \stackrel{(2)}{\equiv} n - n \stackrel{(2)}{\equiv} 0 .$$

Hi ha altres maneres d'escriure l'expressió (9.16). Representant els parells $(d', p') \in V_{n-1}$ en la forma $(d', p') = (n - 1 - 2i', p')$, $0 \leq p' \leq i' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, la condició $d' \geq d + 2p - 1$ equival a $i' \leq \frac{n-(d+2p)}{2}$, i per tant, (9.16) es converteix en

$$e_n(d, p) = \sum_{i'=0}^{\frac{n-(d+2p)}{2}} \sum_{p'=0}^{i'} \binom{d+p+\frac{n-(2i'+d+2p)}{2}}{d+p} F_{d, n-2i'}(p') e_{n-1}(n-1-2i', p')$$

amb el conveni que si $d = p = 0$ i $i' = \frac{n}{2}$, aleshores $e_{n-1}(n-1-2i', p') = e_{n-1}(-1, p') = 0$. Si a més a més posem el parell $(d, p) \in V_n$ en la forma $(d, p) = (n-2i, p)$, $0 \leq p \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, resulta

$$e_n(n-2i, p) = \sum_{i'=0}^{i-p} \sum_{p'=0}^{i'} \binom{n-i-i'}{n-2i+p} F_{n-2i, n-2i'}(p') e_{n-1}(n-1-2i', p') \quad (9.17)$$

on si n és parell, $i = \frac{n}{2}$, $p = 0$ i $i' = \frac{n}{2}$, aleshores $e_{n-1}(n-1-2i', p') = e_{n-1}(-1, p') = 0$. Aquesta expressió és vàlida sempre que $0 \leq p \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, i per tant a partir d'ella es poden anar calculant tots els nombres $e_n(d, p)$ amb $(d, p) \in V_n$.

La resta de l'apartat està dedicat a analitzar l'estructura dels nombres de la forma $F_{dm}(q)$ que apareixen en el càlcul dels $e_n(d, p)$, $(d, p) \in V_n$, $n \geq 2$, amb l'objectiu d'obtenir-los d'una manera eficient.

Suposem donat un nombre natural $n_0 \geq 2$ i que el nostre propòsit és obtenir els nombres $e_{n_0}(d, p)$, $(d, p) \in V_{n_0}$. Cal doncs anar calculant els nombres $e_n(d, p)$, $(d, p) \in V_n$, recurrentment en n . Això és, comencem amb el valor $e_1(1, 0) = 1$, i després, per a cada iteració $n = 2, 3, \dots, n_0$, l'expressió (9.16) permet obtenir cada $e_n(d, p)$, $(d, p) \in V_n$, a partir dels nombres del tipus $e_{n-1}(d', p')$, $(d', p') \in V_{n-1}$. En aquesta expressió es requereix conèixer $F_{d, d'+1}(p')$ si $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d + 2p - 1$.

Definició 9.4. Direm que una terna de nombres naturals (d, m, q) és n_0 -imprescindible si després d'haver completat totes les iteracions, $n = 2, 3, \dots, n_0$, en algun moment s'haurà fet necessari utilitzar el valor $F_{dm}(q)$. Més exactament, la terna (d, m, q) és n_0 -imprescindible si existeixen un nombre natural n , $2 \leq n \leq n_0$, un parell (d, p) tal que $(d, p) \in V_n$, i un parell (d', p') amb $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d+2p-1$, de manera que $(d, m, q) = (d, d' + 1, p')$.

És fàcil veure que si (d, m, q) és una terna n_0 -imprescindible aleshores, després d'haver completat totes les iteracions $n = 2, 3, \dots, n_0$, el valor $F_{dm}(q)$ s'haurà fet servir moltes vegades (en general més d'una). Així, per tal de no repetir càlculs innecessaris, abans de començar amb la primera iteració $n = 2$ calcularem tots els nombres $F_{dm}(q)$ amb (d, m, q) terna n_0 -imprescindible. D'aquesta forma ens assegurem que a l'hora de calcular els nombres $e_n(d, p)$, $(d, p) \in V_n$, $n = 2, 3, \dots, n_0$, els valors $F_{dm}(q)$ que es necessitin en cada moment seran coneguts.

El conjunt format per totes les ternes n_0 -imprescindibles és

$$\bar{A} = \bigcup_{n=2}^{n_0} \bar{A}_n$$

on

$$\bar{A}_n = \bigcup_{(d,p) \in V_n} \{(d, d' + 1, p') \mid (d', p') \in V_{n-1}, d' \geq d + 2p - 1\}.$$

El nostre propòsit és donar un procediment per calcular els nombres $F_{dm}(q)$ amb $(d, m, q) \in \bar{A}$. Primerament posarem el conjunt \bar{A} en forma més convenient. Sigui

$$A = \{(d, m, q) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq d \leq m \leq n_0, d \stackrel{(2)}{\equiv} m, m + 2q \leq n_0\} \quad (9.18)$$

Notem que $(0, 0, q) \in A$ si $q = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$.

Proposició 9.5. Si $n_0 \geq 3$ aleshores

$$\bar{A} = A \setminus \left\{ (0, 0, q) \mid q = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Demostració. Anem a provar primer la inclusió \subseteq . Sigui n un nombre natural amb $2 \leq n \leq n_0$, i considerem un parell $(d, p) \in V_n$. Hem de veure que si $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d + 2p - 1$, aleshores la terna $(d, d' + 1, p')$ pertany a $A \setminus \left\{ (0, 0, q) \mid q = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor \right\}$. Que $(d, d' + 1, p') \notin \left\{ (0, 0, q) \mid q = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor \right\}$ és trivial perquè $d' + 1 \geq 1$. Anem a provar ara que $(d, d' + 1, p') \in A$. És a dir,

hem de veure que es satisfan les tres condicions següents: (i) $0 \leq d \leq d' + 1 \leq n_0$, (ii) $d \stackrel{(2)}{\equiv} d' + 1$, i (iii) $d' + 1 + 2p' \leq n_0$. Com que $(d, p) \in V_n$, $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d + 2p - 1$, es verifiquen les propietats següents: (a) $d \stackrel{(2)}{\equiv} n$, (b) $d + 2p \leq n$, (c) $d' \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$, (d) $d' + 2p' \leq n - 1$, i (e) $d' \geq d + 2p - 1$.

De (a) i (c) resulta (ii). De (d) es dedueix que $n_0 \geq n \geq d' + 2p' + 1 \geq d' + 1$, i de (e) que $d' + 1 \geq d + 2p \geq d$. Això implica (i). Finalment, utilitzant de nou (d) resulta (iii). Hem vist la inclusió \subseteq .

Anem a veure \supseteq . Sigui $(d, m, q) \in A$ amb $(d, m, q) \notin \{(0, 0, q) \mid q = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor\}$. Això implica $d \geq 1$ ó $m \geq 1$, i com que $(d, m, q) \in A$, i en particular $d \leq m$, forçosament és $m \geq 1$. Hem de provar que $(d, m, q) \in \bar{A}$. És a dir, que existeixen un nombre natural n , $2 \leq n \leq n_0$, un parell (d, p) , $(d, p) \in V_n$, i un parell (d', p') amb $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d + 2p - 1$, de manera que $(d, m, q) = (d, d' + 1, p')$. Considerem els nombres n, p, d' i p' definits per

$$n = \begin{cases} n_0, & \text{si } d \stackrel{(2)}{\equiv} n_0 \\ n_0 - 1, & \text{si } d \stackrel{(2)}{\equiv} n_0 - 1 \end{cases}, \quad p = 0, \quad d' = m - 1, \quad \text{i } p' = q.$$

Donat que $(d, m, q) \in A$, és

$$0 \leq d \leq d' + 1 \leq n_0, \quad d \stackrel{(2)}{\equiv} d' + 1, \quad d' + 1 + 2p' \leq n_0 \quad (9.19)$$

Per altra banda $2 \leq n \leq n_0$ puix que $n_0 \geq 3$. A més a més $n \stackrel{(2)}{\equiv} d$ i $n \geq d$. D'aquí que $(d, p) = (d, 0) \in V_n$. Per al parell (d', p') es verifica que $d' \stackrel{(2)}{\equiv} d - 1 \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$ i $d' + 2p' \leq n - 1$. En efecte, de (9.19) obtenim que $d' + 2p' \leq n_0 - 1$. Si $d \stackrel{(2)}{\equiv} n_0$ tindrem que $d' + 2p' \leq n - 1$, ja que en aquest cas $n = n_0$. En canvi, si $d \stackrel{(2)}{\equiv} n_0 - 1$ aleshores $d' \stackrel{(2)}{\equiv} d - 1 \stackrel{(2)}{\equiv} n_0$, i de la desigualtat $d' + 2p' \leq n_0 - 1$ es dedueix que $d' + 2p' \leq n_0 - 2 = n - 1$.

Observem també que $d' \geq d - 1 = d + 2p - 1$. De tot això resulta $2 \leq n \leq n_0$, $(d, p) \in V_n$, $(d', p') \in V_{n-1}$ i $d' \geq d + 2p - 1$. Tenint en compte que $(d, m, q) = (d, d' + 1, p')$, obtenim $(d, m, q) \in \bar{A}$. Això completa la demostració. \square

La hipòtesi $n_0 \geq 3$ no és restrictiva pel fet que l'obtenció dels nombres $e_{n_0}(d, p)$, $(d, p) \in V_{n_0}$, involucra també el càlcul dels $e_2(d, p)$, $(d, p) \in V_2$.

De la proposició anterior es dedueix que per obtenir els nombres de la forma $F_{dm}(q)$, $(d, m, q) \in \bar{A}$, és suficient calcular els nombres $F_{dm}(q)$ amb $(d, m, q) \in A$. Observem que el cost de càlcul d'uns i altres és el mateix, ja que si $q = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$, aleshores el valor de $F_{0,0}(q)$ ve donat explícitament en (9.3).

Proposició 9.6. *El conjunt A té la següent propietat. Si $(d, m, q) \in A$ i $d \geq 1$, aleshores $(d-1, m-1, q') \in A$ per a tot $q' = 0, 1, \dots, q$.*

Demostració. Si $(d, m, q) \in A$ i $d \geq 1$, serà $1 \leq d \leq m \leq n_0$, $d \stackrel{(2)}{\equiv} m$ i $m + 2q \leq n_0$. Això implica que $0 \leq d-1 \leq m-1 \leq n_0$, $d-1 \stackrel{(2)}{\equiv} m-1$, i $m-1 + 2q' \leq n_0$ per a tot $q' = 0, 1, \dots, q$. Per tant $(d-1, m-1, q') \in A$ si $q' = 0, 1, \dots, q$. \square

Comentari 9.7. La propietat de la proposició anterior, juntament amb la recurrència (9.12), permeten calcular tots els nombres $F_{dm}(q)$, $(d, m, q) \in A$, per nivells d , tal com es descriu a continuació:

1. Quan $d = 0$ comencem amb els nombres $F_{0m}(q)$ tals que $(0, m, q) \in A$. Aquests vénen donats en (9.3).
2. Sigui $d \geq 1$ i suposem que hem calculat els nombres del tipus $F_{d-1,m}(q)$ amb $(d-1, m, q) \in A$. Hem de veure que a partir d'aquests podem obtenir tots els $F_{dm}(q)$ amb $(d, m, q) \in A$. En efecte, si $(d, m, q) \in A$, de la proposició 9.6 es desprèn que $(d-1, m-1, q-k) \in A$ per a tot $k = 0, 1, \dots, q$, i en particular, per hipòtesi, els nombres $F_{d-1,m-1}(q-k)$, $k = 0, 1, \dots, q$, són coneguts. Finalment, el valor de $F_{dm}(q)$ s'obté a partir d'aquests emprant (9.12), d'on $F_{dm}(q) = \sum_{k=0}^q (1+2k)F_{d-1,m-1}(q-k)$.

El comentari anterior dona un procediment per al càlcul dels nombres $F_{dm}(q)$, $(d, m, q) \in A$, i en particular també per als nombres $F_{dm}(q)$, $(d, m, q) \in \bar{A}$.

Finalment, observem que el conjunt A admet una expressió més senzilla fent el canvi $m = d + 2j$, $j \geq 0$, resultant que

$$A = \{(d, d + 2j, q) \mid d, j, q \geq 0, d + 2j + 2q \leq n_0\} \quad (9.20)$$

o, equivalentment,

$$A = \left\{ (d, d + 2j, q) \mid 0 \leq d \leq n_0, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n_0 - d}{2} \right\rfloor, 0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n_0 - d}{2} \right\rfloor - j \right\}.$$

El procediment obtingut en el comentari 9.7 pot fer-se seguint el següent algorisme.

Algorisme 9.8.

Pas 1. Càlcul dels $F_{0m}(q)$ tals que $(0, m, q) \in A$.

- $F_{0,0}(0) = 1$

- Per a $q = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor$,

$$F_{0,0}(q) = 0$$

- Per a $j = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor$; $q = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor - j$,

$$F_{0,2j}(q) = \binom{q + 2j - 1}{2j - 1}$$

Pas 2. Càlcul dels $F_{dm}(q)$, $(d, m, q) \in A$, $d \geq 1$.

- Per a $d = 1, 2, \dots, n_0$; $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0-d}{2} \right\rfloor$; $q = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_0-d}{2} \right\rfloor - j$,

$$F_{d,d+2j}(q) = \sum_{k=0}^q (1 + 2k) F_{d-1,d+2j-1}(q-k)$$

9.1.2 Els nombres $e_n(d)$

Signi n un nombre natural, $n \geq 1$, i considerem el conjunt

$$V_n^s = \{d \in \mathbb{N} \mid 0 \leq d \leq n, d \equiv n \pmod{2}\} \quad (9.21)$$

Dit d'una altra manera, $V_n^s = \{d \in \mathbb{N} \mid (d, 0) \in V_n\}$. Per exemple, $V_1^s = \{1\}$, $V_2^s = \{0, 2\}$, ... El canvi $d = n - 2i$, $i \geq 0$, mostra que

$$V_n^s = \left\{ n - 2i \mid 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

i, en particular, el cardinal de V_n^s és $\#V_n^s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Definició 9.9. Es defineixen recurrentment els nombres $\{e_n(d)\}_{n \geq 1, d \in V_n^s}$ per

$$e_1(1) = 1 \quad (9.22)$$

i si $n \geq 2$ i $d \in V_n^s$,

$$e_n(d) = \sum_{\substack{d' \in V_{n-1}^s \\ d' \geq d-1}} \binom{d + \frac{d'+1-d}{2}}{d} e_{n-1}(d') \quad (9.23)$$

Les mateixes consideracions que abans són vàlides. Això és, l'expressió (9.23) és recursiva en n donat que permet calcular cada nombre $e_n(d)$, amb $d \in V_n^s$, a

partir dels nombres del tipus $e_{n-1}(d')$, $d' \in V_{n-1}^s$. Quan $n = 1$ és $V_1^s = \{1\}$ i consegüentment a (9.22) queda definit l'únic $e_1(d)$ amb $d \in V_1^s$. Fent el canvi $d' = n - 1 - 2i'$, $0 \leq i' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, aleshores (9.23) pren la forma

$$e_n(d) = \sum_{i'=0}^{\frac{n-d}{2}} \binom{d + \frac{n-d}{2} - i'}{d} e_{n-1}(n - 1 - 2i')$$

on si $d = 0$ i $i' = \frac{n}{2}$, és $e_{n-1}(n - 1 - 2i') = e_{n-1}(-1) = 0$. A més a més, posant d en la forma $d = n - 2i$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, resulta

$$e_n(n - 2i) = \sum_{i'=0}^i \binom{n - i - i'}{n - 2i} e_{n-1}(n - 1 - 2i') \tag{9.24}$$

Aquesta expressió és vàlida per a tot $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, i permet anar obtenint tots els $e_n(d)$ amb $d \in V_n^s$.

9.2 Tipus de paritat d'un esquema complet

Definició 9.10. Considerem una configuració completa N . Siguin $(y_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, d$, els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar, ordenats per ordre creixent d'abscisses, i siguin $y_0 = -\infty, y_{d+1} = +\infty$. Considerem, per a cada $i = 0, 1, \dots, d$, el nombre \mathbf{p}_i definit com el nombre de nodes de N que tenen derivació zero i abscissa estrictament compresa entre y_i i y_{i+1} . És a dir,

$$\mathbf{p}_i = \#\{(x, 0) \in N \mid y_i < x < y_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \dots, d.$$

Anomenem *tipus de paritat* de N , o simplement *tipus* de N , al parell $(d; \mathbf{p})$, on \mathbf{p} és el multi-índex

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d) \in \mathbb{N}^{d+1}.$$

A la següent figura hi ha representats els nodes de derivació zero d'una configuració completa de tipus $(d; \mathbf{p})$. Els nodes encerclats són els que tenen derivació zero i multiplicitat senar.

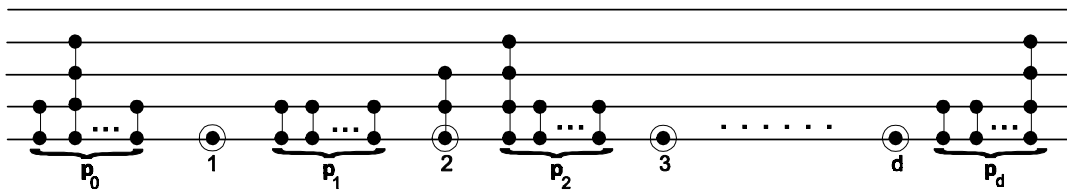


Figura 9.1. Configuració completa de tipus $(d; \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d)$.

Observem que per a una configuració completa N de tipus $(d; \mathbf{p})$, el nombre de nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar és igual a d , mentre que el nombre de nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat parell coincideix amb $|\mathbf{p}|$. En particular,

$$d + |\mathbf{p}| = m_N(0).$$

Observem també que si N_1 i N_2 són dues configuracions completes tals que $N_1 \sim N_2$, aleshores tenen el mateix tipus.

Proposició 9.11. *Sigui N una configuració completa de longitud n i de tipus $(d; \mathbf{p})$. Aleshores $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$, on V_n és el conjunt definit a (9.14). Si a més a més N és simple aleshores $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ i $d \in V_n^s$.*

Demostració. Siguin $(y_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, d$, els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar. Considerem també els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat parell, $(z_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, |\mathbf{p}|$. Aplicant el corol·lari 2.14 resulta

$$n \geq n_N(0) = \sum_{i=1}^d \text{mult}_N[(y_i, 0)] + \sum_{k=1}^{|\mathbf{p}|} \text{mult}_N[(z_k, 0)] \geq \sum_{i=1}^d 1 + \sum_{k=1}^{|\mathbf{p}|} 2 = d + 2|\mathbf{p}|.$$

A més a més totes aquestes desigualtats conserven la paritat, i per tant $n \stackrel{(2)}{\equiv} d + 2|\mathbf{p}| \stackrel{(2)}{\equiv} d$. Hem vist que $d + 2|\mathbf{p}| \leq n$ i $d \stackrel{(2)}{\equiv} n$, i conseqüentment $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$. Si a més N és simple, tots els nodes de N que tenen derivació zero tenen multiplicitat senar. Això implica que $|\mathbf{p}| = 0$ i en conseqüència $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Finalment, donat que $(d, 0) \in V_n$ serà $d \in V_n^s$. Això completa la demostració. \square

Definició 9.12. Sigui $E \in \widehat{\mathcal{E}}$ un esquema complet. Direm que el seu tipus és $(d; \mathbf{p})$ si existeix un representant N de E que té tipus $(d; \mathbf{p})$.

Observem que el tipus de E està ben definit, ja que dos representants qualssevol de E tenen el mateix tipus. Per a un nombre natural $n \geq 1$ i un parell $(d; \mathbf{p})$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1}$, sigui $\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p})$ el conjunt format per tots els esquemes complets de longitud n que tenen tipus $(d; \mathbf{p})$. És a dir,

$$\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = \{E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^* \mid E \text{ té tipus } (d; \mathbf{p})\} \quad (9.25)$$

De la proposició 9.11 es dedueix que si $\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) \neq \emptyset$ aleshores $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$. En

particular es té la descomposició

$$\widehat{\mathcal{E}}_n^* = \bigcup_{d \in \mathbb{N}, \mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1}} \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = \bigcup_{(d,p) \in V_n} \bigcup_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\mathbf{p}|=p}} \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) \quad (9.26)$$

Per a un nombre natural $d \geq 0$, sigui

$$\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) = \{E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} \mid E \text{ té tipus } (d; \mathbf{0})\} \quad (9.27)$$

Dit d'una altra manera, $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) = \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} \cap \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{0})$. El conjunt $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d)$ també es pot definir com el conjunt format pels esquemes complets i simples E de longitud n tals que admeten com a representant una configuració N amb $m_N(0) = d$. Notem que en aquest cas tots els representants N de E verifiquen $m_N(0) = d$. De la proposició 9.11 es desprèn que si $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) \neq \emptyset$ aleshores $d \in V_n^s$, i per tant

$$\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} = \bigcup_{d \in V_n^s} \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) \quad (9.28)$$

9.3 Nombre d'esquemes complets

En aquesta secció demostrarem els dos resultats següents.

Teorema 9.13. *Sigui $n \geq 1$ un nombre natural.*

(i) *Per a tot parell $(d; \mathbf{p})$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1}$, tal que $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$, es verifica*

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = e_n(d, |\mathbf{p}|) \quad (9.29)$$

En particular, el cardinal de $\widehat{\mathcal{E}}_n^(d; \mathbf{p})$ només depèn de d i de $|\mathbf{p}|$.*

(ii) *El nombre d'esquemes complets de longitud n és*

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^* = \sum_{(d,p) \in V_n} \binom{d+p}{d} e_n(d, p) \quad (9.30)$$

Teorema 9.14. *Sigui $n \geq 1$ un nombre natural.*

(i) *Si $d \in V_n^s$ aleshores*

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) = e_n(d) \quad (9.31)$$

(ii) El nombre d'esquemes complets i simples de longitud n és

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} = \sum_{d \in V_n^s} e_n(d) \quad (9.32)$$

Comentari 9.15. L'apartat (ii) d'aquests teoremes permet obtenir el nombre d'esquemes complets de longitud n i el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n a partir de nombres del tipus $e_n(d, p)$ i $e_n(d)$ respectivament. Observem també que l'apartat (ii) de cada teorema es deriva del seu corresponent apartat (i). En efecte, si suposem provat l'apartat (i) del teorema 9.13, aleshores, aplicant cardinals a (9.26) resulta

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^* &= \sum_{(d,p) \in V_n} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\mathbf{p}|=p}} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = \sum_{(d,p) \in V_n} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\mathbf{p}|=p}} e(d, p) \\ &= \sum_{(d,p) \in V_n} e(d, p) \#\{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1} \mid |\mathbf{p}| = p\} \\ &= \sum_{(d,p) \in V_n} \binom{p+d}{d} e(d, p). \end{aligned}$$

És a dir, obtenim (ii). Anàlogament, l'apartat (ii) del teorema 9.14 es dedueix de l'apartat (i) aplicant cardinals a (9.28).

Demostració. És suficient demostrar l'apartat (i) de cada teorema. Per provar aquest apartat el resultat fonamental que utilitzarem és la proposició 9.19.

En el que segueix es consideren fixats un nombre natural $n \geq 1$ i un parell $(d; \mathbf{p})$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$, tal que $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$. A continuació es defineixen algunes funcions que necessitarem més endavant.

- La funció

$$\varphi : \{0, 1, 2, \dots, d+1\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, d+|\mathbf{p}|+1\}$$

ve definida per

$$\varphi(i) = i + \sum_{i'=0}^{i-1} \mathbf{p}_{i'}, \quad i = 0, 1, \dots, d+1 \quad (9.33)$$

Observem que aquesta funció també es pot definir recurrentment per $\varphi(0) = 0$, i $\varphi(i+1) = \varphi(i) + \mathbf{p}_i + 1$ si $i = 0, 1, \dots, d$. Es verifica que

$$0 = \varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(d) < \varphi(d+1) = d + |\mathbf{p}| + 1.$$

Sigui $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}$ un multi-índex, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|})$.

- Es defineix la funció

$$\zeta_{\mathbf{r}} : \{0, 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| + 1\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|\}$$

per

$$\zeta_{\mathbf{r}}(k) = \sum_{k'=0}^{k-1} \mathbf{r}_{k'} + k - i_k, \quad k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}| + 1 \quad (9.34)$$

on si $k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}| + 1$, aleshores

$$i_k = \max\{i \in \{0, 1, \dots, d + 1\} \mid \varphi(i) \leq k\} \quad (9.35)$$

Observem que els nombres i_k verifiquen

$$0 = i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{d+|\mathbf{p}|+1} = d + 1$$

i

$$i_{k+1} \leq i_k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}|.$$

A més a més, $i_{k+1} = i_k + 1$ si i només si $k + 1 = \varphi(i)$ per a algun $i = 0, 1, \dots, d + 1$. De tot això obtenim que $\zeta_{\mathbf{r}}(0) = 0$, $\zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}| + 1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|$, i que si $0 \leq k \leq d + |\mathbf{p}|$ aleshores

$$\zeta_{\mathbf{r}}(k+1) - \zeta_{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{r}_k + 1 - (i_{k+1} - i_k) \geq \mathbf{r}_k \quad (9.36)$$

Per tant,

$$0 = \zeta_{\mathbf{r}}(0) \leq \zeta_{\mathbf{r}}(1) \leq \zeta_{\mathbf{r}}(2) \leq \dots \leq \zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}|) \leq \zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}| + 1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|.$$

De (9.36) també es desprèn que si $\mathbf{r}_k \geq 1$ per a tot $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1$, aleshores $\zeta_{\mathbf{r}}(k+1) - \zeta_{\mathbf{r}}(k) \geq 1$. Conseqüentment en aquest cas resulta

$$0 = \zeta_{\mathbf{r}}(0) \leq \zeta_{\mathbf{r}}(1) < \zeta_{\mathbf{r}}(2) < \dots < \zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}|) \leq \zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}| + 1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|.$$

- Es defineix la funció $\vartheta_{\mathbf{r}}$ com la composició de $\zeta_{\mathbf{r}}$ amb φ . És a dir, $\vartheta_{\mathbf{r}} = \zeta_{\mathbf{r}} \circ \varphi$. Explícitament,

$$\vartheta_{\mathbf{r}} : \{0, 1, 2, \dots, d+1\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|\}$$

és la funció tal que si $i = 0, 1, \dots, d+1$, aleshores

$$\vartheta_{\mathbf{r}}(i) = \zeta_{\mathbf{r}}(\varphi(i)) = \sum_{k=0}^{\varphi(i)-1} \mathbf{r}_k + \varphi(i) - i \quad (9.37)$$

En efecte, quan $k = \varphi(i)$, el nombre i_k és igual a i .

Notem que

$$\vartheta_{\mathbf{r}}(i+1) - \vartheta_{\mathbf{r}}(i) = \sum_{k=\varphi(i)}^{\varphi(i+1)-1} \mathbf{r}_k + \varphi(i+1) - \varphi(i) - 1 = \sum_{k=\varphi(i)}^{\varphi(i+1)-1} \mathbf{r}_k + \mathbf{p}_i$$

si $0 \leq i \leq d$, i que

$$0 = \vartheta_{\mathbf{r}}(0) \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(1) \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(2) \leq \dots \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(d) \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(d+1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|.$$

Si $\mathbf{r}_k \geq 1$ per a tot $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1$, llavors

$$0 = \vartheta_{\mathbf{r}}(0) \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(1) < \vartheta_{\mathbf{r}}(2) < \dots < \vartheta_{\mathbf{r}}(d) \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(d+1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|.$$

La importància de les funcions φ , $\zeta_{\mathbf{r}}$ i $\vartheta_{\mathbf{r}}$ ve donada pels resultats següents.

Lema 9.16. *Sigui N una configuració completa de tipus $(d; \mathbf{p})$. Suposem que els nodes $(x_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, són els nodes de N que tenen derivació zero ordenats per ordre creixent d'abscisses. Aleshores, els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar són els nodes de la forma*

$$(x_{\varphi(i)}, 0), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Demostració. Considerem nombres naturals $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_d \leq d + |\mathbf{p}|$ de manera que els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar són els nodes $(x_{\sigma_i}, 0)$, $i = 1, 2, \dots, d$. Anem a veure que $\sigma_i = \varphi(i)$ per a tot $i = 1, 2, \dots, d$. Siguin $x_0 = -\infty$, $x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty$, $\sigma_0 = 0$ i $\sigma_{d+1} = d + |\mathbf{p}| + 1$. Donat que el tipus de N és $(d; \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d)$, el nombre de nodes de N que tenen derivació zero

i abscissa estrictament compresa entre x_{σ_i} i $x_{\sigma_{i+1}}$ és exactament \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, d$. Això implica que $\sigma_{i+1} - \sigma_i = \mathbf{p}_i + 1$ per a tot $i = 0, 1, \dots, d$, i per tant

$$\sigma_i = \sum_{i'=0}^{i-1} (\sigma_{i'+1} - \sigma_{i'}) = \sum_{i'=0}^{i-1} (\mathbf{p}_{i'} + 1) = i + \sum_{i'=0}^{i-1} \mathbf{p}_{i'} = \varphi(i).$$

Ja hem acabat. □

Lema 9.17. *Sigui N una configuració completa de longitud n i de tipus $(d; \mathbf{p})$. Suposem que els nodes $(x_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, són els nodes de N que tenen derivació zero ordenats per ordre creixent d'abscisses, i siguin $x_0 = -\infty$, $x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty$. Per a $k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}|$, considerem el nombre \mathbf{r}_k definit com el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa estrictament compresa entre x_k i x_{k+1} . És a dir,*

$$\mathbf{r}_k = \#\{(x, 1) \in N \mid x_k < x < x_{k+1}, \text{mult}_N[(x, 1)] \text{ senar}\} \quad (9.38)$$

Si *gui* $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|})$. Llavors,

- (i) Si $d + |\mathbf{p}| \geq 1$ aleshores $\mathbf{r}_0 \stackrel{(2)}{\equiv} \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|} \stackrel{(2)}{\equiv} 0$ i $\mathbf{r}_k \stackrel{(2)}{\equiv} 1$, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1$.
Quan $d = |\mathbf{p}| = 0$ és $\mathbf{r}_0 \stackrel{(2)}{\equiv} 1$.
- (ii) Si $0 \leq k \leq d + |\mathbf{p}| + 1$, el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que x_k és igual a $\zeta_{\mathbf{r}}(k)$.
- (iii) Per a $0 \leq i \leq d + 1$, el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que $x_{\varphi(i)}$ és igual a $\vartheta_{\mathbf{r}}(i)$.
- (iv) Es verifica

$$|\mathbf{r}| + |\mathbf{p}| = u$$

on u és el nombre de nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar.

Demostració. (i) Aquest apartat és una conseqüència immediata del fet que N és completa. En efecte, suposem primer $d + |\mathbf{p}| \geq 1$, és a dir, d i \mathbf{p} no són simultàniament nuls. La paritat de \mathbf{r}_k , $k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}|$, coincideix amb la paritat del cardinal de \mathfrak{g} , on \mathfrak{g} és el grup interior de N determinat pels nodes consecutius $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$ si $1 \leq k \leq d + |\mathbf{p}| - 1$, el grup exterior-esquerra de N determinat pel node extrem-esquerra $(x_1, 0)$ quan $k = 0$, o el grup exterior-dret de N determinat pel node extrem-dret $(x_{d+|\mathbf{p}|}, 0)$ quan $k = d + |\mathbf{p}|$. De tot això resulta $\mathbf{r}_0 \stackrel{(2)}{\equiv} \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|} \stackrel{(2)}{\equiv} 0$, i $\mathbf{r}_k \stackrel{(2)}{\equiv} 1$ si $1 \leq k \leq d + |\mathbf{p}| - 1$.

Quan $d = |\mathbf{p}| = 0$, la paritat de \mathbf{r}_0 coincideix amb la paritat del nombre de nodes del grup atípic de N que té derivació 1, i per tant és senar.

(ii) Sigui \mathcal{I} el conjunt format pels nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que x_k . Hem de veure que el cardinal de \mathcal{I} és igual a $\zeta_{\mathbf{r}}(k)$. Considerem la descomposició $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{I}_{\overline{\mathcal{P}}}$, on $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ és el conjunt format pels nodes de \mathcal{I} que són peus de N , i $\mathcal{I}_{\overline{\mathcal{P}}}$ és el conjunt format pels nodes de \mathcal{I} que no són peus de N . El cardinal de $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ és

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = \sum_{k'=0}^{k-1} \#\{(x, 1) \in N \mid x_{k'} < x < x_{k'+1}, \text{mult}_N[(x, 1)] \text{ senar}\} = \sum_{k'=0}^{k-1} \mathbf{r}_{k'}$$

Per altra banda, els nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar, i que no són peus de N , es corresponen amb els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat parell. Per tant el cardinal de $\mathcal{I}_{\overline{\mathcal{P}}}$ coincideix amb el nombre de nodes de N que tenen derivació zero, multiplicitat parell i abscissa més petita o igual que x_k . Utilitzant això, el lema 9.16 i la definició del nombre i_k en (9.35), obtenim

$$\#\mathcal{I}_{\overline{\mathcal{P}}} = \#\{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)\} \setminus \{(x_{\varphi(1)}, 0), (x_{\varphi(2)}, 0), \dots, (x_{\varphi(i_k)}, 0)\} = k - i_k$$

i, en conseqüència,

$$\#\mathcal{I} = \#\mathcal{I}_{\mathcal{P}} + \#\mathcal{I}_{\overline{\mathcal{P}}} = \sum_{k'=0}^{k-1} \mathbf{r}_{k'} + k - i_k = \zeta_{\mathbf{r}}(k)$$

tal com volíem veure.

(iii) S'obté aplicant l'apartat anterior quan $k = \varphi(i)$.

(iv) Aquest apartat és conseqüència d'aplicar l'apartat (ii) quan $k = d + |\mathbf{p}| + 1$. En efecte, com que $x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty$, el nombre de nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar és igual a $\zeta_{\mathbf{r}}(d + |\mathbf{p}| + 1) = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|$, d'on $u = |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}|$. \square

Per a una configuració completa N definim la seva *configuració derivada* N' per

$$N' = \{(x, j-1) \mid (x, j) \in N, j \geq 1\}.$$

És a dir, N' és la configuració obtinguda de disminuir la derivació dels nodes de N en una unitat. La longitud de N' és $n-1$, N' és completa si N ho és, i si $N_1 \sim N_2$ aleshores $N'_1 \sim N'_2$.

Si $E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*$, l'esquema derivat E' és l'esquema que admet com a representant la configuració derivada d'una configuració de E . Això és, $E' = [N']$ si $N \in E$, on el claudàtor denota la classe d'equivalència de N' per l'equivalència \sim . Observem que E' no depèn del representant escollit N de E , i que $E' \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*$.

A continuació introduïm alguns conjunts que necessitarem més endavant. Per a un esquema complet $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*$, sigui

$$\mathcal{A}_{\overline{E}} = \{E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) \mid E' = \overline{E}\} \quad (9.39)$$

És a dir, $\mathcal{A}_{\overline{E}}$ és el conjunt de tots els esquemes complets de longitud n , de tipus $(d; \mathbf{p})$, i tals que el seu esquema derivat és \overline{E} . Clarament $\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p})$ és la reunió disjunta de tots els $\mathcal{A}_{\overline{E}}$, $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*$.

Representem els multi-índexs $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}$ en la forma $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|})$. Quan $d + |\mathbf{p}| \geq 1$, i.e., d i \mathbf{p} no són simultàniament nuls, sigui

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1} \mid \mathbf{r}_0 \stackrel{(2)}{\equiv} \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|} \stackrel{(2)}{\equiv} 0, \mathbf{r}_k \stackrel{(2)}{\equiv} 1 \text{ si } k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1\} \quad (9.40)$$

És a dir, \mathcal{F} està format per aquells multi-índexs de $\mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}$ tals que la seva primera i última components són parells, i la resta de components són senars. Quan $d = |\mathbf{p}| = 0$ aleshores es defineix

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{N} \mid \mathbf{r} \stackrel{(2)}{\equiv} 1\} \quad (9.41)$$

Observem que per al multi-índex \mathbf{r} del lema 9.17 es té $\mathbf{r} \in \mathcal{F}$, ja que així ho estableix l'apartat (i) del lema.

Si $u \geq 0$ és un nombre natural, posarem

$$\mathcal{F}_u = \{\mathbf{r} \in \mathcal{F} \mid |\mathbf{r}| = u - |\mathbf{p}|\} \quad (9.42)$$

Considerem ara un parell $(u; \mathbf{q})$, $u \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_u) \in \mathbb{N}^{u+1}$. Per a un multi-índex $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$, es defineix

$$\mathcal{H}_{(u; \mathbf{q}); \mathbf{r}} = \{\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_d) \in \mathbb{N}^d \mid 0 \leq \mathbf{h}_i \leq 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} \text{ si } i = 1, \dots, d\} \quad (9.43)$$

Aquest conjunt està ben definit sempre que $d \geq 1$. En efecte, donat que $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$ serà $|\mathbf{r}| = u - |\mathbf{p}|$ i per tant $0 \leq \vartheta_{\mathbf{r}}(i) \leq |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}| = u$ per a $1 \leq i \leq d$. Això implica que els nombres $\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$, $i = 1, 2, \dots, d$, estan ben definits.

Quan $d = 0$ aleshores es defineix

$$\mathcal{H}_{(u; \mathbf{q}); \mathbf{r}} = \{0\} \quad (9.44)$$

Lema 9.18. *Es verifiquen els apartats següents:*

- (a) *Sigui $u \geq 0$ un nombre natural. Aleshores, \mathcal{F}_u és no buit si i només si $u \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$ i $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1$. A més a més en aquest cas el cardinal de \mathcal{F}_u és*

$$\#\mathcal{F}_u = \binom{d + |\mathbf{p}| + \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2}}{d + |\mathbf{p}|} \quad (9.45)$$

- (b) *Considerem un parell $(u; \mathbf{q})$, $u \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_u) \in \mathbb{N}^{u+1}$. Aleshores, per a tot multi-índex $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$, es compleix que*

$$\#\mathcal{H}_{(u;\mathbf{q});\mathbf{r}} = (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)})(1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(2)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) \quad (9.46)$$

interpretant aquest producte igual a 1 quan $d = 0$.

Demostració. L'apartat (b) és una conseqüència immediata de la definició de $\mathcal{H}_{(u;\mathbf{q});\mathbf{r}}$.

(a) Suposem primer que $d = |\mathbf{p}| = 0$ i en particular que n és parell, ja que $n \stackrel{(2)}{\equiv} d = 0$. Sigui $u \geq 0$ un nombre natural tal que $\mathcal{F}_u \neq \emptyset$. Hem de veure que $u \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$ i $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1$. Aquesta última desigualtat és trivial pel fet que $d = |\mathbf{p}| = 0$. Com que $\mathcal{F}_u \neq \emptyset$, de (9.41) i (9.42) es dedueix que u és un nombre senar i que $\mathcal{F}_u = \{u\}$. Per tant $u \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$ i ja hem acabat. El recíproc és trivial puix que si $u \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$ i $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1$ aleshores u és senar i per tant $\mathcal{F}_u = \{u\} \neq \emptyset$. Finalment, donat que $\mathcal{F}_u = \{u\}$, el cardinal de \mathcal{F}_u és igual a 1, que coincideix amb el nombre combinatori de (9.45) quan $d = |\mathbf{p}| = 0$.

Suposem ara $d + |\mathbf{p}| \geq 1$. Per a un multi-índex $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{d+|\mathbf{p}|}) \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}$, sigui $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ el multi-índex

$$\mathbf{r}(\mathbf{s}) = (2\mathbf{s}_0, 1 + 2\mathbf{s}_1, 1 + 2\mathbf{s}_2, \dots, 1 + 2\mathbf{s}_{d+|\mathbf{p}|-1}, 2\mathbf{s}_{d+|\mathbf{p}|}).$$

De la definició de \mathcal{F} en (9.40) és immediat veure que $\mathcal{F} = \{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}\}$. Per altra banda es verifica $|\mathbf{r}(\mathbf{s})| = d + |\mathbf{p}| - 1 + 2|\mathbf{s}|$. D'aquí que $\mathbf{r}(\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_u$ si i només si $u - |\mathbf{p}| = d + |\mathbf{p}| - 1 + 2|\mathbf{s}|$, o equivalentment, $|\mathbf{s}| = \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2}$. Això implica que

$$\mathcal{F}_u = \left\{ \mathbf{r}(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1}, |\mathbf{s}| = \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2} \right\} \quad (9.47)$$

i, en conseqüència, $\mathcal{F}_u \neq \emptyset$ si i només si $u + 1 - d - 2|\mathbf{p}|$ és un nombre positiu i parell, és a dir, $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1$ i $u \stackrel{(2)}{\equiv} d - 1 \stackrel{(2)}{\equiv} n - 1$. Finalment, aplicant cardinals

a (9.47) es deriva que

$$\#\mathcal{F}_u = \#\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^{d+|\mathbf{p}|+1} \mid |\mathbf{s}| = \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2} \right\} = \binom{d+|\mathbf{p}| + \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2}}{d+|\mathbf{p}|}$$

tal com volíem veure. □

Tot seguit enunciem i demostrem el resultat fonamental.

Proposició 9.19. *Sigui $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*$ un esquema complet de longitud $n-1$. Suposem que el tipus de \overline{E} és $(u; \mathbf{q})$, on $u \in \mathbb{N}$ i $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1}$ són tals que $(u, |\mathbf{q}|) \in V_{n-1}$. Aleshores, el conjunt $\mathcal{A}_{\overline{E}}$ de (9.39) és equipotent al conjunt*

$$\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})} = \{(\mathbf{r}; \mathbf{h}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{F}_u, \mathbf{h} \in \mathcal{H}_{(u; \mathbf{q}); \mathbf{r}}\} \quad (9.48)$$

Comentari 9.20. D'aquesta proposició es desprèn que si $\mathcal{A}_{\overline{E}} \neq \emptyset$ aleshores $u \geq d+2|\mathbf{p}|-1$. En efecte, donat que $\mathcal{A}_{\overline{E}}$ és equipotent a $\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$, serà $\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})} \neq \emptyset$. Això implica $\mathcal{F}_u \neq \emptyset$, i aplicant ara l'apartat (a) del lema 9.18 obtenim $u \geq d+2|\mathbf{p}|-1$.

Demostració de la proposició. Procedirem construint una aplicació entre $\mathcal{A}_{\overline{E}}$ i $\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$, denotada $\mathcal{T} : \mathcal{A}_{\overline{E}} \rightarrow \mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$, i veurem que és bijectiva.

Pas 1. *Construcció de \mathcal{T}*

L'objectiu d'aquest pas és fer correspondre a cada esquema $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$ un element $\mathcal{T}(E) \in \mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$. Això definirà l'aplicació \mathcal{T} .

Sigui $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$. És a dir, E és un esquema complet de longitud n , de tipus $(d; \mathbf{p})$ i la seva derivada E' és igual a \overline{E} . En particular el tipus de E' és $(u; \mathbf{q})$. Considerem un representant qualsevol N de E . Donat que $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$, N és una configuració completa de longitud n , de tipus $(d; \mathbf{p})$ i $N' \in \overline{E}$. En particular N' té tipus $(u; \mathbf{q})$.

Siguin $(x_k, 0), k = 1, 2, \dots, d+|\mathbf{p}|$, els nodes de N que tenen derivació zero ordenats per ordre creixent d'abscisses, i siguin $x_0 = -\infty, x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty$. Podem considerar els nombres $\mathbf{r}_k, k = 0, 1, \dots, d+|\mathbf{p}|$, definits com en el lema 9.17. Això és, \mathbf{r}_k és el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa estrictament compresa entre x_k i x_{k+1} . Considerem també el multi-índex

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|}) .$$

L'apartat (i) del lema 9.17 estableix que $\mathbf{r} \in \mathcal{F}$. Per altra banda, com que el tipus de N' és $(u; \mathbf{q})$, el nombre de nodes de N' que tenen derivació zero i multiplicitat senar és igual a u . Això implica que el nombre de nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar també és igual a u , i per l'apartat (iv) del lema 9.17 resulta

$$|\mathbf{r}| = u - |\mathbf{p}| \quad (9.49)$$

És a dir,

$$\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u \quad (9.50)$$

De l'apartat (iv) del lema 9.17 també es desprèn que les aplicacions $\zeta_{\mathbf{r}}$ i $\vartheta_{\mathbf{r}}$ prenen valors en el conjunt $\{0, 1, \dots, u\}$.

Signin ara $(y_t, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, els nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar, ordenats per ordre creixent d'abscisses. Posem també $y_0 = -\infty$, $y_{u+1} = +\infty$. Per a $i = 1, 2, \dots, d$, el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que $x_{\varphi(i)}$ és igual a $\vartheta_{\mathbf{r}}(i)$, ja que així ho estableix l'apartat (iii) del lema 9.17. D'aquí que

$$y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} \leq x_{\varphi(i)} < y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}.$$

A més a més forçosament és $x_{\varphi(i)} \neq y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$. En efecte, si fos $x_{\varphi(i)} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$, la multiplicitat en N del node $(x_{\varphi(i)}, 0)$ seria igual a $1 + \text{mult}_N[(y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}, 1)]$, i per tant parell. Això es contradia amb el lema 9.16. Per tant

$$y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < x_{\varphi(i)} < y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1} \quad (9.51)$$

Signi s_i el nombre de nodes de N que tenen derivació 1 i abscissa estrictament compresa entre $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$ i $x_{\varphi(i)}$. És a dir,

$$s_i = \#\{(y, 1) \in N \mid y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < y < x_{\varphi(i)}\}, \quad (9.52)$$

i sigui

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_{\varphi(i)}, 1) \in N \\ 0, & \text{si } (x_{\varphi(i)}, 1) \notin N \end{cases} \quad (9.53)$$

Notem que $\gamma_i = 0$ si i només si el node $(x_{\varphi(i)}, 0)$ és simple (té multiplicitat 1). Per altra banda, donat que el tipus de N' és $(u; \mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_u)$, i que els nodes $(y_t, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, són els nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar ordenats per ordre creixent d'abscisses, resulta que el nombre de nodes de N que tenen derivació 1 i abscissa estrictament compresa entre $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$ i $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}$ és exactament $\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$. Això implica que $0 \leq s_i \leq \mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$. A més a més, quan $\gamma_i = 1$ es

verifica $s_i < \mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$ puix que en aquest cas el node $(x_{\varphi(i)}, 1)$, que és un node de N , no queda comptabilitzat en s_i (veure (9.52)).

Es defineix aleshores \mathbf{h}_i per

$$\mathbf{h}_i = 2s_i + \gamma_i \tag{9.54}$$

A la següent figura hi ha indicats els nodes $(y_{\vartheta_r(i)}, 1)$ i $(y_{\vartheta_r(i)+1}, 1)$, i també els $\mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$ nodes que tenen derivació 1 i abscissa compresa entre $y_{\vartheta_r(i)}$ i $y_{\vartheta_r(i)+1}$. A la part inferior d'aquesta figura s'hi troba el valor de \mathbf{h}_i en funció d'on estigui situat el node $(x_{\varphi(i)}, 0)$ (marcat amb una creu).

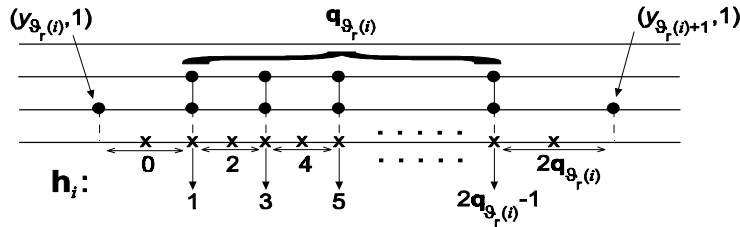


Figura 9.2

Observem que

$$0 \leq \mathbf{h}_i \leq 2\mathbf{q}_{\vartheta_r(i)} .$$

En efecte, si $s_i < \mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$ aleshores $0 \leq \mathbf{h}_i \leq 2\mathbf{q}_{\vartheta_r(i)} - 1$, i si $s_i = \mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$ aleshores $\gamma_i = 0$ i per tant $\mathbf{h}_i = 2\mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$.

Donat que aquest procés es pot anar repetint per a cada $i = 1, \dots, d$, obtenim un element

$$\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_d) \in \mathbb{N}^d$$

tal que $0 \leq \mathbf{h}_i \leq 2\mathbf{q}_{\vartheta_r(i)}$ si $1 \leq i \leq d$. És a dir,

$$\mathbf{h} \in \mathcal{H}_{(u;\mathbf{q});\mathbf{r}} \tag{9.55}$$

Quan $d = 0$ definim $\mathbf{h} = 0$, de manera que en aquest cas també es verifica (9.55).

De (9.50) i (9.55) es deriva que el parell $(\mathbf{r}; \mathbf{h})$ pertany al conjunt $\mathcal{B}_{(u;\mathbf{q})}$. A més a més el parell $(\mathbf{r}; \mathbf{h})$ no depèn del representant N de E escollit. En efecte, considerem un altre representant $N^* \in E$ i sigui $\Psi = \Psi_{N,N^*}$ la identificació natural entre N i N^* . Si $(x_k^*, 0), k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, són els nodes de N^* que tenen derivació zero ordenats per ordre creixent d'abscisses, i $x_0^* = -\infty, x_{d+|\mathbf{p}|+1}^* = +\infty$, aleshores tindrem $\Psi[(x_k, 0)] = (x_k^*, 0), k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$. Utilitzant que Ψ conserva 1-abscisses i en particular també multiplicitats, resulta que el nombre \mathbf{r}_k^* del lema

9.17 per a la configuració N^* és

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^* &= \#\{(x, 1) \in N^* \mid x_k^* < x < x_{k+1}^*, \text{mult}_{N^*}[(x, 1)] \text{ senar}\} \\ &= \#\{(x, 1) \in N \mid x_k < x < x_{k+1}, \text{mult}_N[(x, 1)] \text{ senar}\} = \mathbf{r}_k . \end{aligned}$$

Això implica que el multi-índex \mathbf{r}^* associat a N^* és igual a \mathbf{r} . Siguin ara $(y_t^*, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, els nodes de N^* que tenen derivació 1 i multiplicitat senar, ordenats per ordre creixent d'abscisses. Posem també $y_0^* = -\infty$ i $y_{u+1}^* = +\infty$. Es compleix que $\Psi[(y_t, 1)] = (y_t^*, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$. Tenint en compte que $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}$, les desigualtats (9.51) per a N^* estableixen

$$y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)}^* < x_{\varphi(i)}^* < y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)+1}^* .$$

El nombre s_i^* de (9.52) associat a N^* és

$$s_i^* = \#\{(y, 1) \in N^* \mid y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)}^* < y < x_{\varphi(i)}^*\} = \#\{(y, 1) \in N \mid y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)} < y < x_{\varphi(i)}\} = s_i$$

ja que $\Psi[(y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)}, 1)] = (y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)}^*, 1)$, $\Psi[(x_{\varphi(i)}, 0)] = (x_{\varphi(i)}^*, 0)$ i Ψ conserva 1-abscisses. Per altra banda, donat que $\Psi[(x_{\varphi(i)}, 0)] = (x_{\varphi(i)}^*, 0)$ i que Ψ conserva multiplicitats, obtenim $\gamma_i^* = \gamma_i$, on γ_i^* és el nombre (9.53) associat a N^* . De tot això es dedueix que $\mathbf{h}_i^* = \mathbf{h}_i$ i conseqüentment $\mathbf{h}^* = \mathbf{h}$.

Per tant el parell $(\mathbf{r}; \mathbf{h})$ no depèn del representant N de E . Definim aleshores

$$\mathcal{T}(E) = (\mathbf{r}; \mathbf{h}).$$

Aquesta correspondència és vàlida per a qualsevol esquema $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$, i per tant defineix una aplicació

$$\mathcal{T} : \mathcal{A}_{\overline{E}} \rightarrow \mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$$

que en el que segueix veurem que és bijectiva.

Pas 2. \mathcal{T} és exhaustiva

Considerem un parell $(\mathbf{r}; \mathbf{h}) \in \mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$. Això és, $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$ i $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_{(u; \mathbf{q}); \mathbf{r}}$. Hem de veure que existeix un esquema $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$ tal que $\mathcal{T}(E) = (\mathbf{r}; \mathbf{h})$. En el que segueix posem $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|})$ i $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_d)$.

Considerem un representant \overline{N} de \overline{E} , i sigui N_0 la configuració obtinguda d'augmentar la derivació dels nodes de \overline{N} en una unitat. És a dir,

$$N_0 = \{(x, j+1) \mid (x, j) \in \overline{N}\}.$$

La configuració N_0 no té nodes de derivació zero i $N'_0 = \overline{N}$. Siguin $(y_t, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, els nodes de N_0 que tenen derivació 1 i multiplicitat senar, ordenats per ordre creixent d'abscisses. Posem també $y_0 = -\infty, y_{u+1} = +\infty$. Observem que en efecte u és el nombre de nodes de N_0 que tenen derivació 1 i multiplicitat senar, ja que el tipus de \overline{N} és $(u; \mathbf{q})$ i $N'_0 = \overline{N}$. D'aquest fet també es desprèn que per al multi-índex $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_u)$ es té

$$\mathbf{q}_t = \#\{(y, 1) \in N_0 \mid y_t < y < y_{t+1}\}, t = 0, 1, \dots, u \quad (9.56)$$

A continuació es defineixen nombres x_k , $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, per casos. Sigui $1 \leq k \leq d + |\mathbf{p}|$. Aleshores,

1. Cas $k \neq \varphi(i)$ per a tot $i = 1, 2, \dots, d$. En aquest cas es verifica $1 \leq \zeta_{\mathbf{r}}(k) \leq u$. En efecte, per una banda tenim que $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$ i per tant $\zeta_{\mathbf{r}}(k) \leq |\mathbf{r}| + |\mathbf{p}| = u$, i per altra banda, donat que $k \neq \varphi(i)$ per a tot $i = 1, 2, \dots, d$, es compleix que $i_k = i_{k-1}$, on els nombres i_k, i_{k-1} són els nombres definits a (9.35). D'això i de (9.36) obtenim que $\zeta_{\mathbf{r}}(k) - \zeta_{\mathbf{r}}(k-1) = \mathbf{r}_{k-1} + 1 \geq 1$ i, en conseqüència, $\zeta_{\mathbf{r}}(k) \geq 1$.

Es defineix aleshores

$$x_k = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)} \quad (9.57)$$

2. Cas $k = \varphi(i)$ per a algun $i = 1, 2, \dots, d$. En aquest cas es té $\zeta_{\mathbf{r}}(k) = \zeta_{\mathbf{r}}(\varphi(i)) = \vartheta_{\mathbf{r}}(i)$. Siguin

$$(z_{i1}, 1), (z_{i2}, 1), \dots, (z_{i, w_i}, 1)$$

els nodes de N_0 que tenen derivació 1 i abscissa estrictament compresa entre $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$ i $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}$. Posem també $z_{i0} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$ i $z_{i, w_i+1} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}$. Els nombres z_{is} els podem suposar ordenats de manera que

$$y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} = z_{i0} < z_{i1} < z_{i2} < \dots < z_{i, w_i} < z_{i, w_i+1} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1} .$$

D'aplicar (9.56) al nombre $t = \vartheta_{\mathbf{r}}(i)$ es dedueix que $w_i = \mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$. Considerem ara la component \mathbf{h}_i del multi-índex \mathbf{h} , la qual es descompon en la forma

$$\mathbf{h}_i = 2s_i + \gamma_i$$

on $s_i \geq 0$ és un nombre natural i $\gamma_i \in \{0, 1\}$. Donat que $0 \leq \mathbf{h}_i \leq 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} = 2w_i$, tindrem $0 \leq s_i \leq w_i$, i si $s_i = w_i$ aleshores $\gamma_i = 0$.

Es defineix llavors el nombre x_k segons les dues possibilitats següents:

2.1 Cas $\gamma_i = 1$. Amb altres paraules, \mathbf{h}_i és un nombre senar. En aquest cas es defineix

$$x_k = z_{i,s_i+1} \quad (9.58)$$

2.2 Cas $\gamma_i = 0$. En aquest cas es defineix x_k com qualsevol nombre complint

$$z_{i,s_i} < x_k < z_{i,s_i+1} \quad (9.59)$$

Observem que en qualsevol d'aquests dos casos es compleix que

$$y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < x_k < y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1} = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+1} \quad (9.60)$$

En efecte, quan $\gamma_i = 1$ forçosament és $s_i < w_i$, d'on $s_i + 1 \leq w_i$ i per tant el nombre z_{i,s_i+1} de (9.58) pertany a l'interval $(y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}, y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1})$. En canvi, quan $\gamma_i = 0$ aleshores (9.60) s'obté immediatament de (9.59).

Per a cada $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$ hem definit un nombre x_k . Posarem també $x_0 = -\infty$ i $x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty$. De (9.57) i (9.60) és fàcil veure que els x_k , $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, estan ordenats en forma creixent. És a dir,

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{d+|\mathbf{p}|} < x_{d+|\mathbf{p}|+1} = +\infty .$$

Definim la configuració N com la configuració obtinguda d'afegir a N_0 els nodes de la forma $(x_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$. És a dir,

$$N = N_0 \cup \{(x_k, 0) \mid k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|\}.$$

Clarament N té longitud n i $N' = N'_0 = \overline{N}$. A més a més verifica les propietats següents:

- (a) *Els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar són els nodes de la forma $(x_{\varphi(i)}, 0)$, $i = 1, 2, \dots, d$.*

En efecte, per a $i = 1, 2, \dots, d$, la definició de x_k quan $k = \varphi(i)$ correspon al cas 2. Quan $\gamma_i = 1$, és a dir, quan es verifica el cas 2.1, tindrem $(x_{\varphi(i)}, 1) = (z_{i,s_i+1}, 1)$, però com que $\gamma_i = 1$ i conseqüentment $s_i < w_i$, el node $(z_{i,s_i+1}, 1)$ té multiplicitat parell en N_0 , i per tant la multiplicitat en N de $(x_{\varphi(i)}, 0)$, que és igual a $1 + \text{mult}_{N_0}[(z_{i,s_i+1}, 1)]$, és senar. Quan $\gamma_i = 0$, de (9.59) obtenim que $(x_{\varphi(i)}, 1) = (x_k, 1) \notin N_0$, d'on $\text{mult}_N[(x_{\varphi(i)}, 0)] = 1$ i per tant la multiplicitat en N del node $(x_{\varphi(i)}, 0)$ torna a ser senar.

Sigui ara $(x_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, un node de N tal que $k \neq \varphi(i)$ per a tot $i = 1, 2, \dots, d$. La definició de x_k correspon al cas 1, implicant que $x_k = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}$. Ara, com que el node $(y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}, 1)$ té multiplicitat senar en N_0 , la multiplicitat en N de $(x_k, 0)$, que és igual a $1 + \text{mult}_{N_0}[(y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}, 1)]$, és parell.

- (b) Si $k = 0, 1, \dots, d + |\mathbf{p}|$, el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa estrictament compresa entre x_k i x_{k+1} és igual a \mathbf{r}_k . És a dir,

$$\mathbf{r}_k = \#\{(y, 1) \in N \mid x_k < y < x_{k+1}, \text{mult}_N[(y, 1)] \text{ senar}\} \quad (9.61)$$

En efecte, considerem el conjunt

$$R_k = \{(y, 1) \in N \mid x_k < y < x_{k+1}, \text{mult}_N[(y, 1)] \text{ senar}\}.$$

Hem de veure que el cardinal de R_k és igual a \mathbf{r}_k . De (9.57) i (9.60) es dedueix que tant en el cas 1 com en el cas 2 de la definició de x_k , es verifica $y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)} \leq x_k < y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+1}$. Per al nombre $k + 1$ tindrem $x_{k+1} = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)}$ si $k + 1 \neq \varphi(i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, i $y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)} < x_{k+1} < y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)+1}$ si $k + 1 = \varphi(i)$ per a algun $i = 1, 2, \dots, d$. De tot això es desprèn que

$$R_k = \{(y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+1}, 1), (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+2}, 1), (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+3}, 1), \dots, (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)-1}, 1)\}$$

si $k + 1 \neq \varphi(i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, i

$$R_k = \{(y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+1}, 1), (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+2}, 1), (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)+3}, 1), \dots, (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)-1}, 1), (y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k+1)}, 1)\}$$

si $k + 1 = \varphi(i)$ per a algun $i = 1, 2, \dots, d$. Per tant,

$$\#R_k = \begin{cases} \zeta_{\mathbf{r}}(k+1) - \zeta_{\mathbf{r}}(k) - 1, & \text{si } k + 1 \neq \varphi(i), i = 1, 2, \dots, d \\ \zeta_{\mathbf{r}}(k+1) - \zeta_{\mathbf{r}}(k), & \text{si } k + 1 = \varphi(i), i = 1, 2, \dots, d \end{cases}$$

Utilitzant ara (9.36), d'on $\zeta_{\mathbf{r}}(k+1) - \zeta_{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{r}_k + 1 - (i_{k+1} - i_k)$, i que $i_{k+1} = i_k$ si i només si $k + 1 \neq \varphi(i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, resulta $\#R_k = \mathbf{r}_k$ i ja hem acabat.

- (c) Si $1 \leq i \leq d$ aleshores

$$s_i = \#\{(y, 1) \in N \mid y_{\partial_{\mathbf{r}}(i)} < y < x_{\varphi(i)}\} \quad (9.62)$$

i

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_{\varphi(i)}, 1) \in N \\ 0, & \text{si } (x_{\varphi(i)}, 1) \notin N \end{cases} \quad (9.63)$$

on $s_i \geq 0$ i $\gamma_i \in \{0, 1\}$ són els nombres tals que $\mathbf{h}_i = 2s_i + \gamma_i$.

En efecte, sigui $k = \varphi(i)$. La definició de x_k correspon al cas 2, i tenint en compte que tant si es presenta el cas 2.1 com si es presenta el cas 2.2 es verifica $z_{i,s_i} < x_k \leq z_{i,s_i+1}$, resulta

$$\#\{(y, 1) \in N \mid y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < y < x_{\varphi(i)}\} = \#\{(z_{i1}, 1), (z_{i2}, 1), \dots, (z_{i,s_i}, 1)\} = s_i .$$

Hem vist (9.62). Anem a veure (9.63). Si $\gamma_i = 1$, de (9.58) obtenim que $x_k = z_{i,s_i+1}$ i conseqüentment $(x_{\varphi(i)}, 1) = (x_k, 1) = (z_{i,s_i+1}, 1) \in N$. En canvi, si $\gamma_i = 0$ aleshores de (9.59) obtenim $z_{i,s_i} < x_k < z_{i,s_i+1}$, d'on $(x_{\varphi(i)}, 1) = (x_k, 1) \notin N$.

(d) N és completa.

En efecte, com que \overline{N} és completa i $N' = N'_0 = \overline{N}$, per demostrar que N és completa és suficient veure les dues propietats següents:

- (i) Tot grup interior (resp. tot grup exterior) de N que tingui derivació 1, està format per un nombre senar de nodes (resp. un nombre parell de nodes).

Aquesta propietat prové de (9.61) i de tenir en compte que $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$, d'on $\mathbf{r}_0 \stackrel{(2)}{\equiv} \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|} \stackrel{(2)}{\equiv} 0$ i $\mathbf{r}_k \stackrel{(2)}{\equiv} 1$ per a $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1$.

- (ii) Si $m_N(0) = 0$ aleshores $m_N(1) \geq 1$ i el grup atípic de N que té derivació 1 està format per un nombre senar de nodes.

Aquesta propietat és conseqüència de que si $m_N(0) = 0$ tindrem $d + |\mathbf{p}| = 0$, i com que $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$, això implica $d = 0 \stackrel{(2)}{\equiv} n$ resultant que n és parell. Per tant, com que $(u, |\mathbf{q}|) \in V_{n-1}$, u és senar i en particular $u \geq 1$. Ara, com que els nodes $(y_t, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, són els nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar, és $m_N(1) \geq u \geq 1$ i, a més a més, la paritat del nombre de nodes del grup atípic de N que té derivació 1 és igual a la paritat de u , essent per tant un nombre senar.

Concloem així que N és completa.

(e) *El tipus de N és $(d; \mathbf{p})$.*

Això és una conseqüència immediata de la propietat (a). En efecte, els nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar són els de la forma $(x_{\varphi(i)}, 0)$, $i = 1, 2, \dots, d$. Per tant en total hi ha d nodes de N que tenen derivació zero i multiplicitat senar. A més a més, per a $i = 0, 1, \dots, d$, els

nodes de N que tenen derivació zero i abscissa estrictament compresa entre $x_{\varphi(i)}$ i $x_{\varphi(i+1)}$ són els de la forma $(x_k, 0)$ amb $k = \varphi(i) + 1, \varphi(i) + 2, \dots, \varphi(i + 1) - 1$. En total d'aquests n'hi ha $\varphi(i + 1) - \varphi(i) - 1 = \mathbf{p}_i$, resultant que el tipus de N és $(d; \mathbf{p})$.

De les propietats anteriors es dedueix que N és una configuració completa de longitud n , amb tipus $(d; \mathbf{p})$ i amb $N' = N'_0 = \overline{N}$. Això implica que l'esquema E tal que $N \in E$, pertany a $\mathcal{A}_{\overline{E}}$. A més a més, per construcció es té

$$\mathcal{T}(E) = (\mathbf{r}; \mathbf{h}).$$

En efecte, a l'hora de construir la imatge $\mathcal{T}(E)$ podem escollir la mateixa configuració N com a representant de E . Aquesta construcció porta directament a que $\mathcal{T}(E) = (\mathbf{r}; \mathbf{h})$ si es tenen en compte les propietats (c) i (d) anteriors.

Pas 3. \mathcal{T} és injectiva

Siguin $E, E^* \in \mathcal{A}_{\overline{E}}$ tals que $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E^*)$. Hem de veure que $E = E^*$. En el que segueix posem $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E^*) = (\mathbf{r}; \mathbf{h})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+|\mathbf{p}|})$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_d)$.

Considerem dos representants N i N^* de E i E^* respectivament. Les configuracions N i N^* tenen longitud n i tipus $(d; \mathbf{p})$. Les seves derivades N' i $N^{*'}$ tenen tipus $(u; \mathbf{q})$ i satisfan $N' \sim N^{*'}$. Això prové de que $E' = E^{*'} = \overline{E}$. Clarament $E = E^*$ si i només si $N \sim N^*$. En els paràgrafs següents demostrarem que $N \sim N^*$.

Donat que $N' \sim N^{*'}$, també és $N_0 \sim N_0^*$ on N_0 i N_0^* són les configuracions obtingudes de suprimir els nodes de derivació zero de N i de N^* . És a dir,

$$N_0 = \{(x, j) \in N \mid j \geq 1\}, N_0^* = \{(x, j) \in N^* \mid j \geq 1\}.$$

Sigui Ψ_0 la identificació natural entre N_0 i N_0^* , la qual conserva 1-abscisses. Sigui també

$$(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_{d+|\mathbf{p}|}, 0)$$

els nodes de N que tenen derivació zero ordenats per ordre creixent d'abscisses. Anàlogament, suposarem que els nodes $(x_1^*, 0), (x_2^*, 0), \dots, (x_{d+|\mathbf{p}|}^*, 0)$ són els nodes de N^* que tenen derivació zero, $x_1^* < x_2^* < \dots < x_{d+|\mathbf{p}|}^*$.

L'aplicació $\Psi : N \rightarrow N^*$ definida per

$$\Psi[(x, j)] = \Psi_0[(x, j)] \quad \text{si } (x, j) \in N, j \geq 1$$

i

$$\Psi[(x_k, 0)] = (x_k^*, 0), \quad k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$$

és bijectiva i conserva derivacions. A més a més, conserva l'ordre entre les abscisses de totes les parelles de nodes α, α' de N tals que les seves derivacions respectives j_α i $j_{\alpha'}$ compleixen alguna de les dues condicions següents: (i) $j_\alpha = j_{\alpha'} = 0$, o (ii) $j_\alpha \geq 1, j_{\alpha'} \geq 1$ i $|j_\alpha - j_{\alpha'}| \leq 1$. Això implica que per demostrar que Ψ conserva 1-abscisses és suficient veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses de tota parella de nodes formada per un node de derivació zero i un node de derivació 1. En el que segueix demostrem aquest fet.

Signin $(x_k, 0)$ i $(y, 1)$, respectivament, un node de N de derivació zero, $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}|$, i un node de N de derivació 1. Hem de veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses de $(x_k, 0)$ i $(y, 1)$. Per definició, la imatge de $(x_k, 0)$ és $(x_k^*, 0) = \Psi[(x_k, 0)]$. Per al node $(y, 1)$ posarem $(y^*, 1) = \Psi[(y, 1)]$.

Signin

$$(y_1, 1), (y_2, 1), \dots, (y_u, 1), \quad (\text{resp. } (y_1^*, 1), (y_2^*, 1), \dots, (y_u^*, 1))$$

els nodes de N que tenen derivació 1 i multiplicitat senar (resp. els nodes de N^* que tenen derivació 1 i multiplicitat senar), ordenats de manera que $y_1 < y_2 < \dots < y_u$ i $y_1^* < y_2^* < \dots < y_u^*$. Com que Ψ_0 conserva 1-abscisses, i en particular també multiplicitats, tindrem $\Psi_0[(y_t, 1)] = (y_t^*, 1)$, $t = 1, 2, \dots, u$, i per tant

$$\Psi[(y_t, 1)] = (y_t^*, 1), \quad t = 1, 2, \dots, u.$$

Per tal de veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_k, 0)$ i $(y, 1)$, procedirem per casos.

1. *Cas $k \neq \varphi(i)$ per a tot $i = 1, 2, \dots, d$.* Aplicant el lema 9.16 a les configuracions N i N^* obtenim que els nodes $(x_k, 0)$ i $(x_k^*, 0)$ tenen multiplicitat parell en N i N^* respectivament. Això implica que els nodes $(x_k, 1)$ i $(x_k^*, 1)$ pertanyen a N i a N^* respectivament, i a més a més tenen multiplicitat senar. Ara, com que $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E^*) = (\mathbf{r}; \mathbf{h})$, de l'apartat (ii) del lema 9.17 aplicat a N i a N^* s'obté que $\zeta_{\mathbf{r}}(k)$ és el nombre de nodes de N que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que x_k , i també és el nombre de nodes de N^* que tenen derivació 1, multiplicitat senar i abscissa més petita o igual que x_k^* . D'això i de que els nodes $(x_k, 1)$ i $(x_k^*, 1)$ tenen multiplicitat senar, resulta

$$x_k = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}, \quad x_k^* = y_{\zeta_{\mathbf{r}}^*(k)} \quad (9.64)$$

A partir d'aquí és trivial veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_k, 0)$ i $(y, 1)$. En efecte, si $y < x_k$, $y = x_k$, o $y > x_k$ aleshores tindrem $y < y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}$, $y = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}$, o $y > y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}$ respectivament, ja que $x_k = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}$. Com que Ψ_0 conserva 0-abscisses, i en particular conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(y, 1)$ i $(y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}, 1)$, obtenim que $y^* < y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}^*$, $y^* = y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}^*$, o $y^* > y_{\zeta_{\mathbf{r}}(k)}^*$ respectivament, i consegüentment, de (9.64) resulta que $y^* < x_k^*$, $y^* = x_k^*$, o $y^* > x_k^*$ respectivament. Hem vist doncs que en aquest cas Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_k, 0)$ i $(y, 1)$.

2. *Cas $k = \varphi(i)$ per a algun $i = 1, 2, \dots, d$.* Com que $k = \varphi(i)$, hem de veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_{\varphi(i)}, 0)$ i $(y, 1)$. Observem primer que la multiplicitat dels nodes $(x_{\varphi(i)}, 0)$ i $(x_{\varphi(i)}^*, 0)$ és senar, i que les desigualtats (9.51) per a N i per a N^* estableixen, respectivament,

$$y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < x_{\varphi(i)} < y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}, \quad y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}^* < x_{\varphi(i)}^* < y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}^* .$$

Siguin

$$(z_{i1}, 1), (z_{i2}, 1), \dots, (z_{i,w_i}, 1), \quad (\text{resp. } (z_{i1}^*, 1), (z_{i2}^*, 1), \dots, (z_{i,w_i}^*, 1))$$

els nodes de N que tenen derivació 1 i abscissa estrictament compresa entre $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$ i $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}$ (resp. els nodes de N^* que tenen derivació 1 i abscissa estrictament compresa entre $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}^*$ i $y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}^*$). Notem que w_i és igual a $\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$, ja que el tipus de N' i de $N^{*'}$ és $(u; \mathbf{q})$. Posarem també $z_{i0} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}$, $z_{i0}^* = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}^*$, $z_{i,w_i+1} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}$, $z_{i,w_i+1}^* = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}^*$. Els nombres z_{is} i z_{is}^* els podem suposar ordenats de manera que

$$\begin{aligned} y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} &= z_{i0} < z_{i1} < z_{i2} < \dots < z_{i,w_i} < z_{i,w_i+1} = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1} \\ y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}^* &= z_{i0}^* < z_{i1}^* < z_{i2}^* < \dots < z_{i,w_i}^* < z_{i,w_i+1}^* = y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)+1}^* \end{aligned}$$

Clarament és $\Psi[(z_{is}, 1)] = (z_{is}^*, 1)$, $s = 1, 2, \dots, w_i$, ja que Ψ_0 conserva 0-abscisses. Per altra banda, donat que $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E^*) = (\mathbf{r}; \mathbf{h})$ i en particular que la component \mathbf{h}_i del multi-índex \mathbf{h} és la mateixa per a N que per a N^* , obtenim que els nombres s_i i γ_i de (9.52) i (9.53) també han de ser iguals per a N i per a N^* , ja que s_i i γ_i no són més que el quocient i el residu de dividir per dos la component \mathbf{h}_i . Així, per a s_i resulta

$$s_i = \#\{(y, 1) \in N \mid y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)} < y < x_{\varphi(i)}\} = \#\{(y, 1) \in N^* \mid y_{\vartheta_{\mathbf{r}}(i)}^* < y < x_{\varphi(i)}^*\}$$

i, consegüentment,

$$z_{i,s_i} < x_{\varphi(i)} \leq z_{i,s_i+1}, \quad z_{i,s_i}^* < x_{\varphi(i)}^* \leq z_{i,s_i+1}^* \quad (9.65)$$

Per a γ_i hi ha dues possibilitats:

2.1 *Cas* $\gamma_i = 1$. De (9.53) es dedueix que $(x_{\varphi(i)}, 1) \in N$ i $(x_{\varphi(i)}^*, 1) \in N^*$, i emprant ara (9.65) obtenim que

$$x_{\varphi(i)} = z_{i,s_i+1}, x_{\varphi(i)}^* = z_{i,s_i+1}^*.$$

En aquest cas Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_{\varphi(i)}, 0)$ i $(y, 1)$. En efecte, si $y < x_{\varphi(i)}$, $y = x_{\varphi(i)}$, o $y > x_{\varphi(i)}$ aleshores $y < z_{i,s_i+1}$, $y = z_{i,s_i+1}$, o $y > z_{i,s_i+1}$ respectivament, i com que Ψ_0 conserva 0-abscisses serà $y^* < z_{i,s_i+1}^*$, $y^* = z_{i,s_i+1}^*$, o $y^* > z_{i,s_i+1}^*$, i conseqüentment $y^* < x_{\varphi(i)}^*$, $y^* = x_{\varphi(i)}^*$, o $y^* > x_{\varphi(i)}^*$ respectivament. Per tant en aquest cas ja hem fet.

2.2 *Cas* $\gamma_i = 0$. De (9.53) es dedueix que $(x_{\varphi(i)}, 1) \notin N$ i $(x_{\varphi(i)}^*, 1) \notin N^*$, i tenint en compte (9.65) resulta

$$z_{i,s_i} < x_{\varphi(i)} < z_{i,s_i+1}, z_{i,s_i}^* < x_{\varphi(i)}^* < z_{i,s_i+1}^* \quad (9.66)$$

Anem a veure que Ψ conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_{\varphi(i)}, 0)$ i $(y, 1)$. En efecte, observem primer que el cas $y = x_{\varphi(i)}$ no es pot donar, ja que $(x_{\varphi(i)}, 1) \notin N$. Per tant només hi ha dues possibilitats: $y < x_{\varphi(i)}$, o $y > x_{\varphi(i)}$. De (9.66) es deriva que aquestes possibilitats es presenten si i només si $y \leq z_{i,s_i}$, o $y \geq z_{i,s_i+1}$ respectivament. Utilitzant ara que Ψ_0 conserva 0-abscisses obtenim que $y^* \leq z_{i,s_i}^*$, o $y^* \geq z_{i,s_i+1}^*$ respectivament, i per tant, emprant de nou (9.66), tindrem $y^* < x_{\varphi(i)}^*$, o $y^* > x_{\varphi(i)}^*$ respectivament. Conseqüentment en aquest cas Ψ també conserva l'ordre entre les abscisses dels nodes $(x_{\varphi(i)}, 0)$ i $(y, 1)$.

Això completa la demostració, ja que Ψ conserva 1-abscisses, d'on $N \sim N^*$ i per tant $E = E^*$. \square

Una conseqüència de la proposició anterior és el següent resultat.

Corol·lari 9.21. *El cardinal de $\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p})$ és*

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \left[\sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} \left(\#\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q}) \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) \right) \right]$$

amb el conveni que si $d = 0$, aleshores el producte $(1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)})$ és igual a 1.

Demostració. Donat que $\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p})$ és la reunió disjunta de tots els $\mathcal{A}_{\overline{E}}$, $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*$, i que si \overline{E} és un esquema complet de longitud $n - 1$ amb tipus $(u; \mathbf{q})$ i amb $\mathcal{A}_{\overline{E}} \neq \emptyset$ aleshores $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1$, obtenim que

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) &= \sum_{\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*} \#\mathcal{A}_{\overline{E}} = \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ (u, |\mathbf{q}|) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \sum_{\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q})} \#\mathcal{A}_{\overline{E}} \\ &= \sum_{\substack{(u, q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} \sum_{\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q})} \#\mathcal{A}_{\overline{E}}. \end{aligned}$$

Utilitzant ara la proposició 9.19 tindrem que $\#\mathcal{A}_{\overline{E}} = \#\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$, i per tant

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) &= \sum_{\substack{(u, q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} \sum_{\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q})} \#\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})} \\ &= \sum_{\substack{(u, q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} \#\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q}) \#\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})} \end{aligned} \quad (9.67)$$

Aquest últim pas és degut a que el conjunt $\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$ depèn de u i de \mathbf{q} , però no de \overline{E} . El nombre de nodes de $\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})}$ és

$$\#\mathcal{B}_{(u; \mathbf{q})} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} \#\mathcal{H}_{(u; \mathbf{q}); \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)})(1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(2)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}).$$

Substituint això en (9.67) s'obté l'expressió de l'enunciat i ja hem fet. \square

A continuació demostrem el teorema 9.13.

Demostració del teorema 9.13. És suficient veure l'apartat (i). Procedirem demostrant que $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = e_n(d, |\mathbf{p}|)$ per inducció en $n \geq 1$. Si $n = 1$ hem de veure que $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^*(d; \mathbf{p}) = e_1(d, |\mathbf{p}|)$ per a tot parell $(d; \mathbf{p})$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1}$, tal que $(d, |\mathbf{p}|) \in V_1$. Donat que $V_1 = \{(1, 0)\}$, l'únic parell $(d; \mathbf{p})$ possible satisfent $(d, |\mathbf{p}|) \in V_1$ és quan $d = 1$ i $\mathbf{p} = (0, 0) \in \mathbb{N}^2$, i per tant tot es redueix a provar que $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^*(1; (0, 0)) = e_1(1, 0) = 1$. Aquest fet s'obté emprant la descomposició (9.26) per a $n = 1$, d'on $\widehat{\mathcal{E}}_1^* = \widehat{\mathcal{E}}_1^*(1; (0, 0))$. Aplicant cardinals i utilitzant el corol·lari 3.19, resulta $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^*(1; (0, 0)) = \#\widehat{\mathcal{E}}_1^* = 1$. Per tant quan $n = 1$ ja hem fet.

Suposem ara que $n \geq 2$ i que $\#\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^*(u; \mathbf{q}) = e_{n-1}(u, |\mathbf{q}|)$ per a tots els parells $(u; \mathbf{q})$, $u \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1}$, tals que $(u, |\mathbf{q}|) \in V_{n-1}$. Hem de veure que $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) = e_n(d, |\mathbf{p}|)$

per a tot parell $(d; \mathbf{p})$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{d+1}$, tal que $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$. Sigui doncs un parell $(d; \mathbf{p})$ amb $(d, |\mathbf{p}|) \in V_n$. Utilitzant el corol·lari 9.21 i la hipòtesi d'inducció obtenim:

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) &= \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \left[\sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} \left(e_{n-1}(u, |\mathbf{q}|) \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \left[e_{n-1}(u, q) \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} \left(\sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) \right) \right] \end{aligned}$$

Observem ara que

$$\sum_{\substack{\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{u+1} \\ |\mathbf{q}|=q}} (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) = F_{d,u+1}(q) \quad (9.68)$$

En efecte, els nombres $\vartheta_{\mathbf{r}}(1), \vartheta_{\mathbf{r}}(2), \dots, \vartheta_{\mathbf{r}}(d)$ no depenen de \mathbf{q} , i a més a més $\vartheta_{\mathbf{r}}(1) < \vartheta_{\mathbf{r}}(2) < \dots < \vartheta_{\mathbf{r}}(d)$ ja que $\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u$ i en particular $\mathbf{r}_k \geq 1$ si $k = 1, 2, \dots, d + |\mathbf{p}| - 1$. Per tant, si $d \geq 1$ aleshores es compleix (9.68). Quan $d = 0$ els dos costats de (9.68) coincideixen amb el nombre combinatori $\binom{q+u}{u}$. En efecte, per al primer costat només cal tenir en compte que $(1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(1)}) \cdots (1 + 2\mathbf{q}_{\vartheta_{\mathbf{r}}(d)}) = 1$ i després utilitzar (9.1), mentre que per al segon cal emprar (9.3). Per tant quan $d = 0$ també es compleix (9.68).

De tot això obtenim que

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p}) &= \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} \left(e_{n-1}(u, q) \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{F}_u} F_{d,u+1}(q) \right) \\ &= \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} e_{n-1}(u, q) F_{d,u+1}(q) \#\mathcal{F}_u \\ &= \sum_{\substack{(u,q) \in V_{n-1} \\ u \geq d+2|\mathbf{p}|-1}} e_{n-1}(u, q) F_{d,u+1}(q) \binom{d + |\mathbf{p}| + \frac{u+1-d-2|\mathbf{p}|}{2}}{d + |\mathbf{p}|} \\ &= e_n(d, |\mathbf{p}|). \end{aligned}$$

L'última igualtat s'obté canviant u per d' , q per p' i després tenir en compte (9.16). Per inducció el teorema 9.13 queda demostrat. \square

Per demostrar el teorema 9.14 farem ús del següent corol·lari. Sigui $d \geq 0$ un nombre natural fixat tal que $d \in V_n^s$. Per a un esquema $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}$, posem

$$\mathcal{A}_{\overline{E}}^s = \{E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) \mid E' = \overline{E}\}.$$

Clarament $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d)$ és la reunió disjunta de tots els $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s$, $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}$.

Corol·lari 9.22. *Si $\overline{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}(u)$, on $u \in V_{n-1}^s$, aleshores $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s$ és no buit si i només si $u \geq d - 1$. A més a més en aquest cas el cardinal de $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s$ és*

$$\#\mathcal{A}_{\overline{E}}^s = \binom{d + \frac{u+1-d}{2}}{d}.$$

Demostració. Considerem el conjunt $\mathcal{A}_{\overline{E}}$ quan $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. És a dir,

$$\mathcal{A}_{\overline{E}} = \{E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{0}) \mid E' = \overline{E}\}.$$

Afirmem que $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s = \mathcal{A}_{\overline{E}}$. En efecte, la inclusió $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s \subseteq \mathcal{A}_{\overline{E}}$ és una conseqüència immediata de que el tipus d'un esquema simple $E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d)$ és $(d; \mathbf{0})$. Anem a demostrar ara que $\mathcal{A}_{\overline{E}} \subseteq \mathcal{A}_{\overline{E}}^s$. Sigui $E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{0})$ amb $E' = \overline{E}$ i hem de veure que $E \in \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d)$; o equivalentment, hem de veure que E és simple, ja que $\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) = \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} \cap \widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{0})$. Donat que \overline{E} és simple i $E' = \overline{E}$, E' també és simple. Sigui N un representant qualsevol de E . El tipus de N és $(d; \mathbf{0})$ i N' és simple puix que $N' \in E'$. Això implica que N és simple, ja que en cas contrari, si no fos simple, tindria nodes de derivació zero i amb multiplicitat igual a 2 (de nodes de derivació zero i amb multiplicitat més gran o igual que 3 no en pot tenir donat que N' és simple). Això es contradia amb que el tipus de N és $(d; \mathbf{0})$. Per tant N és simple, d'on E és simple i conseqüentment $E \in \mathcal{A}_{\overline{E}}^s$. Hem vist que $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s = \mathcal{A}_{\overline{E}}$.

Aplicant la proposició 9.19 al parell $(d; \mathbf{p})$ quan $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, i tenint en compte que el tipus de \overline{E} és $(u; \mathbf{0})$, resulta que el conjunt $\mathcal{A}_{\overline{E}} = \mathcal{A}_{\overline{E}}^s$ és equipotent a

$$\mathcal{B}_{(u; \mathbf{0})} = \{(\mathbf{r}; \mathbf{h}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{F}_u, \mathbf{h} \in \mathcal{H}_{(u; \mathbf{0}); \mathbf{r}}\}.$$

Ara bé, quan $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ és $\mathcal{H}_{(u; \mathbf{0}); \mathbf{r}} = \{0\}$, i per tant $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s$ és equipotent a \mathcal{F}_u . Finalment, aplicant l'apartat (a) del lema 9.18 obtenim que $\mathcal{A}_{\overline{E}}^s$ és no buit si i només si $u \geq d + 2|\mathbf{p}| - 1 = d - 1$, i a més a més en aquest cas

$$\#\mathcal{A}_{\overline{E}}^s = \#\mathcal{F}_u = \binom{d + \frac{u+1-d}{2}}{d}.$$

Això completa la demostració. □

Demostració del teorema 9.14. Igual que abans, veurem l'apartat (i) per inducció en n . Si $n = 1$ tenim $V_1^s = \{1\}$, i per tant $\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s} = \bigcup_{d \in V_1} \widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s}(d) = \widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s}(1)$. Utilitzant el corol·lari 3.23 resulta $\#\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s}(1) = \#\widehat{\mathcal{E}}_1^{*,s} = 1 = e_1(1)$. Així, si $n = 1$ ja hem fet. Suposem $n \geq 2$ i que $\#\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}(u) = e_{n-1}(u)$ per a tot nombre natural u tal que $u \in V_{n-1}^s$. Aleshores, si $d \in V_n^s$ tindrem

$$\begin{aligned} \#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d) &= \sum_{\bar{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}} \#\mathcal{A}_{\bar{E}}^s = \sum_{\substack{u \in V_{n-1}^s \\ u \geq d-1}} \sum_{\bar{E} \in \widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}(u)} \#\mathcal{A}_{\bar{E}}^s \\ &= \sum_{\substack{u \in V_{n-1}^s \\ u \geq d-1}} \binom{d + \frac{u+1-d}{2}}{d} \#\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}^{*,s}(u) \\ &= \sum_{\substack{u \in V_{n-1}^s \\ u \geq d-1}} \binom{d + \frac{u+1-d}{2}}{d} e_{n-1}(u) = e_n(d). \end{aligned}$$

L'última igualtat s'obté canviant u per d' i utilitzant (9.23). \square

9.4 Nombre d'esquemes complets de longitud $n \leq 100$

En aquest apartat donarem la taula del nombre d'esquemes complets i del nombre d'esquemes complets i simples de longitud $1 \leq n \leq 100$.

Sobre la implementació en un ordinador dels càlculs corresponents ja està pràcticament tot dit. En el cas del nombre d'esquemes complets de certa longitud n_0 , $n_0 \geq 2$, primer s'emmagatzemen els nombres $F_{dm}(q)$ tals que $(d, m, q) \in A$, on A és el conjunt de (9.18). Això es pot fer seguint l'algorisme 9.8 i emmagatzemant en una matriu M de tres arguments els valors $M(d, j, q) = F_{d, d+2j}(q)$, $d + 2j + 2q \leq n_0$. En segon lloc es procedeix a iterar. Per comoditat es treballa amb els nombres $\bar{e}_n(i, p) = e_n(n - 2i, p)$, $0 \leq i \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, els quals es poden anar calculant recurrentment en n mitjançant l'expressió (9.17). Més exactament, si $n = 1$ és $\bar{e}_1(0, 0) = e_1(1, 0) = 1$, i si $n = 2, 3, \dots, n_0$ i $0 \leq i \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, aleshores

$$\bar{e}_n(i, p) = \sum_{i'=0}^{i-p} \sum_{p'=0}^{i'} \binom{n-i-i'}{n-2i+p} F_{n-2i, n-2i'}(p') \bar{e}_{n-1}(i', p').$$

Un cop calculats els nombres $\bar{e}_n(i, p)$, $0 \leq p \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, aquests es poden aprofitar

per obtenir el nombre d'esquemes complets de longitud n . En efecte, de l'apartat (ii) del teorema 9.13 resulta

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^* = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^i \binom{n-2i+p}{n-2i} \bar{e}_n(i, p).$$

Per tant, un cop completades totes les iteracions $n = 2, 3, \dots, n_0$, haurem obtingut el nombre d'esquemes complets de longitud n per a tot $n = 1, 2, \dots, n_0$.

Observem que durant els iterats només és necessari treballar amb dues matrius S i T . Això és, la matriu S conté els nombres $S(i', p') = \bar{e}_{n-1}(i', p')$, $0 \leq p' \leq i' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, mentre que a T s'hi van emmagatzemant els valors $T(i, p) = \bar{e}_n(i, p)$. A la iteració següent (iteració $n+1$) ja no serà necessari utilitzar els nombres $\bar{e}_{n-1}(i', p')$, $0 \leq p' \leq i' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Es redefineix aleshores $S(i, p) = T(i, p)$, $0 \leq p \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

La taula 9.1 conté el nombre d'esquemes complets de longitud n per a $1 \leq n \leq 100$. Per als valors de $n \geq 12$ aquest nombre es dona arrodonit a tres xifres significatives. Donat que $\#\mathcal{R}_n^* = \#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$, $n \geq 1$, obtenim per exemple que els polinomis de grau 5 queden classificats en 169 classes, els de grau 10 en 1771615 classes i els de grau 100 en 1.65×10^{120} classes. La magnitud d'aquests nombres posa de manifest que la classificació dels polinomis via l'equivalència \sim és molt fina.

En el cas del nombre d'esquemes complets i simples de certa longitud n_0 , la seva implementació en un ordinador és més senzilla. Només cal considerar els nombres definits per $\bar{e}_n(i) = e_n(n-2i)$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, els quals es calculen recurrentment en n emprant l'expressió (9.24). És a dir, $\bar{e}_1(0) = e_1(1) = 1$, i si $n = 2, 3, \dots, n_0$ i $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, aleshores

$$\bar{e}_n(i) = \sum_{i'=0}^i \binom{n-i-i'}{n-2i} \bar{e}_{n-1}(i').$$

Un cop calculats tots els nombres $\bar{e}_n(i)$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n ve donat per $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{e}_n(i)$. Observem que ara només cal treballar amb dos vectors s i t . En el vector s hi ha emmagatzemats els valors $s(i') = \bar{e}_{n-1}(i')$, $0 \leq i' \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, mentre que en el vector t els valors $t(i) = \bar{e}_n(i)$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

La taula 9.2 conté el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n , $n = 1, 2, \dots, 100$. A partir de $n = 16$ es dona aquest nombre arrodonit a tres xifres

significatives. Tenint en compte que $\#\mathcal{R}_n^{*,o} = \#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$, $n \geq 1$, obtenim per exemple que el nombre de classes de polinomis obertes de grau 5 és 30, de grau 10 és 22031 i de grau 100 és 7.51×10^{92} .

n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$
1	1	26	4.27×10^{22}	51	9.83×10^{52}	76	2.33×10^{86}
2	3	27	5.65×10^{23}	52	1.93×10^{54}	77	5.53×10^{87}
3	9	28	7.91×10^{24}	53	3.74×10^{55}	78	1.35×10^{89}
4	39	29	1.09×10^{26}	54	7.49×10^{56}	79	3.24×10^{90}
5	169	30	1.59×10^{27}	55	1.48×10^{58}	80	7.98×10^{91}
6	943	31	2.28×10^{28}	56	3.02×10^{59}	81	1.94×10^{93}
7	5225	32	3.43×10^{29}	57	6.09×10^{60}	82	4.86×10^{94}
8	34927	33	5.10×10^{30}	58	1.27×10^{62}	83	1.20×10^{96}
9	230841	34	7.95×10^{31}	59	2.60×10^{63}	84	3.03×10^{97}
10	1771615	35	1.22×10^{33}	60	5.52×10^{64}	85	7.59×10^{98}
11	13410761	36	1.97×10^{34}	61	1.15×10^{66}	86	1.94×10^{100}
12	1.15×10^8	37	3.12×10^{35}	62	2.49×10^{67}	87	4.92×10^{101}
13	9.71×10^8	38	5.17×10^{36}	63	5.30×10^{68}	88	1.28×10^{103}
14	9.13×10^9	39	8.44×10^{37}	64	1.16×10^{70}	89	3.27×10^{104}
15	8.46×10^{10}	40	1.44×10^{39}	65	2.52×10^{71}	90	8.57×10^{105}
16	8.60×10^{11}	41	2.42×10^{40}	66	5.60×10^{72}	91	2.22×10^{107}
17	8.61×10^{12}	42	4.23×10^{41}	67	1.23×10^{74}	92	5.90×10^{108}
18	9.39×10^{13}	43	7.30×10^{42}	68	2.79×10^{75}	93	1.55×10^{110}
19	1.01×10^{15}	44	1.31×10^{44}	69	6.25×10^{76}	94	4.15×10^{111}
20	1.17×10^{16}	45	2.32×10^{45}	70	1.44×10^{78}	95	1.10×10^{113}
21	1.33×10^{17}	46	4.26×10^{46}	71	3.26×10^{79}	96	2.99×10^{114}
22	1.62×10^{18}	47	7.72×10^{47}	72	7.61×10^{80}	97	8.02×10^{115}
23	1.95×10^{19}	48	1.45×10^{49}	73	1.75×10^{82}	98	2.20×10^{117}
24	2.51×10^{20}	49	2.70×10^{50}	74	4.15×10^{83}	99	5.96×10^{118}
25	3.18×10^{21}	50	5.18×10^{51}	75	9.71×10^{84}	100	1.65×10^{120}

Taula 9.1. Nombre d'esquemes complets de longitud n , $1 \leq n \leq 100$.

n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$	n	$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$
1	1	26	3.26×10^{16}	51	7.05×10^{39}	76	1.04×10^{66}
2	2	27	2.30×10^{17}	52	7.15×10^{40}	77	1.27×10^{67}
3	4	28	1.70×10^{18}	53	7.18×10^{41}	78	1.58×10^{68}
4	11	29	1.25×10^{19}	54	7.42×10^{42}	79	1.95×10^{69}
5	30	30	9.56×10^{19}	55	7.60×10^{43}	80	2.46×10^{70}
6	101	31	7.25×10^{20}	56	8.00×10^{44}	81	3.07×10^{71}
7	336	32	5.75×10^{21}	57	8.35×10^{45}	82	3.92×10^{72}
8	1310	33	4.51×10^{22}	58	8.95×10^{46}	83	4.97×10^{73}
9	5039	34	3.69×10^{23}	59	9.51×10^{47}	84	6.42×10^{74}
10	22031	35	2.98×10^{24}	60	1.04×10^{49}	85	8.23×10^{75}
11	94973	36	2.51×10^{25}	61	1.12×10^{50}	86	1.08×10^{77}
12	456038	37	2.09×10^{26}	62	1.24×10^{51}	87	1.40×10^{78}
13	2158805	38	1.81×10^{27}	63	1.36×10^{52}	88	1.85×10^{79}
14	11220637	39	1.55×10^{28}	64	1.54×10^{53}	89	2.42×10^{80}
15	57500313	40	1.37×10^{29}	65	1.72×10^{54}	90	3.24×10^{81}
16	3.20×10^8	41	1.21×10^{30}	66	1.96×10^{55}	91	4.30×10^{82}
17	1.76×10^9	42	1.10×10^{31}	67	2.23×10^{56}	92	5.82×10^{83}
18	1.04×10^{10}	43	9.90×10^{31}	68	2.59×10^{57}	93	7.82×10^{84}
19	6.06×10^{10}	44	9.23×10^{32}	69	2.98×10^{58}	94	1.07×10^{86}
20	3.78×10^{11}	45	8.51×10^{33}	70	3.51×10^{59}	95	1.45×10^{87}
21	2.33×10^{12}	46	8.12×10^{34}	71	4.10×10^{60}	96	2.00×10^{88}
22	1.53×10^{13}	47	7.66×10^{35}	72	4.90×10^{61}	97	2.75×10^{89}
23	9.86×10^{13}	48	7.46×10^{36}	73	5.81×10^{62}	98	3.84×10^{90}
24	6.76×10^{14}	49	7.20×10^{37}	74	7.05×10^{63}	99	5.32×10^{91}
25	4.57×10^{15}	50	7.15×10^{38}	75	8.47×10^{64}	100	7.51×10^{92}

Taula 9.2. Nombre d'esquemes complets i simples de longitud n , $1 \leq n \leq 100$.

Conclusions i futures línies de recerca

Conclusions

En la introducció del treball s'havien concretat els objectius, que es poden sintetitzar en els punts següents:

- (1) Establir que tot esquema complet és representable per un polinomi. A més, si és possible, determinar quan aquest polinomi es pot escollir satisfent altres condicions addicionals.
- (2) Classificar els polinomis en base a l'ordenació de les arrels de derivades consecutives. Un cop obtinguda aquesta classificació, assolir els dos objectius següents: (2a) trobar el nombre de classes en que queden classificats els polinomis de grau n , i (2b) caracteritzar les classes de polinomis obertes.
- (3) Veure que quan $n \geq 4$ existeixen ordenacions entre variables, més exigents que la de derivades consecutives i compatibles amb el teorema d'ordenació, que no són representables per polinomis. En aquest objectiu també hi entra estudiar què succeeix en el cas $n \leq 3$.

L'objectiu (1) s'ha assolit en el capítol 8; l'objectiu (2) en els capítols 3 i 9; i l'objectiu (3) en el capítol 3.

En el capítol 1, secció 1.1, s'ha presentat la terminologia fonamental del treball. En aquest sentit, s'han introduït els *nodes* com parells de la forma (x, j) , on $x \in \mathbb{R}$ i $j \in \mathbb{N}$. Els nombres x i j s'anomenen, respectivament, *abscissa* i *derivació* del node. També s'han introduït les *configuracions* com els conjunts finits de

nodes i s'ha vist la manera natural de representar les configuracions en el pla. Posteriorment s'han donat conceptes relatius a configuracions com el de *longitud* d'una configuració i el de *multiplicitat* d'un node en una configuració. Finalment s'ha presentat el concepte d'*espectre* d'un polinomi P , denotat $Z(P)$, que és la configuració formada per tots els nodes de derivació més petita o igual que $n - 1$ i anul·lats per P , on n denota el grau de P . És a dir,

$$Z(P) = \{(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid P^{(j)}(x) = 0, j \leq n - 1\}.$$

La informació referent a les arrels del polinomi P i les arrels de les seves derivades està continguda en l'espectre de P .

En les altres seccions del capítol 1 s'han establert resultats, la major part d'ells coneguts, que s'han necessitat més endavant. En la secció 1.2 s'ha presentat el problema d'*interpolació de Birkhoff* en la seva forma original [3], i s'han traduït alguns dels resultats clàssics sobre regularitat de configuracions que en la literatura es troben escrits en termes de matrius d'incidència. Així, s'han presentat conceptes com el de *configuració Pólya* i el de *configuració conservativa* o *quasi-conservativa*. El teorema 1.4, degut a K. Atkinson i A. Sharma [2], és un dels resultats més importants sobre regularitat que per facilitar la referència l'enunciem a continuació.

Teorema 1.4. *Tota configuració Pólya i quasi-conservativa és regular.*

Conseqüència d'aquest resultat és que tota configuració Pólya i conservativa és regular. Un altre resultat que ha estat fonamental en el transcurs del treball és el teorema 1.5, que essencialment estableix el següent.

Teorema 1.5. *Si A és una configuració regular de n nodes. Aleshores, existeix un únic polinomi de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre A .*

Aquest teorema permet definir un polinomi a partir d'una configuració A (regular). L'espectre d'aquest polinomi conté la configuració A i, en particular, els nodes de A són nodes de l'espectre coneguts. Per tant, si el que es vol és controlar tots els nodes de l'espectre del polinomi, només cal controlar els que no són de A . A la secció 1.3 s'han estudiat les propietats de les *funcions nivell*, que han estat una eina important en els capítols 4, 5 i 6. Finalment, en la secció 1.4 s'ha estudiat la relació existent entre l'espectre d'un polinomi i l'espectre dels seus pertorbats. Aquesta relació està continguda en el teorema 1.23.

En el capítol 2 s'han vist les propietats fonamentals de les *configuracions completes* i *quasi-completes*. Primerament, en la secció 2.1 s'han classificat els nodes d'una

configuració en col·leccions de nodes anomenades *grups*. Aquí el mot grup no té cap mena de connotació algebraica. En la secció 2.2 s'ha introduït el concepte de configuració quasi-completa com aquella que no entra en contradicció amb el teorema de Rolle, i el de configuració completa com la que no entra en contradicció amb el teorema d'ordenació, en termes de la cardinalitat dels seus grups. Un resultat equivalent al teorema d'ordenació és el teorema 2.12, que estableix que tot espectre és una configuració completa. En la secció 2.3 s'ha provat la *fórmula de la longitud*, que relaciona la longitud d'una configuració quasi-completa amb la cardinalitat dels seus grups. Aquesta fórmula es troba en el teorema 2.13. Finalment, en la secció 2.4 s'ha vist que tota configuració indueix un signe sobre els nodes que no pertanyen a la configuració. El teorema 2.18 conté la influència d'aquest signe en la determinació dels signes de les derivades d'un polinomi en un punt $x \in \mathbb{R}$.

En el capítol 3, secció 3.1, s'han presentat tot un seguit de relacions d'equivalència, definides en el conjunt de configuracions, de manera que les classes d'equivalència de configuracions produïdes per aquestes relacions d'equivalència es corresponen amb les ordenacions entre variables presentades en la introducció del present treball. Així, per a $\rho = 1$ s'obté la *1-equivalència* o *equivalència*, i que produeix com a classes d'equivalència els *esquemes* (ordenacions entre variables de derivacions consecutives). En general, per a $\rho = 0, 1, 2, \dots$ resulta la ρ -*equivalència*, i que produeix com a classes d'equivalència les ordenacions entre variables que tenen derivacions que difereixen com a molt en ρ unitats. També s'ha considerat el cas $\rho = +\infty$, que es correspon amb l'ordenació típica (totes les variables lligades). En la secció 3.2 s'ha vist que la gran majoria dels conceptes definits en els capítols 1 i 2, tals com el de longitud d'una configuració, el de multiplicitat d'un node o el de configuració completa, són invariants per la 1-equivalència.

En el teorema 3.12 s'ha establert que tota configuració completa de longitud n , $1 \leq n \leq 3$, és ∞ -equivalent a un, i només un, dels espectres que s'expliciten en l'enunciat del teorema. Quan $n = 1$ hi ha explicitat un únic espectre, quan $n = 2$ n'hi ha tres, i quan $n = 3$ n'hi ha tretze. En termes de variables aquest teorema diu dues coses. Primera, que totes les ordenacions típiques amb $1 \leq n \leq 3$ i compatibles amb el teorema d'ordenació són representables per polinomis. Segona, que el nombre d'ordenacions típiques compatibles amb el teorema d'ordenació és igual a 1, 3 i 13 per a $n = 1, 2$ i 3 respectivament.

A continuació s'han classificat els polinomis de grau n , $1 \leq n \leq 3$, en funció de quin dels espectres de l'enunciat del teorema 3.12 es correspon amb l'espectre

de cada polinomi, i s'han explicitat les classes d'equivalència en funció dels coeficients. Amb altres paraules, s'ha determinat quina ordenació típica presenta cada polinomi de grau n , $1 \leq n \leq 3$, en funció dels seus coeficients.

En la proposició 3.15, estudiant les arrels de $P^{(j)}$, $n - 3 \leq j \leq n - 1$, on P és el polinomi $P(x) = (x + 1)^u(x - 1)^v$, $u + v = n$, s'ha provat que per a $n \geq 4$ existeixen configuracions completes de longitud n que no són 2-equivalents a un espectre. Això té la conseqüència immediata que per a tot $n \geq 4$ existeixen ordenacions entre variables de derivacions que difereixen en una o dues unitats, i compatibles amb el teorema d'ordenació, que no es poden representar per polinomis. Estudiant les arrels de $P^{(j)}$, $k \leq j \leq k + 2$, del mateix polinomi P , es pot veure que existeixen ordenacions entre variables de derivacions consecutives, compatibles amb el teorema d'ordenació, de manera que si s'afegeix un lligam convenient entre una variable de derivació k i una de derivació $k + 2$ aleshores l'ordenació resultant ja no és representable per polinomis.

En la secció 3.4 s'han estudiat els esquemes, és a dir, les classes d'equivalència de configuracions produïdes per la 1-equivalència. Classificant els polinomis segons l'esquema que presenten s'ha obtingut una classificació dels polinomis en base a com estan ordenades les arrels de les seves derivades consecutives. En la proposició 3.25 s'han caracteritzat les classes de polinomis que són obertes a partir dels *esquemes simples*. Això s'ha obtingut com a conseqüència del lema 3.24, que dóna una condició necessària i suficient per a que totes les pertorbacions d'un polinomi inicial tinguin el mateix esquema que el del polinomi inicial.

El nostre objectiu específic (3) s'ha assolit en el capítol 3, concretament en el teorema 3.12 i la proposició 3.15. També s'ha assolit l'objectiu (2) en la secció 3.4, classificant els polinomis en base al seu esquema. D'aquest objectiu (2) s'ha assolit el punt específic (2b) caracteritzant les classes de polinomis obertes.

En el capítol 4, secció 4.1, s'ha presentat el concepte d'*esquelet*. Si N és una configuració quasi-completa, un esquelet seu és un subconjunt A de N escollit d'una manera molt especial. Els nodes de N que no pertanyen a l'esquelet estan continguts en una configuració anomenada configuració de *nodes veritables* del parell $[N|A]$. Així que, essencialment, la configuració N es recupera a partir de l'esquelet i de la configuració de nodes veritables. En el teorema 4.5 i en els corol·laris 4.6 i 4.7 s'ha vist la influència dels esquelets en les configuracions quasi-completes. En la secció 4.2 s'ha introduït una nova classe de configuracions completes, les *\mathcal{B} -configuracions*, i s'ha estudiat la dualitat existent entre

les \mathcal{B} -configuracions i les configuracions Pólya i conservatives. Aquesta dualitat està continguda en la proposició 4.12, que estableix que una configuració quasi-completa és \mathcal{B} -configuració si, i només si, admet un esquelet Pólya i conservatiu. A continuació s'ha establert el resultat més important del capítol, el teorema 4.13, i que enunciem tot seguit.

Teorema 4.13. *Sigui A una configuració Pólya i conservativa de n nodes. Sigui $P(x)$ l'únic polinomi de grau n , amb coeficient principal igual a $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre A . Aleshores A és un esquelet de $Z(P)$ i, en particular, $Z(P)$ és \mathcal{B} -configuració.*

Observem que el polinomi P d'aquest teorema està ben definit en virtut dels teoremes 1.4 i 1.5. El fet que A sigui un esquelet de $Z(P)$ permet obtenir moltes propietats de $Z(P)$ sense necessitat de conèixer explícitament $Z(P)$. Aquestes propietats provenen de la influència dels esquelets en les configuracions quasi-completes.

El capítol 5 ha estat dedicat a analitzar el moviment de les abscisses dels nodes d'una configuració. Això s'ha fet a la secció 5.1 considerant certes funcions $m_i : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, h$, que determinen les derivacions dels nodes dels quals es mouen les abscisses. Cada vector \vec{y} de \mathbb{R}^h determina una configuració, denotada $\text{Ext}(\vec{y})$, que és la formada pels nodes que tenen derivacions iguals a les derivacions especificades en les funcions m_i , i abscisses iguals a les components del vector \vec{y} . Variant \vec{y} s'obté tota una família de configuracions, $\{\text{Ext}(\vec{y})\}_{\vec{y} \in \mathbb{R}^h}$, totes elles amb un mateix nombre n de nodes, i de manera que les unes a les altres només es diferencien en els valors concrets que prenen les abscisses dels seus nodes. Per solucionar els problemes que apareixen quan algunes de les components del vector \vec{y} són iguals, s'ha necessitat de les funcions nivell, estudiades anteriorment en la secció 1.3. En la proposició 5.5 s'ha caracteritzat el cas Pólya i conservatiu, és a dir, s'han donat les condicions necessàries i suficients que han de verificar les funcions m_i per tal que totes les configuracions $\text{Ext}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$, siguin Pólya i conservatives.

En el cas Pólya i conservatiu es pot considerar el polinomi de grau n , amb coeficient principal $\frac{1}{n!}$, que s'anul·la sobre $\text{Ext}(\vec{y})$. Aquest polinomi depèn de \vec{y} i es denota $P(\vec{y}; \cdot)$. Així, per a $x \in \mathbb{R}$ el valor d'aquest polinomi en el punt x és $P(\vec{y}; x)$. Pel teorema 4.13 la configuració $\text{Ext}(\vec{y})$ és un esquelet de l'espectre d'aquest polinomi i, en conseqüència, queden determinades certes propietats de l'espectre del polinomi. En el teorema 5.7, secció 5.2, s'ha provat que aquest polinomi varia contínuament amb \vec{y} . Finalment, en la secció 5.3 s'han estudiat les *arrels*

veritables i latents. Essencialment, les arrels veritables i latents són les abscisses dels nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$, només que afegint algunes arrels noves (arrels latents). En el teorema 5.16 s'ha provat que les arrels veritables i latents varien contínuament amb \vec{y} . Aquest fet és important perquè d'ell es desprèn que les abscisses dels nodes veritables del parell $[Z(P(\vec{y}; \cdot)) | \text{Ext}(\vec{y})]$ són funcions contínues de \vec{y} .

En el capítol 6, secció 6.2, s'ha enunciat i demostrat el *teorema de representació per a les \mathcal{B} -configuracions*, teorema 6.4, i que estableix que tota \mathcal{B} -configuració és equivalent a l'espectre d'un polinomi P i que, a més a més, aquest polinomi es pot escollir satisfent certes condicions addicionals. Aquestes condicions addicionals vénen definides per uns paràmetres o graus de llibertat introduïts prèviament en la secció 6.1. Bàsicament, de graus de llibertat n'hi ha de dos tipus: els que determinen les abscisses d'alguns nodes de l'espectre de P , i els que determinen les proporcions existents entre les abscisses de certs nodes de l'espectre de P . Observem que això determina algunes arrels de derivades de P , i proporcions entre certes arrels de derivades de P . La demostració del teorema 6.4 ha estat basada, d'una banda, en el moviment de les abscisses dels nodes d'una configuració, estudiat anteriorment en el capítol 5, i d'altra, en localitzar un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^h$ de forma que l'espectre del polinomi $P(\vec{y}; \cdot)$ tingui les propietats demanades en l'enunciat del teorema. En la localització d'aquest vector ha estat fonamental el teorema del punt fix de Brouwer. Tanmateix, per poder aplicar el teorema del punt fix de Brouwer s'ha necessitat de la continuïtat de les funcions d'arrels veritables i latents, establerta anteriorment en el teorema 5.16.

En la secció 6.3 s'ha fet un recompte del nombre de graus de llibertat obtinguts en la determinació del polinomi P del teorema 6.4, resultant que en total n'hi ha tants com el grau de P . Com que un polinomi mònic depèn de tants coeficients com el seu grau, això significa que el nombre de condicions addicionals que permet escollir el teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions és el màxim nombre de condicions addicionals que a priori es pot esperar trobar. Finalment s'ha discutit la unicitat del polinomi, veient la unicitat en casos parcials, i s'ha deixat oberta la qüestió de determinar la unicitat en el cas general.

En el capítol 7 s'ha estudiat l'existència de pertorbacions d'un polinomi inicial, denotat P^* , de manera que l'espectre d'aquestes pertorbacions s'obtingui eliminant (suprimint) uns quants nodes de $Z(P^*)$. El resultat més important en aquest sentit és el teorema 7.16, que per facilitar la referència l'enunciem a continuació.

Teorema 7.16. *Un subconjunt de $Z(P^*)$ és eliminable si i només si és parell.*

En aquest teorema, un subconjunt de $Z(P^*)$ és *eliminable* si els nodes d'aquest subconjunt es poden eliminar per pertorbacions tan pròximes com es vulgui a P^* . D'altra banda, un subconjunt és *parell* si els seus nodes tenen multiplicitat parell en $Z(P^*)$. En el teorema 7.17 s'ha generalitzat el fet que tot subconjunt parell és eliminable, establint que tot subconjunt parell es pot eliminar per una pertorbació de P^* que verifica, a més a més, altres propietats.

En el capítol 8, secció 8.1, s'ha vist com afegir nodes a una configuració completa N fins arribar a transformar-la en una \mathcal{B} -configuració. Aquesta \mathcal{B} -configuració es denota N^* i s'anomena *saturació* de N . En la secció 8.2 s'ha establert el *teorema de representació*, teorema 8.5, i que enunciem tot seguit.

Teorema 8.5. *Tota configuració completa és equivalent a l'espectre d'un polinomi.*

D'acord amb la terminologia utilitzada en la introducció del present treball, un enunciat equivalent d'aquest teorema és el següent.

Teorema 8.5. *Tot esquema complet és representable per un polinomi.*

La demostració d'aquest resultat ha estat basada en aplicar primer el teorema de representació per a \mathcal{B} -configuracions a la saturació N^* , d'on s'obté un polinomi tal que el seu espectre és equivalent a N^* , i després aplicar el teorema 7.16 a aquest polinomi, eliminant d'aquesta forma els nodes que s'havien afegit a N per construir N^* .

Posteriorment, en el teorema 8.6 s'ha generalitzat el teorema de representació establint que tota configuració completa és equivalent a l'espectre d'un polinomi P i que, a més a més, aquest polinomi es pot escollir satisfent altres condicions addicionals. Aquest resultat, anomenat *teorema general de representació*, produeix condicions addicionals en la determinació del polinomi de quatre tipus: (i) les que permeten fixar algunes arrels de derivades del polinomi P , (ii) les que fixen les proporcions existents entre algunes arrels de derivades de P , (iii) les que fixen el valor de P i d'algunes derivades de P en determinades abscisses, i (iv) les que determinen l'ordenació entre certes arrels de $P^{(k)}$ i certes arrels de $P^{(k+2)}$. Les condicions d'aquest últim tipus relacionen algunes arrels de derivades no consecutives del polinomi. Posteriorment s'han donat alguns exemples d'aplicació del teorema.

Com a conseqüència del teorema general de representació, s'ha obtingut un resultat que només té en compte algunes de les condicions addicionals de tipus (i), i que enunciem a continuació.

Teorema 8.12. *Tota configuració completa és equivalent a l'espectre d'un polinomi. Les arrels reals d'aquest polinomi es poden prefixar per endavant.*

D'acord amb la terminologia utilitzada en la introducció del present treball, el teorema anterior estableix que tot esquema complet és representable per un polinomi i que les arrels d'aquest polinomi es poden prefixar per endavant.

Siguin $[a, b]$ un interval tancat de \mathbb{R} i $P(x)$ un polinomi de grau n a coeficients reals. Denotant $m(j)$ el nombre d'arrels reals diferents de $P^{(j)}$ en l'interval $[a, b]$, $0 \leq j \leq n - 1$, del teorema de Rolle es dedueix que $m(j) \geq m(j - 1) - 1$ per a $j = 1, 2, \dots, n - 1$, i $m(n - 1) \leq 1$ (observem que aquí $m(n - 1)$ no és cap producte, sinó que és el valor de $m(j)$ quan $j = n - 1$). Mikusiński [39], l'any 1949, va demostrar una mena de recíproc d'aquest fet establint el següent resultat.

Teorema ([39]) *Sigui $[a, b]$ un interval tancat de \mathbb{R} i siguin $m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, nombres naturals verificant $m(j) \geq m(j - 1) - 1$ per a $j = 1, 2, \dots, n - 1$, i $m(n - 1) \leq 1$. Aleshores, existeix un polinomi $P(x)$ a coeficients reals de grau $n - 1 + m(n - 1)$ de manera que cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$, té exactament $m(j)$ arrels reals en l'interval $[a, b]$, totes elles simples.*

Com a conseqüència dels teoremes de representació, en el corol·lari 8.13 s'ha obtingut una generalització del resultat anterior en el sentit que té en compte totes les arrels del polinomi i de les seves derivades (no només les contingudes en l'interval tancat $[a, b]$) i que, a més a més, inclou condicions addicionals en la determinació del polinomi. L'enunciem a continuació.

Corol·lari 8.13. *Es verifiquen els apartats següents:*

- (a) *Sigui $P(x)$ un polinomi a coeficients reals de grau n tal que totes les seves arrels reals, i arrels reals de les seves derivades, són simples. Sigui $m(j)$ el nombre d'arrels reals de $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$. Aleshores, $m(n - 1) = 1$ i $m(j) = m(j - 1) - 1 + p_j$ per a $j = 1, 2, \dots, n - 1$, on $p_j \geq 0$ és un nombre parell.*
- (b) *Siguin $m(j)$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, nombres naturals tals que $m(n - 1) = 1$ i $m(j) = m(j - 1) - 1 + p_j$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, on $p_j \geq 0$ és un nombre parell. Aleshores, existeix un polinomi $P(x)$ a coeficients reals de grau n tal que totes les seves arrels reals, i arrels reals de les seves derivades, són simples, i*

de manera que el nombre d'arrels reals de cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n-1$, és exactament $m(j)$. A més, les $m(0)$ arrels del polinomi P es poden prefixar per endavant.

Tot seguit a aquest corol·lari s'ha comentat com fer complir noves condicions al polinomi P de l'apartat (b). És a dir, no només les que fixen les arrels de P .

Finalment, en la secció 8.3 s'ha fet un recompte del nombre de condicions addicionals que produeix el teorema general de representació en la determinació del polinomi P , obtenint que en total n'hi ha tantes com el seu grau. Això significa que el nombre de condicions addicionals obtingudes és el màxim nombre de condicions addicionals que a priori es pot esperar trobar.

En aquest capítol, establint els teoremes de representació, s'ha assolit el nostre objectiu específic (1).

En el capítol 9 s'han trobat fórmules recurrents per al càlcul del nombre d'esquemes complets de longitud n i per al càlcul del nombre d'esquemes complets i simples de longitud n . En virtut del teorema de representació, teorema 8.5, el nombre d'esquemes complets de longitud n coincideix amb el nombre de classes de polinomis de grau n segons la classificació dels polinomis establerta en la secció 3.4, en base al seu esquema. També en virtut del teorema de representació i de la caracterització de les classes de polinomis obertes, proposició 3.25, el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n coincideix amb el nombre de classes de polinomis obertes de grau n . En les seccions 9.1 i 9.2 s'han donat alguns conceptes necessaris per poder enunciar els resultats principals del capítol, teoremes 9.13 i 9.14, els quals estableixen, respectivament, que

$$\#\widehat{\mathcal{E}}_n^* = \sum_{(d,p) \in V_n} \binom{d+p}{d} e_n(d,p), \quad \text{i} \quad \#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s} = \sum_{d \in V_n^s} e_n(d)$$

on $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$ i $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$ denoten el nombre d'esquemes complets de longitud n i el nombre d'esquemes complets i simples de longitud n respectivament, i els nombres $e_n(d,p)$ i $e_n(d)$ són nombres definits recurrentment en n , introduïts prèviament en la secció 9.1. Finalment, en la secció 9.4 s'ha donat la manera de programar les fórmules anteriors en un ordinador i s'han donat les taules de $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^*$ i $\#\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$ per a $1 \leq n \leq 100$.

En aquest capítol s'ha assolit el punt específic (2a) de l'objectiu (2).

Futures línies de recerca

El teorema de representació per a les \mathcal{B} -configuracions, teorema 6.4, estableix que tota \mathcal{B} -configuració és equivalent a l'espectre d'un polinomi i que, a més a més, aquest polinomi es pot escollir satisfent certes condicions addicionals. En la secció 6.3 s'ha provat la unicitat d'aquest polinomi en casos parcials, deixant oberta la qüestió de determinar la unicitat en el cas general. En el cas del teorema general de representació, teorema 8.6, també resta oberta la qüestió de determinar la unicitat del polinomi. Així doncs, l'estudi de la unicitat és una futura línia de recerca.

En el capítol 9 s'han trobat fórmules recurrents per al càlcul del nombre d'esquemes complets de longitud n i per al nombre d'esquemes complets i simples de longitud n . Una línia de recerca és obtenir fórmules explícites d'aquests nombres.

El teorema general de representació produeix condicions addicionals en la determinació del polinomi que relacionen algunes arrels de derivades no consecutives del polinomi. Aquest pot ser un bon punt de partida per estudiar ordenacions entre variables més exigents que la de derivades consecutives.

Una altra línia de recerca és l'extensió del treball al cas complex. L'estudi de tots els zeros d'un polinomi i dels zeros de les seves derivades presenta l'inconvenient que no hi ha una ordenació natural en el pla complex i, per tant, tampoc entre els zeros. Per contra, en el cas complex es té l'avantatge que es disposa, d'una banda, del Teorema Fonamental de l'Àlgebra, el qual permet considerar sempre els n zeros d'un polinomi de grau n , i d'altra, de les fórmules de Cardano-Vieta (Girard [17], 1629). D'aquestes fórmules es desprenen totes les relacions entre els zeros d'un polinomi i els zeros de les seves derivades. Alguns dels resultats clàssics que proporcionen regions contenint zeros de la derivada d'un polinomi, i en conseqüència que podrien tenir un paper similar al del teorema de Rolle o al del teorema d'ordenació, són el teorema de Gauss-Lucas (Lucas [36], 1879), el teorema dels cercles de Jensen (Jensen [22], 1913) o el teorema de Grace-Heawood (Grace [19], 1902; Heawood [20], 1907). També seria interessant veure si els resultats obtinguts en aquesta línia contribueixen en la conjectura de Sendov-Ilyeff [38].

Dintre de la matemàtica aplicada, els resultats obtinguts es poden utilitzar en el camp de la interpolació de Birkhoff. El procés d'afegir nodes a una configuració A fins a transformar-la en completa (trobar una *completació* de A) i després aplicar el teorema de representació, sembla que permet:

- 1) Obtenir fites inferiors del nombre $r(E)$, on $r(E)$ és el rang més petit possible de les matrius de Vandermonde obtingudes al variar les abscisses d'una ma-

triu d'incidència E . Fites d'aquest estil s'han estudiat en ([6],[30],[33]) essent l'obtinguda en [33] la millor fita. Hem observat que utilitzant el procés de completació s'obtenen sovint fites millors que la de [33]. Així que l'estudi de fites inferiors per a $r(E)$ és una futura línia de recerca.

- 2) Refinar el teorema de Lorentz [28] sobre ordre-regularitat. Aquest refinament passa per utilitzar les condicions addicionals que dóna el teorema general de representació.
- 3) Estudiar problemes d'interpolació més generals que els dictats per matrius d'incidència. Les matrius d'incidència determinen unes famílies molt concretes de configuracions. Tanmateix, l'estudi de la regularitat o singularitat d'una família qualsevol de configuracions, és a dir, el de determinar si totes les configuracions de la família admeten interpolació única, ve motivat perquè sovint pot ser més interessant disposar de graus de llibertat per fixar altres lligams que no pas el lligam que representa l'ordre entre abscisses de nodes de derivacions no consecutives. Sembla que les completacions i el teorema de representació permeten determinar, en alguns casos, la regularitat o singularitat de famílies qualsevol de configuracions.

Índex de notacions

A continuació es relaciona la notació emprada, la major part de la qual és original i ha estat establerta en aquest treball.

<i>Símbol</i>	<i>Pàgina</i>	
\mathbb{N}	15	nombres naturals
\mathbb{R}	15	nombres reals
$\mathbb{R}[x]$	15	polinomis a coeficients reals
$\mathbb{R}_n[x]$	15	polinomis reals de grau menor o igual que n
$\mathbb{R}_n^*[x]$	15	polinomis reals de grau n
$\deg(P)$	15	grau del polinomi P
$\#X$	15	cardinal del conjunt X
$f[\alpha]$	15	valor de f en el node α
ℓ_A	16	longitud de la configuració A
ab_A	16	conjunt de les abscisses dels nodes de A
ε_A	16	èpsilon de A
$\text{mult}_A[\alpha]$	16	multiplicitat de α en A
$\text{peu}_A[\alpha], \text{cap}_A[\alpha]$	17	peu i cap de α en A respectivament
$m_A(j)$	17	nombre de nodes de A amb derivació j
$M_A(j)$	17	nombre de nodes de A amb derivació menor o igual que j
m_A	17	funció de valors $m_A(j)$, $j \geq 0$
M_A	17	funció de valors $M_A(j)$, $j \geq 0$
$Z(P)$	17	espectre del polinomi P

$V(A)$	19	matriu de Vandermonde de A
$D(A)$	19	determinant de Vandermonde de A
$V_m(A)$	22	matriu de Vandermonde de A amb m columnes
$M(j)$	24	$\sum_{k=0}^j m(k)$, on m és una funció finita
x_+	24	part positiva de x
m°	25	funció nivell de m funció finita
$M^\circ(j)$	25	$\sum_{k=0}^j m^\circ(k)$
$\alpha[m]$	30	coeficient de col·lisió de m
m_A°	31	funció nivell de m_A
$m_{(k,p)}$	31	seqüència de tipus (k, p)
\mathbb{C}	34	nombres complexos
$\text{mult}(f, z)$	34	multiplicitat de la funció f en z
\mathfrak{g}	38	grup d'una configuració
$\sigma_A^-(\mathfrak{g}), \sigma_A^+(\mathfrak{g})$	39	node o nodes que delimiten un grup \mathfrak{g} de A
e_N	48	nombre de grups interiors de la configuració N
τ_N	48	$\#\{j \in \{0, 1, 2, \dots, \ell_N - 1\} \mid m_N(j) = 0\}$
$\mathcal{G}_N^{(\text{int})}, \mathcal{G}_N^{(\text{ext})}, \mathcal{G}_N^{(\text{at})}$	48	conjunt dels grups interiors, exteriors i atípics de N respectivament
\mathcal{G}_N	49	conjunt dels grups de N
$n_N(j)$	50	nombre de nodes de N amb derivació j comptant multiplicitats
j_α	50	si α és un node, indica la derivació d'aquest node
$j_{\mathfrak{g}}$	50	derivació del grup \mathfrak{g}
$\text{sgn}_A[\alpha]$	51	signe de α en A
\mathcal{C}	55	conjunt de configuracions
\mathcal{C}_n	55	configuracions de longitud menor o igual que n
\mathcal{C}_n^*	55	configuracions de longitud n
$\widehat{\mathcal{C}}$	55	conjunt de configuracions completes
$\widehat{\mathcal{C}}_n$	55	configuracions completes amb longitud menor o igual que n
$\widehat{\mathcal{C}}_n^*$	55	configuracions completes de longitud n

Ψ	55	en general denota aplicació entre configuracions
$\Psi[\alpha], \Psi[A]$	55	imatge d'un node α i d'un conjunt A
$\Psi_{A,B}$	57	identificació natural entre A i B
$A \sim_\rho B$	58	configuracions ρ -equivalents
\sim_ρ	58	ρ -equivalència
\sim	76	1-equivalència o equivalència
$\mathcal{E}, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^*$	77	conjunt d'esquemes, d'esquemes de longitud menor o igual que n , i d'esquemes de longitud n
$\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{E}}_n, \widehat{\mathcal{E}}_n^*$	77	esquemes complets, esquemes complets de longitud menor o igual que n , i esquemes complets de longitud n
$E(P)$	78	esquema del polinomi P
$\overline{\mathbb{R}}_0[x]$	79	polinomis a coeficients reals no constants
$\mathcal{R}, \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n^*$	79	classes de polinomis, classes de polinomis de grau menor o igual que n , i classes de polinomis de grau n
\mathcal{S}	79	injecció natural de \mathcal{R} en $\widehat{\mathcal{E}}$
$\mathcal{R}^o, \mathcal{R}_n^o, \mathcal{R}_n^{*,o}$	80	classes de polinomis obertes, classes de polinomis obertes de grau menor o igual que n , i classes de polinomis obertes de grau n
$\widehat{\mathcal{E}}^s, \widehat{\mathcal{E}}_n^s, \widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}$	81	esquemes complets simples, esquemes complets simples de longitud menor o igual que n , i esquemes complets simples de longitud n
$\sigma_{\mathfrak{g}}$	85	node suprimit al grup \mathfrak{g} per formar un esquelet
$X \setminus Y$	85	resta de conjunts
$[N A]^-, [N A]^+$	86	conjunts que particionen un esquelet A de N
$[N A]$	87	parell format per una configuració quasi-completa N i un esquelet A de N
$V_{[N A]}$	87	configuració de nodes veritables del parell $[N A]$
$\sigma_N(\mathfrak{g})$	90	quan N és \mathcal{B} -configuració, únic node de \mathfrak{g} amb la derivació de \mathfrak{g} i multiplicitat senar

$C^{(n)}([a, b])$	97	funcions reals derivables n cops amb continuïtat a l'interval $[a, b]$
$\text{supp}(m)$	103	suport de la funció m
S_m^y	103	$\{(y, j) \mid j \in \mathbb{N}, m(j) = 1\}$
$E(\vec{y})$	103	$\bigcup_{i=1}^h S_{m_i}^{y_i}$
$\text{Ext}(\vec{y})$	104, 106	extensió en \vec{y}
Ext	104	aplicació extensió
$P(\vec{y}; \cdot)$	105, 111	polinomi que anul·la $\text{Ext}(\vec{y})$
I	105	pot denotar el conjunt d'índexs $\{1, 2, \dots, h\}$
$D(\mathbb{R}^h)$	105	vectors de \mathbb{R}^h amb components diferents
$D_{\vec{m}}(\mathbb{R}^h)$	105	$\{\vec{y} \in \mathbb{R}^h \mid S_{m_i}^{y_i} \cap S_{m_{i'}}^{y_{i'}} = \emptyset \text{ si } i \neq i'\}$
$\equiv_{\vec{y}}$	106	relació d'equivalència en I determinada per \vec{y}
ι	106	element del conjunt quocient $I / \equiv_{\vec{y}}$
y_ι	106	valor comú de les components $y_i, i \in \iota$
m_ι	106	suma de les funcions $m_i, i \in \iota$
$\text{ver}(j)$	115	$\sum_{i \in I} M_i(j-1) - j$
$x_s(\vec{y}; j)$	117, 119	arrels veritables i latents
$x_s(\cdot; j)$	117, 119	funcions d'arrels veritables i latents
$l_{\vec{y}; j}[\alpha]$	117	nombre auxiliar associat a \vec{y}, j i α
$R(\vec{y}; j)$	119	vector de les arrels veritables i latents
\mathcal{P}_N	129	conjunt dels peus de la configuració N
Y, T, U	129	conjunts que particionen \mathcal{P}_N
$y^0[\cdot]$	130, 132	tria inicial d'abscisses per a Y
$\sigma_N^-(\alpha), \sigma_N(\alpha), \sigma_N^+(\alpha)$	132	nodes de N determinats per un node $\alpha \in T$
$t[\cdot]$	133	proporció inicial per a T
P^*	157	pot denotar un polinomi inicial
Δ^*	158	subconjunt de $Z(P^*)$
χ	158	subconjunt de \mathbb{N}^2 determinat per $Z(P^*)$
χ'	158	subconjunt de χ determinat per Δ^*
$S_A(j)$	161	nombre de peus suportats de A amb multiplicitat senar i derivació menor o igual que $j + 1$

ϑ	162	pot denotar el defecte quasi-Pólya de A
$(z_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{X}}$	165	vector de components z_{ij}
W	176	subconjunt de $\mathbb{R}^{\#\mathcal{X}'}$ determinat per Δ^*
W_δ	177	vectors de W amb components amb valor absolut menor que δ
$R_{\mathfrak{g}}$	181	nodes de \mathfrak{g} amb derivació $j_{\mathfrak{g}}$ i multiplicitat senar
$r_{\mathfrak{g}}$	181	cardinal de $R_{\mathfrak{g}}$
$\stackrel{(2)}{\equiv}$	182	congruència de nombres enters mòdul dos
$S_{\mathfrak{g}}$	182	conjunt determinat pel grup \mathfrak{g}
N^*	184	saturació de N
Y^*, T^*, U^*	188, 190	conjunts que particionen \mathcal{P}_{N^*}
$y^{0,*}[\cdot]$	188	tria inicial d'abscisses per a Y^*
$t^*[\cdot]$	188	proporció inicial per a T^*
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$	209	multi-índexs amb components $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i$
$ \mathbf{q} $	209	$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots + \mathbf{q}_m$
$F_{dm}(q)$	210	nombre auxiliar associat a d, m i q
$[x]$	213	part entera de x
V_n	213	$\{(d, p) \in \mathbb{N}^2 \mid d + 2p \leq n, d \stackrel{(2)}{\equiv} n\}$
$e_n(d, p)$	213	nombre auxiliar associat a $n \geq 1$ i a $(d, p) \in V_n$
V_n^s	218	$\{d \in \mathbb{N} \mid 0 \leq d \leq n, d \stackrel{(2)}{\equiv} n\}$
$e_n(d)$	218	nombre auxiliar associat a $n \geq 1$ i a $d \in V_n^s$
$\widehat{\mathcal{E}}_n^*(d; \mathbf{p})$	220	esquemes complets de longitud n i tipus $(d; \mathbf{p})$
$\widehat{\mathcal{E}}_n^{*,s}(d)$	221	esquemes complets simples de longitud n i tipus $(d; \mathbf{0})$

Bibliografia

- [1] Anderson, B., Polynomial root dragging, *Amer. Math. Monthly* **100** (1993), 864-866.
- [2] Atkinson, K., i Sharma, A., A partial characterization of poised Hermite-Birkhoff interpolation problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **6** (1969), 230-235.
- [3] Birkhoff, G. D., General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and integration, *Trans. Amer. Math. Soc.* **7** (1906), 107-136.
- [4] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique*, Topologie Générale, capítol 1, Hermann, Paris, 1965.
- [5] Budan, D., *Nouvelle méthode pour la résolution des équations de degré quelconque*, Paris, 1807.
- [6] Chalmers, B. L., Johnson, D. J., Metcalf, F. T., i Taylor, G. D., Remarks on the rank of Hermite-Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974), 254-259.
- [7] Coolidge, J. L., The continuity of the roots of an algebraic equation, *Annals of Mathematics* **9** (1908), 116-118.
- [8] Copson, E. T., *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, Clarendon Press, Oxford, 1935.
- [9] Davis, P. J., *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York, 1963.
- [10] Descartes, R., *La Géométrie*, 1637; trad. D. E. Smith i M. L. Latham, Dover, New York, 1954.
- [11] Dieudonné, J., *Éléments d'analyse*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

- [12] Dyn, N., Lorentz, G. G., i Riemenschneider, S. D., Continuity of the Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **19** (1982), 507-509.
- [13] Euler, L., *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle.*, editada per P. H. Fuss, Petesburg, 1843.
- [14] Ferguson, D. R., The question of uniqueness for G. D. Birkhoff interpolation problems, *J. Approx. Theory* **2** (1969), 1-28.
- [15] Fourier, J., *Analyse des équations déterminées*, Didot, Paris, 1831.
- [16] Gauss, C. F., *Werke*, 12 vol. **3**, 1-30, 1863.
- [17] Girard, A., *L'invention nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam, 1629.
- [18] González-Vega, L., Applying quantifier elimination to the Birkhoff interpolation problem, *J. Symbolic Comput.* **22** (1996), 83-103.
- [19] Grace, J. H., The zeros of a polynomial, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **11** (1902), 352-357.
- [20] Heawood, P. J., Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$, $f'(x)=0$, *Quart. J. Pure Appl. Math.* **38** (1907), 84-107.
- [21] Hurwitz, A., Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function, *Math. Ann.* **33** (1889), 246-266.
- [22] Jensen, J. L. W. V., Recherches sur la théorie des équations, *Acta Math.* **36** (1913), 181-195.
- [23] Karlin, S., i Karon, J. M., Poised and non-poised Hermite-Birkhoff interpolation, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1972), 1131-1170.
- [24] Kostov, V. P., Discriminant sets of families of hyperbolic polynomials of degree 4 and 5, *Serdica Math. J.* **28** (2002), 117-152.
- [25] Kostov, V. P., Root configurations for hyperbolic polynomials of degree 3, 4, and 5, *Funct. Anal. Appl.* **36** (2002), 311-314.
- [26] Kostov, V. P., On arrangements of real roots of a real polynomial and its derivatives, *Serdica Math. J.* **29** (2003), 65-74.
- [27] Kostov, V. P., i Shapiro, B., On arrangements of roots for a real hyperbolic polynomial and its derivatives, *Bull. Sci. Math.* **126** (2002), 45-60.

- [28] Lorentz, G. G., Birkhoff interpolation and the problem of free matrices, *J. Approx. Theory* **6** (1972), 283-290.
- [29] Lorentz, G. G., Birkhoff interpolation problem, CNA-report 103, The University of Texas at Austin, 1975.
- [30] Lorentz, G. G., Zeros of splines and Birkhoff's kernel, *Math. Z.* **142** (1975), 173-180.
- [31] Lorentz, G. G., Coalescence of matrices, regularity and singularity of Birkhoff interpolation problems, *J. Approx. Theory* **20** (1977), 178-190.
- [32] Lorentz, G. G., Independent sets of knots and singularity of interpolation matrices, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 208-225.
- [33] Lorentz, G. G., Jetter, K., i Riemenschneider, S. D., *Birkhoff Interpolation*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1983.
- [34] Lorentz, G. G., i Zeller, K. L., Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **8** (1971), 43-48.
- [35] Lorentz, G. G., i Zeller, K. L., Birkhoff interpolation problem: coalescence of rows, *Arch. Math.* **26** (1975), 189-192.
- [36] Lucas, F., Géométrie des polinômes, *J. École Polytech.* **46** (1879), 1-33.
- [37] Marden, M., *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1966.
- [38] Marden, M., Conjectures on the critical points of a polynomial, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 267-276.
- [39] Mikusiński, J. G., Sur les zéros des polynomes et de leurs dérivées successives, *Prace Mat.-Fiz.* **47** (1949), 21-40.
- [40] Mitchell, H. B., On the imaginary roots of a polynomial and the real roots of its derivative, *Trans. Amer. Math. Soc.* **19** (1918), 43-52.
- [41] Newton, I., *Arithmetica Universalis*, Cambridge, 1707.
- [42] Ostrowski, A. M., Sur la continuité relative des racines d'équations algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **209** (1939), 777-779.
- [43] Peyser, G., On the roots of the derivative of a polynomial with real roots, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 1102-1104.

- [44] Pólya, G., Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung, *Z. Angew. Math. Mech.* **11** (1931), 445-449.
- [45] Rolle, M., *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrez*, 1691.
- [46] Rouché, E., Mémoire sur la série de Lagrange, *J. École Polytech.* **22** (1862), 217-218.
- [47] Rouillier, F., Safey El Din, M., Schost, É., Solving the Birkhoff interpolation problem via the critical point method: an experimental study, *LNAI 2061* (2001).
- [48] Rubió, J., Díaz-Barrero, J. L., i Rubió, P., On the solvability of the Birkhoff interpolation problem, *J. Approx. Theory* **124** (2003), 109-114.
- [49] Rubió, J., Díaz-Barrero, J. L., i Rubió, P., Note on Birkhoff interpolation, considerat per publicació a *Octogon Math. Magazine* (2004).
- [50] Schechter, M., Hermite-Birkhoff interpolation with complex nodes, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 1119-1122.
- [51] Schoenberg, J., On Hermite-Birkhoff interpolation, *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 538-543.
- [52] Sharma, A., Some poised and nonpoised problems of interpolation, *SIAM Review* **14** (1972), 129-151.
- [53] Sharma, A., i Prasad, J., On Abel-Hermite-Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 864-881.
- [54] Turán, P., On rational polynomials, *Acta Szeged* **11** (1946), 106-113.