

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA
PROGRAMA DE DOCTORADO DE MATEMATICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA III

**GRAFOS Y DIGRAFOS CON MAXIMA CONECTIVIDAD
Y MAXIMA DISTANCIA CONECTIVIDAD**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

ANGELES CARMONA MEJIAS

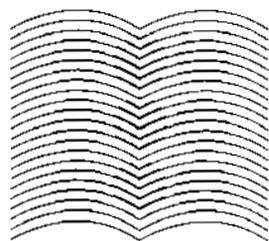
DIRIGIDA POR:

JOSEP FABREGA CANUDAS

MIGUEL ANGEL FIOLE MORA

BARCELONA - SEPTIEMBRE DE 1995

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



BIBLIOTECA
EX - LIBRIS

AQUESTA TESI HA ESTAT LLEGIDA AVUI DIA
24 DE NOVEMBRE DE 1995 A L'AULA MASTER
DE L'ENTRADA DEL CAMPUS NORD DE LA UPC
(BARCELONA), I HA OBTINGUT LA QUALIFICACIÓ DE :
"APTO CON LADE"

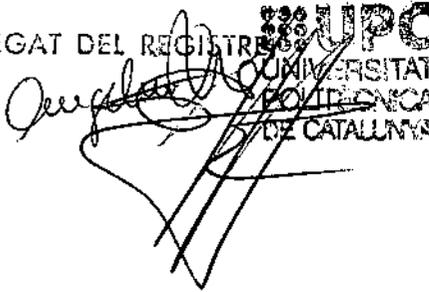
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ADMINISTRACIÓ D'ASSEMBLES ACADÈMICS

Barcelona 24 novembre 1995

Aquesta Tesi ha estat enregistrada
a la pàgina 78 amb el número 714

Barcelona, 21-12-95

L'ENCARREGAT DEL REGISTRE


UPC
UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

J. J. EGOZQUE RUBI
PRESIDENTE



J. L. ANDRES YEBRA
SECRETARI



A. NORILLO BOSCH
VOCAL



J. C. BERNAND
VOCAL



A. MARCHETTI-SPACCANELLA
VOCAL

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA
PROGRAMA DE DOCTORADO DE MATEMATICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA III

**GRAFOS Y DIGRAFOS CON MAXIMA CONECTIVIDAD
Y MAXIMA DISTANCIA CONECTIVIDAD**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

ANGELES CARMONA MEJIAS

DIRIGIDA POR:

JOSEP FABREGA CANUDAS

MIGUEL ANGEL FIOL MORA

BARCELONA - SEPTIEMBRE DE 1995

A mis padres,
Rosi, Miguel
Toni, Silvia
Carlos, Eli
y Adrià.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos aquellos que de una forma u otra han hecho posible la realización de este trabajo. Por un lado, a los miembros del grupo de Teoría de Grafos y Combinatoria por facilitar mi introducción en este campo y por otro, a los miembros del Departamento de Matemática Aplicada III por el apoyo recibido. Ha sido un placer poder desarrollar mi labor investigadora y docente entre ellos.

En particular quiero agradecer a los profesores Josep Fàbrega y Miguel Angel Fiol por el interés y entusiasmo en el planteamiento, la ayuda en la resolución y el seguimiento, de los problemas que se han resuelto en este trabajo. Los momentos más difíciles se han convertido en fáciles gracias a ellos.

Mis agradecimientos se extienden de una forma muy especial a Camino Balbuena. Coincidir con ella ha sido una de las experiencias más positivas que me han sucedido. Todo lo que contiene esta memoria ha sido razonado y discutido con ella. Su tesón e interés han hecho posible la existencia de este trabajo. Gracias por compartir los buenos y los malos momentos conmigo.

A Enrique Bendito y a Andrés Encinas, con quienes he compartido muchos momentos agradables, por ser como son, por su seguimiento y su inestimable amistad. A Paz Morillo, Eva Cuello, Agustín Medina y Jordi Blasco por sus consejos y amistad.

Indice

Introducción	iii
1 Teoría de grafos	1
1.1 Definiciones y propiedades básicas	1
1.2 Digrafos densos	4
1.3 Definición y propiedades del digrafo línea	7
1.4 El parámetro ℓ_π y digrafos s -geodéticos	9
1.5 Conectividad	11
2 Distancia conectividad en digrafos	15
2.1 Introducción	15
2.2 Construcciones	22
2.3 Digrafos maximalmente distancia conectados	29
2.4 Digrafos bipartitos con distancia conectividad óptima	32
2.5 Cotas inferiores para la distancia conectividad en digrafos	34
3 Conectividad de digrafos y grafos bipartitos densos	37
3.1 Introducción	37
3.2 Digrafos bipartitos densos	43
3.3 Grafos bipartitos densos	53
4 Conectividad y diámetro condicional en digrafos y grafos	59
4.1 Introducción	59

4.2	Conectividad y diámetro condicional	63
4.3	Conectividad y diámetro condicional en digrafos bipartitos . . .	73
5	Conectividad en digrafos s-geodéticos	83
5.1	Introducción	83
5.2	Digrafos s -geodéticos maximalmente conectados	86
5.3	Conectividad en digrafos bipartitos s -geodéticos	91
5.4	Superconectividad en digrafos s -geodéticos	100
5.5	Superconectividad en digrafos bipartitos s -geodéticos	110
	Conclusiones	117
	Referencias	121
	Indice de símbolos	127
	Indice alfabético	131

Introducción

La necesidad, cada vez mayor, de disponer de sistemas de cálculo con un alto grado de paralelismo, en los que la red que posibilita la conexión entre sus distintos elementos es una parte muy importante en la arquitectura del sistema, así como la creciente complejidad de las redes informáticas hace que el diseño de redes de interconexión adquiera cada día mayor relevancia.

La Teoría de Grafos permite modelar sistemas físicos en los que se pueda describir una relación binaria entre elementos del sistema. Por ejemplo, una red de interconexión puede ser modelada mediante un grafo, tal que los vértices representen los nodos o procesadores de la red, las ramas los enlaces de comunicación entre nodos, el grado de un vértice corresponda al número máximo de enlaces incidentes a un nodo y el diámetro represente el número máximo de enlaces utilizados para transmitir un mensaje ([13, 14]). Si hay un gran número de procesadores, o bien la distancia entre ellos es grande, es impensable que podamos tener una conexión entre cada par de procesadores. Por tanto, la información que se transmita de un procesador a otro tendrá que pasar por algunos nodos intermedios, que actuarán como repetidores. Para que la comunicación se realice eficientemente, es necesario decidir adecuadamente cómo se sitúan los procesadores y entre qué procesadores se establecen los enlaces. Además, para minimizar los retrasos en la comunicación entre nodos, los caminos deben ser tan cortos como sea posible. Así pues el diseño de la red es de gran importancia.

El grafo es dirigido si las conexiones son unidireccionales y no dirigido si son bidireccionales. Si el (di)grafo representa una red en la que hay dos clases de nodos ésta se modela mediante un (di)grafo bipartito. Los principales conceptos de la Teoría de Grafos que utilizaremos en esta memoria están definidos en el Capítulo 1. El diseñador de redes de interconexión debe prever el hecho de que nodos o líneas de comunicación puedan deteriorarse o dejar de funcionar, y permitir que los restantes nodos puedan seguir trabajando, a pesar de que la eficiencia del sistema decrezca, cuando se producen fallos. Por esta razón, la fiabilidad de la red es una de sus características más importantes.

Entenderemos que una red es fiable, si permite el reencaminamiento de los mensajes manteniendo la comunicación entre los procesadores activos cuando se producen fallos. Entre los parámetros que miden dicha fiabilidad destacamos la conectividad del digrafo que modela la red. El clásico Teorema de Menger constituye la piedra fundamental del estudio estructural de la conectividad. La conectividad mide el número máximo de nodos o enlaces que pueden fallar sin que la red se desconecte. Uno de los objetivos en este punto es, pues, la obtención de redes con valores óptimos para dicho parámetro.

Uno de los problemas más estudiados es caracterizar los digrafos maximalmente conectados, es decir, aquellos que tienen conectividad igual al grado mínimo. En este contexto, se han dado diferentes condiciones suficientes sobre el número de vértices, el diámetro o el grado que indican cuándo la conectividad es máxima. El primer resultado de este tipo fue dado por Chartrand en [17]. Desde entonces, han sido propuestas por otros autores diferentes generalizaciones.

Resaltamos los siguientes tipos de condiciones para alcanzar óptima conectividad:

Tipo (a).- Dado el diámetro y el grado máximo, que el número de vértices sea suficientemente grande.

Tipo (b).- Para girth dado—o en el caso de digrafos, el parámetro ℓ — que el diámetro sea pequeño.

Tipo (c).- Dado el diámetro, el grado máximo y el girth—o en el caso

de digrafos, el parámetro ℓ — que el número de vértices sea suficientemente grande.

Las condiciones de Tipo (a) muestran que a mayor orden mayor conectividad. Algunas de estas condiciones pueden encontrarse en [24, 42, 52, 53]. Para el caso bipartito dichas condiciones están dadas, por ejemplo, en [1]. Por otro lado las condiciones de Tipo (b) intuitivamente demuestran que a menor diámetro mayor conectividad, [21, 26, 43, 48, 52, 53]. Finalmente, las condiciones de Tipo (c) son condiciones de tipo mixto respecto de las dos anteriores, ya que en ellas se requiere que el orden sea grande en relación no sólo a una función del diámetro y del grado máximo sino también del girth o el parámetro ℓ en el caso dirigido, [25, 7]. Para el caso bipartito no se conocen condiciones de este tipo.

El objetivo de esta memoria es el estudio de condiciones suficientes que aseguren conectividad óptima tanto para grafos como para digrafos, profundizando en la línea de trabajos anteriores. Los digrafos bipartitos han merecido una atención especial, ya que se conocen para ellos un menor número de condiciones suficientes que aseguren conectividad óptima. También se han tenido en consideración otras medidas de conectividad que pueden resultar de interés en el diseño de un red de interconexión.

El Capítulo 1 de esta memoria está dedicado a dar algunas definiciones y la notación que utilizaremos, así como a mostrar los resultados conocidos sobre los temas que desarrolla este trabajo. En la Sección 1.1 encontramos definidos los conceptos básicos de Teoría de Grafos que aparecen en esta memoria. Los problemas clásicos de optimización (Δ, D) y (Δ, n) están desarrollados en la Sección 1.2. Las definiciones y algunas propiedades del método del digrafo línea las encontramos en la Sección 1.3, donde se pone de manifiesto que todos los digrafos que son digrafos línea iterados para un orden de iteración suficientemente elevado son maximalmente conectados. En la Sección 1.4 definimos los parámetros ℓ_π y s , que han jugado un papel de capital importancia en esta memoria. Intuitivamente hablando, podemos decir que el valor de ℓ_π mide cuánto nos podemos alejar de un conjunto desconector de cardinal no óptimo. La última sección de este capítulo esta dedicada a los conceptos

de conectividad así como a los principales resultados sobre este tema que se presentarán de forma más exhaustiva en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 2 damos condiciones de Tipo (b) para la llamada *t-distancia conectividad* de un digrafo. Este concepto fue introducido por Fiol y Fàbrega en [29] y mide la fiabilidad de la red en función de la distancia entre nodos. La Sección 2.1 está dedicada a desarrollar los resultados conocidos sobre este tema, así como a introducir un nuevo concepto que denominaremos *t-grado*, que acota el valor máximo de las *t-distancia conectividades* de un digrafo. En la Sección 1.5 construimos digrafos que tienen una secuencia de distancia conectividades dada. Además mostramos la independencia de los tres parámetros, generalizando así la construcción dada por Watkins en [56] para la conectividad estándar. En la tercera sección ponemos especial atención en la obtención de condiciones suficientes para alcanzar distancia conectividad óptima. Cuando estemos tratando con grafos, los resultados estarán dados en términos del girth. Para tratar con el caso general de digrafos, serán usados el parámetro ℓ y la condición de que el digrafo sea *s-geodético*. El caso particular $t = 1$ recupera los resultados conocidos para las conectividades κ y λ . En la Sección 2.4 daremos resultados análogos para el caso de (di)grafos bipartitos, y en la última obtenemos cotas inferiores, que involucran al parámetro ℓ_π , para la *t-distancia conectividad* de digrafos. Los resultados de este capítulo se encuentran en [4, 5, 6].

En el Capítulo 3 estudiamos condiciones de Tipo (c) para el caso de digrafos bipartitos. Hasta ahora se conocían condiciones de Tipo (a) y (b), ver [1] y [29], respectivamente. Siguiendo las ideas de [25] hemos encontrado condiciones suficientes de tipo mixto para que un (di)grafo bipartito alcance conectividades óptimas. En la Sección 3.2 damos estas cotas para el caso dirigido, demostrando que las condiciones obtenidas son las mejores posibles para algunos valores del diámetro y del grado. Tomando $\ell = 1$ en las cotas obtenidas mejoramos las condiciones de Tipo (a) conocidas. De nuevo la técnica del digrafo línea se muestra una herramienta potente para la obtención de digrafos con conectividades máximas, ya que si el orden de iteración es suficientemente elevado los digrafos línea iterados son maximalmente conectados. En la Sección 3.3 desarrollamos un trabajo paralelo para el caso no dirigido.

El diámetro condicional o \mathcal{P} -diámetro constituye una generalización del concepto estándar de diámetro. En él se refleja el máximo de las distancias entre cualquier par de subdigrafos de un digrafo que verifiquen una propiedad \mathcal{P} dada. Utilizando este nuevo concepto, introducido en [10], se presentan en el Capítulo 4 nuevas condiciones de Tipo (b) que generalizan y en algunos casos mejoran las ya conocidas. Por ejemplo $D \leq 2\ell - 1$ es una condición suficiente para que un digrafo tenga conectividades óptimas. Si tenemos en consideración el girth del digrafo el Corolario 4.2.5 demuestra que $d(x, y) \leq 2\ell - 1$, para todo $x, y \in V \setminus S$, donde $S \subset V, |S| = g - 1$ es también una condición suficiente para obtener máxima conectividad. Por tanto esta condición constituye una generalización de la anterior, ya que se permiten en el digrafo vértices de excentricidad mayor que 2ℓ . En la Sección 4.1 definimos los nuevos conceptos y presentamos algunas condiciones de Tipo (b) dadas por Plesník y Znán en [49] que resultarán ser corolarios de los resultados obtenidos en las secciones siguientes. El resultado principal de la Sección 4.2 demuestra que al desconectar un digrafo con parámetro ℓ_π mediante un conjunto desconector de cardinal no óptimo la distancia entre los fragmentos que se producen está acotada por $2\ell_\pi$ y además éstos tienen grado suficientemente grande. Utilizando algunos diámetros condicionales obtenemos corolarios que resultan ser condiciones de Tipo (b). En el caso no dirigido y cuando el girth es par obtenemos una mejora de los resultados conocidos. Concretamente, si $\delta \leq 4$, las cotas obtenidas mejoran en una unidad a las dadas en [53]. Como consecuencia obtendremos que para grado mínimo mayor que 5 las conectividades están acotadas inferiormente. En la Sección 4.3 desarrollamos un trabajo paralelo al anterior para el caso de digrafos y grafos bipartitos obteniendo como corolarios los resultados dados en [49].

El último capítulo de esta memoria está dedicado a obtener condiciones suficientes para alcanzar conectividades óptimas que podríamos considerar contrarias a las de Tipo (a) y (c), ya que en ellas las cotas obtenidas son cotas superiores sobre el número de vértices que están dadas como una función del orden, el grado mínimo y el parámetro s . Estas cotas son una extensión de la condición de Chartrand $n \leq 2\delta$ que asegura máxima conectividad. De hecho esta cota se obtendrá como un corolario de los resultados de la Sección 5.2. La

primera sección está dedicada a definir los conceptos de fragmento y frontera de un subconjunto de vértices de un digrafo. También definiremos la profundidad de un fragmento inspirada en el concepto de vértice interior definido por Hamidoune en [35]. El primer resultado de la Sección 5.2 demuestra que la profundidad de un fragmento está inferiormente acotada por el parámetro s . Utilizando este resultado obtenemos las cotas mencionadas. En la Sección 5.3 presentamos cotas superiores sobre el número de vértices que aseguran máxima conectividad para el caso de digrafos bipartitos. La mejora de las cotas se basa en que para un digrafo bipartito con parámetro s podemos contar el número mínimo de vértices que distan $s + 1$ de un vértice dado, ver Lema 5.3.1. En particular obtenemos la cota dada por Volkmann en [55].

Las Secciones 5.4 y 5.5 están dedicadas al estudio de cotas superiores sobre el número de vértices que aseguran que el digrafo es superconectado, tanto para el caso general como para el caso bipartito. La superconectividad es una medida más fuerte de conectividad que la estándar, ya que en ella se tiene en cuenta la estructura de los conjuntos desconectores. De nuevo el hecho de que la profundidad de un fragmento no trivial este acotada por $s - 1$, en el caso general, y por s , en el caso bipartito, nos permitirá obtener las condiciones suficientes mencionadas.

Capítulo 1

Teoría de grafos

1.1 Definiciones y propiedades básicas

Definimos a continuación los principales conceptos de Teoría de Grafos que utilizaremos en este trabajo. Básicamente las notaciones utilizadas son las que se encuentran en los libros de Chartrand y Lesniak [18] y Harary, Norman y Cartwright [37].

El trabajo se desarrolla sobre conjuntos finitos. Un *grafo dirigido o digrafo*, $G = (V, A)$, es un par ordenado de conjuntos disjuntos (V, A) tales que $A \subset V \times V$ y $V \neq \emptyset$. El conjunto V es el conjunto de *vértices* y A es el conjunto de *arcos*. Si el conjunto A es un conjunto de pares no ordenados de vértices, denominados *ramas*, diremos que G es un *grafo*. El resto de las definiciones serán dadas para digrafos y trabajaremos sólo con digrafos simples, es decir, dados dos vértices de G , x e y , sólo existe un arco (x, y) , desde x a y . En este caso decimos que y es *adyacente desde* x y que x es *adyacente hacia* y . Dos arcos distintos con un vértice común se llaman *adyacentes*. Un *autolazo* es un arco de la forma (x, x) . Llamaremos *dígono* a un par de arcos de la forma (x, y) e (y, x) . El número de vértices de un digrafo G , llamado *orden*, será denotado por $n = |V|$. El *tamaño* de G es el número de arcos y será denotado por $m = |A|$.

Un digrafo G es *simétrico* si dados $x, y \in V(G)$ se tiene que $(x, y) \in A(G)$

si y sólo si $(y, x) \in A(G)$. De esta manera, un grafo G se puede representar a través de su *digrafo simétrico asociado* G^* obtenido al reemplazar cada rama del grafo por dos arcos formando un dígono.

Algunos digrafos destacados son el *digrafo simétrico completo*, K_n^* , (asociado al grafo completo K_n) que tiene orden n y sus arcos son todos los pares de vértices (x, y) , $x \neq y$. El conjunto de vértices del *ciclo dirigido* con n vértices, C_n , es Z_n . Los arcos de C_n son los pares de la forma $(x, x + 1)$, donde la suma se realiza módulo n .

Un digrafo $G' = (V', A')$ es un *subdigrafo* de $G = (V, A)$ si $V' \subset V$ y $A' \subset A$. En este caso escribiremos $G' \subset G$. Si $W \subset V$, llamamos *subdigrafo inducido por W* , denotado por $\langle W \rangle$, al digrafo $(W, A \cap (W \times W))$. Un tipo simple de subdigrafo de un digrafo G es el que se obtiene suprimiendo un conjunto de vértices o arcos. Si $V' \subset V$, entonces $G - V'$ denota el subdigrafo con conjunto de vértices $V \setminus V'$ y cuyos arcos son los arcos de G que no son adyacentes desde ni hacia ningún vértice de V' . Si $A' \subset A$, entonces $G - A'$ es el subdigrafo que tiene como conjunto de vértices V y como conjunto de arcos $A \setminus A'$.

El conjunto de *vértices adyacentes desde un vértice x* , o *vecinos de salida de x* , se denota por $\Gamma^+(x)$ y $\delta^+(x) = |\Gamma^+(x)|$ es el *grado de salida* del vértice x , análogamente se define $\Gamma^-(x)$ como el *conjunto de vértices adyacentes a x* , o *vecinos de entrada de x* , y el grado de entrada de x , $\delta^-(x)$, es su cardinal. Si no está suficientemente claro cual es el digrafo subyacente, ponemos éste como subíndice. Así, si H es un subdigrafo inducido de G y $x \in H$ entonces, $\Gamma_H^+(x) = \Gamma^+(x) \cap V(H)$. El *grado mínimo* de G , δ , es el mínimo entre el *grado mínimo de salida* de G , $\delta^+ = \min_{x \in V} \{\delta^+(x)\}$, y el *grado mínimo de entrada* de G , $\delta^- = \min_{x \in V} \{\delta^-(x)\}$. Análogamente el *grado máximo* de G , Δ , es el máximo de los grados máximos de salida y de entrada de G , Δ^+ , Δ^- . Si $\delta = \Delta = d$ decimos que G es d -regular.

Sean $x, y \in V$. Un $x \rightarrow y$ *recorrido* es una sucesión,

$$(x = x_0)x_1x_2 \cdots x_{k-1}(x_k = y),$$

de vértices de G , no necesariamente distintos, tales que (x_i, x_{i+1}) es un arco de G . Además k es la longitud del recorrido y será denotada por $|x \rightarrow y|$.

Llamamos $x \rightarrow y$ camino a un $x \rightarrow y$ recorrido en el que todos los vértices sean diferentes. Si $x = y$ el $x \rightarrow x$ camino se denomina *ciclo*. El *girth* de un digrafo G , denotado por $g(G) = g$, es la longitud de un ciclo de longitud mínima. Dados dos $x \rightarrow y$ caminos, diremos que son *internamente disjuntos* si los únicos vértices que tienen en común son precisamente los vértices x e y . De forma similar, diremos que son *arco disjuntos* si no tienen arcos en común.

La *distancia* $d(x, y)$ desde x a y es la mínima de las longitudes de los $x \rightarrow y$ caminos de G . El máximo de las distancias entre cualquier par de vértices del digrafo es el *diámetro*, $D = D(G) = \max_{x, y \in V} \{d(x, y)\}$. Dados $F_1, F_2 \subset V$, la *distancia desde F_1 a F_2* , denotada por $d(F_1, F_2)$, es la mínima de las distancias $d(f_1, f_2)$, donde $f_1 \in F_1$ y $f_2 \in F_2$. Si F_1 o F_2 consiste de un sólo vértice x denotaremos estas distancias por $d(x, F_2)$ o $d(F_1, x)$.

Un *digrafo bipartito* es un digrafo $G = (V, A)$ tal que existe una partición del conjunto de vértices en dos partes, $V = V_0 \cup V_1$, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, de tal forma que los arcos del digrafo G unen sólo vértices que están en diferentes partes, es decir, $A \subset (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$. Denominaremos *conjuntos de partes* de G a los conjuntos V_0 y V_1 . Las partes del *digrafo simétrico bipartito completo $K_{p,q}^*$* (asociado al grafo bipartito completo $K_{p,q}$) son un conjunto V_0 con p elementos y un conjunto V_1 con q elementos. Dos vértices de este digrafo son adyacentes si y sólo si están en partes diferentes. Un *emparejamiento* en un digrafo bipartito es un subconjunto M de $A(G)$ con la propiedad de que dos arcos de M nunca tienen un vértice en común. Diremos que M es un *emparejamiento completo* desde V_0 a V_1 cuando todos los vértices de V_0 son vértices iniciales de arcos de M y todos los vértices de V_1 son los finales.

Un digrafo G está *conectado* si para cada par de vértices x, y de G existe un $x \rightarrow y$ camino. En otro caso diremos que G está desconectado. La *conectividad* (también llamada *conectividad fuerte* o *vértice conectividad*) de un digrafo G , $\kappa = \kappa(G)$, es el mínimo número de vértices que hay que suprimir del digrafo para que el digrafo resultante esté desconectado o sea un vértice. Análogamente, la *arco conectividad* de G , $\lambda = \lambda(G)$, es el mínimo número de arcos que hay que suprimir del digrafo para que el digrafo resultante esté desconectado o sea un vértice. Equivalentemente, $\kappa[\lambda]$ es el mayor entero

para el cual, entre cualquier par de vértices $x, y \in V$, existen $\kappa[\lambda]$ caminos internamente disjuntos [camino arco disjuntos] desde x a y . Geller y Harary en [32] demostraron las siguientes desigualdades que relacionan las conectividades del digrafo con el grado mínimo

$$\kappa \leq \lambda \leq \delta. \quad (1.1)$$

Si la cota superior para las conectividades es alcanzada decimos que G es *maximalmente conectado*; cuando $\lambda = \delta$ diremos que G es *maximalmente arco conectado*. En este trabajo obtenemos condiciones suficientes para que un digrafo tenga conectividades óptimas, es decir, con conectividad lo más cercana posible a δ . Imase, Soneoka y Okada [42] y Fiol [24] demostraron que para digrafos d -regulares este problema no es independiente de los problemas (Δ, D) y (Δ, n) ; intuitivamente podemos decir que, para n y d dados, a menor diámetro mayor conectividad. En la siguiente sección desarrollamos brevemente los problemas mencionados.

1.2 Digrafos densos

Los problemas (Δ, D) y (Δ, n) consisten en optimizar la relación entre el orden, el grado y el diámetro.

El problema (Δ, D) para digrafos consiste en encontrar digrafos con grado máximo Δ y diámetro D tales que su orden sea el mayor posible. El orden de un digrafo (Δ, D) , es decir, un digrafo con grado máximo de salida Δ y diámetro D , está acotado superiormente por la *cota de Moore*, $M(\Delta, D)$. Así, si G es un digrafo (Δ, D) con n vértices se verifica

$$n \leq 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^D = M(\Delta, D) = \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1; \\ \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta - 1} & \text{si } \Delta \geq 2, \end{cases}$$

ya que desde cualquier vértice de G podemos alcanzar como mucho Δ^i vértices mediante un camino de longitud i , $1 \leq i \leq D$. Por lo tanto el número máximo

de vértices que pueden ser alcanzados a través de un camino como mucho de longitud D es a lo sumo $\sum_{i=0}^D \Delta^i$.

Los digrafos (Δ, D) que tienen orden igual a la cota de Moore se llaman *digrafos de Moore*. Si $D = 1$, el digrafo simétrico completo $K_{\Delta+1}^*$ es un digrafo de Moore, ya que su orden $\Delta + 1 = M(\Delta, 1)$. Si $\Delta = 1$, el ciclo dirigido con $D + 1$ vértices C_{D+1} es un digrafo de Moore. Plesník y Znán [48] probaron que la cota de Moore no se puede alcanzar para $\Delta > 1$ y $D > 1$. Por lo tanto los estudios en este campo se han concentrado en la búsqueda de digrafos (Δ, D) con orden lo más cercano posible a la cota de Moore, estos digrafos se denominan *digrafos densos*.

El problema análogo para grafos no dirigidos, el problema (Δ, D) , ha sido considerado por diversos autores, ver [13] y sus referencias. En este caso el número máximo de vértices a distancia i desde un vértice dado es $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$, $1 \leq i \leq D$, de donde la cota de Moore para este caso es

$$M(\Delta, D) = \begin{cases} 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2; \\ \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

En el caso no dirigido la igualdad se alcanza para pocos valores de Δ y D . Si $D > 2$ y $\Delta > 2$, no existe ningún grafo de Moore. Aparte de los grafos completos y los ciclos de longitud impar, se conocen otros dos grafos de Moore. Son el grafo de Petersen, para $\Delta = 3$ y $D = 2$ y el grafo de Hoffman-Singleton, para $\Delta = 7$ y $D = 2$. Para $\Delta = 57$ y $D = 2$, la existencia es posible, aunque no ha sido probada.

El problema (Δ, n) para digrafos consiste en encontrar digrafos con grado máximo Δ y orden n que tengan diámetro mínimo.

Si G es un digrafo con grado máximo $\Delta > 1$ y orden $n > \Delta + 1$ se cumple

$$D \geq D_{min}(\Delta, n) = \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta - 1) + \Delta) \rceil - 1.$$

En la Sección 1.3 veremos algunas familias de digrafos que se han propuesto como solución de este problema.

Fiol y Yebra en [31] estudiaron los problemas (Δ, D) y (Δ, n) para el caso

bipartito. Así mismo dieron una familia de digrafos bipartitos densos, los digrafos $BD(d, n)$ que describiremos en el Capítulo 3.

Para obtener una cota del orden de un digrafo bipartito (Δ, D) , así como algunas de las cotas que se dan en el Capítulo 3 es útil tener presente la siguiente propiedad del diámetro. La demostración del resultado puede encontrarse en [31]. *Sea G un digrafo bipartito conectado. Entonces, G tiene diámetro D si y sólo si D es el menor entero tal que, para cualquier vértice $x \in V$, todos los vértices de uno de los conjuntos de partes de G están a distancia $\leq D - 1$ desde x .*

Sea $G = (V, A)$, $V = V_0 \cup V_1$, un digrafo bipartito conectado con grado máximo Δ y diámetro D . En función de la paridad del diámetro, el número máximo de vértices en un conjunto de partes que están a distancia $\leq D - 1$ desde un cierto vértice dado está acotado por

$$\begin{aligned} &1 + \Delta^2 + \dots + \Delta^{2k}, & \text{si } D = 2k + 1; \\ &\Delta + \Delta^3 + \dots + \Delta^{2k-1}, & \text{si } D = 2k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\Delta > 1$, el orden de un digrafo bipartito (Δ, D) está acotado superiormente por

$$n \leq M_B(\Delta, D) = \begin{cases} 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } D \text{ es impar;} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta^2 - 1} & \text{si } D \text{ es par.} \end{cases}$$

Si $\Delta = 1$, $M_B(1, 2k + 1) = 2k + 2$ y $M_B(1, 2k) = 2k$. Los ciclos de longitud par C_{2k+2} son ejemplos de digrafos bipartitos de Moore para $\Delta = 1$, mientras que la segunda cota no puede ser alcanzada, ya que los únicos digrafos bipartitos conectados de grado máximo de salida 1 son los ciclos de longitud par. Lo mismo ocurre para aquellos digrafos bipartitos en los que $D > 4$, ver [31].

En el caso no dirigido la cota de Moore para el número de vértices está dada por

$$M_B(\Delta, D) = \begin{cases} 2D & \text{si } \Delta = 2; \\ 2 \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

Los grafos bipartitos de Moore existen en los siguientes casos:

- $\Delta = 2$, son los ciclos de longitud $2D$.
- $D = 2$, son los grafos bipartitos completos $K_{\Delta, \Delta}$.
- $D = 3, 4$ o 6 , y $\Delta - 1$ es una potencia de un número primo, ver [12].

Una cota inferior para el diámetro de un digrafo bipartito con grado máximo Δ y orden n es

$$D \geq D_{\min}(\Delta, n) = \left\lceil \log_{\Delta} \left(\frac{n}{2} (\Delta^2 - 1) + 1 \right) \right\rceil.$$

1.3 Definición y propiedades del digrafo línea

En la sección precedente hemos visto que la solución al problema (Δ, D) , en la mayoría de los casos, consiste en encontrar digrafos con orden lo más cercano posible a la cota de Moore, es decir, familias de digrafos densos. Una de las técnicas empleadas para ello es la técnica del digrafo línea.

En el *digrafo línea* LG de un digrafo $G = (V, A)$, cada vértice representa un arco de G . Así, $V(LG) = \{uv : (u, v) \in A\}$; y un vértice uv es adyacente al vértice wz si y sólo si $v = w$, es decir, cuando el arco (u, v) es adyacente al arco (w, z) en G . Por lo tanto el orden del digrafo línea es $|V(LG)| = |A(G)|$. Para cada $uv \in LG$, $\delta^+(uv) = \delta^+(v)$ y $\delta^-(uv) = \delta^-(u)$, de donde $\delta(LG) = \delta(G)$. Además si G es d -regular, LG también. Así pues,

$$n(LG) = dn(G) \tag{1.2}$$

La siguiente proposición que encontramos en Fiol, Yebra y Alegre [30] y también en Reddy, Kuhl, Hosseini y Lee [50] describe el comportamiento del diámetro de un digrafo respecto del digrafo línea para el caso de digrafos d -regulares. En Aigner [2] encontramos el mismo resultado para digrafos diferentes de un ciclo.

Proposición 1.3.1 *Sea G un digrafo conectado diferente de un ciclo dirigido. Entonces, el diámetro del digrafo línea de G , LG , es una unidad mayor que el diámetro de G . Es decir, $D(LG) = D(G) + 1$.*

Demostración. Sean uv y wz dos vértices diferentes de LG . Consideremos un camino de v a w en G , $vv_1 \dots v_{k-1}w$, con longitud mínima $k = d(v, w) \leq D(G)$. A partir de este camino encontramos un camino de uv a wz en LG , el camino $uv, vv_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}w, wz$, que tiene longitud $k + 1 \leq D(G) + 1$. Como todos los caminos de uv a wz han de ser de esta forma, tenemos que $d(uv, wz) = d(v, w) + 1$, si $uv \neq wz$. Así pues, $D(LG) \leq D(G) + 1$. Para probar que $D(LG) = D(G) + 1$, sólo queda encontrar dos arcos diferentes de G , (u, v) , (w, z) , tales que $d(v, w) = D(G)$. Podemos asegurar su existencia siempre que G no sea un ciclo dirigido. ■

Como se señaló en [30] este resultado es cercano al óptimo ya que desde la cota de Moore se obtiene $M(d, D + 1) = dM(d, D) + 1$. La técnica del digrafo línea está basada en considerar, para un digrafo G , el digrafo línea k -iterado de G , L^kG , el cual está definido recursivamente como $L^kG = L(L^{k-1}G)$. Entonces L^kG tiene $d^k n$ vértices si G es d -regular y diámetro

$$D(L^kG) = D(G) + k. \quad (1.3)$$

En este contexto las familias de digrafos densos de de Bruijn $B(d, D)$ y de Kautz $K(d, D)$ pueden ser definidas como el digrafo línea iterado $L^{D-1}K_d^+$ y $L^{D-1}K_{d+1}^*$, respectivamente, donde K_d^+ denota el digrafo obtenido desde K_d^* añadiendo un lazo en cada vértice y K_{d+1}^* es el digrafo simétrico completo con $d + 1$ vértices. Como K_d^+ tiene diámetro 1 de las ecuaciones (1.2) y (1.3) se sigue que el digrafo $B(d, D)$ tiene orden d^D y diámetro D . Análogamente, el digrafo $K(d, D)$ tiene diámetro D y orden $d^{D-1}(d + 1)$, el cual es $\frac{d^2-1}{d^2}$ veces la cota de Moore.

Si G es un digrafo bipartito con partes V_0 y V_1 , entonces LG también es bipartito y sus partes están formadas, respectivamente por los arcos de V_0 a V_1 y por los arcos de V_1 a V_0 .

Si G es un digrafo con arco conectividad λ , la vértice conectividad del digrafo línea LG es la arco conectividad de G , es decir, $\kappa(LG) = \lambda(G)$.

Por otra parte los digrafos de de Bruijn y Kautz tienen conectividades óptimas. Todos los digrafos que son digrafos línea iterados tienen esta propiedad para un orden de iteración suficientemente elevado. Esto fue probado por Fàbrega y Fiol en [21] utilizando un parámetro asociado al digrafo, denominado parámetro ℓ_π , que está relacionado con el número de caminos cortos. Definimos este parámetro en la siguiente sección.

1.4 El parámetro ℓ_π y digrafos s -geodéticos

Para estudiar la conectividad de digrafos se introdujo en [21] (ver también Fiol, Fàbrega y Escudero [26]), un nuevo parámetro relacionado con el número de caminos cortos, que recibe el nombre de parámetro ℓ_π y que definimos a continuación:

Definición 1.4.1 Sea $G = (V, A)$ un digrafo con diámetro D , grado mínimo $\delta \geq 2$, y sea π un entero, $0 \leq \pi \leq \delta - 2$ ($\pi \geq 1$ si G tiene autolazos). Entonces $\ell_\pi = \ell_\pi(G)$, $1 \leq \ell_\pi \leq D$, es el mayor entero tal que, para cualquier $x, y \in V$,

1. si $d(x, y) < \ell_\pi$, hay un único $x \rightarrow y$ camino corto y a lo sumo π $x \rightarrow y$ caminos diferentes de longitud $d(x, y) + 1$;
2. si $d(x, y) = \ell_\pi$, sólo hay un único $x \rightarrow y$ camino corto.

Obsérvese que este parámetro está bien definido para digrafos sin autolazos si $\pi = 0$ y para cualquier digrafo si $\pi \geq 1$. Cuando $\pi = 0$ escribimos simplemente $\ell(G)$ en lugar de $\ell_0(G)$. El parámetro ℓ_π es una de las herramientas principales en la resolución de los problemas planteados en esta memoria.

En [21] se probó que cuando se considera el digrafo línea de cualquier digrafo G diferente de un ciclo el parámetro ℓ_π también satisface una igualdad como (1.3). Concretamente,

Proposición 1.4.1 *Sea G un digrafo diferente de un ciclo dirigido. Si G no tiene autolazos cuando $\pi = 0$, entonces $\ell_\pi(L^k G) = \ell_\pi(G) + k$.*

Demostración. Como $L^k(G) = LL^{k-1}G$, basta considerar el caso $k = 1$. Sean $x = x_0x_1, y = y_0y_1$ dos vértices cualesquiera de LG . Si $d(x, y) \leq \ell_\pi(G) + 1$, entonces $d(x_1, y_0) = d(x, y) - 1 \leq \ell_\pi(G)$. Así pues, el camino corto de x_1 a y_0 es único, y por tanto, también es único el camino corto de x a y . Si $d(x, y) < \ell_\pi(G) + 1$, entonces $d(x_1, y_0) = d(x, y) - 1 < \ell_\pi(G)$. Por tanto, existen en G a lo sumo π caminos diferentes de longitud $d(x_1, y_0) + 1$ de x_1 a y_0 . Luego tenemos a lo sumo π caminos diferentes de longitud $d(x, y) + 1$ de x a y en $L^k(G)$. Si $\ell_\pi(G) = D(G)$, entonces $D(LG) = D(G) + 1$, ya que G no es un ciclo dirigido, y por tanto es imposible que $\ell_\pi(LG) > D(LG)$. ■

Cuando el digrafo considerado es bipartito hemos de tener presente que entre dos vértices cualesquiera sólo hay caminos de igual paridad, y por tanto la definición del parámetro ℓ puede ser simplificada como sigue:

Definición 1.4.2 *Dado un digrafo bipartito G , sea $\ell = \ell(G)$, $1 \leq \ell \leq D$, el mayor entero tal que para cualesquiera $x, y \in V$ a distancia $d(x, y) \leq \ell$, hay un único $x \rightarrow y$ camino corto.*

Un parámetro más restrictivo que el que acabamos de definir es el parámetro s , es decir, el mayor entero tal que el digrafo es s -geodético.

Definición 1.4.3 *Se dice que un digrafo G es s -geodético para algún entero $1 \leq s \leq D$, si entre dos vértices cualesquiera, a lo sumo hay un camino de longitud menor o igual a s .*

Si $s = D$, el digrafo se llama *fuertemente geodético*. Ver Bosák, Kotzig y Znám [16] y Plesník y Znám [48].

Nótese que $s \leq \min\{\ell, g - 1\}$, donde g designa el girth del digrafo G . Además, si G es s -geodético entonces $L^k G$ es s' -geodético con parámetro $s' = \min\{s + k, g - 1\}$, donde g denota el girth de G .

Ambos parámetros constituyen una generalización para el caso dirigido del concepto de girth. De hecho, un grafo es siempre $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ -geodético, es decir, $s = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Por otra parte, cuando G es un grafo, considerando el digrafo simétrico asociado, se tiene que $\ell(G) = s(G) = \lfloor \frac{g(G)-1}{2} \rfloor$.

Los tres parámetros definidos en esta sección han sido utilizados por diversos autores para obtener condiciones suficientes para que un digrafo o grafo sea maximalmente conectado, o para tener otras medidas de conectividad óptimas. En la siguiente sección hacemos un breve repaso de algunas de estas condiciones.

1.5 Conectividad

Un digrafo está conectado cuando entre cualquier par de vértices existe un camino que los une. Esta es, de hecho, una de las propiedades básicas que puede poseer un digrafo. Existen diversas funciones que pueden ser utilizadas para medir la conectividad de un digrafo, así como distintas medidas de conectividad.

Dos de estas funciones son la *vértice conectividad local* $\kappa(x, y)$ y la *arco conectividad local* $\lambda(x, y)$. La primera de ellas es el mínimo número de vértices cuya supresión desconecta x de y , la segunda es el mínimo número de arcos que son necesarios suprimir para desconectar x de y . Las mínimas de las conectividades locales reciben el nombre de *vértice conectividad*, $\kappa(G)$, y *arco conectividad*, $\lambda(G)$, respectivamente. Estas definiciones son equivalentes a las dadas en la Sección 1.1, la equivalencia está dada por el Teorema de Menger: Dados $x, y \in G, x \neq y$ el número máximo de $x \rightarrow y$ caminos internamente disjuntos [arco disjuntos] es igual a $\kappa(x, y)$ [$\lambda(x, y)$].

El principal objetivo de la teoría de conectividad en digrafos es producir un conjunto de teoremas que describan las propiedades de los digrafos conectados o arco conectados. En particular, el estudio de los digrafos maximalmente conectados o arco conectados ha sido objeto de un gran interés en los últimos años. Ver, por ejemplo, el trabajo que recoge información sobre el tema de

Bermond, Homobono y Peyrat [14]. La mayor parte de estas condiciones son establecidas en función del grado de los vértices, del diámetro y el orden del digrafo. El primer resultado de este tipo que conozcamos fue dado por Chartrand en [17]:

Si G es un grafo con n vértices y mínimo grado $\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces G presenta rama conectividad máxima, es decir, $\lambda = \delta$.

Desde entonces, diversos autores han propuesto diferentes generalizaciones. (Ver, por ejemplo, Lesniak [44], Goldsmith y White [34], Goldsmith y Entringer [33], Volkman [55]). Otras generalizaciones son de diferente naturaleza y usan otros parámetros. Así, Jolivet en [43] mostró que *cualquier digrafo con diámetro 2 es maximalmente arco conectado*. Hamidoune da en [35] una demostración sencilla de este hecho. Plesník en [47] probó independientemente el correspondiente corolario para grafos. Fàbrega, Fiol y Escudero probaron en [21, 26] una generalización del teorema de Jolivet, tanto para grafos como para digrafos, a través del parámetro ℓ . Concretamente en [21] se probó el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1 *Sea $G = (V, A)$, un digrafo sin lazos, grado mínimo $\delta > 1$, parámetro ℓ , diámetro D , y conectividades κ, λ . Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta, \text{ si } D \leq 2\ell - 1.$$

$$(b) \lambda = \delta, \text{ si } D \leq 2\ell.$$

Este teorema junto con su demostración es el principal punto de partida del trabajo desarrollado en esta memoria. La demostración puede verse como un caso particular del Teorema 2.3.1 y del Corolario 2.3.2 del Capítulo 2 considerando $t = 1$ y $s = 1$. Intuitivamente este teorema muestra que a menor diámetro mayor conectividad. De la demostración se deduce que el parámetro ℓ mide el alejamiento máximo de los vértices a un conjunto desconectador. Concretamente, supongamos que $F \subset V$ es un conjunto desconectador de orden mínimo tal que $|F| = \kappa < \delta$. Entonces $V \setminus F$ está desconectado, es decir, existe una partición de este conjunto en dos conjuntos disjuntos no vacíos, $V \setminus F = V^- \cup V^+$. Sean $\mu = \max_{x \in V^-} d(x, F)$ y $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x)$. De la demostración del teorema se deduce que μ y $\mu' \geq \ell$ si $\kappa < \delta$. Por lo tanto el

parámetro ℓ acota la máxima de las distancias de los vértices de V^- y V^+ al conjunto desconectador cuando el digrafo se desconecta mediante un conjunto de cardinal no óptimo.

En el caso de grafos, considerando el digrafo simétrico asociado, el teorema anterior se escribe en términos del girth, ya que en este caso $\ell = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Este resultado fue dado por Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat [53].

Aparte de la conectividad estándar, también se han considerado otros tipos de medidas de conectividad. Así, Harary definió en [38] la *conectividad condicional con respecto a una propiedad \mathcal{P}* o \mathcal{P} -conectividad como el mínimo número de vértices cuya supresión desconecta el digrafo en componentes conexas de manera que todas gozan de la propiedad previamente fijada \mathcal{P} .

En el Capítulo 2 estudiamos una nueva clase de conectividad que podría ser considerada como un tipo de conectividad condicional. La diferencia consiste en que la condición no se impone sobre las componentes, sino sobre la distancia entre vértices dados de G . Otra medida más fuerte de conectividad es la llamada superconectividad que definiremos en el último capítulo. Otras clases de conectividad pueden encontrarse en [23, 11].

En el desarrollo de la memoria utilizaremos la siguiente notación. Dado $G = (V, A)$ un digrafo y F un conjunto desconectador, el conjunto $V \setminus F$ puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V^- , V^+ tales que $G - F$ no tiene arcos desde V^- a V^+ . Llamaremos a estos conjuntos *fragmentos*. Podemos considerar a su vez una partición de los conjuntos V^- y V^+ en conjuntos V_i y V'_j , donde $1 \leq i \leq \mu$, $1 \leq j \leq \mu'$, de acuerdo con sus distancias a F y desde F , es decir, $V_i = \{x \in V^- : d(x, F) = i\}$ y $V'_j = \{x \in V^+ : d(F, x) = j\}$. Para unificar la notación consideraremos $V_0 = V'_0 = F$. En cuanto a arcos, dado E un conjunto de arcos desconectador, consideramos los dos conjuntos disjuntos de vértices $F' = \{f : (f, f') \in E\}$ y $F'' = \{f' : (f, f') \in E\}$. En este caso, el conjunto de vértices $V = V(G - E)$ puede ser dividido en dos conjuntos, que denotaremos también por V^- y V^+ , denominados α -*fragmentos*. Entonces definimos $V_i = \{x \in V^- : d(x, F') = i\} \subset V^-$ y $V'_j = \{x \in V^+ : d(F'', x) = j\} \subset V^+$, donde $0 \leq i \leq \nu$, y $0 \leq j \leq \nu'$.

Capítulo 2

Distancia conectividad en digrafos

2.1 Introducción

La *conectividad condicional* es una generalización de los conceptos de conectividad estándar que fue introducida por Harary en [38], definiéndola como el mínimo cardinal de un conjunto de vértices, cuya supresión desconecta el digrafo, y cada una de las componentes conexas que se producen satisface una condición dada. En este capítulo estudiamos una generalización de los conceptos de conectividad y arco conectividad, los cuales, de alguna forma, pueden ser considerados como conectividades condicionales. La diferencia es que, ahora, la condición no se impone en las componentes, sino en la distancia original de los vértices que han sido desconectados. Precisando más, requerimos que los conjuntos desconectores separen vértices que estaban suficientemente alejados en el digrafo original. Esta clase de conectividad fue introducida por Fiol y Fàbrega en [29], y puede ser una herramienta útil para medir la fiabilidad de la red como una función de la distancia entre los nodos que queremos comunicar.

El resto de esta sección está dedicada a recordar algunos conceptos y resultados ya conocidos, así como a introducir los nuevos. En la Sección 2.2 construimos digrafos que tienen una secuencia de distancia conectividades dada. En la tercera sección ponemos especial atención en la obtención de

condiciones suficientes para alcanzar distancia conectividad óptima. Para conseguir los resultados serán utilizados el parámetro ℓ y la condición de que el digrafo sea s -geodético. En la penúltima sección daremos resultados análogos para el caso de digrafos bipartitos, y en la última obtenemos cotas inferiores para la t -distancia conectividad de digrafos. Estas cotas están dadas sobre el diámetro.

Sea G un digrafo conectado. La *excentricidad positiva* de un vértice $x \in V$ se define como $e^+(x) = \max_{y \in V} \{d(x, y)\}$. La *excentricidad negativa* $e^-(x)$ se define análogamente. El *radio positivo* de G es $r^+ = \min_{x \in V} \{e^+(x)\}$ y similarmente se define el *radio negativo*, r^- . El *radio* r de G es el mínimo entre el radio negativo y el positivo. Nótese que el diámetro es $D = \max_{x \in V} \{e^+(x)\} = \max_{x \in V} \{e^-(x)\}$.

Dados $x, y \in V$ tales que $(x, y) \notin A$, un conjunto $S = S(x, y) \subset V \setminus \{x, y\}$ se llama un $x \rightarrow y$ *conjunto separador* si no hay ningún $x \rightarrow y$ camino en $G - S$. La *conectividad local de x a y* es

$$\kappa(x, y; G) = \kappa(x, y) = \min\{|S| : S \text{ es un } x \rightarrow y \text{ conjunto separador}\}.$$

Por el teorema de Menger, $\kappa(x, y)$ puede ser también definida como el número máximo de caminos internamente disjuntos desde x a y .

Definimos a continuación los nuevos conceptos de conectividad que serán estudiados en este capítulo. Estos conceptos fueron introducidos por primera vez en [29].

Definición 2.1.1 Dado t , $1 \leq t \leq D$, la t -distancia conectividad de un digrafo G , denotada por $\kappa(t; G)$ o simplemente $\kappa(t)$, se define como

$$\kappa(t) = \min\{\kappa(x, y) : x, y \in V, d(x, y) \geq t\}, \text{ si } t \geq 2,$$

y $\kappa(1) = \kappa(G) = \kappa$ siendo κ la conectividad estándar de G .

De la anterior definición se verifica fácilmente que

$$\kappa = \kappa(1) = \kappa(2) \leq \kappa(3) \leq \dots \leq \kappa(D), \quad (2.1)$$

ya que los conjuntos sobre los que se toma el mínimo forman una cadena decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos.

Obsérvese que si para algún t , $1 \leq t \leq D$, $\kappa(t-1) < \kappa(t)$, al suprimir $\kappa(t-1)$ vértices del digrafo desconectamos vértices que se encuentran a una distancia $\leq t-1$, pero no vértices a mayor distancia. Así pues, el estudio de las secuencias de t -distancias conectividades puede ser una información útil sobre la conexión de los vértices atendiendo a la distancia entre ellos. Nuestro objetivo será conseguir condiciones suficientes para que un digrafo tenga t -distancias conectividades óptimas.

En lo referente a arcos podemos definir los siguientes conceptos. Dados $x, y \in V$, un conjunto $S' = S'(x, y) \subset A$ se llama un $x \rightarrow y$ conjunto de arcos separador si no existe ningún $x \rightarrow y$ camino en $G - S'$. La arco conectividad local de x a y es

$$\lambda(x, y; G) = \lambda(x, y) = \min\{|S'| : S' \text{ es un } x \rightarrow y \text{ conjunto de arcos separador}\}.$$

También la conectividad local se puede definir a través del teorema de Menger como el número máximo de $x \rightarrow y$ caminos internamente arco disjuntos.

Definición 2.1.2 Dado t , $1 \leq t \leq D$, la arco t -distancia conectividad de un digrafo G , denotada por $\lambda(t; G)$ o simplemente $\lambda(t)$, se define como

$$\lambda(t) = \min\{\lambda(x, y) : x, y \in V, d(x, y) \geq t\}.$$

En este caso tenemos

$$\lambda = \lambda(1) \leq \lambda(2) \leq \dots \leq \lambda(D), \quad (2.2)$$

donde $\lambda = \lambda(G)$ denota la arco conectividad estándar de G .

Si nos preguntamos por relaciones entre la t -distancia conectividad y la arco t -distancia conectividad, que sean análogas a las ya conocidas para el caso estándar, una de las primeras que podemos verificar es la siguiente. Para cada t , $1 \leq t \leq D$, $\kappa(t) \leq \lambda(t)$. El caso $t = 1$ da la desigualdad $\kappa \leq \lambda$, ya conocida, ver Geller y Harary [32]. La última desigualdad se puede completar

con el grado mínimo, cumpliéndose que, $\kappa \leq \lambda \leq \delta$. En general, no es cierto que $\lambda(t) \leq \delta$, pero $\lambda(t)$ verifica claramente $\lambda(t) \leq \delta^+(x)$ para cualquier $x \in V$ tal que $e^+(x) \geq t$, y $\lambda(t) \leq \delta^-(x)$ para cualquier $x \in V$ con $e^-(x) \geq t$. Entonces, para cada t , $1 \leq t \leq D$, es útil considerar un nuevo parámetro, que llamaremos t -grado, el cual fue introducido en [4].

Definición 2.1.3 Para cada t , $1 \leq t \leq D$, llamamos t -grado, denotado por $\delta(t)$, al mínimo entre $\delta^+(t)$ y $\delta^-(t)$, donde $\delta^+(t) = \min_{x \in V} \{\delta^+(x), e^+(x) \geq t\}$ y $\delta^-(t) = \min_{x \in V} \{\delta^-(x), e^-(x) \geq t\}$.

Como consecuencia inmediata de la definición, los t -grados forman una secuencia creciente, cuyos primeros términos son iguales hasta el radio de G .

$$\delta = \delta(1) = \dots = \delta(r) \leq \delta(r+1) \leq \dots \leq \delta(D). \quad (2.3)$$

Ahora, para cualquier t , $1 \leq t \leq D$,

$$\kappa(t) \leq \lambda(t) \leq \delta(t). \quad (2.4)$$

Un digrafo G se llama *maximalmente t -distancia conectado* si $\kappa(t) = \lambda(t) = \delta(t)$, y *maximalmente arco t -distancia conectado* si $\lambda(t) = \delta(t)$. Nótese que si G es maximalmente conectado, entonces G es maximalmente t -distancia conectado para cualquier $1 \leq t \leq r$.

En cuanto al comportamiento en el digrafo línea LG de un digrafo G de los nuevos conceptos definidos podemos comprobar que

$$\kappa(t+1; LG) = \lambda(t; G) \quad \text{si } 1 \leq t \leq D-1, \quad (2.5)$$

y

$$\delta(t+1; LG) = \delta(t; G) \quad \text{si } 1 \leq t \leq D. \quad (2.6)$$

Esto es debido a que los vértices de LG corresponden a arcos de G , y por lo tanto cada camino en LG de longitud $t+1$, con $1 \leq t+1 \leq D+1$, corresponde a un camino en G de longitud t . La última igualdad es debida, además, a que el grado de salida de cada vértice en el digrafo línea coincide con el grado

de salida del vértice final del arco en G que lo define, y el grado de entrada coincide con el grado de entrada del vértice inicial del arco que lo define.

Finalmente, vamos a enunciar algunos de los resultados ya conocidos sobre el tema que nos concierne, estos resultados se encuentran en [29]. En este artículo se dieron condiciones suficientes para que un digrafo tuviera t -distancias conectividades iguales hasta un cierto valor de t . El resultado principal es el siguiente.

$$\text{Si } \kappa < \delta \text{ entonces } D \geq 2\ell \text{ y } \kappa = \kappa(2\ell); \quad (2.7)$$

$$\text{si } \lambda < \delta \text{ entonces } D \geq 2\ell + 1 \text{ y } \lambda = \lambda(2\ell + 1). \quad (2.8)$$

Como consecuencia de este resultado y recordando las desigualdades (2.1) y (2.2), se demostró la siguiente caracterización de los digrafos maximalmente conectados.

$$\kappa = \delta \text{ sii } D \leq 2\ell - 1 \text{ o } \kappa(2\ell) \geq \delta; \quad (2.9)$$

$$\lambda = \delta \text{ sii } D \leq 2\ell \text{ o } \lambda(2\ell + 1) \geq \delta. \quad (2.10)$$

Nótese que, como $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$ están definidas sólo para $t \leq D$, las dos condiciones suficientes sobre el diámetro y la distancia conectividad son complementarias.

En particular, como $\ell \geq 1$, la ecuación (2.10) implica que cada digrafo con diámetro 2 es maximalmente arco conectado. Esto fue probado en [43]. Además, se tiene que *cada digrafo con distancia conectividad $\lambda(3) \geq \delta$ tiene máxima arco conectividad.*

Consideramos ahora el caso de grafos (no dirigidos). En este caso se pueden definir conceptos análogos al caso de digrafos obteniendo resultados similares. Para conseguir nuestro propósito sólo trataremos con grafos simples $G = (V, A)$, considerando sus *digrafos simétricos asociados* $G^* = (V, A^*)$. El razonamiento básico es que $\kappa(t; G) = \kappa(t; G^*)$ para cada $1 \leq t \leq D$ y, debido a que un conjunto de arcos desconector no puede contener dígonos, también $\lambda(t; G) = \lambda(t; G^*)$. Por otro lado $\ell = \ell(G) = \ell(G^*) = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$, donde g denota el girth del grafo G .

Sea G un grafo con girth g . Aplicando las condiciones (2.7) y (2.8) a su asociado G^* , tenemos las siguientes condiciones.

$$\text{Si } \kappa < \delta \text{ entonces } \begin{cases} D \geq g - 1 \text{ y } \kappa = \kappa(g - 1), & g \text{ impar} \\ D \geq g - 2 \text{ y } \kappa = \kappa(g - 2), & g \text{ par;} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{si } \lambda < \delta \text{ entonces } \begin{cases} D \geq g \text{ y } \lambda = \lambda(g), & g \text{ impar} \\ D \geq g - 1 \text{ y } \lambda = \lambda(g - 1), & g \text{ par.} \end{cases} \quad (2.12)$$

De nuevo como consecuencia de este resultado podemos obtener la siguiente caracterización de grafos maximalmente conectados.

$$\kappa = \delta \text{ sii } \begin{cases} D \leq g - 2 \text{ o } \kappa(g - 1) \geq \delta, & g \text{ impar} \\ D \leq g - 3 \text{ o } \kappa(g - 2) \geq \delta, & g \text{ par;} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\lambda = \delta \text{ sii } \begin{cases} D \leq g - 1 \text{ o } \lambda(g) \geq \delta, & g \text{ impar} \\ D \leq g - 2 \text{ o } \lambda(g - 1) \geq \delta, & g \text{ par.} \end{cases} \quad (2.14)$$

En particular, estos resultados contienen las condiciones suficientes de So-neoka y otros [52, 53], sobre el diámetro y el girth, para que un grafo sea maximalmente conectado o rama conectada. Nótese que, como $g \geq 3$, cada grafo con diámetro 2 tiene máxima rama conectividad. Esto fue probado en [47]. También puede deducirse el resultado de Jolivet [43]. Además, se verifica que *cada grafo con distancia conectividad $\lambda(3) \geq \delta$ tiene máxima rama conectividad.*

En lo referente a digrafos bipartitos, los resultados conocidos se encuentran en el artículo anteriormente mencionado. La diferencia en los resultados es debida al hecho de que en un digrafo bipartito entre dos vértices cualesquiera no existen caminos cuya longitud difiera en una unidad.

El próximo resultado es el análogo a (2.7) y (2.8) para el caso bipartito. Como se puede observar todas las cotas se han incrementado en una unidad.

$$\text{Si } \kappa < \delta \text{ entonces } D \geq 2\ell + 1 \text{ y } \kappa = \kappa(2\ell + 1); \quad (2.15)$$

$$\text{si } \lambda < \delta \text{ entonces } D \geq 2\ell + 2 \text{ y } \lambda = \lambda(2\ell + 2). \quad (2.16)$$

El siguiente corolario caracteriza aquellos digrafos bipartitos que poseen conectividad óptima. La condición sobre el diámetro D y ℓ fue estudiada

también por Fàbrega y Fiol en [22]

$$\kappa = \delta \text{ sii } D \leq 2\ell \text{ o } \kappa(2\ell + 1) \geq \delta; \quad (2.17)$$

$$\lambda = \delta \text{ sii } D \leq 2\ell + 1 \text{ o } \lambda(2\ell + 2) \geq \delta. \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta que el parámetro ℓ verifica $\ell \geq 1$, tenemos además los siguientes resultados.

- (a) Todo digrafo bipartito con 3-distancia conectividad $\kappa(3) \geq \delta$ tiene conectividad máxima.
- (b) Todo digrafo bipartito con diámetro 3 o distancia conectividad $\lambda(4) \geq \delta$ tiene arco conectividad máxima.

Teniendo presente que para grafos bipartitos el girth es siempre par las condiciones (2.15) y (2.16) pueden reescribirse de la siguiente forma.

$$\text{Si } \kappa < \delta \text{ entonces } D \geq g - 1 \text{ y } \kappa = \kappa(g - 1); \quad (2.19)$$

$$\text{si } \lambda < \delta \text{ entonces } D \geq g \text{ y } \lambda = \lambda(g). \quad (2.20)$$

En particular, tenemos la siguiente caracterización de los grafos bipartitos con conectividad máxima.

$$\kappa = \delta \text{ sii } D \leq g - 2 \text{ o } \kappa(g - 1) \geq \delta; \quad (2.21)$$

$$\lambda = \delta \text{ sii } D \leq g - 1 \text{ o } \lambda(g) \geq \delta. \quad (2.22)$$

Además, como en un grafo bipartito $g \geq 4$, podemos enunciar las siguientes condiciones para que un grafo bipartito tenga conectividades óptimas.

- (a) Todo grafo bipartito con distancia conectividad $\kappa(3) \geq \delta$ tiene conectividad máxima.
- (b) Todo grafo bipartito con diámetro 3 o distancia conectividad $\lambda(4) \geq \delta$ tiene rama conectividad máxima.

El resultado que contiene la condición sobre el diámetro, en el anterior caso (b), fue probado por Plesník y Znàm [49], independientemente.

2.2 Construcciones

En esta sección construimos un digrafo G que tiene como t -distancia conectividades una secuencia dada de $D - 1$ enteros positivos $c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_D$. Del mismo modo demostramos que, para un t dado, los parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y $\delta(t)$ son independientes, es decir, dados tres enteros positivos $a \leq b \leq c$ existe un digrafo G con estos números como t -distancia conectividad, arco t -distancia conectividad y t -grado, respectivamente. Para el caso de conectividad, arco conectividad y grado mínimo, Geller y Harary dieron en [32] una construcción que muestra la independencia de estos parámetros.

El siguiente lema nos proporciona cotas superiores para la t -distancia conectividad como una función del orden, el tamaño y el diámetro de un digrafo, las cuales serán útiles en nuestro estudio. Esta cota puede verse también como una cota inferior para el número de vértices de un digrafo en términos de su diámetro y su distancia conectividad.

La primera cota fue dada por Watkins [56] para la conectividad estándar, $\kappa = \kappa(1)$ de un grafo. Además, se probó que la desigualdad obtenida es la mejor posible construyendo, para dos enteros positivos dados, D y κ , un grafo G de orden $n = \kappa(D-1) + 2$ con diámetro D y conectividad κ . La construcción de estos grafos es como sigue. Sean H_1, \dots, H_{D-1} $D - 1$ copias disjuntas de K_D . Construimos G de la siguiente forma: unimos cada vértice de H_i a cada vértice de H_{i+1} por una rama, $1 \leq i \leq D - 2$; además unimos un nuevo vértice u a cada vértice de H_1 por una rama y similarmente unimos un vértice v a cada vértice de H_{D-1} . El grafo resultante claramente satisface las condiciones preescritas.

Lema 2.2.1 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , orden n , tamaño m y t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$. Entonces,*

$$(a) \kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor, \quad 1 \leq t \leq D;$$

$$(b) \lambda(t) \leq \lfloor \frac{m-2}{D} \rfloor, \quad 1 \leq t \leq D - 1; \quad \lambda(D) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor.$$

Demostración. (a) Sea $G = (V, A)$ un digrafo, y sean $x, y \in V$ dos vértices

tales que $d(x, y) \geq t$, y $\kappa(x, y)$ la conectividad local desde x a y . Como $\kappa(x, y)$ es el máximo número de $x \rightarrow y$ caminos internamente disjuntos, el orden del digrafo debe satisfacer $\kappa(x, y)(d(x, y)-1)+2 \leq n$. Entonces, $\kappa(t)(t-1)+2 \leq n$, y de aquí que $\kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-2}{t-1} \rfloor$. Cuando $t = D$ tenemos $\kappa(D) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor$, y el resultado se sigue desde (2.1).

(b) Teniendo en cuenta que $n(LG) = m(G)$, deducimos de la ecuación (2.5) y del caso (a) que $\lambda(t) = \kappa(t+1; LG) \leq \lfloor \frac{m-2}{D} \rfloor$, $1 \leq t \leq D-1$. Sean $x, y \in V$ tales que $d(x, y) = D$ y $\lambda(x, y)$ la arco conectividad local desde x a y . Como $\lambda(x, y)$ es el máximo número de $x \rightarrow y$ caminos internamente arco disjuntos, el tamaño del digrafo debe satisfacer: $\lambda(x, y)d(x, y) \leq m$. Entonces, $\lambda(D)D \leq m$, y de aquí que $\lambda(D) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor$. ■

Nótese que un razonamiento directo para el caso de la arco t -distancia conectividad nos llevaría a la última cota dada, $\lambda(t) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor$, la cual es peor que la obtenida razonando mediante el digrafo línea.

Cuando $\ell = D$, un razonamiento similar nos permite obtener una cota mejor que la anterior para la t -distancia conectividad.

Lema 2.2.2 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , orden n , tamaño m , parámetro $\ell = D$ y t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$. Entonces,*

$$(a) \kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-1}{D} \rfloor, 1 \leq t \leq D;$$

$$(b) \lambda(t) \leq \lfloor \frac{m-1}{D+1} \rfloor, 1 \leq t \leq D-1; \lambda(D) \leq \lfloor \frac{m+1}{D+1} \rfloor.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que al ser $\ell = D$, entre dos vértices a distancia D sólo existe un camino de longitud mínima D , los caminos restantes deben ser de longitud $\geq D+1$. Por lo tanto en este caso el orden debe verificar $(D-1) + 2 + (k(x, y) - 1)D \leq n$, para cualquier par de vértices $x, y \in V$ tales que $d(x, y) \geq D$. ■

En el siguiente teorema demostramos la existencia de digrafos que tienen una cadena de t -distancia conectividades dada. Como consecuencia de este

teorema obtendremos que las cotas dadas en el Lema 2.2.1 son las mejores posibles.

Teorema 2.2.3 *Dados $D - 1 (> 2)$ enteros positivos $c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_D$, existe un digrafo G cuyas t -distancia conectividades son $\kappa(2) = c_2, \kappa(3) = c_3, \dots, \kappa(D) = c_D$.*

Demostración. Sabemos que si n es el orden del digrafo buscado y D el diámetro se debe verificar $\kappa(D) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor$. Entonces, el orden del digrafo debe satisfacer $n = |V| \geq c_D(D - 1) + 2$. Por lo tanto, construiremos un digrafo G con $n = c_D(D - 1) + 2$, y denotaremos sus vértices como $v_{01}, v_{ij}, 1 \leq i \leq D - 1, 1 \leq j \leq c_D$ y v_{D1} . Consideramos una partición de V en los siguientes subconjuntos $B_0 = \{v_{01}\}, B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ic_D}\}, 1 \leq i \leq D - 1$ y $B_D = \{v_{D1}\}$. Las adyacencias del digrafo son las siguientes:

- $\Gamma^+(v_{01}) = B_1$;
- Sea $w \in B_i, 1 \leq i \leq D - 2$. Sus vecinos de salida son $\Gamma^+(w) = B_{i+1}, w \neq v_{i1}$, y $\Gamma^+(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}, \dots, v_{i+1,c_{D-i}}\} \subset B_{i+1}$;
- $\Gamma^+(w) = V \setminus \{w\}$, para cualquier $w \in B_{D-1}$;
- $\Gamma^+(v_{D1}) = B_{D-1}$.

Procedemos a verificar que el digrafo descrito satisface las condiciones requeridas. En primer lugar, calculamos el diámetro de G . Cualquier $w \in B_{D-1}$, posee $e^+(w) = 1$, ya que estos vértices son adyacentes a cualquier vértice del digrafo G excepto a sí mismos, y $e^+(v_{D1}) = 2$ ya que $\Gamma^+(v_{D1}) = B_{D-1}$. Para cualquier $w \in B_i, 1 \leq i \leq D - 2, d(w, v_{D-1,1}) = D - 1 - i$, y de aquí, que $d(w, y) \leq D - i$, para cualquier $y \in V$. Por lo tanto, $e^+(w) = D - i \leq D - 1$. Finalmente, $e^+(v_{01}) = D$, porque $d(v_{01}, v_{D1}) = D$ y si $v \in V, v \neq v_{D1}, d(v_{01}, v) < D$. Así, $D(G) = \max_{v \in V} \{e^+(v)\} = e^+(v_{01}) = D$.

Como sólo los vértices v_{01} y v_{D1} están a distancia D , y hay exactamente $c_D, v_{01} \rightarrow v_{D1}$ caminos internamente disjuntos en G , entonces $\kappa(D) = \kappa(v_{01}, v_{D1}) = c_D$. Para estudiar las otras t -distancia conectividades calculamos primero

las conectividades locales $\kappa(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in V$. En primer lugar, nótese que para cualquier $y \in V$, $\Gamma^+(v_{D1}) \subset \Gamma^-(y)$, y de aquí que $\kappa(v_{D1}, y) = \delta^+(v_{D1}) = c_D$. Si $x = v_{i1}$, $1 \leq i \leq D - 2$, recordemos que $\Gamma^+(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}, \dots, v_{i+1,c_{D-i}}\} \subset B_{i+1}$. (A modo de ilustración considérese por ejemplo $x = v_{D-3,1}$, ver Fig. 2.1). Distinguimos tres casos diferentes en función del vértice $y \in V$, teniendo en cuenta que para cualquier $y \in B_{j+1}$, $1 \leq j \leq D - 1$, o bien $B_j \subset \Gamma^-(y)$ o $B_j \setminus \{v_{j1}\} \subset \Gamma^-(y)$.

- (i) Cuando $y = v_{j1}$, $1 \leq j \leq D - 1$, tenemos que $B_{j-1} \subset \Gamma^-(v_{j1})$, y por lo tanto podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \rightarrow v_{j1}$ caminos internamente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1r} \dots v_{j-1r}v_{j1}$ si $i + 1 < j \leq D - 1$, o $v_{i1}v_{i+1r} \dots v_{D-1r}v_{j1}$ si $1 \leq j \leq i + 1$, $j \neq i$ donde $1 \leq r \leq c_{D-i}$. De aquí $\kappa(v_{i1}, v_{j1}) = \delta^+(v_{i1}) = c_{D-i}$.
- (ii) Cuando $y \in B_j$, $y \neq v_{j1}$, $1 \leq j \leq D - 2$, en el peor de los casos tenemos que $v_{j-1,1} \notin \Gamma^-(y)$. En este caso podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \rightarrow y$ caminos internamente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1r} \dots v_{j-1,r}y$ si $i + 1 < j \leq D - 1$, o $v_{i1}v_{i+1r} \dots v_{D-1,r}y$ si $1 \leq j \leq i + 1$, donde en ambos casos $2 \leq r \leq c_{D-i}$. Además, tenemos el siguiente camino desde v_{i1} a y , el cual es internamente disjunto con los anteriores $v_{i1}v_{i+1,1} \dots v_{D-1,1}y$. De aquí que $\kappa(v_{i1}, y) = \delta^+(v_{i1}) = c_{D-i}$, para cualquier $y \in B_j$, $y \neq v_{j1}$, $1 \leq j \leq D - 2$.
- (iii) Cuando $y = v_{01}$ o $y = v_{D1}$, tenemos que $\Gamma^-(y) = B_{D-1}$ y por lo tanto podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \rightarrow y$ caminos internamente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1,r} \dots v_{D-1,r}y$ para $1 \leq r \leq c_{D-i}$, y de aquí $\kappa(v_{i1}, y) = c_{D-i}$.

Finalmente, si $x = v_{01}$ o $x \in B_i$, $x \neq v_{i1}$, $1 \leq i \leq D - 2$, entonces $\Gamma^+(x) = B_{i+1}$ y es fácil verificar que $\kappa(x, y) = c_D$ para cualquier $y \in V$.

De los anteriores resultados obtenemos que $\kappa(2) = \min\{\kappa(x, y) : d(x, y) \geq 2\} = c_2$, $\kappa(3) = \min\{\kappa(x, y) : d(x, y) \geq 3\} = c_3, \dots$, $\kappa(D) = \min\{\kappa(x, y) : d(x, y) \geq D\} = c_D$. ■

Procedemos ahora a demostrar que los tres parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y $\delta(t)$ de un digrafo son independientes.

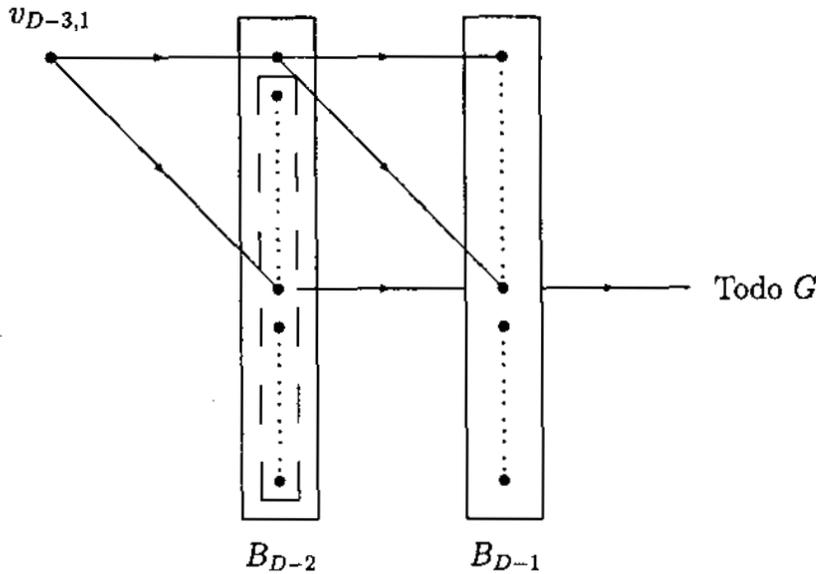


Figura 2.1: Proceso de construcción de un digrafo con $\kappa(t) = c_t$, $2 \leq t \leq D$

Teorema 2.2.4 *Dados tres números enteros positivos satisfaciendo $a \leq b \leq c$ y $3 \leq t \leq D$, existe un digrafo $G = (V, A)$ con diámetro $D \geq t$, en el cual $\kappa(t) = a$, $\lambda(t) = b$, y $\delta(t) = c$.*

Demostración. Construimos un digrafo con orden $n = |V| = s(D - 1) + 2$, $s > c$, y denotamos sus vértices como en la demostración del Teorema 2.2.3, es decir, $V = B_0 \cup \dots \cup B_D$, siendo $B_0 = \{v_{01}\}$, $B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{is}\}$, $1 \leq i \leq D - 1$, $B_D = \{v_{D1}\}$. Describimos ahora las adyacencias:

- $\Gamma^+(v) = V \setminus \{v\}$, para cualquier $v \in B_{D-1}$.
- $\Gamma^+(v_{D1}) = B_{D-1}$.
- Para cualquier $v \in B_i$, $0 \leq i \leq D - t - 1$, o $D - t + 2 \leq i \leq D - 2$, $\Gamma^+(v) = B_{i+1}$.
- Construimos un digrafo completo simétrico K_{c-a+1}^* con los primeros $c - a + 1$ vértices de B_{D-t} y todos estos vértices tienen también los siguientes

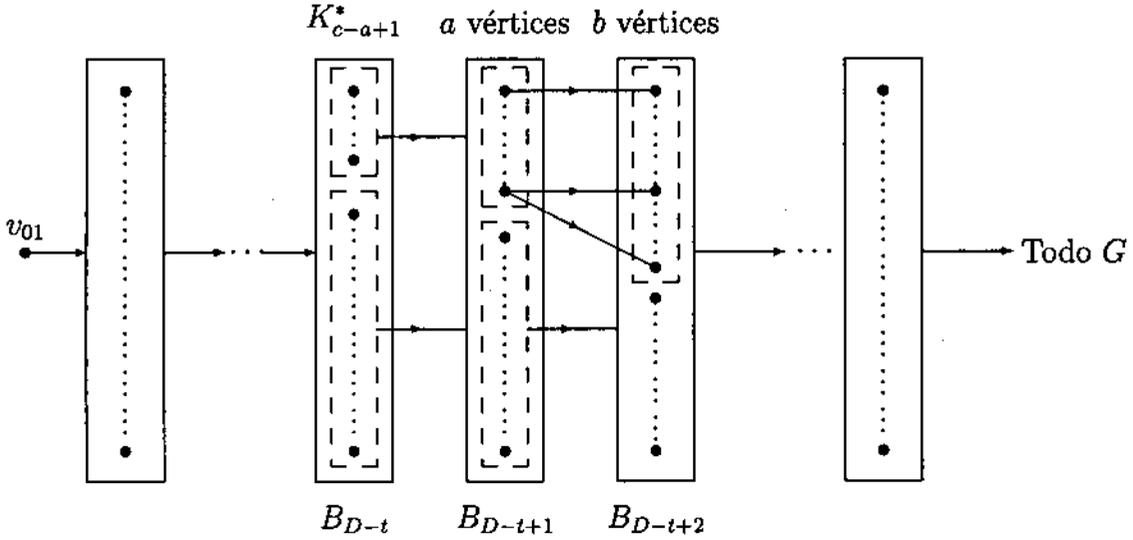


Figura 2.2: Un digrafo con $\kappa(t) = a$, $\lambda(t) = b$ y $\delta(t) = c$

vecinos de salida: $\{v_{D-t+1,1}, \dots, v_{D-t+1,a}\} \subset \Gamma^+(v_{D-t,i})$, $1 \leq i \leq c-a+1$. Además, para cualquier $v \in B_{D-t}$ diferente de tales vértices, $\Gamma^+(v) = B_{D-t+1}$.

- Para cualquier $v \in B_{D-t+1}$, $v \notin \Gamma^+(v_{D-t,1})$, $\Gamma^+(v) = B_{D-t+2}$.
- Para cualquier $v \in \Gamma^+(v_{D-t,1}) \cap B_{D-t+1}$, $\Gamma^+(v_{D-t+1,i}) = v_{D-t+2,i}$, $1 \leq i \leq a-1$, y $\Gamma^+(v_{D-t+1,a}) = \{v_{D-t+2,a}, \dots, v_{D-t+2,b}\}$.

El digrafo obtenido se muestra en la Figura 2.2. Veamos que satisface el teorema. Nótese que cualquier vértice $x \in V$, $x \neq v_{D-t,i}$, $1 \leq i \leq c-a+1$, tal que $e^+(x) \geq t$, verifica $\delta^+(x) = s > c$ y $\delta^-(x) = 2s > c$, y también es fácil probar que $\kappa(x, y) = \lambda(x, y) = s$ para cualquier $y \in V$. De aquí que, $\delta(t) = \delta^+(v_{D-t,i}) = c$, $1 \leq i \leq c-a+1$, ya que $e^+(v_{D-t,i}) = t$. Además, para cualquier $y \in V$, tenemos $\kappa(v_{D-t,i}, y) = a$, ya que existen exactamente a caminos desde $v_{D-t,i}$ a y internamente disjuntos. Por ejemplo, para $i = 1$ tales caminos son $v_{D-t,1}v_{D-t+1,i} \dots v_{D-1,i}y$, $1 \leq i \leq a$. Por lo tanto, $\kappa(t) = a$. Por otro lado, tenemos los siguientes b caminos desde $v_{D-t,1}$ a cualquier $y \in V$ internamente arco disjuntos: $v_{D-t,1}v_{D-t+1,i}v_{D-t+2,i} \dots v_{D-1,i}y$, $1 \leq i \leq a$; y

$v_{D-t,1}v_{D-t,j}v_{D-t+1,a}v_{D-t+2,j} \cdots v_{D-1,j}y$, $a+1 \leq j \leq b$. De donde se deduce, $\lambda(t) = b$. ■

Observamos que si $t = 1$, $\kappa(1) = \kappa$, $\lambda(1) = \lambda$, $\delta(1) = \delta$. En este caso una construcción de un digrafo verificando el Teorema 2.2.4 fue dada en [32].

En el caso de grafos tenemos un resultado similar al Teorema 2.2.3. Ahora, recordemos que el radio y el diámetro de un grafo G están siempre relacionados por las siguientes desigualdades: $r \leq D \leq 2r$. Además, si $\kappa = \delta$ se satisface $\kappa = \kappa(1) = \kappa(2) = \cdots = \kappa(\rho) = \cdots = \kappa(r)$ donde $\rho = \lfloor \frac{D}{2} \rfloor$.

Teorema 2.2.5 *Dados $D - \rho + 1$ enteros positivos $c_\rho \leq c_{\rho+1} \leq \cdots \leq c_D$, con $c_\rho \geq 2$ y $t > 4$ existe un grafo $G = (V, A)$ con diámetro $D \geq t$ y cuyas t -distancia conectividades son $\kappa(2) = \cdots = \kappa(\rho) = c_\rho$, $\kappa(\rho+1) = c_{\rho+1}$, \cdots , $\kappa(D) = c_D$.*

Demostración. Construimos un grafo $G = (V, A)$ con orden $n = |V| = c_D(D-1) + 2$, y denotamos los vértices como en la demostración del Teorema 2.2.3. Las adyacencias son las siguientes (ver Figura 2.3):

- $\Gamma(v_{01}) = B_1$, y $\Gamma(v_{D1}) = B_{D-1}$;
- Todas las ramas entre los conjuntos: B_i y B_{i+1} , $1 \leq i \leq \rho - 2$; $B_{\rho-1}$ y $(B_\rho \setminus \{v_{\rho 1}\})$ y $(B_j - \{v_{j1}\})$ y $(B_{j+1} \setminus \{v_{j+1,1}\})$, $\rho \leq j \leq D - 1$;
- $\Gamma(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}\} \cup \{\text{los } c_i - 1 \text{ primeros vértices de } B_{i-1}\}$, para todo $\rho \leq i \leq D - 1$.

Para probar que el grafo anteriormente descrito satisface las condiciones requeridas seguimos las mismas líneas que en la demostración del Teorema 2.2.3. ■

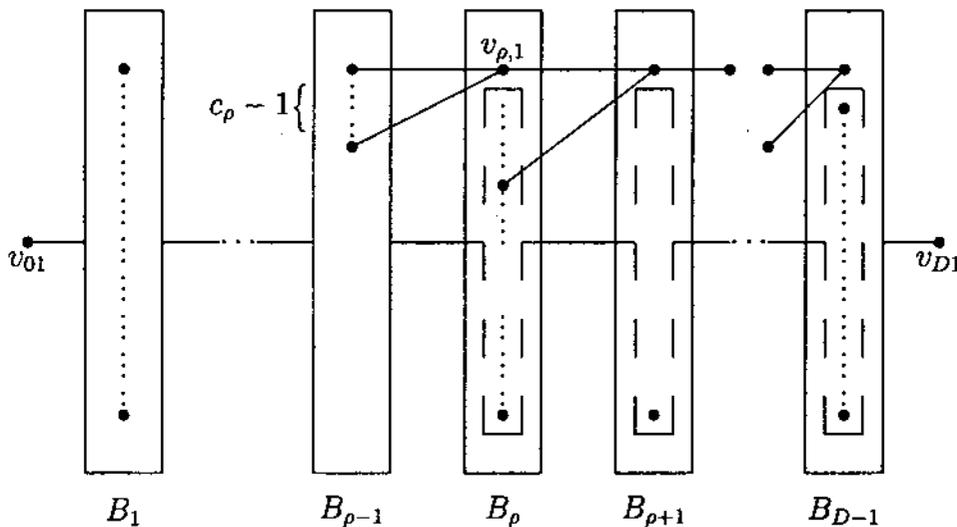


Figura 2.3: Ilustración del Teorema 2.2.5

2.3 Digrafos maximalmente distancia conectados

En esta sección damos algunas condiciones suficientes para que un digrafo sea maximalmente t -distancia conectado. De ahora en adelante supondremos $\delta(t) > 1$, ya que si $\delta(t) = 1$ el digrafo es obviamente maximalmente t -distancia conectado. El siguiente resultado muestra que para un digrafo s -geodético con parámetro ℓ , la distancia conectividad $\kappa(2\ell)$ únicamente determina las conectividades $\kappa(t)$ para cualquier $t \leq 2s$, y análogamente para la arco t -distancia conectividad.

Teorema 2.3.1 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$ y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

- (a) $\kappa(t) = \min\{\delta(t), \kappa(2\ell)\}$, para cualquier $t \leq 2s$;
- (b) $\lambda(t) = \min\{\delta(t), \lambda(2\ell + 1)\}$, para cualquier $t \leq 2s + 1$.

Demostración. Probaremos en primer lugar (a). Sea F un conjunto t -distancia desconector de $G = (V, A)$ de cardinal mínimo, es decir $|F| = \kappa(t)$. Entonces, existen dos vértices $u, v \in V \setminus F$ tales que $d(u, v) \geq t$ de manera que no hay caminos desde u a v en $G - F$. Consideramos los conjuntos V^-, V^+, V_i y V'_j , donde $1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \mu'$, definidos en la Sección 1.5. Como cualquier camino desde V^- a V^+ debe atravesar F , la distancia desde un vértice en V_μ a uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu + \mu'$ y de aquí que $D \geq \mu + \mu'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mu \leq \mu'$ (si no, usamos el digrafo inverso de G).

Sabemos que $\kappa(t) \leq \delta(t)$. Además, debido a que $t \leq 2s \leq 2\ell$ se sigue que $\kappa(t) \leq \kappa(2\ell)$, por lo tanto $\kappa(t) \leq \min\{\delta(t), \kappa(2\ell)\}$. Para probar la desigualdad inversa distinguimos dos casos:

(a.1) $\mu \geq \ell$. Entonces, si $x \in V_\mu, y \in V'_{\mu'}$, tenemos $d(x, y) \geq \mu + \mu' \geq 2\ell$. De aquí, $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell)$.

(a.2) $\mu \leq \ell - 1$. Consideramos dos subcasos:

(i) $\mu \leq s - 1$. Sea $u \in V_i, i \leq \mu$, el vértice anteriormente mencionado, y sean $u_1, u_2, \dots, u_{\delta(t)}, \delta(t)$ de sus vecinos de salida. Para cada u_i , sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde u_i . Si $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, entonces deberían existir dos $u \rightarrow f_i$ caminos de longitud a lo sumo $\mu + 1 \leq s$, contradiciendo que G es s -geodético. Por lo tanto, $\kappa(t) \geq \delta(t)$.

(ii) $s \leq \mu$. Sea $x \in V_\mu$, tenemos que $e^+(x) \geq t$ ya que, para cualquier $y \in V'_{\mu'}, d(x, y) \geq \mu + \mu' \geq 2s \geq t$. Sean $x_1, x_2, \dots, x_{\delta(t)}, \delta(t)$ de sus vecinos de salida. Como en el caso (i), para cada x_i , sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde x_i . Ahora, si $f_i = f_j$, para algún $i \neq j$, deberían existir dos $x \rightarrow f_i$ caminos diferentes de longitud μ o $\mu + 1$ contradiciendo la definición del parámetro ℓ , ya que $\mu \leq d(x, f_i) \leq 1 + d(x_i, f_i) \leq 1 + \mu \leq \ell$. Por lo tanto, $\kappa(t) \geq \delta(t)$.

(b) En este caso, sean E un conjunto de arcos t -distancia desconector de cardinal mínimo y los conjuntos de vértices F', F'', V_i y V'_j definidos en

la Sección 1.5. Ahora la distancia desde un vértice en V_ν a uno en $V_{\nu'}$ es al menos $\nu + \nu' + 1$ y de aquí $D \geq \nu + \nu' + 1$. Además, tenemos que $\lambda(t) \leq \min\{\delta(t), \lambda(2\ell + 1)\}$. Para completar la demostración consideramos de nuevo dos casos:

(b.1) $\nu \geq \ell$. Entonces, si $x \in V_\nu$, $y \in V_{\nu'}$, se verifica $d(x, y) \geq \nu + \nu' + 1 \geq 2\ell + 1$. De donde, $\lambda(t) = |E| \geq \lambda(2\ell + 1)$.

(b.2) $\nu \leq \ell - 1$. Si $\nu \geq 1$, podemos razonar como en el caso (a.2). Cuando $\nu = 0$, tenemos que $V^- = F'$. En este caso, sea $u \in F'$ con $e^+(u) \geq t$, y sean $u_1, u_2, \dots, u_{\delta(t)}$, $\delta(t)$ de sus vecinos de salida. Si $\Gamma^+(u) \subset F''$ es claro que $\delta(t) \leq |F''| \leq |E| = \lambda(t)$. De otra forma, supongamos que $u_1, u_2, \dots, u_k \in F'$ y $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{\delta(t)} \in F''$. Entonces, E contiene los siguientes arcos (u_i, w) , $1 \leq i \leq k$, $w \in F''$, y (u, u_i) , $k + 1 \leq i \leq \delta(t)$. Como G no tiene lazos, todos estos arcos son diferentes y, de aquí, $\delta(t) \leq |E| = \lambda(t)$. ■

Este teorema nos proporciona condiciones suficientes para que un digrafo s -geodético con parámetro ℓ sea maximalmente t -distancia conectado. Estas condiciones están dadas sobre el diámetro del digrafo en términos del parámetro ℓ .

Corolario 2.3.2 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , t -distancia conectividad $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

$$(a) \kappa(t) = \delta(t) \text{ para cualquier } t \leq 2s, \quad \text{si } D \leq 2\ell - 1;$$

$$(b) \lambda(t) = \delta(t) \text{ para cualquier } t \leq 2s + 1, \quad \text{si } D \leq 2\ell.$$

Demostración. (a) Como $D \leq 2\ell - 1$, usando la misma notación que en el Teorema 2.3.1, tenemos que $2\mu \leq \mu + \mu' \leq D \leq 2\ell - 1$. De aquí que $\mu \leq \ell - 1$ y estamos en el caso (a.2) de la demostración anterior, entonces $\kappa(t) = \delta(t)$.

(b) Usamos el mismo razonamiento que en el caso (a). ■

Como $s \geq 1$, para $t = 1$ el corolario anterior da una condición suficiente para que un digrafo G tenga máxima conectividad, esta condición fue ya formulada en [21], [26] y [29].

Un digrafo se llama *maximalmente distancia conectado* si $\kappa(t) = \lambda(t) = \delta(t)$ para todo $1 \leq t \leq D$, y *maximalmente arco distancia conectado* si $\lambda(t) = \delta(t)$ para todo $1 \leq t \leq D$. El siguiente corolario da una condición suficiente para que un digrafo sea maximalmente distancia conectado.

Corolario 2.3.3 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \delta(t)$ para todo $t \leq D$, si $D \leq 2s - 1$;

(b) $\lambda(t) = \delta(t)$ para todo $t \leq D$, si $D \leq 2s$. ■

Si k es suficientemente grande, el digrafo línea k -iterado $L^k G$ satisface las condiciones sobre el diámetro del Corolario 2.3.2 ya que, de la propiedad (1.3) y la Proposición 1.4.1,

$$D(L^k G) \leq 2\ell(L^k G) - 1 \Leftrightarrow k \geq D(G) - 2\ell(G) + 1;$$

$$D(L^k G) \leq 2\ell(L^k G) \Leftrightarrow k \geq D(G) - 2\ell(G).$$

Además, si G es s -geodético entonces $L^k G$ es s' -geodético con $s' = \min\{s + k, g - 1\}$, donde g denota el girth de G .

Corolario 2.3.4 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , girth g , y t -grado $\delta(t)$. Sea $s' = \min\{s + k, g - 1\}$. Entonces,*

(a) $\kappa(t; L^k G) = \delta(t; L^k G)$ para cualquier $t \leq 2s'$, si $k \geq D - 2\ell + 1$;

(b) $\lambda(t; L^k G) = \delta(t; L^k G)$ para cualquier $t \leq 2s' + 1$, si $k \geq D - 2\ell$. ■

2.4 Digrafos bipartitos con distancia conectividad óptima

En esta sección estudiaremos el caso en el que el digrafo G es bipartito. Como hemos observado en la introducción el hecho de que en un digrafo bipartito

entre dos vértices no existan caminos cuya longitud difiera en una unidad permite simplificar la definición del parámetro ℓ , y da lugar a la obtención de resultados similares a los del caso general, pero aquí todas las cotas mejoran en una unidad. El siguiente resultado es análogo al Teorema 2.3.1.

Teorema 2.4.1 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \min\{\delta(t), \kappa(2\ell + 1)\}$, para todo $t \leq 2s$;

(b) $\lambda(t) = \min\{\delta(t), \lambda(2\ell + 2)\}$, para todo $t \leq 2s + 1$.

Demostración. Sea $G = (V, A)$, $V = U_1 \cup U_2$ un digrafo bipartito. Usamos la misma notación que en la demostración del Teorema 2.3.1. Así, como antes, para probar (a) distinguimos dos posibilidades:

(a.1) $\mu \geq \ell$. Si $\mu \geq \ell + 1$, hemos finalizado ya que $d(x, y) \geq d(x, F) + d(F, y) \geq 2\ell + 2$ y, de aquí, $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell + 2) \geq \kappa(2\ell + 1)$. Por otro lado, si $k = \ell$ necesitamos considerar dos subcasos:

(i) $V_\mu \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2$. Entonces existen dos vértices $x \in V_\mu \cap U_1$, $x' \in V_\mu \cap U_2$ tales que $d(x, y) \geq \mu + \mu' \geq 2\ell$ y, similarmente, $d(x', y) \geq 2\ell$. Por tanto, como x y x' pertenecen a diferentes conjuntos de partes, al menos una de las distancias anteriores debe ser superior a $2\ell + 1$. Entonces, $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell + 1)$.

(ii) $V_\mu \cap U_i = \emptyset$ para, por ejemplo, $i = 2$. Entonces, todos los vecinos de salida de $x \in V_\mu$ deben estar en $V_{\mu-1}$. Como $e^+(x) \geq 2\ell \geq t$, podemos considerar $\delta(t)$ de sus vecinos de salida y, como antes, si $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, deberían existir dos $x \rightarrow f_i$ caminos diferentes de longitud ℓ , lo que es una contradicción. Entonces, $\kappa(t) \geq \delta(t)$.

(a.2) $\mu \leq \ell - 1$. Como en el Teorema 2.3.1. ■

Este resultado contiene las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo bipartito s -geodético sea maximalmente t -distancia conectado.

Corolario 2.4.2 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , t -distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

- (a) $\kappa(t) = \delta(t)$ para todo $t \leq 2s$, si $D \leq 2\ell$;
- (b) $\lambda(t) = \delta(t)$ para todo $t \leq 2s + 1$, si $D \leq 2\ell + 1$.

A partir de aquí, se obtienen las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo bipartito s -geodético sea maximalmente distancia conectado.

Corolario 2.4.3 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con diámetro D , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

- (a) $\kappa(t) = \delta(t)$ para todo $1 \leq t \leq D$, si $D \leq 2s$;
- (b) $\lambda(t) = \delta(t)$ para todo $1 \leq t \leq D$, si $D \leq 2s + 1$.

De nuevo en este caso, probaremos que el digrafo línea k -iterado tiene t -distancia conectividades óptimas si el orden de iteración es suficientemente grande. Para ello recordemos que un digrafo G es bipartito si y sólo si su digrafo línea LG lo es. Además de nuevo $L^k G$ es s' -geodético con $s' = \min\{s+k, g-1\}$, donde g denota el girth de G , que en el caso bipartito es siempre par.

Corolario 2.4.4 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ , y t -grado $\delta(t)$. Entonces las t -distancia conectividades de $L^k G$ satisfacen:*

- (a) $\kappa(t; L^k G) = \delta(t; L^k G)$ para todo $t \leq 2s$ si $k \geq D - 2\ell$;
- (b) $\lambda(t; L^k G) = \delta(t; L^k G)$ para todo $t \leq 2s + 1$ si $k \geq D - 2\ell + 1$.

2.5 Cotas inferiores para la distancia conectividad en digrafos

Las ideas de las secciones precedentes pueden utilizarse sin cambios significativos para obtener cotas inferiores sobre la t -distancia conectividad de cualquier

digrafo. Para conseguir este propósito debemos considerar el parámetro ℓ_π definido en el Capítulo 1.

Teorema 2.5.1 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ_π , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) \geq \min\{\delta(t) - \pi, \kappa(2\ell_\pi)\}$, para cualquier $t \leq 2s$;

(b) $\lambda(t) \geq \min\{\delta(t) - \pi, \lambda(2\ell_\pi + 1)\}$, para cualquier $t \leq 2s + 1$.

Demostración. Utilizamos la misma notación que en la demostración del Teorema 2.3.1. Para probar (a) distinguimos dos casos:

(a.1) $\mu \geq \ell_\pi$. Entonces, para cada $x \in V_\mu$, $y \in V_{\mu'}$, $d(x, y) \geq \mu + \mu' \geq 2\ell_\pi$. De aquí que $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell_\pi)$.

(a.2) $\mu \leq \ell_\pi - 1$. Estudiamos dos posibilidades:

(i) $\mu \leq s - 1$. Aquí podemos utilizar un razonamiento similar al del caso (2.1) del Teorema 2.3.1.

(ii) $s \leq \mu$. Elegimos un vértice $x \in V_\mu$ tal que el conjunto F_x de vértices de F a distancia exactamente μ desde x tenga cardinal mínimo. Para cada $f \in F$ a distancia a lo sumo $\mu + 1$ desde x consideramos el (único) $x \rightarrow f$ camino corto. Sea Y el conjunto de vecinos de salida de x que no están en ninguno de estos caminos. Luego $\delta(t) \leq \delta^+(x) \leq |Y| + |F|$. Sea $y \in Y$. El vértice y no puede distar μ hacia un vértice $f \in F - F_x$. En caso contrario $d(x, f) = \mu + 1$ y habría dos $x \rightarrow f$ caminos internamente disjuntos (a saber, el camino conteniendo al vértice y y el $x \rightarrow f$ camino corto considerado antes). Como $|F_x|$ es mínimo, $y \in Y$ debe estar unido a cualquier vértice $f \in F_x$ por un camino de longitud μ . Nótese que y no puede estar a distancia $\mu - 1$ de F_x , ya que de lo contrario habría dos $x \rightarrow f$ caminos cortos de longitud μ para algún $f \in F_x$. Pero para cualquier $f \in F_x$, por la definición de ℓ_π , existen a lo sumo π , $x \rightarrow f$ caminos de longitud $\mu + 1$. Entonces, $|Y| \leq \pi$ y de aquí, $\kappa(t) = |F| \geq \delta(t) - \pi$.

(b) La demostración usa un razonamiento análogo al caso (b) del Teorema 2.3.1. ■

Nótese que para $\pi = 0$ tenemos una prueba ligeramente diferente del Teorema 2.3.1.

Corolario 2.5.2 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ_π , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$ y t -grado $\delta(t) > 1$. Entonces,*

$$(a) \kappa(t) \geq \delta(t) - \pi \text{ para cada } t \leq 2s, \text{ si } D \leq 2\ell_\pi - 1;$$

$$(a) \lambda(t) \geq \delta(t) - \pi \text{ para cada } t \leq 2s + 1, \text{ si } D \leq 2\ell_\pi.$$

Demostración. (a) Como $D \leq 2\ell_\pi - 1$, usando la misma notación que en el Teorema anterior, tenemos $2\mu \leq \mu + \mu' \leq D \leq 2\ell_\pi - 1$. Por lo tanto, $\mu \leq \ell_\pi - 1$ y estamos en el caso (a.2) de la demostración anterior, entonces $\kappa(t) \geq \delta(t) - \pi$, para cada $t \leq 2s$. ■

Corolario 2.5.3 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t) > 1$. Entonces,*

$$(a) \kappa(t) \geq \delta(t) - \pi, \text{ para cualquier } t \leq D, \text{ si } D \leq 2s - 1;$$

$$(b) \lambda(t) \geq \delta(t) - \pi, \text{ para cualquier } t \leq D, \text{ si } D \leq 2s. \quad \blacksquare$$

De la ecuación (1.3) del Capítulo 1 y de la Proposición 1.4.1 concluimos el siguiente corolario del Teorema 2.5.1.

Corolario 2.5.4 *Sea G un digrafo s -geodético con diámetro D , parámetro ℓ_π , t -distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t -grado $\delta(t) > 1$. Entonces, las distancia conectividades del digrafo línea k -iterado $L^k G$ satisfacen:*

$$(a) \kappa(t; L^k G) \geq \delta(t; L^k G) - \pi \text{ para cualquier } t \leq 2s' \text{ si } k \geq D - 2\ell_\pi + 1;$$

$$(b) \lambda(t; L^k G) \geq \delta(t; L^k G) - \pi \text{ para cualquier } t \leq 2s' + 1 \text{ si } k \geq D - 2\ell_\pi,$$

$$\text{donde } s' = \min\{s + k, g - 1\}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Conectividad de digrafos y grafos bipartitos densos

3.1 Introducción

En este capítulo realizamos un estudio de la conectividad de aquellos digrafos y grafos bipartitos que tienen gran número de vértices para grado máximo y diámetro dados. Concretamente, damos cotas inferiores sobre el número de vértices, suficientes para asegurar que el digrafo o grafo alcance conectividades óptimas. Estas cotas suponen una extensión de las conocidas para el caso de digrafos bipartitos, ya que en ellas se tiene en consideración los grados máximo y mínimo, el diámetro y el parámetro ℓ , o en el caso de grafos bipartitos, el girth. Hasta ahora se conocen cotas superiores sobre el diámetro que involucran al parámetro ℓ , o al girth en el caso no dirigido, Fiol y Fàbrega [29], y por otro lado, cotas inferiores sobre el número de vértices que sólo están dadas en términos del grado y del diámetro, Aïder [1].

En este trabajo unimos las ideas subyacentes en los trabajos mencionados anteriormente obteniendo una extensión de éstos, probamos además que las cotas obtenidas son las mejores posibles al menos para digrafos bipartitos de determinado grado y diámetro. La idea básica en la obtención de la primera de las cotas es demostrar que si desconectamos un digrafo bipartito mediante un conjunto de vértices con cardinal no óptimo existen vértices en los

diferentes fragmentos que están suficientemente alejados del conjunto desconectador. La distancia de estos vértices al conjunto desconectador está dada por el parámetro ℓ , o por el girth en el caso no dirigido. Intuitivamente el parámetro ℓ nos dice cuan alejados están los vértices de un fragmento del conjunto desconectador. Por otra parte, para obtener la cota dada en [1] se demuestra, bajo las mismas hipótesis, que el número de vértices debe ser suficientemente pequeño dado el grado y el diámetro, ya que en caso contrario existen en el digrafo o grafo vértices suficientemente alejados del desconectador que permanecen unidos a cualquier vértice del digrafo o grafo. Agrupando estas ideas demostramos que un digrafo o grafo bipartito que no alcance conectividad máxima tiene orden acotado superiormente por una función de los grados máximo y mínimo, el diámetro y el parámetro ℓ o, en el caso no dirigido, el girth.

Estudios análogos a éstos han sido realizados para el caso general de digrafos y grafos. Estos estudios fueron motivados por la necesidad de conocer digrafos con gran número de vértices, diámetro pequeño y/o conectividades óptimas. Los primeros resultados trataban la conectividad y el diámetro independientemente, por ejemplo en Bruijn [19] e Imase y Itoh [40], [41] podemos encontrar métodos de construcción de digrafos con diámetro pequeño o en el caso de grafos en Akers [3] y Memmi y Raillard [45]. Imase, Soneoka y Okada [42] fueron quienes por primera vez realizaron un estudio que clarifica la relación entre el diámetro y la conectividad de los digrafos (Δ, D) , es decir, de aquellos digrafos que tienen gran número de vértices para grado máximo Δ y diámetro D dados. Las condiciones dadas allí prueban que, cuanto más grande es el orden, más altas son las conectividades. Por ejemplo,

$$\kappa < \delta \Rightarrow n \leq \kappa\{p(\Delta, D - 1) + \Delta\}; \quad (3.1)$$

$$\lambda < \delta \Rightarrow n \leq \lambda\{p(\Delta, D - 2) + \Delta + 1\}. \quad (3.2)$$

De estos resultados deducimos las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo G sea maximalmente conectado:

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 1) + \Delta\}; \quad (3.3)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 2) + \Delta + 1\}. \quad (3.4)$$

Por otra parte, Fàbrega y Fiol en [21] formularon los siguientes resultados en términos del parámetro ℓ y que relacionan el diámetro del digrafo con la conectividad del mismo. Ver Teorema 1.5.1 del Capítulo 1.

$$D \leq 2\ell - 1 \Rightarrow \kappa = \delta; \quad (3.5)$$

$$D \leq 2\ell \Rightarrow \lambda = \delta. \quad (3.6)$$

Intuitivamente, podemos interpretarlos en el sentido de que cuanto más pequeño sea el diámetro, más altas son las conectividades, como era de esperar. Estos resultados tienen algunos corolarios interesantes, tanto para el caso de grafos como para el de digrafos. Dos de ellos, concernientes a digrafos, son los siguientes.

(a) (Jolivet [43]). Cada digrafo con diámetro 2 es maximalmente arco conectado.

(b) (Fàbrega, Fiol, Escudero [26]). Sea $L^k(G)$ el digrafo línea k -iterado de un digrafo G con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , y $\ell = \ell(G)$. Entonces,

$$\kappa(L^k G) = \delta \text{ si } k \geq D - 2\ell + 1; \quad (3.7)$$

$$\lambda(L^k G) = \delta \text{ si } k \geq D - 2\ell; \quad (3.8)$$

Este resultado nos dice que los digrafos línea iterados son maximalmente conectados si la iteración es suficientemente grande. En particular los digrafos de Kautz lo son ya que $\ell = D$ y son digrafos línea iterados.

Fiol [24, 25] agrupó las ideas de los anteriores resultados dando condiciones de tipo mixto (sobre el orden n y el parámetro ℓ), para alcanzar conectividades óptimas. En ellas se tiene en cuenta la distancia de los vértices al conjunto desconectador para acotar el orden.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - \ell) + p(\Delta, \ell - 1) - 2\} + \Delta^\ell + 1; \quad (3.9)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - \ell - 1) + p(\Delta, \ell - 1)\} + \Delta^\ell. \quad (3.10)$$

Como un caso particular de los anteriores resultados, tomando $\ell = 1$, se obtienen las siguientes condiciones suficientes,

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 1) - 1\} + \Delta + 1, \quad (3.11)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 2) + 1\} + \Delta, \quad (3.12)$$

que mejoran las dadas en (3.1) y (3.2). Además, si G es d -regular se obtiene que

$$\kappa = d \text{ si } n > d^D + 1; \quad (3.13)$$

$$\lambda = d \text{ si } n > d^{D-1} + 2d - 2. \quad (3.14)$$

El resultado para la vértice conectividad es el mejor posible, al menos para diámetro impar, como demuestran los digrafos de Kautz generalizados o los de Imase y Itho, $II(d, n)$. Estos digrafos son d -regulares si $n \geq d$ y su diámetro es $D = \lceil \log_d n \rceil$ o $D = \lfloor \log_d n \rfloor - 1$. En particular, cuando $n = d^D + d^{D-1}$ el digrafo $II(d, n)$ es el digrafo de Kautz $K(d, D)$. Con respecto a la conectividad de $II(d, n)$, Homobono y Peyrat [39] mostraron que $\kappa = d - 1$ si $d + 1$ no divide a n (en este caso $II(d, n)$ no tiene lazos) o $m.c.d.(d, n) = 1$, y $\kappa = d$ en otro caso (suponiendo $D \geq 5$). Considerando el digrafo $II(d, n)$ con $n = d^D + 1$ y D impar, de los anteriores resultados se deduce que estos digrafos tienen diámetro $\lceil \log_d n \rceil = D$, pero su conectividad es $\kappa = d - 1$ ya que $m.c.d.(d, n) = 1$.

Con respecto a la arco conectividad se conocen algunos ejemplos particulares que muestran también que el resultado anterior es el mejor posible. Por ejemplo, en la Figura 3.1 se muestra un digrafo 3-regular con diámetro 3, el cual tiene orden $n = d^{D-1} + 2d - 2 = 13$ y arco conectividad $\lambda = 2$. (Los vértices con la misma etiqueta están identificados y el digrafo de la derecha es el digrafo de Kautz $K(2, 2)$).

En la Tabla 3.1 reflejamos las diferentes condiciones suficientes que hemos expuesto a lo largo de esta introducción, para alcanzar máxima conectividad. Todas ellas están dadas para el caso de digrafos d -regulares.

Respecto al caso de digrafos bipartitos, existe menor número de trabajos. No obstante, como hemos mencionado al principio de esta introducción, se conocen algunas cotas. Por ejemplo, las cotas sobre el número de vértices involucrando al grado y al diámetro fueron dadas por Aïder en [1] para el caso de digrafos bipartitos d -regulares.

$$\kappa = d \text{ si } n > 2(d^{D-1} - 1); \quad (3.15)$$

	$\kappa = d$	$\lambda = d$
Imase y otros [42] (3.3) y (3.4)	$n > d^D + d^2 - d - 1$	$n > d^{D-1} + d^2 - 2$
Fiol [25], (3.13) y (3.14)	$n > d^{D-\ell+1} + 2d^\ell - 2d + 1$ $n > d^D + 1$	$n > d^{D-\ell} + 2d^\ell - 2$ $n > d^{D-1} + 2d - 2$
Fàbrega y Fiol [21]:	$D \leq 2\ell - 1$	$D \leq 2\ell$
Fiol [25]:	$D \leq \ell + \log_a(n - 2d^\ell) - 1$	$D \leq \ell + \log_a(n - 2d^\ell)$

Tabla 3.1: Condiciones suficientes para que un digrafo d -regular tenga conectividades óptimas

$$\lambda = d \text{ si } n > 2d^{D-2}. \tag{3.16}$$

En [29] se dieron cotas superiores sobre el diámetro para que un digrafo bipartito alcance máxima conectividad. Estas cotas son análogas a las dadas en (3.5) y (3.6).

$$D \leq 2\ell \Rightarrow \kappa = \delta; \tag{3.17}$$

$$D \leq 2\ell + 1 \Rightarrow \lambda = \delta. \tag{3.18}$$

La mejora de la cota es debido a que entre dos vértices de un digrafo bipartito no hay caminos cuyas longitudes difieran en una unidad, así la definición del parámetro ℓ se puede simplificar diciendo que es el mayor entero tal que para cualquier par de vértices $x, y \in V$ a distancia $d(x, y) \leq \ell$, únicamente hay un $x \rightarrow y$ camino corto.

En este capítulo, $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, denotará un digrafo bipartito (simple y finito) siendo U_0, U_1 los conjuntos de partes de vértices y A el conjunto de arcos (dirigidos), los cuales representan elementos diferentes de $U_0 \times U_1$ o $U_1 \times U_0$. Recordemos, para finalizar, que el número máximo de vértices, $M_B(\Delta, D)$, de un digrafo bipartito con grado máximo Δ y diámetro D (cota de Moore) es

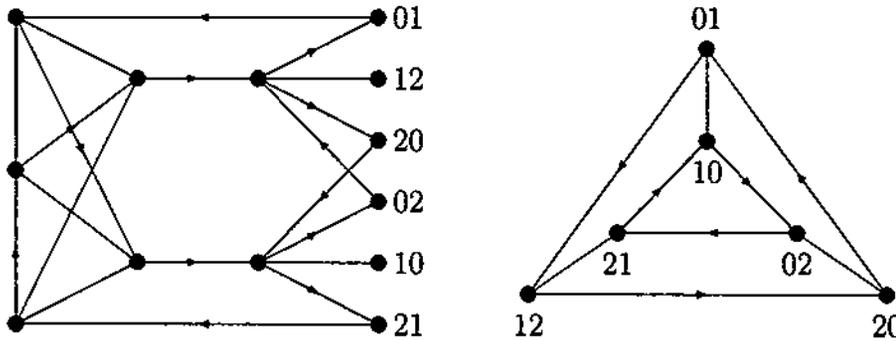


Figura 3.1: Un digrafo 3-regular de 13 vértices con diámetro 3 y arco conectividad 2

$$M_B(\Delta, D) = \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1 \text{ y } D \text{ es impar,} \\ D & \text{si } \Delta = 1 \text{ y } D \text{ es par,} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1}, & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ y } D \text{ impar,} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta^2 - 1}, & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ y } D \text{ par.} \end{cases}$$

En [31] se probó que esta cota sólo puede ser alcanzada cuando $D \leq 4$. Cuando $\Delta = 1$, los digrafos bipartitos de Moore son los ciclos de longitud $2p$ si $D = 2p - 1$, pero cuando D es par la cota no puede ser alcanzada, ya que los únicos digrafos bipartitos conectados de grado uno son los ciclos de longitud par por lo que su diámetro es impar. Para $D = 2$, son los digrafos bipartitos completos de grado Δ . En [31], se presentó además la construcción de una familia que da lugar a digrafos bipartitos densos. Concretamente, dados d, n , enteros positivos con $d \leq n$, el digrafo bipartito $BD(d, n)$, tiene como conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n = \{(\alpha, i); \alpha \in \mathbb{Z}_2, i \in \mathbb{Z}_n\}$, y cada vértice (α, i) es adyacente a los vértices del conjunto

$$\Gamma^+(\alpha, i) = \{(\bar{\alpha}, (-1)^\alpha d(i + \alpha) + t); t = 0, 1, \dots, d - 1\}$$

donde $\bar{0} = 1$ y $\bar{1} = 0$.

Cuando $D = 3, 4$ y $n = d^{D-1} + d^{D-3}$, el digrafo $BD(d, n)$ tiene diámetro D

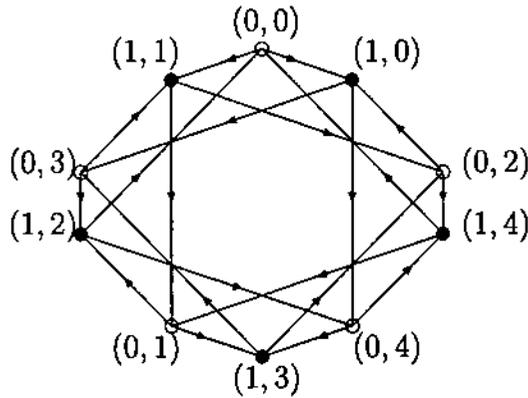


Figura 3.2: Digrafo $BD(2, 5)$

y de aquí que su orden alcance la cota de Moore $|V| = 2n = M_B(d, D)$. En la Figura 3.2 hemos representado el digrafo bipartito $BD(2, 5)$. Para $D \geq 5$ se obtienen digrafos bipartitos densos, ya que el orden de los digrafos $BD(d, d^{D-1} + d^{D-3})$ es mayor que $(d^4 - 1)/d^4$ veces la cota de Moore como se comprueba en [31]. Además estos digrafos son maximalmente conectados, otras propiedades de estos digrafos pueden encontrarse en Padró [46].

Los resultados que exponemos a continuación pueden encontrarse en [7].

3.2 Digrafos bipartitos densos

Esta sección está dedicada a derivar algunas nuevas condiciones de tipo mixto que nos aseguren altas conectividades en digrafos bipartitos. Estas condiciones unifican y mejoran los resultados conocidos de Aïder [1] y también los contenidos en [29]. En primer lugar, vamos a considerar el caso de la vértice conectividad.

Teorema 3.2.1 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y δ respectivamente, y conectividad κ .*

Entonces, si $\kappa < \delta$,

$$(i) \ n \leq \kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2, \quad \text{si } \delta \geq 3;$$

$$(ii) \ n \leq p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\}, \quad \text{si } \delta = 2.$$

Demostración. Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Para probar (i) sea F un conjunto desconector de orden mínimo de G , i.e. $|F| = \kappa$ y $V \setminus F$ está desconectado. Sean $V^-, V^+, V_i, 1 \leq i \leq \mu$, y $V'_j, 1 \leq j \leq \mu'$, los conjuntos definidos en la Sección 1.5. Nótese que $|V_i| \leq \Delta|V_{i-1}|, 1 \leq i \leq \mu$, y $|V'_j| \leq \Delta|V'_{j-1}|, 1 \leq j \leq \mu'$. Como cualquier camino desde V^- a V^+ atraviesa F , la distancia desde un vértice en V_μ a uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu + \mu'$ y por lo tanto $D \geq \mu + \mu'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mu \leq \mu'$ (si no, usamos el digrafo inverso de G).

Bajo las anteriores condiciones, se probó en [21] y también en [29] que si $\mu \leq \ell - 1$ entonces $|F| = \kappa \geq \delta$, contradiciendo nuestras hipótesis. Luego podemos suponer que $\mu \geq \ell$ y, en consecuencia, $\mu \leq \mu' \leq D - \mu \leq D - \ell$.

(a) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$. Si $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, ésto es, si $\mu' \leq D - \ell - 2$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\mu'} |V'_j| - |F| \leq \kappa\{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, \mu') - 1\} \leq \\ &\kappa\{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \ell - 2) - 1\} = \kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \\ &\kappa\left\{\sum_{i=\ell+1}^{\mu} \Delta^i - \Delta^{D-\ell-1} + 1\right\} \leq \kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\}, \end{aligned}$$

puesto que $1 + \frac{\Delta^{\mu+1} - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \Delta^{D-\ell-1} \leq 1 - \Delta^{D-\ell-1} \frac{\Delta-2}{\Delta-1} - \frac{\Delta^{\ell+1}}{\Delta-1} \leq 0$, ya que $D - \ell - 1 > \ell + 1$.

Si $V'_{D-\ell-1} \neq \emptyset$ podemos considerar un vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$. Como todos los caminos desde $x \in V_\mu$ a y atraviesan F , se verifica $d(x, y) \geq d(x, F) + d(F, y) = \mu + D - \ell - 1 \geq \ell + 1 + D - \ell - 1 = D$. Por lo tanto, $\mu = \ell + 1$. Además, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$; en caso contrario, sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y atraviesan F , y de nuevo $d(x', y) = D$. Entonces, existirían dos caminos diferentes desde x a y , uno de longitud D y el otro, $xx' \rightarrow y$, de longitud $D + 1$, lo cual es imposible en un digrafo bipartito. Luego, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$, lo cual implica que $|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta}{\delta}|V_\ell|$. De

un modo similar, se prueba que para cualquier vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-2}$, y por consiguiente $|V'_{D-\ell-1}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V'_{D-\ell-2}|$. De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| - |F| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\ &\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2) - 1\} + \frac{\kappa}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} = \\ &\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \frac{\kappa}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} + \kappa\{1 - \Delta^{D-\ell-1}\} \leq \\ &\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2, \end{aligned}$$

puesto que $\frac{1}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} + 1 - \Delta^{D-\ell-1} = \frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} - (\delta - 1)\frac{\Delta^{D-\ell-1}}{\delta} + 1 \leq \frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} - (\delta - 1)\frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} + 1 = (2 - \delta)\frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} + 1 \leq 0$, ya que $D \geq 2\ell + 2$ y $\delta \geq 3$.

(b) $\mu = \ell$. Entonces, $\mu' \leq D - \ell$, $D \geq 2\ell + 1$. Ahora, para todo $x \in V_{\ell}$, $\Gamma^+(x) \cap V_{\ell} \neq \emptyset$; en caso contrario sean x_1, \dots, x_{δ} , δ vértices adyacentes desde x , y $f_i \in F$ el vértice a mínima distancia de x_i , $1 \leq i \leq \delta$. Entonces, como $|F| < \delta$ habría dos caminos diferentes de longitud ℓ , a saber, $xx_i \rightarrow f_i$ y $xx_j \rightarrow f_j$, donde $i \neq j$, $f_i = f_j$, lo cual contradice la definición del parámetro ℓ . Este hecho implica que $V'_{D-\ell} = \emptyset$ puesto que G es bipartito. Además, el máximo cardinal de $V_{\ell} \cup V'_{D-\ell-1}$ se puede reducir en al menos $\kappa - 2$ unidades. En efecto, dado $x \in V_{\ell}$, sea x_1, \dots, x_{δ} δ de sus vecinos de salida. Algunos de ellos deben estar en V_{ℓ} , lo que significa que existe un $f_i \in F$ tal que $d(x, f_i) = \ell + 1$, y un $f_j \in F$ tal que $d(x, f_j) = \ell$. Por lo tanto, $F_0 = F \cap U_0 \neq \emptyset$ y $F_1 = F \cap U_1 \neq \emptyset$. Sea $F_0 = \{f_1, \dots, f_a\}$, $F_1 = \{f_{a+1}, \dots, f_{\kappa}\}$ y consideremos los dos casos siguientes.

(b.1) Si el diámetro D es impar, sabemos que los vértices de la misma parte están a lo sumo a distancia $D - 1$. De aquí que, los caminos cortos $f_t \rightarrow f_1$, $t = 2, \dots, a$, y $f_t \rightarrow f_{\kappa}$, $t = a + 1, \dots, \kappa - 1$ deben ser de longitud $\leq D - 1$. Estos caminos deben tener algún arco (β_t, α_t) con su vértice inicial β_t en algún V'_{j_t} , $0 \leq j_t \leq D - \ell - 1$, y su vértice terminal en algún V_{i_t} , $0 \leq i_t \leq \ell$. De hecho, debe ser $0 \leq j_t \leq D - \ell - 2$ o $0 \leq i_t \leq \ell - 1$; de lo contrario, si $\beta_t \in V'_{D-\ell-1}$ y $\alpha_t \in V_{\ell}$, tendríamos que $D - 1 \geq d(f_t, f) = d(f_t, \beta_t) + 1 + d(\alpha_t, f) \geq D$, donde $f = f_1$ o bien $f = f_{\kappa}$, lo cual es una contradicción. Vamos a considerar los siguientes casos:

- Si, para algún t , $\beta_t \in V'_{j_t}$, $0 \leq j_t \leq D-\ell-2$, entonces $|V'_{j_t+1}| \leq \kappa\Delta^{j_t+1}-1$, así pues, $|V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa\Delta^{D-\ell-1}-1$.
- Si, para algún t , $\beta_t \in V'_{D-\ell-1}$, entonces $\alpha_t \in V_i$, con $0 \leq i \leq \ell-1$ y, como antes, $|V_\ell| \leq \kappa\Delta^\ell-1$.
- Si, existen t_1, \dots, t_b tales que $\beta_{t_1} = \dots = \beta_{t_b} = \beta_t \in V'_{D-\ell-1}$, entonces $\alpha_t \in V_i$, $0 \leq i \leq \ell-1$, y $|V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa\Delta^{D-\ell-1} - (b-1)$, de aquí que $|V_\ell| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa(\Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}) - b$.

Por lo tanto, de lo anterior concluimos que, para cada β_t , $t = 2, \dots, a, a+1, \dots, \kappa-1$, el máximo cardinal del conjunto $V_\ell \cup V'_{D-\ell-1}$ puede reducirse en al menos uno. Así,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| - |F| + |V_\ell| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\ &\kappa\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2) - 1 + \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}\} - (\kappa-2) = \\ &\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D-\ell-1) - 2\} + 2. \end{aligned}$$

(b.2) Si el diámetro D es par, los vértices de diferentes partes están a lo sumo a distancia $D-1$. Por eso, ahora consideramos los caminos cortos $f_t \rightarrow f_1$, $t = a+1, \dots, \kappa-1$, y $f_t \rightarrow f_\kappa$, $t = 2, \dots, a$. Entonces, razonando como antes, obtenemos el resultado deseado.

(ii) Cuando $\delta = 2$, sea $F = \{f\}$ un conjunto desconector de orden mínimo. Entonces $\mu \geq \ell+1$; de otro modo, si $\mu = \ell$ debe ser $\Gamma^+(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$ para todo $x \in V_\ell$, porque hay un único camino corto desde x a f de longitud ℓ . Pero en este caso sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_\ell$, entonces $d(x', f) = \ell$ y habría un camino desde x a f de longitud ℓ , y otro camino $xx' \rightarrow f$ de longitud $\ell+1$, lo cual no es posible en un digrafo bipartito. Por lo tanto, $\ell+1 \leq \mu \leq \mu' \leq D-\mu \leq D-\ell-1$, $D \geq 2\ell+2$. Además, para todo $x \in V_\mu$, debe ser $\Gamma^+(x) \cap V_\mu = \emptyset$; de otro modo tendríamos un camino desde x a f de longitud μ y otro de longitud $\mu+1$, lo cual es imposible en digrafos bipartitos. Entonces $|V_\mu| \leq \frac{\Delta^\mu}{2}$. Análogamente, para todo $y \in V'_{\mu'}$, $\Gamma^-(y) \cap V'_{\mu'} = \emptyset$, y de aquí que $|V'_{\mu'}| \leq \frac{\Delta^{\mu'}}{2}$. Así pues,

$$n = \sum_{i=0}^{\mu-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{\mu'-1} |V'_j| - |F| + |V_\mu| + |V'_{\mu'}| \leq$$

$$\begin{aligned}
& p(\Delta, \mu - 1) + p(\Delta, D - \mu - 1) - 1 + \frac{\Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}}{2} = \\
& p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{\Delta^\mu - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \frac{\Delta^{D-\ell} - \Delta^{D-\mu}}{\Delta - 1} + \frac{\Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}}{2} \leq \\
& p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debida a que la función $f(\mu) = \Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}$ es decreciente en el intervalo $[\ell + 1, D - \ell - 1]$. ■

En el siguiente corolario damos una condición suficiente sobre el número de vértices para que un digrafo bipartito G tenga máxima conectividad.

Corolario 3.2.2 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y δ respectivamente, y conectividad κ . Entonces, $\kappa = \delta$ si*

- (i) $\delta \geq 3$ y $n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2$;
- (ii) $\delta = 2$ y $n > n(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\}$. ■

Además, si G es d -regular obtenemos la siguiente condición para que G sea maximalmente conectado.

Corolario 3.2.3 *Sea G un digrafo bipartito d -regular con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , y conectividad κ . Entonces,*

- (i) $\kappa = d$ si $d \geq 3$ y $n > d^{D-\ell} + d^{\ell+1} - 2d + 2$;
- (ii) $\kappa = 2$ si $d = 2$ y $n > 3(2^\ell + 2^{D-\ell-2} - 1)$. ■

Nótese que cuando $\ell = 1$, el resultado anterior mejora la condición de Aïder (3.15). Disponemos de algunos ejemplos particulares que muestran que este resultado es el mejor posible. Por ejemplo, la Figura 3.3 muestra un digrafo bipartito 3-regular con diámetro $D = 3$, cuyo orden es $n = d^{D-1} + d^2 - 2d + 2 = 14$ y tiene conectividad $\kappa = 2$. Otros ejemplos de digrafos bipartitos 2-regulares se muestran en la Figura 3.4.

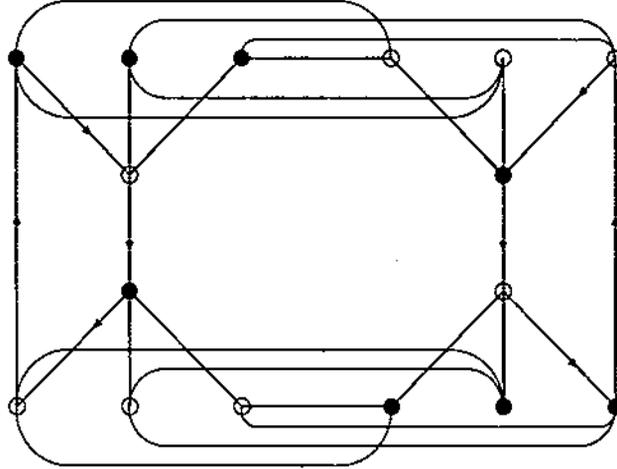


Figura 3.5: Un digrafo bipartito 3-regular de 16 vértices con diámetro $D = 4$ y arco conectividad $\lambda = 2$

$$\lambda = d \text{ si } n > d^{D-\ell-1} + d^{\ell+1} - 2. \quad \blacksquare$$

Cuando $\ell = 1$, el resultado anterior mejora la condición de Aïder (3.16). La Figura 3.5 muestra un digrafo bipartito 3-regular con diámetro $D = 4$, orden $n = d^{D-2} + d^2 - 2 = 16$ y arco conectividad $\lambda = 2$, lo que demuestra que este resultado es el mejor posible.

Sea G un digrafo bipartito d -regular ($d > 1$) de orden n , diámetro D , y $\ell(G) = \ell$. De los resultados anteriores deducimos las siguientes condiciones suficientes para que el digrafo línea k -iterado sea maximalmente conectado.

Corolario 3.2.6 *Sea G un digrafo bipartito d -regular, $d > 1$, con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , vértice y arco conectividad κ y λ respectivamente. Entonces,*

$$(i) \quad \kappa(L^k G) = d \text{ si } k > \log_d \frac{d^{D-\ell} - 2d + 2}{n - d^{\ell+1}};$$

$$(ii) \quad \lambda(L^k G) = d \text{ si } k > \log_d \frac{d^{D-\ell-1} - 2}{n - d^{\ell+1}}. \quad \blacksquare$$

De este corolario deducimos los siguientes resultados que deben ser comparados con (3.17) y (3.18).

$$\kappa(L^k G) = d \text{ si } k \geq D - \ell - \log_d(n - d^{\ell+1});$$

$$\lambda(L^k G) = d \text{ si } k \geq D - \ell - 1 - \log_d(n - d^{\ell+1}).$$

Para cualquier digrafo bipartito G con arco conectividad $\lambda < \delta$ podemos obtener una cota superior sobre el número de vértices usando un razonamiento directo similar al empleado en la demostración del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.7 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y $\delta > 1$ respectivamente, y arco conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda < \delta \Rightarrow n \leq \lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}.$$

Demostración. Sea E un conjunto arco desconectador de orden mínimo de G , i.e. $|E| = \lambda$ y $G - E$ está desconectado. Consideremos los conjuntos de vértices $F', F'', V^-, V^+, V_i, 0 \leq i \leq \nu$, y $V'_j, 0 \leq j \leq \nu'$, definidos en la Sección 1.5. Luego $\nu + \nu' + 1 \leq D$ y podemos suponer $\nu \leq \nu'$. Como en el Teorema 3.2.1, se demuestra (ver [29]) que si $\nu \leq \ell - 1$ entonces $|E| = \lambda \geq \delta$, contradiciendo nuestra hipótesis. Es decir, podemos suponer que $\nu \geq \ell$ y, por lo tanto, $\nu \leq \nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 1$.

(a) $\nu \geq \ell + 1$. Entonces $\nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 2$. Si $V'_{D-\ell-2} = \emptyset$, esto es, si $\nu' \leq D - \ell - 3$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\nu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\nu'} |V'_j| \leq \lambda\{p(\Delta, \nu) + p(\Delta, \nu')\} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \nu) + p(\Delta, D - \ell - 3)\} = \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\} + \lambda\left\{\sum_{i=\ell+1}^{\nu} \Delta^i - \Delta^{D-\ell-2}\right\} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}, \end{aligned}$$

ya que $\frac{\Delta^{\nu+1} - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \Delta^{D-\ell-2} \leq \frac{2-\Delta}{\Delta-1} \Delta^{D-\ell-2} - \frac{\Delta^{\ell+1}}{\Delta-1} \leq 0$.

Si $V'_{D-\ell-2} \neq \emptyset$ podemos considerar un vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$. Como todos los caminos desde $x \in V_\mu$ a y , deben atravesar E , debe ser $d(x, y) \geq d(x, F') + 1 + d(F'', y) = \nu + 1 + D - \ell - 2 \geq D$. Por lo tanto, $\nu = \ell + 1$. Además, para todo

$x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$; en caso contrario, sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y deben atravesar E y también $d(x', y) = D$. Entonces, deberíamos tener dos caminos desde x a y , uno de longitud D y el otro, $xx' \rightarrow y$, de longitud $D + 1$, lo cual es imposible en un digrafo bipartito. Luego, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$, lo cual implica que $|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V_\ell|$. De modo similar, probamos que para todo vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-3}$ y por lo tanto $|V'_{D-\ell-2}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V'_{D-\ell-3}|$. De esta manera obtenemos que,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-3} |V'_j| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-2}| \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 3)\} + \frac{\lambda}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-2}\} = \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\} + \frac{\lambda}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-2}\} - \lambda\Delta^{D-\ell-2} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}, \end{aligned}$$

ya que $\Delta^{\ell+1} - (\delta - 1)\Delta^{D-\ell-2} \leq (2 - \delta)\Delta^{\ell+1} \leq 0$, porque $D \geq 2\ell + 3$.

(b) $\nu = \ell$. Entonces $\nu' \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$. Ahora, para todo $x \in V_\ell$, $\Gamma^+(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$; de otro modo contradeciríamos la definición del parámetro ℓ . Este hecho implica que $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, puesto que si existiese un vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$, tendríamos que, para todo $x \in V_\ell$, $d(x, y) \geq d(x, F') + 1 + d(F'', y) = D$. Considerando $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_\ell$, y puesto que todos los caminos desde x' a y deben atravesar E , obtendríamos que $d(x', y) = D$, lo cual contradice el hecho de que G es bipartito.

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| \leq \lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}. \quad \blacksquare$$

Es interesante observar que, ya que $n \geq \frac{m}{\Delta}$, el teorema anterior también implica los resultados del Corolario 3.2.4 y en consecuencia también los del Corolario 3.2.5. El próximo corolario da una condición suficiente sobre el número de vértices para que cualquier digrafo bipartito tenga máxima arco conectividad.

Corolario 3.2.8 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y $\delta > 1$ respectivamente, y arco conectividad λ . Entonces,*

	$\kappa = d$	$\lambda = d$
Aïder [1]	$n > 2(d^{D-1} - 1)$	$n > 2d^{D-2}$
Capítulo 3:	$n > d^{D-\ell} + d^{\ell+1} - 2d + 2$ y $d \geq 3$ $n > 3(2^\ell + 2^{D-\ell-2} - 1)$ y $d = 2$	$n > d^{D-\ell-1} + d^{\ell+1} - 2$
Fàbrega y Fiol [21]:	$D \leq 2\ell$	$D \leq 2\ell + 1$
Capítulo 3:	$D \leq \ell + \log_d(n - d^{\ell+1})$	$D \leq \ell + 1 + \log_d(n - d^{\ell+1})$

Tabla 3.2: Condiciones suficientes para que un digrafo bipartito d -regular tenga conectividades óptimas

$$\lambda = \delta \quad \text{si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}. \quad \blacksquare$$

Finalizamos esta sección con la Tabla 3.2 en cuyas entradas figuran tanto los resultados conocidos en cuanto a digrafos bipartitos mencionados en la introducción, como los que hemos ido obteniendo en este capítulo. Obsérvese la mejora obtenida en cada uno de los casos.

3.3 Grafos bipartitos densos

Sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito con orden n , grado máximo Δ , grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , girth g , conectividad κ , y rama conectividad λ . Recuerdese que, en este caso, la cota de Moore para el número de vértices es

$$M_B(\Delta, D) = \begin{cases} 2D, & \Delta = 2 \\ 2 \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2}, & \Delta \geq 3. \end{cases}$$

En el caso que nos ocupa, es decir grafos no dirigidos, los estudios llevados

a cabo sobre la conectividad en función de parámetros tales como el orden, el grado mínimo y máximo y el diámetro han sido realizados por diversos autores. Por ejemplo en [20] Esfahanian probó las siguientes condiciones suficientes para obtener óptimas conectividades.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - 1) + 1\}; \quad (3.19)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - 2) + \Delta\}. \quad (3.20)$$

Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat en [53] mejoraron estas condiciones probando las siguientes.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)(\Delta - 1)^{D-1} + 2; \quad (3.21)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\} + \Delta - 1. \quad (3.22)$$

También demostraron que estas condiciones son las mejores posibles, al menos para $\lambda = \kappa = \delta$ y valores pequeños del diámetro. Teniendo en consideración otro parámetro básico del grafo, como es el girth g , los mismos autores probaron en [52] y [53] condiciones suficientes sobre el diámetro que se describen a continuación para alcanzar máxima conectividad y que pueden verse como un corolario de (3.5) y (3.6).

$$\kappa = \delta \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 2, & g \text{ impar}; \\ D \leq g - 3, & g \text{ par}; \end{cases}$$

$$\lambda = \delta \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 1, & g \text{ impar}; \\ D \leq g - 2, & g \text{ par}. \end{cases}$$

Asímismo demostraron que estas condiciones son las mejores posibles para girth 4 y $\delta \geq 5$, y para grafos con girth impar. En el Capítulo 4 veremos que estas condiciones pueden ser ligeramente relajadas y que la cota para girth par y $\delta \leq 4$, puede ser mejorada.

En [24] se agruparon las ideas anteriores relacionando todos los parámetros mencionados para obtener las siguientes condiciones suficientes que implican máxima conectividad.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - \ell) + p(\Delta - 1, \ell - 1)\}; \quad (3.23)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + p(\Delta - 1, \ell)\}, \quad (3.24)$$

donde $\ell = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Nótese que como cualquier grafo simple tiene girth $g \geq 3$, (3.23) y (3.24) implican los resultados de Esfahanian (3.19) y (3.20) respectivamente. En [25] se mejoraron estos resultados para grafos con girth $g \geq 5$, ($\ell \geq 2$). En este caso las condiciones suficientes pueden ser escritas como sigue.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - \ell) + p(\Delta - 1, \ell - 2)\} + (\Delta - 1)^{\ell-1}; \quad (3.25)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + p(\Delta - 1, \ell - 1)\} + (\Delta - 1)^\ell. \quad (3.26)$$

En cuanto a grafos bipartitos d -regulares Aïder [1] probó los siguientes resultados.

$$\kappa = d \text{ si } n > 2d(d - 1)^{D-2}, \text{ cuando } D \geq 3; \quad (3.27)$$

$$\lambda = d \text{ si } n > 2((d - 1)^{D-2} + d^2 - d), \text{ cuando } D \geq 5. \quad (3.28)$$

Como un corolario de (3.17) y (3.18) se obtienen las siguientes condiciones sobre el diámetro para alcanzar conectividades óptimas, ya que en el caso de grafos bipartitos el girth es siempre par.

$$D \leq g - 2 \Rightarrow \kappa = \delta;$$

$$D \leq g - 1 \Rightarrow \lambda = \delta.$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema que proporciona una cota superior sobre el número de vértices de aquellos grafos bipartitos que no poseen máxima conectividad. Como un corolario de este teorema obtenemos condiciones suficientes de tipo mixto para alcanzar conectividades óptimas.

Teorema 3.3.1 *Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un grafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y conectividad κ . Entonces,*

$$\kappa < \delta \Rightarrow n \leq \kappa\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}.$$

Demostración. Sea F, V^-, V^+, V_i y V_j' como en el Teorema 3.2.1. Consideremos también la siguiente notación: sea $F = \{f_1, \dots, f_\kappa\}$, $1 \leq a(f_j) =$

$|\Gamma(f_j) \cap V^-| < \Delta$; $1 \leq a'(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap V^+| < \Delta$, donde $a(f_j) + a'(f_j) \leq \Delta$, ésto es, $a'(f_j) \leq \Delta - a(f_j)$. Para cada $f_j \in F$ se definen los siguientes conjuntos, $V_{i,j} = \{x \in V_i \mid d(x, f_j) = i\}$, $1 \leq j \leq \kappa$, $1 \leq i \leq \mu$. Entonces, tenemos $|V_i| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} |V_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1}$. Análogamente, para cada $1 \leq i \leq \mu'$, $|V'_i| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} a'(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} \leq \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1}$.

Bajo las condiciones anteriores, se prueba en [21] y también en [29] que, si $\mu \leq \ell - 1$, entonces $|F| = \kappa \geq \delta$, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego podemos suponer $\mu \geq \ell$ y, por lo tanto, $\mu \leq \mu' \leq D - \mu \leq D - \ell$.

(a) $\mu \geq \ell + 1$, $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, ésto es, $\mu' \leq D - \ell - 2$. Entonces el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\mu} |V_i| + \sum_{i=1}^{\mu'} |V'_i| + |F| \leq \\ &\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\mu'} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \kappa = \\ &\sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)p(\Delta - 1, \mu - 1) + \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, \mu' - 1) + \kappa \leq \\ &\kappa + \kappa\Delta n(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq \kappa\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}; \end{aligned}$$

puesto que $\mu \leq \mu' \leq D - \ell - 2$, y

$\Delta n(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq (\Delta - 1)^2 n(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq n(\Delta - 1, D - \ell - 1)$, porque $\Delta \geq 3$.

Si $V'_{D-\ell-1} \neq \emptyset$, del mismo modo que para digrafos considerando $y \in V'_{D-\ell-1}$, obtenemos que $d(x, y) = D$ para todo $x \in V_{\mu}$ y así $\mu = \ell + 1$. Es decir, $\Gamma(x) \subset V_{\ell}$, $\Gamma(y) \subset V'_{D-\ell-2}$. Este hecho implica que

$$|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta-1}{\delta} |V_{\ell}|, |V'_{D-\ell-1}| \leq \frac{\Delta-1}{\delta} |V'_{D-\ell-2}|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\ell} |V_i| + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} |V'_i| + |F| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\ &\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \end{aligned}$$

$$\kappa + \frac{1}{\delta} \left\{ \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{D-\ell-2} \right\}.$$

El lado derecho de la desigualdad anterior es máximo cuando $a(f_j) = 1$, debido a que $\ell \leq D - \ell - 2$. En consecuencia,

$$n \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 2)\} + \frac{\kappa}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\},$$

ya que

$$\begin{aligned} & p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \frac{1}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} = \\ & p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + \frac{1}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell - (\delta - 1)(\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} \\ & \leq p(\Delta - 1, D - \ell - 1). \end{aligned}$$

(b) Cuando $\mu = \ell$, igual que en digrafos, tenemos $\Gamma(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$ y entonces $V'_{D-\ell} = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n & \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-1} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \kappa \leq \\ & \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)p(\Delta - 1, \ell - 1) + \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \kappa. \end{aligned}$$

Esta expresión es máxima cuando $a(f_j) = 1$, puesto que ahora $\ell \leq D - \ell - 1$. Entonces,

$$n \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}. \quad \blacksquare$$

Como para grafos bipartitos $2\ell + 2 = g$, el teorema anterior puede ser reescrito en términos del girth como

$$\kappa < \delta \Rightarrow n \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \frac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g}{2})\}.$$

Corolario 3.3.2 *Sea G un grafo bipartito con girth g , diámetro D , orden n , grado máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y conectividad κ . Entonces,*

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1) \{p(\Delta - 1, \frac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g}{2})\}. \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema da una cota superior sobre el número de vértices para

un grafo bipartito G con rama conectividad $\lambda < \delta$, cuya demostración es análoga al Teorema 3.2.7.

Teorema 3.3.3 *Sea G un grafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y rama conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda < \delta \Rightarrow n \leq \lambda \{p(\Delta - 1, \ell) + p(\Delta - 1, D - \ell - 2)\};$$

Este resultado puede ser también reescrito en términos del girth del siguiente modo.

Corolario 3.3.4 *Sea G un grafo bipartito con girth g , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y rama conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1) \{p(\Delta - 1, \frac{g-2}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g+2}{2})\}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Conectividad y diámetro condicional en digrafos y grafos

4.1 Introducción

Las condiciones de Tipo (b) descritas en la Introducción general demuestran que si el diámetro D de un grafo G es suficientemente pequeño en comparación con su girth, entonces es maximalmente conectado, y lo mismo ocurre para digrafos. Precizando más, si el diámetro D de un digrafo G satisface $D \leq 2\ell - 1$ entonces G tiene máxima conectividad ; y si $D \leq 2\ell$, entonces alcanza máxima arco conectividad. En este capítulo estudiamos condiciones similares para que un digrafo alcance conectividades óptimas; estas condiciones están dadas en términos de lo que llamaremos diámetro condicional o \mathcal{P} -diámetro de G . Este parámetro mide cuán alejados pueden estar dos subdigrafos de un digrafo dado satisfaciendo una propiedad \mathcal{P} , por lo tanto el diámetro condicional generaliza el concepto de diámetro estándar. Además en la última sección veremos que estas condiciones pueden ser ligeramente relajadas cuando los digrafos son bipartitos. Los resultados para el caso no dirigido se obtienen como corolarios del caso dirigido. En particular, cuando $g = 3$, obtenemos algunos resultados dados por Plesník and Znám, [49]. Por último obtenemos una cota inferior para las conectividades de un grafo con girth par y grado mínimo suficientemente grande.

El trabajo que desarrollamos en este capítulo extiende los estudios realizados por Plesník y Znán en [49] para grafos y por Fàbrega y Fiol en [21] en el siguiente sentido. Los primeros mostraron que la condición de Tipo (b) dada por Plesník en [47]

$$D \leq 2 \Rightarrow \lambda = \delta, \quad (4.1)$$

podía ser ligeramente debilitada, es decir, algunas distancias podían ser mayores que 2. Concretamente demostraron que *si en un grafo conectado no existen cuatro vértices u_1, u_2, v_1, v_2 con*

$$d(u_1, u_2), d(u_1, v_2), d(v_1, u_2), d(v_1, v_2) \geq 3, \quad (4.2)$$

entonces $\lambda = \delta$. Además demostraron que esta condición es la mejor posible, dando el grafo de la Figura 4.1.

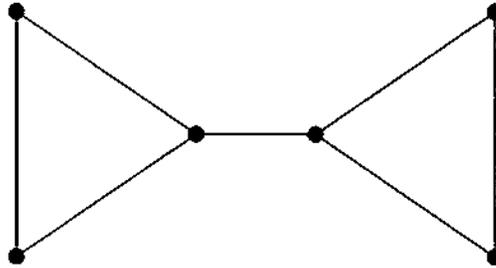


Figura 4.1: Un grafo con $\delta = 2$, $\lambda = 1$ para el cual existen cuatro vértices a distancia 3

Consecuencia inmediata del anterior resultado es que *si un grafo conectado G contiene un vértice v_0 tal que $d(x, y) \leq 2$, para todo $x, y \in V(G) \setminus \{v_0\}$, entonces $\lambda = \delta$.*

La demostración del resultado (4.2) es por contradicción, es decir suponiendo $\lambda < \delta$ se demuestra que a distancia uno del desconectador deben existir, en cada uno de los fragmentos, más de dos vértices, lo que contradice la suposición sobre las distancias. En vista de estos resultados nos planteamos estudiar si la condición

$$D \leq g - 1 \Rightarrow \lambda = \delta, \quad (4.3)$$

se podía debilitar, ya que la condición (4.1) es un caso particular para el girth mínimo de un grafo, $g = 3$. Más aún, nos planteamos si se podía debilitar la condición

$$D \leq 2\ell \Rightarrow \lambda = \delta, \tag{4.4}$$

que corresponde al caso general de digrafos, teniendo en cuenta además que el parámetro ℓ acota las distancias de los vértices de cada uno de los fragmentos al desconector, y por lo tanto el caso distancia uno estudiado por Plesník y Znám corresponde al parámetro $\ell = 1$. La respuesta es afirmativa, tanto para el caso de arcos como para el caso de vértices. Desarrollaremos estos estudios en la segunda sección de este capítulo, Corolarios 4.2.5 y 4.2.8.

Por otra parte el resultado (4.1) implica las condiciones suficientes debidas a Chartrand [17]

$$\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \tag{4.5}$$

y a Lesniák [44]

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1 \tag{4.6}$$

para todo par de vértices x, y no adyacentes.

Goldsmith y Entriger [33] observaron que para alcanzar conectividades óptimas es suficiente que para cada vértice de grado mínimo, la suma de grados de los vértices de su vecindad sea suficientemente grande.

$$\sum_{y \in \Gamma(x)} \delta(y) \geq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{para todo } n \text{ par y} \\ & \text{para } n \text{ impar } n \leq 15, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 - 7 & \text{para } n \text{ impar } n \geq 15 \end{cases} \tag{4.7}$$

Las relaciones que existen entre todas estas condiciones son las siguientes: (4.7) implica (4.5) pero es independiente de (4.6) y (4.1). De hecho, el grafo de la Figura 4.2(a) verifica (4.6) y (4.1), pero no (4.7); por otro lado el grafo de la Figura 4.2(b) verifica (4.7) pero no (4.1) ni (4.6).

Bollobás en [15] demostró un resultado referente a la secuencia de grados de un grafo, este resultado es uno de los más típicos: *si la secuencia de grados $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$ de un grafo G con $n \geq 2$ verifica*

$$\sum_{i=1}^k (d_i + d_{n-i}) \geq kn - 1 \tag{4.8}$$

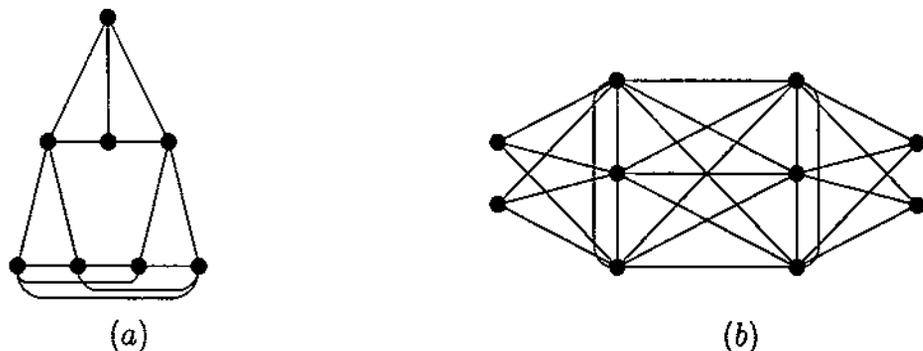


Figura 4.2: Relación entre (4.1), (4.6) y (4.7)

para cada k con $1 \leq k \leq \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \delta\}$, entonces $\lambda = \delta$.

Aunque el resultado (4.8) implica (4.5) si n es par, en general es independiente de (4.5)-(4.7). Esto puede verse con ayuda de los grafos de la Figura 4.3(a) y (b). La Figura 4.3(a) verifica (4.5)-(4.7), pero no (4.8) y la Figura 4.3(b) verifica (4.8) pero no (4.5)-(4.7).

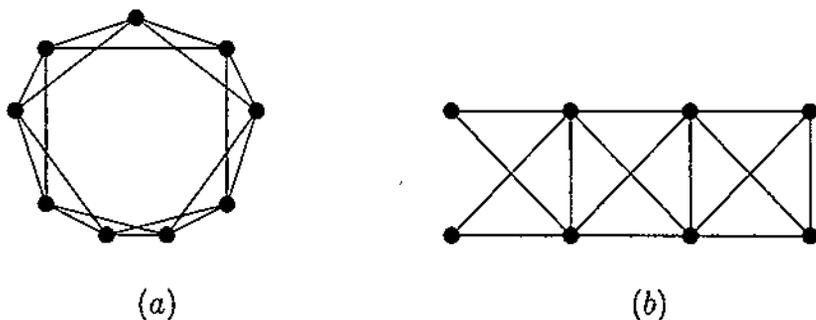


Figura 4.3: Relación entre (4.5)-(4.7) y (4.8)

Definimos a continuación el diámetro condicional, introducido en [10], que nos permitirá obtener nuevas condiciones suficientes para alcanzar conectividades óptimas. Como se definió en el Capítulo 1.1 dados dos subdigrafos de un digrafo G , $G_1, G_2 \subset G$, la *distancia* de G_1 a G_2 se define como

$$d(G_1, G_2) = \min\{d(x, y) ; x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}.$$

La distancia entre dos subconjuntos de vértices $V_1, V_2 \subset V$, denotada por $d(V_1, V_2)$, se define análogamente y, claramente, $d(G_1, G_2) = d(V(G_1), V(G_2))$.

Si uno de los subdigrafos o conjuntos de vértices, por ejemplo G_1 o V_1 , consiste en un vértice aislado x , escribiremos $d(x, G_2)$ o $d(x, V_2)$, respectivamente.

Definición 4.1.1 *Dada una propiedad \mathcal{P} de un par de subdigrafos G_1, G_2 de G llamamos diámetro condicional o \mathcal{P} -diámetro a*

$$D_{\mathcal{P}} = D(G, \mathcal{P}) = \max_{G_1, G_2 \subset G} \{d(G_1, G_2) : G_1, G_2 \text{ verifican } \mathcal{P}\}.$$

Por ejemplo, si \mathcal{P} es la propiedad de que $G_i, i = 1, 2$ sea trivial (es decir, vértices aislados) el diámetro condicional $D_{\mathcal{P}}$ coincide con el diámetro estándar D .

Similares notaciones y definiciones se aplican para el caso no dirigido.

4.2 Conectividad y diámetro condicional

Como hemos explicado en la introducción, algunas de las condiciones suficientes para alcanzar conectividades óptimas requieren que el digrafo tenga un diámetro pequeño en comparación con el girth o el parámetro ℓ . Así mismo se conocen cotas inferiores para las conectividades cuando se considera el parámetro ℓ_{π} . Por ejemplo, en [21] y [26] se probó que si G es un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , parámetro ℓ_{π} y conectividades κ y λ , entonces

$$\kappa \geq \delta - \pi \text{ si } D \leq 2\ell_{\pi} - 1; \tag{4.9}$$

$$\lambda \geq \delta - \pi \text{ si } D \leq 2\ell_{\pi}. \tag{4.10}$$

Este resultado tiene corolarios interesantes tanto para grafos como para digrafos. Ver Jolivet [43], Plesník [47], Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat [52, 53], y las referencias mencionadas anteriormente [21, 26]. Además, se pueden obtener algunas mejoras de estos resultados si se tienen en consideración otros parámetros relevantes asociados al digrafo G . Por ejemplo, en [25, 7] el orden de G se tiene también en consideración. En esta sección mostramos que, sin ninguna otra información más sobre G , las condiciones de (4.9) y (4.10) pueden ser generalizadas usando algunos diámetros condicionales en lugar del estándar D . El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} > 1$, parámetro $\ell_\pi(G) = \ell_\pi$, y conectividades κ y λ . Entonces,*

(a) *si $\kappa < \delta - \pi$ existen dos subdigrafos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \kappa$ y $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \kappa$, tales que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell_\pi$;*

(b) *si $\lambda < \delta - \pi$ existen dos subdigrafos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \lambda$ y $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \lambda$, tales que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell_\pi + 1$.*

Demostración. Sea $G = (V, A)$ un digrafo. Podemos suponer que $G \neq K_n^*$ ya que, por definición, $\kappa(K_n^*) = \delta(K_n^*) = n - 1$. Para probar (a), sea F un conjunto desconectador de orden mínimo de G , es decir $|F| = \kappa$ y $G - F$ está desconectado. Consideramos los conjuntos $V^-, V^+, V_i, 0 \leq i \leq \mu$, y $V'_j, 0 \leq j \leq \mu'$ definidos en la Sección 1.5. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\mu \leq \mu'$ (de otra forma, usamos el digrafo inverso de G).

Bajo las hipótesis anteriores, se demuestra en Teorema 2.5.1 del Capítulo 2 tomando $s = 1$ que si $\mu \leq \ell_\pi - 1$ entonces $\kappa = |F| \geq \delta - \pi$, lo que contradice la hipótesis. De aquí que podamos suponer que $\mu \geq \ell_\pi$. Consideramos el conjunto no vacío $V(\ell_\pi) = \{x \in V^- ; d(x, F) \geq \ell_\pi\}$. Afirmamos que cada vértice x del subdigrafo G_1 inducido por $V(\ell_\pi)$ tiene grado de salida $\delta_{G_1}^+(x) \geq \delta_G^+(x) - \kappa$. El resultado es trivial si $d(x, F) > \ell_\pi$, ya que entonces $\Gamma^+(x) \subset V(G_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que $d(x, F) = \ell_\pi$. Si $\delta_{G_1}^+(x) = |\Gamma^+(x) \cap V(\ell_\pi)| < \delta_G^+(x) - \kappa$, el vértice x tiene al menos $\kappa + 1$ vecinos de salida en $V_{\ell_\pi - 1}$, denotémoslos por $x_1, x_2, \dots, x_{\kappa+1}$. Además, para cada $x_i, 1 \leq i \leq \kappa + 1$, sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde x_i . Como $|F| = \kappa < \delta$, debe verificarse $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, y por lo tanto existirían dos caminos cortos diferentes $x \rightarrow f_i$ de longitud ℓ_π , lo que contradice la definición de este parámetro. Por lo tanto, $\delta_{G_1}^+(x) \geq \delta_G^+(x) - \kappa \geq \delta_G^+ - \kappa$ como habíamos afirmado. Similarmente, como $\mu' \geq \mu \geq \ell_\pi$, el subdigrafo G_2 , inducido por el conjunto de vértices $V'(\ell_\pi) = \{x \in V^+ ; d(F, x) \geq \ell_\pi\}$, satisface $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \kappa$. Finalmente, como cualquier camino desde V^- a V^+ atraviesa F , $d(G_1, G_2) \geq d(V(G_1), F) + d(F, V(G_2)) \geq 2\ell_\pi$.

(b) Sea E un conjunto de arcos desconectador de G de cardinal mínimo, ésto es $|E| = \lambda$ y $G - E$ está desconectado. Consideramos los conjuntos V^- ,

V^+ , F' , F'' , V_i , $0 \leq i \leq \nu$, y V'_j , $0 \leq j \leq \nu'$, supongamos $\nu \leq \nu'$. De forma análoga al caso de los vértices se demuestra que si $\nu \leq \ell_\pi - 1$ entonces $\lambda \geq \delta - \pi$, de donde podemos asumir $\nu \geq \ell_\pi$. Entonces, usando la misma notación que en el caso (a), y razonando similarmente, se demuestra que los digrafos inducidos $G_1 = \langle V(\ell_\pi) \rangle$ y $G_2 = \langle V'(\ell_\pi) \rangle$ satisfacen $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \lambda$, $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \lambda$, y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell_\pi + 1$, como habíamos afirmado. ■

En este punto, para obtener nuevas condiciones suficientes que aseguren conectividades óptimas, es útil considerar algunos diámetros condicionales. Sea en primer lugar, D_ν , $0 \leq \nu \leq \delta$, el \mathcal{P} -diámetro, donde \mathcal{P} es la propiedad de que ambos digrafos G_1, G_2 , sean inducidos y con grados mínimos $\delta^+(G_1), \delta^-(G_2) \geq \nu$. Con esta notación, observemos que $D_0 \equiv D$ y, claramente, forman una sucesión decreciente comenzando en D

$$D \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_\delta. \tag{4.11}$$

Corolario 4.2.2 *Sea G un digrafo con grado mínimo δ , parámetro ℓ_π , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa \geq \delta - \pi$ si $D_{\pi+1} \leq 2\ell_\pi - 1$;
- (b) $\lambda \geq \delta - \pi$ si $D_{\pi+1} \leq 2\ell_\pi$.

Demostración. (a) Supongamos que G tiene $\kappa \leq \delta - \pi - 1$. Entonces, por el Teorema 4.2.1(a), existen dos subdigrafos inducidos G_1, G_2 tales que $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \kappa \geq \delta^+ - \delta + \pi + 1 \geq \pi + 1$, $\delta^-(G_2) \geq \pi + 1$, y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell_\pi$, contradiciendo la hipótesis sobre $D_{\pi+1}$. El caso (b) se demuestra similarmente usando el apartado (b) del Teorema 4.2.1. ■

Notése que, por (4.11), el Corolario 4.2.2 implica los resultados ya conocidos (4.9) y (4.10). Consideramos ahora el caso $\pi = 0$. Debido a que cada subdigrafo no trivial, $\delta^+ \geq 1$ o $\delta^- \geq 1$, contiene un ciclo dirigido, haremos uso del diámetro condicional $D_{\mathcal{C}} \equiv D_{\mathcal{P}}$, donde la condición \mathcal{P} es ahora ser un ciclo dirigido.

Corolario 4.2.3 Sea G un digrafo con grado mínimo δ , parámetro $\ell_0 \equiv \ell$, y conectividades κ y λ . Entonces,

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D_C \leq 2\ell - 1;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D_C \leq 2\ell. \quad \blacksquare$$

Cuando el girth g del digrafo es conocido, el Corolario 4.2.2 conduce al siguiente resultado, el cual muestra que la conectividad o arco conectividad es al menos $\delta - \pi$, incluso si existen algunos vértices con excentricidad mayor o igual que $2\ell_\pi$ ó $2\ell_\pi + 1$, respectivamente. Precizando más, dado un conjunto de vértices $S \subset V$, sea D_S el \mathcal{P} -diámetro, donde \mathcal{P} es la propiedad de que los digrafos G_i , $i = 1, 2$, sean un vértice de $V \setminus S$.

Corolario 4.2.4 Sea G un digrafo con grado mínimo δ , parámetro ℓ_π , girth g y conectividades κ y λ . Sea $S \subset V$ un conjunto de $g + \pi - 1$ vértices. Entonces,

$$(a) \kappa \geq \delta - \pi \text{ si } D_S \leq 2\ell_\pi - 1;$$

$$(b) \lambda \geq \delta - \pi \text{ si } D_S \leq 2\ell_\pi.$$

Demostración. (a) Supongamos que $\kappa \leq \delta - \pi - 1$. Entonces, por el Corolario 4.2.2(a), $D_{\pi+1} \geq 2\ell_\pi$. Por lo tanto, existen dos subdigrafos inducidos G_1, G_2 , con $\delta^+(G_1) \geq \pi + 1$, $\delta^-(G_2) \geq \pi + 1$, y tales que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell_\pi$. De aquí que G_i , $i = 1, 2$, contiene un ciclo de longitud al menos g , ya que G tiene girth g . Además, si $x \in V(G_i)$ es un vértice de este ciclo, entonces, existen al menos π vértices adyacentes desde el vértice x en G_i diferentes de los vértices del ciclo. Por consiguiente, $|G_i| \geq g + \pi$, $i = 1, 2$. Sean x_j e y_j , $1 \leq j \leq g + \pi$ vértices diferentes de G_1 y G_2 , respectivamente. Entonces, $d(x_j, y_j) \geq 2\ell_\pi$ para cualquier j , y por lo tanto al menos un vértice de cada par $\{x_j, y_j\}$ debe pertenecer a S , lo que conduce a la contradicción $|S| \geq g + \pi$. El caso (b) se prueba análogamente usando el Corolario 4.2.2(b). \blacksquare

Cuando $\pi = 0$ obtenemos las siguientes condiciones suficientes para obtener conectividades óptimas.

Corolario 4.2.5 Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, parámetro ℓ , girth g y conectividades κ y λ . Entonces,

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D_S \leq 2\ell - 1 \text{ para algún } S \subset V, |S| = g - 1;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D_S \leq 2\ell \text{ para algún } S \subset V, |S| = g - 1. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que este resultado extiende el dado en [49] como un corolario de (4.2).

Para el caso no dirigido podemos obtener resultados análogos a los anteriores. Para ello recordemos que para un grafo G con girth g , se verifica que $\ell \equiv \ell_0 = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Entonces, obtenemos de las ecuaciones (4.9) y (4.10) que

$$\kappa = \delta \text{ si } D \leq \begin{cases} g - 2, & g \text{ impar} \\ g - 3, & g \text{ par;} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } D \leq \begin{cases} g - 1, & g \text{ impar} \\ g - 2, & g \text{ par.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Estas cotas fueron dadas por Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat [53]. El Teorema 4.2.1 nos proporciona los corolarios correspondientes al caso no dirigido, con los cambios obvios.

Corolario 4.2.6 Sea G un grafo con grado mínimo δ , girth g y conectividades κ y λ . Entonces,

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D_1 \leq \begin{cases} g - 2, & g \text{ impar} \\ g - 3, & g \text{ par;} \end{cases}$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D_1 \leq \begin{cases} g - 1, & g \text{ impar} \\ g - 2, & g \text{ par,} \end{cases}$$

donde el diámetro condicional D_1 mide la máxima distancia entre todos los subgrafos inducidos no triviales, ya que en el digrafo simétrico asociado G^* se satisface $\delta^+(G^*) = \delta^-(G^*) = \delta(G)$.

Este corolario puede darse también en términos del diámetro del grafo línea LG donde cada vértice representa una rama de G , y dos vértices son adyacentes

si y sólo si las correspondientes ramas lo son en el grafo original. Consideremos las ramas $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\} \in E(G)$. Entonces, la distancia entre los correspondientes vértices de LG satisface $d_{LG}(x_1y_1, x_2y_2) = d_G(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) + 1$, y por eso, en términos del diámetro condicional, $D(LG) = D_1 + 1$. Utilizando esta relación podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 4.2.7 *Sea G un grafo con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D(LG) \leq \begin{cases} g - 1, & g \text{ impar} \\ g - 2, & g \text{ par}; \end{cases}$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D(LG) \leq \begin{cases} g, & g \text{ impar} \\ g - 1, & g \text{ par}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Estos resultados generalizan los dados por Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat, (4.12) y (4.13), en términos de $D(G)$ en lugar de $D(LG)$ y en los cuales las cotas superiores son una unidad menor que en el Corolario 4.2.7. En particular, como $g \geq 3$, obtenemos que *cualquier grafo cuyo grafo línea tenga diámetro ≤ 2 (respectivamente ≤ 3) tiene máxima conectividad, (respectivamente rama conectividad).* El resultado referente a la rama conectividad generaliza el dado en [47], estableciendo que cualquier grafo con diámetro 2 es maximalmente rama conectado.

Para obtener el corolario correspondiente al diámetro condicional D_S debemos tener en cuenta que dado un grafo G , el correspondiente digrafo simétrico G^* tiene girth $g(G^*) = 2$ y parámetro $\ell(G^*) = \lfloor \frac{g(G)-1}{2} \rfloor$. Así pues, sólo podremos suponer que existe un vértice con excentricidad mayor o igual que $2\ell - 1$ o 2ℓ .

Corolario 4.2.8 *Sea G un grafo con grado mínimo δ , girth g y conectividades κ y λ . Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D_v \leq \begin{cases} g - 2, & g \text{ impar} \\ g - 3, & g \text{ par} \end{cases} \quad \text{para algún } v \in V;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D_v \leq \begin{cases} g - 1, & g \text{ impar} \\ g - 2, & g \text{ par} \end{cases} \quad \text{para algún } v \in V. \quad \blacksquare$$

Como, para cualquier grafo, $g \geq 3$, el caso anterior (b) nos dice que si existe un vértice v tal que $d(x, y) \leq 2$ para cualquier $x, y \in V \setminus \{v\}$, entonces $\lambda = \delta$. Este resultado fue dado por en [49].

El resultado anterior puede ser mejorado en el caso de girth g par, ésto es, podemos considerar más de un vértice con excentricidad mayor o igual a $g - 2$ o $g - 1$. Además, probamos que las condiciones suficientes dadas en (4.12) y (4.13) pueden ser también mejoradas para grafos con grado mínimo $\delta \leq 4$ y girth par. De hecho Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat [53] demostraron que estas condiciones eran las mejores posibles para girth impar o $\delta \geq 5$.

Teorema 4.2.9 *Sea G un grafo con girth par g , diámetro D y conectividades κ y λ .*

(a.1) *Si $\kappa < 2$ y $\delta = 2$, entonces $D \geq g$;*

(a.2) *si $\kappa < \delta$ y $\delta = 3, 4$, entonces $D \geq g - 1$;*

(a.3) *si $\kappa < \delta$ y $\delta \geq 5$, entonces o bien $D \geq g - 1$, o $D = g - 2$ y existen dos subgrafos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta(G_1), \delta(G_2) \geq \delta - \kappa + 2$, tales que $d(G_1, G_2) = g - 2$.*

(b.1) *Si $\lambda < 2$ y $\delta = 2$, entonces $D \geq g + 1$;*

(b.2) *si $\lambda < \delta$ y $\delta = 3, 4$, entonces $D \geq g$;*

(b.3) *si $\lambda < \delta$ y $\delta \geq 5$, entonces o bien $D \geq g$, o $D = g - 1$ y existen dos subgrafos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta(G_1), \delta(G_2) \geq \delta - \lambda + 2$, tales que $d(G_1, G_2) = g - 1$.*

Demostración. (a) Usando la misma notación que en la demostración del Teorema 4.2.1, tenemos que $\mu \geq \ell = \frac{g-2}{2}$. Si $\mu \geq \ell + 1$ o $\mu' \geq \ell + 1$, entonces $D \geq g - 1$. Por lo tanto podemos suponer que $\mu = \mu' = \ell$. En este caso veremos que se verifican las siguientes condiciones:

(i) Para cada $x \in V_\ell$, $|\Gamma(x) \cap V_\ell| \geq 2$ y para cada $y \in V'_\ell$, $|\Gamma(y) \cap V'_\ell| \geq 2$, lo que implica que $\delta \geq 3$.

(ii) Si existen un vértice $x \in V_\ell$ y un vértice $f \in F$, tales que $d(x, f) = \ell$ y $d(x, F - \{f\}) \geq \ell + 1$, entonces $D \geq g - 1$.

Para demostrar (i) sean $x \in V_\ell$, x_i , $1 \leq i \leq \delta$, δ de sus vértices adyacentes y f_i el vértice de F a mínima distancia desde x_i . Como $|F| < \delta$, existen dos vértices $f_i = f_j = f$, para ciertos $i \neq j$. Entonces se forma un ciclo de longitud al menos $|f \longleftrightarrow x_i x_j \longleftrightarrow f| \geq 2\ell + 2 = g$, lo cual implica que $d(f, x_i) \geq \ell$ y $d(f, x_j) \geq \ell$. Por lo tanto $|\Gamma(x) \cap V_\ell| \geq 2$. El razonamiento sobre $y \in V'_\ell$ es similar. Por lo tanto si $\delta = 2$ debe verificarse $\mu \geq \ell + 1$ y $\mu' \geq \ell + 1$, lo que demuestra el caso (a.1).

Para probar (ii) supongamos que $D = g - 2$ y que existe un vértice $x \in V_\ell$, un vértice, por ejemplo, $f_1 \in F$ tales que $d(x, f_1) = \ell$ y $d(x, F - \{f_1\}) \geq \ell + 1$. Entonces, se verifica que para cada $y \in V'_\ell$, $d(f_1, y) = \ell$. De otra forma, $d(x, y) \geq 2\ell + 1 = g - 1$, ya que todos los caminos desde x a y atraviesan F y al menos una de las dos distancias, $d(x, F)$ o $d(F, y)$, debe ser $\geq \ell + 1$, lo que contradice nuestra suposición sobre el diámetro. Ahora, consideremos $y_1 \in V'_\ell$ y sea $y_2 \in \Gamma(y_1) \cap V'_\ell$. Tenemos que $d(f_1, y_i) = \ell$, $i = 1, 2$, lo que es una contradicción ya que $g = 2\ell + 2$. Por lo tanto $D \geq g - 1$.

Notése que si $\delta = 3, 4$, (i) implica que existe un vértice en V_ℓ satisfaciendo la hipótesis (ii), lo que demuestra el caso (a.2).

Para probar el caso (a.3) consideremos el conjunto no vacío V_ℓ , supongamos $D = g - 2$. Entonces la hipótesis (i) implica que $|\Gamma(x) \cap V_{\ell-1}| \leq \kappa - 1$, ya que $\Gamma(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$. Además, (ii) implica $|\Gamma(x) \cap V_{\ell-1}| \leq \kappa - 2$, de otra forma, $|\Gamma(x) \cap V_{\ell-1}| = \kappa - 1$ por lo que debería existir un vértice $y \in \Gamma(x) \cap V_\ell$, verificando la hipótesis (ii), y de aquí $D \geq g - 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $|\Gamma(x) \cap V_{\ell-1}| \leq \kappa - 2$. De donde, el subgrafo G_1 inducido por V_ℓ tiene grado mínimo $\delta_{G_1}(x) = |\Gamma(x) \cap V_\ell| \geq \delta_G - \kappa + 2$. (El razonamiento sobre $G_2 = \langle V'_\ell \rangle$ es similar).

(b) Se demuestra de forma análoga al caso (a). ■

Como consecuencia de (ii) obtenemos una cota inferior para las conectividades de un grafo con girth par y grado mínimo $\delta \geq 5$.

Corolario 4.2.10 *Sea G un grafo con girth par g , grado mínimo $\delta \geq 5$, diámetro D y conectividades κ y λ respectivamente. Entonces,*

- (a) $\kappa \geq 4$ si $D \leq g - 2$;
 (b) $\lambda \geq 4$ si $D \leq g - 1$. ■

Para grafos con girth par y grado mínimo $\delta \leq 4$ obtenemos la siguiente generalización de las condiciones (4.12) y (4.13).

Corolario 4.2.11 *Sea G un grafo con girth par g , grado mínimo $\delta \leq 4$, diámetro D y conectividades κ y λ respectivamente. Entonces,*

- (a.1) $\kappa = 2$ si $\delta = 2$ y $D \leq g - 1$;
 (a.2) $\kappa = \delta$ si $\delta = 3, 4$ y $D \leq g - 2$;
 (b.1) $\lambda = 2$ si $\delta = 2$ y $D \leq g$.
 (b.2) $\lambda = \delta$ si $\delta = 3, 4$ y $D \leq g - 1$. ■

Cuando el grado mínimo de un grafo con girth par es $\delta \geq 5$, utilizando el Teorema 4.2.9 en lugar del Teorema 4.2.1 y teniendo en consideración algunos diámetros condicionales podemos escribir las siguientes generalizaciones de los corolarios anteriores. Por ejemplo, usando el diámetro condicional D_v , podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 4.2.12 *Sea G un grafo con grado mínimo $\delta \geq 5$, girth par g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $D \leq g - 2$ y $D_3 \leq g - 3$;
 (b) $\lambda = \delta$ si $D \leq g - 1$ y $D_3 \leq g - 2$. ■

Este resultado es independiente del dado en (4.12), ya que considerando dos grafos bipartitos $K_{\delta+1, \delta}$ y $K_{\delta, \delta}$ y añadiendo a todos los vértices de $K_{\delta+1, \delta}$, excepto uno del conjunto de partes de cardinal $\delta+1$, todas las ramas desde estos vértices a los vértices de $K_{\delta, \delta}$ obtenemos un grafo que tiene $D = 2$, $D_3 = 1$ y $g = 4$, ver Figura 4.4. Luego, el grafo así construido verifica la hipótesis

del anterior corolario pero no (4.12). Por otra parte el grafo de la Figura 4.5 nos proporciona un ejemplo particular que muestra que esta cota es la mejor posible, ya que tal grafo tiene grado mínimo 5, girth $g = 4$, conectividad $\kappa = 4$ tal que $D = g - 2 = 2$ y $D_3 = g - 2 = 2$.

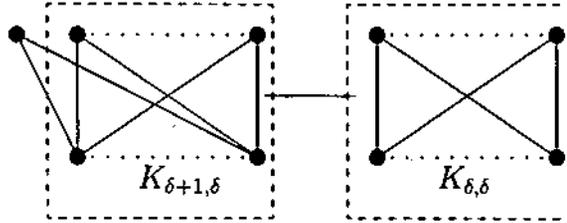


Figura 4.4: Un digrafo satisfaciendo el Corolario 4.2.12

En el siguiente resultado mostraremos que para un grafo con girth par g y grado mínimo δ la conectividad y la rama conectividad son óptimas, incluso si existe un conjunto de hasta $2p(2, \frac{g-2}{2}) - 1$ vértices con excentricidad mayor o igual que $g - 2$ y $g - 1$, respectivamente. Para ello recordemos que el mínimo número de vértices de un grafo con estas características es $2p(\delta - 1, \frac{g-2}{2})$, donde $p(\delta, D) = 1 + \delta + \dots + \delta^D$.

Corolario 4.2.13 *Sea G un grafo con grado mínimo $\delta \geq 5$, girth par g , y conectividades κ y λ . Sea S un subconjunto de vértices tal que $|S| = 2p(2, \frac{g-2}{2}) - 1$. Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D \leq g - 2 \text{ y } D_S \leq g - 3;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D \leq g - 1 \text{ y } D_S \leq g - 2.$$

Demostración. (a) Si $D \leq g - 3$ el resultado es cierto por (4.12). Entonces, podemos suponer $D = g - 2$. Sean G_1, G_2 dos subgrafos inducidos de G con $\delta(G_1) \geq 3$ y $\delta(G_2) \geq 3$, y supongamos que están a distancia $d(G_1, G_2) \geq g - 2$. Los grafos $G_i, i = 1, 2$, tienen girth al menos g y grado mínimo al menos 3, ya que G tiene girth g . Por lo tanto, $|G_i| \geq 2p(2, \frac{g-2}{2}), i = 1, 2$. Sean x_j y $y_j, 1 \leq j \leq 2p(2, \frac{g-2}{2})$ vértices diferentes de G_1 y G_2 respectivamente. Entonces,

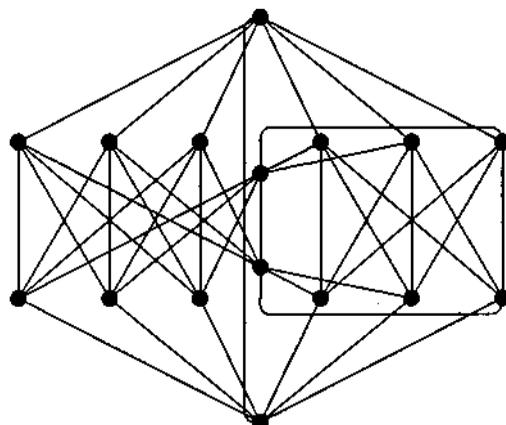


Figura 4.5: Un grafo con $\delta = 5$, $D = 2$, $D_3 = 2$, $\kappa = 4$

$d(x_j, y_j) \geq g - 2$ para cualquier j , y por lo tanto al menos uno de cada par $\{x_j, y_j\}$ debe pertenecer a S , lo que conduce a la contradicción $|S| \geq 2p(2, \frac{g-2}{2})$. Como consecuencia, $D_3 \leq g - 3$ y el Corolario 4.2.12(a) se verifica. El caso (b) se demuestra análogamente usando el Corolario 4.2.12(b). ■

4.3 Conectividad y diámetro condicional en digrafos bipartitos

Parece natural preguntarse si los resultados de la sección precedente pueden ser mejorados con más información sobre la estructura de los digrafos considerados. En particular, los trabajos de Plesník y Znám [49], Volkmann [54, 55] y los dados en [22, 7] sugieren que éste es el caso en el que los digrafos son bipartitos. Así, en esta sección usamos los resultados de la sección previa para obtener nuevos resultados sobre conectividad para tal caso.

Concretamente en el trabajo de Plesník y Znám mencionado en la sección precedente se dió el siguiente teorema, que puede verse como una extensión de (4.2). Si en un grafo bipartito se verifica una de las siguientes condiciones

- (i) $D \leq 4$ y ninguno de los conjuntos de partes contiene cuatro vértices

u_1, u_2, v_1, v_2 tales que $d(u_1, u_2), d(u_1, v_2), d(v_1, u_2), d(v_1, v_2) = 4$.

(ii) Existe una parte U con $d(x, y) \leq 2$ para todo $x, y \in U$, (4.14)

entonces $\lambda = \delta$.

Además demostraron que la hipótesis $D \leq 4$ no se puede suprimir; por otra parte esta condición no es suficiente si el resto de (i) no se verifica (ver Figura 4.6).



Figura 4.6: Ilustración de (4.14)

Como consecuencia inmediata del anterior teorema se obtienen las siguientes condiciones suficientes para que un grafo bipartito alcance rama conectividad óptima.

- Si $D \leq 4$ y en algún conjunto de partes U existe un vértice tal que $d(x, y) \leq 2$ para todo $x, y \in U \setminus \{v_0\}$, entonces $\lambda = \delta$.
- Si $D \leq 3$, entonces $\lambda = \delta$.

La condición (4.14) (ii) implica también la condición suficiente dada por Volkmann [55]

$$\delta \geq \frac{n+1}{4} \Rightarrow \lambda = \delta. \quad (4.15)$$

En esta sección veremos que, usando de nuevo algunos diámetros condicionales, las condiciones suficientes para que un digrafo bipartito alcance óptimas conectividades dadas en [22]

$$\kappa = \delta \text{ si } D \leq 2\ell; \quad (4.16)$$

$$\lambda = \delta \text{ si } D \leq 2\ell + 1, \quad (4.17)$$

pueden ser relajadas sin modificar sus implicaciones. Notése que, en este caso, las cotas superiores sobre el diámetro son una unidad mayor que las cotas dadas en (4.9) y (4.10) para digrafos generales y $\pi = 0$. Esto es debido a que entre dos vértices de un digrafo bipartito, no hay caminos cuyas longitudes difieran en una unidad, por lo tanto sólo podemos considerar el parámetro ℓ_π con $\pi = 0$.

Dado un digrafo bipartito G con conjunto de vértices $V = U_0 \cup U_1$, sea $D_{p,q}$, $p, q \in \{0, 1\}$, el diámetro condicional donde \mathcal{P} es la propiedad de que G_1 y G_2 sean vértices simples que pertenezcan a los conjuntos de partes U_p y U_q , respectivamente, no necesariamente distintos. Así, $D_{p,q}$ mide la máxima distancia entre vértices de los correspondientes conjuntos de partes. Además, $D_{p,q}$ es par (respectivamente impar) si y sólo si $p = q$ (respectivamente $p \neq q$). También es fácil verificar el siguiente lema.

Lema 4.3.1 *Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Entonces,*

(i) $|D_{p,p} - D_{q,q}| \leq 2$, $|D_{p,q} - D_{q,p}| \leq 2$, $|D_{p,q} - D_{p,p}| = 1$, $p, q \in \{0, 1\}$, $p \neq q$.

(ii) $D \leq \min_{p,q \in \{0,1\}} D_{p,q} + 2$.

Demostración. (i) Demostraremos uno de los casos, por ejemplo, $|D_{p,p} - D_{q,q}| \leq 2$. Sean $x, y \in U_p$, $x' \in U_q \cap \Gamma^+(x)$, $y' \in U_q \cap \Gamma^-(y)$, entonces $d(x, y) \leq d(x', y') + 2 \leq D_{q,q} + 2$. De donde para cada par de vértices de U_p existe un camino de longitud a lo sumo $D_{q,q} + 2$, y por lo tanto $D_{p,p} \leq D_{q,q} + 2$. La demostración de que $D_{q,q} \leq D_{p,p} + 2$ es similar. Es decir, se verifica $|D_{p,p} - D_{q,q}| \leq 2$.

(ii) Sean $x, y \in G$, supongamos por ejemplo que $\min_{p,q \in \{0,1\}} D_{p,q} = D_{1,0}$. Entonces, si $x \in U_1$, $y \in U_0$ tenemos que $d(x, y) \leq D_{1,0}$. Si $x \in U_1$, $y \in U_1$, sea $y' \in \Gamma^-(y)$, de donde $d(x, y) \leq d(x, y') + 1 \leq D_{1,0} + 1$. Si $x \in U_0$ y $y \in U_1$, sean $x' \in \Gamma^+(x)$ y $y' \in \Gamma^-(y)$, entonces $d(x, y) \leq d(x', y') + 2 \leq D_{1,0} + 2$. Por último si $x, y \in U_0$, sea $x' \in \Gamma^+(x)$, $d(x, y) \leq d(x', y) + 1 \leq D_{1,0} + 1$. Por lo tanto, para cada par de vértices del digrafo existe un camino de longitud a lo sumo $D_{1,0} + 2$ y de aquí que $D \leq \min_{p,q \in \{0,1\}} D_{p,q} + 2$. Para los otros casos procedemos

de forma análoga. ■

El grafo bipartito de la Figura 4.7 muestra que, en general, (ii) no es una igualdad, ya que en este caso $D = 3$, $D_{1,1} = D_{0,0} = 2$, $D_{1,0} = D_{0,1} = 3$, mientras que $\min_{p,q \in \{0,1\}} D_{p,q} + 2 = 4$.

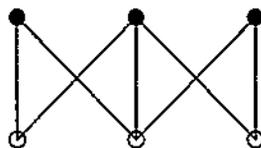


Figura 4.7: Un grafo con $D = 3$, $D_{1,1} = D_{0,0} = 2$, $D_{1,0} = D_{0,1} = 3$

Proposición 4.3.2 Sea G un digrafo bipartito con conjuntos de partes U_p , $p = 0, 1$, grado mínimo δ , parámetro ℓ , y conectividades κ y λ . Entonces,

- (a) $\kappa = \delta$ si $D_{p,q} \leq 2\ell - 1$ para algún $p, q \in \{0, 1\}$, $p \neq q$;
 (b) $\lambda = \delta$ si $D_{p,p} \leq 2\ell$ para algún $p \in \{0, 1\}$.

Demostración. Probaremos sólo (a), el caso (b) se demuestra similarmente. Supongamos que G verifica $\kappa \leq \delta - 1$. Entonces, por el Teorema 4.2.1 (a), existen dos subdigrafos bipartitos inducidos G_1, G_2 tales que $\delta^+(G_1) \geq 1$, $\delta^-(G_2) \geq 1$ y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$. Esto significa que ambos digrafos bipartitos, G_1 y G_2 , contienen al menos un vértice de cada conjunto estable, que denotamos por $x_{i,p} \in V(G_i) \cap U_p$, $i = 1, 2$, $p = 0, 1$. Pero entonces, las distancias $d(x_{1,0}, x_{2,1})$ y $d(x_{1,1}, x_{2,0})$ deberían ser al menos $2\ell + 1$ (ya que son vértices de diferentes conjuntos de partes). De donde $D_{p,q} \geq 2\ell + 1$ para cualquier p, q , $p \neq q$, lo que contradice la hipótesis. ■

Notése que las condiciones sobre el diámetro dadas en (4.16) y (4.17) implican que $D_{p,q} \leq 2\ell - 1$ para cualquier p, q , y $D_{p,p} \leq 2\ell$ para cualquier p respectivamente (pero no inversamente). Por lo tanto, la proposición anterior generaliza los resultados (4.16) y (4.17).

Como en el caso general, la conectividad o arco conectividad de un digrafo bipartito es máxima, incluso si existen algunos vértices con excentricidad mayor o igual que $2\ell + 1$ o $2\ell + 2$ respectivamente. Para probar ésto, consideramos de nuevo el diámetro condicional D_S , ésto es el \mathcal{P} -diámetro, donde \mathcal{P} es la propiedad de ser vértices de $V \setminus S$.

Corolario 4.3.3 *Sea G un digrafo bipartito con conectividades κ y λ , y girth g . Sea $S \subset V$ un conjunto de $g - 1$ vértices. Entonces,*

(a) $\kappa = \delta$ si $D_S \leq 2\ell$;

(b) $\lambda = \delta$ si $D_S \leq 2\ell + 1$.

Demostración. Sean G_1 y G_2 dos subdigrafos inducidos de G con $\delta^+(G_1) \geq 1$, $\delta^-(G_2) \geq 1$ y supongamos que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$. Como G tiene girth g , par, tenemos $|G_j \cap U_p| \geq \frac{g}{2}$, para $j = 1, 2$, $p = 0, 1$. Sean $x_{i,p} \in V(G_1) \cap U_p$, $y_{i,p} \in V(G_2) \cap U_p$, para $1 \leq i \leq \frac{g}{2}$, $p = 0, 1$. Entonces, $d(x_{i,0}, y_{i,1}) \geq 2\ell + 1$ y $d(x_{i,1}, y_{i,0}) \geq 2\ell + 1$ para cualquier i . De la hipótesis deducimos que un vértice de cada par debe pertenecer a S , lo que es una contradicción, ya que $|S| = g - 1$. Por lo tanto $D_1 \leq 2\ell - 1$ y podemos aplicar el Corolario 4.2.2(a). El caso (b) se prueba análogamente usando el Corolario 4.2.2(b). ■

Si en lugar de aplicar simplemente el Teorema 4.2.1, que concierne a digrafos generales, demostramos un teorema análogo aunque específico de digrafos bipartitos, podemos obtener más información de las características especiales de éstos.

Teorema 4.3.4 *Sea G un digrafo bipartito con grado mínimo $\delta > 1$, parámetro ℓ , diámetro D , y conectividades κ y λ .*

(a) *Si $\kappa < \delta$, entonces o bien $D \geq 2\ell + 2$, o $D = 2\ell + 1$ y existen dos subdigrafos bipartitos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \kappa + 1$ y $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \kappa + 1$, tales que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$;*

(b) *Si $\lambda < \delta$, entonces o bien $D \geq 2\ell + 3$, o $D = 2\ell + 2$ y existen dos subdigrafos bipartitos inducidos $G_1, G_2 \subset G$, con $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \lambda + 1$ y $\delta^-(G_2) \geq \delta^- - \lambda + 1$, tales que $d(G_1, G_2) \geq 2\ell + 1$.*

Demostración. (a) Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Usando la misma notación que en el Teorema 4.2.1, tenemos que $\mu \geq \ell$. Supongamos primero que $(\mu' \geq) \mu \geq \ell + 1$, entonces $D \geq 2\mu \geq 2\ell + 2$. Supongamos ahora que $\mu = \ell$ y $\mu' \geq \ell + 1$. Sea $x \in V_\ell$, entonces $\Gamma^+(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$. De otra forma, sean $x_i \in V_{\ell-1}$, $1 \leq i \leq \delta$, δ de sus vecinos de salida. Y sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde x_i , $1 \leq i \leq \delta$. Como $|F| < \delta$, se verifica que $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, entonces deberían existir dos caminos diferentes de longitud ℓ desde x hasta f_i , contradiciendo la definición del parámetro ℓ . Así pues, sea $x_1 \in V_\ell \cap \Gamma^+(x)$. Tenemos que $d(x, y)$ y $d(x_1, y) \geq 2\ell + 1$, para cualquier vértice $y \in V_{\ell+1}$, por lo tanto una de las anteriores distancias debe ser mayor o igual que $2\ell + 2$, ya que x y x_1 pertenecen a diferentes conjuntos de partes. De donde $D \geq 2\ell + 2$. Finalmente supongamos que $\mu = \mu' = \ell$ y $D = 2\ell + 1$. Consideremos el conjunto no vacío V_ℓ . Afirmamos que cada vértice x del subdigrafo G_1 inducido por V_ℓ tiene grado de salida $\delta_{G_1}^+(x) \geq \delta_G^+ - \kappa + 1$. (El razonamiento sobre $G_2 = \langle V_\ell' \rangle$ es similar). Si $\delta_{G_1}^+(x) = |\Gamma^+(x) \cap V_\ell| < \delta_G^+(x) - \kappa + 1$, el vértice x tendría al menos κ vecinos de salida en $V_{\ell-1}$, denotémoslos por $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$. Ahora, para cada x_i , $1 \leq i \leq \kappa$, sea f_i el vértice en F a mínima distancia desde x_i . Razonando como en el primer caso obtenemos que $V_\ell \cap \Gamma^+(x) \neq \emptyset$. Así pues, sea $y \in V_\ell \cap \Gamma^+(x)$ y consideramos el vértice $f \in F$ a mínima distancia desde y . Se debe verificar, $f = f_i$, para algún $1 \leq i \leq \kappa$, entonces deberan existir dos caminos diferentes desde x hasta f , uno de longitud ℓ y el otro de longitud $\ell + 1$, lo que es imposible en un digrafo bipartito. Por lo tanto, $\delta_{G_1}^+(x) \geq \delta_G^+(x) - \kappa + 1 \geq \delta_G^+ - \kappa + 1$ como habíamos afirmado. Finalmente, como cualquier camino desde V^- hasta V^+ atraviesa F , $d(G_1, G_2) \geq d(V(G_1), F) + d(F, V(G_2)) \geq 2\ell$. ■

De la demostración del anterior teorema podemos deducir una cota inferior para la conectividad de un digrafo bipartito.

Corolario 4.3.5 Sea $G = (V, A)$ un digrafo bipartito con grado mínimo $\delta \geq 2$, parámetro ℓ , diámetro D y conectividades κ y λ . Entonces,

$$(a) \kappa \geq 2 \text{ si } D \leq 2\ell + 1;$$

$$(b) \lambda \geq 2 \text{ si } D \leq 2\ell + 2. \quad \blacksquare$$

Cuando $\delta = 2$, el Corolario 4.3.5 proporciona condiciones suficientes para obtener máximas conectividades. Además estas condiciones son las mejores posibles. Para demostrarlo, consideramos dos ciclos de longitud par $2\ell + 2$, y a continuación identificamos un vértice de cada ciclo. El digrafo obtenido tiene diámetro $D = 2\ell + 2$, parámetro ℓ , grado mínimo $\delta = 2$ y conectividad $\kappa = 1$. Para el caso de la arco conectividad es suficiente unir los dos ciclos por una rama entre dos vértices de diferentes conjuntos de partes.

Como un corolario del Teorema 4.3.4 y utilizando el diámetro condicional D_ν , $0 \leq \nu \leq \delta$, definido como en la Sección 4.2, obtenemos un resultado análogo al Corolario 4.2.2, para $\pi = 0$, pero en este caso la condición esta dada sobre el diámetro D_2 , ya que en el teorema los digrafos inducidos que se determinan tienen grados una unidad mayor que en el caso general.

Corolario 4.3.6 *Sea G un digrafo bipartito con grado mínimo δ , parámetro ℓ , y conectividades κ y λ . Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } D \leq 2\ell + 1 \text{ y } D_2 \leq 2\ell - 1;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } D \leq 2\ell + 2 \text{ y } D_2 \leq 2\ell.$$

Demostración. Probaremos sólo el caso (a). Si $D \leq 2\ell$ el resultado se deduce de (4.16), por lo tanto podemos suponer $D = 2\ell + 1$. Razonamos por contradicción, supongamos que $\kappa \leq \delta - 1$. Entonces, por el Teorema 4.3.4(a), existen dos subdigrafos inducidos G_1, G_2 tales que $\delta^+(G_1) \geq \delta^+ - \kappa + 1 \geq 2$, $\delta^-(G_2) \geq 2$, y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$, lo que contradice la hipótesis. ■

Consideramos ahora un subconjunto de vértices, $S(p, q) \subset U_p \cup U_q$ para $p, q \in \{0, 1\}$ y sea $D_{S(p, q)}$ el \mathcal{P} -diámetro, donde \mathcal{P} es la propiedad de que G_1, G_2 sean vértices de $U_p \setminus S(p, q) \cap U_p$ y $U_q \setminus S(p, q) \cap U_q$, respectivamente. Entonces obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3.7 *Sea G un digrafo bipartito con grado mínimo δ , parámetro ℓ , girth g , diámetro D y conectividades κ y λ . Sea $S(p, q)$ un subconjunto de vértices de cardinal $\frac{g}{2}$. Entonces,*

$$\kappa = \delta \text{ si } D \leq 2\ell + 1 \text{ y } D_{S(p, q)} \leq 2\ell - 1 \text{ para algún } p, q, p \neq q.$$

$\lambda = \delta$ si $D \leq 2\ell + 2$ y $D_{S(p,p)} \leq 2\ell$ para algún $p = 0, 1$.

Demostración. Para probar (a) supongamos que la hipótesis es cierta para $p = 0$ y $q = 1$, por ejemplo. Si $D \leq 2\ell$ el resultado se deduce de (4.16), por lo tanto podemos suponer $D = 2\ell + 1$. Sean G_1 y G_2 dos subdigrafos inducidos tales que $\delta^+(G_1) \geq 2$, $\delta^-(G_2) \geq 2$ y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$, entonces $|G_p \cap U_q| \geq \frac{g}{2} + 1$ para $p, q = 0, 1$ (no necesariamente diferentes), ya que G tiene girth g . Sean x_i, y_i , $1 \leq i \leq \frac{g}{2} + 1$, vértices de $G_1 \cap U_0$ y $G_2 \cap U_1$ respectivamente. Entonces $d(x_i, y_i) \geq 2\ell + 1$, ya que x_i, y_i pertenecen a diferentes conjuntos de partes. Por lo tanto, al menos uno de cada par debe pertenecer a $S(0, 1)$, lo que conduce a la contradicción $|S(0, 1)| \geq \frac{g}{2} + 1$. Luego el Corolario 4.3.6(a) se verifica y $\kappa = \delta$.

(b) Se demuestra de forma análoga al caso anterior. ■

Corolario 4.3.8 Sea G un digrafo bipartito con grado mínimo δ , parámetro ℓ , girth g , diámetro D y conectividades κ y λ . Sea S un subconjunto de $g + 1$ vértices. Entonces,

(a) $\kappa = \delta$ si $D \leq 2\ell + 1$ y $D_S \leq 2\ell$.

(b) $\lambda = \delta$ si $D \leq 2\ell + 2$ y $D_S \leq 2\ell + 1$.

Demostración. (a) Si $D \leq 2\ell$ el resultado se sigue de (4.16), por lo tanto podemos suponer $D = 2\ell + 1$. Sean G_1 y G_2 dos subdigrafos inducidos tales que $\delta^+(G_1) \geq 2$, $\delta^-(G_2) \geq 2$ y $d(G_1, G_2) \geq 2\ell$, entonces $|G_j \cap U_q| \geq \frac{g}{2} + 1$ para $j = 1, 2$, $q = 0, 1$, ya que G tiene girth g . Sean $x_{i,p} \in G_1 \cap U_p$, $y_{i,q} \in G_2 \cap U_q$, $1 \leq i \leq \frac{g}{2} + 1$, $p = 0, 1$. Entonces $d(x_{i,p}, y_{i,q}) \geq 2\ell + 1$, ya que $x_{i,p}, y_{i,q}$ pertenecen a diferentes conjuntos de partes. Por lo tanto, al menos uno de cada par debe pertenecer a S , lo que conduce a la contradicción $|S| \geq g + 2$. De donde el Corolario 4.3.6(a) se verifica y $\kappa = \delta$. La demostración de (b) es análoga utilizando el Corolario 4.3.6(b). ■

Como en el caso general de digrafos, los resultados anteriores tienen también sus correspondientes corolarios para grafos bipartitos. Recordemos en primer lugar que en el caso no dirigido bipartito el girth es siempre par y que $g = 2\ell + 2$.

Corolario 4.3.9 *Sea G un grafo con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $D_{p,q} \leq g - 3$ para algún $p, q \in \{0, 1\}$, $p \neq q$;
- (b) $\lambda = \delta$ si $D_{p,p} \leq g - 2$ para algún $p \in \{0, 1\}$. ■

Como $g \geq 4$ para cualquier grafo bipartito G , una consecuencia del caso (b) es que, si para algún conjunto estable U , la distancia entre los vértices de U no es mayor que 2, entonces G es maximalmente rama conectado. Este resultado fue probado por Plesník y Znám [49, Th.3.1(ii)], como ya mencionamos en la introducción, ver (4.14). Como corolario, estos autores demostraron que *cualquier grafo bipartito con diámetro $D \leq 3$ es maximalmente rama conectado* (un resultado que puede ser obtenido también como un corolario de (4.17)). Teniendo en cuenta que el girth del digrafo simétrico asociado es $g(G^*) = 2$, tenemos que:

Corolario 4.3.10 *Sea G un grafo bipartito con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $d(x, y) \leq g - 2$ para todo $x, y \in V \setminus \{v\}$;
- (b) $\lambda = \delta$ si $d(x, y) \leq g - 1$ para todo $x, y \in V \setminus \{v\}$. ■

Los corolarios que se derivan del Teorema 4.3.4 son los siguientes.

Corolario 4.3.11 *Sea G un grafo bipartito con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $D \leq g - 1$ y $D_2 \leq g - 3$;
- (b) $\lambda = \delta$ si $D \leq g$ y $D_2 \leq g - 2$. ■

Corolario 4.3.12 *Sea G un grafo bipartito con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Entonces,*

(a) $\kappa = \delta$ si $D \leq g - 1$ y $d(x, y) \leq g - 3$ para todo $x \in U_p \setminus \{v\}$, $y \in U_q$, $p \neq q$;

(b) $\lambda = \delta$ si $D \leq g$ y $d(x, y) \leq g - 2$ para todo $x, y \in U_p \setminus \{v\}$, para algún $p \in \{0, 1\}$. ■

Notése que sustituyendo en la última condición $g = 4$ obtenemos que si G es un grafo bipartito con $D \leq 4$ y en algún conjunto de partes U existe un vértice tal que $d(x, y) \leq 2$ para todo $x, y \in U \setminus \{v\}$, entonces $\lambda = \delta$. Esta condición generaliza la dada por Plesník y Znám como un corolario de (4.14), ya que aquí se exigía la existencia de uno de tales vértices en cada uno de los conjuntos estables.

Corolario 4.3.13 *Sea G un grafo bipartito con grado mínimo δ , girth g , y conectividades κ y λ . Sea S un subconjunto de tres vértices. Entonces,*

(a) $\kappa = \delta$ si $D \leq g - 1$ y $D_S \leq g - 2$;

(b) $\lambda = \delta$ si $D \leq g$ y $D_S \leq g - 1$. ■

Capítulo 5

Conectividad en digrafos s -geodéticos

5.1 Introducción

En este capítulo nos proponemos obtener cotas superiores sobre el número de vértices para que un (di)grafo o (di)grafo bipartito alcance conectividades óptimas. Las condiciones obtenidas son condiciones contrarias a las de Tipo (a) y (c), ya que en ellas las cotas sobre el número de vértices son cotas inferiores. También estudiamos en la última sección condiciones análogas para que un digrafo sea super- κ o super- λ .

Las nuevas cotas están dadas en términos del parámetro s , es decir el máximo entero para el cual el digrafo es s -geodético, y del grado mínimo. En primer lugar, daremos algunas definiciones que serán de utilidad para el desarrollo del trabajo, entre ellas la de fragmento y profundidad. Se tratará después de contar el número mínimo de vértices de un digrafo s -geodético con conectividades no óptimas, teniendo en cuenta que en este caso la profundidad está acotada inferiormente por s .

Notése que la condición de Chartrand [17],

$$\delta \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow \lambda = \delta \quad (5.1)$$

puede ser escrita como una condición de este tipo, es decir $n \leq 2\delta \Rightarrow \lambda = \delta$.

Como corolarios del resultado principal obtendremos condiciones que hemos denominado de tipo Chartrand para que un digrafo s -geodético tenga conectividades óptimas, y en particular cuando $s = 1$, obtenemos la cota (5.1).

Introducimos a continuación algunas notaciones y definiciones específicas que serán utilizadas en este capítulo.

Para cualquier entero $k \geq 0$, sean

$$\Gamma_k^+(x) = \{v \in V : d(x, v) \leq k\}$$

y

$$\Gamma_k^-(x) = \{v \in V : d(v, x) \leq k\}$$

el conjunto de vértices a distancia a lo sumo k desde un vértice x y hacia un vértice x , respectivamente; y sean $\delta_k^+(x)$ y $\delta_k^-(x)$ sus cardinales. También usaremos la siguiente notación referente al conjunto de arcos cuyos vértices iniciales están a distancia a lo sumo k desde x y al conjunto de arcos cuyos vértices finales están a distancia a lo sumo k hacia x :

$$\Omega_k^+(x) = \{(u, v) \in E : d(x, u) \leq k\},$$

$$\Omega_k^-(x) = \{(u, v) \in E : d(v, x) \leq k\},$$

$$\epsilon_k^+(x) = |\Omega_k^+(x)| \text{ y } \epsilon_k^-(x) = |\Omega_k^-(x)|.$$

Dado un conjunto de vértices C , sean

$$\Gamma^+(C) = \bigcup_{x \in C} \Gamma^+(x) \text{ y } \Gamma^-(C) = \bigcup_{x \in C} \Gamma^-(x).$$

Definimos la *frontera positiva* y la *frontera negativa* de C y las denotamos por ∂^+C y ∂^-C , respectivamente, como $\partial^+C = \Gamma^+(C) \setminus C$ y $\partial^-C = \Gamma^-(C) \setminus C$. Para el caso de arcos consideramos conceptos análogos, definidos como la *arco-frontera positiva* y la *arco-frontera negativa*, $\omega^+C = \{(x, y) \in E : x \in C \text{ e } y \in V \setminus C\}$ y $\omega^-C = \{(x, y) \in E : x \in V \setminus C \text{ e } y \in C\}$. Además denotamos por $F' = \{x \in C : (x, y) \in \omega^+C\}$ y por $F'' = \{y \in V \setminus C : (x, y) \in \omega^+C\}$.

Claramente, si $C \cup \partial^+C \neq V$ [$C \cup \partial^-C \neq V$] entonces ∂^+C [∂^-C] es un conjunto desconector de G . Similarmente, si C es un subconjunto propio no

vacío de V , entonces ω^+C [ω^-C] es un conjunto desconector de arcos de G . Utilizando estos conceptos podemos definir la vértice conectividad y la arco conectividad de un grafo dirigido como

$$\kappa = \min\{|\partial^+C| : C \subset V, C \cup \partial^+C \neq V \text{ o } |C| = 1\};$$

$$\lambda = \min\{|\omega^+C| : C \subset V, C \neq \emptyset, V\}.$$

Observemos que en la definición se introduce la condición $|C| = 1$ para incluir en ella a los digrafos completos, ya que en éstos los únicos conjuntos desconectores son los vértices adyacentes desde o hacia un vértice y por lo tanto siempre se tiene que $C \cup \partial^+C = V$.

Siguiendo las definiciones dadas por Hamidoune [35, 36], un subconjunto C de vértices de un digrafo conectado G con conectividad κ , es un *fragmento positivo* de G si $|\partial^+C| = \kappa$ y $R^-C \neq \emptyset$, donde $R^-C = V \setminus (C \cup \partial^+C)$. Análogamente, C es un *fragmento negativo* si $|\partial^-C| = \kappa$ y $R^+C \neq \emptyset$, donde ahora $R^+C = V \setminus (\partial^-C \cup C)$. Nótese que por definición C es un fragmento positivo si y sólo si R^-C es un fragmento negativo. Si G tiene arco conectividad λ , el conjunto de vértices C se llama un α -*fragmento positivo* de G si $|\omega^+C| = \lambda$ y, análogamente, C es un α -*fragmento negativo* si $|\omega^-C| = \lambda$. En este caso, sea $R^-C = V \setminus C$.

Un vértice x de un α -fragmento positivo [negativo] C se llama *vértice interior* si ninguno de los arcos adyacentes desde [hacia] x pertenece a ω^+C [ω^-C]. Hamidoune [35] demostró que cada α -fragmento positivo de un digrafo G con arco conectividad menor que el grado mínimo de salida $\delta^+(G)$ contiene un vértice interior. Un resultado similar se verifica para α -fragmentos negativos considerando el grado mínimo de entrada. Este resultado implica fácilmente los resultados de Chartrand (5.1), Lesniak [44] y Jolivet [43].

En este capítulo utilizamos nuevos conceptos inspirados en el de vértice interior que nos permitirán dar condiciones de tipo Chartrand para obtener máxima conectividad y que fueron introducidos en [8].

Definición 5.1.1 *Llamamos profundidad de un fragmento positivo C , denotada por $\mu = \mu(C)$, a la máxima de las distancias de los vértices de C a la*

frontera positiva de C ,

$$\mu = \mu(C) = \max_{x \in C} d(x, \partial^+ C).$$

Similarmente, la profundidad de un fragmento negativo C es $\mu = \mu(C) = \max_{x \in C} d(\partial^- C, x)$.

Con respecto a los arcos definimos los siguientes conceptos.

Definición 5.1.2 La profundidad de un α -fragmento positivo C como

$$\nu = \nu(C) = \max_{x \in C} d(x, F').$$

La profundidad de un α -fragmento negativo C se define análogamente como

$$\nu = \nu(C) = \max_{x \in C} d(F'', x).$$

Notemos que con estas definiciones todos los α -fragmentos con profundidad diferente de cero contienen un vértice interior.

El *valle* de un fragmento positivo C es el conjunto de vértices $x \in C$ tales que $d(x, \partial^+ C) = \mu(C)$. El valle de un fragmento negativo o α -fragmento se define de forma similar.

5.2 Digrafos s -geodéticos maximalmente conectados

En esta sección daremos cotas superiores sobre el número de vértices de un digrafo para alcanzar conectividad máxima. En primer lugar notemos que en un digrafo s -geodético el número de vértices a distancia a lo sumo s desde un vértice dado x , $\delta_s^+(x)$, está acotado inferiormente por $p(\delta, s)$, donde

$$p(\delta, s) = 1 + \delta + \dots + \delta^s = \frac{\delta^{s+1} - 1}{\delta - 1}, \quad \delta > 1.$$

En el primer lema que presentamos se dan cotas inferiores para la profundidad de un fragmento o α -fragmento positivo de un digrafo s -geodético cuando éste no tiene conectividad óptima.

Lema 5.2.1 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo δ y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o un α -fragmento positivo de G .*

- (a) *Si $\kappa < \delta$, entonces $\mu(C) \geq s$ y $\mu(R^-C) \geq s$;*
 (b) *si $\lambda < \delta$, entonces $\nu(C) \geq s$ y $\nu(R^-C) \geq s$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mu(C) < s$ y sea x un vértice del valle de C . Sean x_1, \dots, x_δ , δ de sus vecinos de salida. Para cada x_i sea f_i el vértice en ∂^+C a mínima distancia desde x_i . Como C es un fragmento positivo de G , se verifica que $|\partial^+(C)| = \kappa \leq \delta - 1$. De aquí que, $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, de donde deberían existir dos $x \rightarrow f_i$ caminos diferentes de longitud $\leq \mu + 1 \leq s$, contradiciendo la definición de s -geodético. Considerando el digrafo inverso de G , probamos que $\mu(R^-C) \geq s$.

(b) El caso de los arcos se prueba de forma similar teniendo en cuenta que, bajo la suposición $\lambda = |\omega^+C| < \delta$, $\nu(C)$ no puede ser cero ya que claramente, $|C| > 1$ y si denotamos por β el número de arcos que tienen su vértice inicial y final en C se satisface $|C|(|C| - 1) \geq \beta = \sum_{x \in C} \delta^+(x) - |\omega^+C| \geq |C|\delta - \delta$, entonces $|C| \geq \delta$. ■

Como consecuencia del lema anterior podemos obtener el siguiente resultado, el cual puede ser obtenido también de los resultados dados en [21]. Ver Teorema 1.5.1 del Capítulo 1.

Teorema 5.2.2 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo δ , diámetro D , y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $D \leq 2s - 1$;
 (b) $\lambda = \delta$ si $D \leq 2s$.

Demostración. (a) Razonando por contradicción, supongamos que $\kappa < \delta$. Sean C un fragmento positivo de G y x y y dos vértices pertenecientes al valle de C y R^-C , respectivamente. Entonces, por el Lema 5.2.1 (a) y teniendo en cuenta que $\partial^+C = \partial^-R^-C$, $D \geq d(x, y) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, y) = \mu(C) + \mu(R^-C) \geq 2s$, lo que lleva a contradicción.

(b) Este caso se demuestra análogamente usando el Lema 5.2.1(b). ■

En el anterior lema hemos demostrado que si el digrafo no tiene conectividad óptima la profundidad de cada fragmento está acotada inferiormente por s . Este resultado implica que en el digrafo tiene que haber un número mínimo de vértices, ya que los vértices del valle del fragmento están alejados de la frontera del mismo.

Lema 5.2.3 *Sea G un digrafo s -geodético con orden n y tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o α -fragmento positivo de G , y consideramos dos vértices x e y pertenecientes al valle de C y R^-C respectivamente.*

(a) Si $\kappa < \delta$, entonces $n \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - \kappa$;

(b) si $\lambda < \delta$, entonces $m \geq \epsilon_s^+(x) + \epsilon_s^-(y) - \lambda$.

Demostración. Por el Lema 5.2.1(a), la distancia desde x a cualquier vértice $v \in R^-C$ verifica $d(x, v) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, v) \geq s + 1$ y, similarmente, $d(u, y) \geq s + 1$ para cualquier vértice $u \in C$. Por lo tanto, $\Gamma_s^+(x) \subset C \cup \partial^+C$, $\Gamma_s^-(y) \subset \partial^+C \cup R^-C$ y $\Gamma_s^+(x) \cap \Gamma_s^-(y) \subset \partial^+C$. De donde,

$$n = |C| + |\partial^+C| + |R^-C| \geq |\Gamma_s^+(x) \cup \Gamma_s^-(y)| \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - \kappa.$$

La demostración del caso (b) es análoga utilizando el Lema 5.2.1(b) ■

El siguiente teorema extiende el Teorema 5.2.2 ya que si el diámetro $D \leq 2s - 1$ [$D \leq 2s$], entonces no hay vértices a distancia mayor que $2s$ [$2s + 1$].

Teorema 5.2.4 *Sea G un digrafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ .*

(a) Si $\delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) \geq n + \delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces $\kappa = \delta$;

(b) si $\epsilon_s^+(x) + \epsilon_s^-(y) \geq m + \delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$, entonces $\lambda = \delta$.

Demostración. Para probar el caso (a), supongamos $\kappa < \delta$. Entonces, si x e y son vértices como en el lema anterior, tendríamos $\delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) \leq n + \kappa \leq n + \delta - 1$, contradiciendo la hipótesis. El caso (b) se demuestra de forma análoga. ■

Como, en un digrafo s -geodético, $\delta_s^+(x)$ y $\delta_s^-(y)$ están acotados inferiormente por $p(\delta, s)$ y, además, $\epsilon_s^+(x) \geq \delta\delta_s^+(x)$ y $\epsilon_s^-(x) \geq \delta\delta_s^-(x)$, se verifica el siguiente teorema.

Teorema 5.2.5 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo δ , orden n , tamaño m y conectividades κ y λ . Entonces,*

- (a) $\kappa = \delta$ si $n \leq 2p(\delta, s) - \delta$;
- (b) $\lambda = \delta$ si $m \leq 2\delta p(\delta, s) - \delta$.

Demostración. Para probar (a) supongamos $\kappa < \delta$. De acuerdo con el Lema 5.2.3, $n \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - \kappa \geq 2p(\delta, s) - \delta + 1$, contradiciendo la hipótesis. ■

El resultado establecido en el caso (b) puede ser obtenido como una consecuencia del Teorema 5.2.2(b). De hecho, puesto que $m \geq n\delta$, si $m \leq 2\delta p(\delta, s) - \delta$, entonces $n \leq 2p(\delta, s) - 1$. Así, dados cualesquiera $x, y \in V$, tenemos que $n \leq 2p(\delta, s) - 1 \leq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - 1$, lo que implica $\Gamma_s^+(x) \cap \Gamma_s^-(y) \neq \emptyset$. De donde, $d(x, y) \leq 2s$ y el diámetro de G satisface $D \leq 2s$. Por lo tanto $\lambda = \delta$. De hecho, este argumento prueba que $n \leq 2p(\delta, s) - 1$ es también una condición suficiente para alcanzar máxima arco conectividad.

Las siguientes consecuencias del Teorema 5.2.5 y de la condición anterior proporcionan condiciones de tipo Chartrand para asegurar máximas conectividades.

Corolario 5.2.6 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo δ , orden n , tamaño m y conectividades κ y λ . Entonces,*

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } \begin{cases} \delta \geq n - 2, & s = 1, \\ \delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} - 1 \right\rceil, & s \geq 2; \end{cases}$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } \delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right\rceil;$$

$$(c) \lambda = \delta \text{ si } \delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{m}{2}} \right\rceil.$$

Demostración. Si $\delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} - 1 \right\rceil$, tenemos que $n \leq 2(\delta^s + 1) \leq 2p(\delta, s) - \delta$ suponiendo $s \geq 2$, entonces $\kappa = \delta$. Esto prueba el caso (a). El caso (b) se demuestra de la misma forma usando que $n \leq 2p(\delta, s) - 1$. Finalmente, el caso (c) se puede ver como una consecuencia de $m \geq n\delta$ y del caso (b). ■

Como cada digrafo es al menos 1-geodético, tomando $s = 1$ en el caso (b) del anterior resultado, obtenemos que si el grado mínimo satisface $\delta \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, entonces el digrafo es maximalmente arco conectado. Este resultado corresponde a la condición de Chartrand para digrafos, y fue explícitamente probado en [17]. Análogamente, tomando $s = 1$ en el caso (c) obtenemos que si $\delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{m}{2}} \right\rceil$, entonces el digrafo es maximalmente arco conectado.

Para el caso no dirigido todos los resultados anteriores se pueden establecer con los cambios obvios. En primer lugar observemos que los conceptos introducidos de fragmento positivo, negativo o α -fragmento, se definen análogamente, pero en este caso diremos simplemente fragmento y α -fragmento, ya que ahora no existen direcciones en los arcos. En lo que respecta a los conjuntos de vértices a distancia menor o igual que k , $k \geq 0$, desde/hacia un vértice dado, conjunto de ramas o sus cardinales los denotaremos sin signo, $\Gamma_k(x)$, $\delta_k(x)$, $\Omega_k(x)$ y $\epsilon_k(x)$.

El número mínimo de vértices a distancia menor o igual que s de un vértice dado, $\delta_s(x)$, está acotado inferiormente por $P(\delta, s)$, donde

$$P(\delta, s) = 1 + \delta p(\delta - 1, s - 1).$$

Y el número mínimo de ramas a distancia menor o igual a s desde un vértice dado está acotado por

$$\epsilon_s(x) \geq \delta p(\delta - 1, s).$$

La reformulación del Teorema 5.2.2 es el resultado dado por Soneoka,

Nakada, Imase y Peyrat [52, 53], y los análogos del Teorema 5.2.4 y del Teorema 5.2.5 son los siguientes teoremas.

Teorema 5.2.7 *Sea G un grafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ .*

(a) *Si $\delta_s(x) + \delta_s(y) \geq n + \delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces $\kappa = \delta$;*

(b) *si $\epsilon_s(x) + \epsilon_s(y) \geq m + \delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$, entonces $\lambda = \delta$.*

Teorema 5.2.8 *Sea G un grafo s -geodético con grado mínimo δ , orden n , tamaño m y conectividades κ y λ . Entonces,*

(a) $\kappa = \delta$ si $n \leq 2P(\delta, s) - \delta$;

(b) $\lambda = \delta$ si $m \leq 2\delta p(\delta - 1, s) - \delta$.

Podemos obtener una condición suficiente sobre el número de vértices para obtener máxima rama conectividad razonando directamente sobre el número de vértices a distancia menor que s desde un vértice del valle en la demostración del Teorema 5.2.1.

$$n \leq 2P(\delta, s) - 1 \Rightarrow \lambda = \delta.$$

Tomando $s = 1$ en esta condición obtenemos el resultado original de Chartrand [17]. Esto es, si $\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces el grafo es maximalmente rama conectado. De forma similar, eligiendo $s = 1$ en el caso (b) obtenemos que el grafo es maximalmente rama conectado si $\delta(\delta + 1) > m$.

5.3 Conectividad en digrafos bipartitos s -geodéticos

En esta sección realizamos un estudio análogo al de la anterior para el caso de digrafos bipartitos s -geodéticos. En primer lugar damos una cota inferior del número mínimo de vértices que se encuentran a distancia menor o igual que

$s + 1$ de un vértice dado, en un digrafo bipartito s -geodético, denotamos este número por $p_B(\delta, s + 1)$.

Lema 5.3.1 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético, $s \leq D - 1$, con grado mínimo δ . Entonces, para cada $x \in V$,*

$$\delta_{s+1}^+(x) \geq p_B(\delta, s + 1) = \begin{cases} 2 \frac{\delta^{s+2} - \delta}{\delta^2 - 1} & \text{si } s \text{ es impar,} \\ 2 \frac{\delta^{s+2} - 1}{\delta^2 - 1} & \text{si } s \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Supongamos que $|\delta_{s+1}^+(x) \cap U_0| \geq |\delta_{s+1}^+(x) \cap U_1|$. Si $s = 2m$, sea $y \in U_1$ tal que $|\delta_{s+1}^+(y) \cap U_1|$ sea mínimo. El número mínimo de vértices a distancia i desde y es δ^i , $0 \leq i \leq s$, ya que el digrafo es s -geodético y por lo tanto todos estos vértices deben ser diferentes. De aquí que

$$|\delta_{s+1}^+(y) \cap U_1| \geq \sum_{i=0}^m \delta^{2i} = \frac{\delta^{2(m+1)} - 1}{\delta^2 - 1} = \frac{\delta^{s+2} - 1}{\delta^2 - 1}.$$

Si $s = 2m + 1$, sea $y \in U_0$ tal que $|\delta_{s+1}^+(y) \cap U_1|$ sea mínimo. Igual que en el caso anterior el número mínimo de vértices a distancia i desde y es δ^i , $0 \leq i \leq s$. En este caso,

$$|\delta_{s+1}^+(y) \cap U_1| \geq \sum_{i=0}^m \delta^{2i+1} = \delta \frac{\delta^{2(m+1)} - 1}{\delta^2 - 1} = \frac{\delta^{s+2} - \delta}{\delta^2 - 1}.$$

Como $|\delta_{s+1}^+(x) \cap U_0| \geq |\delta_{s+1}^+(x) \cap U_1|$ obtenemos el resultado anunciado.

■

Obsérvese que la cota anterior también es válida para $\delta_{s+1}^-(x)$.

El siguiente lema es el análogo al Lema 5.2.1. En él damos cotas inferiores para la profundidad de un fragmento o α -fragmento de un digrafo bipartito s -geodético con conectividades no óptimas.

Lema 5.3.2 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con grado mínimo δ y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o α -fragmento positivo de G .*

(a) Si $\kappa < \delta$, entonces $\mu(C) \geq s$ y $\mu(R^-C) \geq s$. Además para cada x, y pertenecientes al valle de C y R^-C respectivamente, existen $u, v \in \partial^+C$ tales que $d(x, u) \geq s + 1$, $d(x, \partial^+C \setminus \{u\}) \geq s$, $d(v, y) \geq s + 1$, $d(\partial^+C \setminus \{v\}, y) \geq s$.

(b) Si $\lambda < \delta$, entonces $\nu(C) \geq s$ y $\nu(R^-C) \geq s$. Además para cada x, y pertenecientes al valle de C y R^-C respectivamente, existen $u \in F'$, $v \in F''$ tales que $d(x, u) \geq s + 1$, $d(x, F' \setminus \{u\}) \geq s$, $d(v, y) \geq s + 1$, $d(F'' \setminus \{v\}, y) \geq s$.

Demostración. (a) Para demostrar que $\mu(C) \geq s$ seguimos los mismos pasos que en la demostración del Lema 5.2.1(a). Para demostrar la segunda afirmación supongamos en primer lugar que $\mu(C) \geq s + 1$. En este caso la afirmación es evidente. Por lo tanto sea $\mu(C) = s$. Supongamos que existe un vértice x del valle de C tal que $d(x, f) = s$ para todo $f \in \partial^+C$, es decir $d(z, \partial^+C) = s - 1$ para todo $z \in \Gamma^+(x)$. Sean $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, δ de sus vecinos de salida y sea $f_i \in \partial^+C$ el vértice a mínima distancia desde x_i , $1 \leq i \leq \delta$. Entonces existe un vértice $z \in \Gamma^+(x)$ que es del valle de C . En caso contrario, si $d(x_i, F) = s - 1$, $1 \leq i \leq \delta$, como $|\partial^+C| \leq \delta$ deben existir dos caminos de longitud s desde x a algún vértice de ∂^+C , lo que contradice la definición de ser s -geodético. Supongamos que es x_1 . Entonces $d(x, f_1) = s + 1$, ya que si $d(x, f_1) = s$ tendríamos dos caminos desde x hasta f_1 a saber, el corto $x \rightarrow f_1$ y $xx_1 \rightarrow f_1$, uno de longitud s y otro de longitud $s + 1$, lo que es imposible en un digrafo bipartito. El razonamiento sobre el fragmento negativo R^-C es análogo.

(b) Se demuestra análogamente mediante el Lema 5.2.1(b). ■

Como consecuencia de este lema podemos obtener una condición suficiente sobre el diámetro para que un digrafo bipartito s -geodético alcance conectividades óptimas. Esta condición puede ser obtenida de los resultados dados en [22] teniendo en cuenta que el mayor entero para el cual un digrafo es s -geodético está acotado superiormente por el valor del parámetro ℓ .

Teorema 5.3.3 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con grado mínimo δ y conectividades κ y λ . Entonces,*

(a) $\kappa = \delta$ si $D \leq 2s$;

(b) $\lambda = \delta$ si $D \leq 2s + 1$.

Demostración. (a) Razonando por contradicción supongamos que $\kappa < \delta$, y sea C un fragmento positivo de G . Sean x e y vértices del valle de C y R^-C , respectivamente. Además por el Lema 5.3.2 sabemos que existe un vértice $z \in \Gamma^+(x)$ que es del valle de C , $d(x, y) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, y) \geq 2s$ y $d(z, y) \geq 2s$, por lo tanto una de las dos distancias debe ser mayor que $2s + 1$. Lo que contradice la suposición sobre el diámetro.

(b) Este caso se demuestra análogamente usando el Lema 5.3.2(b). ■

Cuando el digrafo bipartito no tiene conectividad óptima los lemas anteriores indican que los vértices del valle están alejados del desconector además de proporcionarnos una cota de este alejamiento. Así pues nos proponemos evaluar cual es el mínimo número de vértices que deben existir en el digrafo.

Lema 5.3.4 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético con orden n y tamaño m , grado mínimo y máximo δ y Δ , respectivamente y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o α -fragmento positivo de G , y consideramos dos vértices x e y pertenecientes al valle de C y R^-C respectivamente.*

(a.1) Si $\kappa < \delta$ y $s \geq 2$, entonces $n \geq \delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) - \kappa(\Delta + 1)$;

(a.2) si $\kappa < \delta$ y $s = 1$, entonces $n \geq 3\delta + 1$.

(b.1) Si $\lambda < \delta$ y $s \geq 2$, entonces $m \geq \epsilon_{s+1}^+(x) + \epsilon_{s+1}^-(y) - \lambda(\Delta + 1)$;

(b.2) si $\lambda < \delta$ y $s = 1$, entonces $m \geq 4\delta^2$ y $n \geq 4\delta$.

Demostración. (a.1) Por el Lema 5.3.2 (a), $\mu(C)$ y $\mu(R^-C) \geq s$. Si $\mu(C)$ y $\mu(R^-C) \geq s + 1$, entonces $\Gamma_{s+1}^+(x) \subset C \cup \partial^+C$, $\Gamma_{s+1}^-(y) \subset \partial^+C \cup R^-C$ y $\Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y) \subset \partial^+C$, ya que en este caso la distancia desde x a cualquier vértice $v \in R^-C$ verifica, $d(x, v) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, v) \geq s + 2$ y, similarmente, $d(u, y) \geq s + 2$ para cualquier vértice $u \in C$. De donde,

$$n = |C| + |\partial^+C| + |R^-C| \geq |\Gamma_{s+1}^+(x) \cup \Gamma_{s+1}^-(y)| \geq \delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) - \kappa.$$

Si, por ejemplo, $\mu(C) = s$ y $\mu(R^-C) \geq s + 1$. Entonces $\Gamma_{s+1}^+(x) \subset C \cup \partial^+C \cup \Gamma^+(\partial^+C)$, $\Gamma_{s+1}^-(y) \subset \partial^+C \cup R^-C$, ya que en este caso la distancia desde x a

cualquier vértice $v \in R^-C \setminus \Gamma^+(\partial^+C)$ verifica $d(x, v) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, v) \geq s + 2$ y, $d(u, y) \geq s + 2$ para cualquier vértice $u \in C$. Además, si x e y pertenecen al mismo conjunto de partes,

$$\Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y) \subset T' \cup \Gamma^+(T),$$

donde $T = \{f \in \partial^+C : d(x, f) = s\}$ y $T' = \{f \in \partial^+C : d(x, f) \geq s + 1\}$. Vamos a demostrar esta última afirmación. Para ello sea $z \in \Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y)$, entonces $d(x, z) = s + 1$ y $d(z, y) = s + 1$. En caso contrario, si $d(x, z) \leq s$, se cumpliría $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2s + 1$, pero como x e y están en el mismo conjunto de partes, debe ser $d(x, y) \leq 2s$, lo que contradice el hecho de que x e y están en el valle de C y R^-C , respectivamente. Luego, si $z \in \partial^+C$ tenemos que $d(x, z) = s + 1$, y por lo tanto los únicos vértices de ∂^+C que pueden estar en la intersección son los que hemos denotado como T' . Calculamos ahora una cota superior para $T' \cup \Gamma^+(T)$. Sea $t' = |T'|$, entonces $1 \leq t' \leq \kappa - 1$, ya que por el Lema 5.3.2 existe un vértice $f \in \partial^+C$ que verifica $d(x, f) \geq s + 1$ y $d(x, \partial^+C) = s$, y $|T| = \kappa - t'$. Así pues,

$$|T' \cup \Gamma^+(T)| \leq t' + (\kappa - t')\Delta = t'(1 - \Delta) + \kappa\Delta \leq \Delta(\kappa - 1) + 1.$$

Probamos a continuación que si x e y pertenecen a diferentes conjuntos de partes, entonces

$$\Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y) \subset T \cup \Gamma^+(T).$$

Para ello sea $z \in \Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y)$, entonces o bien $d(x, z) = s$ y $d(z, y) = s + 1$, de donde $z \in T$, o bien $d(x, z) = s + 1$ y $d(z, y) = s$, en cuyo caso $z \in \Gamma^+(T)$. En caso contrario, si $d(x, z) \leq s - 1$, tendríamos que $d(x, y) \leq 2s$, lo que contradice que x e y están en el valle de C y R^-C respectivamente. Si $d(x, z) = s$ tendríamos que $z \in \partial^+C$ y por lo tanto $d(z, y) = s + 1$. Si $d(x, z) = s + 1$ y $d(z, y) = s + 1$ llegamos a contradicción ya que x e y están en diferentes conjuntos de partes. Calculamos ahora una cota superior para $T \cup \Gamma^+(T)$. Sea $t = |T|$, entonces $1 \leq t \leq \kappa - 1$, ya que por el Lema 5.3.2 existe un vértice $f \in \partial^+C$ que verifica $d(x, f) \geq s + 1$ y $d(x, \partial^+C) = s$. Así pues,

$$|T \cup \Gamma^+(T)| \leq t + t\Delta = t(\Delta + 1) \leq (\kappa - 1)(\Delta + 1).$$

Observemos que este razonamiento es válido para $\delta \geq 3$, pero para $\delta = 2$ siempre se verifica $\mu(C)$ y $\mu(R^-C) \geq s + 1$.

Supongamos ahora que $\mu(C) = \mu(R^-C) = s$ y $s \geq 2$. Entonces, $\Gamma_{s+1}^+(x) \subset C \cup \partial^+C \cup \Gamma^+(\partial^+C)$ y $\Gamma_{s+1}^-(y) \subset \partial^+C \cup R^-C \cup \Gamma^-(\partial^+C)$, ya que en este caso la distancia desde x a cualquier vértice $v \in R^-C \setminus \Gamma^+(\partial^+C)$ verifica $d(x, v) \geq d(x, \partial^+C) + d(\partial^+C, v) \geq s + 2$ y, $d(u, y) \geq s + 2$ para cualquier vértice $u \in C \setminus \Gamma^-(\partial^+C)$. Además, si x e y pertenecen a diferentes conjuntos de partes

$$\Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y) \subset T \cup T' \cup \Gamma^+(T) \cup \Gamma^-(T').$$

Para verificar esta afirmación sea $z \in \Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y)$. Entonces, $d(x, z) \geq s$, en caso contrario, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2s$, es decir $d(x, y) \leq 2s - 1$, ya que x e y están en diferentes conjuntos de partes, lo que contradice el que x e y sean del valle de C y R^-C , respectivamente. Si $d(x, z) = s$ o bien $z \in T$ y $d(z, y) = s + 1$, o bien $z \in \Gamma^-(T')$ y $d(z, y) = s + 1$. Si $d(x, z) = s + 1$, o bien $z \in T'$, y $d(z, y) = s$ o bien $z \in \Gamma^+(T)$, y $d(z, y) = s$. Así pues,

$$|T \cup T' \cup \Gamma^-(T') \cup \Gamma^+(T)| \leq (\kappa - t') + t' + t'\Delta + (\kappa - t')\Delta = \kappa(\Delta + 1).$$

Si x e y están en el mismo conjunto de partes y $z \in \Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y)$, tenemos que si $z \in T$, entonces $d(z, y) = s$. Además, como el camino corto desde x hasta cada vértice de T es único, y lo mismo ocurre para los caminos cortos desde cada vértice de T a y , sólo un vértice de la salida y otro de la entrada de cada vértice de T pueden estar en la intersección. Si $z \in T'$, entonces $d(z, y) = s + 1$, por lo tanto ningún vértice de $\Gamma^+(T')$ ni de $\Gamma^-(T')$ puede estar en la intersección. De donde

$$|\Gamma_{s+1}^+(x) \cap \Gamma_{s+1}^-(y)| \leq t' + (\kappa - t') + 2t' = 3\kappa - 2.$$

De todas las cotas obtenidas para el cardinal de la intersección obtenemos que

$$n = |C| + |\partial^+C| + |R^-C| \geq |\Gamma_{s+1}^+(x) \cup \Gamma_{s+1}^-(y)| \geq \delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) - \kappa(\Delta + 1).$$

(a.2) En este caso $s = 1$. Supongamos en primer lugar $\mu(C) = \mu(R^-C) = 1$. Sean $x \in \Gamma^-(\partial^+C)$, $t = |\partial^+C \cap \Gamma^+(x)|$, $1 \leq t \leq \kappa - 1$, entonces $\delta - t$ vértices deben pertenecer a C . Además cada uno de estos vértices no puede

ser adyacente a los de $\partial^+C \cap \Gamma^+(x)$, ya que el digrafo es bipartito, por lo tanto en C tienen que existir al menos $\delta - \kappa + t - 1$ vértices diferentes de los anteriores. De donde $|C| \geq 1 + \delta - t + \delta - \kappa + t - 1 = 2\delta - \kappa$. Análogamente, considerando un vértice $y \in \Gamma^+(\partial^+C)$ tenemos que $|R^-C| \geq 2\delta - \kappa$. Así pues,

$$n \geq |C| + |\partial^+C| + |R^-C| \geq 4\delta - \kappa \geq 3\delta + 1.$$

Si $\mu(C) = 1$ y $\mu(R^-C) \geq 2$, entonces razonando como antes $|C| \geq 2\delta - \kappa$. Sea y en el valle de R^-C , entonces $d(\partial^+C, y) \geq 2$, de donde $\Gamma^-(y) \subset R^-C$. Además estos vértices no pueden tener todas sus entradas en ∂^+C , ya que el digrafo es bipartito. De aquí tenemos que,

$$n \geq 2\delta - \kappa + \kappa + 2 + \delta = 3\delta + 2.$$

Si $\mu(C)$ y $\mu(R^-C) \geq 2$, razonando como en el caso $s \geq 2$ tenemos que

$$n \geq |C| + |\partial^+C| + |R^-C| \geq |\Gamma_2^+(x) \cup \Gamma_2^-(y)| \geq 2\delta + 2\delta - \kappa \geq 3\delta + 1.$$

La demostración del caso (b) es análoga utilizando el Lema 5.3.2(b). ■

Como consecuencia del lema anterior podemos deducir el siguiente teorema que nos proporciona condiciones suficientes para que un digrafo bipartito s -geodético, con $s \geq 2$, tenga conectividades óptimas.

Teorema 5.3.5 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$ con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ .*

(a) *Si $\delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) \geq n + (\delta - 1)(\Delta + 1) + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$, entonces $\kappa = \delta$;*

(b) *si $\epsilon_{s+1}^+(x) + \epsilon_{s+1}^-(y) \geq m + (\delta - 1)(\Delta + 1) + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 2$, entonces $\lambda = \delta$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\kappa < \delta$, y sean x e y como en el lema anterior, tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$. Estos vértices existen por el Lema 5.3.2. Entonces, $\delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) \leq n + \kappa(\Delta + 1) \leq n + (\delta - 1)(\Delta + 1)$, contradiciendo la hipótesis.

(b) Se demuestra análogamente utilizando el lema anterior caso (b) y el Lema 5.3.2(b). ■

Notése que de nuevo este resultado extiende el Teorema 5.3.3, ya que si el diámetro $D \leq 2s$ [$D \leq 2s + 1$] no hay vértices a distancia mayor que $2s + 1$ [$2s + 2$].

Para digrafos bipartitos s -geodéticos con $s = 1$ obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.3.6 *Sea G un digrafo bipartito 1-geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ .*

- (a) *Si $n \leq 3\delta$, entonces $\kappa = \delta$;*
- (b) *si $m \leq 4\delta^2 - 1$, entonces $\lambda = \delta$;*
- (c) *si $n \leq 4\delta - 1$, entonces $\lambda = \delta$. ■*

Obsérvese que la condición (c) del lema anterior es la condición dada por Volkmann en [55],

$$\delta \geq \frac{n+1}{4} \Rightarrow \lambda = \delta.$$

Del caso (a) obtenemos una nueva condición de este tipo para alcanzar vértice conectividad óptima,

$$\delta \geq \frac{n}{3} \Rightarrow \kappa = \delta.$$

Considerando ahora digrafos bipartitos s -geodéticos con $s \geq 2$ y teniendo en cuenta que por el Lema 5.3.1 $\delta_{s+1}^+(x)$ y $\delta_{s+1}^-(y)$ están acotados por $p_B(\delta, s+1)$, y, además, $\epsilon_{s+1}^+(x) \geq \delta\delta_{s+1}^+(x)$ y $\epsilon_{s+1}^-(y) \geq \delta\delta_{s+1}^-(y)$, obtenemos cotas superiores del orden y el tamaño de un digrafo bipartito s -geodético que aseguran máxima conectividad y arco conectividad, respectivamente.

Teorema 5.3.7 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo y máximo δ y Δ , respectivamente y conectividades κ y λ .*

- (a) $\kappa = \delta$ si $n \leq 2p_B(\delta, s+1) - (\delta - 1)(\Delta + 1) - 1$;

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } m \leq 2\delta p_B(\delta, s+1) - (\delta-1)(\Delta+1) - 1.$$

Demostración. Para probar (a) supongamos que $\kappa < \delta$. De acuerdo con el Lema 5.3.4 $n \geq \delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) - \kappa(\Delta+1) \geq 2p_B(\delta, s+1) - (\delta-1)(\Delta+1)$, contradiciendo la hipótesis. ■

Los resultados anteriores se pueden establecer, al igual que para el caso general, para grafos bipartitos. Utilizaremos la misma notación que en el caso no dirigido general. En primer lugar debemos tener en cuenta que ahora, el número mínimo de vértices a distancia i , $1 \leq i \leq s$, de un vértice dado es $\delta(\delta-1)^{i-1}$, de donde

$$P_B(\delta, s+1) = 2 + 2\delta p_B(\delta-1, s),$$

y $\epsilon_{s+1}(x) \geq 2\delta p_B(\delta-1, s)$. Los siguientes teoremas son los análogos a los Teoremas 5.3.5 y 5.3.9, y nos proporcionan condiciones suficientes para que un grafo bipartito s -geodético con $s \geq 2$ alcance conectividades óptimas. Cuando $s = 1$, los resultados son iguales a los del caso no dirigido, salvo la cota para el tamaño m que se divide entre 2, ya que cada dígono se convierte en una rama.

Teorema 5.3.8 Sea G un grafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$ con orden n , tamaño m , grado mínimo y máximo δ y Δ , respectivamente y conectividades κ y λ .

(a) Si $\delta_{s+1}(x) + \delta_{s+1}(y) \geq n + (\delta-1)\Delta + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s+1$, entonces $\kappa = \delta$;

(b) si $\epsilon_{s+1}(x) + \epsilon_{s+1}(y) \geq m + (\delta-1)\Delta + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s+2$, entonces $\lambda = \delta$. ■

Teorema 5.3.9 Sea G un grafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y conectividades κ y λ .

$$(a) \kappa = \delta \text{ si } n \leq 2P_B(\delta, s+1) - (\delta-1)\Delta - 1;$$

$$(b) \lambda = \delta \text{ si } m \leq 4\delta p_B(\delta-1, s) - (\delta-1)\Delta - 1. \quad \blacksquare$$

5.4 Superconectividad en digrafos s -geodéticos

La superconectividad es una medida de conectividad más fuerte que la estándar cuyo estudio ha merecido una atención particular en los últimos años, ya que en ella se tiene en cuenta la estructura de los conjuntos desconectores. Notése que si $G \neq K_n^*$ es un digrafo maximalmente conectado cualquier conjunto de vértices adyacentes a o desde un vértice x de grado mínimo es un conjunto desconector de orden mínimo. Similarmente si G es maximalmente arco conectado, cualquier conjunto de arcos adyacentes a o desde un vértice de grado mínimo es un conjunto de arcos desconector de orden mínimo. En este contexto, llamaremos conjunto trivial a tales conjuntos. Siguiendo las definiciones dadas en [21], un digrafo $G \neq K_n^*$ se llama super- κ si en cada fragmento positivo [negativo] C , existe un vértice x tal que $\partial^+ C$ es o bien $\Gamma^+(x)$ o $\Gamma^-(x)$ [$\partial^- C$ es o bien $\Gamma^+(x)$ o $\Gamma^-(x)$]. Esto significa que cada conjunto de corte de orden mínimo es trivial. Similarmente, un digrafo maximalmente arco conectado es super- λ si en cada α -fragmento positivo [negativo] C , existe un vértice x tal que $\omega^+ C$ es o bien $\Omega_0^+(x)$ o $\Omega_0^-(x)$ [$\omega^- C$ es o bien $\Omega_0^+(x)$ o $\Omega_0^-(x)$]; esto es, cada conjunto de arcos desconector de orden mínimo es trivial. El estudio de digrafos super- λ tiene una particular importancia en el diseño de redes fiables, esto es debido a que en los digrafos super- λ el número de conjuntos arco desconectores se minimiza, ver Soneoka [51].

En esta sección damos cotas superiores sobre el número de vértices para que un (di)grafo s -geodético sea super- κ y super- λ . Hasta ahora se han estudiado diferentes condiciones análogas a las condiciones de Tipo (a), (b) o (c) para obtener estas implicaciones.

En M. Fiol [27] encontramos cotas superiores sobre el orden que aseguran que el digrafo es super-arco conectado. Estas cotas están dadas en función de los grados de los vértices del digrafo. En esta sección generalizamos éstas teniendo en consideración el parámetro s . En el artículo mencionado anteriormente se dan también condiciones sobre el diámetro para que un digrafo sea super- λ . En el resultado principal se demuestra que, en la mayoría de los casos,

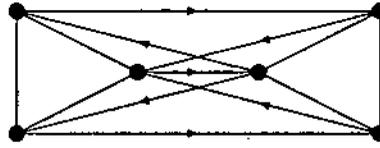


Figura 5.1: Un digrafo $2K_3^*$

un digrafo con diámetro 2 es super- λ . Las excepciones son digrafos denotados por $2K_\delta^*$ que describimos a continuación.

$2K_\delta^*$ es cualquier digrafo obtenido uniendo dos copias disjuntas de K_δ^* , con conjuntos de vértices V_1 y V_2 , por medio de algunos arcos de tal forma que el grado mínimo de $2K_\delta^*$ sea δ , y $\delta^+(u) = \delta^-(v) = \delta$ para cualesquiera $u \in V_1$ y $v \in V_2$. Notése que, en un digrafo construido de esta forma, cada vértice $u \in V_1 [v \in V_2]$ es adyacente hacia [desde] exactamente un vértice de $V_2 [V_1]$, y equivalentemente, hay un emparejamiento completo desde V_1 a V_2 . Notése también que el digrafo inverso de $2K_\delta^*$, obtenido invirtiendo las direcciones de los arcos, es de nuevo un $2K_\delta^*$. Por ejemplo, en la Figura 5.1 se muestra un digrafo $2K_3^*$, donde cada arco no dirigido representa un dígono.

Las condiciones dadas en [27] son las siguientes: un digrafo G es super- λ si se verifica una de las siguientes condiciones,

(i) $D = 2$, y G no contiene un digrafo simétrico K_δ^* con todos sus vértices de grado de salida δ o todos sus vértices de grado de entrada δ ;

(ii) $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq n$ para todo par de vértices u, v tales que $d(u, v) \geq 2$, y G es diferente de $2K_{n/2}^*$;

(iii) $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq n + 1$ para todo par de vértices u, v tales que $d(u, v) \geq 2$.

La siguiente condición es una simple consecuencia de (iii)

$$\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \Rightarrow G \text{ es super-}\lambda. \tag{5.2}$$

Obsérvese que la cota es sólo una unidad mayor que la dada por Chartrand para alcanzar máxima arco conectividad.

Otro corolario del resultado anterior, en este caso de (i), es que si G es un digrafo con orden n , grado mínimo δ , grado máximo Δ y diámetro $D = 2$

tal que $n > 2\delta + \Delta$, entonces G es super- λ . Estos resultados fueron probados también por T. Soneoka [51] como corolarios de condiciones suficientes de Tipo (a). Allí se probó que para valores dados del diámetro D y del grado máximo Δ si el orden n es suficientemente grande el digrafo es super- λ .

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta, D - 2) + 1\} + \Delta^{D-1}. \quad (5.3)$$

Obsérvese que para $D = 2$ obtenemos el corolario mencionado de la condición (i) descrita antes.

Podemos encontrar condiciones de Tipo (b) en [21, 26], donde se dieron cotas superiores sobre el diámetro en función del parámetro ℓ , para que un digrafo con grado mínimo $\delta \geq 3$ sea super- κ o super- λ .

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } D \leq 2\ell - 2; \quad (5.4)$$

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } D \leq 2\ell - 1. \quad (5.5)$$

Las condiciones suficientes de tipo mixto para obtener digrafos superconectados, es decir aquellas que involucran a los parámetros D , δ , Δ , ℓ y el orden n , pueden encontrarse en [24] y [28]. Las principales cotas que allí se demuestran son las siguientes.

G es super- κ si $\ell \geq 2$, $\delta \geq 3$ y

$$n > \delta\{p(\Delta, D - \ell) + p(\Delta, \ell - 1) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1} + 1; \quad (5.6)$$

G es super- λ si

$$n > \delta\{p(\Delta, D - \ell - 1) + p(\Delta, \ell - 1)\} + \Delta^{D-\ell}. \quad (5.7)$$

Tomando $\ell = 1$ en el último resultado obtenemos la condición suficiente dada por Soneoka (5.3).

Siguiendo las mismas directrices que en la sección anterior podemos encontrar cotas superiores sobre el número de vértices de un digrafo s -geodético para que sea superconectado. El siguiente resultado es el análogo para la superconectividad al Lema 5.2.1, y fue probado en [26] considerando el parámetro ℓ . Como $s \leq \ell$ el resultado también es cierto para digrafos s -geodéticos.

Lema 5.4.1 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo $\delta \geq 3$ y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o α -fragmento positivo de G .*

(a) *Si, $s \geq 2$, $\kappa = \delta$ y ∂^+C es no trivial, entonces $\mu(C) \geq s - 1$ y para cualquier $u \in \partial^+C$ existe un vértice x en el valle de C tal que $d(x, u) \geq s - 1$ y $d(x, \partial^+C \setminus \{u\}) \geq s$;*

(b) *si $\lambda = \delta$ y ω^+C es no trivial, entonces $\nu(C) \geq s - 1$ y para cualquier $u \in F'$ existe un vértice x en el valle de C tal que $d(x, u) \geq s - 1$ y $d(x, F' \setminus \{u\}) \geq s$.*

Demostración. Supongamos que $\kappa = \delta$, ∂^+C es no trivial y $\mu(C) \leq s - 2$. Sea V_i , $1 \leq i \leq \mu(C)$, una partición de los vértices de C de acuerdo con sus distancias a ∂^+C , es decir $V_i = \{x \in C : d(x, \partial^+C) = i\}$, $1 \leq i \leq \mu(C)$. Sea x un vértice del valle de C . Sean x_1, \dots, x_δ , δ de sus vecinos de salida, y $f_i \in \partial^+C$ el vértice a mínima distancia desde x_i , $1 \leq i \leq \delta$. Notemos que estos vértices son todos diferentes, en caso contrario si $f_i = f_j$, $i \neq j$, existirían dos caminos desde x hasta f_i de longitud menor $\mu(C) + 1 \leq s - 1$, lo que contradice la definición de s -geodético. Sean y_1, \dots, y_δ , δ vecinos de un vértice de $\Gamma^+(x)$, por ejemplo x_1 . Sea $g_i \in \partial^+C$ el vértice a mínima distancia desde y_i , $1 \leq i \leq \delta$. De nuevo estos vértices son diferentes. En caso contrario llegaríamos a contradicción desde x_1 . Como $|\partial^+C| = \delta$, debe existir algún $f_i = g_j$; y en tal caso existirían dos caminos desde x hasta f_i , el corto $xx_i \rightarrow f_i$, y el camino $xx_1y_j \rightarrow f_i$, de longitud $\leq \mu(C) + 1 \leq s - 1$ y $\leq \mu(C) + 2 \leq s$, respectivamente. Lo que contradice de nuevo la definición de s -geodético. Así pues, $\mu(C) \geq s - 1$.

Para demostrar la segunda afirmación supongamos primero que $\mu(C) \geq s$, entonces ésta es evidente. Por lo tanto sea $\mu(C) = s - 1$. Supongamos que para todo x del valle de C se verifica que $\Gamma^+(x) \subset V_{s-2}$. Sea x un vértice del valle. Sean x_1, \dots, x_δ , δ de sus vecinos de salida, y $f_i \in \partial^+C$ el vértice a mínima distancia desde x_i , $1 \leq i \leq \delta$. Razonando como en el caso anterior deducimos que estos vértices son diferentes. Sean y_i , $1 \leq i \leq \delta$, δ vecinos de salida de x_1 , y $g_i \in \partial^+C$ el vértice a mínima distancia desde y_i , $1 \leq i \leq \delta$. Si $y_i \in V_{s-2}$, como $g_i = f_j$ para algún j , tendríamos dos caminos diferentes desde x hasta g_i , de longitud $s - 1$ y s , contradiciendo la definición de ser s -geodético. Si dos vértices cualesquiera de los y_i , por ejemplo $y_1, y_2 \in V_{s-3}$, llegamos de

nuevo a contradicción. Por lo tanto como $\delta \geq 3$, debe ser, $y_1, y_2 \in V_{s-1}$. Por la suposición que hemos hecho $\Gamma^+(y_i) \subset V_{s-2}$, $i = 1, 2$. Considerando ahora los vecinos de salida de y_1 e y_2 y los vértices de ∂^+C que se encuentran a mínima distancia desde ellos, encontramos dos caminos diferentes desde x_1 a un vértice de ∂^+C de longitud $\leq s$, contradiciendo de nuevo la definición de ser s -geodético. De donde deducimos que existe un $x \in V_{s-1}$ tal que $\Gamma^+(x) \cap V_{s-1} \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in \Gamma^+(x) \cap V_{s-1}$, y f_1 el vértice de ∂^+C a mínima distancia desde él. En este caso se verifica que $|\Gamma^+(x_1) \cap V_{s-2}| = 1$. Supongamos que $|\Gamma^+(x_1) \cap V_{s-2}| \geq 2$, sean y_1, y_2 estos vértices, sea g_2 el vértice a mínima distancia desde y_2 . Entonces $g_2 = f_i$, para algún i , $1 \leq i \leq \delta$. Por lo tanto existen dos caminos diferentes desde x hasta g_2 de longitud $\leq s$, lo que es una contradicción. De estos razonamientos deducimos que existe un vértice $v \in \partial^+C$ y un vértice $x \in V_{s-1}$ tal que $d(x, v) \geq s - 1$ y $d(x, C \setminus \{v\}) \geq s$.

Para finalizar la demostración basta ver que el vértice v puede ser cualquiera de ∂^+C . Para ello sea $w \in \partial^+C$. Sean $x_2, \dots, x_\delta \in \Gamma^+(x) \cap V_{s-1}$. Supongamos que es x_2 el vértice tal que $d(x_2, w) = s - 1$. Entonces $d(x_2, f) \geq s$ para todo $f \in \partial^+C \setminus \{w\}$. En caso contrario tenemos dos caminos desde x hasta f , el corto $xx_i \rightarrow f$, y $xx_2 \rightarrow f$ de longitud s , lo que contradice la definición de ser s -geodético. Por lo tanto $d(x_2, w) \geq s - 1$ y $d(x_2, \partial^+C \setminus \{w\}) \geq s$, lo que demuestra la última parte.

(b) La demostración es análoga al caso (a). ■

Un resultado similar se verifica para fragmentos negativos.

Lema 5.4.2 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo $\delta \geq 3$ y conectividades κ y λ . Sea C un fragmento o α -fragmento negativo de G .*

(a) *Si, $s \geq 2$, $\kappa = \delta$ y ∂^-C es no trivial, entonces $\mu(C) \geq s - 1$ y para cualquier $u \in \partial^-C$ existe un vértice x en el valle de C tal que $d(u, x) \geq s - 1$ y $d(\partial^-C \setminus \{u\}, x) \geq s$;*

(b) *si $\lambda = \delta$ y ω^-C es no trivial, entonces $\nu(C) \geq s - 1$ y para cualquier $u \in F''$ existe un vértice x en el valle de C tal que $d(u, x) \geq s - 1$ y $d(F'' \setminus \{u\}, x) \geq s$. ■*

Como consecuencia de los lemas anteriores obtenemos una cota superior sobre el diámetro para que un digrafo s -geodético sea maximalmente superconectado.

Teorema 5.4.3 *Sea G un digrafo s -geodético con grado mínimo $\delta \geq 3$ y diámetro D . Entonces,*

(a) G es super- κ si $D \leq 2s - 2$;

(b) G es super- λ si $D \leq 2s - 1$.

Demostración. Sólo demostramos el caso (a). Por el Teorema 5.2.2, sabemos que $\kappa = \delta$. Supongamos que G no es super- κ . Sea C un fragmento positivo de G tal que $\partial^+ C$ es no trivial. Sean u y v dos vértices diferentes de $\partial^+ C$. Sean x e y dos vértices, pertenecientes al valle de C y $R^- C$ respectivamente, tales que los pares u, x y v, y verifican las condiciones de los Lemas 5.4.1 y 5.4.2. Entonces, tenemos que $D \geq d(x, y) \geq \min\{d(x, u) + d(u, y), d(x, v) + d(v, y), 2s\} \geq 2s - 1$, contradiciendo la suposición sobre el diámetro. ■

Tal y como hemos demostrado en el Lema 5.4.1 la profundidad de un fragmento está acotada inferiormente por $s - 1$. Este hecho implica la existencia de un número mínimo de vértices en un digrafo maximalmente conectado que no sea superconectado y nos permite establecer las siguientes cotas sobre el número de vértices para que el digrafo sea superconectado.

Teorema 5.4.4 *Sea G un digrafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ .*

(a) Si $\delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) \geq n + 2\Delta + \delta + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s - 1$, entonces G es super- κ ;

(b1) si $\epsilon_s^+(x) + \epsilon_s^-(y) \geq m + 2\Delta + \delta + 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- λ .

(b2) si $\delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) \geq n + 3$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- λ ;

Demostración. (a) Por el Teorema 5.2.4, tenemos que $\kappa = \delta$. Supongamos que G no es super- κ . Si x, u y v, y son vértices como en los Lemas 5.4.1 y

5.4.2, entonces $\Gamma_s^+(x) \subset C \cup \partial^+ C \cup \Gamma^+(u)$, $\Gamma_s^-(y) \subset \Gamma^-(v) \cup \partial^+ C \cup R^-C$, y $\Gamma_s^+(x) \cap \Gamma_s^-(y) \subset \partial^+ C \cup \Gamma^+(u) \cup \Gamma^-(v)$. Así,

$$n = |C| + |\partial^+ C| + |R^-C| \geq |\Gamma_s^+(x) \cup \Gamma_s^-(y)| \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - (\delta + 2\Delta),$$

lo que contradice la hipótesis.

(b1) La demostración es análoga al caso anterior utilizando los Lemas 5.4.1 y 5.4.2 (b).

(b2) De la hipótesis deducimos que $\lambda = \delta$. Supongamos que no es super- λ . Sea C un α -fragmento positivo de G . Sean u, x y v, y como en los Lemas 5.4.1 y 5.4.2 (b). Supongamos en primer lugar que $\nu(C)$ y $\nu(R^-C) \geq s$. Entonces $\Gamma_s^+(x) \subset C$ y $\Gamma_s^-(y) \subset R^-C$. De donde $n \geq |\Gamma_s^+(x) \cup \Gamma_s^-(y)| \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y)$, lo que contradice la hipótesis.

Si $\nu(C) = s - 1$ y $\nu(R^-C) \geq s$. Se verifica que $\Gamma_s^-(y) \subset R^-C$ y $\Gamma_s^+(x) \subset C \cup (\Gamma^+(u) \cap F'')$. Veamos que se verifica $|\Gamma^+(u) \cap F''| = 1$. En caso contrario $|\Gamma^+(u) \cap F''| \geq 2$, lo que implica $|F'| \leq \delta - 1$. Como $d(x, u) = s - 1$ y $d(x, F' - \{u\}) \geq s$, existen $\delta - 1$ vecinos de salida de x , x_2, \dots, x_δ tales que $d(x_i, F' - \{u\}) = s - 1$, $2 \leq i \leq \delta$, y $d(x_1, u) = s - 2$. Sea $f_i \in F'$, $1 \leq i \leq \delta$, el vértice a mínima distancia desde cada x_i . Como $|F'| \leq \delta - 1$, deben existir dos vértices $f_i = f_j$, $i \neq j$. Entonces tenemos dos caminos diferentes desde x a f_i de longitud $\leq s$, lo que contradice la definición de s -geodético. Por lo tanto

$$n \geq |\Gamma_s^+(x) \cup \Gamma_s^-(y)| \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - 1,$$

lo que contradice de nuevo la hipótesis sobre el orden. Por último, si $\nu(C) = \nu(R^-C) = s - 1$ tenemos que $\Gamma_s^+(x) \subset C \cup (\Gamma^+(u) \cap F'')$ y $\Gamma_s^-(y) \subset R^-C \cup (\Gamma^-(v) \cap F')$. Razonando como en el caso anterior vemos que $|\Gamma^+(u) \cap F''| = |\Gamma^-(v) \cap F'| = 1$. De donde

$$n \geq |\Gamma_s^+(x) \cup \Gamma_s^-(y)| \geq \delta_s^+(x) + \delta_s^-(y) - 2.$$

Obteniendo una contradicción con la hipótesis. ■

Nótese que este resultado extiende el Teorema 5.4.3 ya que si el diámetro satisface $D \leq 2s - 2$ [$D \leq 2s - 1$], entonces no hay vértices a distancia mayor

que $2s - 1$ [2s]. Además si en (b2) tomamos $s = 1$, obtenemos el resultado dado por Fiol en [27], que se ha descrito en la introducción, condición (iii).

Desde el Teorema 5.4.4 obtenemos las siguientes cotas superiores sobre el número de vértices para que un digrafo s -geodético sea super- κ o super- λ .

Teorema 5.4.5 *Sea G un digrafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ . Entonces,*

- (a) G es super- κ si $n \leq 2p(\delta, s) - 2\Delta - \delta - 1$;
- (b1) G es super- λ si $m \leq 2\delta p(\delta, s) - 2\Delta - \delta - 1$;
- (b2) G es super- λ si $n \leq 2p(\delta, s) - 3$. ■

Como un corolario del caso (b2) obtenemos la siguiente condición de tipo Chartrand para que un digrafo sea super-arco conectado.

Corolario 5.4.6 *Sea G un digrafo s -geodético con orden n y grado mínimo $\delta \geq 3$. Entonces,*

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } \delta \geq \left\lceil \sqrt{\frac{n+1}{2}} \right\rceil. \quad \blacksquare$$

Tomando $s = 1$, el corolario anterior da la condición $\delta \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ para asegurar que G es super- λ . Esto es también una consecuencia del resultado (5.2) dado en [27].

Como en el caso de conectividad estándar los resultados anteriores pueden ser establecidos para el caso no dirigido. Así mismo los resultados de la introducción también tienen sus análogos para el caso de grafos. Por ejemplo, en [27] se dieron las siguientes condiciones para que un grafo G con orden n , grado mínimo δ y diámetro D sea super- λ ,

- (i) $D = 2$, y G no contiene un grafo K_δ con todos sus vértices de grado δ ;
- (ii) $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para todo par de vértices u, v no adyacentes, y G diferente de $K_{n/2} \times K_2$;
- (iii) $\delta(u) + \delta(v) \geq n + 1$ para todo par de vértices u, v no adyacentes.

Las condiciones (ii) y (iii) fueron dadas por Lesniak en [44]. Una consecuencia de (iii) es la siguiente condición de tipo Chartrand para que un grafo sea super- λ .

$$\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \Rightarrow G \text{ es super-} \lambda. \quad (5.8)$$

Además desde (i) deducimos que si G es un grafo con $D = 2$ tal que $n > 2\delta + \Delta - 1$ entonces, G es super- λ . Estas condiciones pueden obtenerse de las siguientes condiciones de Tipo (a) que fueron dadas por Soneoka en [51].

$$G \text{ es super-} \lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\} + (\Delta - 1)^{D-1}. \quad (5.9)$$

Condiciones suficientes involucrando el diámetro y el girth se pueden encontrar por ejemplo en [21]. Estas condiciones son las siguientes:

$$G \text{ es super-} \kappa \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 3, & g \text{ impar,} \\ D \leq g - 4, & g \text{ par;} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$G \text{ es super-} \lambda \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 2, & g \text{ impar,} \\ D \leq g - 3, & g \text{ par.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Para el caso no dirigido las condiciones de Tipo mixto (c), es decir aquellas que además del orden, el diámetro, el grado mínimo y máximo involucran el parámetro ℓ , y concretamente en el caso de grafos el girth, han sido dadas por Fiol en [24] y [28]. En este último artículo encontramos el siguiente resultado: si G es un grafo con girth g , $\ell = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$, y $\delta \geq 3$,

(1) G es super- κ si $D \geq 3$, $\ell \geq 2$ ($g \geq 5$) y

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, D - \ell) + p(\Delta - 1, \ell - 2) + (\Delta - 1)^{D-\ell+1},$$

o bien G es d -regular, $D \geq 2$ y

$$n > (d - 1)^D + 2p(d - 1, D - 2) + 2.$$

(2) G es super- λ si $D \geq 2$ y

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + p(\Delta - 1, \ell - 1) + (\Delta - 1)^{D-\ell}.$$

Si en esta última condición tomamos $\ell = 1$ ($g = 3, 4$) obtenemos el resultado de Soneoka (5.9)

El siguiente teorema es el análogo al Teorema 5.4.4 para el caso no dirigido.

Teorema 5.4.7 *Sea G un grafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ .*

(a) *Si $\delta_s(x) + \delta_s(y) \geq n + 2\Delta + \delta - 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s - 1$, entonces G es super- κ ;*

(b1) *si $\epsilon_s(x) + \epsilon_s(y) \geq m + 2\Delta + \delta - 1$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- λ .*

(b2) *si $\delta_s(x) + \delta_s(y) \geq n + 3$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- λ ;*

Demostración. Demostramos sólo el caso (a). Por el Teorema 5.2.7, tenemos que $\kappa = \delta$. Supongamos que G no es super- κ . Consideramos la siguiente notación, $a(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap C|$ y $a'(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap RC|$, para todo vértice $f_j \in \partial^+ C$. Notemos que $1 \leq a(f_j) \leq \Delta - 1$, $1 \leq a'(f_j) \leq \Delta - 1$ y $a(f_j) + a'(f_j) \leq \Delta$. Si x, u y v, y son vértices como en los Lemas 5.4.1 y 5.4.2, entonces $\Gamma_s(x) \subset C \cup \partial C \cup \{\Gamma(u) \cap RC\}$, $\Gamma_s(y) \subset \Gamma(v) \cup \partial C \cup \{\Gamma(v) \cap C\}$, y $\Gamma_s(x) \cap \Gamma_s(y) \subset \partial C \cup \{\Gamma(u) \cap RC\} \cup \{\Gamma(v) \cap C\}$. Así,

$$n = |C| + |\partial C| + |RC| \geq |\Gamma_s(x) \cup \Gamma_s(y)| \geq \delta_s(x) + \delta_s(y) - (\delta + a'(u) + a(v)) \geq \delta_s(x) + \delta_s(y) - (\delta + 2(\Delta - 1)),$$

lo que contradice la hipótesis. ■

Desde este teorema obtenemos las siguientes cotas superiores sobre el número de vértices para que un grafo s -geodético sea super- κ o super- λ .

Teorema 5.4.8 *Sea G un grafo s -geodético con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ . Entonces,*

(a) *G es super- κ si $n \leq 2p(\delta, s) - 2\Delta - \delta + 1$;*

(b1) *G es super- λ si $m \leq 2\delta p(\delta, s) - 2\Delta - \delta + 1$;*

(b2) *G es super- λ si $n \leq 2p(\delta, s) - 3$. ■*

Si en (b2) tomamos $s = 1$ obtenemos que $\delta \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ es también una condición suficiente para que un grafo sea super- λ , lo cual es de nuevo una consecuencia del resultado de Lesniak [44].

5.5 Superconectividad en digrafos bipartitos s -geodéticos

Utilizando las características específicas de los digrafos o grafos bipartitos se pueden obtener resultados análogos a los de las secciones precedentes.

Los resultados de [27] referentes a digrafos bipartitos muestran que la mayoría de los digrafos bipartitos con grado $\delta \geq 3$ y $D = 3$ son super- λ . Concretamente en este artículo se demostró que un digrafo bipartito G es super- λ si una de las siguientes condiciones se verifica:

- (i) $D = 3$, y G es diferente de $K_{s,\delta}^- \oplus K_{\delta,t}^-$;
- (ii) $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ para todo par de vértices tales que $d(u, v) \geq 3$, y G es diferente de $2K_{\delta-1,\delta}^*$;
- (iii) $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ para todo par de vértices u, v tales que $d(u, v) \geq 3$,

donde $K_{n,m}^-$ denota el digrafo bipartito completo unidireccional con conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ y conjunto de arcos $E = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$. Sean $s, t \geq \delta - 1$, $\delta \geq 2$, $K_{s,\delta}^- = (U_1 \cup U_2, E)$ y $K_{\delta,t}^- = (V_1 \cup V_2, F)$. Entonces el digrafo bipartito $K_{s,\delta}^- \oplus K_{\delta,t}^-$ con conjuntos de partes $U_1 \cup V_1$ y $U_2 \cup V_2$ se obtiene añadiendo algunos arcos a los digrafos $K_{s,\delta}^-$, $K_{\delta,t}^-$ y uniendolos de tal forma que,

- (1) el grado mínimo del digrafo resultante sea δ ;
- (2) $\delta^+(u) = \delta^-(v) = \delta$ para cualesquiera $u \in U_1$ y $v \in V_2$;
- (3) los únicos arcos desde $U_1 \cup U_2$ hasta $V_1 \cup V_2$ son los de un emparejamiento completo (de δ arcos) desde U_2 hasta V_1 .

Notemos que el digrafo inverso de $K_{s,\delta}^- \oplus K_{\delta,t}^-$ es el digrafo $K_{t,\delta}^- \oplus K_{\delta,s}^-$. Como un ejemplo mostramos en la Figura 5.2 un digrafo $K_{3,3}^- \oplus K_{3,3}^-$.

Cuando $s = t = \delta - 1$, el digrafo $K_{\delta-1,\delta}^- \oplus K_{\delta,\delta-1}^- \equiv 2K_{\delta-1,\delta}^*$ puede obtenerse uniendo dos copias de un digrafo bipartito simétrico $K_{\delta-1,\delta}^*$ de acuerdo con las reglas anteriores, en este caso sólo necesitamos tener en consideración (3). Así en $2K_{\delta-1,\delta}^*$ cada vértice u de una de las copias tiene grado de salida $\delta^+(u) = \delta$,

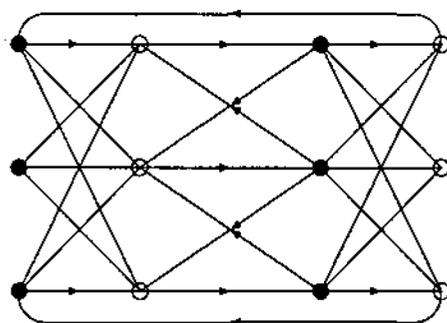


Figura 5.2: Un digrafo $K_{3,3}^{\vec{}} \oplus K_{3,3}^{\vec{}}$

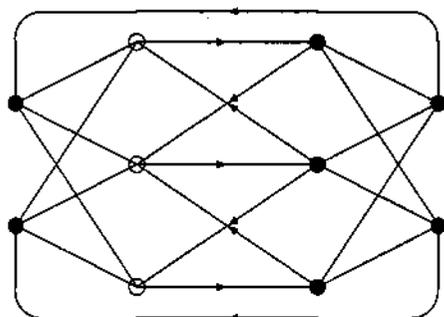


Figura 5.3: Un digrafo $2K_{2,3}^*$

y cada vértice v de la otra copia tiene grado de entrada $\delta^-(v) = \delta$. En la Figura 5.3 mostramos un digrafo $2K_{2,3}^*$.

Para el caso de grafos bipartitos se demostró que: G es super- λ si se verifica una de las siguientes condiciones,

- (i) $D = 3$, y G es diferente de $K_{s,\delta} \oplus K_{\delta,t}$;
- (ii) $\delta(u) + \delta(v) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ para todo par de vértices tales que $d(u, v) \geq 3$, y G es diferente de $K_{\delta-1,\delta} \oplus K_{\delta,\delta-1}$;
- (iii) $\delta(u) + \delta(v) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ para todo par de vértices u, v tales que $d(u, v) \geq 3$,

donde $K_{s,\delta} \oplus K_{\delta,t}$, $s, t \geq \delta - 1$, es el grafo bipartito obtenido uniendo los conjuntos de partes de cardinal δ de los grafos $K_{s,\delta}$ y $K_{\delta,t}$ por un emparejamiento completo.

De los resultados anteriores, caso (iii), se sigue que si G es un digrafo o grafo bipartito con orden n y grado mínimo $\delta \geq \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor + 1$, entonces G es super- λ . En este contexto Volkmann [54] demostró que si $\delta \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$, entonces G es maximalmente conectado. Otros corolarios de la condición (i) dan cotas inferiores sobre el orden para que un digrafo [grafo] bipartito con diámetro tres sea super- λ .

$$n > 2(\Delta + \delta)[2(\Delta + \delta - 1)] \Rightarrow G \text{ es super-}\lambda. \quad (5.12)$$

Las condiciones de Tipo (b), es decir aquellas que tienen en cuenta el diámetro del digrafo y el parámetro ℓ o bien el girth en el caso de grafos se pueden encontrar en Fàbrega y Fiol [22] y en [9]. En ambos artículos se establecen las siguientes condiciones para que un digrafo bipartito sea superconectado.

$$D \leq 2\ell - 1 \Rightarrow G \text{ es super-}\kappa; \quad (5.13)$$

$$D \leq 2\ell \Rightarrow G \text{ es super-}\lambda. \quad (5.14)$$

La demostración de este resultado en el primer artículo es constructiva, y en el segundo de ellos se obtiene además una cota para la profundidad de un fragmento o α -fragmento no trivial. Concretamente se demuestra que si G es un digrafo bipartito maximalmente conectado o maximalmente arco conectado y C es un fragmento o α -fragmento no trivial, entonces $\mu(C) \geq s$ y $\mu(R-C) \geq s$. Utilizaremos este resultado para obtener las cotas inferiores que aseguran superconectividad en un digrafo bipartito. También encontramos en este artículo cotas de tipo mixto para que un digrafo o grafo bipartito sea superconectado. Para un digrafo bipartito con grado mínimo $\delta \geq 3$ las cotas son las siguientes,

$$(i) G \text{ es super-}\kappa \text{ si } \ell \geq 2 \text{ y } n > \delta\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell;$$

$$(ii) G \text{ es super-}\kappa \text{ si } \ell = 1 \text{ y } n > 2\Delta + \delta\{p(\Delta, D-2) - 1\} + 1;$$

$$(iii) G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \Delta^{D-\ell-1} + \Delta^\ell.$$

Obsérvese que si tomamos $\ell = 1$ en la última condición se obtiene la condición dada en (5.12).

Mediante la cota obtenida en [9] para la profundidad podemos escribir las siguientes cotas superiores sobre el orden para que un digrafo bipartito s -

geodético, con $s \geq 2$, sea superconectado. Estas cotas extienden los resultados de [27] mencionados en la introducción.

Teorema 5.5.1 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ .*

(a) *Si $\delta_{s+1}^+(x) + \delta_{s+1}^-(y) \geq n + \delta(\Delta + 1)$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- κ ;*

(b) *si $\epsilon_{s+1}^+(x) + \epsilon_{s+1}^-(y) \geq m + \delta(\Delta + 1)$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$, entonces G es super- λ .*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 5.3.4 ya que en este caso también $\mu(C) \geq s$, basta tener en cuenta que ahora $|\partial^+ C| = \delta$.

■

Considerando las cotas obtenidas para $\delta_{s+1}^+(x)$ y $\delta_{s+1}^-(y)$, así como las cotas para $\epsilon_{s+1}^+(x)$ y $\epsilon_{s+1}^-(y)$ obtenemos las siguientes cotas superiores para que un digrafo bipartito con $s \geq 2$ sea superconectado.

Teorema 5.5.2 *Sea G un digrafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo δ y grado máximo Δ .*

(a) *Si $n \leq 2p_B(\delta, s + 1) - \delta(\Delta + 1)$, entonces G es super- κ ;*

(b) *si $m \leq 2\delta p_B(\delta, s + 1) - \delta(\Delta + 1)$, entonces G es super- λ .* ■

Para el caso de digrafos bipartitos 1-geodéticos tenemos los siguientes resultados.

Teorema 5.5.3 *Sea G un digrafo bipartito 1-geodético con orden n , tamaño m y grado mínimo δ . Entonces,*

(a) *G es super- κ si $n \leq 3\delta - 1$;*

(b1) *G es super- λ si $m \leq 4\delta^2 - 2$;*

(b2) G es super- λ si $n \leq 4\delta - 2$. ■

Despejando el grado mínimo de la condición (b2) obtenemos que si G es un digrafo bipartito con grado mínimo $\delta \geq \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$ entonces G es super- λ . Esta condición coincide con la condición obtenida por Fiol (5.2) salvo cuando $n+2$ es un múltiplo de cuatro, en cuyo caso se mejora la cota una unidad.

Para finalizar esta sección enunciamos los teoremas análogos a los anteriores para el caso de grafos bipartitos. Las demostraciones son totalmente similares al caso dirigido, basta tener en consideración que al no existir direcciones en los arcos al menos un vértice adyacente a cada vértice de $\partial^+ C$, para cada fragmento, debe pertenecer a C y otro a $R^- C$.

Teorema 5.5.4 *Sea G un grafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ .*

(a) *Si $\delta_{s+1}(x) + \delta_{s+1}(y) \geq n + \delta\Delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s$, entonces G es super- κ ;*

(b) *si $\epsilon_{s+1}(x) + \epsilon_{s+1}(y) \geq m + \delta\Delta$ para cualquier par de vértices x, y tales que $d(x, y) \geq 2s + 1$, entonces G es super- λ . ■*

Considerando las cotas obtenidas para $\delta_{s+1}(x)$ y $\delta_{s+1}(y)$, así como las cotas para $\epsilon_{s+1}(x)$ y $\epsilon_{s+1}(y)$ obtenemos las siguientes cotas superiores para que un grafo bipartito con $s \geq 2$ sea superconectado.

Teorema 5.5.5 *Sea G un grafo bipartito s -geodético, $s \geq 2$, con orden n , tamaño m , grado mínimo $\delta \geq 3$ y grado máximo Δ .*

(a) *Si $n \leq 2P_B(\delta, s+1) - \delta\Delta$, entonces G es super- κ ;*

(b) *si $m \leq 4\delta p_B(\delta-1, s) - \delta\Delta$, entonces G es super- λ . ■*

Para el caso de grafos bipartitos 1-geodéticos tenemos los siguientes resultados.

Teorema 5.5.6 *Sea G un grafo bipartito 1-geodético con orden n , tamaño m y grado mínimo δ . Entonces,*

(a) G es super- κ si $n \leq 3\delta - 1$;

(b1) G es super- λ si $m \leq 2\delta^2 - 1$;

(b2) G es super- λ si $n \leq 4\delta - 2$. ■

Despejando el grado mínimo de la condición (b2) recuperamos la misma situación que para el caso dirigido.

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado condiciones suficientes para que un (di)grafo o (di)grafo bipartito alcance conectividades óptimas. Los diferentes tipos de condiciones que se conocen se enumeran en la Introducción general. En la mayoría de los casos, para obtener dichas condiciones se razona sin tener en cuenta las distancias al conjunto desconector y por este motivo nos propusimos, siguiendo las ideas de [21, 25, 26, 28, 29], el estudio de las condiciones introduciendo un parámetro, ℓ , s o g , que acota las distancias al conjunto desconector según el caso. Dichos parámetros se han mostrado adecuados para el estudio de la conectividad de (di)grafos. El paso siguiente fue estudiar condiciones suficientes para alcanzar óptima conectividad condicional. Concretamente estudiamos la t -distancia conectividad y la superconectividad en digrafos s -geodéticos.

Se conocen condiciones suficientes de Tipo (a) para que un digrafo bipartito regular tenga conectividad igual al grado mínimo [1], es decir se estableció una cota inferior sobre el orden en función del grado y del diámetro sin tener en consideración ningún otro parámetro. También se conocen condiciones suficientes de Tipo (b) para que un digrafo bipartito tenga conectividad máxima [29]. En nuestro trabajo se han unido las ideas contenidas en los precedentes para obtener condiciones suficientes de Tipo (c). En líneas generales nuestras demostraciones han usado el hecho de que la profundidad de los fragmentos está acotada inferiormente por ℓ . Esto nos ha permitido contar el número de vértices que deben existir en un digrafo bipartito mediante una función del grado, el diámetro y dicho parámetro. Cuando se toma $\ell = 1$ las cotas mencionadas mejoran las ya conocidas. Así mismo se han proporcionado al-

gunos ejemplos que muestran que las cotas obtenidas son las mejores posibles. Para el caso de grafos bipartitos se han establecido resultados análogos. Estos trabajos están recogidos en [7] y en el Capítulo 3 de esta memoria.

En [29] fue introducida una nueva clase de conectividad llamada t -distancia conectividad. Las propiedades de esta nueva clase de conectividad han sido descritas en la Sección 2.1. En este artículo se caracterizaron aquellos digrafos cuya conectividad estándar igualaba las t -distancia conectividades para valores altos de t . Estos resultados están dados en términos del parámetro ℓ o, en el caso de grafos, en términos del girth. Como consecuencia se obtuvieron algunas condiciones suficientes para que un digrafo sea maximalmente conectado. En esta memoria hemos profundizado más en el estudio de las t -distancia conectividades definiendo en primer lugar un nuevo parámetro llamado t -grado que proporciona una cota superior para éstas. Nos hemos planteado la existencia de digrafos poseyendo una cadena de t -distancia conectividades dada, dando así sentido a la definición de estos nuevos parámetros. El concepto de excentricidad de un vértice así como el de radio han sido de gran importancia en el trabajo. Además hemos demostrado la independencia de los tres parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y $\delta(t)$. Se han obtenido condiciones suficientes de Tipo (b) que aseguran t -distancia conectividad óptima. Para ello han intervenido el parámetro ℓ y la propiedad de s -geodético. Como un caso particular tomando $t = 1$ se recuperan las condiciones conocidas para la conectividad estándar [26, 21, 52]. Por último mediante la utilización del parámetro ℓ_π se han obtenido cotas inferiores para las t -distancia conectividades. El trabajo ha sido llevado a cabo tanto para (di)grafos como para (di)grafos bipartitos.

Se han obtenido condiciones de Tipo (b) que generalizan y en algunos casos mejoran las ya conocidas, para ello se ha introducido el llamado diámetro condicional o \mathcal{P} -diámetro. Por ejemplo, considerando el diámetro condicional D_S se ha demostrado que la condición $D \leq 2\ell - 1$, que asegura máxima vértice conectividad, puede relajarse, es decir, pueden existir en el digrafo vértices cuya excentricidad sea superior a $2\ell - 1$. Lo mismo ocurre con las condiciones análogas para grafos, (di)grafos bipartitos y para el caso de la arco conectividad. La consideración de otros diámetros condicionales demuestra que basta acotar las distancias entre subdigrafos de determinado grado para

asegurar máxima conectividad, así se ha obtenido una nueva condición sobre el grafo línea de un grafo que garantiza conectividad máxima. En particular, como el girth de un grafo es siempre mayor o igual a tres, se ha demostrado que cualquier grafo cuyo grafo línea tenga diámetro menor o igual a dos [tres] tiene máxima conectividad [rama conectividad]. Se ha realizado un estudio detallado para grafos con girth par que demuestra que la condición $D \leq g - 3$ se mejora en una unidad para grafos con grado mínimo menor que cuatro, de hecho en [53] se demostró que esta condición era la mejor posible para girth impar o grado mínimo mayor que cinco, para este último caso se ha obtenido también una mejora de la condición.

Se ha demostrado que en digrafos s -geodéticos con conectividad no óptima la profundidad de un fragmento está acotada inferiormente por s , ver el Corolario 5.2.1, este hecho implica que en el digrafo deben existir un número mínimo de vértices, ya que por la definición de digrafo s -geodético todos los vértices a distancia a lo sumo s desde uno dado son diferentes. Por tanto, a partir de este resultado, se obtienen cotas superiores sobre el número de vértices que implican máxima conectividad. Como corolarios se obtienen condiciones de tipo Chartrand que aseguran conectividad óptima. Se ha desarrollado un trabajo paralelo para el caso de digrafos bipartitos, obteniendo una mejora en los resultados, ya que en el caso de digrafos bipartitos s -geodéticos se conoce el número de vértices a distancia a lo sumo $s + 1$ desde un vértice dado. Así mismo se han obtenido condiciones del mismo tipo para la llamada superconectividad, tanto en el caso general como en el caso bipartito. Los resultados obtenidos extienden los presentados en [27].

Referencias

- [1] M. Àider, Réseaux d'Interconnexion Bipartis. Colorations Généralisées Dans les Graphes. *Thèse, Universidad de Grenoble*, 1987.
- [2] M. Aigner, On the linegraph of a directed graph. *Math. Z.* **102** (1967), 56–61.
- [3] S.B. Akers, On the construction of (d, k) graphs. *IEEE Trans. Electron. Comput.* **EC-15**(1966), 253–254.
- [4] C. Balbuena, A. Carmona, M.A. Fiol, Distance connectivity in graphs and digraphs. *J. Graph Theory*, por aparecer.
- [5] C. Balbuena, A. Carmona, M.A. Fiol, On digraphs with given sequences of distance connectivities. *Presentado en 14th British Combinatorial Conference*.
- [6] C. Balbuena, A. Carmona, M.A. Fiol, Maximally distance connected digraphs and bipartite digraphs. *Presentado en 14th British Combinatorial Conference*.
- [7] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega and M.A. Fiol, Connectivity of large bipartite digraphs and graphs. *Discrete Math.*, por aparecer.
- [8] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega and M.A. Fiol, On the order and size of s -geodetics digraphs with given connectivity. *Discrete Math.*, por aparecer.
- [9] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega and M.A. Fiol, Superconnectivity of bipartite digraphs and graphs. *J. Graph Theory*, sometido a revisión.

- [10] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega and M.A. Fiol, On the connectivity and the conditional diameter of graphs and digraphs. *Networks*, sometido a revisión.
- [11] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fàbrega and M.A. Fiol, Extraconnectivity of graphs with large minimum degree and girth. *Discrete Math.*, sometido a revisión.
- [12] J.C. Bermond, C. Delorme, and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter. II. *Journal of Comb. Theory, Ser B.* **36** (1984), 32–48.
- [13] J.C. Bermond, C. Delorme, and J.-J. Quisquater, Strategies for interconnection networks: Some methods from graph theory. *J. Parallel Distribut. Comput.* **3** (1986), 443–449.
- [14] J.-C. Bermond, N. Homobono, and C. Peyrat, Large fault-tolerant interconnection networks. *Graphs Combin.* **5** (1989), 107–123.
- [15] B. Bollobás, On graphs with equal edge connectivity and minimum degree, *Discrete Math.*, **28** (1979) 321–323.
- [16] J. Bosák, A. Kotzig and S. Znám, Strongly geodetic graphs, *J. Combin. Theory*, **5** (1968) 170–176.
- [17] G. Chartrand, A graph-theoretic approach to a communications problem. *SIAM J. Appl. Math.* **14** (1966) 778–781.
- [18] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*. Wadsworth, Monterey, CA (1986).
- [19] N.G. de Bruijn, A combinatorial problem. *Proc. Akademie Van Wetenschappen* **49** (1946), 758–764.
- [20] A.H. Esfahanian, Lower-bounds on the connectivities of a graph. *J. Graph Theory* **9** (1985), 503–511.
- [21] J. Fàbrega and M.A. Fiol, Maximally connected digraphs. *J. Graph Theory* **13** (1989), 657–668.

- [22] J. Fàbrega and M.A. Fiol, Bipartite graphs and digraphs with maximum connectivity. *Discrete Appl. Math.*, por aparecer.
- [23] J. Fàbrega and M.A. Fiol, Extraconnectivity of graphs with large girth, *Annals of Discrete Mathematics*, (1991) por aparecer.
- [24] M.A. Fiol, Connectivity and superconnectivity of large graphs and digraphs. *Ars Combin.* **29B** (1990), 5–16.
- [25] M.A. Fiol, The connectivity of large digraphs and graphs. *J. Graph Theory* **17** (1993), 31–45.
- [26] M.A. Fiol, J. Fàbrega and M. Escudero, Short paths and connectivity in graphs and digraphs. *Ars Combin.* **29B** (1990), 17–31.
- [27] M.A. Fiol, On super-edge-connected digraphs and bipartite digraphs. *J. Graph Theory* **16** (1992), 545–555.
- [28] M.A. Fiol, Superconnectivity of large graphs and digraphs. *Discrete Math.* **124** (1994), 67–78.
- [29] M.A. Fiol and J. Fàbrega, On the distance connectivity of graphs and digraphs. *Discrete Math.* **125** (1994), 169–176.
- [30] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra and I. Alegre, Line digraph iterations and the (d, k) digraph problem. *IEEE Trans. Comput.* **C-33** (1984), 400–403.
- [31] M.A. Fiol and J.L.A. Yebra, Dense bipartite digraphs. *J. Graph Theory* **14** (1990), 687–700.
- [32] D. Geller and F. Harary, Connectivity in digraphs. *Lec. Not. Math.* **186**, Springer, Berlin (1970) 105–114.
- [33] D.L. Goldsmith and R.C. Entringer, A sufficient condition for equality of edge-connectivity and minimum degree of a graph. *J. Graph Theory* **3**, (1979) 251–255. 105–114.
- [34] D.L. Goldsmith and A.T. White, On graphs with equal edge-connectivity and minimum degree. *Discrete Math.* **23** (1978), 31–36.

- [35] Y.O. Hamidoune, A property of a -fragments of a digraph. *Discrete Math.* **31** (1980) 105–106.
- [36] Y.O. Hamidoune, Sur les atomes d'un graphe orienté, abéliens. *Discrete Math.* **55** (1985) 323–326.
- [37] F. Harary, R.Z. Norman, D. Cartwright, *Introduction à la Théorie des Graphes Orientés*. Dunod, Paris (1968).
- [38] F. Harary, Conditional connectivity, *Networks*, **13** (1983) 347–357.
- [39] N. Homobono and C. Peyrat, Connectivity of Imase and Itho digraphs. *IEEE Trans. Comput.* **37** (1988), 1459–1461.
- [40] M. Imase and M. Itoh, Design to minimize a diameter on building block network. *IEEE Trans. Comp.* **C-30** (1981), 439–443.
- [41] M. Imase and M. Itoh, A Design for directed graphs with minimum diameter. *IEEE Trans. Comp.* **C-32** (1983), 782–784.
- [42] M. Imase, T. Soneoka, and K. Okada, Connectivity of regular directed graphs with small diameter. *IEEE Trans. Comput.* **C-34** (1985), 267–273.
- [43] J.L. Jolivet, Sur la connexité des graphes orientés. *CR Acad. Sci. Paris* **274A** (1972), 148–150.
- [44] L. Lesniak, Results on the edge-connectivity of graphs. *Discrete Math.* **8** (1974), 351–354.
- [45] G. Memmi and Y. Raillard, Some new results about the (d, k) graph problem. *IEEE trans. Comp.* **C-31** (1982), 789–791.
- [46] C. Padró, Vulnerabilitat en famílies òptimes de digrafs per al disseny de xarxes dinterconnexió, *Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya* (1994).
- [47] J. Plesník, Critical graphs of given diameter, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian.*, Math. Publ. **30** (1975), 71–93.

- [48] J. Plesník and Š. Zná́m, Strongly geodetic directed graphs, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian.*, Math. Publ. **29** (1974), 29–34.
- [49] J. Plesník and Š. Zná́m, On equality of edge-connectivity and minimum degree of a graph, *Arch. Math. (Brno)* **25** (1989), 19–26.
- [50] S.M. Reddy, J.G. Kuhl, S.H. Hosseini and H. Lee, On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity. *Proceedings of the 20th Annual Allerton Conference* (1982), 1018–1026.
- [51] T. Soneoka, Super edge-connectivity of dense digraphs and graphs, *Discrete Appl. Math.* **37/38** (1992), 511–523.
- [52] T. Soneoka, H. Nakada and M. Imase, Sufficient conditions for dense graphs to be maximally connected, *Proc. ISCAS85* (1985), 811–814.
- [53] T. Soneoka, H. Nakada, M. Imase and C. Peyrat, Sufficient conditions for maximally connected dense graphs, *Discrete Math.* **63** (1987), 53–66.
- [54] L.Volkmann, Bemerkungen zum p -fachen Kantenzusammenhang von Graphen. [Remarks on the p -fold edge connectivity of graphs] *An. Univ. Bucure ti Mat.* **37** (1988), 75–79.
- [55] L.Volkmann, Edge-connectivity in p -partite graphs. *J. Graph Theory* **13** (1989), 1–6.
- [56] M.E. Watkins, A lower bound for the number of vertices of a graph. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 297.

Índice de símbolos

Símbolo	Significado	Pág.
$A = A(G)$	conjunto de arcos	1
$B(d, D)$	digrafo de de Bruijn	8
$BD(d, n)$	digrafo bipartito BD	6,43
C	[arco]-fragmento positivo o negativo	85
$D = D(G)$	diámetro	3
d	grado de un digrafo regular	2
$d(x, y)$	distancia desde un vértice a otro	3
$d(F_1, F_2)$	distancia desde un conjunto a otro	3,62
E	subconjunto de arcos desconectador	13
F	subconjunto de vértices desconectador	12
G	digrafo o grafo	1
C_n	ciclo dirigido	2
$g = g(G)$	girth	3
K_n	grafo completo	2
$K_{p,q}$	grafo bipartito completo	3
$K(d, D)$	digrafo de Kautz	8
LG	digrafo línea	7
ℓ	parámetro ℓ	9

Símbolo	Significado	Pág.
ℓ_π	parámetro ℓ_π	9
$M(\Delta, D)$	cota de Moore	4,5
$M_B(\Delta, D)$	cota de Moore para digrafos bipartitos	6
m	tamaño	1
n	orden	1
r	radio	16
$S(x, y)$	$x \rightarrow y$ conjunto separador	16
s	s -geodeticidad	10
$P(\Delta, D)$	$1 + \Delta p(\Delta - 1, D - 1)$	90
$p(\Delta, D)$	progresión geométrica de $D + 1$ términos y razón Δ	38
$V = V(G)$	conjunto de vértices	1
Z_n	enteros módulo n	2
$\Gamma^+(x)$	vecinos de salida	2
$\Gamma^-(x)$	vecinos de entrada	2
$\Gamma^+(C)$	vecinos de salida de los vértices de C	84
$\Gamma^-(C)$	vecinos de entrada de los vértices de C	84
$\Gamma_k^+(x)$	conjunto de vértices a distancia a lo sumo k desde un vértice	84
$\Gamma_k^-(x)$	conjunto de vértices a distancia a lo sumo k hacia un vértice	84
Δ^+	grado máximo de salida	2
Δ^-	grado máximo de entrada	2
Δ	grado máximo	2
$\delta_k^+(x)$	cardinal de $\Gamma_k^+(x)$	84
$\delta_k^-(x)$	cardinal de $\Gamma_k^-(x)$	84
$\delta^+(x)$	grado de salida de un vértice	2
$\delta^-(x)$	grado de entrada de un vértice	2
$\delta^+(t)$	t -grado de salida	18
$\delta^-(t)$	t -grado de entrada	18
$\delta(t)$	t -grado	18

Símbolo	Significado	Pág.
δ^+	grado mínimo de salida	2
δ^-	grado mínimo de entrada	2
$\delta = \delta(G)$	grado mínimo	2
δ^+C	frontera positiva	84
δ^-C	frontera negativa	84
$\epsilon_k^+(x)$	cardinal de $\Omega_k^+(x)$	84
$\epsilon_k^-(x)$	cardinal de $\Omega_k^-(x)$	84
$\kappa = \kappa(G)$	vértice conectividad	3
$\kappa(x, y)$	vértice conectividad local	11,16
$\kappa(t)$	t -distancia conectividad	16
$\lambda = \lambda(G)$	arco conectividad	3
$\lambda(x, y)$	arco conectividad local	11,17
$\lambda(t)$	arco t -distancia conectividad	17
μ	profundidad de un fragmento	86
ν	profundidad de un α -fragmento	86
$\Omega_k^+(x)$	conjunto de arcos a distancia a lo sumo k desde un vértice	84
$\Omega_k^-(x)$	conjunto de arcos a distancia a lo sumo k hacia un vértice	84
ω^+C	arco-frontera positiva	84
ω^-C	arco-frontera negativa	84
D_S	\mathcal{P} -diámetro	66
$D_{p,q}$	\mathcal{P} -diámetro	75
$D_{S(p,q)}$	\mathcal{P} -diámetro	79
D_ν	\mathcal{P} -diámetro	65
D_C	\mathcal{P} -diámetro	65
$e^+(x)$	excentricidad positiva de un vértice	16
$e^-(x)$	excentricidad negativa de un vértice	16
F'	conjunto de vértices iniciales de E	13
F''	conjunto de vértices finales de E	13
G^*	digrafo simétrico	2

Símbolo	Significado	Pág.
$G - A'$	supresión de arcos	2
$G - V'$	supresión de vértices	2
K_n^*	digrafo simétrico completo	2
$K_{p,q}^*$	digrafo simétrico bipartito completo	3
K_n^+	digrafo simétrico completo con autolazos	8
$II(d, n)$	digrafo de Imase y Itho	40
$L^k G$	digrafo línea k -iterado	8
$R^+ C$	fragmento positivo	85
$R^- C$	fragmento negativo	85
r^+	radio positivo	16
r^-	radio negativo	16
$S'(x, y)$	$x \rightarrow y$ conjunto de arcos separador	17
V^-	fragmento	13
V^+	fragmento	13
V_i	partición de V^-	13
V_j'	partición de V^+	13
$V' \subset V$	subconjunto	2
$V \setminus F$	diferencia de conjuntos	2
$V \times V$	producto cartesiano	1
$x \rightarrow y$	camino desde x hasta y	2
$ x \rightarrow y $	longitud del camino	2
$ \cdot $	cardinal de un conjunto	1
$[\cdot]$	parte entera inferior	11
$\lceil \cdot \rceil$	parte entera superior	5
$\langle U \rangle$	subdigrafo inducido por U	2

Índice alfabético

- α -fragmento, 13
 - negativo, 85
 - positivo, 85
- t -distancia conectividad, 16
 - arco, 17
- t -grado, 18
- Adyacente
 - desde, 1
 - hacia, 1
- Arco-frontera
 - negativa, 84
 - positiva, 84
- Arcos, 1
- Autolazo, 1
- Caminos, 3
 - internamente arco disjuntos, 3
 - internamente disjuntos, 3
- Ciclo, 3
 - de longitud mínima, 3
 - dirigido, 2
- Condiciones
 - de Tipo (a), iv
 - de Tipo (b), iv
 - de Tipo (c), iv
- Conectividad
 - arco conectividad, 3, 11
 - local, 11, 17
 - condicional, 15
 - vértice conectividad, 3, 11
 - local, 11, 16
- Conjunto
 - desconectador, 12
 - de arcos, 13
 - trivial, 100
- Conjuntos de partes, 3
- Cota de Moore, 4
 - para grafos, 5
 - para un digrafo bipartito, 41
 - para un grafo bipartito, 53
- Dígono, 1
- Diámetro, 3, 16
 - condicional, 59, 63
 - del digrafo línea, 8
- Digrafo, 1
 - d -regular, 2
 - s -geodético, 10
 - bipartito, 3, 43
 - conectado, 3, 11
 - de de Bruijn, 8
 - de Imase y Itho, 40
 - de Kautz, 8
 - de Moore, 5

- denso, 5
- línea, 7, 18
- maximalmente t -distancia conectado, 18, 31
- maximalmente arco t -distancia conectado, 18
- maximalmente arco conectado, 4
- maximalmente arco distancia conectado, 32
- maximalmente conectado, 4
- maximalmente distancia conectado, 32
- simétrico, 1, 19
 - asociado a un grafo, 2
 - bipartito completo, 3
 - completo, 2
- Distancia
 - entre dos subconjuntos, 3
 - entre dos vértices, 3
- Emparejamiento, 3
 - completo, 3, 101
- Excentricidad
 - negativa, 16
 - positiva, 16
- Fragmento, 13
 - negativo, 85
 - positivo, 85
- Frontera
 - negativa, 84
 - positiva, 84
- Girth, 3, 10
- Grado
 - mínimo, 2
 - de entrada, 2
 - de salida, 2
 - máximo, 2
 - de entrada, 2
 - de salida, 2
- Grafo
 - bipartito
 - completo, 3
 - completo, 2
 - dirigido, 1
 - línea, 67
- Orden, 1
- Parámetro ℓ , 9, 12
- Parámetro ℓ_π , 35
 - del digrafo línea, 10
- Radio, 16
 - negativo, 16
 - positivo, 16
- Ramas, 1
- Recorrido, 2
 - longitud de, 2
- Subdigrafo, 2
 - inducido, 2
- Super- κ , 100
- Super- λ , 100
- Superconectividad, 100
- Supresión
 - de un conjunto de arcos, 2
 - de un conjunto de vértices, 2

Tamaño, 1

Vértice

interior, 85

Vértices, 1

del digrafo línea, 7

Valle, 86

Vecinos

de entrada, 2

de salida, 2