UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Matemàtica Aplicada I

COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín
Directores: Ferran Hurtado Díaz
Marc Noy Serrano

1999

geometría computacional.
Tesis doctorales
geometría combinatoria ..
Tesis doctorales

Capítulo 1

Introducción

1.1 Contexto de la memoria

La presente memoria se sitúa en la confluencia de la geometría computacional, la geometría discreta y la geometría combinatoria, con especial sesgo hacia esta última, aunque la fuerte conexión existente entre estas disciplinas hace difícil su delimitación, tarea por lo demás innecesaria e improductiva.

Las condiciones geométricas en un problema pueden alterarlo radicalmente respecto de su contrapartida en el campo de la combinatoria abstracto, un hecho que a nuestro juicio está muy bien descrito en [41], de donde nos hemos permitido reproducir algunos párrafos.

"Dado un conjunto abstracto S, podemos considerar diversas estructuras combinatorias sobre él, como por ejemplo, sus subconjuntos o sus particiones. Si P es un conjunto de puntos en el plano, ciertamente que todo ello le es aplicable, pero también es natural considerar las restricciones o las variaciones que la geometría impone o sugiere.

Así, si suponemos que el cardinal de S y el de P son ambos iguales a n, sabemos, por ejemplo, que S tiene $\binom{n}{3} \in \Theta(n^3)$ 3-subconjuntos, pero al pensar en tres puntos del plano "sin interferencia" de los restantes, la idea más inmediata es la de que formen un triángulo vacío de otros puntos, y en este caso su número depende de *la disposición* de los puntos de P sobre el plano, y en general sólo se puede garantizar un número cuadrático de tales triángulos, alcanzándose el valor $\binom{n}{3}$ exclusivamente para la posición convexa. Del mismo modo, el número de 2-particiones de S es $\Theta(2^n)$, pero si para P se añade la restricción natural de que las partes sean linealmente separables el número desciende a $\Theta(n^2)$, y su valor máximo para cardinales fijos de las partes aún no ha podido ser determinado.

Análogamente, si consideramos subestructuras de un grafo combinatorio o, en vez de ello, partimos de una realización geométrica plana e imponemos condiciones a las subestructuras, como la de carecer de cortes, se obtienen resultados muy distintos, que en el segundo caso dependen sustancialmente de la disposición de los vértices sobre el plano. Por otra parte, para describir la disposición de puntos sobre el plano desde el punto de vista combinatorio, a menudo se construyen grafos cuyos vértices corresponden a estructuras geométricas consideradas adyacentes mediante cierta transición. Así pues, también en este apartado es muy intensa la interacción entre la geometría y la combinatoria."

En este enfoque está escrita la presente memoria. Varios de los problemas aquí tratados tienen sus antecedentes en la combinatoria, y estudiamos aquí una versión geométrica, por lo que disciplinas que juegan un papel vital en la presente memoria son, por un lado, la combinatoria –y dentro de ésta la teoría de grafos– y, por otro lado, la geometría en general. De forma más concreta cabe mencionar que es en la geometría computacional donde se han originado la mayoría de los problemas considerados.

Comentamos ahora los motivos por los cuales las geometrías combinatoria, discreta y computacional son tres materias tan activas en el momento presente. En la primera mitad de este siglo, llegó un momento en que parecía que la geometría clásica (al igual que otras materias) sucumbía ante el desarrollo de otras áreas más abstractas de la geometría y de las matemáticas en general. Sin embargo, muchas son las fuentes que han ayudado a un renacer de la geometría intuitiva. De todas ellas, cabe destacar como la más relevante la introducción del ordenador y el fuerte desarrollo de la tecnología y de las ciencias de la computación. Ello ha originado la aparición de disciplinas relativamente nuevas como es el caso de la geometría computacional, así como el resurgir de otras materias clásicas, siendo las geometrías discreta y combinatoria dos de los campos que más se han beneficiado. Muchos de los problemas que son objeto de estudio de estas materias han adquirido una importancia crucial en áreas como la teoría de códigos, la optimización combinatoria, la robótica, la realización de gráficos por ordenador, etc.

La geometría computacional centra su estudio en el diseño y el análisis de "buenos" algoritmos para resolver problemas geométricos. No vamos a precisar aquí qué factores determinan la bondad o no bondad de un algoritmo, pero sí apuntamos que esta disciplina está muy estrechamente ligada a las ciencias de la computación. Como al destinatario natural de esta memoria se le presupone iniciado en el área de la geometría computacional, no haremos aquí una introducción a dicha disciplina. Un enfoque breve, pero general, de esta disciplina relativamente reciente se encuentra en [38], [54], [73]. Sólo destacaremos en esta introducción unas estructuras que son objeto de estudio de esta disciplina y que están muy presentes en el transcurso de este trabajo: los grafos geométricos. Por poner ejemplos de este tipo de grafos que aparecen frecuentemente en la bibliografía de geometría computacional, citaremos el árbol generador mínimo y árbol generador máximo de una nube de puntos, los grafos de vecinos relativos o los grafos de Gabriel.

Por otra parte, y aunque los antecedentes de los problemas que hemos estudiado los presentaremos al describirlos específicamente, como el trabajo realizado en la presente memoria se decanta por la geometría combinatoria, vamos a dar aquí unas breves pinceladas sobre esta materia e ilustraremos el tipo de problemas que estudia con algunos ejemplos. Si bien es cierto que, tal como indica H. Edelsbruner en [10], "la clasificación en problemas combinatorios y no combinatorios no es ni razonable ni deseable", sí podemos decir, por ejemplo, que en general se excluyen aquellos problemas que tienen una clara connotación métrica.

Los objetos de estudio de la geometría combinatoria son las configuraciones de puntos, los arreglos de hiperplanos o esferas, los politopos convexos, etc., que se toman en forma discreta y finita.

También es de vital importancia el estudio de transformaciones geométricas (que transforman unos objetos geométricos en otros). Concretamente, los conceptos de dualidad y polaridad, que nos permiten relacionar arreglos de hiperplanos con conjuntos finitos de puntos aparecen implícitamente a través de toda la bibliografía de la geometría computacional y combinatoria.

Especial atención han recibido los problemas de incidencia. Precisamente uno de los primeros problemas de geometría combinatoria fue planteado en 1893 por J. Sylvester, cuyo enunciado es el siguiente: "Dada una nube P de puntos en el plano, no todos situados sobre una recta, ¿existe siempre una recta que contiene exactamente dos puntos de P?" El problema fue resuelto afirmativamente por Gallai en 1830 y, desde entonces, muchas son las variantes que se han planteado. Por ejemplo, una vez sabido que la respuesta al problema de Sylvester es afirmativa, una pregunta natural a plantearse es la siguiente: ¿Cuál es el mínimo número de tales rectas? Este problema fue resuelto por Kelley y Moser en 1958. Otro problema clásico en esta línea es el planteado por Erdös-Klein-Szekeres: "¿Cuál es el mínimo número α_m tal que cualquier configuración plana de α_m o más puntos en posición general contiene un conjunto de m puntos en posición convexa?" Estos son ejemplos de lo que se ha dado en llamar problemas extremales de geometría combinatoria. Este tipo de problemas ha abarcado un amplio campo de la geometría combinatoria, llegando incluso algunos autores a considerar que es ésta la rama de las matemáticas que se dedica principalmente al recuento de ciertas estructuras geométricas.

No obstante, muchos problemas de esta disciplina no pueden ser planteados en términos de recuento. Es el caso, por ejemplo, del siguiente resultado. Se dice que un grafo G es grafo de contacto de discos si y sólo si los vértices de G son discos y dos discos son adyacentes si y sólo si hay contacto entre ellos. Un resultado importante de la geometría combinatoria es el teroema que afirma que todo grafo plano se puede realizar como grafo de contacto de discos.

Los politopos convexos han sido también objeto de estudio de la geometría combinatoria (posiblemente, observando la muy dilatada bibliografía sobre el tema, han sido los objetos más y mejor estudiados).

Finalizamos esta breve introducción resaltando también la importancia del estudio de estructuras combinatorias que codifican información geométrica. En ocasiones, facilita el análisis de arreglos de hiperplanos y, equivalentemente, el análisis de configuraciones de puntos, la codificación en estructuras combinatorias que sean fáciles de manejar. Entre estas estructuras, han recibido particular atención –por lo útiles, a la par que elegantes– el tipo de orden de una configuración de puntos, las secuencias circulares y las matroides orientadas.

1.2 Algunas definiciones y notaciones

Hemos creído conveniente incluir algunas definiciones o nociones relativas a los grafos que aparecen en la presente memoria para que el lector no excesivamente familiarizado con el lenguaje propio de esta disciplina pudiera seguir su lectura con mayor comodidad, así como para fijar algunas de las notaciones que se van a utilizar en los capítulos siguientes.

Un *grafo* G es una estructura combinatoria formada por un conjunto $V(G)$ de elementos, llamados *vértices* y un conjunto $E(G)$ de pares no ordenados de vértices, que se llaman *aristas*. Si $e \in E(G)$ es la arista que relaciona los vértices u, v, notaremos $e = (u, v)$. En este caso, se dice que u y v son *adyacentes*, que u es un vecino de v (y viceversa) y que la arista e es *incidente* en el vértice u (y en v).

Dado $u \in V(G)$, llamamos *grado de u en G*, y lo notamos $d_G(u)$, al número de vértices adyacentes a u en G.

El *grado mínimo* y *grado máximo* de G son respectivamente:

$$\delta = \delta(G) = \min\{d_G(u) \mid u \in V(G)\},$$

$$\Delta = \Delta(G) = \max\{d_G(u) \mid u \in V(G)\}.$$

Dados $u, v \in V(G)$ un *camino* de u a v, que notamos:

$$u = u_0 \sim u_1 \sim \ldots \sim, u_n = v$$

es el subgrafo de G que tiene por conjunto de vértices $u_0, \ldots, u_n$ ($u_i \neq u_j$ $\forall i \neq j$) y por conjunto de aristas (u_i, u_{i+1}), $i = 0, \ldots n-1$.

G es un *grafo conexo* si para todo par de vértices de $V(G)$ existe un camino que los une. Se dice que G es n-conexo si para todo par $u, v \in V(G)$ existen n caminos $P_1, \ldots, P_n$ que unen u y v y tales que $V(P_i) \cap V(P_j) = \{u, v\}$ $\forall i \neq j$. Una definición alternativa y equivalente a la anterior es la siguiente: G es n-conexo si y sólo si $G - W$ es conexo, para todo conjunto W de $n-1$ vértices de G. Si G es n-conexo pero no es $(n+1)$-conexo entonces se dice que la *conectividad* de G (o vértice-conectividad de G) es n.

Si G es un grafo conexo, la *distancia* entre dos vértices $u, v \in V(G)$ es la longitud mínima de un camino entre estos vértices. Lo notaremos $d(u, v)$. Se llama *diámetro* de G a

$$D = D(G) = \max_{u,v \in V(G)}\{d(u, v)\}.$$

La *excentricidad* $e(u)$ de un vértice $u \in V(G)$ es la máxima de las distancias entre u y el resto de los vértices de G. Y el *radio* de G es:

$$r = r(G) = \min_{u \in V(G)}\{e(u)\}.$$

El *centro* del grafo, $Z(G)$, es el conjunto de vértices con excentricidad mínima, esto es, excentricidad igual al radio.

Un *ciclo* es un grafo conexo tal que todos sus vértices tienen grado dos. Si un grafo G contiene un ciclo C tal que el conjunto de vértices de C es igual a $V(G)$ entonces se dice que G es un *grafo hamiltoniano*.

Un *árbol* es un grafo conexo acíclico. El número de aristas es $n-1$ si n es el número de vértices.

Dado un conjunto de puntos P en el plano, una acepción bastante común entre los miembros de la comunidad de geómetras computacionales es llamar "grafo geométrico" con conjunto de vértices P a todo grafo dibujado en el plano cuyo conjunto de vértices es P y cuyas aristas son segmentos rectilíneos que no se cortan, salvo quizás en los extremos.

En esta línea, son grafos geométricos, por ejemplo, los árboles que son objeto de estudio en el capítulo 4. En dicho capítulo, dado un conjunto de puntos P en el plano, llamamos árbol geométrico a todo árbol generador sin cortes de P, esto es, a todo árbol cuyo conjunto de vértices es P y cuyas aristas son segmentos rectilíneos que no se cortan.

A un grafo $T(P)$ que tiene por conjunto de vértices a los árboles geométricos y unas adyacencias definidas de forma muy concreta, le hemos llamado *grafo de árboles geométricos.* No obstante, en ocasiones nos hemos permitido la licencia de llamarle *grafo geométrico de árboles.* El motivo de este abuso de lenguaje tiene su origen en la intención de diferenciar este grafo de otro que ya había sido largamente estudiado, el grafo de árboles $T(G)$ de un grafo dado G. En el énfasis por resaltar que los vértices de $T(P)$ son objetos geométricos, frente a los objetos combinatorios que tienen por vértices $T(G)$, el adjetivo geométrico ha acabado acompañando al grafo en algunas ocasiones (en la presente memoria, así como en los trabajos presentados sobre este tema en algunos congresos y artículos de revistas).

Creemos que no hay posible confusión teniendo en cuenta el contexto en que estos términos aparecen. No obstante, queremos dejar aquí constancia de que tanto éste como otros grafos que se estudian en la presente memoria, no son grafos geométricos en la acepción que se ha mencionado al principio de este apartado. Pero sí los consideramos grafos geométricos en una acepción mucho más amplia, en cuanto que los objetos de estudio –los vértices de dichos grafos– tienen una propiedades geométricas bien marcadas.

Otra aclaración la requiere el nombre del grafo $T(P)$ que acabamos de mencionar. El estudio de este tipo de grafos es muy reciente en la bibliografía y no hay unidad de criterio en estos momentos a la hora de referirse a él.

Los que nosotros hemos dado en llamar *árboles geométricos* aparecen bajo el nombre de *árboles generadores euclídeos* en el trabajo de D. Avis y K. Fukuda [1], *árboles generadores de un conjunto de puntos* en [60] de E. Rivera y V. Urrutia y, finalmente, como *árboles generadores afines* en el trabajo [48] de A. Kaneko y K. Yoshimoto.

1.3 Contenido de la memoria y antecedentes de los problemas

Pasamos a describir brevemente cuáles son los problemas objeto de estudio de esta memoria. En cada caso se presentan los antecedentes que existían y los resultados que se han obtenido. Descripciones complementarias se encuentran en las introducciones de los diferentes capítulos. También se expone, al final de cada capítulo, una lista de problemas relacionados que son una perspectiva de futuro.

Dado un conjunto P_n de n puntos en el plano, se abordan en la presente memoria tres tipos de problemas, existiendo en todos ellos una gran interacción entre la combinatoria y la geometría.

Problema 1: Estudio de diferentes tipos de órdenes

El concepto de orden juega un papel destacado en muchos algoritmos geométricos.

Antecedentes

En [16] J. E. Goodman y R. Pollack introducen el concepto de tipo de orden de un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que generaliza de forma natural la noción de orden que tenemos sobre la recta real. Concretamente, tener una ordenación sobre un conjunto de puntos de la recta real es equivalente a saber decir, para dos puntos cualesquiera del conjunto, si el segundo está o no a la izquierda del primero. Dado un conjunto de puntos en el plano el tipo de orden nos informa, para cada terna de puntos, si el tercero está o no a la izquierda de la recta orientada definida por los dos primeros. En $\mathbb{R}^d$, el tipo de orden nos informa para cada $(d+1)$-upla de puntos si el último está o no a la izquierda del hiperplano orientado determinado por los d primeros. Este concepto, que es de una gran intuitividad geométrica, da una descripción combinatoria del conjunto de puntos.

El tipo de orden ha sido ampliamente estudiado, tanto por los autores que lo introdujeron ([16], [17], [18], [19]) como por otros autores ([68], [70]). Un resultado importante que J. E. Goodman y R. Pollack obtuvieron sobre los tipos de orden es lo que ellos califican como Teorema principal de ordenación geométrica (T.P.O.G.) que dice lo siguiente. Dado un conjunto de n puntos en $\mathbb{R}^d$, si para cada d-upla sabemos cuántos puntos hay a la izquierda del hiperplano orientado determinado por la d-upla, entonces podemos determinar cuáles son los puntos que quedan a la izquierda del hiperplano.

En todo lo dicho la noción de orientación juega un papel importante, tanto es así, que, si se prescinde de ella, los resultados enunciados no son en general ciertos.

Trabajo realizado.

En el capítulo 2 de esta memoria presentamos dos generalizaciones del tipo de orden introducido por J. E. Goodman y R. Pollack.

Dado un conjunto de puntos P del plano, el *tipo de orden circular* nos informa, para cada cuaterna de puntos de P, si el cuarto punto está dentro o fuera del círculo orientado determinado por los tres primeros. Con este concepto de orden,

- se demuestra fácilmente que se verifica un resultado análogo al T.P.O.G. También comprobamos que la orientación es aquí un tema clave dando un ejemplo en que "cuántos" no determina "cuáles" si se prescinde de la orientación de los círculos.
- Hemos calculado cotas ajustadas sobre el número de tipos de orden circulares.
- Presentamos cómo queda interpretado el tipo de orden circular en términos de la razón doble.

Un resumen de estos resultados fue presentado en [32].

La otra generalización que presentamos es el *tipo de orden triangular*. En este caso, la versión orientada nos informa, para cada cuaterna de puntos de P, de si el cuarto punto está dentro o fuera del triángulo orientado determinado por los tres primeros. Sobre este concepto hemos demostrado:

- Se tiene un resultado análogo al T.P.O.G.
- El tipo de orden circular (orientado) determina para cada cuaterna $\{p_i, p_j, p_k, p_m\}$
  - si los puntos están o no en posición convexa,
  - si existe o no corte entre los segmentos $\overline{p_i p_j}$ y $\overline{p_k p_m}$.
- El tipo de orden triangular (ordenado) determina
  - el grafo de intersección de P,
  - el conjunto de todas las triangulaciones de P.

La *versión no orientada del tipo de orden triangular* nos informa, para cada cuaterna, de si el cuarto punto está o no dentro del triángulo determinado por los tres primeros. Se verifica un resultado análogo al T.P.O.G. Resaltamos que éste es un resultado que no tiene traducción en el tipo de orden ordinario ni en el tipo de orden circular.

Finalmente, también se da una generalización del tipo de orden triangular –orientado y no orientado– en dimensiones superiores y se demuestra que en cualquier dimensión se verifica un resultado análogo al T.P.O.G.

Problema 2: Estudio de grafos geométricos

Dado un conjunto P_n de n puntos en el plano, podemos pensar en diferentes estructuras combinatorias asociadas a él como son, por ejemplo, particiones de P_n, emparejamientos perfectos o árboles generadores. Interesados en que prevalezcan las restricciones propias de la geometría, siempre hemos impuesto en las estructuras que aparecen en la memoria que carezcan de cortes.

Podemos pensar, por ejemplo, en: triangulaciones, poligonizaciones, árboles generadores sin cortes, emparejamientos perfectos sin cortes, particiones sin cortes, etc. (véase figura 1.1).

Dentro de cada una de estas categorías de objetos se puede pensar en pasar de un objeto a otro por un pequeño cambio. En ocasiones se pretenderá, dado un objeto inicial, ir haciendo modificaciones que lo mejoren respecto a algún criterio determinado. Por ejemplo, dada una triangulación arbitraria de P_n nos puede interesar hacer una serie de cambios o *flips* hasta obtener la triangulación de Delaunay. De aquí surge la idea de considerar unos grafos que tengan por conjunto de vértices alguno de los conjuntos de objetos antes señalados y cuyas adyacencias sean precisamente estos pequeños cambios.

Antecedentes

Muchos son los antecedentes de lo aquí expuesto en el campo combinatorio. Podemos empezar citando los estudios hechos sobre grafos de árboles de un grafo conexo: [8], [35], [51], cuya versión geométrica es el tema de estudio del capítulo 4. También debemos citar los códigos de Gray en árboles binarios estudiados en [58], [59] y [63]. En estos trabajos se estudian las secuencias binarias asociadas a árboles binarios y pequeños cambios para pasar de una a otra. Todo esto guarda una estrecha relación con el grafo de emparejamientos perfectos y sin cortes que es objeto de estudio en el capítulo 5. De forma particular, los códigos de Gray que presentan F. Ruskey y A. Proskurowski en los citados trabajos han sido material esencial para la construcción de los ciclos hamiltonianos que presentamos en 5.6.3.

Más recientemente, y con una componente más geométrica, sirven también de antecedentes al trabajo aquí realizado la gran cantidad de artículos de reciente publicación que versan sobre flips en triangulaciones. Véase por ejemplo [26], [43], [67].

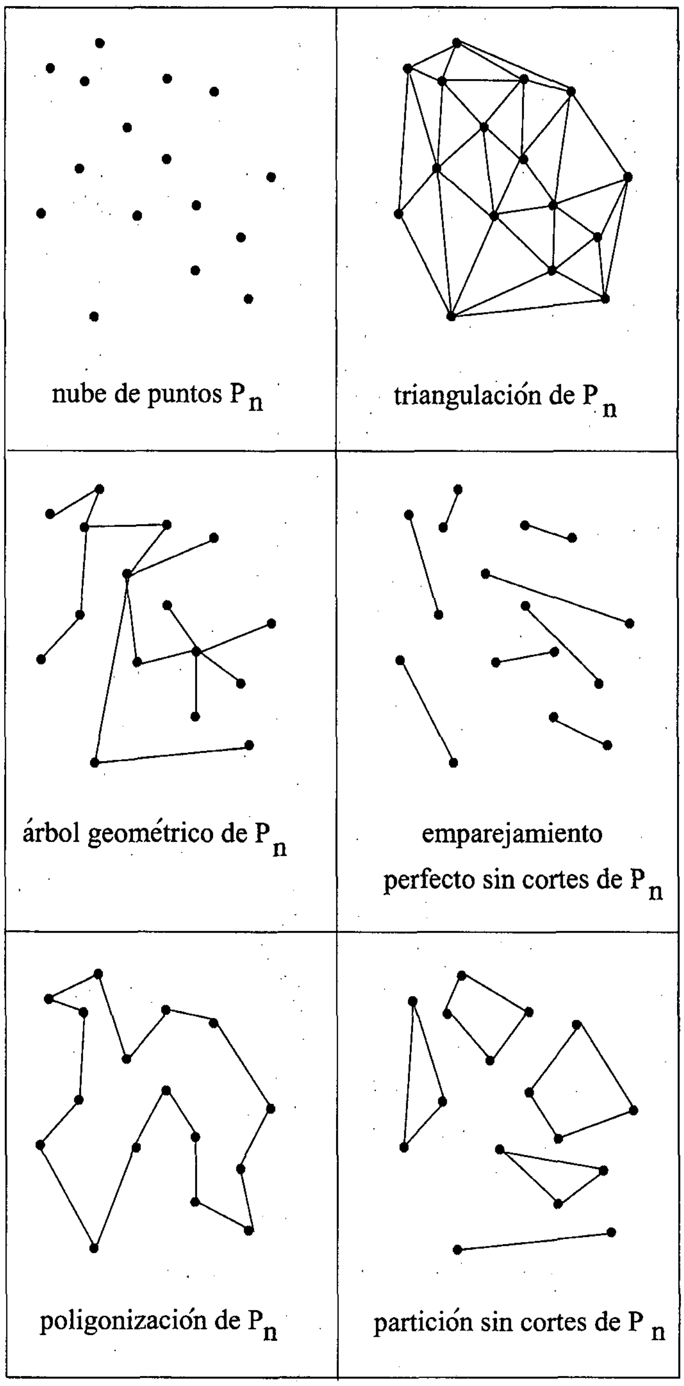

Figura 1.1: Diferentes estructuras geométrico-combinatorias asociadas a un conjunto de puntos.

De una forma especial, debemos citar el trabajo realizado por F. Hurtado y M. Noy sobre el grafo de triangulaciones cuando el conjunto de puntos está en posición convexa en [39]. Las técnicas allí utilizadas han sido material clave para el capítulo 4 de la presente memoria. Otros grafos relacionados con los que aparecen en la presente memoria son estudiados en [37] y [61].

También se ha estudiado el hacer pequeñas modificaciones en las poligonizaciones de una nube de puntos P. Aquí los vértices del grafo son los de P y dos poligonizaciones son adyacentes si y sólo si se pasa de una a otra por la reconexión de algún vértice. Con este tipo de adyacencias, que parecen las más naturales y son las más sencillas, se ha demostrado que el grafo no es conexo. Más concretamente, en [36] se da un ejemplo de nube de puntos tal que el grafo de poligonizaciones así definido tiene puntos aislados. Es un problema abierto estudiar nuevos tipos de adyacencias, donde se vean involucradas más aristas, que hagan posible la obtención de un grafo de poligonizaciones que sea conexo.

Trabajo realizado

En el capítulo 4 se estudia el grafo de árboles geométricos de un conjunto de puntos. Dado un conjunto P_n de puntos en el plano se define $T(P_n)$ como el grafo cuyos vértices son los árboles generadores sin cortes de P_n y donde dos de tales árboles T_1, T_2 son adyacentes si y sólo si $T_2 = T_1 - e + f$, para ciertas aristas $e \in T_1$, $f \in T_2$.

Empezamos concentrándonos en el caso en que los puntos estén en posición convexa, obteniendo una larga lista de resultados sobre las propiedades combinatorias de estos grafos. Concretamente, si notamos G_n a este tipo de grafos, hemos demostrado:

- El grado mínimo de G_n es $2n-4$, siendo las estrellas los únicos árboles que alcanzan este grado. El grado máximo de G_n es $\binom{n+1}{3} - n + 1$ y sólo los árboles cuyas aristas son todos los lados de P_n menos uno, a los cuales llamaremos cadenas, alcanzan este grado.

- Una cota inferior del diámetro de G_n es $\frac{3n}{2} - 5$.
- El radio de G_n es igual a $n - 2$ y hemos determinado el centro de G_n.
- El grupo de automorfismos $\Gamma(G_n)$ es isomorfo al grupo diedral D_n de simetrías de un polígono regular de n lados.
- G_n es hamiltoniano.
- La vértice-conectividad de G_n es igual al grado mínimo.

Una selección de los resultados que aquí se exponen, para conjuntos de puntos en posición convexa, han sido presentados en un congreso de ámbito nacional [29] y en otro de ámbito internacional [28] y han sido recientemente aceptados para su publicación en una revista [30].

También en el capítulo 4 se generalizan algunos de los resultados anteriores, pero trabajando ahora con conjuntos de puntos en posición general. Los resultados obtenidos son:

- El radio de $T(P_n)$ es $n - 2$.
- Todas las estrellas S_p con $p \in CH(P_n)$ o $p \in CH_2(P_n)$ están contenidas en el centro de $T(P_n)$.
- El centro de $T(P_n)$ está contenido en el conjunto de las estrellas.
- Si P_n es una nube con k capas convexas, entonces $\delta(T(P_n)) \leq (4k-2)(n-1)$.
- $\Delta(T(P_n)) \in \Omega(n^2)$.

El tipo de adyacencia que se ha estudiado de forma exhaustiva en esta memoria, esto es, el intercambio de una arista por otra, puede dar lugar a una transformación importante en el árbol obtenido.

De forma natural, cabe preguntarse por intercambios que de alguna forma permitan controlar más la transformación que se realiza.

Algunos de los resultados de este capítulo, para configuraciones de puntos en posición general, han sido presentados en el congreso canadiense sobre la materia [31].

En el capítulo 5, siguiendo la misma línea de los capítulos anteriores, se estudia el grafo de emparejamientos perfectos sin cortes $\mathcal{M}_m$ de un conjunto de $2m$ puntos que estén en posición convexa. Se han obtenido resultados muy interesantes sobre las propiedades combinatorias de estos grafos:

- Se determina el grado mínimo y el grado máximo, así como el tipo de emparejamientos en que se alcanzan estos grados extremos.
- Se determina el diámetro. También se demuestra que todos los emparejamientos tienen excentricidad máxima.
- Se demuestra que estos grafos son bipartitos.
- Se demuestra que si m es impar entonces no existe un camino hamiltoniano en $\mathcal{M}_m$.
- Se da una construcción recursiva para obtener un ciclo hamiltoniano en $\mathcal{M}_m$ si m es par.

Finalmente, se estudia la relación existente entre los emparejamientos de $\mathcal{M}_m$ y las permutaciones de m elementos. Acabamos demostrando que hemos obtenido una nueva familia de permutaciones con cardinal los números de Catalan.

Una selección de los resultados que aquí se exponen sobre los grafos $\mathcal{M}_m$ ha sido aceptada para su presentación en un congreso de ámbito internacional [33] y está pendiente de aceptación en el congreso nacional de geometría computacional [34].

Problema 3: Empaquetamiento plano de grafos

Se dice que los grafos $H_1, \ldots, H_k$ admiten un empaquetamiento en un grafo G, si G contiene subgrafos isomorfos a $H_1, \ldots, H_k$ disjuntos en aristas. Existen numerosos resultados sobre este tipo de problemas y sus generalizaciones, particularmente sobre el empaquetamiento de árboles.

Cuando a la estructura combinatoria se le añaden propiedades de representación, el problema se complica sensiblemente. En este tipo de problemas hemos centrado nuestra atención en el capítulo 3 de esta memoria. Es éste un problema en cierto modo dual al anterior. Partimos de la combinatoria y llegamos a la geometría.

Antecedentes

Una línea de investigación muy activa es la que se dedica al estudio de empaquetamiento de grafos en el grafo completo K_n (véase, por ejemplo, [27], [52]). Nosotros vamos a estudiar el empaquetamiento en grafos planos.

Se dice que un grafo es plano si se puede dibujar en el plano de forma que las aristas no se cortan salvo quizás en los extremos. Un resultado clásico (Wagner) es que todo grafo plano puede ser dibujado en el plano de forma que sus aristas son segmentos rectilíneos y sin cortes. Más reciente es el trabajo [45] de Y. Ikebe y otros que muestra que dado un árbol T de n vértices y raíz r y un conjunto P de n puntos en el plano, y un punto $p \in P$ distinguido, siempre se puede dibujar T de forma que el conjunto de vértices de T sea P, r se identifique con p y las aristas sean segmentos rectilíneos y sin cortes. En esta línea, pero con dos árboles con raíz, trabajan A. Kaneko y M. Kano en [46] y [47].

Trabajo realizado

En el capítulo 3 se estudia el trazado de dos árboles de n vértices en una nube P de n puntos, pero bajo un prisma diferente a los trabajos antes citados. En la presente memoria nos interesamos por la superposición del dibujo de los dos árboles de forma que se puedan visualizar bien los dos grafos; para ello necesitamos que no compartan aristas. Esto es lo que llamaremos un empaquetamiento plano de los dos árboles.

ciones adecuadas sobre nubes de puntos en posición convexa, se demuestran los siguientes resultados. Para T un árbol cualquiera de orden n que no es una estrella, admiten empaquetamiento plano:

- una cuasiestrella de orden n y T,
- dos copias de T,
- un camino de orden n y T, y
- un ciclo de orden n y T.

También se han obtenido ciertos resultados sobre ciclos, concretamente se dan de forma explícita empaquetamientos de

- dos ciclos de orden n, con $n = 6$ o $n > 7$,
- tres ciclos de orden $n-1$, $n-2$ y $n-3$, con $n = 6$ o $n > 7$,
- tres ciclos de orden $n-2$, con $n = 6$ o $n > 7$,
- tres caminos de orden $n-1$, con $n = 6$ o $n > 7$.

Una selección de los resultados aquí expuestos se presentaron en [14].