

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Matemàtica Aplicada I

**COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS
GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS**

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín

Directores: Ferran Hurtado Díaz

Marc Noy Serrano

1999

Agradecimientos

En el tiempo que ha durado la realización de esta tesis muchas son las personas que, de una u otra manera, me han ayudado. A todas ellas quiero manifestar mi agradecimiento. Imposible citar aquí a todas.

Quiero empezar agradeciendo a M^a Montserrat Bruguera su insistencia para que me iniciara en la docencia universitaria; trabajo éste que tantas satisfacciones me ha proporcionado durante estos años y que ha dado lugar, entre otras cosas, a la realización de esta memoria.

A Mn. Pere y a Toni Ras agradezco el haberme dado luz en un momento en que la oscuridad y el desánimo casi consiguen que este trabajo no se lleve a cabo.

Ferran Hurtado fue la persona que me introdujo en los temas de geometría computacional y me contagió con su entusiasmo. También a él le debo el haberme acogido en el grupo de Geometría Computacional de Barcelona, en el seno del cual he ido madurando mi labor investigadora y con cuyos miembros tan a gusto he trabajado.

El responsable de la fuerte componente combinatoria que se desprende de toda la memoria es, sin lugar a dudas, Marc Noy. A él quiero agradecer, de forma muy especial, la paciencia que tuvo sobre todo en la primera fase de la gestación de este trabajo. Sus consejos y sugerencias me han sido siempre de gran ayuda. Y, a los dos, Ferran y Marc, quiero agradecer la labor de dirección que han realizado.

Con Alfredo García, Alberto Márquez, Mercè Mora y Javier Tejel he tenido el gusto de compartir intensas experiencias de trabajo e investigación que han sido el origen de la obtención de muchos de los resultados que se recogen en la memoria. También agradezco a Francisco Santos sus instructivas conversaciones sobre matroides orientadas.

Muchas son las personas del Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya en las que he encontrado apoyo y estímulo durante estos años. A todos doy las gracias. De una manera muy especial quiero manifestar mi agradecimiento a Dolors Magret, no ya por sus continuas ayudas en la transcripción a LaTeX de

la presente memoria, sino por su permanente apoyo. Con sus continuas atenciones ha conseguido ser la persona con la que he contraído más deudas en la elaboración de esta memoria.

Finalmente, unas palabras para “los de casa”. A mis padres agradezco el haberme permitido llegar hasta aquí, cosa que no siempre les ha sido fácil. De forma especial, me ha ayudado el continuo ejemplo de mi madre: en la dedicación a su trabajo y en su apasionada entrega en el hogar. A mis hijos, el haberme proporcionado tantos momentos de felicidad que han hecho muy llevable la realización de éste y cualquier otro trabajo. A Joaquín quiero agradecerle sus continuas muestras de paciencia, apoyo, comprensión y amor.

Índice General

1	Introducción	11
1.1	Contexto de la memoria	11
1.2	Algunas definiciones y notaciones	15
1.3	Contenido de la memoria y antecedentes de los problemas	18
2	Tipos de orden circulares y triangulares	29
2.1	Introducción	29
2.2	Tipos de orden y Teorema principal de ordenación geométrica	30
2.3	Tipos de orden circulares	32
2.3.1	Representación compacta de tipos de orden circulares	33
2.3.2	Número de tipos de orden circulares	35
2.3.3	Caso no orientado	38
2.3.4	Tipo de orden circular y razón doble	41
2.4	Tipos de orden triangulares	43
2.4.1	Caso orientado	43
2.4.2	Caso no orientado	48
2.4.3	Tipo de orden triangular, grafo de intersección, triangulaciones y árboles generadores	50

2.4.4	Tipos de orden simpliciales en dimen- sión d	55
2.5	Conclusiones y problemas abiertos	59
3	Empaquetamiento de árboles y ciclos en grafos planos	63
3.1	Introducción	63
3.2	Definiciones y planteamiento del problema	64
3.3	Dibujar árboles en un polígono convexo	65
3.4	Empaquetamiento plano de árboles	70
3.5	Empaquetamiento plano de ciclos	75
3.6	Conclusiones y problemas abiertos	83
4	Grafos de árboles geométricos de nubes de puntos	85
4.1	Introducción	85
4.2	Definiciones y resultados previos	87
4.2.1	Grafos de árboles geométricos	87
4.2.2	El grafo G_n	88
4.3	Grado mínimo y máximo de G_n	90
4.4	Centro y radio de G_n	94
4.5	Diámetro de G_n	101
4.6	Grupo de automorfismos	106
4.7	Árbol de árboles	108
4.8	G_n es un grafo hamiltoniano	115
4.9	Conectividad de G_n	118
4.10	Grafo G_n^* de árboles duales	126
4.11	Intercambio simultáneo de aristas (o intercambio en pa- ralelo)	129

4.12	Grafos de árboles geométricos en posición general: excentricidades	135
4.13	Grafos de árboles geométricos en posición general: grados mínimo y máximo	143
4.14	Grafo de hojas de un conjunto de puntos	148
4.15	Conclusiones y problemas abiertos	154
5	Grafos de emparejamientos perfectos sin cortes	159
5.1	Introducción	159
5.2	Definiciones y notaciones	160
5.3	Grado mínimo y grado máximo de \mathcal{M}_m	163
5.4	Diámetro de \mathcal{M}_m	164
5.5	\mathcal{M}_m es un grafo bipartito	171
5.6	Hamiltonicidad de \mathcal{M}_m	173
5.6.1	Funciones generadoras de árboles planos	174
5.6.2	\mathcal{M}_m no es hamiltoniano, m impar	176
5.6.3	Códigos de Gray en árboles binarios	181
5.6.4	\mathcal{M}_m es hamiltoniano, m par	184
5.7	Emparejamientos y permutaciones	194
5.7.1	\mathcal{M}_m y permutaciones de m elementos	194
5.7.2	Nueva familia de permutaciones contada por los números de Catalan	200
5.7.3	\mathcal{M}_m y permutaciones de $2m$ elementos	202
5.8	Conclusiones y problemas abiertos	203
	Bibliografía	205