

**Anells cordals: propietats
estructurals i models
de comunicacions**

Tesi doctoral presentada per
Lali Barrière Figueroa

Director
Josep Fàbrega Canudas

Voldria fer constar el meu agraïment a totes les persones que d'una manera o d'una altra m'han ajudat a acabar aquesta tesi.

Al meu director, el Josep Fàbrega, i al meu tutor, l'Enric Fossas, pel seu ajut i la paciència que han tingut amb mi. També a la Margarida Mitjana, amb qui espero poder seguir treballant, així com a tota la gent del grup de recerca de Teoria de Grafs. A les persones que he conegut al LRI, a Orsay, pel que he pogut aprendre amb ells. A la Johanne i els seus companys de despatx, i a la Dominique, gràcies per l'amistat.

Igualment he de donar les gràcies a les “nenes” del despatx 113 de Vilanova, la Joana, la Imma i la Fina, i a les seccions vilanovines del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la UPC.

I, sobretot, vull agrair el recolzament de les persones que tinc més aprop. Gràcies a la meva família: els pares, la Montse, el Joan, el Manel i el Pierre. I als amics: a la Txell i l'Endika, al Josep Maria, encara que ja no hi sigui, al Toni Jiménez, el Nando i tots els altres, a la Katy, al Jordi Blasco, a l'Àngel. I a tots els que em deixo.

Índex

Introducció	1
1 Previs	7
1.1 Teoria de grafs	7
1.2 Grafs de Cayley	10
1.2.1 Definició	10
1.2.2 Propietats	11
1.2.3 Grafs circulants	11
1.3 Comunicacions	12
1.3.1 Encaminaments	13
1.3.2 Disseminació d'informació	14
1.4 Grafs i tessellacions	18
1.4.1 Grafs de triple llaç	20
1.4.2 Coordenades dels vèrtexs	22
2 Anells cordals	29
2.1 Introducció	29
2.2 Definició i propietats	31
2.3 Anells cordals i tessellacions del pla	34
2.3.1 Tessel·lació associada a un anell cordal	35
2.3.2 Graf de triple llaç associat	37
2.3.3 Ordre màxim	38
2.4 Reconeixement d'un anell cordal	41
2.4.1 Caracterització dels 4-cicles i 6-cicles	41
2.4.2 Algorisme <i>RAC</i>	47
2.5 Grup d'automorfismes	51
2.6 Anells cordals isomorfs	59
2.7 Aresta-bisecció dels anells cordals	61
2.7.1 Preliminars	61
2.7.2 Aresta-bisecció de $C_{2n}(-1, d, 1)$	65
2.7.3 El cas general	69

3	Encaminament en anells cordals òptims	71
3.1	L'encaminament	71
3.1.1	Definició de $\rho(x, y)$	72
3.1.2	Els arbres de l'encaminament	75
3.2	Vulnerabilitat	76
4	<i>Gossiping</i> en anells cordals	87
4.1	Preliminars	87
4.1.1	Mode de comunicació EDP	87
4.1.2	Algorisme en tres fases	88
4.1.3	<i>Gossiping</i> en el graf complet	89
4.2	<i>Gossiping</i> en $C_{2n}(-1, d, 1)$	90
4.2.1	El cas $2n = (d + 1)^2$	90
4.2.2	Descomposició de $C_{2n}(-1, d, 1)$	94
4.2.3	Cas $2n = a(d + 1)$	94
4.2.4	Temps de l'algorisme en el cas $2n = a(d + 1)$	96
4.2.5	Cas general	96
4.2.6	Temps de l'algorisme en el cas general	99
4.3	Optimalitat de l'algorisme	99
5	Conclusions	101
5.1	Aportacions d'aquesta tesi	101
5.1.1	Propietats estructurals	102
5.1.2	Comunicacions	104
5.2	Problemes oberts	105
5.2.1	Anells cordals	105
5.2.2	Generalitzacions	106
5.2.3	Comunicacions	107
5.2.4	Vulnerabilitat d'encaminaments en el cas no òptim	107
5.2.5	Encaminaments òptics	108
	Bibliografia	111

Introducció

Una xarxa és un conjunt d'elements o nodes lligats per enllaços físics. Un graf és, per definició, l'objecte matemàtic que permet modelar una xarxa. Els vèrtexs s'associen als nodes, de manera que les arestes (o arcs en el cas dirigit) s'associen als enllaços. L'interès d'aquestes estructures és la possibilitat de comunicar els elements entre ells. Quan el nombre d'enllaços és limitat, la comunicació entre dos vèrtexs s'estableix a través de vèrtexs intermitjos. Per tant, el primer que interessa és que la distància entre dos punts sigui petita i que el camí a seguir per anar d'un punt a un altre sigui fàcil de determinar. Aquests i altres problemes que es poden plantejar depenen de diversos factors.

Quan es parla de xarxes en un entorn informàtic, es fa referència a diferents tipus de xarxes: un conjunt d'ordinadors connectats entre ells, o xarxa de comunicacions, presenta unes condicions molt diferents que un conjunt de processadors treballant en paral·lel com una sola màquina, on les comunicacions es realitzen a través de la xarxa d'interconnexió. En el primer cas, la topologia de la xarxa vindrà determinada per les necessitats dels usuaris i, en principi, s'haurà d'acceptar que el model pot ser qualsevol graf. Una xarxa amb un nivell d'integració més alt imposarà menys restriccions a l'hora de triar el model.

La xarxa d'interconnexió és un dels elements més importants d'una màquina distribuïda, en què un problema és resolt per diversos processadors [65, 71, 79]. La distribució de dades i l'intercanvi o difusió de resultats intermitjos s'han de poder efectuar de manera ràpida i eficaç, perquè influeixen en el temps d'execució dels programes tant com la rapidesa de càlcul de cada processador. I malgrat els avenços tecnològics, les comunicacions són lentes comparat amb les operacions de càlcul. És per això que es solen triar topologies amb propietats de simetria, que faciliten la resolució de problemes [6, 11].

A més de les restriccions que imposa el tipus de xarxa, hi ha altres condicionants de tipus tecnològic. Això vol dir que es tenen limitacions sobre el nombre d'enllaços i sobre com es realitza la comunicació. Des de les primeres xarxes en mode telèfon, fins a les actuals xarxes de tecnologia òptica, s'ha passat per diversos models de comunicació, i els avenços en aquest camp han portat problemes nous. Per exemple, en una xarxa òptica, cada enllaç pot

ser utilitzat simultàniament per més d'una transmissió, gràcies a les diferents longituds d'ona; i gràcies al desenvolupament dels dispositius d'encaminament, hi ha la possibilitat d'establir comunicacions entre nodes allunyats, sense que els nodes intermitjos necessitin emmagatzemar el missatge [19].

Quins són els problemes que es poden plantejar i els factors a tenir en compte quan es modela una xarxa per un graf? En primer lloc, és interessant estudiar topologies amb propietats de simetria, ja que permeten simplificar la definició d'algorismes per a les comunicacions. Han estat molt estudiats els grafs vèrtex-simètrics, que són grafs que es veuen de la mateixa manera des de qualsevol dels seus vèrtexs. Dins d'aquests, els grafs de Cayley són grafs definits a partir de l'operació d'un grup, i per tant permeten utilitzar l'àlgebra [62].

A més, i dins de l'estudi de la topologia, hi ha alguns paràmetres del graf que s'han de considerar si es vol que les comunicacions es realitzin de manera eficient i fiable. El diàmetre és un paràmetre important, ja que dona una idea de com poden estar d'allunyats dos vèrtexs, és a dir del retard en les comunicacions. És el primer dels paràmetres a tenir en compte, i es demana que sigui petit. A més el nombre d'enllaços, que en el graf és el grau, sol estar limitat. Aquest és el primer conflicte que apareix i la cerca de grafs amb una bona relació entre el nombre d'enllaços i les distàncies entre nodes ha sigut l'objecte d'estudi de molts treballs en teoria de grafs [22, 43]. La connectivitat del graf està lligada a un problema de caire diferent: donat que el nombre d'elements de la xarxa pot ser gran, s'ha de preveure que alguns dels elements puguin fallar, i interessarà que això afecti el mínim possible el funcionament de la resta de la xarxa, és a dir que el graf resultant d'eliminar els elements que fallen segueixi sent connex.

Quant als esquemes per a les comunicacions, es distingeix entre comunicacions punt a punt o encaminament de missatges, i comunicacions globals, on es troben implicats tots els nodes.

Un encaminament és una funció que diu, per a cada parella de vèrtexs, quin és el camí que s'ha de seguir quan s'ha d'enviar informació d'un a l'altre. Per al bon funcionament de la xarxa, fins i tot quan es produeixen avaries en algun dels seus elements, els algorismes d'encaminament han de satisfer algunes propietats. Haurien de ser senzills en la seva definició. A més, en cas de fallada d'alguns elements, s'han de poder reencaminar els missatges entre els nodes que segueixen actius. Es diu que l'encaminament ha de ser poc vulnerable, i es mesura aquesta condició amb dos paràmetres bàsics. La vulnerabilitat del diàmetre diu com augmenta el diàmetre del graf quan es suprimeixen els elements que ja no estan actius, i és independent de l'encaminament considerat [100]. El graf de supervivència [44] és un graf en què dos nodes són adjacents si el camí entre aquests dos nodes donat per l'encaminament no es veu afectat per les fallades. El seu diàmetre indica en quants passos es pot reencaminar un missatge, si es volen fer servir els camins fixats per l'encaminament [83]. Finalment, per assegurar

que l'encaminament està ben distribuït, és a dir, que no hi ha nodes ni enllaços que hagin de suportar un trànsit excessiu quan diverses parelles de vèrtexs comuniquen simultàniament, s'introdueix l'índex de transmissió [35], o nombre màxim de camins que passen per un vèrtex o arc. Per minimitzar conflictes es busca que l'índex de transmissió sigui petit.

En les comunicacions que impliquen tots els vèrtexs hi ha tres problemes bàsics: *broadcasting* o difusió d'informació, acumulació, i *gossiping* o intercanvi d'informació [56, 66]. Les restriccions imposades per com la informació passa d'un node a un altre a través dels enllaços i com es comporta el missatge en els nodes intermitjos han donat lloc a diversos models, més o menys realistes. És per això que la literatura sobre el tema és molt extensa.

Per acabar, un altre tipus de problema que no s'ha estudiat en aquest treball és el de l'emulació d'una xarxa per una altra. En cas de tenir algorismes prou bons en un cert model, pot ser interessant poder-los implementar en una xarxa modelada per un graf diferent. El problema és com es simulen en la xarxa els enllaços del model on es té definit l'algorisme, és a dir, l'estudi d'immersions de grafs.

Aquesta tesi contribueix a l'estudi dels grafs com a models per a xarxes d'interconnexió. Ha estat realitzada en el marc de les activitats de recerca del Grup de Teoria de Grafs i Combinatòria del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya. Part del treball s'ha dut a terme al Laboratoire de Recherche en Informatique de la Université de Paris-Sud.

El treball tracta de les propietats d'una família de grafs, anomenats anells cordals, que poden ser representats utilitzant tessellacions del pla. Tot i que en el seu conjunt els resultats, basats en gran mesura en aquesta eina geomètrica, han estat motivats per l'estudi de les comunicacions, una part important de la tesi està dedicada a les propietats estructurals dels anells cordals.

Els anells cordals són grafs regulars de grau 3 que es defineixen a partir d'un cicle d'ordre parell, afegint a cada vèrtex una corda de longitud constant, senar. Associant a cada vèrtex un triangle, es pot fer correspondre a cada graf de la família una tessellació del pla. El treball de cerca bibliogràfica ha posat de manifest que, amb el nom d'anells cordals es coneixen també altres famílies de grafs. Sobretot, hi ha molts treballs que parlen d'anells cordals referint-se als grafs circulants que contenen l'1 en el conjunt de generadors, i més en particular als de grau 4 o grafs de doble llaç. Un dels objectius del treball és mostrar de quina manera els anells cordals tal com estan definits aquí estan relacionats amb els grafs circulants. A més, es veu que aquests grafs són grafs de Cayley sobre el grup dièdric i tenen, per tant, bones propietats de simetria.

Quant a les propietats dinàmiques d'aquests grafs, hi ha en aquesta tesi dues parts ben diferenciades. La definició i estudi de la vulnerabilitat d'encaminaments en anells cordals de diàmetre senar i ordre màxim, i la

definició d'un algorisme de *gossiping* en el mode de comunicació de camins aresta-disjunts, amb l'estudi de la seva optimalitat. Aquests problemes i altres sobre comunicacions que resten oberts han portat al plantejament de qüestions referents a les propietats de simetria i als valors de certs paràmetres dels grafs.

El càlcul de cotes superiors de la bisecció ha estat utilitzat per a l'estudi de la complexitat de l'algorisme de *gossiping*. Amb l'estructura cíclica del graf s'ha pogut determinar el grup d'automorfismes i les classes d'isomorfisme dins de la família, i també mostrar com la tessellació associada a un anell cordal el determina de manera única. En particular, es sap que els anells cordals arc-transitius són justament els que en la tesi s'anomenen anells cordals òptims, que tenen diàmetre senar i ordre màxim, i per als quals s'ha pogut estudiar el problema de la vulnerabilitat d'encaminaments.

La organització d'aquest treball és la següent.

Segueix a aquesta introducció un capítol de resultats previs, on es donen les nocions bàsiques de teoria de grafs, i també la definició i propietats elementals dels grafs de Cayley i els grafs circulants. Un apartat sobre comunicacions introdueix els conceptes bàsics i resultats necessaris en capítols posteriors sobre encaminaments i comunicacions globals. Finalment, s'inclou en aquest capítol un apartat on es parla dels grafs de triple llaç, per la seva estreta relació amb els anells cordals. Encara que es tracti d'un capítol de resultats previs, l'algorisme de càlcul de coordenades en un graf de triple llaç és part de l'article [18], que ha estat acceptat per a publicació a la revista *Networks*. L'interès de la secció on es presenta aquest càlcul és el fet de donar una formalització de la representació dels grafs amb tessellacions.

En el capítol 2 es defineixen els anells cordals i s'estudien les seves propietats. Es fa èmfasi en la tessellació associada a cada graf i les propietats que se'n dedueixen. L'apartat 2.4 presenta un algorisme de reconeixement d'anells cordals, i en l'apartat 2.5 es caracteritza el grup d'automorfismes d'aquests grafs. Aquests dos apartats han constituït l'article [15], presentat al congrés *6th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity, (SIROCCO'99)* i publicat a les seves actes. Quant a l'apartat 2.7, on es donen cotes superiors per a l'aresta-bisecció dels anells cordals, ha donat lloc al report de recerca [17].

Els capítols 3 i 4 tracten de problemes de comunicacions. La definició i estudi de la vulnerabilitat d'un encaminament per a anells cordals òptims, és a dir, amb un nombre màxim de vèrtexs respecte del diàmetre, es troba al capítol 3. Es dona un algorisme per al càlcul efectiu de vèrtexs centrals en cas de fallada d'un o dos vèrtexs. Com s'ha comentat més amunt, aquest capítol és part de l'article [18]. I en el capítol 4 es dona un algorisme de *gossiping* en el model de camins aresta-disjunts. Es descriu el mode de comunicació, així com l'algorisme genèric, basat en una descomposició del graf en subgrafs interconnectats, que permet després fer-ne una anàlisi senzilla de la complexitat. L'optimalitat de l'algorisme s'estudia recolzant-se en els

resultats sobre l'aresta-bisecció de l'apartat 2.7. Aquest capítol és fruit de la col·laboració amb Johanne Cohen del Laboratoire de Recherche en Informatique de la Université Paris-Sud, i amb Margarida Mitjana, del Departament de Matemàtica Aplicada I de la UPC, i ha donat lloc a l'article [16], presentat al congrés *MFCS'98, Workshop on Communication*, i publicat a les actes. Una versió final d'aquest treball ha estat acceptada per a publicació a la revista *Theoretical Computer Science*.

Finalment, el capítol 5 conté, com a conclusió del treball, una descripció d'alguns problemes oberts, amb apunts sobre el possible desenvolupament del treball posterior.

Capítol 1

Previs

En aquest capítol es presenten definicions i resultats que s'utilitzen en els capítols següents. En la secció 1.1 són introduïts els conceptes i propietats bàsics de teoria de grafs. Seguidament es tracten alguns temes relacionats amb aquest treball. Donat que els anells cordals són grafs de Cayley que provenen de grafs circulants, en la secció 1.2 hi ha la definició, les propietats bàsiques dels grafs de Cayley en general i dels grafs circulants en particular. A més, com que en aquest treball s'ha utilitzat la representació mitjançant tessel·lacions del pla per als anells cordals, en la secció 1.4 es mostra en què consisteix aquesta representació i quins són els treballs existents que utilitzen aquesta tècnica. Com es veu més endavant, es pot associar a un anell cordal un graf de triple llaç, i per tant, poden ser útils algunes de les seves propietats, que es presenten en la secció 1.4.1. La secció 1.3, que tracta sobre encaminaments i comunicacions globals, conté definicions i resultats necessaris en els capítols 3 i 4.

1.1 Teoria de grafs

Un *graf* és un parell ordenat de conjunts, $G = (V, E)$, tal que $E \subset \mathcal{P}_2(V)$. Els elements de V es diuen *vèrtexs* i els elements de E es diuen *arestes*. L'*ordre* de G és el nombre de vèrtexs, $n = |V|$, i la *mida* de G és el nombre d'arestes, $m = |E|$. Si $e = \{u, v\} \in E$, es diu que u i v són els *extrems* de e i també que u i v són *adjacents* i s'escriu $u \sim v$. Dues arestes són *incidentes* si comparteixen un dels extrems. Dos vèrtexs no adjacents, o dues arestes no incidentes, es diu que són *independents*. Normalment es representa un graf en el pla: un punt per a cada vèrtex amb línies que uneixen les parelles de vèrtexs adjacents. Enumerant els vèrtexs entre 1 i n , la *matriu d'adjacències* de G és una matriu $n \times n$, $A = (a_{i,j})$, els elements de la qual són 1 o 0: $a_{i,j} = 1$ si i només si els vèrtexs i i j són adjacents.

Sigui $G = (V, E)$ un graf i v un vèrtex de G . Es defineix el conjunt de *veïns* de v per: $\Gamma(v) = \{u \in V, u \sim v\}$. Aleshores, el *grau* de v , $d(v)$, és el

nombre de vèrtexs adjacents a v , és a dir, $d(v) = |\Gamma(v)|$. El *grau mínim* de G és $\delta(G) = \min_{v \in V} \{d(v)\}$ i el *grau màxim* de G és $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}$. En un graf d'ordre n sempre es compleix: $0 \leq \delta \leq \Delta \leq n - 1$. Si $\delta = \Delta = d$, es diu que el graf és *regular* de grau d o d -regular.

Dos grafs $G = (V, E)$ i $H = (W, F)$ són *isomorfs*, $G \cong H$, si existeix una bijecció $\alpha : V \rightarrow W$ tal que per a tota parella de vèrtexs de G , $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$ si i només si $\{\alpha(u), \alpha(v)\} \in F$. Si $e = \{u, v\}$, es defineix de manera natural $\alpha(e) = \{\alpha(u), \alpha(v)\}$. La bijecció α es diu que és un *isomorfisme* de G en H . Un *automorfisme* d'un graf G és un isomorfisme de G en G . Un graf G és vèrtex-transitiu si per a tota parella de vèrtex u, v hi ha un automorfisme de G , α , tal que $\alpha(u) = v$. Un graf G és aresta-transitiu si per a tota parella d'arestes e, f hi ha un automorfisme de G , α , tal que $\alpha(e) = f$. Si es té en compte la orientació es diu que el graf és arc-transitiu.

Un *digraf* o *graf dirigit* és un parell ordenat de conjunts $D = (V, A)$, tal que $A \subseteq V \times V - \{(v, v), v \in V\}$. Els elements de A es diuen *arcs*. Donat un vèrtex v d'un digraf D el *grau de sortida* de v , $d^+(v)$, és el nombre d'arcs amb origen v , i el *grau d'entrada* de v , $d^-(v)$, és el nombre d'arcs amb final v . Un digraf és regular de grau d quan per a tot vèrtex de D , v , es compleix $d^+(v) = d^-(v) = d$. Els conceptes que es donen per a grafs es poden donar de manera anàloga per a digrafs, amb les diferències que es deriven de la definició. A vegades pot interessar també, tan en el cas de grafs com de digrafs, considerar *arestes múltiples*, és a dir, arestes diferents amb els mateixos extrems, o bé *llaços*, és a dir, arestes amb els dos extrems iguals.

El *graf complet* d'ordre n , K_n , és el graf on cada vèrtex és adjacent a tots els altres. El graf K_1 , que consisteix en només un vèrtex, s'anomena *graf trivial*. El *graf camí* o *trajecte* de llargada n és el graf $P_n = (V, E)$ tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}, i = 1, \dots, n - 1\}$. El *cicle* d'ordre n és el graf $C_n = (V, E)$ tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}, i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$.

Un graf és *bipartit* si hi ha una partició dels vèrtexs en dues classes tal que cadascuna de les arestes té un extrem en cada classe.

Donat un graf $G = (V, E)$ un *subgraf* de G és un graf $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ i $F \subseteq E$. Si $W = V$, es diu que H és un subgraf generador. Si $W \subseteq V$, el *subgraf induït* de G per W és $G[W] = (W, E(W))$, on $E(W)$ són les arestes de G que tenen els dos extrems a W .

Un *recorregut de longitud* l en G és una successió de vèrtexs v_0, v_1, \dots, v_l que satisfà: per a tot i , si $0 \leq i < l$, aleshores $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Els vèrtexs v_0 i v_l s'anomenen, respectivament, origen i final del recorregut, i la resta de vèrtexs són vèrtexs interns del recorregut. Un *circuit* o recorregut *tancat* és un recorregut tal que $v_0 = v_l$. Un *camí* és un recorregut sense vèrtexs repetits. Un *cicle* és un camí tancat. Si entre dos vèrtexs u, v de G hi ha

un camí, la *distància* entre u i v és $d(u, v) = \min\{l, \exists \text{ un camí de longitud } l \text{ de } u \text{ a } v\}$. Si entre dos vèrtexs u, v de G no hi ha cap camí, aleshores $d(u, v) = \infty$. Un graf G és *connex* si per a tota parella de vèrtexs u, v , hi ha un camí de u a v . Els *components connexos* de G són els subgrafs de G connexos maximals. El *diàmetre* de G és $D(G) = \max\{d(u, v), u, v \in V\}$.

Un graf G és *k -connex* si suprimint $k - 1$ vèrtexs qualssevol no es desconnecta, és a dir, per a tot $S \subseteq V$, si $|S| = k - 1$, aleshores $G - S$ és connex. La *connectivitat* de G , $\kappa(G)$ és el mínim nombre de vèrtexs que s'han de suprimir de G per tal que deixi de ser connex o s'arribi al graf trivial. És a dir, $\kappa(G) = k$ si i només si G és k -connex, però no és $(k + 1)$ -connex. L'*aresta-connectivitat* de G , $\lambda(G)$, és el mínim nombre d'arestes que s'han de suprimir de G per tal que deixi de ser connex, si $G \neq K_1$. Es defineix $\kappa(K_1) = 0$. Es compleix per a tot graf, G , $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Un *vèrtex-bisector* de G és un subconjunt de V que separa el graf en dos conjunts de vèrtexs d'igual cardinal, és a dir, hi ha una partició en dues classes del conjunt V menys el conjunt bisector, totes dues amb el mateix nombre de vèrtexs, de manera que no hi ha cap aresta amb un extrem a cada classe. La *vèrtex-bisecció* de G és el mínim cardinal dels vèrtex-bisectors. Un *aresta-bisector* de G és un subconjunt de E que separa el graf en dos conjunts de vèrtexs amb cardinal igual o diferents en una unitat, és a dir, hi ha una partició en dues classes del conjunt V amb el mateix nombre de vèrtexs, o un d'ells amb un vèrtex més que l'altre, de manera que les úniques arestes entre aquests dos conjunts són les de l'aresta-bisector. L'*aresta-bisecció* de G és el mínim cardinal dels aresta-bisectors.

Un recorregut de G és *eulerià* si en ell apareixen totes les arestes una única vegada. Es diu que un graf és *eulerià* si té un circuit eulerià. Un graf connex G és eulerià si i només si tots els vèrtexs tenen grau parell. Un graf connex G té un recorregut eulerià de u a v si i només si els únics vèrtexs de grau senar de G són u i v . Un camí de G és *hamiltonià* si recorre tots els vèrtexs. Es diu que un graf és *hamiltonià* si té un cicle hamiltonià. No es coneix un teorema de caracterització de grafs hamiltonians.

Un graf $T = (V, E)$ és un *arbre* si és connex i acíclic. Els arbres són els grafs connexos minimals, o bé els grafs acíclics maximals. Es poden definir també com els grafs tals que entre dos vèrtexs qualssevol hi ha un únic camí. Una *fulla* d'un arbre és un vèrtex de grau 1. Donat un graf G , un *arbre generador* de G és un subgraf generador de G que com a graf és arbre.

Una *k -coloració* d'un graf G és una aplicació $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que si u i v són vèrtexs adjacents de G , aleshores $c(u) \neq c(v)$. La imatge d'un vèrtex, $c(u)$, es diu *color* de u . Si un graf admet una k -coloració es diu que és *k -colorable*. Una *k -aresta-coloració* d'un graf G és una aplicació $c : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que si e_1 i e_2 són arestes incidents de G , aleshores $c(e_1) \neq c(e_2)$. La imatge d'una aresta, $c(e)$, es diu *color* de e .

Altres definicions i resultats generals de teoria de grafs es poden trobar en [26] o bé en [32].

1.2 Grafs de Cayley

Els grafs de Cayley van ser introduïts com una manera de representar grups [30, 31]. Amb els elements del grup com a conjunt de vèrtexs, les adjacències es defineixen mitjançant un subconjunt generador a partir de l'operació del grup. Això permet utilitzar l'àlgebra per a l'estudi de les seves propietats. En particular, com que són vèrtex-transitius, és a dir, tots els seus vèrtexs són equivalents, poden ser bons com a models de xarxes d'interconnexió, a l'hora d'implementar algorismes d'encaminament i de comunicació (vegi's la secció 1.3). Sobre grafs de Cayley en general i propietats de simetria en grafs en particular, la literatura és molt extensa. Una de les referències interessants és el llibre [58], del qual formen part el treball de Scapellato [106] sobre grafs vèrtex-transitius i grups de permutacions, l'estudi sobre isomorfisme de grafs circulants d'Alspach [7], i el *survey* sobre grafs de Cayley i xarxes d'interconnexió de Heydemann [62], on es donen resultats sobre encaminaments, connectivitat i índex de transmissió. Alguns autors estudien les propietats dels grafs de Cayley i com classificar-los a partir de l'estructura del grup sobre el qual estan definits, Li *et al.* [81]. Hi ha també treballs que estudien les propietats dels grafs de Cayley com a models de xarxes d'interconnexió, per exemple els de Akers i Krishnamurthy [5, 6], Annexstein *et al.* [11], el de Dinneen i Hafner [43] sobre el problema (Δ, D) , Annexstein i Baumslag [10] presenten cotes sobre el diàmetre i la bisecció en grafs de Cayley, Hamidoune i Serra en [60] calculen la vèrtex-bisecció de grafs de Cayley sobre grups abelians, i Schibell [107] estudia problemes d'encaminament utilitzant la representació de recorreguts per una successió de generadors.

Tot seguit es presenten la definició i les propietats bàsiques d'aquests grafs. Per a les definicions i resultats bàsics de teoria de grups es poden consultar, per exemple, els llibres [59] i [102].

1.2.1 Definició

Donat un grup $(\Gamma, *)$ i un subconjunt de Γ , S , el *graf de Cayley de Γ i S* és el digraf $Cay(\Gamma, S)$ amb conjunt de vèrtexs Γ i arcs $(g, g * s)$ per a tot $g \in \Gamma$, $s \in S$. Un arc de la forma $(g, g * s)$ es diu que està etiquetat per s o que té color s . Si el subconjunt S genera Γ , el graf $Cay(\Gamma, S)$ s'anomena graf de Cayley de Γ generat per S .

Si S no conté l'element neutre i és tancat per inversos, aleshores $Cay(\Gamma, S)$ és un graf, o un digraf simètric.

Els grafs de Cayley més senzills són el graf complet K_n i el cicle C_n . Els grafs circulants, presentats més avall, són grafs de Cayley sobre grups cíclics. L'hipercub $H(n)$, el graf *Star*, el graf *Butterfly* són també grafs de Cayley que han estat estudiats des del punt de vista de les xarxes d'interconnexió (vegi's [79, 104]).

1.2.2 Propietats

Els grafs de Cayley són vèrtex-transitius. En efecte, si $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$, es pot considerar per a tot $w \in \Gamma$ la bijecció de Γ donada per $\alpha_w(v) = w*v$ per a tot $v \in \Gamma$. Aquestes bijeccions són automorfismes del graf que conserven el color de les arestes. S'anomenen translacions i formen un subgrup regular del grup d'automorfismes de G , isomorf a Γ , denotat per $G_L = \{\alpha_w, w \in \Gamma\}$. Sabidussi en [105] caracteritza els grafs de Cayley com els grafs tals que el seu grup d'automorfismes conté un subgrup que actua regularment sobre el conjunt de vèrtexs.

Donats dos vèrtexs qualssevol d'un graf de Cayley, x i y , l'automorfisme $\alpha_{x,y} = \alpha_{y*x^{-1}}$ és la translació que satisfà $\alpha_{x,y}(x) = y$.

Els resultats coneguts sobre hamiltonisme en grafs de Cayley es presenten en els treballs de Gallian i Witte [57] i de Curran i Gallian [39]. La conjectura, proposada per diversos autors, que diu que tot graf de Cayley de més de dos vèrtexs és hamiltonià, resta oberta.

1.2.3 Grafs circulants

Els grafs de Cayley sobre \mathbb{Z}_n s'anomenen *digrafs circulants*, ja que van ser definits per primera vegada com grafs per als quals la matriu d'adjacència és una matriu circulant. Quan són simètrics, és a dir, quan el subconjunt generador és tancat per inversos, s'anomenen grafs de múltiple pas, i han estat molt estudiats des del punt de vista de les xarxes d'interconnexió (vegi's el *survey* de Bermond *et al.* [20]). El problema de l'isomorfisme entre circulants també ha estat molt estudiat utilitzant les propietats de \mathbb{Z}_n com a grup i de l'anell de les arrels n -èsimes de la unitat. La generalització de la definició ha donat lloc a noves famílies de grafs com els grafs c -circulants [28, 88] i els grafs endo-circulants [27, 29], o els circulants multidimensionals [53, 54].

Definició

El digraf circulant d'ordre n i grau d amb passos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\} \subset \mathbb{Z}_n$, $G(n, A)$, és el digraf amb conjunt de vèrtexs \mathbb{Z}_n i adjacències donades pels passos, de manera que per a tot $i \in \mathbb{Z}_n$, i és adjacent a $i + a_j$, per a tot $j = 1, \dots, d$. És a dir, $G(n, A)$ és el graf de Cayley sobre \mathbb{Z}_n amb subconjunt generador A . Si $A = -A$ es tracta d'un graf.

Els digrafs circulants de grau dos s'anomenen *digrafs de doble llaç*, i els de grau quatre simètrics *grafs de doble llaç*. Igualment, els digrafs circulants de grau tres s'anomenen *digrafs de triple llaç*, i els de grau sis simètrics *grafs de triple llaç*. El *graf de doble llaç* d'ordre N i passos A i B és el graf $D_N(A, B) = G(N, S)$, on el conjunt S és $S = \{\pm A, \pm B\}$. Així, el conjunt de vèrtexs és \mathbb{Z}_N i per a cada $i \in \mathbb{Z}_N$, $i \sim i \pm A$ i $i \sim i \pm B$, amb les operacions mòdul N . El *graf de triple llaç* d'ordre N i passos A, B i C

és el graf $T_N(A, B, C) = G(N, S)$, on el conjunt S és $\{\pm A, \pm B, \pm C\}$. Com en els grafs de doble llaç, el conjunt de vèrtexs és \mathbb{Z}_N i per a cada $i \in \mathbb{Z}_N$, $i \sim i \pm A$, $i \sim i \pm B$ i $i \sim i \pm C$, amb les operacions mòdul N .

Propietats

Una matriu $n \times n$, $M = (a_{i,j})$, es diu que és circulant si i només si la fila $i+1$ s'obté desplaçant cíclicament un lloc cap a la dreta els elements de la fila i [40]. Per a tot $i = 1, \dots, n-1$, $a_{i+1,j} = a_{i,j-1}$ si $2 \leq j \leq n$, i $a_{i+1,1} = a_{i,n}$. Un digraf G és un digraf circulant si i només si, amb un cert ordre per als vèrtexs, la seva matriu d'adjacències és una matriu circulant.

Un digraf és circulant si i només si el seu grup d'automorfismes té un subgrup cíclic. Això és conseqüència de la caracterització dels grafs de Cayley donada per Sabidussi [105], i implica que tot graf vèrtex-transitiu d'ordre primer és circulant [80, 110].

La conjectura d'Ádám, proposada el 1967 en [1], diu que dos digrafs circulants $G(n, A)$ i $G(n, A')$ són isomorfs si i només si hi ha un element inversible, $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$, tal que $A' = \lambda A$. És clar que si $A' = \lambda A$ amb λ inversible, aleshores $G(n, A) \cong G(n, A')$, però el recíproc és fals. Això va donar lloc al concepte d'Ádám-isomorfisme: dos digrafs circulants $G(n, A)$ i $G(n, A')$ són Ádám-isomorfs si existeix un $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $A' = \lambda A$. Aquest concepte també ha estat també generalitzat a grafs de Cayley sobre altres grups [27, 29, 54].

Els pas i Turner [47] mostren que els grafs de triple llaç $T_{16}(1, 2, 7)$ i $T_{16}(2, 3, 5)$ són isomorfs però no Ádám isomorfs. En treballs posteriors, diversos autors han estudiat per a quins grafs la conjectura d'Ádám és certa, és a dir, per a quins valors de n i de d és el mateix isomorfisme que Ádám-isomorfisme. Per exemple, Alspach i Parsons [8] donen resultats en termes de l'ordre i Toida en [109] en termes del grau, Boesch i Tindell [25] conjecturen i Delorme *et al.* [41] demostren que per a $d = 2$ la conjectura d'Ádám és certa. També Mans *et al.* [84] extenen la classe de grafs que satisfan la conjectura d'Ádám amb tècniques de teoria de nombres sobre arrels de la unitat. Muzychuk [95] estudia el problema de reconèixer un graf circulant.

1.3 Comunicacions

Són diversos els problemes que es plantegen quan s'estudien els grafs com a models de xarxes d'interconnexió. En general, per treballar en paral·lel o en distribuït interessa que les comunicacions entre nodes siguin fiables i eficients. En aquest sentit és interessant l'estudi d'algorismes d'encaminament i de comunicació en diferents topologies. Es parla d'encaminament quan es volen establir comunicacions d'un node a un altre de la xarxa, i de comunicacions globals quan les comunicacions es realitzen entre conjunts de nodes, ja sigui per difondre la informació d'un node a tots els altres (o a un

subconjunt), *broadcasting*; acumular la informació de tots els nodes (o d'un subconjunt) cap a un, acumulació; o bé de fer conèixer a tots els nodes tota la informació del conjunt de tots els nodes, *gossiping*.

1.3.1 Encaminaments

Un encaminament estableix les comunicacions punt a punt. En general és interessant que l'encaminament estigui definit de manera senzilla, aprofitant les simetries del graf per tal que els camins siguin fàcils de determinar. En aquest sentit, diversos autors han estudiat encaminaments compactes i encaminaments per intervals. Per exemple, Narayanan *et al.* [96], Krizanc i Luccio [77].

A més de problemes relacionats amb la definició de l'encaminament, hi ha dos tipus de problemes importants. En primer lloc, el comportament de la xarxa quan es produeixen fallades. Per exemple, la connectivitat del graf és un paràmetre que és independent de com es realitzin les comunicacions i que dona una primera mesura de la fiabilitat de la xarxa, ja que indica el nombre màxim d'elements que poden fallar, si es vol assegurar que la xarxa segueix funcionant, és a dir, que el graf obtingut en eliminar els elements que fallen segueix sent connex. La vulnerabilitat del diàmetre, també independent de l'encaminament, mesura com augmenta el diàmetre del graf quan falla un cert nombre d'elements [100]. En canvi, fixat l'encaminament, estudiar-ne la vulnerabilitat és veure com es poden connectar els vèrtexs en cas que un element o més d'un falli. Un dels primers treballs sobre aquest tema és el de Dolev *et al.* [44], on s'introdueix el concepte de graf de supervivència. Es poden citar també, entre d'altres, els treballs de Mukhopadhyaya i Sinha [94] sobre vulnerabilitat d'encaminaments en grafs de múltiple pas, i en grafs de doble i triple llaç, Aguiló i Fiol [2], Arden i Lee [12], Escudero *et al.* [49], Fàbrega i Zaragoza [51], Liestman *et al.* [82], Manabe *et al.* [83], Mukhopadhyaya i Sinha [94], Narayanan i Opatrny [96], i Zaragoza [115].

El segon tipus de problemes, que no es presenten aquí, són els problemes deguts a conflictes. Quan hi ha més d'una parella de vèrtexs que es comuniquen entre ells pot ser que els dos camins comparteixin vèrtexs o arestes. El nombre de camins que passen per cada element, o índex de transmissió, depèn de l'encaminament i interessa que sigui com més petit millor. La resolució de problemes de congestió o, en el cas extrem, de bloqueig, haurà de passar per la redefinició dels camins. Si es fa de manera dinàmica parlem d'encaminaments adaptatius (vegi's el capítol 3 de [104] i les seves referències).

Un *encaminament* en un graf és una funció que defineix un camí per a cada parella de vèrtexs $(x, y) \rightarrow \rho(x, y) = x, x_1, \dots, x_{r-1}, y$.

Un encaminament és *de camí mínim* si per a tota parella de vèrtexs el camí definit té longitud igual a la distància. Un encaminament és *consistent*

si per a tota parella de vèrtexs x i y amb $\rho(x, y) = x, x_1, \dots, x_{d-1}, y$ es compleix $\rho(x, x_i) = x, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i$ i $\rho(x_i, y) = x_i, x_{i+1}, \dots, y$, per a tot i entre 1 i $d-1$. Si un encaminament és consistent, al fixar un vèrtex v del graf i considerar la unió dels camins $\rho(v, x)$, per a tot vèrtex x , s'obté un arbre. Un encaminament és *bidireccional* si per a tota parella de vèrtexs x i y amb $\rho(x, y) = x, x_1, \dots, x_{d-1}, y$ es compleix $\rho(y, x) = y, x_{d-1}, \dots, x_2, x_1, x$, és a dir, si el camí de y a x és el camí de x a y recorregut en sentit contrari.

Siguin G un graf, ρ un encaminament en G , i $F \subset V$ amb $|F| < \kappa(G)$. Aleshores, el *graf de supervivència* associat, $R(G, \rho)/F$, és un digraf que indica quins camins segueixen funcionant quan els elements de F fallen, és a dir, quins camins no contenen vèrtexs de F . Així, $R(G, \rho)/F = (V_R, E_R)$, amb $V_R = V - F$, vèrtexs de $G - F$, i $\{x, y\} \in E_R$ si i només si $\rho(x, y)$ no conté cap element de F . Donat que el subconjunt F indica quins són els elements del graf que fallen, la condició $|F| < \kappa(G)$ assegura la connexió del graf resultant. De manera anàloga es pot definir el graf de supervivència quan fallen enllaços. En aquest cas es tindrà $F \subset E$ amb $|F| < \lambda(G)$. El diàmetre del graf de supervivència dóna una mesura de la vulnerabilitat de l'encaminament. Donada una xarxa, un problema interessant és trobar encaminaments que tolerin la fallada de molts elements, sense que el diàmetre de l'arbre de supervivència s'incrementi massa.

Es diu que un vèrtex és (ρ, F) -central si en $R(G, \rho)/F$ és adjacent cap a i des de tots els altres. L'existència d'un vèrtex central és interessant perquè permet redefinir el camí entre dos vèrtexs qualssevol de fora de F en només dos passos, és a dir, assegura que el diàmetre del graf de supervivència és 2.

1.3.2 Disseminació d'informació

En l'estudi de les propietats de les xarxes d'interconnexió, el problema de la disseminació d'informació és una àrea de recerca molt activa [56, 104]. De fet, per que un graf sigui un bon model per a una xarxa d'interconnexió, les comunicacions en què es troben implicats tots els vèrtexs, és a dir, la difusió de la informació d'un vèrtex a tots els altres, l'acumulació de la informació de tots els vèrtexs en un, o bé la difusió simultània de la informació de tots els vèrtexs a tots els altres, s'han de poder realitzar de manera eficaç. La majoria de les biblioteques de comunicacions existents per a sistemes paral·lels, com MPI [99], inclouen procediments per a realitzar aquests processos. Això és degut a que la resolució d'un problema únic per diversos processadors passa per la distribució de dades i l'intercanvi i comparació de resultats intermitjos. Per exemple, per a la sincronització de processos [113], per a algorismes de cerca [42], i per a algorismes d'àlgebra lineal [45].

Hi ha tres problemes bàsics:

Difusió o *broadcasting* des d'un vèrtex: la informació que coneix un vèrtex s'ha de difondre a tots els vèrtexs del graf.

Acumulació en un vèrtex: hi ha un vèrtex que ha d'arribar a conèixer la informació de tots els altres.

Intercanvi o *gossiping*: cadascun dels vèrtexs ha d'arribar a conèixer la informació de tots els altres.

L'intercanvi d'informació entre dos vèrtexs, en el cas no dirigit, o la transmissió d'informació d'un vèrtex a un altre, en el cas dirigit, s'anomena una *crida*. Un algorisme de comunicació es defineix com una seqüència d'etapes, cadascuna de les quals està constituïda per un conjunt de crides que es produïran simultàniament. El nombre d'etapes és el temps de l'algorisme, si no es tenen en compte la llargada del missatge ni les distàncies entre vèrtexs. Les restriccions a l'hora de definir les etapes d'un algorisme depenen del mode de comunicació considerat.

En un cert model, o mode de comunicació, interessa estudiar algorismes de comunicació amb temps el més petit possible. Així, per un graf donat, o per a una família de grafs, es busquen algorismes òptims. Es tenen les definicions següents, per als problemes de *broadcasting*, acumulació i *gossiping*.

El model es denota per M , i siguin G un graf (en alguns models podria ser un digraf) i v un dels seus vèrtexs.

1. $b_M(v, G)$ és el mínim nombre d'etapes d'un algorisme de *broadcasting* des de v , en el model M .
2. $b_M(G) = \max_{v \in V} b_M(v, G)$ és el temps de *broadcasting* de G en el model M .
3. $a_M(v, G)$ és el mínim nombre d'etapes d'un algorisme d'acumulació cap a v , en el model M .
4. $a_M(G) = \max_{v \in V} a_M(v, G)$ és el temps d'acumulació de G en el model M .
5. $g_M(G)$ és el mínim nombre d'etapes d'un algorisme de *gossiping* de G , en el model M .

Una distinció que es fa en tots els models, independentment d'altres que hi pugui haver, és si els vèrtexs d'una crida intercanvien la informació, (mode *2-way* o *full-duplex*, els enllaços són arestes) o bé si una crida és un parell ordenat de vèrtexs, de manera que la informació passa d'un vèrtex cap a l'altre però no a l'inrevés (mode *1-way* o *half-duplex*, els enllaços són arcs).

Els resultats que es donen a continuació suposen que, tant per a models *full-duplex* com *half-duplex*, la xarxa està modelada per un graf. Aleshores el problema del *broadcasting* i el problema de l'acumulació són equivalents i es té $b_M(v, G) = a_M(v, G)$ i $b_M(G) = a_M(G)$. Això és així ja que un algorisme de *broadcasting* dona automàticament un algorisme d'acumulació,

invertint el sentit de les comunicacions i l'ordre de les etapes. A més, $a_M(G)$ i $b_M(G)$ donen una cota per a $g_M(G)$, ja que es pot fer *gossiping* acumulant la informació en un vèrtex i fent una difusió a tots els altres des d'aquest vèrtex (*broadcasting*).

Sobre aquest tema, la literatura és molt extensa, amb problemes típics com trobar cotes per al temps de *broadcasting* i *gossiping* en grafs complint certes condicions, donar algorismes per a aquests problemes en famílies concretes de grafs, trobar grafs que satisfacin les cotes inferiors o superiors que es coneixen, i també que satisfacin una certa cota i tinguin alguna propietat afegida. En [56, 61, 66] es troben els resultats bàsics en els primers models estudiats, així com referències a altres treballs sobre comunicacions globals.

El mode estàndard de comunicació

En el mode estàndard de comunicació, la comunicació es realitza a través dels enllaços, arestes en al model *full-duplex*, que s'anomena mode telèfon, i arcs en el model *half-duplex*, que s'anomena mode telègraf.

El mode telèfon es caracteritza per les dues condicions següents:

1. un vèrtex només pot prendre part en una crida a cada etapa (1-port);
2. dos vèrtexs poden intercanviar informació si en el graf hi ha una aresta que els uneix.

En el mode telègraf, la comunicació es realitza amb les mateixes restriccions que en el mode telèfon, llevat que les crides estan determinades per arcs en lloc de per arestes, tal com s'ha especificat en la distinció entre *full-duplex* i *half-duplex*.

Designant el mode telèfon per F , i el mode telègraf per H , a continuació es dona un resum d'alguns resultats bàsics sobre la complexitat de les comunicacions en aquest model (vegi's [66]).

Donat que els problemes de *broadcasting* i acumulació són equivalents, en els resultats es parla només del temps de *broadcasting*. Es poden obtenir amb raonaments senzills les cotes següents, on G és un graf qualsevol d'ordre n :

1. $D(G) \leq b_F(G)$;
2. $\lceil \log_2 n \rceil \leq \min_{v \in V} b_F(v, G) \leq b_F(G)$;
3. si el grau de G és d , $b_F(G) \leq (d - 1)D(G) + 1$;
4. $\lceil \log_2 n \rceil \leq g_F(G) \leq g_H(G)$.

En [36], Comellas i Hell donen algorismes de *broadcasting* òptims per als anells cordals.

El mode de camins aresta-disjunts

En el capítol 4 d'aquesta tesi es considera el model *edge-disjoint paths* o camins disjunts per arestes, en el qual els dos vèrtexs d'una crida poden estar a distància més gran que 1. La comunicació es realitza a través de camins, amb la condició que a cada etapa, els camins han de ser disjunts per arestes (o arcs, en el cas dirigit).

Aquest model va ser introduït per Farley en [52], i es caracteritza per les restriccions següents:

1. un vèrtex només pot prendre part en una crida a cada etapa (1-port);
2. la comunicació entre dos vèrtexs d'una crida, es realitza a través d'un camí;
3. els camins que corresponen a crides simultànies, és a dir, en una mateixa etapa, no poden compartir arestes (en el cas *2-way*) o arcs (en el cas *1-way*).

El model *vertex-disjoint paths* o camins disjunts per vèrtexs, es pot definir de manera anàloga substituint la hipòtesi [3.] per la següent:

- 3'. els camins que corresponen a crides simultànies, és a dir, en una mateixa etapa, no poden compartir vèrtexs.

En aquests models es permet que els vèrtexs que constitueixen una crida puguin ser a la vegada vèrtexs intermitjos en el camí corresponent a dos vèrtexs d'una altra crida.

En [52], Farley demostra que aquest model permet fer *broadcasting* en una xarxa qualsevol de n vèrtexs en $\lceil \log_2 n \rceil$ etapes. La prova utilitza camins a través de les arestes d'un arbre generador del graf. En canvi, el problema del *gossiping* per a un graf qualsevol resta obert.

De fet, els treballs actuals en els modes de camins aresta-disjunts i de camins vèrtex-disjunts inclouen la restricció:

4. un vèrtex intermig en un camí corresponent a una crida no pot ser origen o final en una altra crida.

Aquests models es denoten per *2EDP*, *1EDP*, *2VDP* i *1VDP*, on el 2 indica que es tracta del mode *full-duplex* i l'1 indica que es tracta del mode *half-duplex*. El mode *EDP* es diu a vegades mode *line*.

Hromkovic *et al.* [68] donen algorismes de *broadcasting* en el model *1EDP*, a partir dels quals es dedueix per a un graf G d'ordre n que

$$\lceil \log_2 n \rceil \leq b_{1EDP}(G) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1$$

En realitat, es pot veure que si en G hi ha un camí hamiltonià d'origen v , es té $b_{1EDP}(v, G) = \lceil \log_2 n \rceil$. L'algorisme per a un graf hamiltonià simula un

algorisme de *broadcasting* en l'hipercub. En el cas de grafs no hamiltonians, es treballa amb arbres generadors, i es demostra que pels arbres binaris complets la cota s'assoleix.

En el mateix treball es donen cotes inferiors del temps de gossiping en aquest model per a algunes famílies de grafs. Els mateixos problemes en el mode *VDP* són estudiats en [67]. Per al problema del *gossiping* en el mode *EDP*, es tenen resultats per arbres (Laforest [78]) i també per grafs planars i graelles (Klasing [75]).

El treball citat de Klasing constitueix un bon resum de resultats coneguts en els modes *EDP* i *VDP*. En particular, les cotes conegudes per al temps de *gossiping* en grafs qualssevol, presentades per Klasing en [76], són:

Mode *VDP*: Si $G_{n,k}$ és un graf d'ordre n i vèrtexs-bisecció k ,

$$2\lceil \log_2 n \rceil - \lceil \log_2 k \rceil - \lceil \log_2 \log_2 k \rceil - 6 \leq g_{2VDP}(G_{n,k})$$

i si $k \leq \frac{n}{\log_2 n}$, aleshores

$$g_{2VDP}(G_{n,k}) \leq 2\lceil \log_2 n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k + 2$$

Mode *EDP*: Si $G_{n,k}$ és un graf d'ordre n i aresta-bisecció k ,

$$2\lceil \log_2 n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6 \leq g_{2EDP}(G_{n,k}) \leq 2\lceil \log_2 n \rceil$$

Les demostracions per a les cotes inferiors es fan, en tots dos models, comptant en un nombre donat d'etapes, quina quantitat d'informació pot passar a través d'un conjunt minimal de vèrtexs (en mode *VDP*) o d'arestes (en mode *EDP*) que separi els vèrtexs en dos conjunts del mateix cardinal.

1.4 Grafs i tessellacions

Una *tessel·lació* del pla és un recobriment del pla amb regions poligonals. Si tots els polígons són iguals es diu que la tessellació és *regular*.

Per representar un graf o un digraf mitjançant una tessellació del pla s'associa a cada vèrtex del graf un polígon de tants costats com el grau del vèrtex, i es defineixen les adjacències entre polígons com adjacències entre vèrtexs, amb orientació si es tracta d'un digraf. Aquest procediment dona, en alguns casos, una tessellació. Per exemple, per a un graf regular de grau 5 no es podrà obtenir mai una tessellació, ja que degut a les seves propietats topològiques el pla no es pot tessellar amb pentàgons. Treballant amb tessellacions regulars del pla, el grau només pot ser 3, 4 o 6. Els esquemes d'adjacències per a aquests tres casos es mostren a la figura 1.1.

En general, un graf o digraf es pot representar mitjançant una tessellació del pla si se li pot associar algun d'aquests esquemes d'adjacències de manera

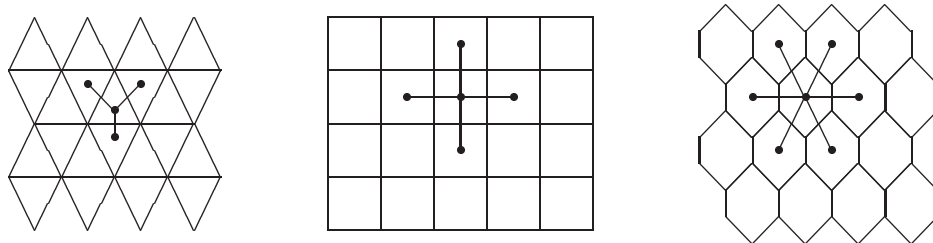


Figura 1.1: Tessellacions amb triangles, quadrats i hexàgons.

que una regió del pla que contingui una única vegada cadascun dels vèrtexs, es repeteixi periòdicament en iterar l'esquema d'adjacències i tot el pla quedi recobert. Aquesta regió, que es pot triar de més d'una manera, s'anomena *rajola associada al graf*. A més, el conjunt de polígons que contenen un vèrtex fixat és un reticle del pla, que determina la tessellació.

L'estudi de grafs i digrafs associats a tessellacions va ser iniciat per Wong i Coppersmith [112] i Fiol *et al.* [55].

Els grafs més senzills que es poden representar d'aquesta manera són les malles tòriques i els grafs i digrafs de doble llaç, amb un quadrat per a cada vèrtex, els grafs i digrafs de triple llaç amb el tercer pas igual a la suma dels dos primers, amb un hexàgon per a cada vèrtex, i els anells cordals, objecte d'estudi d'aquest treball, amb un triangle per a cada vèrtex. Però hi ha altres famílies de grafs que es poden representar mitjançant tessellacions. Per exemple, Aguiló *et al.* [3] treballen amb tessellacions tridimensionals de l'espai per, associant a cada vèrtex un cub, estudiar els grafs de triple llaç amb passos qualssevol; i treballant encara al pla, Morillo [89] i Yebra *et al.* [114] associen una tessellació amb quadrats als grafs de Petersen generalitzats, associant cada quadrat a una parella de vèrtexs. Morillo en la seva tesi [89] dóna un estudi de les diverses possibilitats a partir d'aquests esquemes.

Donat que un recorregut en el graf es tradueix en la tessellació per un recorregut entre polígons mitjançant les adjacències, aquesta representació geomètrica permet estudiar algunes propietats dels grafs relacionades amb distàncies i camins. El problema de minimitzar el diàmetre per un ordre donat, i el de maximitzar l'ordre coneixent el diàmetre, han estat estudiats per a diverses famílies en els casos dirigit i no dirigit. Així tenim, entre d'altres, els treballs d' Aguiló i Fiol [2], Aguiló *et al.* [3], Bermond i Tzvieli [23], Chen i Jia [33], Du *et al.* [46], Erdős i Hsu [48], Esqué *et al.* [50], Fiol *et al.* [55], Hsu i Shapiro [69, 70], Morillo *et al.* [92, 93], Tzvieli [111] i Yebra *et al.* [114].

Quant a l'estudi de problemes d'encaminament i disseminació d'informació, les tessellacions han estat utilitzades per diversos autors per definir encaminaments amb bones propietats i algorismes de comunicació. Escude-

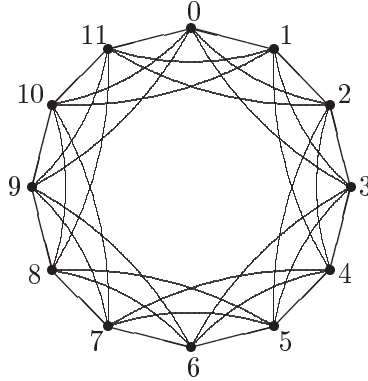


Figura 1.2: El graf de triple llaç $T_{12}(1, 2, 3)$.

ro *et al* [49] i Fàbrega i Zaragoza [51] han estudiat encaminaments en grafs i digrafs de doble llaç. Liestman *et al.* [82] estudien el problema del *broadcasting* en grafs de doble i triple llaç, i el mateix problema és estudiat per Comellas i Hell en [36], i per Armitage en [13]. Narayanan *et al.* [97] donen una cota superior per a l'índex òptic dels grafs de doble llaç.

1.4.1 Grafs de triple llaç

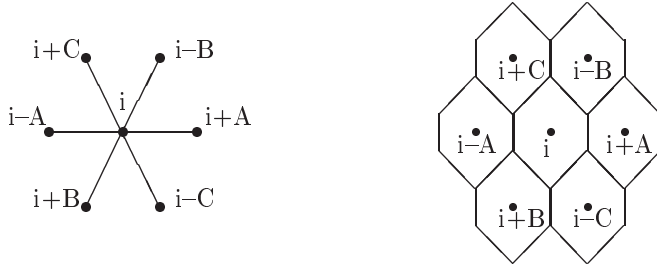
Un graf de triple llaç d'ordre N amb passos A , B i C és un graf $T_N(A, B, C)$ amb vèrtexs de \mathbb{Z}_N i adjacències definides per: $i \in \mathbb{Z}_N \Rightarrow i \sim i \pm A, i \sim i \pm B, i \sim i \pm C$. En la figura 1.2 es dona un exemple de graf de triple llaç.

Aquests grafs són 6-regulars, connexos quan $\text{mcd}(N, A, B, C) = 1$. Són grafs de Cayley sobre \mathbb{Z}_N , i per tant com a digrafs simètrics són circulants. Per cada parella de vèrtexs, x, y , la translació α tal que $\alpha(x) = y$ ve donada per $\alpha(i) = i + y - x$, per a tot i de \mathbb{Z}_N .

A continuació es resumeixen algunes propietats dels grafs de triple llaç amb passos A , B i $C = -(A + B)$, que es poden representar mitjançant una tessellació del pla, on cada vèrtex correspon a un hexàgon, segons l'esquema de la figura 1.3.

Els vèrtexs es repeteixen periòdicament, de manera que els hexàgons que contenen el vèrtex 0, o qualsevol altre vèrtex fixat, constitueixen un reticle del pla, i es pot trobar un (o més d'un) patró que recobreix el pla i que conté tots els vèrtexs del graf una vegada i només una. Les translacions del graf com graf de Cayley corresponen a les translacions del pla.

Utilitzant la tessellació es pot calcular l'ordre màxim d'un graf de triple llaç de diàmetre donat D . A partir d'un hexàgon central, es compta el nombre d'hexàgons que hi pot haver a distància com a molt D . Tal com es veu a la figura 1.4, es demostra que si $T_N(A, B, C)$, amb $C = -(A + B)$, té

Figura 1.3: Adjacències i tessellació per a $T_N(A, B, C)$.

diàmetre D , aleshores

$$N \leq N_D = 3D^2 + 3D + 1$$

La tessellació que correspon a aquesta rajola dona les equacions del reticle de zeros (vegi's la figura 1.5). Així, un graf de triple llaç d'ordre N_D té diàmetre D si els passos satisfan les equacions en \mathbb{Z}_{N_D} :

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ (D + 1) \cdot A - D \cdot B &= 0 \\ D \cdot C - (D + 1) \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

i la condició de connexitat $\text{mcd}(A, B, N_D) = 1$.

Les ternes $(A, B, C) = ((3D + 1)B, B, -(3D + 2)B)$ verifiquen les equacions per a tot $B \in \mathbb{Z}_{N_D}$. Amb aquests valors per A, B, C es compleix la condició $\text{mcd}(A, B, N_D) = 1$ si i només si $B \in \mathbb{Z}_{N_D}^*$. Així doncs, el graf de triple llaç $T_{N_D}((3D + 1)B, B, -(3D + 2)B)$ té diàmetre D per a tot $B \in \mathbb{Z}_{N_D}^*$. I a més, per a qualsevol parella de no divisors de zero, $B, B' \in \mathbb{Z}_{N_D}^*$, l'aplicació $z \mapsto B' B^{-1} z$ és un isomorfisme entre $T_{N_D}((3D + 1)B, B, -(3D + 2)B)$ i $T_{N_D}((3D + 1)B', B', -(3D + 2)B')$.

Hi ha encara una altra possibilitat de distribució dels zeros del reticle, associada al graf de triple llaç de diàmetre D i ordre N_D , que prové d'una distribució diferent de les rajoles per a tessellar el pla. La diferència amb el que es presenta a la figura 1.5 és, simplement, una simetria respecte d'un eix vertical. Això dona els mateixos passos, ordenats de manera diferent. Per tant, s'obtenen tots els grafs de triple llaç de diàmetre D i ordre màxim.

En [115], Zaragoza estudia la vulnerabilitat d'encaminaments en aquests grafs. En els càlculs s'utilitzen les coordenades dels vèrtexs, sense donar però un procediment per a calcular-les.

En l'apartat següent es defineixen les coordenades dels vèrtexs, i es dona un algorisme per a calcular-les.

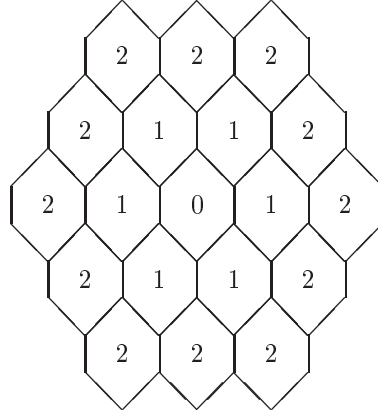


Figura 1.4: Ordre màxim per a un graf de triplellaç.

1.4.2 Coordenades dels vèrtexs d'un graf de triplellaç

En els grafs de triplellaç que s'estudien aquí els tres passos, per tant tres direccions, satisfan una relació de dependència que fa que es puguin representar en el pla. La relació $C = -(A + B)$ que compleixen els passos s'ha de traduir per una relació de dependència lineal entre els vectors que els representen. Les ternes de coordenades enteres correspondran a un vèrtex del graf. Però hi ha més d'una terna per a cada vèrtex.

Coordenades dels hexàgons

Considerant la tessellació del pla per hexàgons regulars i prenent com a origen de coordenades, O , el centre d'un hexàgon, i com a sistema de referència els vectors $\mathbf{A} = (1, 0)$, $\mathbf{B} = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ i $\mathbf{C} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, els centres dels hexàgons són les combinacions lineals dels vectors \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} de coeficients enteres. I un hexàgon de centre P tindrà per veïns els hexàgons de centres $P \pm \mathbf{A}$, $P \pm \mathbf{B}$ i $P \pm \mathbf{C}$, i es compleix $\mathbf{A} + \mathbf{B} = -\mathbf{C}$.

Definició 1.1 *Es pot identificar un hexàgon amb el seu centre. Es diu que una terna (m, n, p) representa l'hexàgon P si i només si (m, n, p) són les coordenades del vector OP en el sistema de referència $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, és a dir, si el vector $m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C}$ és el vector OP .*

La relació $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ dóna un conjunt infinit de representants per a un hexàgon. Aquest conjunt es denota per $[P] = \{(m, n, p) \text{ representants de } P\}$. Si $(m, n, p) \in [P]$ aleshores $[P] = \{(m, n, p) + \lambda(1, 1, 1)\}$.

Definició 1.2 *Sigui $(m, n, p) \in [P]$ tal que $|m| + |n| + |p| = d$ és mínim. La terna (m, n, p) es diu que són les coordenades de l'hexàgon P i d és la distància entre O i P .*

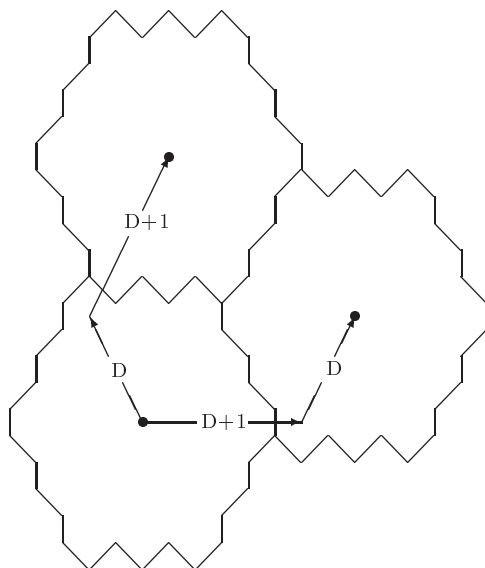


Figura 1.5: Tessellació per a ordre màxim donat el diàmetre.

Les coordenades de P són úniques i es poden definir equivalentment com la terna que representa P tal que: almenys una coordenada és nul·la i si les altres dues no ho són, tenen signes oposats.

En dues dimensions es pot parlar de coordenades en funció de \mathbf{A} i \mathbf{B} , o de coordenades en funció de \mathbf{B} i \mathbf{C} o en funció de \mathbf{A} i \mathbf{C} . Si $(m, n, p) \in [P]$ aleshores $(X, Y, 0) = (m - p, n - p, 0) \in [P]$ és l'única terna amb tercera coordenada nul·la que representa P . De manera anàloga, $(0, Y', Z') = (0, n - m, p - m)$ i $(X'', 0, Z'') = (m - n, 0, p - n)$ també representen P .

Coordenades dels vèrtexs

Fixats dos enters A i B , s'associa a cada hexàgon P el nombre enter $m A + n B + p C$, on $C = -(A + B)$ i $(m, n, p) \in [P]$. Si $(A, B, C) = \lambda$, per a cada enter del conjunt $\lambda \mathbb{Z}$ hi haurà un conjunt d'hexàgons que el contindran.

D'aquesta manera, i prenent com a origen un hexàgon O que contingui el vèrtex zero, es pot parlar de coordenades d'un hexàgon i de coordenades d'un vèrtex, de la manera següent.

Donat un graf de triple llaç $T_N(A, B, C)$, amb $C = -(A + B)$, construïm la seva tessellació associada a partir de la tessellació del pla amb hexàgons. S'associa a l'hexàgon O el vèrtex 0 , i si l'hexàgon P té associat el vèrtex z , aleshores s'associa a l'hexàgon $P + \mathbf{J}$ el vèrtex $z + J$, per a $J = \pm A, \pm B, \pm C$, tal com es veu a la figura 1.3.

Definició 1.3 Una terna (m, n, p) representa el vèrtex z si i només si $z = m A + n B + p C$ en \mathbb{Z}_N , que és equivalent a dir que el vèrtex z és el vèrtex

associat a l'hexàgon de coordenades (m, n, p) .

S'escriu $[z] = \{(m, n, p), m A + n B + p C \equiv_N z\}$, on \equiv_N indica la igualtat en \mathbb{Z}_N . El reticle del pla format pels hexàgons que contenen el vèrtex z es denota per \mathcal{R}_z . Per a cada vèrtex z del graf el conjunt \mathcal{R}_z de punts que contenen el vèrtex z és una translació del reticle \mathcal{R}_0 .

Definició 1.4 *Una rajola que representa el graf és qualsevol polígon (conex) obtingut per unió d'hexàgons adjacents tal que cada vèrtex hi és representat una vegada i només una.*

Es pot veure fàcilment que una rajola que representa el graf tessella el pla. A més, per a un graf donat hi ha més d'una rajola que el representa.

Si z és un vèrtex del graf, aleshores $d(0, z) = \min_{Q \in \mathcal{R}_z} \{d(0, Q)\}$ és la distància en el graf. Les coordenades d'un punt del pla $(m, n, p) \in [z]$ donen recorreguts en el graf de 0 a z , ja que un recorregut format per m passos A , n passos B , i p passos C , a partir del vèrtex 0, arriba al vèrtex z . Si (m, n, p) dóna la distància de l'origen a z , els camins són de longitud mínima; les ternes $(m, n, p) \in [0]$ donen circuits, que en alguns casos poden ser cicles.

Graf de triple llaç òptim

Siguin $N = N_D$ i els passos A , B i C tals que el diàmetre del graf és D . La rajola associada a T_{N_D} és el polígon constituït per un conjunt d'hexàgons a distància com a molt D d'un hexàgon donat (el centre). Quan aquest polígon està centrat a l'origen, s'anomena rajola central. Per a tot vèrtex z del graf hi ha un únic hexàgon H en la rajola central que conté el vèrtex z , és a dir $H \in \mathcal{R}_z$, i les coordenades de H , (m, n, p) , donen $|m| + |n| + |p| = d(0, z)$ en el graf. Es diu que aquesta terna són les coordenades de z .

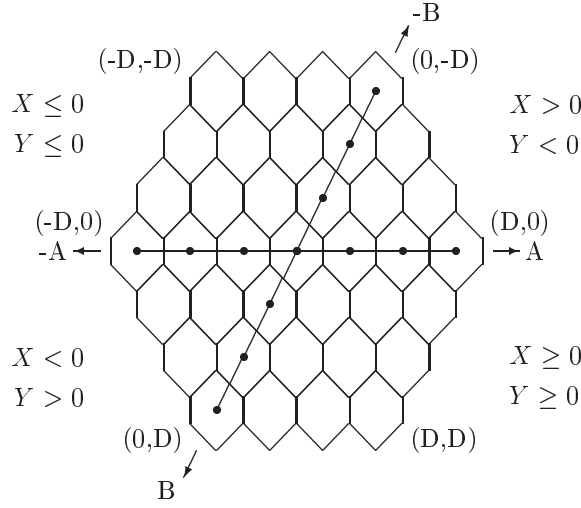
Definició 1.5 *La terna (m, n, p) són les coordenades de z si i només si $|m| + |n| + |p| = d(0, z)$, que és equivalent a dir que $|m| + |n| + |p| \leq D$ i una de les dues és nul·la i les altres dues tenen signes oposats (o bé n'hi ha dues de nul·les).*

Només es poden associar coordenades als vèrtexs de manera única a partir de la tessel·lació si el graf és òptim.

Es pot treballar amb només dues coordenades ja que les ternes (m, n, p) i $(m - p, n - p, 0)$ representen el mateix hexàgon. Els eixos **A** i **B** divideixen el pla en quatre zones, representades a la figura 1.6.

Un hexàgon es troba a la rajola central si les seves coordenades $(X, Y, 0)$ satisfan alguna de les condicions següents:

1. $0 \leq X \leq D$ i $0 \leq Y \leq D$;
2. $0 \leq -X \leq D$ i $0 \leq -Y \leq D$;

Figura 1.6: Zones amb coordenades $(X, Y, 0)$.

3. $X > 0, Y < 0$ i $X - Y \leq D$;
4. $X < 0, Y > 0$ i $Y - X \leq D$.

En aquest cas, les ternes que representen el vèrtex zero són $[0] = \{(0, 0, 0) + \alpha(D + 1, D, 0) + \beta(0, -(D + 1), D) + \gamma(1, 1, 1)\}$, i el reticle de zeros, \mathcal{R}_0 , està generat pels vectors $(D + 1, D, 0)$ i $(0, -(D + 1), D)$.

Algorisme de càlcul

L'algorisme que es proposa a continuació permet calcular les coordenades d'un graf de triplella òptim, basant-se en una senzilla divisió entera. Per a fer-ho es treballa amb el graf $T_{N_D}(3D + 1, 1, -(3D + 2))$. Qualsevol altre que tingui el mateix ordre i el mateix diàmetre serà isomorf.

Donat $0 < z < N_D$, l'algorisme retorna (m, n, p) , coordenades de z .

0. Inicialització: $i = \lfloor \frac{z}{3D + 1} \rfloor$, $j = z \pmod{3D + 1}$.
1. Càlcul coordenades en funció de A i B .
 - 1.1 Si $j \leq D$ aleshores $(X, Y, 0) = (i, j, 0)$.
 - 1.2 Si $j > D$ aleshores $(i_1, j_1, 0) = (i - D, j - 2D - 1, 0)$.
 - 1.2.a Si $j_1 \leq 0$ o $j_1 - i_1 \leq D$ aleshores $(X, Y, 0) = (i_1, j_1, 0)$.
 - 1.2.b Si $j_1 - i_1 > D$ aleshores $(X, Y, 0) = (i_1 + D + 1, j_1 - D, 0)$.
2. Pas de coordenades en funció de A i B a coordenades en funció de A, B i C .

2.1 Si $X \cdot Y \leq 0$ aleshores $(m, n, p) = (X, Y, 0)$.

2.2 Si $X \cdot Y > 0$ aleshores:

2.2.a Si $|Y| \geq |X|$ aleshores $(m, n, p) = (0, Y - X, -X)$.

2.2.b Si $|Y| < |X|$ aleshores $(m, n, p) = (X - Y, 0, -Y)$.

Proposició 1.6 *L'algorisme calcula les coordenades.*

Demostració. Donat un vèrtex qualsevol, z , s'obté una terna (m, n, p) . S'ha de veure que $mA + nB + pC = z$ i que $|m| + |n| + |p|$ és mínim. Els valors assignats a i i j en 0 satisfan $iA + j = z$ i les desigualtats $0 \leq i < D$ i $0 \leq j \leq 3D + 1$. A més es té $DA + (D + 1)B = 0$ i $(D + 1)A + DB = 0$, en \mathbb{Z}_{ND} . Per tant, la terna $(X, Y, 0)$ obtinguda en el pas 1 representa el vèrtex z .

A continuació es demostra que $(X, Y, 0)$ són les coordenades de z en funció de A i B , és a dir que representen l'hexàgon que conté z de la rajola central. En el cas 1.1, $0 \leq j \leq D$, aleshores $0 \leq X \leq D$ i $0 \leq Y \leq D$, i es té un hexàgon de la rajola central. En el cas 1.2, els valors assignats a i_1 i j_1 satisfan $-D \leq i_1 \leq 0$ i $-D \leq j_1 \leq D$. Si es compleix $j_1 - i_1 > D$, és a dir, en el cas 1.2.a, l'hexàgon $(X, Y, 0) = (i_1, j_1, 0)$ està en la rajola central. En el cas 1.2.b, els valors $X = i_1 + D + 1$ i $Y = j_1 - D$, satisfan $0 \leq X \leq D$ i $X - Y \leq D$. Per tant l'hexàgon de coordenades $(X, Y, 0)$ es troba a la rajola central.

Finalment, la terna (m, n, p) , obtinguda en el pas 2 dona les coordenades de z , ara en funció de A , B i C . Com que en el cas 2.1 $(m, n, p) = (X, Y, 0)$, i en els altres dos casos, 2.2.a i 2.2.b, només s'afegeix un múltiple del vector $(1, 1, 1)$, la terna (m, n, p) representa el mateix hexàgon que $(X, Y, 0)$. A més, en qualsevol dels tres casos s'obté una terna amb una coordenada nul·la i les altres dues de signe oposat. \square

El que fa aquest algorisme és, en realitat, calcular les coordenades d'un hexàgon que conté el vèrtex z , com es veu en la figura 1.7, i en els casos en què no és l'hexàgon de la rajola central, fer un canvi de rajola utilitzant els vectors generadors del reticle, ja mostrats en la figura 1.5.

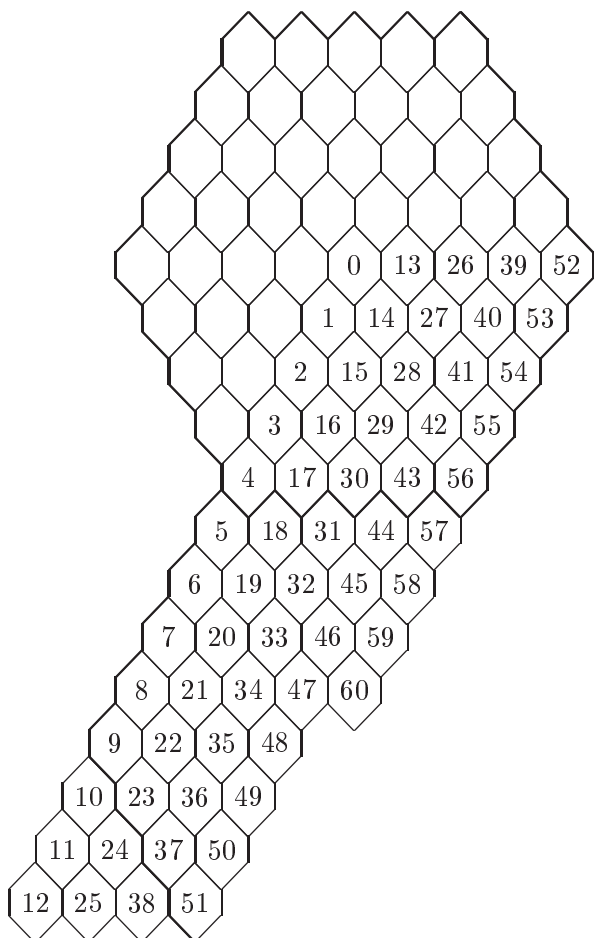


Figura 1.7: Primer pas de l'algorisme de càlcul de coordenades per a $D = 4$.

Capítol 2

Anells cordals

2.1 Introducció

En l'estudi dels grafs com a models de xarxes, els cicles constitueixen la topologia més senzilla. Malgrat la seva simplicitat i simetria tenen inconvenients molt importants: el diàmetre és gran i la connectivitat petita. Per tal de millorar-ne aquests paràmetres mantenint però d'alguna manera les seves bones propietats, es poden afegir a un cicle arestes o arcs. Les diverses maneres de fer-ho porten a noves famílies de grafs.

Els grafs que en aquest treball s'anomenen anells cordals són grafs regulars de grau 3, que s'obtenen d'un cicle d'ordre parell afegint arestes que uneixen cada vèrtex parell amb un de senar segons un pas constant. En la figura 2.1 se'n mostra un exemple. La regularitat d'aquesta construcció assegura la simetria. De fet, com es veurà més endavant, aquests grafs, que van ser introduïts per Coxeter el 1950 [38] i presentats com a model per a xarxes d'interconnexió per Arden i Lee [12], són grafs de Cayley sobre el grup dièdric.

Però en la literatura, amb el nom d'anells cordals es troben referències a diverses famílies de grafs. En tots els casos, un anell cordal és un cicle al qual s'han afegit cordes. Les diferències vénen donades per quantes cordes s'afegeixen i com.

En [4] Aiello *et al.*, i en [103] Rosenberg, defineixen els anells cordals com grafs constituïts per un cicle al qual s'han afegit cordes que no es tallen (vegi's la figura 2.2). Tang i Arden donen una definició d'anell cordal i d'anell cordal generalitzat que inclou els anells cordals tal com es defineixen en aquest treball i també els grafs circulants, i que s'utilitza per a la representació dels anomenats *Borel-Cayley graphs* [108]. La mateixa definició es cita en el treball de Bermond *et al.* [21].

Altres treballs parlen d'anells cordals referint-se a grafs de múltiple pas, és a dir grafs subjacents de digrafs circulants. Sobretot en el cas de grau 4, o grafs de doble llaç. En aquests grafs, Narayanan i Opatrny [96] estu-

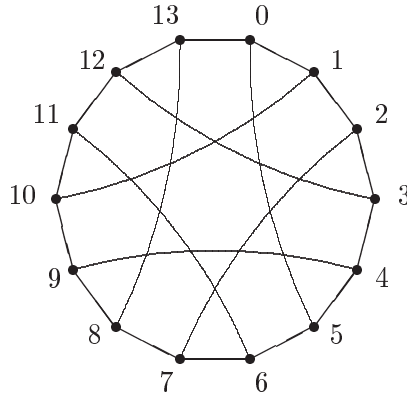


Figura 2.1: Exemple d'anell cordal.

dien esquemes d'encaminament compactes i encaminaments per intervals, i Narayan *et al.* [97] n'estudien l'índex òptic. En ambdós treballs s'utilitzen les tessellacions del pla per a la representació dels grafs. Krizanc i Lucio [77] estudien encaminaments booleans en grafs de doble llaç. Iwasaki *et al.* [74] troben arbres generadors independents en grafs de doble llaç amb passos 1 i d , definits de manera que, en el cas particular d'ordre $2d$, el grau és 3. Per a digrafs de doble llaç, Mans i Santoro [85] donen protocols òptims per al problema de l'elecció d'un líder, i Mans en [86] estudia el mateix tipus de problema, utilitzant el que anomena *sense of direction*, una representació del graf basada en associar als arcs d'un tipus una direcció del pla. Per a referències a treballs sobre grafs de múltiple pas es pot veure el *survey* [20].

Nayak *et al.* [98] estudien isomorfismes entre circulants, anomenant-los anells cordals. En [14] Attiya *et al.* defineixen els anells cordals com cicles amb cordes addicionals, encara que estudien el problema de l'elecció d'un líder en el cas particular dels circulants.

Quant als anells cordals de grau 3 amb corda constant anomenats a partir d'ara anells cordals "a la Arden i Lee", hi ha, a més dels treballs de Coxeter sobre simetria en grafs [37, 38] i l'estudi del diàmetre d'Arden i Lee [12] ja citats, algunes referències d'altres autors. Hu i Wang [72] i Hwang i Wright [73] n'estudien la fiabilitat en termes de l'aresta-connectivitat, els primers, i de la connectivitat del digraf de supervivència, els darrers. En [116], Zimmerman i Esfahanian defineixen els anells cordals com grafs hamiltonians de grau 3, és a dir, un cicle amb una corda a cada vèrtex, encara que presenten un estudi sobre tolerància a fallades pel cas particular dels anells cordals "a la Arden i Lee".

La representació de grafs mitjançant tessellacions del pla permet generalitzar aquesta família, Morillo [93], i estudiar-ne algunes de les propietats mètriques, com la maximització de l'ordre per a diàmetre donat i el càlcul del diàmetre mínim per a alguns valors de l'ordre, Yebra *et al.* [114], Morillo

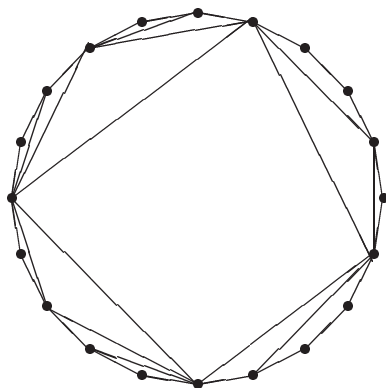


Figura 2.2: Un altre model d'anell cordal.

et al. [91]. És com a generalitzacions de grafs de múltiple pas, alguns dels quals es poden representar també mitjançant tessellacions, que Bermond *et al.* els citen en el *survey* [20].

Alspach i Zhang [9] demostren que els grafs de Cayley sobre el grup dièdric són hamiltonians. Els grafs que aquí s'estudien són els grafs de Cayley sobre el grup dièdric quan es trien 3 generadors adequats. Això implica, en particular, que la generalització dels anells cordals presentada en [93] es pot veure també com un cicle amb cordes.

Quan un graf modela una xarxa d'interconnexió interessa estudiar els problemes de difusió d'informació. Comellas i Hell van presentar en [36] un algorisme de *broadcasting* òptim per anells cordals, utilitzant també tessellacions del pla. Armitage en la seva tesi [13] estudia algorismes de *broadcasting* en malles tòriques i en anells cordals tòrics.

A continuació, s'estableix la definició d'anell cordal que serà utilitzada al llarg de tot aquest treball i s'estudien les propietats d'aquesta família de grafs.

2.2 Definició i propietats

Definició 2.1 *L'anell cordal d'ordre $2n$, amb $n \geq 3$, i cordes a, b, c , senars diferents de \mathbb{Z}_{2n} , és el graf que denotarem per $C_{2n}(a, b, c)$, amb conjunt de vèrtexs \mathbb{Z}_{2n} , i amb les adjacències definides per: cada vèrtex parell $2i$ és adjacent als vèrtexs senars $2i + a, 2i + b, 2i + c$. Per tant, cada vèrtex senar $j = 2i + 1$ és adjacent als vèrtexs parells $j - a, j - b, j - c$.*

Segons la definició d'Arden i Lee [12], un anell cordal és un graf constituït per un cicle d'ordre parell amb cordes que uneixen, seguint un pas cons-

tant, cada vèrtex parell amb un vèrtex senar. Per exemple, en la figura 2.1 s'afegeix al cicle de longitud 14, arestes que van de cada vèrtex parell i al vèrtex senar $i + 5$ (i, per tant, de cada vèrtex senar j al vèrtex parell $j - 5$). Així, l'anell cordal d'ordre $2n$ i pas d , amb d senar entre 0 i $2n$, $C(2n, d)$, s'obté afegint a un cicle de longitud $2n$ les arestes següents:

$$\{0, d\}, \{2, d + 2\}, \{4, d + 4\}, \dots, \{2n - 2, d + 2n - 2\}$$

fent les sumes mòdul $2n$. És clar que la definició 2.1 és una generalització de la definició d'Arden i Lee, ja que $C(2n, d) = C_{2n}(-1, d, 1)$.

De la definició anterior es dedueix trivialment que $C_{2n}(a, b, c)$ és 3-regular i bipartit. Els vèrtexs parells són dos a dos independents, i passa el mateix amb els vèrtexs senars. A més, les arestes de la forma $\{2i, 2i + a\}$ constitueixen un 1-factor, igual que les de la forma $\{2i, 2i + b\}$ i les de la forma $\{2i, 2i + c\}$. Les cordes defineixen doncs una coloració de les arestes, i cada vèrtex és incident amb una aresta de cada color.

Els anells cordals són grafs vèrtex-transitius. Donats dos vèrtexs, x i y , per definir un automorfisme del graf que apliqui x en y només s'ha de tenir en compte que $x \pm a$, $x \pm b$ i $x \pm c$ s'apliquen en $y \pm a$, $y \pm b$ i $y \pm c$, respectivament, on la operació \pm és suma quan el vèrtex és parell i resta quan el vèrtex és senar.

És fàcil veure que $C_{2n}(a, b, c)$ és connex si i només si $\text{mcd}(a - b, b - c, 2n) = \text{mcd}(a - b, b - c, c - a, 2n) = 2$. Només cal observar que hi ha un camí de 0 a $2i$ si i només si $2i$ és múltiple de $\text{mcd}(a - b, b - c, 2n)$. Si $\text{mcd}(a - b, b - c, 2n) = 2k$, aleshores $C_{2n}(a, b, c)$ té k components connexos isomorfs cadascun d'ells al graf $C_{2m}(a', b', c')$ on $m = n/k$ i $k(a' - b') = a - b$, $k(b' - c') = b - c$, $k(c' - a') = c - a$. En aquest treball es consideren només anells cordals connexos.

La proposició següent diu quan un anell cordal és "a la Arden i Lee".

Proposició 2.2 *Si $\text{mcd}(a - b, 2n) = 2$ o bé $\text{mcd}(b - c, 2n) = 2$ o bé $\text{mcd}(c - a, 2n) = 2$, aleshores existeix d , senar entre 0 i $2n$, tal que $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(-1, d, 1)$.*

Demostració. Es pot suposar sense pèrdua de generalitat que $\text{mcd}(c - a, 2n) = 2$. Sigui $\alpha = \left(\frac{c - a}{2}\right)^{-1}$ en \mathbb{Z}_n . Per a tot i , $0 \leq i < n$, es té $2i = \alpha(c - a)i$. Sigui $\phi : \mathbb{Z}_{2n} \mapsto \mathbb{Z}_{2n}$ la bijecció definida per $\phi(2i) = \alpha 2i$ i $\phi(2i + c) = \alpha 2i + 1$. Aquesta bijecció indueix un isomorfisme entre $C_{2n}(a, b, c)$ i $C_{2n}(-1, d, 1)$, per a $d = \alpha(b - c) + 1 = \phi(b)$. \square

De la proposició es dedueix que els anells cordals $C_{2n}(a, b, c)$ no isomorfs a $C_{2n}(-1, d, 1)$ per a tot d , són exactament els que satisfan $\text{mcd}\left(\frac{b - c}{2}, n\right) = \alpha$, $\text{mcd}\left(\frac{c - a}{2}, n\right) = \beta$, i $\text{mcd}\left(\frac{a - b}{2}, n\right) = \gamma$, amb $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ i $\gamma \neq 1$

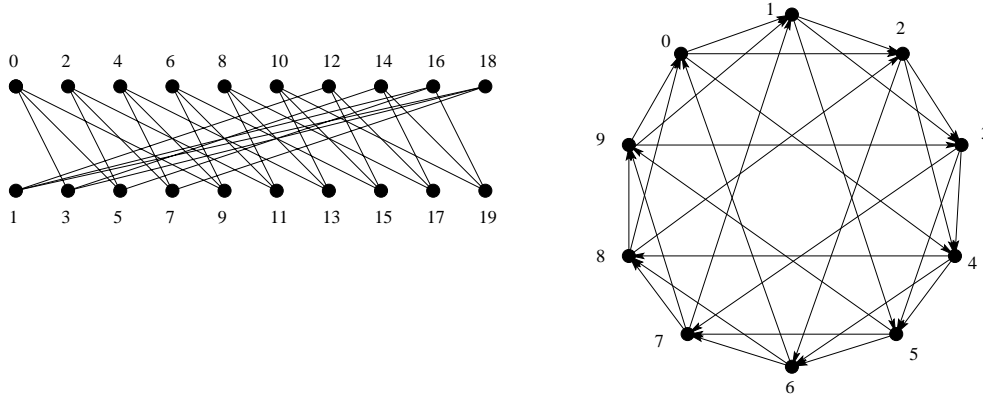


Figura 2.3: Representació de $C_{20}(3, 5, 9)$ com a 2-cicle generalitzat del graf circulant d'ordre 10 i generadors 1, 2 i 4.

enters tals que $\text{mcd}(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$. L'ordre d'un d'aquests anells cordals és almenys 60, que correspon a $\alpha = 2$, $\beta = 3$ i $\gamma = 5$. Per exemple, $C_{60}(1, 11, 7)$ no és isomorf a cap dels anells cordals de la forma $C_{60}(-1, d, 1)$.

En les dues proposicions següents, utilitzant els paràmetres $x = \frac{a-1}{2}$, $y = \frac{b-1}{2}$ i $z = \frac{c-1}{2}$, es veu com es pot definir un anell cordal a partir d'un digraf circulant (Proposició 2.3), i es demostra que els anells cordals són grafs de Cayley (Proposició 2.4). Observi's que $\text{mcd}(x-y, y-z, n) = \text{mcd}(x-y, y-z, z-x, n) = 1$, ja que $\text{mcd}(a-b, b-c, 2n) = 2$.

Proposició 2.3 *El graf $C_{2n}(a, b, c)$ és el 2-cicle generalitzat provinent del digraf circulant d'ordre n i generadors x, y i z .*

Demostració. Ordenant els vèrtexs de la forma $0, 2, 4, \dots, 2n-2, 1, 3, \dots, 2n-1$, la matriu d'adjacència de $C_{2n}(a, b, c)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots 2n}$, es pot descomposar en quatre blocs, $B_{11} = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$, $B_{12} = (a_{ij})_{i=1 \dots n, j=n+1 \dots 2n}$, $B_{21} = B_{12}^T$, $B_{22} = (a_{ij})_{i,j=n+1 \dots 2n}$, de manera que $B_{11} = B_{22} = 0$ i B_{12} és la matriu circulant definida per la primera columna

$$b_{x+1,1} = 1, b_{y+1,1} = 1, b_{z+1,1} = 1$$

La matriu B_{12} és la matriu d'adjacència del digraf circulant de generadors x, y i z . \square

Es pot observar que quan un dels passos a, b o c val 1, el generador corresponent val zero, i per tant hi haurà llaços en el digraf circulant. Donat un anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$ i un enter λ qualsevol es compleix $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a+2\lambda, b+2\lambda, c+2\lambda)$ fent les sumes mòdul $2n$. Fixant els vèrtexs parells,

i afegint 2λ als senars es té un isomorfisme. Així, un anell cordal es pot veure com a 2-cicle generalitzat de més d'un digraf circulant, i sempre es pot triar un dels passos igual a 1. En la figura 2.3 es pot veure un exemple d'anell cordal com a 2-cicle generalitzat d'un digraf circulant.

Proposició 2.4 *El graf $C_{2n}(a, b, c)$ és isomorf al graf $Cay(D_n, S)$, amb $S = \{r^x s, r^y s, r^z s\}$, on D_n és el grup dièdric, r denota la rotació d'angle $2\pi/n$ i s denota una simetria axial.*

Demostració. El grup dièdric D_n és el grup de les simetries del polígon regular de n costats. Prenent com a generadors els elements r i s , es té $D_n = \{I, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}$. Sigui $\phi : \mathbb{Z}_{2n} \mapsto D_n$ la bijecció definida per $\phi(2i) = r^i$ i $\phi(2i+1) = r^i s$. Aleshores, com que $x = \frac{a-1}{2}$, $y = \frac{b-1}{2}$ i $z = \frac{c-1}{2}$, es té $\phi(a) = r^x s$, $\phi(b) = r^y s$ i $\phi(c) = r^z s$. I la bijecció ϕ indueix un isomorfisme entre els grafs $C_{2n}(a, b, c)$ i $Cay(D_n, S)$. \square

La bijecció ϕ de la demostració anterior indueix un isomorfisme de grups entre D_n i $(\mathbb{Z}_{2n}, *)$ on l'operació $*$ es defineix per $v * w = v + (-1)^v w$.

L'operació $*$ defineix un automorfisme del graf per a cada element de \mathbb{Z}_{2n} . Així, la imatge d'un vèrtex i per l'automorfisme α_w , on $w \in \mathbb{Z}_{2n}$, és $\alpha_w(i) = w * i = w + (-1)^w i$. Per a dos vèrtexs u, v qualssevol es denota per $\alpha_{u,v}$ la translació de $C_{2n}(a, b, c)$ tal que $\alpha_{u,v}(u) = v$, tal com s'ha definit en la secció 1.2. En aquest cas, per a tot $i \in \mathbb{Z}_{2n}$, $\alpha_{u,v}(i) = v + (-1)^{u-v}(i - u)$. De fet, aquests automorfismes són els ja comentats en aquesta mateixa secció en parlar de la vèrtex-transitivitat dels anells cordals.

Proposició 2.5 (Alspach i Zhang [9]) *Tot graf de Cayley cúbic sobre un grup dièdric és hamiltonià.*

Per tant, en particular, els anells cordals són hamiltonians. El resultat és trivial per als grafs de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$. No ho és però per a grafs de Cayley en general, tal com s'ha observat en la secció 1.2.

2.3 Anells cordals i tessellacions del pla

S'ha vist a la secció 1.4 com es pot associar a un graf una tessel·lació del pla. La tessel·lació del pla amb quadrats correspon a un graf de doble llaç, i la tessel·lació amb hexàgons correspon a un graf de triple llaç. Un anell cordal és un graf 3-regular i, per tant, per representar-lo mitjançant una tessel·lació s'hauran d'utilitzar triangles. Això dona la darrera de les tres tessel·lacions del pla que existeixen si només es volen fer servir polígons regulars. En aquesta secció es veu com és aquesta tessel·lació i quines propietats dels grafs se'n poden deduir.

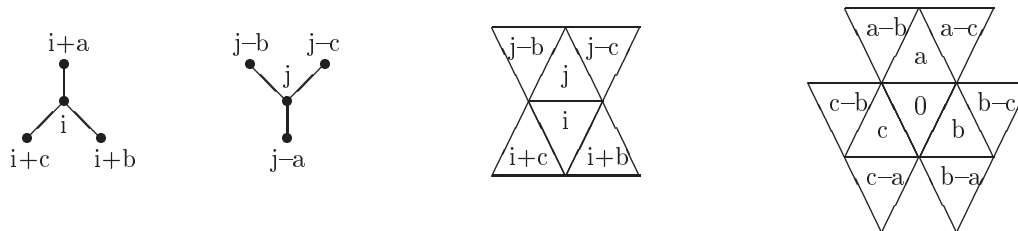


Figura 2.4: Esquema d'adjacències d'un anell cordal.

2.3.1 Tessel·lació associada a un anell cordal

Considerant un anell cordal connex $C_{2n}(a, b, c)$, es pot representar cada vèrtex per un triangle, de manera que vèrtexs adjacents corresponguin a triangles adjacents, com es mostra en la figura 2.4. S'obté així una tessel·lació del pla on, tal com passava en el cas dels grafs de doble i triple llaç, els vèrtexs es repeteixen periòdicament i els triangles que contenen el vèrtex 0 constitueixen un reticle del pla. Una seqüència de triangles adjacents és un recorregut en el graf i els recorreguts entre zeros del reticle són cicles que depenen de les relacions entre a , b , c i $2n$. Un exemple es pot veure a la figura 2.5.

Els anells cordals són, com ja s'ha vist, grafs de Cayley sobre el grup dièdric. Els generadors determinen una coloració de les arestes, i en la tessel·lació els tres colors són les tres direccions que segueixen les adjacències. Hi ha dues orientacions diferents per als triangles que constitueixen la tessel·lació, i la orientació del triangle que conté un vèrtex determinat depèn de la seva paritat. Això és així degut a que els elements del grup que generen el graf són involutius.

Veiem doncs que en la tessel·lació es poden veure d'alguna manera les propietats del graf relacionades amb la seva estructura algebraica. En grafs de doble i triple llaç, que són grafs de Cayley sobre \mathbb{Z}_n , les translacions del graf com a graf de Cayley són, exactament, les translacions de la tessel·lació. Donat que el subgrup G_L de les translacions $\alpha_{u,v}$ és isomorf al grup, una pregunta que es planteja és com queda representada aquesta estructura sobre la tessel·lació. Això és el que es veu en les dues proposicions següents.

Proposició 2.6 *Sigui $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal, i $u, v \in \mathbb{Z}_{2n}$ dos vèrtexs de la mateixa paritat. Siguin U i V triangles de la tessel·lació associada que contenen els vèrtexs u i v , respectivament. Aleshores, l'automorfisme $\alpha_{u,v}$ es pot veure en el pla com la translació de vector \overrightarrow{UV} .*

Demostració. Els triangles U i V tenen la mateixa orientació. La translació de vector \overrightarrow{UV} porta un triangle que conté el vèrtex i a un triangle que conté el vèrtex $i + v - u$, i $\alpha_{u,v}(i) = i + v - u$. \square

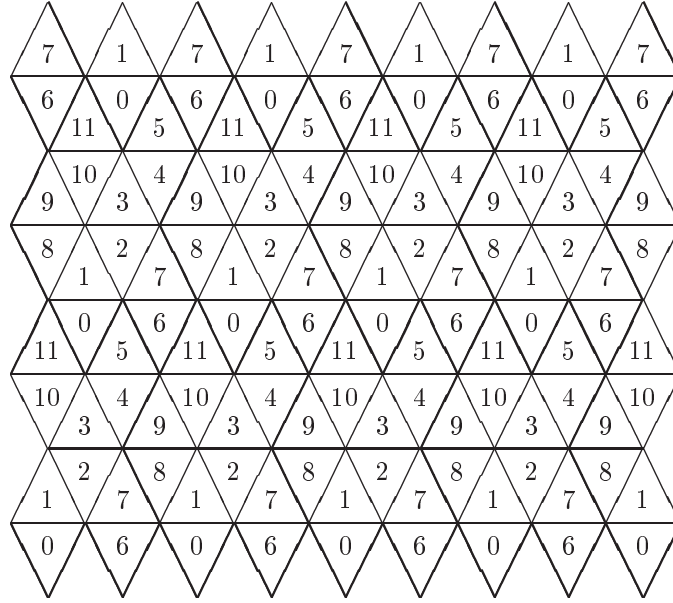


Figura 2.5: Tessel·lació del pla associada a $C_{12}(1, 5, -1)$.

Proposició 2.7 *Sigui $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal. Es fixa arbitràriament un triangle O de la tessellació associada, que contingui el vèrtex zero, i sigui A el triangle adjacent a O que conté el vèrtex a . Aleshores, l'automorfisme $\alpha_{0,a}$ es pot veure en el pla com el gir d'angle π amb centre el punt mig del vector \overrightarrow{OA} .*

Demostració. Denotem per r el gir d'angle π amb centre el punt mig del vector \overrightarrow{OA} . Per veure que r és una representació de $\alpha_{0,a}$, s'ha de veure que un triangle que conté un vèrtex i es transforma per r en un triangle que conté el vèrtex $\alpha_{0,a}(i) = a - i$. Però això és clar ja que $\alpha_{0,a}$ és fer un canvi de signe i després sumar a . I això en el pla és el gir de centre O i angle π , seguit de la translació de vector \overrightarrow{OA} . Per raonaments senzills de geometria plana, es prova que aquesta composició coincideix amb r . \square

Aquesta darrera demostració està basada en el fet que fixant l'origen de coordenades en un punt arbitrari O del reticle de zeros i considerant només vèrtexs parells, si el triangle de coordenades (x, y) conté el vèrtex i , aleshores el triangle de coordenades $(-x, -y)$ conté el vèrtex $-i$.

Igualment es pot observar que amb les dues proposicions es té una representació de les translacions $\alpha_{u,v}$ del graf, per a u i v qualssevol.

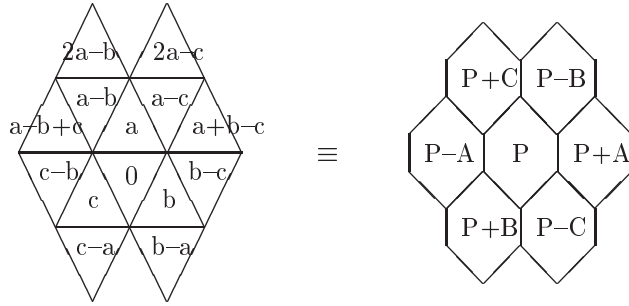


Figura 2.6: Esquema d'adjacències, en aparellar els vèrtexs.

2.3.2 Graf de triple llaç associat

En la secció 1.4.1 s'han donat alguns resultats sobre grafs de triple llaç $T_N(A, B, C)$ que satisfan $C = -(A + B)$. Considerant en l'anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$ camins de longitud 2 en lloc d'arestes, i només vèrtexs parells o només vèrtexs senars, s'obté un graf de triple llaç amb n vèrtexs que és isomorf a un graf de triple llaç en les condicions esmentades.

Definició 2.8 *El graf de triple llaç associat a l'anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$ és el graf de triple llaç $T_n(A, B, C)$ amb $2A = b - c$, $2B = c - a$ i $2C = a - b$.*

Aquest graf és isomorf al graf que resulta d'aparellar vèrtexs en l'anell cordal. Es consideren com a vèrtexs les parelles $P_i = \{2i, 2i + a\}$ per $a \in \mathbb{Z}_n$ amb les adjacències definides per camins de longitud 2 entre vèrtexs parells de l'anell cordal, és a dir, passos dobles $2A = b - c$, $2B = c - a$ i $2C = a - b$. Vegi's la figura 2.6.

Donat un anell cordal $\mathbf{C} = C_{2n}(a, b, c)$, i el seu graf de triple llaç associat $\mathbf{T} = T_n(A, B, C)$, considerem els triangles que contenen vèrtexs parells de la tessel·lació associada a \mathbf{C} . El que s'obté és la tessel·lació associada a \mathbf{T} . Així, els zeros estaran distribuïts segons un reticle del pla, que serà el mateix per a \mathbf{C} que per a \mathbf{T} . S'observa a més que un recorregut de longitud l en \mathbf{T} dona un recorregut de longitud $2l$ en \mathbf{C} , canviant cada aresta per dues cordes successives: A es canvia per $b, -c$, i $-A$ per $c, -b$; B es canvia per $c, -a$, i $-B$ per $a, -c$; finalment, C es canvia per $a, -b$, i $-C$ per $b, -a$. En particular, es poden expressar les equacions del reticle de zeros, és a dir, els vectors que el generen, com equacions en \mathbb{Z}_{2n} en funció de $(b - c)$, $(c - a)$ i $(a - b)$, o bé com equacions en \mathbb{Z}_n en funció de A , B i C .

Propietat 1 *Si dos anells cordals són isomorfs, aleshores tenen grafs de triple llaç isomorfs.*

Propietat 2 *Si dos anells cordals tenen, llevat simetries del pla, la mateixa tessel·lació, aleshores són isomorfs. I passa el mateix per als grafs de triple llaç.*

Això és clar, ja que un possible isomorfisme seria posar les tessel·lacions una sobre l'altra.

Propietat 3 *Dos grafs de triple llaç amb la mateixa tessel·lació associada són Ádam-isomorfs. És a dir, si $T_n(A, B, C)$ i $T_n(A', B', C')$ satisfan $C = -(A + B)$ i $C' = -(A' + B')$, i tenen la mateixa tessel·lació associada llevat simetries del pla, aleshores existeix un $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $\{\pm A', \pm B', \pm C'\} = \{\pm \lambda A, \pm \lambda B, \pm \lambda C\}$.*

Per veure que això es compleix n'hi ha prou amb observar que si $T_n(A, B, C)$ i $T_n(A', B', C')$ tenen la mateixa tessel·lació associada aleshores $D_n(A, B)$ i $D_n(A', B')$ tenen també la mateixa tessel·lació associada, i com que la conjectura d'Ádám és certa per a grafs de doble llaç, tal com es demostra en [41], resulta $\{\pm A', \pm B'\} = \{\pm \lambda A, \pm \lambda B\}$ per a algun λ invertible de \mathbb{Z}_n . A més, $C = -(A + B)$ i $C' = -(A' + B')$, i d'aquí es dedueix la propietat.

2.3.3 Ordre màxim d'un anell cordal de diàmetre donat

Com en el cas dels grafs de triple llaç, utilitzant la tessel·lació es calcula l'ordre màxim d'un anell cordal de diàmetre donat D , comptant a partir d'un triangle central el nombre de triangles que hi pot haver a distància com a molt D (vegi's [91]).

Lema 2.9 *Si $C_{2n}(a, b, c)$ té diàmetre D , aleshores $2n \leq \frac{3}{2}D^2 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}$.*

Com es veu a la figura 2.7, hi ha $3i$ triangles a distància i d'un de donat. Per tant es compleix $2n \leq 1 + \sum_{i=1}^D 3i = \frac{3}{2}D^2 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}$. Aquesta cota no s'assoleix, ja que el nombre de triangles corresponents a vèrtexs parells és diferent del nombre de triangles corresponents a vèrtexs senars. Com que si D és parell hi ha massa vèrtexs parells, i si D és senar hi ha massa vèrtexs senars, per donar una cota més bona es compta el nombre de triangles corresponents a la paritat de $D - 1$, i s'assigna a cadascun d'ells una parella de l'altra paritat. El nombre màxim de vèrtexs d'un anell cordal de diàmetre D es denota per m_D . El lema següent dóna una cota superior per m_D en els dos casos, D senar i D parell.

Lema 2.10 *Si $C_{2n}(a, b, c)$ té diàmetre D , aleshores es compleix:*

1. $D = 2l + 1 \quad \Rightarrow \quad m_D \leq 2(1 + \sum_{i=1}^l 6i) = 6l^2 + 6l + 2 = \frac{3D^2 + 1}{2};$
2. $D = 2l \quad \Rightarrow \quad m_D \leq 2(\sum_{i=1}^l 3(2i - 1)) = 6l^2 = \frac{3D^2}{2}.$

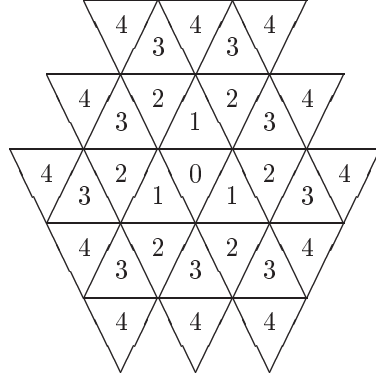


Figura 2.7: Ordre màxim per a un anell cordal de diàmetre 4.

Proposició 2.11 (Diàmetre senar) *Donat $D = 2l + 1$, senar, hi ha un anell cordal de diàmetre D i ordre $m_D = \frac{3D^2 + 1}{2}$.*

Demostració. L'anell cordal $C_{m_D}(a, b, c)$ té diàmetre D si i només si el seu graf de triple llaç associat, $T_{m_D/2}(A, B, C)$ amb $2A = b - c$, $2B = c - a$ i $2C = a - b$, té diàmetre l . Però $m_D/2 = 3l^2 + 3l + 1$ és el valor de l'ordre màxim per a un graf de triple llaç de diàmetre l . Així, tal com s'ha vist en la secció 1.4.1, $T_{m_D/2}(A, B, C)$ té diàmetre l si i només si $B \in \mathbb{Z}_{m_D/2}^*$, $A = (3l + 1)B$ i $C = -(3l + 2)B$. Aleshores, $C_{m_D}(a, b, c)$ té diàmetre D si i només si existeix $B \in \mathbb{Z}_{m_D/2}^*$ tal que $b - c = 2(3l + 1)B$, $c - a = 2B$ i $a - b = -2(3l + 2)B$. Per exemple, prenent $B = 1$ i $c = 1$, s'obté: $A = 3l + 1$ i $C = -(3l + 2)$, i per tant, $a = -1$ i $b = 6l + 3 = 3D$. \square

Una observació interessant és que la solució és única, és a dir, tots els anells cordals de diàmetre D i ordre m_D són isomorfs. A més, el fet que el graf de triple llaç associat sigui òptim implica que es poden definir les coordenades dels vèrtexs.

Estudiant la tessel·lació associada, representada a la figura 2.8, es pot veure quan el diàmetre és parell que la cota trobada no s'assoleix. Si hi hagués un anell cordal de diàmetre $D = 2l$ i ordre $\frac{3D^2}{2}$, les equacions del reticle, en funció dels passos A , B i C del graf de triple llaç associat, serien les equacions

$$\begin{aligned} A + B + C &\equiv_{3l^2} 0 \\ lA - lB &\equiv_{3l^2} 0 \\ lB - lC &\equiv_{3l^2} 0 \end{aligned}$$

I les solucions d'aquest sistema no satisfan la condició de connexitat ja que són de la forma $(A, B, C) = (\alpha l, \beta l, -(\alpha + \beta)l)$ amb $\alpha \equiv_3 \beta$. Estudiant

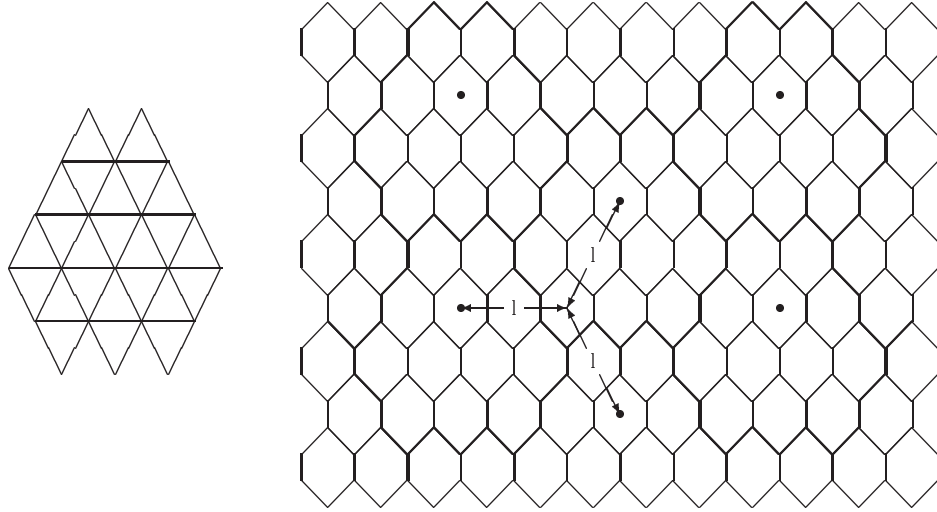


Figura 2.8: Rajola i tessellació en el cas $D = 4$ i $2n = 3D^2/2$.

les possibles rajoles que s'obtenen en reduir l'ordre del graf, es pot veure que no hi ha anells cordals de diàmetre parell $D = 2l$ i ordre més gran que $m_D = \frac{3D^2}{2} - D$. Aquest resultat apareix en [89], però no ha estat formalment provat.

Proposició 2.12 (Diàmetre parell) *Donat $D = 2l$, parell, hi ha un anell cordal de diàmetre D i ordre $m_D = \frac{3D^2}{2} - D$.*

Demostració. Sigui $C_{m_D}(a, b, c)$ de diàmetre D . El seu graf de triple llac associat és $T_{3l^2-l}(A, B, C)$, amb $2A = b - c$, $2B = c - a$ i $2C = a - b$. Si es pren com a possible tessellació associada la que es mostra a la figura 2.9, s'ha de complir:

$$\begin{aligned} A + B + C &\equiv_{3l^2-l} 0 \\ l \cdot A - l \cdot B &\equiv_{3l^2-l} 0 \\ (l-1) \cdot B - l \cdot C &\equiv_{3l^2-l} 0 \end{aligned}$$

i la condició $\text{mcd}(A, B, 3l^2 - l) = 1$.

La solució d'aquestes equacions és $B = A + \alpha(3l - 1)$, $A - \alpha = \beta l$ i $C = -(A + B)$ amb la condició $(A, B, l(3l - 1)) = 1$. Per exemple, prenent $A = 1$ i $\beta = 0$, es té $\alpha = 1$, $B = 3l$ i $C = -(3l + 1)$, i es satisfà la condició de connexitat. Prenent $b = 1$ s'obté $c = -1$ i $a = -3D - 1$. \square

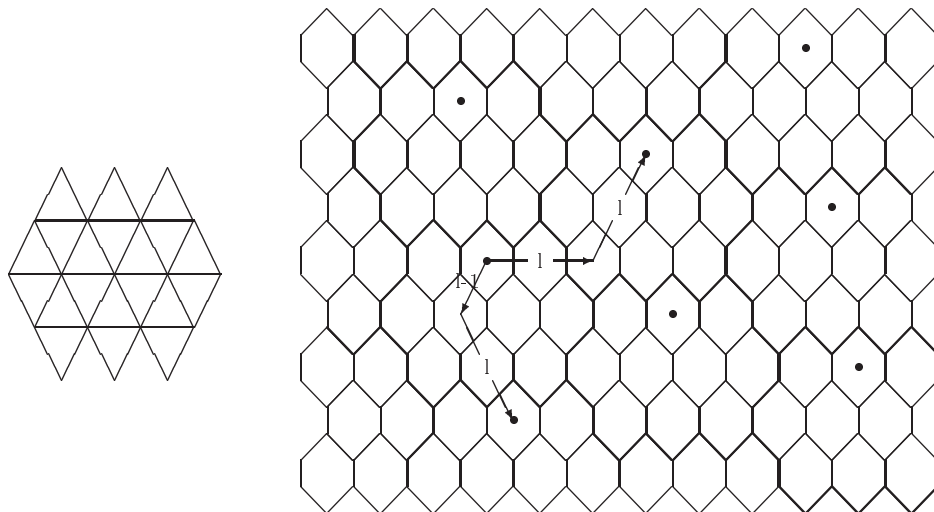


Figura 2.9: Tessel·lació en el cas $D = 4$, per a ordre m_D apropiat.

2.4 Reconeixement d'un anell cordal

En aquesta secció s'estudia el problema del reconeixement d'anells cordals. El problema del reconeixement consisteix en decidir si un graf pertany o no a una certa família. Donat un graf G d'ordre $2n$ i 3-regular, s'ha de determinar si existeixen passos a , b i c tals que $G \cong C_{2n}(a, b, c)$ i, en cas afirmatiu, quins són aquests passos.

És clar que si dos grafs són isomorfs, han de tenir per a cada k el mateix nombre de cicles de longitud k . L'algorisme que aquí es dona per resoldre aquest problema es basa en determinar la partició de les arestes en colors a partir dels cicles de longitud 4 i 6 del graf. Serà útil, per tant, l'estudi dels cicles d'aquestes longituds d'un anell cordal.

2.4.1 Caracterització dels 4-cicles i 6-cicles en un anell cordal

Per notar els cicles es fan servir successions de colors, **a**, **b** o **c**. Per exemple, el cicle **abcabc** és el cicle $(0, a, a-b, a-b+c, c-b, c)$, que en la tessel·lació són els hexàgons. I quan es diu que **ababab** forma un cicle vol dir que $(0, a, a-b, 2a-b, 2a-2b, 3a-2b)$ és un cicle, és a dir que $3a-3b \equiv_{2n} 0$.

Quins cicles de longituds 4 i 6 poden aparèixer en $C_{2n}(a, b, c)$? Llevat canvi d'ordre en els passos, poden haver-hi només dos tipus de cicles de longitud 4: **abab** i **abac**, i quatre tipus de cicles de longitud 6: **ababab**, **ababac**, **abacbc** i **abcabc**. Aquests cicles es poden representar en la tessel·lació. Vegi's la figura 2.10.

Quant a quins tipus de 6-cicles s'hauran de tenir en compte, es pot observar que tots els anells cordals tenen cicles de la forma **abcabc**, que

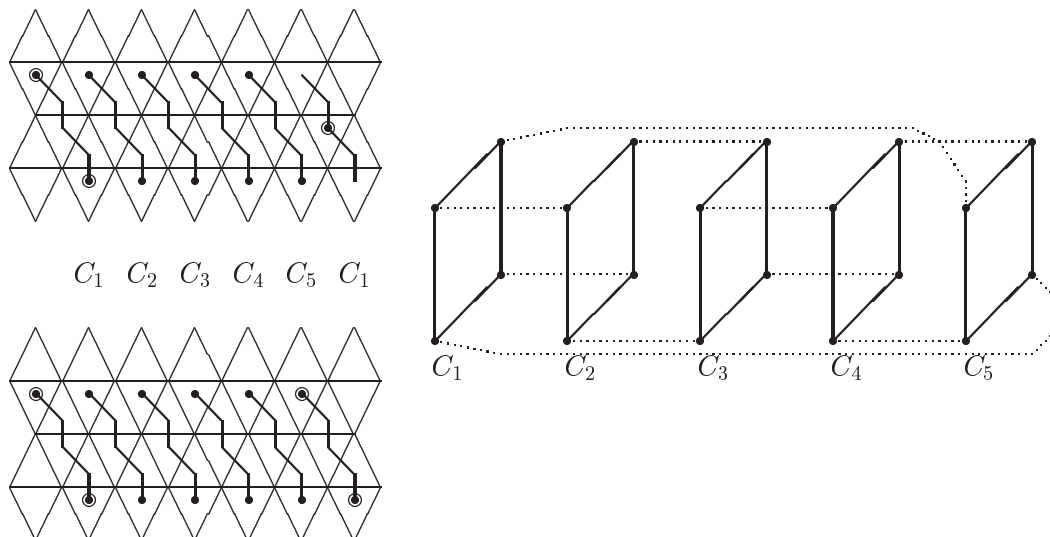


Figura 2.12: Ordre 20, cinc 4-cicles **abab**.

color **c** no estan contingudes en cap 4-cicle, mentre que le arestes de colors **a** i **b** estan contingudes cadascuna en un únic 4-cicle.

4. G conté només cicles de tipus **abac**. L'ordre és $2n \geq 10$ i $G \cong C_{2n}(1, -1, 3)$. A més, les arestes de color **a** estan contingudes cadascuna en dos 4-cicles, mentre que le arestes de colors **b** i **c** estan contingudes cadascuna en un únic 4-cicle.

Demostració. Com s'ha observat més amunt, només hi pot haver 4-cicles de dos tipus, **abab** i **abac**. Aleshores, els quatre casos de l'enunciat surten de distingir si n'hi ha de més d'un tipus o només d'un.

En primer lloc es consideren anells cordals $C_{2n}(a, b, c)$ amb dos tipus de

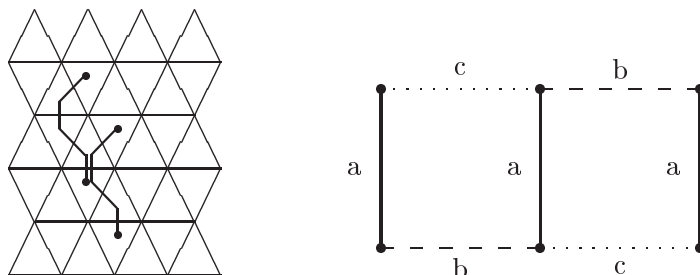


Figura 2.13: Dos cicles **abac** compartint una aresta.

4-cicles. És fàcil veure que només hi ha dues possibilitats, representades en la figura 2.11. Si hi ha cicles de la forma **abac** i també de la forma **bcba**, les equacions del reticle de zeros són

$$\begin{aligned}(a - b) + (a - c) &\equiv_{2n} 0 \\ (b - c) + (b - a) &\equiv_{2n} 0\end{aligned}$$

amb la condició de connexió $\text{mcd}(b - c, c - a, a - b, 2n) = 2$. La primera equació és $a - b \equiv_{2n} c - a$. Això dona $\text{mcd}(a - b, 2n) = 2$, i es pot suposar $a = 1$ i $b = -1$, de manera que el valor de la tercera corda només pot ser $c = 3$. Amb aquests valors per a les cordes, s'obté en la segona equació $-1 - 3 - 1 - 1 \equiv_{2n} 0$ i, per tant, l'ordre és 6. $C_6(1, -1, 3) = \bar{K}_{3,3}$ és l'únic anell cordal d'ordre 6. El raonament per a la resta de casos és anàleg. Si hi ha cicles de la forma **abab** només poden haver-n'hi de la forma **cbca**. Les equacions $2(a - b) \equiv_{2n} 0$ i $(c - b) + (c - a) \equiv_{2n} 0$ amb la condició de connexió $\text{mcd}(b - c, c - a, a - b, 2n) = 2$, impliquen que l'ordre és 8 i el graf només pot ser $C_8(1, -1, 3) = K_{4,4} - F$, amb F un 1-factor.

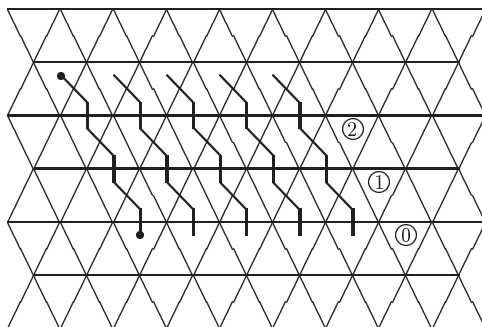
Sigui ara $C_{2n}(a, b, c)$ amb només 4-cicles de la forma **abab**. Aleshores es compleix $2a - 2b = 2n$ i, per tant, l'ordre és divisible per 4, $2n = 4k$. El graf descomposa en k cicles de longitud 4, dos a dos disjunts, enllaçats per les arestes de color **c**, que no estan contingudes en cap cicle de longitud 4. Les altres arestes estan contingudes cadascuna en un únic 4-cicle. Tal com es veu en la figura 2.12, hi ha dues possibilitats per a la tessellació. Es pot veure que la segona només es pot donar si k és senar, ja que $k(b - c) \equiv_{4k} 0$ amb k parell contradiu la condició de connexió, i també que en aquest cas, les dues tessel·lacions donen el mateix graf. De fet, la descomposició en cicles disjunts permet establir les equacions del reticle

$$\begin{aligned}2(a - b) &\equiv_{4k} 0 \\ k(b - c) + (a - b) &\equiv_{4k} 0\end{aligned}$$

Es pot suposar sense pèrdua de generalitat que $2(a - b) = 4k$ i $k(b - c) + (a - b) = 4k$. Fixant $b = 1$, s'obté per a les altres dues cordes els valors $a = 2k + 1$ and $c = -1$. El graf obtingut és, per tant, $C_{4k}(2k + 1, 1, -1)$.

Finalment, si $C_{2n}(a, b, c)$ conté només 4-cicles de la forma **abac**, aleshores per cada aresta de color **a** passen dos d'aquests cicles, mentre que per les de color **b** i **c** només en passa un. En la figura 2.13 es mostra l'estructura de dos d'aquests cicles que comparteixen una aresta. S'ha de complir $(a - b) + (a - c) \equiv_{2n} 0$ i la condició $\text{mcd}(a - b, b - c, c - a, 2n) = 2$. Es pot doncs assegurar que $\text{mcd}(a - b, 2n) = 2$. Això permet triar $a = 1$ i $b = -1$, de manera que llavors, $c = 3$ i el graf és $C_{2n}(1, -1, 3)$. \square

En general $C_{2n}(a, b, c)$ no conté 4-cicles. Per estudiar com és un anell cordal en funció dels 6-cicles que conté, no cal considerar l'existència de

Figura 2.14: Ordre 30, cinc 6-cicles **ababab**.

6-cicles de la forma **abacbc** ja que impliquen l'existència de 4-cicles **acac**. Així, es pot suposar que els 6-cicles que apareixen només poden ser de tres tipus: hexàgons, **ababab** i **ababac**. Utilitzant la tessellació, la figura 2.14 representa l'estructura cíclica d'un anell cordal amb només 6-cicles de la forma **ababab** i hexàgons. La figura 2.15 mostra en la tessellació, tres 6-cicles **ababac** compartint una aresta de color **a**. El teorema següent descriu tots els casos possibles.

Teorema 2.14 *Si un anell cordal $G = C_{2n}(a, b, c)$ no té cicles de longitud 4, aleshores es donarà una de les situacions exclouents següents:*

1. *L'ordre és $2n = 14, 16$ o bé 18 , i $G \cong C_{2n}(1, -1, 5)$.*
2. *En G no hi ha més 6-cicles que els hexàgons. Aleshores l'ordre de G és $2n \geq 20$ i per cada aresta passen exactament dos hexàgons.*
3. *En G només hi ha 6-cicles **ababab**, a més dels hexàgons. Aleshores l'ordre és $2n = 6k$ per a algun $k \geq 4$, i $G \cong C_{6k}(2k - 1, -1, 1)$ o bé $C_{6k}(2k + 1, -1, 1)$, dependent del valor de k . A més, les arestes de color **c** estan només en dos 6-cicles, mentre que les de colors **a** i **b** estan cadascuna en tres 6-cicles.*
4. *En G només hi ha 6-cicles **ababac**, a més dels hexàgons. Aleshores l'ordre és $2n \geq 20$, i $G \cong C_{2n}(1, -1, 5)$. A més, cada aresta de color **a** està continguda en cinc 6-cicles, cada aresta de color **b** està continguda en quatre 6-cicles i cada aresta de color **c** està continguda en tres 6-cicles.*

Demostració. Els quatre casos de l'enunciat apareixen en distingir quins 6-cicles hi ha, a més d'hexàgons.

En primer lloc, es suposa que $C_{2n}(a, b, c)$ té, a més dels hexàgons, 6-cicles de més d'un tipus. Hi ha només tres casos: (1) en G hi ha cicles de

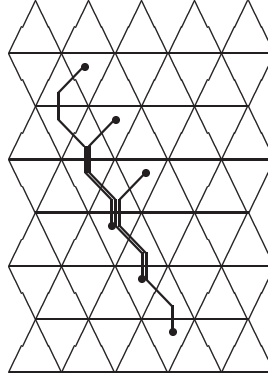


Figura 2.15: Cicles de la forma **ababac**.

la forma **ababab** i **bcbcbc**, (2) en G hi ha cicles de la forma **ababab** i algun dels de la forma **ababac**, (3) en G hi ha 6-cicles de la forma **ababac** diferents. El cas (1) és impossible, ja que l'equació $a - b = b - c$ i la condició $\text{mcd}(a - b, b - c, 2n) = 2$ impliquen que l'ordre és 6, i llavors hi hauria 4-cicles. En el cas (2), es pot veure que, per assegurar que no hi ha 4-cicles i que el graf és connex, l'única possibilitat llevat simetries és que existeixin 6-cicles **ababab** i **bcbcbca**. Aleshores l'ordre és 18, i el graf és $C_{18}(5, -1, 1)$. En el cas (3), l'estudi de la tessellació permet veure que hi ha dues possibilitats, llevat simetries. La primera possibilitat és que hi hagi cicles **ababac**, **bcbcbca** i **cacacb**. Aleshores es satisfan les equacions $2(a - b) \equiv_{2n} c - a$, $2(b - c) \equiv_{2n} a - b$ i $2(c - a) \equiv_{2n} b - c$, i la condició de connexió $\text{mcd}(a - b, b - c, c - a, 2n) = 2$. Per tant, l'ordre només pot ser 14, ja que $7(a - b) \equiv_{2n} 0$ i $\text{mcd}(a - b, 2n) = 2$, i triant $a = 1$, $b = -1$ l'altra corda només pot ser $c = 5$. El graf és $C_{14}(1, -1, 5)$. La segona possibilitat és que hi hagi cicles **ababac** i **bcbcbca**. Ara les equacions donen el graf $C_{16}(1, -1, 5)$. Això completa el primer cas de l'enunciat.

Segui ara un anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$ amb només hexàgons. Aquest és el cas més general. Es pot comprovar que cada aresta està continguda en dos hexàgons i que, en un hexàgon, arestes oposades són del mateix tipus. D'aquesta manera es té, doncs, el segon cas de l'enunciat.

Segui ara $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal que conté només 6-cicles **ababab**, a més dels hexàgons. Es compleix $3a - 3b = 2n$, i per tant, l'ordre és divisible per 6. Escrivint $2n = 6k$, segur que $k \geq 4$ ja que en cas contrari hi hauria 4-cicles o bé més 6-cicles. Es pot descomposar el graf en k cicles de longitud 6, dos a dos disjunts, enllaçats per les arestes de color **c**, contingudes només en els hexàgons. Per tant, les arestes de color **a** i **b** estan contingudes en tres 6-cicles i les de color **c** en dos. En la figura 2.14 hi ha representats els cinc 6-cicles **ababab** corresponents a un graf d'ordre 30. Per a k qualsevol

es produeix una situació semblant. Les equacions del reticle són

$$\begin{aligned} 3(a-b) &\equiv_{6k} 0 \\ k(b-c) + \ell(a-b) &\equiv_{6k} 0 \end{aligned}$$

on ℓ pot ser 0, 1 o 2. Per a cada valor de k , només es tenen en compte els valors de ℓ que satisfan la condició de connexió del graf. El cas $\ell = 0$ només es pot donar si $\text{mcd}(k, 6) = 1$, i dóna un graf isomorf al que s'obté quan $\ell = 1$ o $\ell = 2$, amb un canvi d'ordre dels colors. Si $\ell = 1$ aleshores $G = C_{6k}(2k-1, -1, 1)$ i si $\ell = 2$ aleshores $G = C_{6k}(2k+1, -1, 1)$. Aquests dos grafs són isomorfs quan $k = 3\alpha$. Si $k = 6\alpha + 2$ aleshores $\ell \neq 2$, i si $k = 6\alpha - 2$ aleshores $\ell \neq 1$. Amb això queda demostrat el tercer cas de l'enunciat.

Finalment, resta només el cas en què $C_{2n}(a, b, c)$ només té 6-cicles **ababac**, a més dels hexàgons. Es compleix $2(a-b) \equiv_{2n} c-a$ i la condició de connexió $\text{mcd}(a-b, c-a, 2n) = 2$. Es té doncs $\text{mcd}(a-b, 2n) = 2$ i es pot triar $a = 1$ i $b = -1$, de manera que resulta $c = 5$. El graf és $C_{2n}(1, -1, 5)$, i l'ordre ha de ser $2n \geq 20$, ja que en cas contrari el graf contindria 4-cicles o més 6-cicles dels que es suposen. S'observa en la figura 2.15 que, cada aresta de color **a** està continguda en tres dels 6-cicles **ababac** i dos hexàgons, cada aresta de color **b** està continguda en dos dels 6-cicles **ababac** i dos hexàgons, i cada aresta de color **c** està continguda en un dels 6-cicles **ababac** i dos hexàgons. Això completa la prova del teorema. \square

La taula 2.1 resumeix els dos lemes anteriors. Aquests dos lemes permeten definir un algorisme polinomial per a reconèixer si un graf és o no un anell cordal, basat en identificar el color de les arestes a partir dels cicles de longituds 4 i 6 del graf.

2.4.2 Algorisme *RAC*

Donat un graf G d'ordre $2n$ i 3-regular, l'algorisme següent retorna a, b i c si G és isomorf a $C_{2n}(a, b, c)$.

1. Ordres petits.

- A. Si $2n = 6, 8$ o 10 , comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(1, -1, 3)$.
- B. Si $2n = 14, 16$ o 18 i G no té 4-cicles, comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(1, -1, 5)$.

2. Ordre $2n \geq 12$ i G conté 4-cicles.

- A. Per $i \in \{0, 1, 2\}$, sigui E_i el conjunt d'arestes contingudes en exactament i 4-cicles.

B. *Cas 1.* $E_0 = \emptyset$ i $|E_1| = 2|E_2| = 2n$.

Es pot assignar el color **a** a E_2 i els colors **b** i **c** a la resta d'arestes, utilitzant que tots els 4-cicles són de la forma **abac** (vegi's la figura 2.13). Assignar a les cordes els valors $a = 1$, $b = -1$ i $c = 3$. Això permet etiquetar els vèrtexs, i després comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(1, -1, 3)$.

C. *Cas 2.* $2n = 4k$ per a algun k , $E_2 = \emptyset$, i $|E_1| = 2|E_2| = 2n$.

En aquest cas, assignar el color **c** a E_0 , i els colors **a** i **b** respectivament a les parelles d'arestes oposades en els 4-cicles **abab**. En cada 4-cicle es pot triar arbitràriament quina de les parelles és de color **a** i quina de color **b**, llevat de quan k és parell, en què el color de les arestes de l'últim 4-cicle ve determinat pel color de les arestes dels cicles anteriors. Vegi's la figura 2.12.

Si $k(b-c) + (a-b) \equiv_{2n} 0$ aleshores assignar a les cordes els valors $a = 2k + 1$, $b = 1$, i $c = -1$. Si $k(a-c) + (b-a) \equiv_{2n} 0$ aleshores assignar a les cordes els valors $a = 1$, $b = 2k + 1$, i $c = -1$. Amb aquests valors per a les cordes, etiquetar els vèrtexs i després comprovar si G és isomorf a $C_{4k}(a, b, -1)$.

3. Ordre $2n \geq 20$ i G no conté 4-cicles.

A. Per $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, sigui E_i el conjunt d'arestes contingudes en exactament i 6-cicles.

B. *Cas 1.* $E_2 = E$, i $E_i = \emptyset$ per $i \neq 2$.

Per assignar els colors **a**, **b**, i **c** a les arestes s'utilitza que dues arestes oposades d'un hexàgon tenen el mateix color. Sigui k l'enter positiu més petit tal que $k(a-b) \equiv_{2n} 0$. Aleshores, es pot assignar a les cordes a i b els valors $a = \frac{N}{k} - 1$ i $b = -1$. En aquest punt, es poden etiquetar $2k$ vèrtexs. Si $k = n$, establir el valor corresponent a la corda c a partir de les etiquetes dels vèrtexs. Si $k < n$, establir el valor de la tercera corda en $c = \frac{N}{\ell} - 1$ on ℓ és l'enter positiu més petit tal que $\ell(c-b) \equiv_{2n} 0$, i etiquetar la resta de vèrtexs. Després comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(a, -1, c)$.

C. *Cas 2.* $E_2 = \emptyset$, i $|E_3| = |E_4| = |E_5| = n$.

En aquest cas, assignar el color **a** a E_5 , el color **b** a E_4 , i el color **c** a E_3 . Es pot assignar a les cordes els valors $a = 1$, $b = -1$, i $c = 5$. Això permet etiquetar els vèrtexs, i després comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(1, -1, 5)$.

D. *Cas 3.* $2n = 6k$ per a algun k , $E_4 = E_5 = \emptyset$, i $|E_3| = 2|E_2| = 2n$.

Es pot assignar el color **c** a E_2 , i els colors **a** i **b** a la resta d'arestes utilitzant que dues arestes oposades d'un hexàgon tenen

el mateix color. Si $k(b - c) \equiv_{2n} 0$ aleshores intercanviar els colors **a** i **b**. Això implica que $k(b - c) + \ell(a - b) \equiv_{2n} 0$ per a $\ell = 1$ o $\ell = 2$. Així es pot assignar a les cordes els valors $a = 2k + (-1)^\ell$, $b = -1$, i $c = 1$. Etiquetar els vèrtexs i després comprovar si G és isomorf a $C_{2n}(2k + (-1)^\ell, -1, 1)$.

Teorema 2.15 *Donat un graf G d'ordre $2n$ i grau 3, l'algorisme RAC retorna a, b i c si G és isomorf a $C_{2n}(a, b, c)$.*

Demostració. El teorema és conseqüència dels teoremes 2.13 i 2.14.

Del cas 1 del teorema 2.13 i del fet que tots els anells cordals d'ordre 10 són isomorfs, es dedueix 1.A. Del cas 1 del teorema 2.14 es dedueix 1.B. En 2.A es defineixen els conjunts E_i per $i \in \{0, 1, 2\}$ per tal de determinar quins tipus de 4-cicles conté el graf. Del cas 4 del teorema 2.13 es segueix 2.B, i del cas 3 del teorema 2.13 es segueix 2.C. En 3.A, com en 2.A, es defineixen els conjunts E_i per $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ per tal de determinar quins tipus de 6-cicles conté el graf. Els passos steps 3.B, 3.C i 3.D es dedueixen dels casos 2, 3 i 4 del teorema 2.14, respectivament. \square

Taula 2.1: 4-cicles i 6-cicles en $C_{2n}(a, b, c)$.

Anells cordals d'ordre petit

Ordre	Graf	Comentaris
6, 8, 10	$C_{2n}(1, -1, 3)$	Hi ha 4-cicles
12	$C_{12}(1, -1, 3)$ $C_{12}(1, -1, 5)$	Hi ha 4-cicles
14, 16, 18	$C_{2n}(1, -1, 3)$	No hi ha 4-cicles

Anells cordals d'ordre $2n \geq 12$ amb 4-cicles

Ordre	Graf	Comentaris
$2n = 4k$	$C_{4k}(2k + 1, 1, -1)$	4-cicles abab c en cap 4-cicle a i b en un únic 4-cicle
$2n$	$C_{2n}(1, -1, 3)$	4-cicles abac a en exactament dos 4-cicles b i c un únic 4-cicle

Anells cordals d'ordre $2n \geq 20$ sense 4-cicles

Ordre	Graf	Comentaris
$2n$	$C_{2n}(a, b, c)$	Només hexàgons Cada aresta pertany a dos 6-cicles Arestes oposades són del mateix color.
$2n = 6k$	$C_{6k}(2k \pm 1, 1, -1)$	6-cicles ababab c en exactament dos 6-cicles a i b en exactament tres 6-cicles Els hexàgons contenen les arestes c , i arestes oposades són del mateix color.
$2n$	$C_{2n}(1, -1, 5)$	6-cicles ababac a en exactament cinc 6-cicles, b en exactament quatre 6-cicles c en exactament tres 6-cicles

2.5 Grup d'automorfismes

El problema de determinar si un graf és o no arc-transitiu és interessant, ja que pot ser útil en la resolució de problemes, com l'estudi de l'índex òptic, en què definir un ecaminament a partir de les simetries del graf facilita els càlculs [19, 97].

En el cas dels anells cordals, la caracterització dels cicles en la tessellació permetrà, a més de reconèixer els anells cordals, descriure el seu grup d'automorfismes. Com que la imatge d'un k -cicle per un automorfisme ha de ser també un k -cicle, una aresta i la seva imatge per un automorfisme estan contingudes en el mateix nombre de k -cicles. En l'apartat anterior s'ha vist que l'estructura dels 6-cicles, o dels 4-cicles si n'hi ha, determina la tessellació. A partir dels mateixos resultats previs, és a dir els teoremes 2.13 i 2.14, en aquesta secció es demostra que llevat d'un cas particular, els automorfismes d'un anell cordal conserven la partició de les arestes en colors, i es veu també en quins casos hi pot haver permutació de colors.

Si $G = C_{2n}(a, b, c)$, denotem per $Aut(G)$ el seu grup d'automorfismes. És útil considerar, a més del subgrup de translacions $G_L = \{\alpha_w, w \in \mathbb{Z}_{2n}\}$, el subgrup d'automorfismes que deixen fix el vèrtex zero, $\mathcal{A}_0 \subset Aut(G)$. És clar que $Aut(G) = G_L \circ \mathcal{A}_0$. Les translacions donen els automorfismes sense punts fixos, i els automorfismes que fixen un punt donaran les possibles permutacions de colors.

Per altra banda, un automorfisme es pot veure en el pla com una transformació entre els triangles. Així, les translacions com graf de Cayley són gairebé les translacions del pla. Si $\alpha_w \in G_L$, per a w parell α_w és una translació i per a w senar α_w és una translació seguida d'un gir d'angle π . Aquestes transformacions del pla són isometries que conserven el color de les arestes i les equacions del reticle, encara que no el reticle, ja que no hi ha punts fixos. Per tant, el problema es redueix a estudiar \mathcal{A}_0 .

Fixant l'origen del pla en un triangle que contingui el vèrtex zero, un element de \mathcal{A}_0 és una bijecció entre els triangles que deixa fix l'origen i que conserva el reticle de zeros. En aquesta secció es veu que, en general, els elements de \mathcal{A}_0 es poden veure també com isometries del pla que conserven les equacions del reticle. El resultat no és trivial. En particular, hi ha una subfamília en què apareixen automorfismes que no corresponen a isometries del pla.

Lema 2.16 *Sigui $G = C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal i $\alpha \in Aut(G)$. Aleshores α és una isometria del pla si i només si la imatge per α de dues arestes del mateix color són dues arestes del mateix color.*

Demostració. Sigui α un automorfisme de G que és una isometria. Aleshores α conserva rectes paral·leles. A més, els colors de les arestes en la tessellació són direccions. Per tant, arestes del mateix color tenen imatges del mateix color.

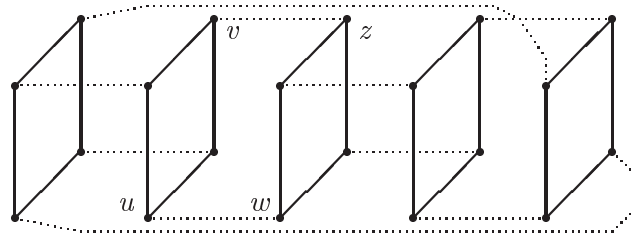


Figura 2.16: $C_{20}(11, 1, -1)$ amb $u = 13$, $v = 3$, $w = 14$, $z = 4$.

Recíprocament, es pot suposar sense pèrdua de generalitat que $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Aleshores, les imatges dels vèrtexs a , b i c amb la condició que dues arestes del mateix color es transformen en dues arestes del mateix color, determinen α . I és clar que hi ha només tres casos: si els tres vèrtexs a , b i c són fixos, aleshores α és la identitat; si un dels tres vèrtexs és fix, α és la simetria axial respecte la recta que passa pel zero i pel vèrtex fix; i si cap dels tres és fix, només pot ser $\alpha(a) = c$, $\alpha(b) = a$ i $\alpha(c) = b$, i α és el gir d'angle $\frac{2\pi}{3}$, o bé $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = c$ i $\alpha(c) = a$, i α és el gir d'angle $\frac{4\pi}{3}$. Totes aquestes transformacions del pla són isometries. \square

Lema 2.17 *Sigui $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal d'ordre $2n \geq 20$. $4\mathcal{A}_0$ conté només isometries si i només si el graf no conté 4-cicles de la forma **abab**.*

Demostració. Siguin $G = C_{2n}(a, b, c)$ d'ordre $2n \geq 20$ i $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Suposant que G no conté 4-cicles de la forma **abab**, s'ha de veure que α transforma dues arestes del mateix color en dues arestes del mateix color.

Si G té cicles de la forma **abac**, aleshores cada aresta de color **a** està continguda en un 4-cicle, i les de color **b** i **c** només en un. A més no hi ha més 4-cicles que aquests. Per tant, el conjunt d'arestes de color **a** és invariant per α . I la imatge d'un cicle **abac** pot ser, o bé **abac**, o bé **acab**. Per l'estructura dels 4-cicles, mostrada en la figura 2.13, si α deixa fixos els colors **b** i **c** d'un dels cicles, aleshores passarà el mateix en els altres cicles. De manera que, o bé els colors es conserven, o bé les arestes **b** es transformen en arestes **c** i les arestes **c** en arestes **b**.

Raonant de la mateixa manera, amb els 6-cicles, es demostra que si G no té 4-cicles passa el mateix: quan G té 6-cicles de la forma **ababac** els colors són fixos per α , quan G té 6-cicles de la forma **ababab** només es poden intercanviar les arestes de color **a** per arestes de color **b**, i si només hi ha hexàgons, s'utilitza que una aresta està continguda en dos hexàgons, que dues arestes d'un hexàgon tenen el mateix color si són oposades i que dues arestes oposades d'un hexàgon es transformen per α es transformen en dues arestes oposades d'un hexàgon.

Per veure el recíproc, aplicant el teorema 2.13, només cal veure que per a tot $k \geq 5$ el graf $C_{4k}(2k+1, 1, -1)$ té automorfismes que no són isometries. Vegi's una representació de $C_{20}(11, 1, -1)$ en la figura 2.16.

En $C_{4k}(2k+1, 1, -1)$ els k cicles **abab** són $C_i = \{2i, 2i+2k+1, 2i+2k, 2i+4k+1 = 2i+1\}$ amb $i = 0, \dots, k-1$. Aleshores, donat i entre 0 i $k-1$, la bijecció β_i definida per

$$\begin{aligned}\beta_i(2i+2k+1) &= 2i+1 \\ \beta_i(2i+1) &= 2i+2k+1 \\ \beta_i(2(i+1)) &= 2(i+1)+2k \\ \beta_i(2(i+1)+2k) &= 2(i+1)\end{aligned}$$

amb la resta de vèrtexs fixos és un automorfisme del graf, però no és una isometria, ja que hi ha arestes de color a i de color b fixes, i també hi ha arestes de color a i b que s'intercanvien. En la figura 2.16, β_1 és l'automorfisme que intercanvia els vèrtexs u i v i també els vèrtexs w i z , deixant la resta de vèrtexs fixos. \square

Si $\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$, es denota per π_{xy} la simetria axial respecte de la recta que passa per l'origen i pel triangle adjacent a l'origen que conté el vèrtex z , i per r i r^2 els girs d'angle $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$ respectivament. Aleshores $\{I, \pi_{ab}, \pi_{bc}, \pi_{ca}, r, r^2\}$ és el conjunt de totes les isometries del pla que fixen el zero i transformen triangles en triangles. D'aquestes aplicacions només són automorfismes de G les que deixen invariants les equacions del reticle, és a dir el reticle de zeros, ja que el zero és fix. De fet són les que indueixen sobre el conjunt de vèrtexs una bijecció.

En els dos lemes següents es fa servir que si un automorfisme és una isometria del pla aleshores conserva les equacions del reticle. Això dóna condicions de simetria sobre les equacions, que permeten caracteritzar el graf. Donat que les equacions vénen donades en termes de A, B i C , les condicions buscades es dedueixen de les imatges dels vèrtexs $2A, 2B$ i $2C$.

Lema 2.18 *Segui $G = C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal. En $\text{Aut}(G)$ hi ha una simetria axial si i només si existeixen dos enters positius ℓ i m tals que es compleix una de les dues condicions següents:*

1. $n = 2\ell m$, $\text{mcd}(\ell, m) = 1$ i $G \cong C_{4km}(4m+1, 1, 2m-2\ell+1)$;
2. $n = \ell m$, ℓ i m tenen la mateixa paritat, $\text{mcd}(m, \frac{\ell-m}{2}) = 1$, i $G \cong C_{2km}(2m+1, 1, m-\ell+1)$.

Demostració. Es pot suposar que $\pi_{ab} \in \mathcal{A}_0$. Les imatges dels vèrtexs a, b i c determinen les equacions del reticle, tal com es veu a continuació. Com que $\pi_{ab}(a) = b$, $\pi_{ab}(b) = a$ i $\pi_{ab}(c) = c$, sobre els vèrtexs $2A = b - c$, $2B =$

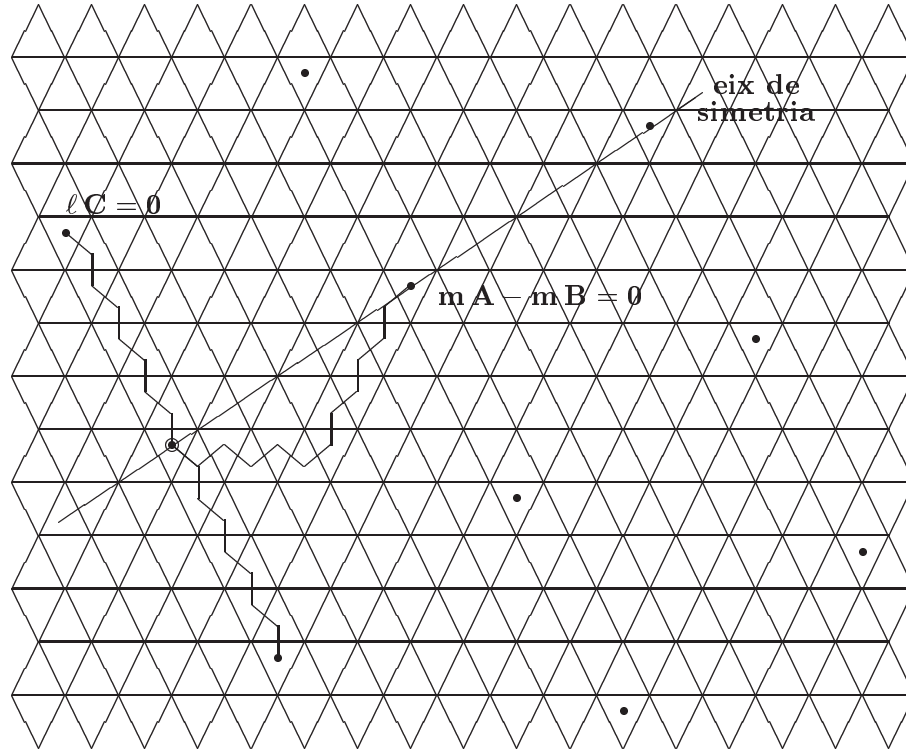


Figura 2.17: Anell cordal d'ordre 48, corresponent a $m = 3$, $k = 4$.

$c - a$ i $2C = a - b$ es té $\pi_{ab}(2A) = -2B$, $\pi_{ab}(2B) = -2A$ i $\pi_{ab}(2C) = -2C$. Sempre que es compleixi $xA + yB + zC \equiv_n 0$, que vol dir que el triangle de coordenades (x, y, z) conté el vèrtex zero, es tindrà també $-yA - xB - zC \equiv_n 0$. A més, canviant de signe les equacions, valdrà també $-xA - yB - zC \equiv_n 0$ i $xA + yB + zC \equiv_n 0$.

És clar que, si (x, y, z) i $(-y, -x, -z)$ contenen el vèrtex zero, $(x - y, y - x, 0)$ també. Considerant el valor positiu més petit de m amb $mA - mB \equiv_n 0$ i també el valor positiu més petit de ℓ tal que $\ell C \equiv_n 0$, es poden distingir dos casos. En el primer cas, aquestes dues equacions generen tot el reticle de zeros. En el segon, els punts que satisfan les equacions pertanyen al reticle de zeros, però no són tots els zeros. Si les equacions del reticle són

$$\begin{aligned} \ell C &\equiv_n 0 \\ mA - mB &\equiv_n 0 \end{aligned}$$

aleshores G és un anell cordal que es pot descomposar en $2m$ cicles disjunts de longitud 2ℓ que contenen només arestes **a** i **b**. En aquest primer cas $n = 2\ell m$, i l'anell cordal tindrà ordre $4\ell m$. La condició de connexió es complirà si i només si $\text{mcd}(\ell, m) = 1$. Això és fàcil de comprovar fent $\ell = \alpha x$ i $m = \alpha y$,

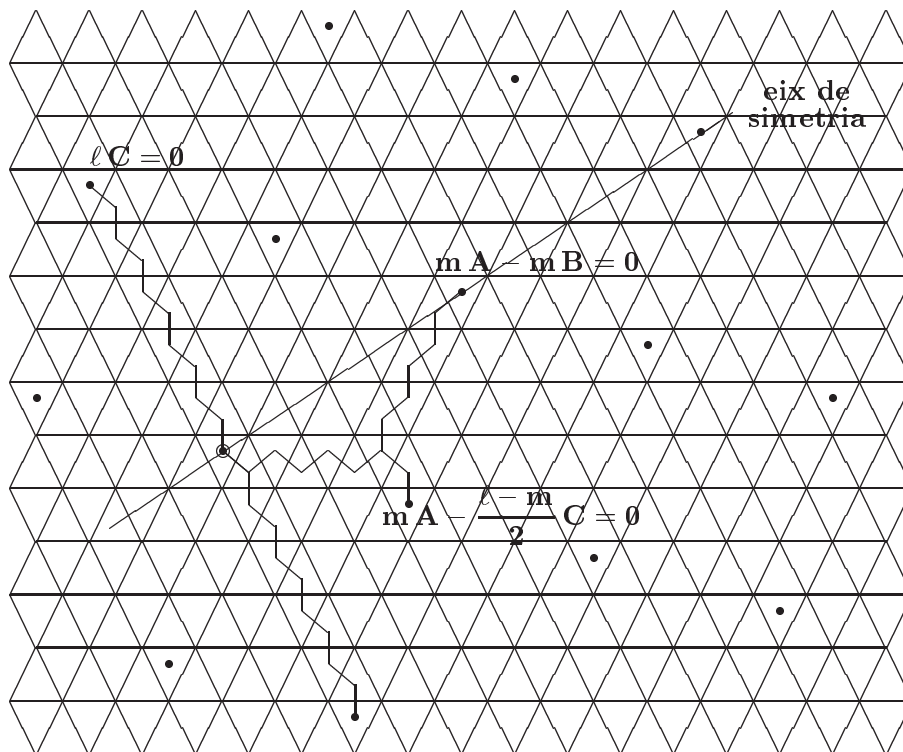


Figura 2.18: Anell cordal d'ordre 30, corresponent a $m = 3$, $k = 5$.

de manera que les equacions queden $\alpha x C = 2\alpha^2 xy$ i $\alpha y A - \alpha y B = 2\alpha^2 xy$. Combinant-les adequadament s'arriba a $0 = x(\alpha y A - \alpha y B) - y\alpha x C = 2\alpha xy A$. Aleshores $\text{mcd}(A, C, n) = \alpha$, i només pot ser $\alpha = 1$.

Llevat simetries, i triant $b = 1$, les equacions del reticle ara donen $a = 4m + 1$ i $c = 2m - 2k + 1$. El graf és doncs $C_{4km}(4m + 1, 1, 2m - 2k + 1)$. En la figura 2.17 es mostra la tessellació associada a $C_{48}(13, 1, -1)$, amb $m = 4$ i $\ell = 3$.

Si les equacions $\ell C \equiv_n 0$ i $m A - m B \equiv_n 0$ no generen tot el reticle, és fàcil veure que l'única manera de mantenir la simetria respecte de la recta per 0 i c , és que es compleixi $m A - \frac{\ell - m}{2} C \equiv_n 0$, en particular, ℓ i m han de tenir la mateixa paritat. Aleshores $n = \ell m$ i el nombre de cicles disjunts de longitud 2ℓ amb només arestes a i b és m . El reticle estarà generat per les equacions

$$\begin{aligned} m A - m B &\equiv_n 0 \\ m A - \frac{\ell - m}{2} C &\equiv_n 0 \end{aligned}$$

La condició de connexió es compleix si i només si $\text{mcd}\left(m, \frac{\ell - m}{2}\right) = 1$.

Per veure això s'escriu, com en el cas anterior, $m = \alpha y$ i $\frac{\ell - m}{2} = \alpha x$, de manera que $\ell = \alpha 2x + y$ i $n = \alpha^2 y(2x + y)$, i les equacions queden $\alpha y A - \alpha y B = 0$ i $\alpha y A - \alpha x C = 0$. Combinant-les adequadament s'arriba a $0 = x(\alpha y A - \alpha y B) + y(\alpha y A - \alpha x C) = (2\alpha xy + \alpha y^2)A$. Així $\alpha y(2x + y)A = 0$ en \mathbb{Z}_n , on $n = \alpha^2 y(2x + y)$. Aleshores $\text{mcd}(A, C, n) = \alpha$ i, per tant, $\alpha = 1$.

Llevat simetries i triant $b = 1$, les equacions del reticle ara donen $a = 2m + 1$ i $c = m - \ell + 1$. El graf és doncs $C_{2\ell m}(2m + 1, 1, m - \ell + 1)$. La tessellació associada a $C_{30}(7, 1, -1)$ està representada en la figura 2.18.

Recíprocament, les equacions del reticle de zeros corresponent a l'anell cordal $C_{4\ell m}(4m + 1, 1, 2m - 2\ell + 1)$ són

$$\begin{aligned}\ell C &\equiv_{2\ell m} 0 \\ m A - m B &\equiv_{2\ell m} 0\end{aligned}$$

i les equacions del reticle de zeros corresponent a l'anell cordal $C_{2\ell m}(2m + 1, 1, m - \ell + 1)$ són

$$\begin{aligned}m A - m B &\equiv_{\ell m} 0 \\ m A - \frac{\ell - m}{2} C &\equiv_{\ell m} 0\end{aligned}$$

En qualsevol dels dos casos, la simetria π_{ab} conserva les equacions. \square

Lema 2.19 *Sigui $G = C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal. En $\text{Aut}(G)$ hi ha els girs r i r^2 si i només si hi ha un enter positiu ℓ tal que es compleix una de les dues condicions següents:*

1. $n = 3\ell^2 + 3\ell + 1$ i $G \cong C_{2n}(-1, 6\ell + 3, 1)$;
2. ℓ és senar, $n = 3\ell^2 + 3\ell + 4$ i $G \cong C_{2n}(1 - 2(\ell + 2), 2\ell + 1, 1)$.

Demostració. Com en el lema anterior, suposant que $r \in \mathcal{A}_0$, les imatges dels vèrtexs a, b i c determinen les equacions del reticle. Com que $r(a) = c$, $r(b) = a$ i $r(c) = b$, es té $r(2A) = 2C$, $r(2B) = 2A$ i $r(2C) = 2B$. Sempre que es compleixi $x A + y B + z C \equiv_n 0$, es complirà també $y A + z B + x C \equiv_n 0$ i $z A + x B + y C \equiv_n 0$. Això implica que les equacions del reticle seran

$$\begin{aligned}k A - \ell B &\equiv_n 0 \\ k B - \ell C &\equiv_n 0 \\ k C - \ell A &\equiv_n 0\end{aligned}$$

per a algun valor positiu de k i ℓ , per als quals es pot suposar $k > \ell$. En particular, n no pot ser qualsevol, ja que les equacions del reticle determinen la rajola i, en particular, l'ordre. En la figura 2.19 es pot veure com seria la tessellació, cas d'existir l'anell cordal, pels valors $k = 6$ i $\ell = 3$.

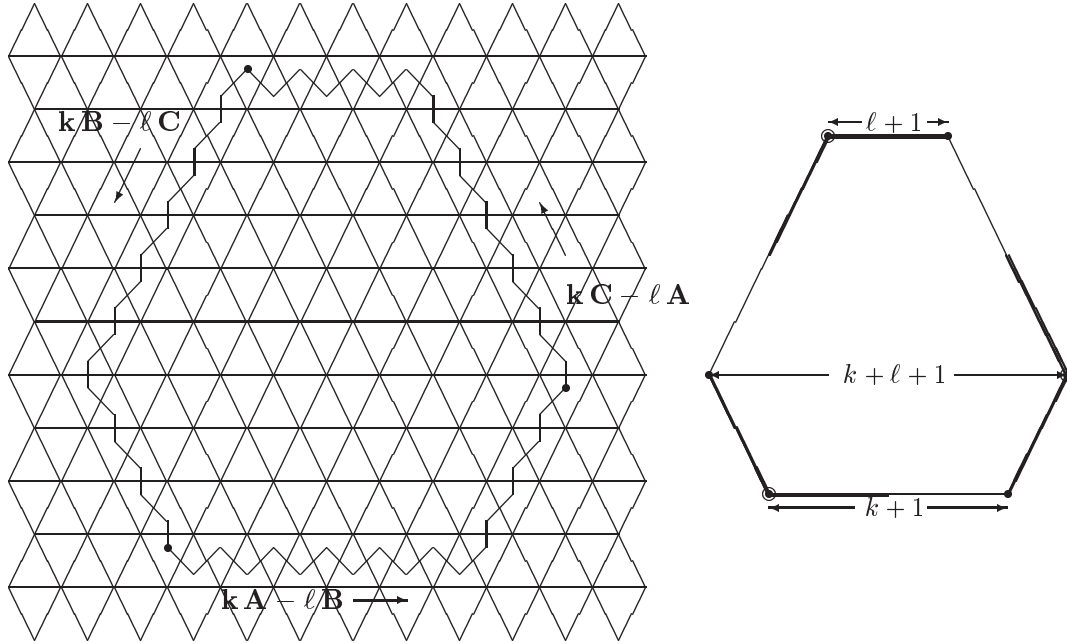


Figura 2.19: La tessellació quan $k = 6$ i $\ell = 3$.

Per calcular l'ordre en funció de k i ℓ es compta el nombre de triangles parells que conté la rajola. En la representació, es veu que els cicles $kA - lB$, $kC - lA$ i $kB - lC$ determinen la frontera de la rajola i , per tant, s'han de comptar tots els vèrtexs interiors, i els de la frontera sense repeticions. El càlcul dóna:

$$n = \sum_{i=k+1}^{k+l+1} i + \sum_{i=l+2}^{k+l} i - 2\ell - 1 = \frac{1}{2}(k+l+1)(k+l) + k(\ell+1) - 2k - 1$$

Fent $k = \ell + m$ s'obtenen les equacions $(\ell + m)A - \ell B \equiv_n 0$, $(\ell + m)B - \ell C \equiv_n 0$ i $(\ell + m)C - \ell A \equiv_n 0$, i el valor $n = 3\ell^2 + 3\ell m + \frac{m^2 + m}{2} + m - 1$. A més, la relació $A + B + C = 0$ permet reduir el sistema a dues equacions en A i B :

$$\begin{aligned} (\ell + m)A - \ell B &\equiv_n 0 \\ \ell A + (2\ell + m)B &\equiv_n 0. \end{aligned}$$

Ara, si A , B i C és una solució del sistema, aleshores per a $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$, λA , λB i λC és també una solució del sistema, ja que anells cordals corresponents tenen la mateixa tessellació. Així, les dues equacions s'han de poder reduir a una de sola, és a dir, el determinant d'aquest sistema ha de ser zero o un múltiple de n .

El determinant de la matriu de coeficients és $3\ell^2 + 3\ell m + m^2$. I si aquest nombre ha de ser un múltiple de $n = 3\ell^2 + 3\ell m + \frac{m^2 + m}{2} + m - 1$, només pot ser exactament n . Es té doncs $3\ell^2 + 3\ell m + m^2 = 3\ell^2 + 3\ell m + \frac{m^2 + m}{2} + m - 1$ i per tant $\frac{m^2 + m}{2} + m - 1 = m^2$, que dóna $m^2 - 3m + 2 = 0$. Això dóna dos possibles valors de m , $m = 1$ i $m = 2$.

Si $m = 1$, aleshores $n = 3\ell^2 + 3\ell + 1$, i les equacions són

$$\begin{aligned}(\ell + 1)A - \ell B &\equiv_n 0 \\ \ell A + (2\ell + 1)B &\equiv_n 0\end{aligned}$$

Per tant, una solució és $a = -1$, $b = 6\ell + 3$, i $c = 1$. I el graf és $C_{2n}(-1, 6\ell + 3, 1)$.

Si $m = 2$, aleshores $n = 3\ell^2 + 6\ell + 4$, i les equacions són

$$\begin{aligned}(\ell + 2)A - \ell B &\equiv_n 0 \\ \ell A + (2\ell + 2)B &\equiv_n 0\end{aligned}$$

La condició de connexió només es satisfà si ℓ és senar. En aquest cas, doncs, una solució és $a = 1 - 2(\ell + 2)$, $b = 2\ell + 1$, i $c = 1$. El graf és $C_{2n}(1 - 2(\ell + 2), 2\ell + 1, 1)$, per a ℓ senar.

Recíprocament, com en el lema 2.18, és fàcil comprovar que r conserva les equacions del reticle dels grafs $C_{2n}(-1, 6\ell + 3, 1)$ i $C_{2n}(1 - 2(\ell + 2), 2\ell + 1, 1)$.
□

En el següent teorema, conseqüència d'aquests dos lemes, es dóna la caracterització del grup d'automorfismes d'un anell cordal d'ordre $2n \geq 20$. Per a gairebé tots els anells cordals el grup d'automorfismes és exactament el grup de translacions, és a dir, $\mathcal{A}_0 = \{Id\}$. Si el grup conté no només translacions, hi ha quatre casos. Els tres primers corresponen a anells cordals per als quals tot automorfisme deixa fix un color. En l'enunciat del teorema, els grafs es descriuen suposant que el color fix és c , igual que en els lemes anteriors. Els automorfismes β_i són els que han estat definits en la prova del lema 2.17.

Teorema 2.20 *Sigui G un anell cordal d'ordre $2n \geq 20$. Per a tot enter $k \geq 5$, i per a tot enter i , $0 \leq i \leq k - 2$, es defineix β_i , bijecció de \mathbb{Z}_{4k} , per $\beta_i(2i + 2k + 1) = 2i + 1$, $\beta_i(2i + 1) = 2i + 2k + 1$, $\beta_i(2(i + 1)) = 2(i + 1) + 2k$, $\beta_i(2(i + 1) + 2k) = 2(i + 1)$, i la resta de punts, fixos.*

1. *Si hi ha un enter senar $k \geq 5$ tal que G és isomorf a $C_{4k}(2k + 1, 1, -1)$, aleshores \mathcal{A}_0 és el grup generat pel conjunt $\{\beta_i, 0 \leq i \leq k - 2\}$.*
2. *Si hi ha un enter parell $k \geq 5$ tal que G és isomorf a $C_{4k}(2k + 1, 1, -1)$, aleshores \mathcal{A}_0 és el grup generat pel conjunt $\{\pi_{ab}\} \cup \{\beta_i, 0 \leq i \leq k - 2\}$.*

3. Si hi ha dos enters m i ℓ , amb $\text{mcd}(\ell, m) = 1$, tals que G és isomorf a $C_{4\ell m}(4m + 1, 1, 2m - 2\ell + 1)$, o si hi ha dos enters m i $\ell \neq 2$, amb $\text{mcd}(m, \frac{\ell - m}{2}) = 1$, tals que G és isomorf a $C_{2\ell m}(2m + 1, 1, m - \ell + 1)$, aleshores $\mathcal{A}_0 = \{Id, \pi_{ab}\}$.
4. Si hi ha un enter ℓ tal que $n = 3\ell^2 + 3\ell + 1$ i G és isomorf a $C_{2n}(-1, 6\ell + 3, 1)$, o si hi ha un enter senar ℓ tal que $n = 3\ell^2 + 3\ell + 4$ i G és isomorf a $C_{2n}(1 - 2(\ell + 2), 2\ell + 1, 1)$, aleshores $\mathcal{A}_0 = \{Id, r, r^2\}$.
5. Altrament, $\mathcal{A}_0 = \{Id\}$, i el grup d'automorfismes de G és el conjunt de translacions G_L .

El teorema es dedueix dels lemes 2.16 i 2.17. En el cas 2, \mathcal{A}_0 conté β_i . Però també és fàcil comprovar que $C_{4k}(2k + 1, 1, -1) = C_{4\ell m}(2m + 1, 1, m - \ell + 1)$, amb $\ell = 2$ i $m = k$ parell. Per tant, les equacions del reticle són invariants per π_{ab} , tal com s'ha vist en el lema 2.18. L'últim cas del teorema correspon als anells cordals arc-transitius. El grup d'automorfismes conté només isometries de la tessel·lació, i \mathcal{A}_0 és isomorf al grup cíclic d'ordre 3. És interessant recordar que, el graf $C_{2n}(-1, 6\ell + 3, 1)$, amb $n = 3\ell^2 + 3\ell + 1$ és l'anell cordal de diàmetre senar $2\ell + 1$ i ordre màxim, ja estudiats en la Secció 2.3.3.

2.6 Anells cordals isomorfs

L'anàlisi dels cicles d'un anell cordal permet, a més de resoldre el problema del reconeixement i de descriure el grup d'automorfismes, determinar les classes d'isomorfia d'aquesta família de grafs. De fet, el que es veu en la secció 2.4 és que la tessel·lació determina el graf. Segons es veu en el lema 2.17, hi ha anells cordals que tenen automorfismes que no conserven la partició en colors de les arestes. Aquest resultat mostra que, la resposta negativa a la pregunta de si pot haver-hi anells cordals isomorfs amb tessel·lacions diferents potser no és tan intuïtiva com podria semblar.

En la secció 2.3.2, la propietat 3 permet donar isomorfismes d'anells cordals, a partir d'Ádám isomorfismes dels grafs de triple llaç associats. Així, si per a un cert $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$ les cordes a, b, c i a', b', c' satisfan $a' - b' = \lambda(a - b)$, $b' - c' = \lambda(b - c)$ i, per tant, $c' - a' = \lambda(c - a)$, aleshores $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a', b', c')$. L'isomorfisme $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a + 2i, b + 2i, c + 2i)$ es dedueix d'aquesta propietat amb $\lambda = 1$.

El que es pot assegurar ara és que, llevat canvis d'ordre en les cordes, que en el pla són simetries de la tessel·lació, aquests isomorfismes són els únics.

Donats un anell cordal i el seu graf de triple llaç associat, $C_{2n}(a, b, c)$ i $T_n(A, B, C)$, amb $\text{mcd}(A, n) = \alpha$, $\text{mcd}(B, n) = \beta$ i $\text{mcd}(C, n) = \gamma$. Sempre

es poden suposar les cordes ordenades de manera que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Aquesta notació és la que s'utilitza en les proposicions següents.

Proposició 2.21 *Si $\alpha < \beta < \gamma$ i $A = z\alpha$, aleshores els grafs de triple llaç $T_n(A, B, C)$ i $T_n(\alpha, x\beta, y\gamma)$, amb $x\beta = z^{-1}B$ i $y\gamma = z^{-1}C$, són isomorfs. En aquest cas, $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(2y\gamma - 2\alpha - 1, 2\alpha + 1, 1)$.*

Proposició 2.22 *Si $\alpha = \beta = 1$, $\gamma \neq 1$ i $C = z\gamma$, aleshores els grafs de triple llaç $T_n(A, B, C)$ i $T_n(x, y, \gamma)$, amb $x = z^{-1}A$ i $y = z^{-1}B$, són isomorfs. En aquest cas, $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(2\gamma + 2x + 1, 2x + 1, 1)$.*

Proposició 2.23 *Si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, aleshores el graf $T_n(A, B, C)$ és isomorf als tres grafs de triple llaç $T_n(1, x, -(x+1))$, $T_n(x^{-1}, 1, -(x^{-1}+1))$ i $T_n((1+x)^{-1}, -(1+x)^{-1}-1, 1)$, on $x = A^{-1}B$. En aquest cas, $C_{2n}(a, b, c)$ és isomorf als anells cordals $C_{2n}(-2x - 1, 1, -1)$, $C_{2n}(-1, 2x^{-1} + 1, 1)$ i $C_{2n}(1, -1, -1 - 2(1+x)^{-1})$.*

Les tres proposicions es dedueixen d'aplicar al graf de triple llaç associat a l'anell cordal, $T_n(A, B, C)$, un isomorfisme de la forma $A \rightarrow \lambda A$, $B \rightarrow \lambda B$ i $C \rightarrow \lambda C$, amb l'enter λ inversible en \mathbb{Z}_n adequat. A més, d'aquestes tres proposicions es dedueix fàcilment com es pot determinar si dos anells cordals són isomorfs.

Signin $C_{2n}(a, b, c)$ i $C_{2n}(a', b', c')$ anells cordals, amb grafs de triple llaç associats $T_n(A, B, C)$ i $T_n(A', B', C')$, respectivament. És clar que si hi ha isomorfisme, es poden reordenar les cordes de manera que $\text{mcd}(A, n) = \text{mcd}(A', n) = \alpha$, $\text{mcd}(B, n) = \text{mcd}(B', n) = \beta$ i $\text{mcd}(C, n) = \text{mcd}(C', n) = \gamma$, amb $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Es poden distingir els tres casos següents.

1. Si $\alpha < \beta < \gamma$, per la proposició 2.21 hi ha dos enters y i y' , amb $\text{mcd}(y, n) = \text{mcd}(y', n) = 1$, tals que $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(2y\gamma - 2\alpha - 1, 2\alpha - 1, 1)$, i $C_{2n}(a', b', c') \cong C_{2n}(2y'\gamma - 2\alpha - 1, 2\alpha - 1, 1)$.
Aleshores, $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a', b', c')$ si i només si $y = y'$.
2. Si $\alpha = \beta = 1$, $\gamma \neq 1$, per la proposició 2.22 hi ha dos enters x i x' , amb $\text{mcd}(x, n) = \text{mcd}(x', n) = 1$, tals que $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(2\gamma + 2x + 1, 2x + 1, 1)$, i $C_{2n}(a', b', c') \cong C_{2n}(2\gamma + 2x' + 1, 2x' + 1, 1)$.
Aleshores, $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a', b', c')$ si i només si $x = x'$ o bé $x + x' = \gamma$.
3. Si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, per la proposició 2.23 hi ha dos enters x i x' , amb $\text{mcd}(x, n) = \text{mcd}(x', n) = 1$, tals que $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(-2x - 1, 1, -1)$, i $C_{2n}(a', b', c') \cong C_{2n}(-2x' - 1, 1, -1)$.
Aleshores, $C_{2n}(a, b, c) \cong C_{2n}(a', b', c')$ si i només si $\pm(2x' + 1) \in \{- (2x + 1), 2x^{-1} + 1, -1 - 2(1+x)^{-1}\}$.

2.7 Aresta-bisecció dels anells cordals

L'aresta-bisecció d'un graf és el mínim nombre d'arestes que s'han d'eliminar per a obtenir dues components connexes del mateix ordre, o d'ordres amb una unitat de diferència. Molts dels grafs utilitzats sovint com a models de xarxes d'interconnexió tenen la bisecció gran (vegi's el llibre de Leighton [79]). Això és degut a que la bisecció és un factor important al determinar la complexitat d'algorismes en els quals la informació s'ha d'intercanviar entre dues meitats de la xarxa. Per exemple, en [68, 75, 76] es donen cotes inferiors per a la complexitat del problema de *gossiping* en els modes de comunicació de camins vèrtexs disjunts i de camins aresta-disjunts, en funció de l'ordre i de la bisecció del graf. En el capítol 4 es dona un algorisme de *gossiping* en els anells cordals en el model de camins aresta-disjunts. L'estudi de l'optimalitat d'aquest algorisme ha motivat el càlcul de l'aresta-bisecció, per a la qual només s'ha pogut trobar una aproximació.

El problema del càlcul de la bisecció de grafs és un problema NP-complet. Per a calcular la bisecció d'algunes famílies de grafs s'ha treballat amb mètodes diversos. Per exemple, Leighton dona en [79] l'aresta-bisecció de les malles i de l'hipercub. La tècnica aplicada en aquest cas mostra que, en general pot ser fàcil trobar cotes superiors, mentre que demostrar que una cota és ajustada, és a dir, trobar cotes inferiors, pot ser més difícil. Com a exemples dels treballs sobre bisectors de grafs, el problema per a vèrtexs en grafs de Cayley és estudiat per Annexstein i Baumslag [10], Blackburn [24] i Hamidoune i Serra [60]. En [101], Pothen *et al.* utilitzen mètodes espectrals per trobar particions de grafs. Monien i Diekmann [87] donen cotes per l'aresta-bisecció de grafs de grau parell.

En aquesta secció es presenten cotes superiors per a l'aresta-bisecció dels anells cordals. Per als anells cordals de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$, els resultats són quasi òptims.

2.7.1 Preliminars

Lema 2.24 *Si k és el mínim cardinal d'un conjunt d'arestes bisector de $C_{2n}(-1, d, 1)$, amb $d \leq n$, aleshores $k \leq d + 2$.*

Demostració. La partició del conjunt de vèrtexs $\{0, \dots, 2n - 1\}$ en els dos conjunts $\{0, \dots, n - 1\}$ i $\{n, \dots, 2n - 1\}$ dona aquesta primera cota, tal com es veu en la figura 2.20. El conjunt d'arestes $X = \{(i, j) \in E, 0 \leq i \leq n - 1, n \leq j \leq 2n - 1\}$ separa els vèrtexs $\{0, \dots, n - 1\}$ dels vèrtexs $\{n, \dots, 2n - 1\}$.

Si n és parell, tenint en compte que $d \leq n$, es té $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ on

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(2n - d + 1, 1), (2n - d + 3, 3), \dots, (2n - 2, d - 2)\} \\ X_2 &= \{(n - d + 1, n + 1), (n - d + 3, n + 3), \dots, (n - 2, n + d - 2)\} \\ X_3 &= \{(2n - 1, 0), (n - 1, n)\}. \end{aligned}$$

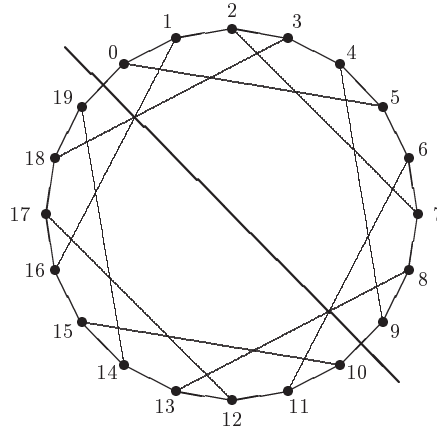


Figura 2.20: Bisector de $C_{20}(-1, 5, 1)$.

El càlcul del cardinal d'aquests conjunts dóna $|X_1| = \frac{d-1}{2}$, $|X_2| = \frac{d-1}{2}$ i $|X_3| = 1$. Per tant, $|X| = d+1$.

De la mateixa manera, per n senar es troba $|X| = d+2$. \square

A continuació s'utilitza la tessellació associada a un anell cordal per a millorar aquesta cota, en els grafs de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$.

Com ja s'ha vist, es poden associar coordenades a cada vèrtex parell, de manera que la terna (x, y, z) representa el vèrtex $x2A + y2B + z2C \in \mathbb{Z}_{2n}$. Però també es pot veure una terna (x, y, z) com una seqüència d'arestes del graf, de la manera següent. Si x, y i z són positius, (x, y, z) representa la seqüència que conté x vegades $(b, -c)$ seguit de y vegades $(c, -a)$, i seguit de z vegades $(a, -b)$. Per a ternes d'enters qualssevol, s'extén aquesta notació de manera natural: si x (respectivament y o z) és negatiu, apareix $-x$ vegades $(c, -b)$ (respectivament $-y$ vegades $(a, -c)$, o $-z$ vegades $(b, -a)$).

Per a cada vèrtex parell, v , es denota per $v + (x, y, z)$ el recorregut d'origen v determinat per la seqüència (x, y, z) . És dóna un exemple en la figura 2.21. El recorregut $v + (x, y, z)$ és un cicle si es compleix $xA + yB + zC \equiv_n 0$. I ja ha estat vist en la secció 1.4.2 que, utilitzant $A + B + C = 0$, es pot reduir una relació de la forma $xA + yB + zC \equiv_n 0$ a una altra en què només intervinguin dos dels tres enters A, B i C , amb els coeficients de signe diferent. En efecte, suposant per exemple que $x \geq y \geq z$, $xA + yB + zC \equiv_n 0$ es pot reduir a $(x-y)A - (y-z)C \equiv_n 0$. En la figura 2.21 (b) hi ha un exemple de la representació de cicles en el pla. Es diu que dos cicles són *paral·lels* si segueixen la mateixa direcció en la tessellació, i tenen l'origen en vèrtexs a distància dos, tal com en la figura 2.22.

Amb aquesta notació, s'estableixen els dos lemes següents, que valen per

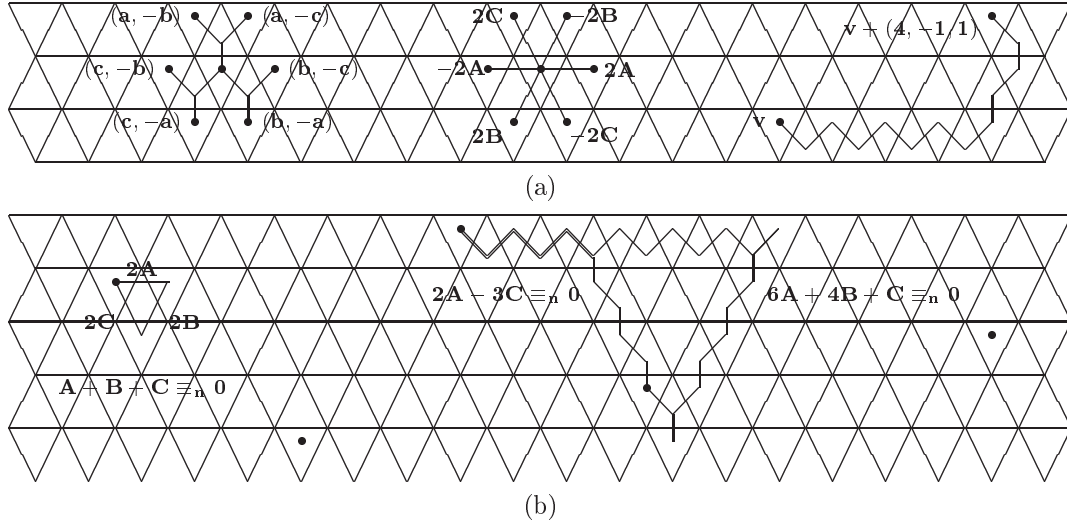


Figura 2.21: (a) Representació dels camins de longitud parell d'un anell cordal. (b) Representació dels cicles de $C_{46}(-1, 9, 1)$. En (b), el reticle de zeros associat a $C_{46}(-1, 9, 1)$ és el conjunt de triangles que contenen \bullet .

a anells cordals amb cordes a , b i c qualssevol.

Lema 2.25 *Sigui v un vèrtex parell d'un anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$, i sigui $w = v - 2C$. Siguin x i y dos enters positius tals que $xA - yB \equiv_n 0$. Aleshores, els cicles $C_v = v + (x, -y, 0)$ i $C_w = w + (x, -y, 0)$ estan connectats per totes les cordes \mathbf{a} amb un extrem en el subconjunt del conjunt de vèrtexs de C_w*

$$\{w, w + 2A, \dots, w + (x - 1)2A\}$$

i per totes les cordes \mathbf{b} amb un extrem en el subconjunt del conjunt de vèrtexs de C_v

$$\{v + x2A, v + x2A - 2B, \dots, v + x2A - (y - 1)2B\}$$

Demostració. Només s'ha de comprovar que les cordes \mathbf{a} enumerades tenen l'altre extrem a C_v , i també que les cordes \mathbf{b} enumerades tenen l'altre extrem a C_w . Vegi's la figura 2.22. \square

Els cicles de l'enunciat del Lema 2.25 segueixen les direccions $(A, -B)$. Si x i y són dos enters positius tals que $xB - yC \equiv_n 0$, o tals que $xA - yC \equiv_n 0$, és possible fer una construcció semblant en les direccions donades pels parells $(B, -C)$ i $(A, -C)$. En efecte, si $xB - yC \equiv_n 0$, i v és un vèrtex parell, aleshores els cicles $C_v = v + (0, x, -y)$ i $C_w = w + (0, x, -y)$, amb $w = v - 2A$, són cicles paral·lels connectats per x cordes \mathbf{b} i y cordes \mathbf{c} . I

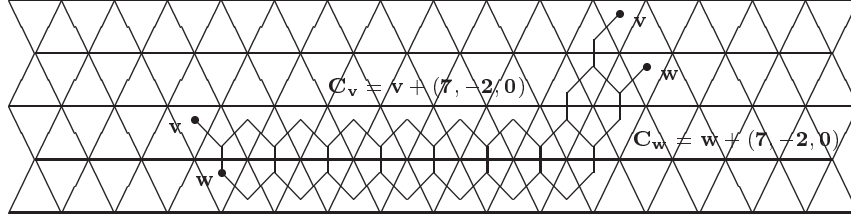


Figura 2.22: Cicles paral·lels C_v i C_w d'un anell cordal que satisfà $7A - 2B \equiv_n 0$.

de la mateixa manera, si $xA - yC \equiv_n 0$, i v és un vèrtex parell, aleshores els cicles $C_v = v + (x, 0, -y)$ i $C_w = w + (x, 0, -y)$, amb $w = v + 2B$, són cicles paral·lels connectats per x cordes **a** i y cordes **c**.

Lema 2.26 *Sigui $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal. Siguin x i y dos enters positius tals que*

$$xA - yB \equiv_n 0, \quad \text{o bé} \quad xB - yC \equiv_n 0, \quad \text{o bé} \quad xC - yA \equiv_n 0.$$

Aleshores l'aresta-bisecció de $C_{2n}(a, b, c)$ és com a molt $2(x + y) + 1$.

Demostració. Per simetria, els tres casos es poden demostrar de la mateixa manera. Per tant només cal considerar el cas $xA - yB \equiv_n 0$. A més, es pot suposar sense pèrdua de generalitat que el cicle determinat per $(x, -y, 0)$ és simple. En cas contrari, es podrien trobar enters x' i y' complint $x'A - y'B \equiv_n 0$, amb $x' + y' < x + y$.

En primer lloc, es considera el cas n divisible per $2(x + y)$. Es denota per α el resultat de la divisió, $\alpha = \frac{n}{2(x + y)}$. La seqüència $(x, -y, 0)$ i el conjunt de vèrtexs $v_i = -Ci$, amb $0 \leq i \leq \alpha - 1$, defineixen un conjunt de cicles paral·lels, $C_i = v_i + (x, -y, 0)$. Vegi's la figura 2.23 (a).

Pel Lema 2.25, els veïns de qualsevol vèrtex de C_i , per a $1 \leq i \leq \alpha - 2$, pertanyen a C_{i-1} , C_i , o bé C_{i+1} . A més, hi ha $x + y$ arestes de C_0 a C_1 , i $x + y$ arestes de $C_{\alpha-2}$ a $C_{\alpha-1}$. Sigui V la unió dels vèrtexs de tots els cicles C_i , i $\bar{V} = \mathbb{Z}_{2n} - V$. Si $|V| < n$, aleshores es poden trobar enters x' i y' per als quals es compleix una de les equacions de l'enunciat, i tals que $x' + y' < x + y$. Per tant, es pot suposar $|V| = |\bar{V}| = n$. Per construcció de V , les úniques arestes amb un extrem a V i l'altre a \bar{V} són

les cordes **a** amb un dels extrems al subconjunt de vèrtexs de C_0

$$\{v_0, v_0 + 2A, \dots, v_0 + (x - 1)2A\}$$

les cordes **b** amb un dels extrems al subconjunt de vèrtexs de C_0

$$\{v_0 + x2A + a, \dots, v_0 + x2A - 2B + a, \dots, v_0 + x2A - (y - 1)2B + a\}$$

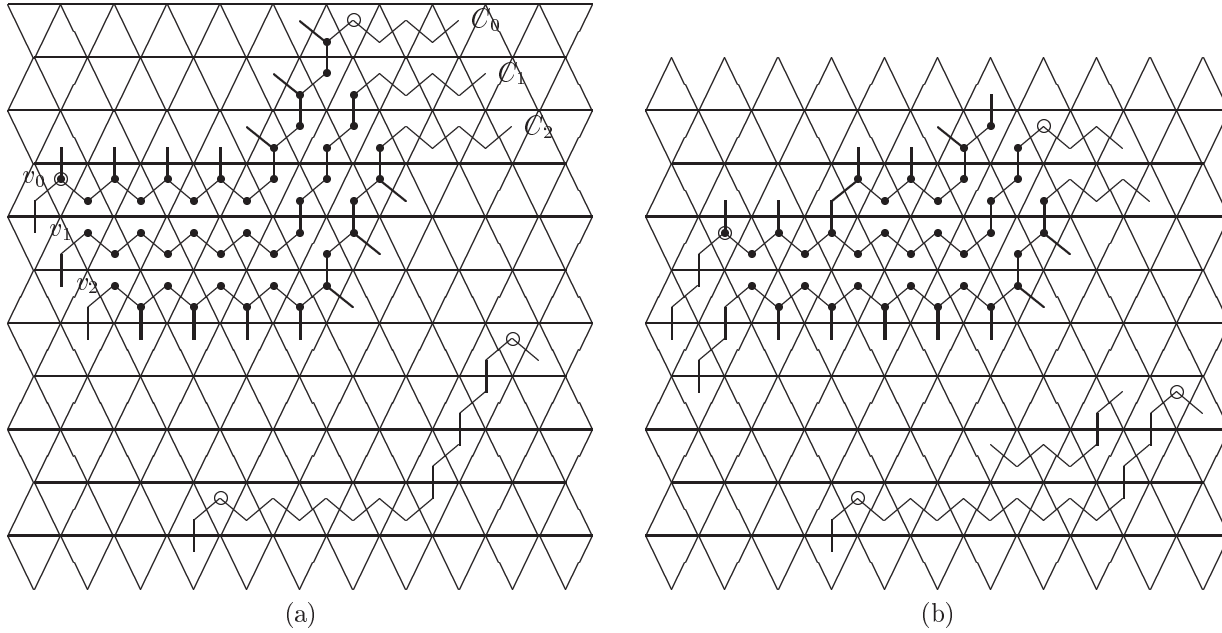


Figura 2.23: (a) El graf $C_{84}(5, 19, 1)$ satisfà $4A - 3B \equiv_n 0$. Hi ha un conjunt bisector amb 14 arestes. (b) El graf $C_{70}(29, 1, 69)$ satisfà $5A - 2B \equiv_n 0$. Hi ha un conjunt bisector amb 15 arestes. En les dues representacions, el reticle de zeros és el conjunt de triangles que contenen O, i els triangles que contenen • representen els punts de V , mentre que les arestes del conjunt bisector estan representades amb traç gruixut.

les cordes **a** amb un dels extrems al subconjunt de vèrtexs de $C_{\alpha-1}$
 $\{v_{\alpha-1} + b, v_{\alpha-1} + 2A + b, \dots, v_{\alpha-1} + (x - 1)2A + b\}$,

i les cordes **b** amb un dels extrems al subconjunt de vèrtexs de $C_{\alpha-1}$
 $\{v_{\alpha-1} + x2A, v_{\alpha-1} + x2A - 2B, \dots, v_{\alpha-1} + x2A - (y - 1)2B\}$

Aquest conjunt d'arestes té mida $2(x + y)$, i separa els vèrtexs del graf en dos conjunts del mateix ordre. Així doncs, en aquest cas, l'aresta-bisecció és com a molt $2(x + y)$.

El cas $n = \alpha 2(x + y) + \beta$, amb $1 \leq \beta < 2(x + y)$ es pot resoldre de manera semblant. Si β és parell, s'obté la mateixa cota superior, $2(x + y)$. Mentre que si β és senar, amb la construcció descrita trobem un bisector de mida $2(x + y) + 1$. Vegi's un exemple en la figura 2.23 (b). \square

2.7.2 Aresta-bisecció dels anells cordals $C_{2n}(-1, d, 1)$

Per a anells cordals de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$, es té

$$2A = d - 1, \quad 2B = 2, \quad \text{and} \quad 2C = -(d + 1). \quad (2.1)$$

Per aplicar el Lema 2.26, s'ha d'estudiar les equacions $x A - y B \equiv_n 0$, o $x B - y C \equiv_n 0$, o $x A - y C \equiv_n 0$ per a les quals $x + y$ és mínim. Els valors de A , B , i C en (2.1) donen $A - \frac{d-1}{2}B = 0$. Per tant, el Lema 2.26, permet també obtenir la cota superior $d+2$, la mateixa que en el lema 2.24. Aquesta cota, però, es pot millorar.

Suposant fixat l'origen del pla en un dels punts del reticle, es busca en la tessellació el camí més curt des de l'origen a un altre punt del reticle. Per simetria, n'hi ha prou amb considerar les parelles de direccions $(A, -B)$, $(B, -C)$, i $(A, -C)$.

Es denoten per q i r els enters positius que satisfan

$$2n = q(d-1) + r \quad \text{i} \quad 0 \leq r \leq d-3, \quad r \text{ parell} \quad (2.2)$$

Anàlogament es denoten per q' i r' els enters positius que satisfan

$$2n = q'(d+1) + r' \quad \text{i} \quad 0 \leq r' \leq d-1, \quad r' \text{ parell} \quad (2.3)$$

Les equacions (2.1), (2.2) i (2.3) permeten deduir que

$$q A + \frac{r}{2} B = 0, \quad \frac{r'}{2} B - q' C = 0, \quad \text{i} \quad q' \leq q$$

En la figura 2.24 hi ha representats els cicles $(q, \frac{r}{2}, 0)$ and $(0, \frac{r'}{2}, -q')$.

Teorema 2.27 *Sigui k la aresta-bisecció de $C_{2n}(-1, d, 1)$.*

1. *Si $q' = q$, aleshores $k \leq \min\{2q' + r' + 1, d + 2 - r'\} < d + 2$.*
2. *Si $q' = q - 1$ i $2q < d + 1$ aleshores*
si $r' = 0$ aleshores $k \leq 2q' + 1 < d + 2$,
altrament $k \leq 2q + 1 < d + 2$.
3. *En els altres casos, $k \leq d + 2$ és la cota superior més petita que es pot trobar.*

Demostració. Suposant $q' = q$, aleshores com que $q(d-1) + r = q(d+1) + r'$, es té $r = 2q' + r' \leq d - 1$. Les ternes $(q, \frac{r}{2}, 0)$ i $(0, \frac{r'}{2}, -q')$ representen el mateix triangle. En aquest cas, doncs, només hi ha tres punts del reticle que puguin donar un valor petit per $x + y$:

$$\left(1, -\frac{d-1}{2}, 0\right), \quad \left(0, \frac{r'}{2}, -q'\right)$$

i la suma dels dos anteriors,

$$\left(1, -\frac{d-1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{r'}{2}, -q'\right) = \left(1, \frac{-d+1+r'}{2}, -q'\right)$$

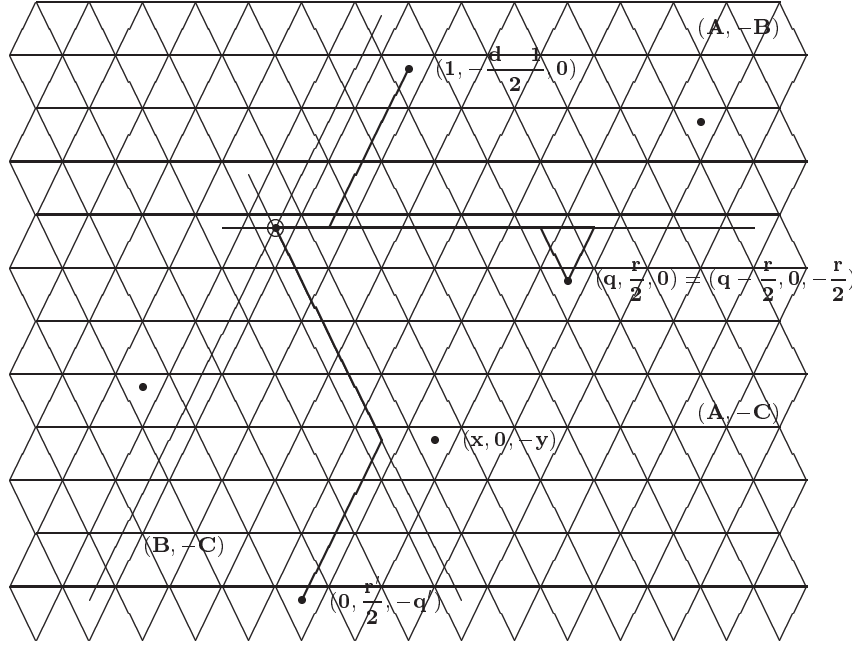


Figura 2.24: Representació dels cicles de $C_{38}(-1, 7, 1)$. El triangle que conté \odot és l'origen, mentre que el reticle de zeros és el conjunt de triangles que contenen \bullet . Els enters x i y en la terna $(x, 0, -y)$ satisfan $x(d-1) + y(d+1) = 2n$ i $x > q$.

Com que en aquest cas es compleix $1 > -q' > \frac{-d+r'+1}{2}$, la terna

$$\left(1, \frac{-d+1+r'}{2}, -q'\right)$$

es pot reduir a

$$\left(q'+1, \frac{-d+1+r'+2q'}{2}, 0\right)$$

Pel Lema 2.26, les cotes que donen aquests tres punts són $d+2$, $2q'+r'+1$ i $d+2-r'$. Així doncs, $k \leq \min\{2q'+r'+1, d+2-r'\} < d+2$. En la figura 2.25 (a) es pot veure un exemple d'aquest cas.

Es considera ara el cas en què $q' = q - 1$. Aleshores, tal com es mostra a la figura 2.25 (b), els tres punts que donen el valor més petit de k són:

$$\left(1, -\frac{d-1}{2}, 0\right), \quad \left(q, \frac{r}{2}, 0\right) \quad \text{i} \quad \left(0, \frac{r'}{2}, -q'\right).$$

Com que ara $q(d-1) + r = (q-1)(d+1) + r'$, es té $r = 2q + r'$ i, per tant, $2q \leq r$. La terna $(q, \frac{r}{2}, 0)$ es pot reduir a $(q - \frac{r}{2}, 0, -\frac{r}{2})$. I aplicant el

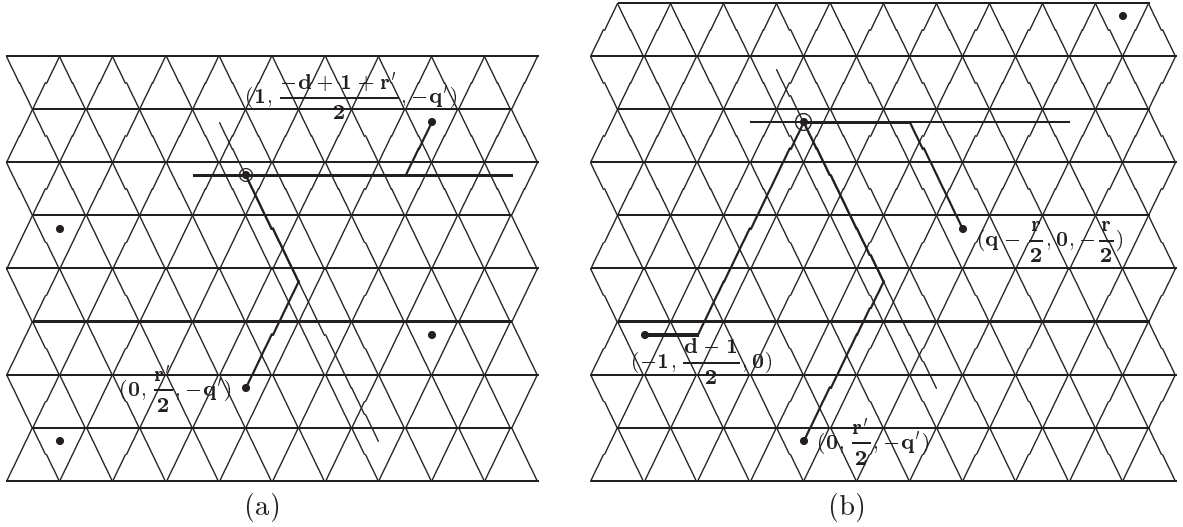


Figura 2.25: (a) $C_{28}(-1, 11, 1)$ satisfà $q' = q$. (b) $C_{36}(-1, 9, 1)$ satisfà $q' = q - 1$. En les dues representacions, el triangle que conté \ominus és l'origen, mentre que el reticle de zeros és el conjunt de triangles que contenen \bullet .

Lema 2.26, es troben les cotes $d + 2$, $2q + 1$, i $2q' + r' + 1$. La més petita d'aquestes cotes és:

$$2q' + 1, \text{ si } 2q < d + 1 \text{ i } r' = 0;$$

$$2q + 1, \text{ si } 2q < d + 1 \text{ i } r' \neq 0;$$

$$d + 2, \text{ si } 2q \geq d + 1.$$

Per acabar, si $q - q' \geq 2$, aleshores l'equació $q(d - 1) + r = q'(d + 1) + r'$ implica $2q > d + 1 > r$, i $2q' + r' > d + 1$. Per tant, les cotes donades per $(q - \frac{r}{2}, 0, -\frac{r}{2})$ i $(0, \frac{r'}{2}, -q')$ són $2q + 1$ i $2q' + r' + 1$, respectivament, totes dues més grans que $d + 2$. També es poden considerar els punts $(x, 0, -y)$, amb x i y enters positius i $x(d - 1) + y(d + 1) = 2n$. Es comprova que, per a aquests punts, $x > q$. Així doncs, $d + 2$ és la cota superior més petita que es pot trobar. Vegi's la figura 2.24 per un exemple d'aquest cas. \square

En [76] es mostra que per a un graf $G_{n,k}$ d'ordre n i aresta-bisecció k el temps de gossiping en el mode $2EDP$, $g_{2EDP}(G_{n,k})$, satisfà

$$g_{2EDP}(G_{n,k}) \geq 2\lceil \log_2 n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6$$

En el capítol 4 es presenta un algorisme de gossiping per a anells cordals de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$. El temps d'aquest algorisme és una cota superior de $g(C_{2n}(-1, d, 1))$, i dóna

$$2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 d + O(1) \quad \text{si } q' \geq d + 1$$

i

$$2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 q' + O(1) \quad \text{si } q' < d + 1.$$

Aquests resultats permeten concloure que, en els casos 2 i 3 de l'enunciat del teorema 2.27, la cota trobada per a l'aresta-biseció és, de fet, l'aresta-biseció.

2.7.3 El cas general

Donat que un anell cordal no és sempre de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$, pot ser interessant preguntar-se què es pot dir de la biseció d'un anell cordal $C_{2n}(a, b, c)$ qualsevol. Els anells cordals $C_{2n}(a, b, c)$ no isomorfs a $C_{2n}(-1, d, 1)$ per a tot d , són exactament els que satisfan $\text{mcd}(A, n) = \alpha$, $\text{mcd}(B, n) = \beta$, i $\text{mcd}(C, n) = \gamma$, amb $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, i $\gamma \neq 1$ enters tals que $\text{mcd}(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$.

Els lemes 2.25 i 2.26 de la secció 2.7.1 permeten deduir, per a anells cordals qualssevol, el resultat següent:

Propietat 4 *Sigui $C_{2n}(a, b, c)$ un anell cordal i siguin $\alpha = \text{mcd}(A, n)$, $\beta = \text{mcd}(B, n)$ i $\gamma = \text{mcd}(C, n)$. Aleshores l'aresta-biseció de $C_{2n}(a, b, c)$ és com a molt $\min\{\frac{2n}{\alpha} + 1, \frac{2n}{\beta} + 1, \frac{2n}{\gamma} + 1\}$.*

Aquesta propietat és conseqüència del lema 2.26 i de les equacions

$$\frac{n}{\alpha} A \equiv_n 0, \quad \frac{n}{\beta} B \equiv_n 0, \quad \frac{n}{\gamma} C \equiv_n 0$$

que $C_{2n}(a, b, c)$ satisfà.

Per a obtenir cotes superiors més acurades de l'aresta-biseció d'un anell cordal qualsevol, s'haurien d'estudiar les equacions en \mathbb{Z}_n de la forma $x A - y B \equiv_n 0$, $x B - y C \equiv_n 0$, i $x A - y C \equiv_n 0$, per a valors qualssevol de A , B , i C .

Capítol 3

Encaminament en anells cordals òptims

En aquest capítol es defineix un encaminament consistent de camins més curts a partir de la tessel·leció associada a un anell cordal de diàmetre senar i ordre màxim. També es presenta l'estudi la vulnerabilitat de l'encaminament, veient com es poden redefinir els camins en cas de fallada d'un o dos vèrtexs. Donat que el grau és 3, la fallada de més de dos vèrtexs podria desconnectar el graf. El fet que el graf de triple llaç associat a un anell cordal òptim sigui també òptim ha permès determinar vèrtexs centrals per a l'encaminament.

En el cas d'un anell cordal qualsevol, no es poden generalitzar els resultats trobats per al cas òptim. Ni tan sols en el cas d'anells cordals de diàmetre parell i ordre màxim, que no tenen un graf de triple llaç associat òptim.

3.1 L'encaminament

Donat $D = 2l + 1$ senar, es considera l'anell cordal de diàmetre D i ordre màxim $C_{m_D}(a, b, c)$, on $m_D = \frac{3D^2 + 1}{2}$. Definir un encaminament en C_{m_D} és associar a cada parella de vèrtexs del graf x, y un camí de x a y , $\rho(x, y)$. Per la vèrtex-transitivitat del graf només s'ha de definir l'encaminament ρ per a les parelles $(0, z)$.

Donat $z \in \mathbb{Z}_{m_D}$, $z \neq 0$, sigui $z^* = \frac{z}{2}$ si z és parell, i $z^* = \frac{z - a}{2}$ si z és senar. El vèrtex z^* és el vèrtex corresponent a z en el graf de triple llaç associat. Es diu que z té coordenades (m, n, p) si i només si z^* té coordenades (m, n, p) en el graf de triple llaç associat.

Definició 3.1 Donat un vèrtex, z , es defineix la situació de z , $S(z)$ per:

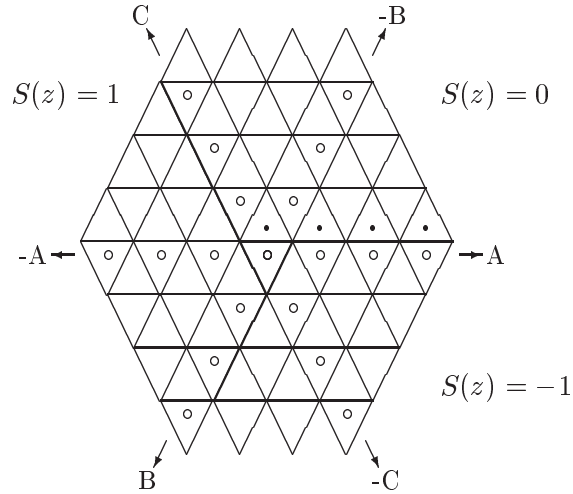


Figura 3.1: Situació dels vèrtexs per a $D = 7$.

1. $S(z) = 0$ si z té coordenades $(0, -n, p)$ amb $n \geq 0, p \geq 0$, o bé $(m, -n, 0)$ amb $m > 0, n > 0$, o bé z és senar i té coordenades $(m, 0, 0)$ amb $m > 0$.
2. $S(z) = 1$ si z té coordenades $(-m, n, 0)$ amb $m \geq 0, n \geq 0$, o bé $(-m, 0, p)$ amb $m > 0, p > 0$.
3. $S(z) = -1$ si z té coordenades $(m, 0, -p)$ amb $m \geq 0, p > 0$, o bé $(0, n, -p)$ amb $n > 0, p > 0$, o bé z és parell i té coordenades $(m, 0, 0)$ amb $m > 0$.

S'observa en la figura 3.1 que els semieixos determinats pels vectors \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} divideixen la rajola en tres zones, i $S(z)$ diu en quina de les tres zones es troba el vèrtex z .

Definició 3.2 Es denota per γ l'aplicació donada per: si z és parell i té coordenades (m, n, p) aleshores $\gamma(z)$ és el vèrtex parell de coordenades (n, p, m) i si z és senar, $\gamma(z) = \gamma(z - a) + c$.

L'aplicació γ és una bijecció de \mathbb{Z}_{m_D} i si z és parell i té coordenades (m, n, p) aleshores $\gamma^{-1}(z)$ és el vèrtex parell de coordenades (p, m, n) i si z és senar, $\gamma^{-1}(z) = \gamma^{-1}(z - a) + b$. Geomètricament, γ és el gir d'angle $\frac{2\pi}{3}$ i γ^{-1} és el gir d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, tots dos amb centre 0 (vegi's la figura 3.2).

3.1.1 Definició de $\rho(x, y)$

Donats x i y es defineix l'encaminament $\rho(x, y)$ utilitzant les definicions anteriors.

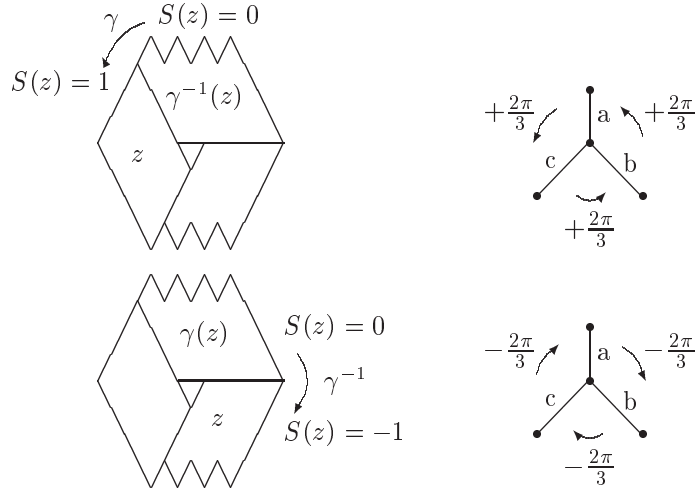


Figura 3.2: Els girs γ i γ^{-1} .

1. $z = \alpha_{x,0}(y)$
2. Si $S(z) = 0$, aleshores $\bar{z} = z$.
 Si $S(z) = 1$, aleshores $\bar{z} = \gamma^{-1}(z)$.
 Si $S(z) = -1$, aleshores $\bar{z} = \gamma(z)$.
3. Càlcul de $\rho(0, \bar{z})$, expressat com una successió d'arestes:
 - a. \bar{z} parell de coordenades $(0, -n, p)$, $n, p \geq 0$

$$\rho(0, \bar{z}) = \underbrace{a, -b}_1, \underbrace{a, -b}_2, \dots, \underbrace{a, -b}_p, \underbrace{a, -c}_1, \underbrace{a, -c}_2, \dots, \underbrace{a, -c}_n$$
 - b. \bar{z} vèrtex parell de coordenades $(m, -n, 0)$ $m, n > 0$

$$\rho(0, \bar{z}) = \underbrace{a, -c}_1, \underbrace{a, -c}_2, \dots, \underbrace{a, -c}_n, \underbrace{b, -c}_1, \underbrace{b, -c}_2, \dots, \underbrace{b, -c}_m$$
 - c. \bar{z} vèrtex senar de coordenades $(0, -n, p)$, $n, p \geq 0$

$$\rho(0, \bar{z}) = a, \underbrace{-b, a}_1, \underbrace{-b, a}_2, \dots, \underbrace{-b, a}_p, \underbrace{-c, a}_1, \underbrace{-c, a}_2, \dots, \underbrace{-c, a}_n$$
 - d. \bar{z} vèrtex senar de coordenades $(m, -n, 0)$ $m > 0, n \geq 0$

$$\rho(0, \bar{z}) = a, \underbrace{-c, a}_1, \underbrace{-c, a}_2, \dots, \underbrace{-c, a}_n, \underbrace{-c, b}_1, \underbrace{-c, b}_2, \dots, \underbrace{-c, b}_m$$
4. Si $S(z) = 0$, aleshores $\rho(0, z) = \rho(0, \bar{z})$.
 Si $S(z) = 1$, aleshores $\rho(0, z) = \gamma(\rho(0, \bar{z}))$.
 Si $S(z) = -1$, aleshores $\rho(0, z) = \gamma^{-1}(\rho(0, \bar{z}))$.
5. $\rho(x, y) = \alpha_{0,x}(\rho(0, z))$.

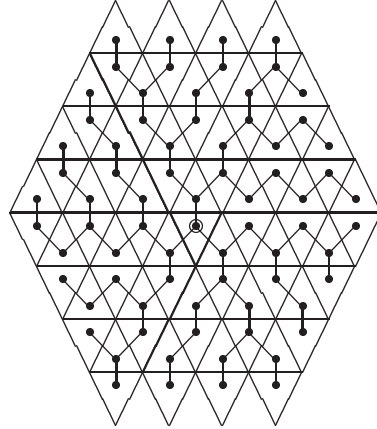


Figura 3.3: Arbre d'encaminament de $\rho(0, z)$.

Proposició 3.3 *L'algorisme defineix un encaminament de camins més curts, consistent i que es pot representar gràficament per l'arbre d'encaminament $\rho(0, z)$ de la figura 3.3.*

Demostració. Per veure que $\rho(0, z)$ es pot representar per l'arbre d'encaminament de la figura 3.3, n'hi ha prou amb fixar-se en els vèrtexs del graf z de situació $S(z) = 0$, per als quals es calcula el camí directament. Els girs d'angle $\frac{2\pi}{3}$ i $-\frac{2\pi}{3}$ permeten calcular el camí per a la resta de vèrtexs, i l'arbre de la figura és invariant per aquests girs.

Per veure que ρ és consistent s'ha de veure que per a qualsevol parella de vèrtexs x, y si $v \in \rho(x, y)$ aleshores els camins satisfan $\rho(x, y) = \rho(x, v) \cup \rho(v, y)$. N'hi ha prou amb observar que l'arbre $\rho(0, x)$ és invariant per rotació d'angle π i centre l'origen, si es consideren només vèrtexs a distància com a molt $D - 1$ del zero, i també que un subarbre de $\rho(0, x)$ arrelat a un vèrtex qualsevol v és la imatge per la translació α_v del subarbre arrelat al zero. \square

Donat que ρ és consistent, un node inicial o intermig en un camí de final un vèrtex donat només haurà de calcular quin és el vèrtex següent en el camí. Així, donat $x_i \in \rho(x, y)$, per calcular qui és x_{i+1} només s'ha de calcular en quina situació es troba el vèrtex y quan es centra la rajola en x_i , i això determinarà l'aresta a través de la qual s'arriba a x_{i+1} .

Proposició 3.4 *Sigui $x_i \in \rho(x, y)$ i sigui $z = \alpha_{x_i, 0}(y)$, aleshores*

1. si $C(z) = 0$ aleshores $x_{i+1} = x_i * a$,
2. si $C(z) = 1$ aleshores $x_{i+1} = x_i * c$,

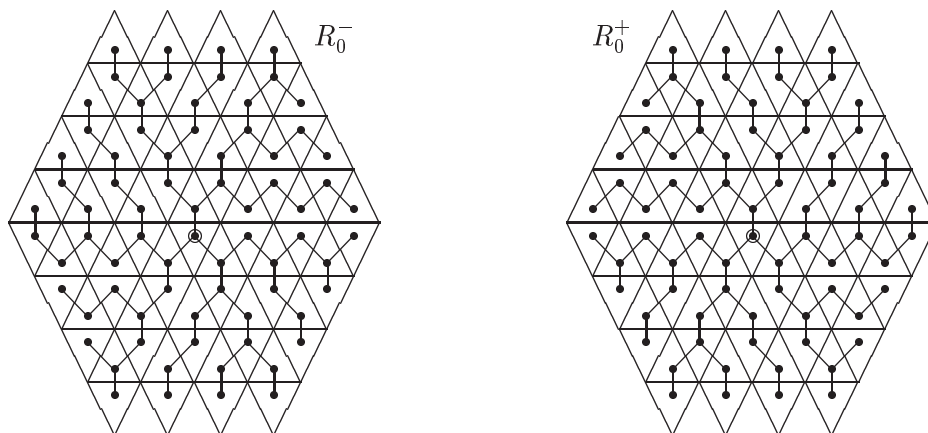


Figura 3.4: L'encaminament des del zero i cap al zero.

3. si $C(z) = -1$ aleshores $x_{i+1} = x_i * b$,

on l'operació $*$ indica sumar si el primer terme és parell i restar si el primer terme és senar.

3.1.2 Els arbres de l'encaminament

L'encaminament definit no és bidireccional. De fet, no és possible definir en aquests grafs un encaminament de camins més curts, traslladant $\rho(0, z)$ per les translacions del graf que sigui consistent i bidireccional. Per tant, els dos camins entre dos vèrtexs qualssevol x i y , $\rho(x, y)$ i $\rho(y, x)$ no tenen, en general, la mateixa representació. El que sí que es pot dir, per la consistència de l'encaminament, és que la unió de tots els camins $\rho(z, 0)$ quan z recorre tot el conjunt de vèrtexs és un arbre, que serà anomenat *arbre de tornada cap al zero* de l'encaminament. Amb el lema següent es mostra quin és aquest arbre. Com en la secció 2.5, es denota per π_{bc} la simetria axial respecte de la recta per 0 i a .

Lema 3.5 *Es denota per R_x^- el conjunt de camins $\rho(x, y)$ i per R_x^+ el conjunt de camins $\rho(y, x)$, amb y variant en \mathbb{Z}_{m_D} en els dos casos. Aleshores, $R_0^+ = \pi_{bc}(R_0^-)$.*

Demostració. Per la consistència de l'encaminament, només s'han d'estudiar els camins $\rho(z, 0)$ per a z parell. \square

El lema diu que l'arbre de tornada cap al zero de l'encaminament es troba aplicant a l'arbre d'anada des del zero la simetria axial. Per tant, es poden representar gràficament tal com es mostra a la figura 3.4. S'ha demostrat en la secció 2.3 que els automorfismes $\alpha_{0,x}$ són una translació del pla si x

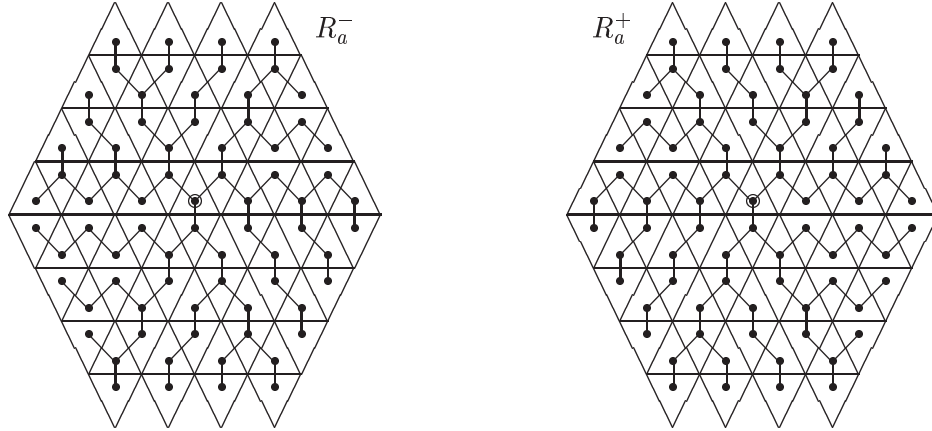


Figura 3.5: Centre senar.

és parell i una translació del pla seguida d'un gir d'angle π si x és senar. Per tant, i com a conseqüència del lema anterior, els arbres donats amb el vèrtex zero com origen i final representen també els camins amb origen i final un vèrtex parell qualsevol. A més, els arbres de la figura 3.5 són l'arbre d'encaminament d'anada amb origen un vèrtex senar qualsevol i l'arbre d'encaminament de tornada amb final un vèrtex senar qualsevol.

3.2 Vulnerabilitat

A continuació es presenten els resultats obtinguts sobre la vulnerabilitat de l'encaminament definit en la secció anterior. S'ha estudiat de quina manera es pot redefinir l'encaminament quan falla un vèrtex i quan en fallen dos. Com que el grau del graf és 3, no és possible assegurar que, en fallar tres vèrtexs segueixi essent connex. Un vèrtex és central per un encaminament i un cert conjunt d'elements, vèrtexs i/o arestes, si i només si el camí des de o cap a un altre vèrtex de fora del conjunt no conté cap element del conjunt.

Vèrtexs i arestes per als quals el zero és central

Lema 3.6 *Siguin*

$$L_{inf} = \{-i2A + (l-i)2B, 0 < i < l\} \cup \{i2B - (l-i)2C, 0 \leq i \leq l\} \cup \{i2A + (l-i)2C, 0 < i < l\}$$

i

$$L_{sup} = \{i2A - (l-i)2B + a, 0 < i \leq l\} \cup \{-i2B + (l-i)2C + a, 0 \leq i \leq l\} \cup \{-i2A + (l-i)2C + a, 0 < i \leq l\}.$$

El conjunt $L = L_{inf} \cup L_{sup}$ és el conjunt de vèrtexs de grau 1 en els arbres d'encaminament $\rho(0, z)$ i $\rho(z, 0)$. El vèrtex 0 és (ρ, L) -central, ja que per a

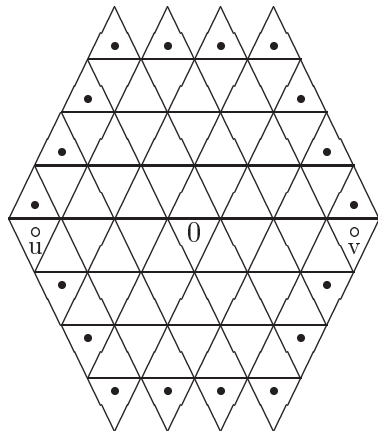


Figura 3.6: Els vèrtexs de la frontera.

qualsevol vèrtex $z \notin L$ els camins $\rho(0, z)$ i $\rho(z, 0)$ no contenen cap element de L .

Els vèrtexs de L_{sup} són els vèrtexs senars que són fulles de $\rho(0, z)$ i de $\rho(z, 0)$. Són tots els vèrtexs que estan a distància $D = 2l + 1$ del vèrtex 0. Estan situats a la frontera de la rajola, en la meitat superior.

Els vèrtexs de L_{inf} són els vèrtexs parells que són fulles de $\rho(0, z)$ i de $\rho(z, 0)$. Són tots els vèrtexs que estan a distància $D - 1 = 2l$ del vèrtex 0 tals que la seva parella senar no està en L_{sup} , és a dir, que la seva parella senar està a distància $D - 2$ del 0. Estan situats a la frontera de la rajola, en la meitat inferior.

Els dos vèrtexs $u = -l2A$ i $v = l2A$ estan situats a la frontera de la rajola, però no són de L , ja que u és fulla de $\rho(0, z)$ però no ho és de $\rho(z, 0)$, i v és fulla de $\rho(z, 0)$ però no ho és de $\rho(0, z)$. Vegi's en la figura 3.6 la representació del conjunt L .

Càlcul de vèrtexs centrals

Les proves de l'existència de vèrtexs centrals que es donen a continuació són constructives, és a dir, es presenten algorismes de càlcul efectius.

Si F és un conjunt de vèrtexs, per veure que un vèrtex v és (ρ, F) -central n'hi ha prou amb veure que, centrant la rajola al vèrtex v els vèrtexs del conjunt F queden situats a la frontera de la rajola. És a dir, n'hi ha prou amb veure que $\alpha_{v,0}(F) \subset L$.

Proposició 3.7 *Per a tot vèrtex z del graf $C_{m_D}(a, b, c)$ hi ha un vèrtex v tal que v és $(\rho, \{z\})$ -central.*

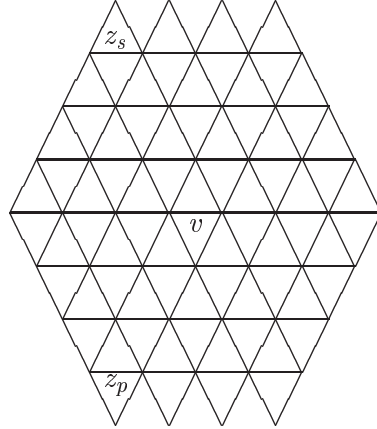


Figura 3.7: Falla un sol vèrtex.

Demostració. En la figura 3.7 es pot veure la situació de z en la frontera, en funció de la seva paritat.

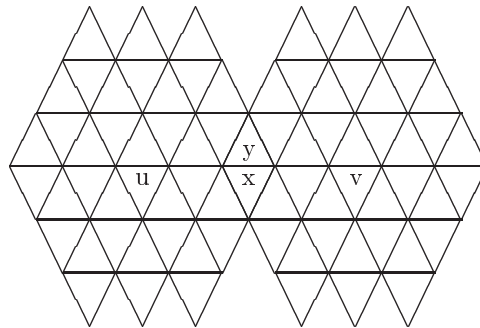
Si $z = z_s$ és senar, el vèrtex $v = z_s - a - l2C$ és $(\rho, \{z_s\})$ -central, ja que $\alpha_{v,0}(z_s) = z_s - v = l2C + a \in L$. Si $z = z_p$ és parell, el vèrtex $v = z_p - l2B$ és $(\rho, \{z_p\})$ -central, ja que $\alpha_{v,0}(z_p) = z_p - v = l2B \in L$. \square

En cas de fallada d'un sol vèrtex el vèrtex central no és únic. De fet, hi ha tants vèrtexs centrals com vèrtexs a la frontera, és a dir $|L|$.

Per exemple, es poden buscar tots els vèrtexs $(\rho, \{0\})$ -centrals. És fàcil veure que són tots els del conjunt $L_{sup} \cup \{v = z - a, z \in L_{sup}\} - \{l2A, -l2A\}$.

Proposició 3.8 *Per a qualsevol parella de vèrtexs x, y del graf $C_{m_D}(a, b, c)$ hi ha un vèrtex v tal que v és $(\rho, \{x, y\})$ -central.*

Demostració. En el cas $|x - y| = a$ (es pot suposar sense pèrdua de gener-

Figura 3.8: El cas $y = x + a$.

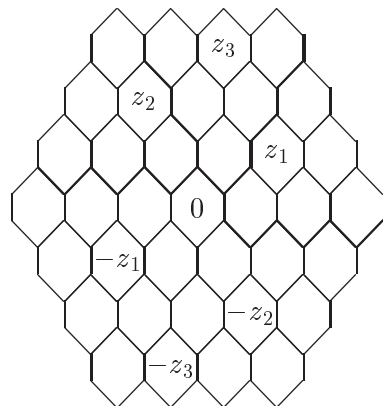


Figura 3.9: Tres casos diferents, segons la situació de z^* .

alitat que $y = x + a$), no es poden situar tots dos vèrtexs a la frontera de la rajola. Però és fàcil veure (figura 3.8) que els dos vèrtexs parells $u = x - l2A$ i $v = x + l2A$, així com les seves parells $u + a$ i $v + a$, són $(\rho, \{x, y\})$ -centrals.

En general, $|x - y| \neq a$. Cal distingir dos casos, segons que $|x - y|$ sigui parell o senar.

(a) En el primer cas, es suposa que fallen dos vèrtexs x i y amb diferència $x - y$ parell.

Suposant $z = \alpha_{x,0}(y)$, i v un vèrtex $(\rho, \{0, z\})$ -central, aleshores $\alpha_{0,x}(v)$ és $(\rho, \{x, y\})$ -central. Així, es pot reduir l'estudi als conjunts de la forma $\{0, z\}$ amb z parell.

A més, com que per l'automorfisme $\alpha_{x,0}$ el conjunt $\{x, y\}$ es transforma en el conjunt $\{0, z\}$, i per l'automorfisme $\alpha_{y,0}$ el conjunt $\{x, y\}$ es transforma en el conjunt $\{0, -z\}$, n'hi haurà prou amb calcular el vèrtex central quan z estigui a la meitat superior de la rajola.

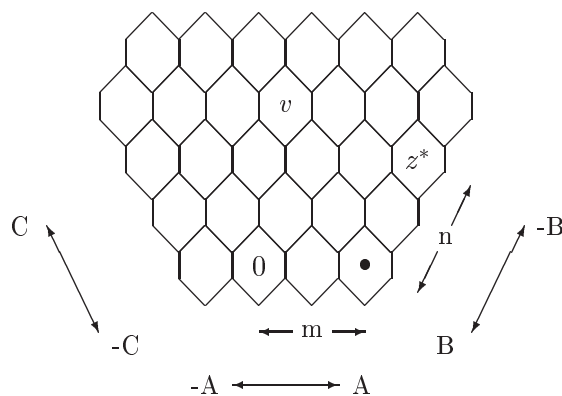
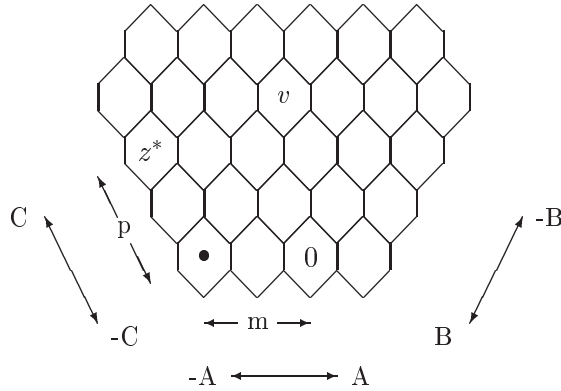


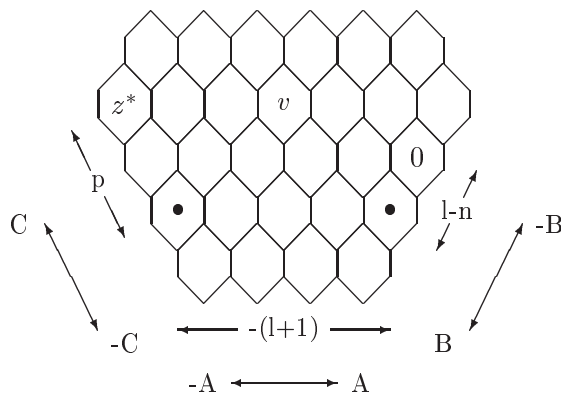
Figura 3.10: Primer cas, $z^* = z_1$.

Figura 3.11: Segon cas, $z^* = z_2$.

Els vèrtexs z parells, per als quals s'ha de calcular el vèrtex $(\rho, \{0, z\})$ -central corresponen en el graf de triple llaç a vèrtexs $z^* = z/2$ de la forma: $z^* = z_1 = mA - nB$ amb coordenades $(m, -n, 0)$, $0 < m \leq l$, $0 \leq n < l$; $z^* = z_2 = -mA + pC$ amb coordenades $(-m, 0, p)$, $0 \leq m < l$, $0 < p \leq l$; i $z^* = z_3 = -nB + pC$ amb coordenades $(0, -n, p)$, $0 < n \leq l$, $0 \leq p < l$. Per a cadascun dels tres casos, que es mostren en la figura 3.9, es calcularà el vèrtex central. Això vol dir, situar 0 i z en la frontera de la meitat inferior de la rajola.

(a.1) En el cas $z^* = z_1$. Centrant la rajola en $v = mA + lC$, els vèrtexs 0 i z es troben en la frontera de la meitat inferior de la rajola, tal com es pot veure en la figura 3.10.

En l'anell cordal $C_{mD}(a, b, c)$, es consideren $u = 2v = m2A + l2C$ i l'automorfisme $\alpha_{u,0}$ definit per $\alpha_{u,0}(i) = i - m2A - l2C$. Aleshores, $\alpha_{u,0}(0) = -m2A - l2C = m(2B + 2C) - l2C = m2B - (l - m)2C$ i

Figura 3.12: Tercer cas, $z^* = z_3$.

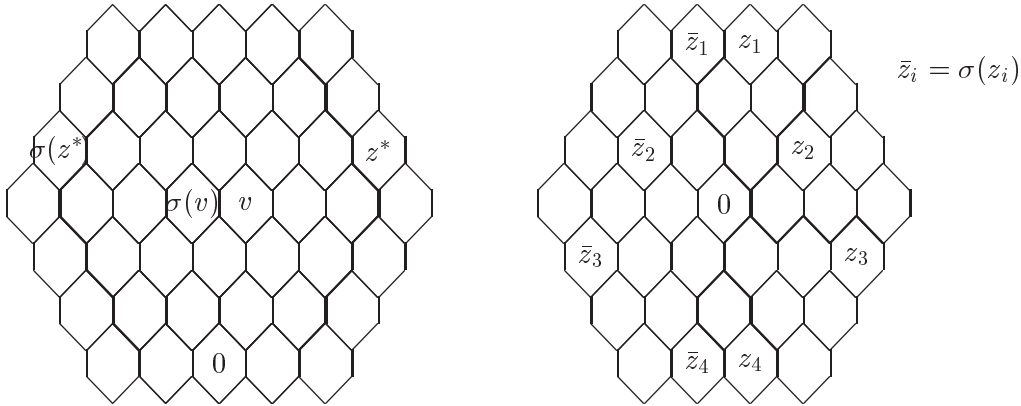


Figura 3.13: Quatre casos, segons la situació de z^* .

$\alpha_{u,0}(z) = z - m2A - l2C = m2A - n2B - m2A - l2C = -n2B - l2C = n(2A + 2C) - l2C = n2A - (l - n)2C$, tots dos vèrtexs de L . Per tant, el vèrtex u és $(\rho, \{0, z\})$ -central. És fàcil veure que el vèrtex $u + a$ també és $(\rho, \{0, z\})$ -central.

(a.2) Si $z^* = z_2$, centrant la rajola en $v = -mA - lB$ els vèrtexs 0 i z^* queden situats a la frontera de la meitat inferior de la rajola (vegi's la figura 3.11).

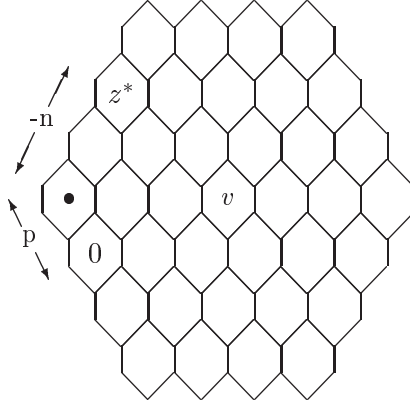
Ara, siguin $u = 2v + a$ i l'automorfisme de l'anell cordal $\alpha_{u,0}(i) = -m2A - l2B + a - i$. Com en el cas anterior, es veu fàcilment que $\alpha_{u,0}(0)$ i $\alpha_{u,0}(z)$ pertanyen tots dos a L . El vèrtex u és, doncs, $(\rho, \{0, z\})$ -central. Prenent l'automorfisme $\alpha_{u-a,0}$ es veu que el vèrtex $u - a$ és també $(\rho, \{0, z\})$ -central, per a $p \neq l$.

(a.3) En el darrer dels tres casos, $z^* = z_3$, s'ha de suposar z^* situat en una rajola adjacent adequada. Per això es transformen les coordenades de z^* afegint $-(l + 1)A + lB \equiv 0$. Ara, z^* té coordenades $(-(l + 1), l - n, p)$. Es centra la rajola en $v = (l - n + 1)B + lC$, tal com es veu en la figura 3.12. Com en els casos anteriors, els vèrtexs 0 i z es troben en la frontera de la meitat inferior de la rajola.

El vèrtex $u = 2v + a$ de $C_{mD}(a, b, c)$ és $(\rho, \{0, z\})$ -central, ja que l'automorfisme $\alpha_{u,0}(i) = (l - n + 1)2B + l2C + a - i$ transforma 0 i z en vèrtexs de L . Considerant $\alpha_{u-a,0}$, es verifica també que $u - a$ és $(\rho, \{0, z\})$ -central, per a $p \neq l - 1$ i $n \neq 1$.

(b) Finalment, s'ha de considerar el cas en què fallen dos vèrtexs x, y de diferència $x - y$ senar.

Com en el cas (a), es té en compte només el cas $F = \{0, z\}$. El nombre de casos a estudiar es reduïa a valors de z corresponents a la meitat superior de la rajola, perquè $\alpha_{x,0}(y) = -\alpha_{y,0}(x)$ quan x i y tenen la mateixa paritat. Ara, però x i y són de paritats diferents, i es té $\alpha_{x,0}(y) = \alpha_{y,0}(x)$, de manera

Figura 3.14: Primer cas, $z^* = z_1$.

que s'han de tenir en compte totes les parelles $(0, z)$. Per trobar un vèrtex $(\rho, \{0, z\})$ -central s'ha de situar 0 en la frontera de la meitat inferior de la rajola, i z , que és senar, en la frontera de la meitat superior de la rajola. Això es pot fer en el graf de triple llaç associat amb 0 i $z^* = (z - a)/2$. També en aquest cas es pot reduir el nombre de casos a estudiar. Només s'ha d'observar que anomenant σ la simetria axial respecte de l'eix vertical per l'origen, resulta que si centrant la rajola en v , s'obté un vèrtex central per a $\{0, z\}$, aleshores, centrant la rajola en $\sigma(v)$, s'obté un vèrtex central per a $\{0, \sigma(z)\}$.

En la figura 3.13 hi ha representats els quatre casos que s'han de tenir en compte: $z^* = z_1 = -nB + pC$ amb coordenades $(0, -n, p)$, $0 < n \leq l$, $0 \leq p < l$, $p \leq n$; $z^* = z_2 = mA - nB$ amb coordenades $(m, -n, 0)$, $0 < m \leq l$, $0 \leq n < l$; $z^* = z_3 = mA - pC$ amb coordenades $(m, 0, -p)$, $0 \leq m < l$, $0 < p < l$; and $z^* = z_4 = nB - pC$ amb coordenades $(0, n, -p)$, $0 < n < l$, $0 < p \leq l$, $n \leq p$.

(b.1) Si $z^* = z_1$, es centra la rajola en $v = lA + pC$. El vèrtex 0 es troba en la frontera inferior, i el vèrtex z^* en la frontera superior (vegi's la figura 3.14). Tornant a l'anell cordal, siguin $u = 2v + a$ i l'automorfisme $\alpha_{u,0}(i) = l2A + p2C + a - i$. Es té $\alpha_{u,0}(0) = l2A + p2C + a = l2A - p2(A+B) + a = (l-p)2A - p2B + a \in L$, i $\alpha_{u,0}(z) = l2A + p2C + a - z = l2A + p2C + a - 2z^* - a = l2A + p2C + n2B - p2C = l2A + n2B = l2A - n2(A+C) = (l-n)2A - n2C \in L$. I, per tant, el vèrtex u és $(\rho, \{0, z\})$ -central. Per a $p \neq 0$, es pot veure que el vèrtex $u - a$ també és $(\rho, \{0, z\})$ -central, considerant l'automorfisme $\alpha_{u-a,0}$.

(b.2) Per als càlculs en el segon cas, $z^* = z_2$, s'ha de situar adequadament z^* en una de les rajoles adjacents. Afegint $-A + (l-1)B + 2lC \equiv 0$, les coordenades de z^* són $(m-1, l-n-1, 2l)$, i es pot prendre com a centre de la rajola el vèrtex $v = (l-n-1)B + lC$. En la figura 3.15 es veu la

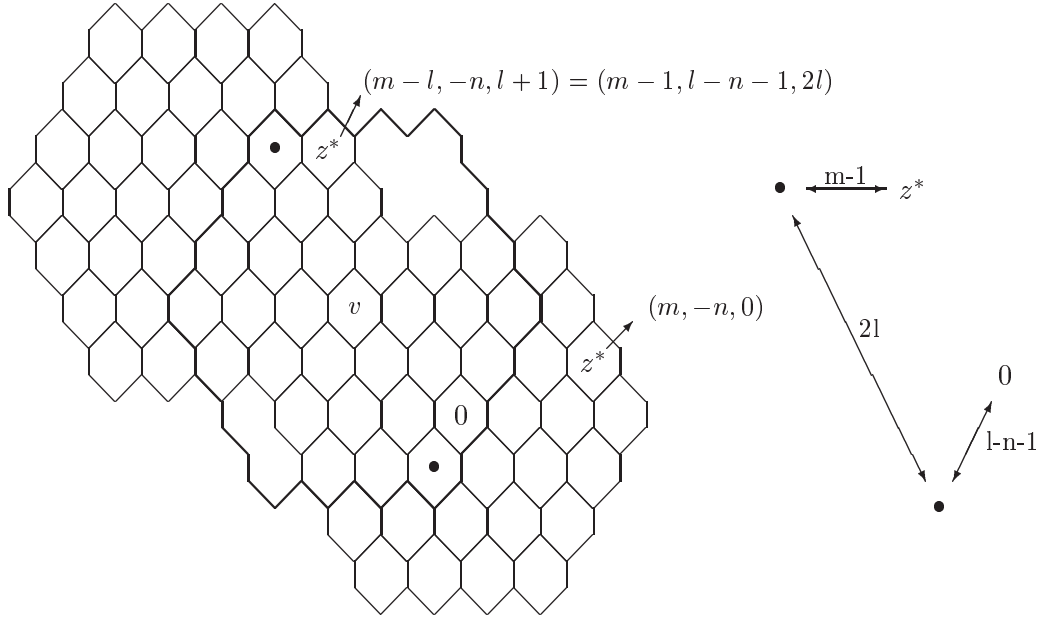


Figura 3.15: Segon cas, $z^* = z_2$.

situació dels vèrtexs 0 i z^* en la frontera de la rajola.

Siuguin el vèrtex de l'anell cordal $u = 2v$ i l'automorfisme $\alpha_{u,0}(i) = i - (l - n - 1)2B - l2C$. Calculant es demostra que $\alpha_{u,0}(0)$ i $\alpha_{u,0}(z)$ són tots dos a L . I, com en els altres casos, això diu que u és $(\rho, \{0, z\})$ -central. De manera semblant es veu que un altre vèrtex $(\rho, \{0, z\})$ -central podria ser el vèrtex $u + a$.

(b.3) Si $z^* = z_3$, es considera una altra vegada z^* en una rajola adjacent, afegint $(1 - l)A - 2lB + (1 - p)C \equiv 0$. Les coordenades de z^* són ara $(-l + m + 1, -2l, -p + 1)$, i el vèrtex triat com a centre és $v = -lB + (1 - p)C$ (vegi's la figura 3.16).

Amb $u = 2v$, l'automorfisme $\alpha_{u,0}(i) = i + l2B + (p - 1)2C$ transforma els vèrtexs 0 i z en vèrtexs de L . Per tant, u és $(\rho, \{0, z\})$ -central. I és fàcil veure que també ho és el vèrtex $u + a$.

(b.4) Finalment, el cas $z^* = z_4$ es presenta en la figura 3.17. Ara, les coordenades de z^* que s'utilitzen són $(0, -l + n - 1, l - p)$ i el vèrtex triat com a centre de la rajola és $v = lA + (l - p)C$.

El vèrtex $u = 2v$ és $(\rho, \{0, z\})$ -central en l'anell cordal. Com en tots els altres casos, això es demostra veient que l'automorfisme $\alpha_{u,0}(i) = i + l2B + (p - 1)2C$ transforma els vèrtexs 0 i z en vèrtexs de L . El vèrtex $u + a$ també és $(\rho, \{0, z\})$ -central. \square

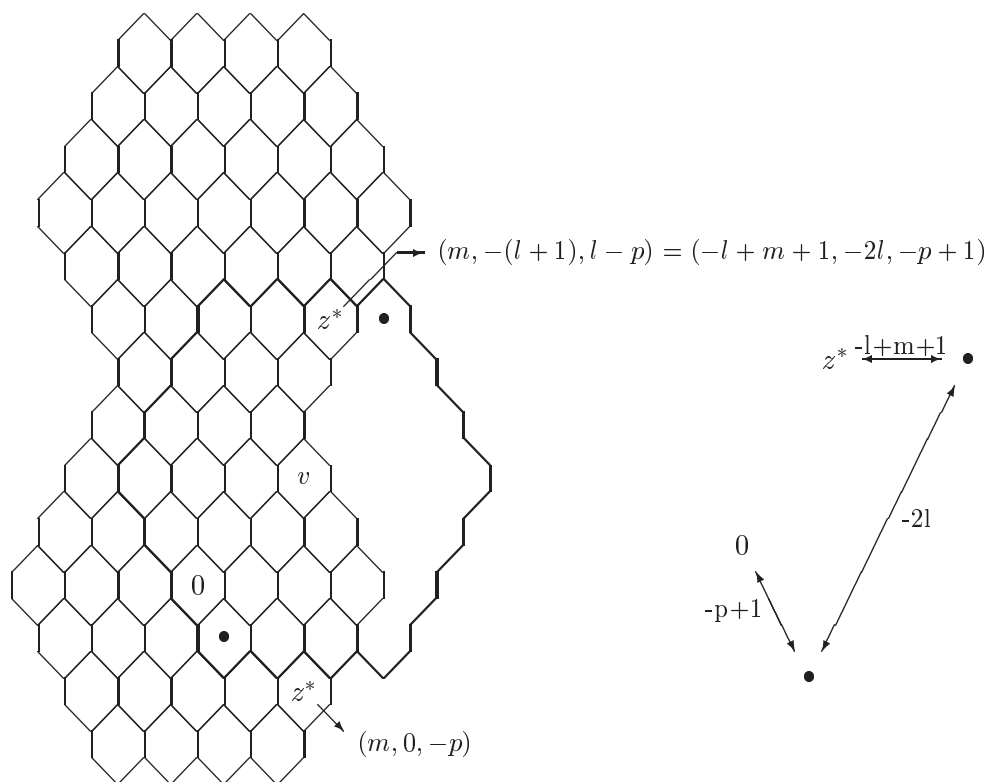


Figura 3.16: Tercer cas, $z^* = z_3$.

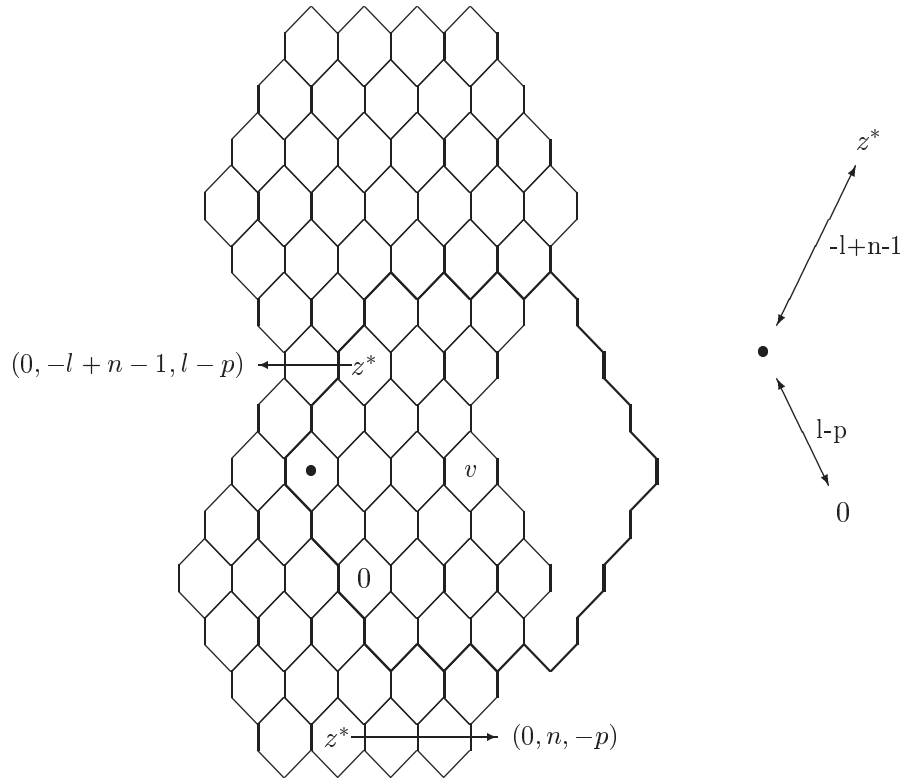


Figura 3.17: Quart cas, $z^* = z_4$.

Capítol 4

Gossiping en anells cordals

Com s'ha comentat en la secció 1.3, l'estudi dels problemes de *broadcasting* i *gossiping* en una xarxa depèn del model utilitzat per a les comunicacions. En aquest capítol es presenta un algorisme de *gossiping* en anells cordals, en el mode de comunicació *2EDP*. Aquest model consisteix bàsicament en utilitzar per a l'intercanvi d'informació en cada etapa camins disjunts per arestes, mentre que en el mode telèfon s'utilitzen arestes.

S'ha dividit el capítol en dues parts. En primer lloc, es presenten els resultats previs en els quals es basa l'algorisme. En la segona secció es descriu l'algorisme de *gossiping* i es fa una anàlisi de la seva complexitat.

4.1 Preliminars

4.1.1 Mode de comunicació EDP

Un algorisme de comunicació és una seqüència d'etapes, cadascuna de les quals està constituïda pel conjunt de parelles de vèrtexs que intercanvien informació. Les etapes s'han d'ajustar a les restriccions imposades pel mode de comunicació.

En la secció 1.3.2 es descriu el model *EDP*, que es caracteritza per les condicions següents:

1. un vèrtex només pot prendre part en una crida a cada etapa (1-port);
2. la comunicació entre dos vèrtexs d'una crida, es realitza a través d'un camí;
3. els camins que corresponen a crides simultànies, és a dir, en una mateixa etapa, no poden compartir arestes (en el cas *2-way*) o arcs (en el cas *1-way*).
4. un vèrtex intermig en un camí corresponent a una crida no pot ser origen o final en una altra crida.

El temps de *broadcasting* i el temps de *gossiping* d'un graf G es denoten per $b_{2EDP}(G)$ i $g_{2EDP}(G)$, respectivament.

Si G és un graf hamiltonià d'ordre n ,

$$b_{2EDP}(G) = \lceil \log_2 n \rceil$$

Si $G_{n,k}$ és un graf d'ordre n i aresta-bisecció k , aleshores

$$2\lceil \log_2 n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6 \leq g_{2EDP}(G_{n,k}) \leq 2\lceil \log_2 n \rceil$$

Aquests resultats es presenten en [52, 68, 76].

4.1.2 Algorisme en tres fases

L'algorisme que es proposa més avall per als anells cordals es basa en un algorisme de caire genèric, que es desenvolupa en tres fases. Es descomposa el graf en parts i es tria un representant per a cada part. En la primera fase, s'acumula la informació de cada part en el seu representant. En la segona fase es fa *gossiping*, però només entre els representants. I la tercera fase, que es pot realitzar com la primera invertint etapes, és una difusió d'informació en cada part des del seu representant. Aquest algorisme no és òptim ja que en cada etapa hi pot haver molts vèrtexs inactius, sobretot a la segona fase, però permet en molts casos millorar la cota superior.

Algorisme 3F

0. **Inicialització.** Descomposar G en r subgrafs connexos amb exactament un vèrtex d'acumulació o representant en cadascun. Aquests subgrafs s'anomenen *components d'acumulació*. I es denota per $A(G)$ el conjunt de vèrtexs d'acumulació.
1. **Fase d'acumulació.** Cada vèrtex $u \in A(G)$ acumula la informació dels nodes de la seva component.
2. **Fase de *gossiping*.** Els vèrtexs de $A(G)$ intercanvien informació.
3. **Fase de *broadcasting*.** Cada vèrtex $u \in A(G)$ difon la informació als nodes de la seva component.

Per tal d'obtenir un algorisme efectiu, s'ha de buscar un conjunt de vèrtexs d'acumulació tal que la fase de *gossiping* sigui realitzable en temps òptim, és a dir, tan ràpid com en el graf complet, i de manera que l'ordre de les components sigui petit, per intentar minimitzar el nombre d'etapes en les fases d'acumulació i *broadcasting*. A més, triant les components d'acumulació que siguin subgrafs de G hamiltonians, es podran aplicar els algorismes d'acumulació i *broadcasting* òptims descrits en [52] amb temps $\lceil \log_2 n \rceil$.

4.1.3 *Gossiping* en el graf complet

Per a la fase de *gossiping*, els nostres algorismes es basen en als següents algorismes sobre el graf complet K_n .

Algorisme G_0 , per a ordre parell

n parell, K_n graf complet.

1. PER A $j = 1$ FINS A $\lceil \log_2 n \rceil$
2. PER A tot vèrtex i parell, **fer** en paral·lel
3. intercanvi d'informació entre el vèrtex i i el vèrtex $i + 2^j - 1$;

Algorisme G_1 , per a ordre senar

n senar, K_n graf complet.

1. $m = \lfloor n/2 \rfloor$;
2. PER A tot vèrtex i tal que $0 < i < n/2$, **fer** en paral·lel
3. intercanvi d'informació entre el vèrtex i i el vèrtex $i + m$;
4. si m és senar **aleshores** $n' = m + 1$ **altrament** $n' = m + 2$;
5. **Fer** *gossiping* en el graf complet de vèrtexs $\{0, \dots, n'\}$, amb l'algorisme G_0 ;
6. PER A tot vèrtex i tal que $0 < i < n/2$, **fer** en paral·lel
7. intercanvi d'informació entre el vèrtex i i el vèrtex $i + m$;

Quan s'apliquen aquests algorismes en l'algorisme en tres fases, una comunicació entre els vèrtexs i i j es substitueix per una comunicació entre els vèrtexs d'acumulació de la component i -èssima i el de la component j -èssima. Aquesta comunicació s'estableix a través d'un camí entre els dos vèrtexs d'acumulació, i la *longitud* d'aquesta comunicació es defineix com el nombre de components que el camí atravesca més 1. Així, l'algorisme en tres fases, suposant que es realitza l'intercanvi entre els vèrtexs d'acumulació de manera òptima, utilitzarà $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$ etapes, on r és el nombre de components d'acumulació i s és el tamany de la component d'acumulació més gran.

Ara cal definir una descomposició dels grafs que permeti definir els camins en les etapes de l'intercanvi entre vèrtexs d'acumulació de manera que no tinguin arestes comunes.

4.2 Gossiping en $C_{2n}(-1, d, 1)$

Considerant els anells cordals de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$, la corda d dona de manera natural una descomposició del graf en cicles. Si la descomposició té r components d'ordre com a molt s , i k és l'aresta-bisecció de $\mathbf{C} = C_{2n}(-1, d, 1)$,

$$2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6 \leq g_{2EDP}(\mathbf{C}) \leq 2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$$

La descomposició del graf ha de complir dues condicions. S'han de poder definir camins entre els vèrtexs d'acumulació, de manera que els que corresponen a cadascuna de les etapes determinades pels algorismes de *gossiping* en el graf complet G_0 i G_1 de la secció 4.1.3 siguin arest-disjunts. A més, interessa que els valors de r i s permetin relacionar la cota inferior amb la superior, que hauria de ser el més ajustada possible. Per a això es fan servir les cotes per a la aresta-bisecció calculades en la secció 2.7.

4.2.1 El cas $2n = (d + 1)^2$

Sigui el graf $C_{64}(-1, 7, 1)$. Tal com es pot veure en la figura 4.1, es pot descomposar el graf en vuit cicles de longitud 8, $C_i = \{8i, 8i + 1, \dots, 8i + 7\}$ per a $i = 0 \dots 7$. A més de les arestes que constitueixen els vuit cicles, en el graf només hi ha arestes entre els cicles C_i i C_{i+1} , amb $C_8 = C_0$, i aquestes són:

$$\{8i + 2, 8i + 9\}, \{8i + 4, 8i + 11\}, \{8i + 6, 8i + 13\}, \{8i + 7, 8i + 8\}$$

Es prenen aquests cicles com a components d'acumulació, i en el cicle C_i el vèrtex $R_i = 8i + 6$ com a vèrtex d'acumulació.

L'algorisme $3F$ requereix $\log 8 = 3$ etapes per a la primera fase, d'acumulació en els representants de cada cicle, i $\log 8 = 3$ etapes per a la tercera fase, de *broadcasting* des del representant a cada cicle. La segona fase, de *gossiping* entre representants, es pot fer també en $\log 8 = 3$ etapes, definint els camins a partir de l'algorisme G_0 , de la manera següent:

Etapa 1: La longitud de la comunicació és $2^1 - 1 = 1$.

Per a $i = 0, 2, 4, 6$, el vèrtex $R_i = 8i + 6$ intercanvia informació amb el vèrtex $R_{i+1} = 8i + 14$ a través del camí $8i + 6, 8i + 13, 8i + 14$.

Etapa 2: La longitud de la comunicació és $2^2 - 1 = 3$.

Per a $i = 0, 2, 4, 6$, el vèrtex $R_i = 8i + 6$ intercanvia informació amb el vèrtex $R_{i+3} = 8i + 30$ a través del camí $8i + 6, 8i + 13, 8i + 12, 8i + 19, 8i + 18, 8i + 25, 8i + 24, 8i + 31, 8i + 30$.

Etapa 3: La longitud de la comunicació és 1 ja que $2^3 - 1 = 7$ i $R_{i+7} = R_{i-1}$.

Per a $i = 0, 2, 4, 6$, el vèrtex $R_{i-1} = 8i - 2$ intercanvia informació amb el vèrtex $R_i = 8i + 6$ a través del camí $8i - 2, 8i + 5, 8i + 6$.

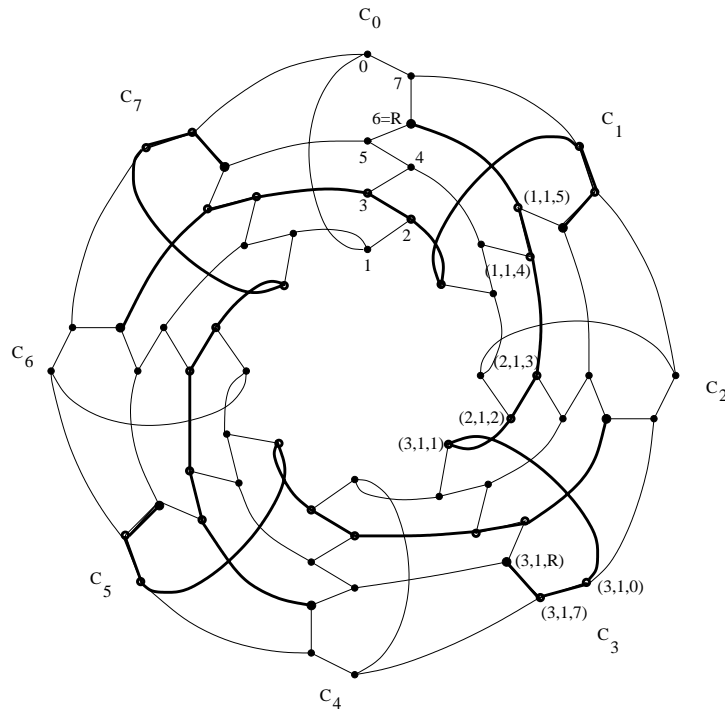


Figura 4.1: L'anell cordal $C_{64}(-1, 7, 1)$, amb els camins de l'etapa 2 de la fase de *gossiping*.

En la figura 4.1 hi ha representats els camins de l'etapa 2. En cada etapa, el conjunt de camins són aresta-disjunts.

De la mateixa manera, per a un valor qualsevol de d i per a ordre $2n = (d + 1)^2$, es poden triar com a components d'acumulació els $d + 1$ cicles $C_i = \{(d + 1)i, (d + 1)i + 1, \dots, (d + 1)i + d\}$ amb $i = 0 \dots d$, de longitud $d + 1$, i com a vèrtex d'acumulació de la component C_i el vèrtex $R_i = (d + 1)i + d - 1$.

Així entre el cicle C_i i el cicle C_{i+1} hi haurà $\frac{d+1}{2}$ arestes: $\{(d + 1)i + 2, (d + 1)i + 9\}$, $\{(d + 1)i + 4, (d + 1)i + 11\}$, \dots , \dots , $\{(d + 1)i + d - 1, (d + 1)i + d + 6\}$, $\{(d + 1)i + d, (d + 1)(i + 1)\}$.

L'algorisme $3F$ requereix $\lceil \log(d+1) \rceil$ per a la primera fase, d'acumulació en els representants de cada cicle, i $\lceil \log(d+1) \rceil$ etapes per a la tercera fase, de *broadcasting* des del representant a cada cicle.

Per a la segona etapa, de *gossiping* entre representants, les crides es defineixen a partir de l'algorisme $G0$. El nombre d'etapes és $\lceil \log(d+1) \rceil$, i en l'etapa j cadascun dels representants de subíndex parell i , R_i , intercanvia informació amb el representant de subíndex senar $i + 2^j - 1$, R_{i+2^j-1} .

Per tant, s'ha de definir per cada crida un camí, de manera que els que

corresponen a una mateixa etapa siguin dos a dos aresta-disjunts. Generalitzant els camins definits per a $C_{64}(-1, 7, 1)$, es defineix per a un cert subíndex i i una longitud ℓ , el camí entre R_i i $R_{i+\ell}$, denotat per $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}$, per la següent unió de camins:

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell} = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_\ell$$

amb

$$P_k = R_{i+k} - 2k, R_{i+k} - 2k + d, R_{i+k} + d - 1 \quad \text{si } 0 \leq k < \ell$$

i

$$P_\ell = R_{i+\ell} - 2\ell, R_{i+\ell} - 2\ell - 1, R_{i+\ell} - 2\ell - 2, \dots, R_{i+\ell} - d, R_{i+\ell}$$

Si $0 \leq k < \ell$, el camí P_k comença en C_{i+k} i acaba en C_{i+k+1} , i el final de P_k és igual a l'origen de P_{k+1} , ja que $R_{i+k} + d - 1 = R_{i+k+1} - 2(k+1)$. A més, el camí P_ℓ és un camí en el cicle $C_{i+\ell}$, des de $R_{i+\ell} - 2\ell$ fins al seu vèrtex d'acumulació, $R_{i+\ell}$, sempre i quan $2\ell - 1 < d$, ja que el vèrtex més petit de $C_{i+\ell}$ és $R_{i+\ell} - d + 1$. Així doncs, la condició $2\ell - 1 < d$, és a dir, $\ell < \frac{d+1}{2}$, és la condició que assegura que els camins estan ben definits. De fet, la longitud ha de ser com a molt igual al nombre d'arestes que hi ha entre un cicle i el següent.

Ara, en l'etapa j de la segona fase, si

$$2^j - 1 \pmod{d+1} \leq \frac{d+1}{2}$$

aleshores es defineix la longitud de la comunicació per

$$\ell = 2^j - 1 \pmod{d+1}$$

i els camins en aquesta etapa són

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}, \quad \text{per a cada } i \text{ parell}$$

Però si resulta

$$\frac{d+1}{2} < 2^j - 1 \pmod{d+1}$$

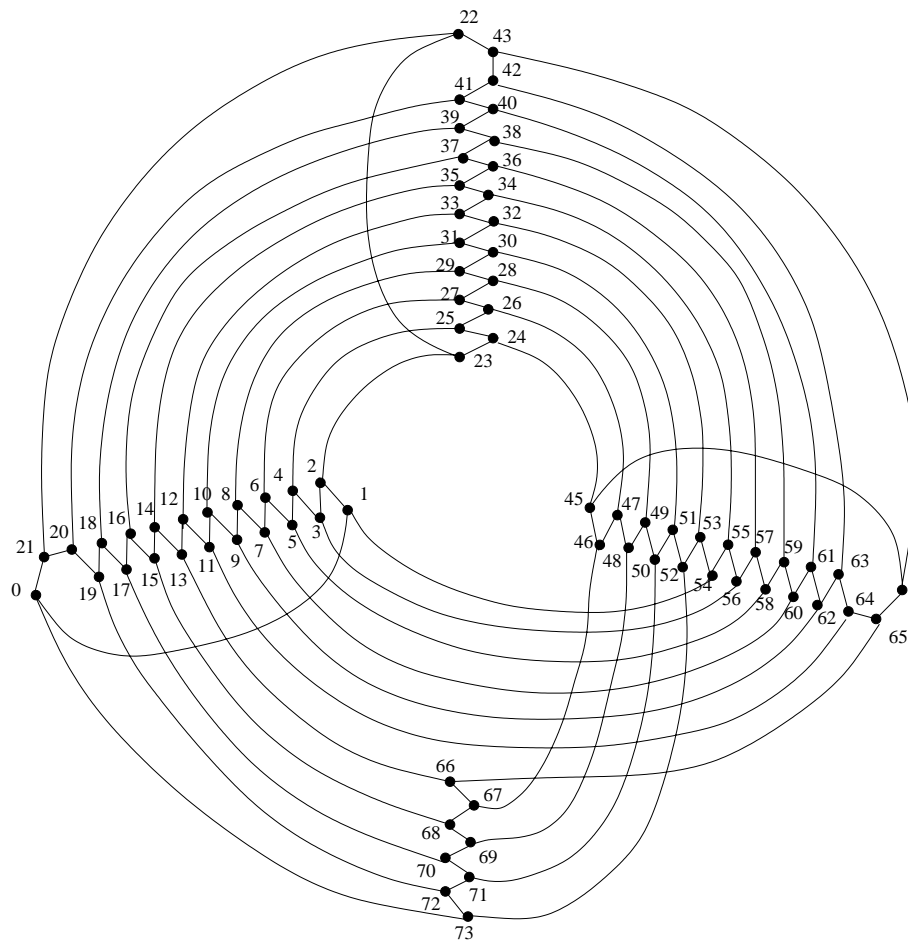
aleshores es defineix la longitud de la comunicació per

$$\ell = d + 1 - (2^j - 1 \pmod{d+1})$$

i els camins en aquesta etapa són

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}, \quad \text{per a cada } i \text{ senar}$$

És a dir, tal com en la tercera etapa de l'algorisme per a $C_{64}(-1, 7, 1)$, els camins van de vèrtex senar a vèrtex parell. Això assegura que els camins estan ben definits.

Figura 4.2: L'anell cordal $C_{74}(-1, 21, 1)$.

El conjunt de camins d'una etapa són aresta-disjunts, i com que el nombre d'etapes és $\lceil \log(d+1) \rceil$, el temps total de l'algorisme és $\lceil \log(d+1) \rceil + \lceil \log(d+1) \rceil + \lceil \log(d+1) \rceil = 2\lceil \log 2n \rceil - \log(d+1) + O(1)$. Donat que en aquest cas la bisecció del graf és exactament $d+1$ (vegeu la secció 2.7), l'algorisme és òptim.

Per a un anell cordal d'ordre $2n$ i corda $d \leq n$ qualsevol, es proposa un algorisme que és una generalització del que acabem de descriure quan $d+1$ és l'arrel de l'ordre. La descomposició es basa també en els cicles de longitud $d+1$ de la forma $2i, 2i+1, \dots, 2i+d$ que conté el graf, però apareixen diversos casos segons que $d+1$ divideixi l'ordre o no, i en funció del resultat d'aquesta divisió.

4.2.2 Descomposició de $C_{2n}(-1, d, 1)$

Es distingeix en $C_{2n}(-1, d, 1)$ un conjunt de $a = \lfloor \frac{2n}{d+1} \rfloor$ cicles de longitud $d + 1$, disjunts denotats per C_0, \dots, C_{a-1} , amb:

$$C_i = \{i(d+1), i(d+1) + 1, \dots, i(d+1) + d\}.$$

Si $2n = a(d+1) + b$ amb b parell entre 0 i $d - 1$, aleshores $C_{2n}(-1, d, 1)$ es pot descomposar en els a cicles C_0, \dots, C_{a-1} , i un camí amb b vèrtexs, amb un conjunt addicional d'arestes que enllacen aquests subgrafs.

En el cicle $C_i = \{i(d+1), i(d+1) + 1, \dots, i(d+1) + d\}$, es diu que el vèrtex $i(d+1) + j$ és el vèrtex j -èssim, per a $0 \leq j \leq d$. És fàcil observar que el vèrtex 0 de C_i és adjacent als vèrtexs 1 i d de C_i . A més, per a tot i , $0 \leq i < \lfloor \frac{2n}{d+1} \rfloor - 1$, els cicles C_i i C_{i+1} comparteixen $\frac{d+1}{2}$ arestes.

Entre aquestes arestes, $\frac{d-1}{2}$ són de tipus $\{x, x+d\}$ i només una és de tipus $\{x, x+1\}$. Per a cada valor de j parell entre 0 i d , el vèrtex j -èssim de C_i és adjacent al vèrtex $(j-1)$ -èssim de C_{i+1} per una arista de tipus d . En la figura 4.1 es pot veure la descomposició de $C_{64}(-1, 7, 1)$ i en la figura 4.2 la de $C_{74}(-1, 21, 1)$.

Per a la definició de l'algorisme de *gossiping* es consideren dos casos: $2n = a(d+1)$ i $2n = a(d+1) + b$ amb $2 \leq b \leq d - 1$. Per a aquests dos casos, es defineixen les components d'acumulació utilitzant la descomposició en cicles donada més amunt. Després es tria per a cada component un vèrtex d'acumulació. I finalment, s'estableixen els camins que corresponen a comunicacions entre vèrtexs d'acumulació definides pels algorismes G_0 o G_1 de *gossiping* en el graf complet. A més es comprova que els camins així definits, en cada etapa, són dos a dos aresta-disjunts.

En tots els casos, r denota el nombre de components d'acumulació i s l'ordre de la component més gran.

4.2.3 Cas $2n = a(d+1)$

Les components d'acumulació estaran constituïdes de manera natural per grups de cicles del conjunt C_0, \dots, C_{a-1} . El nombre de cicles de cada component d'acumulació depèn del paràmetre a :

Si $a < d + 1$ aleshores hi ha a components, és a dir, $r = a$. Cadascuna d'elles és un cicle de $d + 1$ vèrtexs i, per tant, $s = d + 1$.

Si $a \geq d + 1$ aleshores hi haurà $d - 1$ components, és a dir, $r = d - 1$. Dividint a per $d - 1$, es pot escriure $a = \alpha(d - 1) + \beta$ amb $0 \leq \beta < d - 1$. Aleshores hi ha β components que són de la unió de $\alpha + 1$ $(d + 1)$ -cicles consecutius i les altres $d - 1 - \beta$ components són la unió de α $(d + 1)$ -cicles consecutius. Per tant, $s = \alpha(d + 1)$ si $\beta = 0$, i $s = (\alpha + 1)(d + 1)$ en cas contrari. En qualsevol cas, $s \leq (d + 1)(\alpha + 1)$.

Les components s'etiqueten entre 0 i $r-1$. En la component k -èsima, els cicles s'etiqueten entre 1 i Γ , on Γ és el nombre de cicles en la component k . Denotant per (k, i, j) el vèrtex j del i -èsim cicle de la component k -èsima, els vèrtexs d'acumulació són els vèrtexs de la forma $(k, 1, d-1)$.

Com que totes les components són connexes i hi ha un camí hamiltonià amb origen al vèrtex d'acumulació, les fases d'acumulació i *broadcasting* requereixen $\lceil \log_2 s \rceil$ etapes, utilitzant en cada component l'algorisme definit en [52]. Es pot passar, per tant, a la fase de *gossiping*. Per cada etapa de l'algorisme de *gossiping* en un graf complet ($G0$ o $G1$), hi ha d'haver un conjunt de camins de la forma $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ on ℓ és la longitud de la comunicació, és a dir, el nombre de components que s'atravesen entre dos vèrtexs d'acumulació que comuniquen. I en cada etapa, aquesta longitud és la mateixa per a tots els camins.

Camí $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}$, donada la longitud ℓ

Per a $\ell \leq \frac{d-1}{2}$, es defineix $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ com la unió de $\ell+1$ camins denotats per $P(i, 0), P(i, 1), \dots, P(i, \ell)$, on $P(i, k)$ indica el camí que enllaça la component $i+k$ amb la component $i+k+1$, i es defineix de la manera següent:

1. Si $0 \leq k \leq \ell-1$, aleshores hi ha dos casos:

si la component $i+k$ és un únic cicle de $d+1$ vèrtexs, aleshores

$$P(i, k) = \{(i+k, 1, d-1-2k), (i+k+1, 1, d-1-2k-1), (i+k+1, 1, d-1-2k-2)\};$$

si la component $i+k$ és la unió de Γ cicles de $d+1$ vèrtexs, aleshores

$$P(i, k) = \{(i+k, \gamma, d-1-2k), (i+k, \gamma+1, d-1-2k-1), (i+k, \gamma+1, d-1-2k), \gamma = 1, \dots, \Gamma-1\} \cup \{(i+k, \Gamma, d-1-2k), (i+k+1, 1, d-1-2k-1), (i+k+1, 1, d-1-2k-2)\}.$$

2. Si $k = \ell$, aleshores $P(i, \ell)$ és un camí en la component $i+\ell$, del vèrtex $(i+\ell, 1, d-1-2\ell)$ al vèrtex $(i+\ell, 1, d-1)$, passant pel $(i+\ell, 1, 0)$.

La condició $2\ell \leq d-1$ assegura que els camins estan ben definits. En cada etapa de la fase de *gossiping* de l'algorisme es pot definir l'intercanvi d'informació a través d'aquests camins:

1. Si el nombre de components és parell es procedeix com en el cas $2n = (d+1)^2$. En l'etapa j , el vèrtex d'acumulació de subíndex parell i intercanvia informació amb el vèrtex d'acumulació de subíndex senar $i+2^j-1 \pmod{r}$. Si $2^j-1 \pmod{r} \leq \frac{d-1}{2}$, l'intercanvi es realitza a través dels camins $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ amb $\ell = 2^j-1$, per a tot i parell. Si $2^j-1 \pmod{r} > \frac{d-1}{2}$ l'intercanvi es realitza a través dels camins

$\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ amb $\ell = r - (2^j - 1 \pmod{r}) \leq \frac{d-1}{2}$, per a tot i senar.

2. Si el nombre de components és senar, $r = 2r' + 1$, i l'etapa és la primera o l'última. Aleshores els representants de subíndex i i $i + r'$, per $1 \leq i \leq r'$, intercanvien informació mitjançant els camins $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+r' \pmod{r}}$, amb $r' \leq \frac{d-1}{2}$.
3. Si el nombre de components és senar, $r = 2r' + 1$ però es tracta d'una de les etapes intermitges. Aleshores les components $n', \dots, r-1$, on $n' = r'$ o $n' = r' + 1$ és senar, s'uneixen en una de sola. I per a aquestes etapes, hi haurà un nombre parell de components.

Finalment, només cal veure que els camins definits d'aquesta manera són dos a dos aresta-disjunts.

Lema 4.1 *Donats dos camins qualssevol $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}$ i $\mathcal{P}_{j \rightarrow j+\ell}$, amb $i < j$, els camins són aresta-disjunts, sempre i quan $i + \ell \neq j$.*

Demostració. Només s'ha de veure que, quan dos camins atravessen una mateixa component, ho fan per vèrtexs diferents. Per simetria es suposa que $i = 0$, i que per a $k < \ell$ es compleix $j < k$. Així, $P(0, k)$ i $P(j, k - j)$ atravessen tots dos la component k del graf. S'ha de veure que no tenen vèrtexs en comú.

En $P(0, k)$ hi ha vèrtexs amb tercera component $R - 2k$ o bé $R - 2k - 1$, mentre que en $P(j, k - j)$ hi ha vèrtexs amb tercera component $R - 2k - 2j$ o bé $R - 2k - 2j - 1$, que són diferents quan $j \neq 0$, com és el cas. \square

4.2.4 Temps de l'algorisme en el cas $2n = a(d + 1)$

El nombre d'etapes de l'algorisme és $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil = 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 r \rceil + O(1)$. Quan $2n = a(d + 1)$, hi ha dos valors en funció de la relació entre a i d :

Si $a \geq d + 1$, aleshores $r = d - 1$ i $s = (a + 1)(d + 1)$, i es té

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 d \rceil + O(1)$$

Si $a < d + 1$, aleshores $r = a$ i $s = d + 1$, i es té

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

4.2.5 Cas general

Sigui $C_{2n}(-1, d, 1)$ un anell cordal, amb $2n = a(d + 1) + b$ i $0 < b < d$. Com que $2n$ i $d + 1$ són parells, b és també parell. Hi ha dos casos a considerar: $a \geq b/2$ i $a < b/2$.

Cas $a \geq b/2$

Un graf de tipus \mathcal{A} és un subgraf de l'anell cordal induït per un conjunt de $d+3$ vèrtexs consecutius, el primer dels quals és parell. Un subgraf de tipus \mathcal{A} conté dues arestes de tipus $[x, x+d]$ i $d+2$ arestes de tipus $[x, x+1]$. Si i és el vèrtex més petit en un subgraf H de tipus \mathcal{A} , aleshores s'anomena el vèrtex $i+j$ vèrtex j -èsim de H (el vèrtex 0 de H és incident als vèrtexs 1 i d en H).

Hi ha dos casos que depenen del paràmetre a . En tots dos casos, el graf es separa en $a - b/2$ cicles de $d+1$ vèrtexs i en $b/2$ grafos de tipus \mathcal{A} , és a dir, amb $d+3$ vèrtexs.

Si $a < d+1$, aleshores hi ha a components. Si $0 \leq i \leq b/2-1$, la component i és un subgraf de tipus \mathcal{A} , A_i . Si $b/2 \leq i \leq a-1$, la component i és un cicle de longitud $d+1$, C_i . El graf és la unió de subgrafs consecutius

$$A_0, A_1, \dots, A_{b/2-1}, C_{b/2}, \dots, C_{a-1}$$

I per a cada i , $0 \leq i \leq a-1$, el subgraf d'índex i d'aquesta seqüència es connecta als subgrafs d'índexs $i-1$ i $i+1$, mòdul a , per $(c+1)/2$ arestes.

Si $a \geq d+1$, aleshores hi ha $d-1$ components. Cadascuna de les components conté com a molt un subgraf de tipus \mathcal{A} , mentre que pot contenir alguns cicles. Es divideix a per $d-1$, escrivint $a = \alpha(d-1) + \beta$, amb $0 \leq \beta < d-1$. Aleshores, les primeres β components estan constituïdes per $\alpha+1$ subgrafs consecutius, i les altres $d-1-\beta$ components per α subgrafs consecutius. A més, només el primer dels subgrafs en les primeres $b/2$ components és un subgraf de tipus \mathcal{A} .

Així, si $0 \leq i \leq b/2-1$, la component i és la unió $A_i, C_{i,1}, \dots, C_{i,\Gamma_i}$ de subgrafs consecutius, on A_i és un subgraf de tipus \mathcal{A} , i $C_{i,j}$ un cicle de longitud $d+1$. Mentre que si $b/2 \leq i < c-1$, la component i és la unió $C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,\Gamma_i}$ de cicles de longitud $d+1$. El valor de Γ_i és α si $i \leq \beta-1$, i $\alpha-1$ altrament.

El graf es pot descriure per la seqüència següent:

$$\begin{array}{c} \underbrace{A_0, C_{0,1}, \dots, C_{0,\Gamma_0}}_{\text{component 0}}, \quad \underbrace{A_1, C_{1,1}, \dots, C_{1,\Gamma_1}}_{\text{component 1}}, \quad \dots \\ \dots \quad \underbrace{A_{b/2-1}, C_{b/2-1,1}, \dots, C_{b/2-1,\Gamma_{b/2-1}}}_{\text{component } b/2-1}, \\ \underbrace{C_{b/2,0}, C_{b/2,1}, \dots, C_{b/2,\Gamma_{b/2}}}_{\text{component } b/2}, \quad \dots, \quad \underbrace{C_{d-2,0}, C_{d-2,1}, \dots, C_{d-2,\Gamma_{d-2}}}_{\text{component } d-2} \end{array}$$

En cada component, s'etiqueta amb un 1 el subgraf de tipus \mathcal{A} i els cicles amb 2, 3, ...

La component k té $(k, 1, d - 1)$ com a vèrtex d'acumulació si no conté subgraf de tipus \mathcal{A} , i $(k, 1, d + 1)$ altrament.

Les fases d'acumulació i *broadcasting* es realitzen com en el cas anterior, amb l'algorisme de [52], ja que cada component és connexa i conté un camí hamiltonià amb origen el vèrtex d'acumulació. Es pot passar, doncs, a la fase de *gossiping*. Com en els casos anteriors, per cada etapa de l'algorisme de *gossiping* en un graf complet hi ha d'haver un conjunt de camins de la forma $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ on ℓ és la longitud de la comunicació, és a dir, el nombre de components que s'atravesen entre dos vèrtexs d'acumulació que comuniquen. I en cada etapa, aquesta longitud és la mateixa per a tots els camins.

Com en el cas anterior, per a $\ell \leq \frac{c-1}{2}$ definim $\mathcal{P}'_{i \rightarrow i+\ell}$ com la unió de $\ell + 1$ camins denotats per $P'(i, 0), P'(i, 1), \dots, P'(i, \ell)$ on $P'(i, k)$, per $0 \leq k \leq \ell$, es defineix de la manera següent.

1. Si la component $i + k + 1$ no conté un graf de tipus \mathcal{A} o bé $k = \ell$, aleshores $P'(i, k) = P(i, k)$, tal com s'ha definit en la secció 4.2.3.
2. Si $k \neq \ell$ i la component $i + k + 1$ conté un graf de tipus \mathcal{A} , aleshores es consideren quatre casos:

si la component $i + k$ conté només un graf de tipus \mathcal{A} , aleshores $P'(i, k)$ és el camí $\{(i + k, 1, d - 1 - 2k + 2), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k)\}$;

si la component $i + k$ conté només un cicle de $d + 1$ vèrtexs, aleshores $P'(i, k)$ és el camí $\{(i + k, 1, d - 1 - 2k), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k)\}$;

si la component $i + k$ té un graf de tipus \mathcal{A} i $\Gamma - 1$ cicles de $d + 1$ vèrtexs, aleshores $P'(i, k)$ és el camí $\{(i + k, 1, d - 1 - 2k + 2), (i + k, 2, d - 1 - 2k - 1), (i + k, 2, d - 1 - 2k)\} \cup \{(i + k, \gamma, d - 1 - 2k), (i + k, \gamma + 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k, \gamma + 1, d - 1 - 2k), \gamma = 2, \dots, \Gamma - 1\} \cup \{(i + k, \Gamma, d - 1 - 2k), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 2)\}$;

si la component $i + k$ té Γ cicles de $d + 1$ vèrtexs, aleshores $P'(i, k)$ és el camí $\{(i + k, \gamma, d - 1 - 2k), (i + k, \gamma + 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k, \gamma + 1, d - 1 - 2k), \gamma = 1, \dots, \Gamma - 1\} \cup \{(i + k, \Gamma, d - 1 - 2k), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 1), (i + k + 1, 1, d - 1 - 2k - 2)\}$.

Com abans, és fàcil veure que a cada etapa de la fase de *gossiping* l'intercanvi d'informació es pot realitzar utilitzant els camins que s'acaben de definir. A més, en una etapa tots els camins tenen la mateixa longitud. Per tant, el lema 4.2 diu que el conjunt de camins corresponents a una etapa són dos a dos aresta-disjunts.

Lema 4.2 *Donats dos camins qualssevol $\mathcal{P}'_{i \rightarrow i+\ell}$ i $\mathcal{P}'_{j \rightarrow j+\ell}$, amb $i < j$, els camins són aresta-disjunts, sempre i quan $i + \ell \neq j$.*

Demostració. La demostració és anàloga de la del lema 4.1. Només cal veure que, quan dos camins atravesen una mateixa component, ho fan per vèrtexs diferents. \square

Cas $a < b/2$

Com que $b < d + 1$, això implica que $a < (d + 1)/2$. Hi haurà a cicles de longitud $c + 1$ i un camí de longitud b . El graf $C_{74}(-1, 7, 1)$ de la figura 4.2 és un exemple d'aquest cas. Ara el nombre de components és $r = a + 1$. Les components $1 \dots a$ contenen un $d + 1$ -cicle i la component 0 és el camí de b vèrtexs. El vèrtex j del camí de longitud b en la component 0 té etiqueta $(0, 1, j)$ i els vèrtexs en les altres components estan etiquetats com en la secció anterior. Prenent ara $(k, 1, b - 2)$, $k = 0 \dots a$, com a vèrtexs d'acumulació, hi ha $b/2 + 1$ arestes que connecten la component $r - 1$ amb la component 0.

Amb aquesta descomposició la definició de l'algorisme es pot fer com en el cas $2n = a(d + 1)$ i $a < d + 1$.

4.2.6 Temps de l'algorisme en el cas general

El nombre d'etapes de l'algorisme és $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil = 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 r \rceil + O(1)$. Quan $2n = a(d + 1) + b$, els valors d'aquesta cota depenen de la relació entre a i d , i de b :

Si $a \geq b/2$:

Si $a \geq d + 1$, aleshores $r = d - 1$ i $s = (a + 1)(d + 3)$, i es té

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 d \rceil + O(1)$$

Si $a \leq d + 1$, aleshores $r = a$ and $s = d + 3$, i es té

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

Si $a < b/2 < (d + 1)/2$, aleshores $r = \lfloor a/2 \rfloor + 1$ i $s = 2(d + 1)$, i es té

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

4.3 Optimalitat de l'algorisme

En aquesta secció s'analitza fins a quin punt les cotes superiors de g_{2EDP} donades pel temps de l'algorisme són ajustades. Com que la cota inferior coneguda depèn de l'aresta-bisecció del graf, per a aquesta anàlisi es fan servir les cotes superiors de la bisecció calculades en la secció 2.7.

Si $C_{2n}(-1, d, 1)$ té aresta-bisecció k , a i b són els dos enters tals que $2n = a(d + 1) + b$ amb $0 \leq b < d$, i q i r són els dos enters tals que $2n = q(d - 1) + r$ amb $0 \leq r \leq d - 3$, es tenen els resultats següents:

Cota inferior de g_{2EDP} : Vegeu [68, 76].

$$2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6 \leq g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1))$$

Cota superior de k : Del lema 2.24 i el teorema 2.27 de la secció 2.7.

En qualsevol cas, $k \leq d + 2$.

A més, si $a = q$, aleshores $k \leq \min\{2a + b + 1, d + 2 - b\} < d + 2$

i si $a = q - 1$ i $2q < d + 1$ aleshores

si $b = 0$ aleshores $k \leq 2a + 1 < d + 2$,

altrament $k \leq 2q + 1 < d + 2$.

Cota superior de g_{2EDP} : De l'algorisme presentat en aquest capítol.

1. $a \geq d + 1$

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 d + O(1)$$

2. $a < d + 1$

$$g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 a + O(1)$$

Sempre que es tingui $g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 x + O(1)$, si es pot assegurar que x és una cota superior de l'aresta-bisecció, és a dir, si $k \leq x$, aleshores es pot concloure que, d'una banda l'algorisme és òptim, i de l'altra, x és, de fet, l'aresta-bisecció (llevat una constant).

Per tant, en el cas $a \geq d + 1$, l'algorisme és òptim, i $d + 2$ és l'aresta-bisecció. De fet és $d + 1$ si a és parell i $d + 2$ si a és senar. En el cas $a < d + 1$, hi ha dues possibilitats, que corresponen als casos del teorema 2.27. Si $a = q - 1$, resulta $k \leq 2a + 1$ o bé $k \leq 2q$, l'algorisme és també òptim, i la cota superior obtinguda és l'aresta-bisecció.

Finalment, el cas que queda és el cas en què $a = q$, que és equivalent a dir $2a + b \leq d - 1$. En aquest cas, la cota superior per $g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1))$ no és prou bona, i és probable que l'algorisme es pugui millorar. A més, això fa que no es pugui assegurar que la cota superior de k trobada és ajustada.

Capítol 5

Conclusions

En aquest capítol, es dona un resum de les aportacions d'aquest treball i es descriuen alguns problemes oberts, amb un apunt sobre el possible desenvolupament de treballs posteriors.

5.1 Aportacions d'aquesta tesi

Aquesta tesi tracta de les propietats dels anells cordals de grau 3, que són grafs de Cayley sobre el grup dièdric. Aquest grup no és commutatiu, però els seus elements satisfan bones relacions. A més, la seva relació amb el grup cíclic fa que els anells cordals tinguin molt a veure amb els grafs circulants, anomenats també, per alguns autors, anells cordals.

Una part important del treball és l'estudi de les propietats estructurals dels anells cordals, mentre que en una segona part es donen algorismes d'en-caminament amb bones propietats i d'intercanvi d'informació entre tots els nodes o *gossiping*. Aquestes dues parts del treball estan interrelacionades, ja que les propietats estructurals dels grafs s'utilitzen en les definicions i en l'anàlisi dels algorismes que es proposen en la segona part i, a la vegada, l'estudi de les comunicacions ha motivat el plantejament de problemes de caire més teòric, com la classificació per isomorfisme dels anells cordals, la caracterització del seu grup d'automorfismes o el càlcul de l'aresta-bisecció.

Part de l'interès d'aquest treball és l'ús de les tessellacions per a la representació dels grafs. Aquesta eina s'ha revelat molt útil en l'estudi de propietats mètriques i de problemes en què s'han d'establir camins entre els nodes, ja que en facilita la visualització. Les altres famílies que han estat estudiades per diversos autors mitjançant tessellacions del pla són, sobretot, els grafs circulants de grau 4, en què s'utilitzen quadrats per representar els vèrtexs, i els de grau 6, en què s'utilitzen hexàgons. Per als anells cordals de grau 3 s'han utilitzat triangles. En particular, es veu com la tessellació determina totalment el graf, i les propietats del graf es tradueixen en propietats de la tessellació.

Més concretament, es poden destacar els resultats següents.

5.1.1 Propietats estructurals

En el capítol 2 es presenten les propietats estructurals dels anells cordals.

En les seccions 2.1 i 2.2, s'estableix la definició dels grafs, que es denominaran per $C_{2n}(a, b, c)$, i es demostra que són grafs de Cayley sobre el grup dièdric i que es poden veure com 2-cicles generalitzats de grafs circulants. En l'apartat 2.3 es presenta la tessellació associada a un anell cordal, l'eina que es fa servir en gairebé tots els resultats posteriors. Aquesta representació geomètrica ja ha estat utilitzada per altres autors per veure que l'ordre màxim d'un anell cordal de diàmetre senar D és $m_D = \frac{3D^2 + 1}{2}$, i que les cordes són $a = -1$, $b = 3D$ i $c = 1$. A més, es demostra que les translacions d'un anell cordal com a graf de Cayley es poden veure com isometries del pla. De fet, però, els resultats interessants d'aquest capítol es troben en les seccions 2.4, 2.5 i 2.6, per una banda, que constitueixen l'article [15], i la secció 2.7, que ha donat lloc al report de recerca [17].

En l'apartat 2.4 es fa una anàlisi dels 4-cicles i 6-cicles del graf, a partir d'una descripció en termes de la tessellació. El resultat es resumeix en dos teoremes. El teorema 2.13 diu que, llevat dels anells cordals amb ordre 6 i 8, només els anells cordals de la forma $C_{4k}(2k + 1, 1, -1)$ i els de la forma $C_{2n}(1, -1, 3)$ tenen cicles de longitud 4. El primer d'aquests casos és interessant ja que està constituït pels anells cordals que tenen automorfismes que no es poden veure com isometries del pla. L'existència de diferents tipus de 6-cicles es resumeix en el teorema 2.14. En primer lloc, s'observa l'existència de cicles de la forma **abcabc**, anomenats hexàgons, en tots els grafs de la família. I el teorema diu que si l'ordre és més gran que 18, hi ha només tres possibilitats: o bé els únics 6-cicles són els hexàgons; o bé el graf és de la forma $C_{6k}(2k \pm 1, 1)$; o bé el graf és de la forma $C_{2n}(1, -1, 5)$.

Com a conseqüència d'aquests teoremes, es pot determinar el color de les arestes i assignar valors a les cordes d'un anell cordal, sabent només en quants 6-cicles està continguda cada aresta, o en quants 4-cicles, si n'hi ha. Utilitzant aquesta propietat, es dona un algorisme de reconeixement en temps lineal.

Una altra conseqüència d'aquests teoremes és que la tessellació determina completament el graf. Es pot dir, doncs, que dos anells cordals són isomorfs si i només si tenen la mateixa tessellació, és a dir, les mateixes equacions del reticle de zeros. A partir d'aquesta caracterització, en l'apartat 2.5 es determina el grup d'automorfismes d'un anell cordal. En la majoria dels casos el grup d'automorfismes és el conjunt de les translacions. En alguns casos, però, hi ha també automorfismes que no conserven la coloració de les arestes. Quan els colors es permuten, però la partició de les arestes és la mateixa, els automorfismes es poden veure en el pla com simetries axials o

rotacions. Això es demostra en els lemes 2.18 i 2.19.

Tanca la secció el teorema 2.20, l'enunciat del qual es pot resumir com segueix. El grup d'automorfismes de $C_{2n}(a, b, c)$ és: el conjunt de translacions, en el cas més general; el grup generat per les translacions i una simetria axial si el graf és isomorf a $C_{4km}(4m+1, 1, 2m-2\ell+1)$, amb $\text{mcd}(\ell, m) = 1$, o bé a $C_{2km}(2m+1, 1, m-\ell+1)$, amb $\text{mcd}(m, \frac{\ell-m}{2}) = 1$; el grup generat per les translacions i el gir d'angle $\frac{2\pi}{3}$ si el graf és isomorf a $C_{2n}(-1, 6\ell+3, 1)$, amb $n = 3\ell^2 + 3\ell + 1$, o bé a $C_{2n}(1 - 2(\ell+2), 2\ell+1, 1)$, amb ℓ senar i $n = 3\ell^2 + 3\ell + 4$; o bé un grup que conté automorfismes que no conserven la partició de les arestes en colors, és a dir, que no corresponen a isometries de la tessel·lació, si el graf és isomorf a $C_{4k}(2k+1, 1, -1)$. Donat que l'estudi del grup d'automorfismes ha sorgit a partir de preguntar-se quan un anell cordal és arc-transitiu, val la pena remarcar que, els anells cordals arc-transitius són precisament els òptims per als quals s'ha donat l'encaminament i l'estudi de la vulnerabilitat en el capítol 3.

L'apartat 2.6 conté un mètode per decidir si dos anells cordals són isomorfs, on es dona explícitament l'isomorfisme. Pels resultats dels dos apartats previs, es té que dos anells cordals són isomorfs si i només si els seus grafs de triple llaç associats són Ádám-isomorfs, és a dir, $C_{2n}(a, b, c)$ i $C_{2n}(a', b', c')$ són isomorfs si i només si hi ha un element inversible de \mathbb{Z}_n , λ , tal que $a' - b' = \lambda(a - b)$ i $b' - c' = \lambda(b - c)$. L'isomorfisme depèn dels valors de $\text{mcd}(a - b, 2n)$, $\text{mcd}(b - c, 2n)$ i $\text{mcd}(c - a, 2n)$.

La secció 2.7 és la darrera d'aquest capítol. L'objectiu d'aquest apartat és el càlcul de l'aresta-bisecció dels anells cordals. Per a $C_{2n}(-1, d, 1)$ s'han pogut trobar cotes superiors ajustades, que s'han utilitzat en el capítol 4 per a l'anàlisi de l'algorisme de *gossiping*.

En el teorema 2.27, q i r denoten el quocient i la resta de la divisió entera de $2n$ per $d - 1$, és a dir, $2n = q(d - 1) + r$ amb $0 \leq r \leq d - 3$. Anàlogament, q' i r' denoten el quocient i la resta de la divisió entera de $2n$ per $d + 1$, és a dir, $2n = q'(d + 1) + r'$ amb $0 \leq r' \leq d - 1$. Amb aquesta notació, la aresta-bisecció de $C_{2n}(-1, d, 1)$, k , depèn dels valors de q , r , q' i r' : si $q' = q$, aleshores $k \leq \min\{2q' + r' + 1, d + 2 - r'\} < d + 2$; si $q' = q - 1$ i $2q < d + 1$ aleshores, quan $r' = 0$, $k \leq 2q' + 1 < d + 2$, i quan $r' \neq 0$, $k \leq 2q + 1 < d + 2$; en els altres casos, $k \leq d + 2$ és la cota superior més petita que es pot trobar.

La demostració és constructiva, i els conjunts bisectors que es donen es basen en la representació dels cicles del graf mitjançant la tessel·lació. Comparant el temps de l'algorisme de *gossiping* en el mode de comunicació de camins aresta-disjunts que es proposa en el capítol 4, amb les cotes inferiors conegudes per a la complexitat del problema del *gossiping* en aquest mode de comunicació, es pot veure que aquestes cotes són ajustades.

5.1.2 Comunicacions

Els capítols 3 i 4 contenen els resultats sobre problemes de comunicacions en anells cordals.

El capítol 3, que a donat lloc a l'article [18], és la definició d'un encaminament consistent de camins més curts per als anells cordals de diàmetre senar donat i ordre màxim, i l'estudi de la seva vulnerabilitat. En el capítol 4, que constitueix l'article [16], es proposa un algorisme de *gossiping* en el mode de camins aresta-disjunts i es veu que aquest algorisme és òptim en gairebé tots els casos. Aquest és l'únic capítol en què no s'han utilitzat les tessellacions del pla. Com ja s'ha comentat més amunt, en l'anàlisi de l'algorisme es fan servir les cotes de l'aresta-bisecció calculades en el capítol 2.

En el capítol 3 es considera, donat D senar, l'anell cordal de diàmetre D i ordre $m_D = \frac{3D^2 + 1}{2}$. Sobre la rajola associada al graf, es defineix un encaminament de camins més curts, $\rho(x, y)$, que preserva les rotacions d'angle $\frac{2\pi}{3}$ per a parelles de vèrtexs a distància com a molt $D-1$. La rajola centrada en un vèrtex es divideix en tres zones, de manera que, establint les comunicacions a través de ρ , un node intermig d'un camí podria calcular a través de quina aresta ha d'enviar el missatge en funció de la situació del node al qual el missatge va destinat.

En l'apartat 3.2 es veu que en cas de fallada d'un o dos vèrtexs es poden redefinir les comunicacions punt a punt mitjançant el mateix encaminament en només dues etapes. Això sempre es pot fer si es poden determinar vèrtexs centrals. La proposició 3.7, de demostració senzilla, diu que per a tot vèrtex z hi ha un vèrtex v tal que v és $(\rho, \{z\})$ -central. En la proposició 3.8 es consideren conjunts de dos vèrtexs. L'enunciat diu que per a qualsevol parella de vèrtexs x, y hi ha un vèrtex v tal que v és $(\rho, \{x, y\})$ -central.

Per a la demostració d'aquestes proposicions es fa servir el lema 3.6. En aquest lema es dona una expressió dels vèrtexs de la frontera de la rajola tenint en compte que, com que l'encaminament no és bidireccional, els arbres d'encaminament des d'un vèrtex i cap a un vèrtex són diferents. Així, es defineixen el conjunt $L_{inf} = \{-i2A + (l-i)2B, 0 < i < l\} \cup \{i2B - (l-i)2C, 0 \leq i \leq l\} \cup \{i2A + (l-i)2C, 0 < i < l\}$ i el conjunt $L_{sup} = \{i2A - (l-i)2B + a, 0 < i \leq l\} \cup \{-i2B + (l-i)2C + a, 0 \leq i \leq l\} \cup \{-i2A + (l-i)2C + a, 0 < i \leq l\}$. Aleshores, $L = L_{inf} \cup L_{sup}$, que és el conjunt de vèrtexs de grau 1 en els arbres d'encaminament $\rho(0, z)$ i $\rho(z, 0)$, és la frontera de la rajola centrada al vèrtex 0. Per tant, el vèrtex 0 és (ρ, L) -central, ja que per a qualsevol vèrtex $z \notin L$ els camins $\rho(0, z)$ i $\rho(z, 0)$ no contenen cap element de L .

Si F és un conjunt de vèrtexs, per veure que un vèrtex v és (ρ, F) -central n'hi ha prou amb veure que, centrant la rajola al vèrtex v els vèrtexs del conjunt F queden situats a la frontera de la rajola. És a dir, n'hi ha prou amb veure que $\alpha_{v,0}(F) \subset L$.

S'ha vist que l'encaminament aquí definit té bones propietats, ja que aprofita l'aresta-transitivitat dels grafs i, com es comenta en la secció següent, s'està utilitzant per a l'estudi de l'índex òptic dels anells cordals.

Finalment, en el capítol 4 es proposa un algorisme de *gossiping* en el mode de comunicació *EDP*. En aquest model es sap que si G és un graf hamiltonià d'ordre n aleshores el temps de *broadcasting* de G és $b_{2EDP}(G) = \lceil \log_2 n \rceil$; i també que si $G_{n,k}$ és un graf d'ordre n i aresta-bisecció k , aleshores el temps de *gossiping* satisfà les desigualtats $2\lceil \log_2 n \rceil - \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 6 \leq g_{2EDP}(G_{n,k}) \leq 2\lceil \log_2 n \rceil$.

L'algorisme parteix d'una descomposició del graf en subgrafs hamiltonians de mida r , en els quals es pot fer *broadcasting* i acumulació en temps $\lceil \log_2 r \rceil$. En cadascun d'aquests subgrafs es tria un vèrtex representant. Si el nombre de components és s , es tracta de trobar camins aresta-disjunts entre els representants que puguin simular les etapes d'un algorisme de *gossiping* en el graf complet K_s en temps $\lceil \log_2 s \rceil$. Això dona un algorisme en tres fases: acumulació en els representants, *gossiping* entre els representants i *broadcasting* des dels representants, en temps $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$.

Considerant els anells cordals de la forma $C_{2n}(-1, d, 1)$, la corda d dona de manera natural una descomposició del graf en cicles de longitud $d + 1$, C_0, \dots, C_{a-1} , amb $C_i = \{i(d + 1), i(d + 1) + 1, \dots, i(d + 1) + d\}$. Si $2n = a(d + 1) + b$ amb b parell entre 0 i $d - 1$, aleshores $C_{2n}(-1, d, 1)$ es pot descomposar en els a cicles C_0, \dots, C_{a-1} , i un camí amb b vèrtexs, amb un conjunt addicional d'arestes que enllacen aquests subgrafs.

Com es veu en la secció 4.2.3, el cas $2n = (d + 1)^2$ és el més senzill. Per a la resta de casos, es fa una generalització, que permet donar en la secció 4.3, a partir dels apartats 4.2.4 i 4.2.6 i de les cotes per a l'aresta-bisecció donades en la secció 2.7, el resultat següent sobre l'optimalitat de l'algorisme.

Si $a \geq d + 1$, aleshores: $g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 d + O(1)$; el valor de l'aresta-bisecció és $k = d + 1$ si a és parell i $k = d + 2$ si a és senar; i l'algorisme donat és òptim.

Mentre que, si $a < d + 1$, aleshores: $g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1)) \leq 2\lceil \log_2 2n \rceil - \log_2 a + O(1)$, però el valor de l'aresta bisecció depèn de q i r , del teorema 2.27. Si $a = q - 1$, resulta $k \leq 2a + 1$ o bé $k \leq 2q$ i l'algorisme és també òptim, però si $a = q$, que és equivalent a dir $2a + b \leq d - 1$, la cota superior per $g_{2EDP}(C_{2n}(-1, d, 1))$ no és prou bona, i és probable que l'algorisme es pugui millorar.

5.2 Problemes oberts

5.2.1 Anells cordals

Quant a les propietats de la família de grafs estudiats, és clar que alguns problemes no han quedat completament resolts. S'han fet servir resultats

d'altres autors quant al nombre màxim de vèrtexs que té un anell cordal quan es fixa el diàmetre [89]. Malgrat que aquesta cota sembla ser correcta, i en el cas de diàmetre senar se'n té una demostració senzilla, no s'ha trobat la demostració per al cas de diàmetre parell. Tampoc es té un resultat complet quant al càlcul del diàmetre d'un anell cordal qualsevol. Només s'han trobat en la literatura alguns resultats per a valors concrets de l'ordre i de les cordes [91].

El càlcul exacte de l'aresta-bisecció és també un problema encara obert. Com ja s'ha observat en la introducció de la secció 2.7 dedicada al càlcul de cotes superiors per a aquest paràmetre, la dificultat d'aquest problema és provar que una cota superior és prou ajustada [79]. En aquest sentit s'està treballant, fent servir les tessellacions per veure que la configuració en el pla dels conjunts bisectors construïts és la millor possible. Cal observar però que el treball que s'està realitzant paral·lelament sobre encaminaments òptics podria donar algun resultat ja que hi ha una relació entre l'aresta-bisecció d'un graf i el seu índex de transmissió. Aquests problemes es comenten més avall.

Un altre problema, aquest amb un plantejament més general, és el de la relació d'aquests grafs amb els grafs circulants. Per exemple, es poden definir els anells cordals a partir dels grafs circulants. I s'ha vist en la secció 2.2 que dos circulants no isomorfs poden donar el mateix anell cordal. Així, una pregunta a fer-se és, quina és la relació que satisfan dos grafs circulants per tal que els anells cordals que defineixen siguin isomorfs.

5.2.2 Generalitzacions

La primera generalització d'una família de grafs que apareix de manera natural, i més encara quan es tracta de grafs de grau tan petit, és la definició de grafs amb la mateixa estructura però amb grau més gran. Així apareixen els grafs de Cayley sobre el grup dièdric amb grau qualsevol. Quin interès podria tenir l'estudi d'aquests grafs, més enllà del pur exemple de graf de Cayley sobre un grup no commutatiu amb bones propietats? Els vèrtexs d'un anell cordal de grau 3 es poden representar per ternes (x, y, z) , tals que $x + y + z = 0$ si el vèrtex és parell i $x + y + z = 1$ si el vèrtex és senar. Generalitzar aquesta construcció a un nombre més gran de coordenades equival a demanar grau més gran. A partir d'aquesta manera de veure els grafs de Cayley sobre el grup dièdric, sorgeixen algunes qüestions de caire combinatori, i també de caire geomètric, amb la pregunta potser més difícil de si es pot trobar un equivalent de la representació amb tessellacions quan el grau és més gran. La comparació, quant a bones propietats, amb altres famílies de grafs i, en particular amb els grafs circulants, passa per l'estudi dels paràmetres clàssics com el diàmetre, la connectivitat i la bisecció.

Una altra generalització basada en la tessellació del pla mitjançant triangles, es troba definint els grafs mitjançant isomorfismes locals. Això vol

dir partir del graf infinit donat per la tessel·lació amb triangles on cada triangle representa un vèrtex diferent, i donar les regles que permeten identificar vèrtexs. Amb aquesta definició, cada graf de la família té una tessel·lació associada. I la majoria d'aquests grafs són anells cordals. Què hi ha doncs de nou? S'obtenen, a més dels anells cordals, els grafs connexos corresponents a equacions del reticle que no satisfan la condició de connexió i que, per tant, no són anells cordals. Com que les simetries s'assemblen molt a les simetries dels anells cordals, un problema a resoldre és si són grafs de Cayley i sobre quin grup.

5.2.3 Comunicacions

En la part de propietats dinàmiques hi ha alguns problemes oberts, en alguns dels quals s'està treballant.

Quant a comunicacions globals, el problema del *broadcasting* en mode telèfon ha estat resolt de manera òptima, per al problema del *broadcasting* en el model *EDP* hi ha algorismes òptims vàlids per a qualsevol graf, i el problema del *gossiping* es resol en aquesta tesi. Per tant, un problema que es podria resoldre és el del *gossiping* en el mode telèfon, que resta obert, així com treballar en altres models. Igualment es podria treballar amb altres models, com el model *all-port*.

Sobre encaminaments, hi ha dos problemes oberts importants en relació a aquesta tesi. El primer és la definició d'encaminaments per a anells cordals no òptims i l'estudi de la vulnerabilitat. El segon és l'estudi d'encaminaments òptics.

En les dues seccions següents es comenta en quin punt es troba el treball realitzat sobre cadascun d'aquests dos temes.

5.2.4 Vulnerabilitat d'encaminaments en el cas no òptim

Per a $D = 2l + 1$ senar, l'anell cordal de diàmetre D i ordre màxim és $C_{m_D}(-1, 3D, 1)$, amb ordre $m_D = \frac{3D^2 + 1}{2}$. El seu graf de triple llaç associat és $T_{N_l}(3l + 1, 1, -(3l + 2))$, on l'ordre és $N_l = \frac{m_D}{2} = 3l^2 + 3l + 1$. Aquest és, justament, el graf de triple llaç de diàmetre l i ordre màxim. En aquest graf de triple llaç, un vèrtex a distància d del vèrtex 0 es troba en un únic hexàgon a distància d de l'origen, prenent com origen un dels hexàgons que contenen el vèrtex 0, com es mostra en la secció 1.4.1. Prenent tots els hexàgons a distància com a molt l de l'origen, no hi haurà vèrtexs repetits.

Amb l'anell cordal, no passa el mateix. Tal com s'ha vist en la secció 2.3.3, en la rajola associada al graf hi ha tots els triangles a distància com a molt $D - 1$ de l'origen, i dels triangles a distància D només en conté uns quants. Això fa que en els $3D$ triangles a distància D de l'origen hi ha els $l + 1$ vèrtexs a distància D del vèrtex 0, però repetits. En aquest cas, però, s'ha

pogut fixar un encaminament i trobar per a aquest encaminament vèrtexs centrals quan fallen un o dos vèrtexs. Però l'encaminament trobat no és bidireccional, i s'ha hagut de tenir en compte els camins d'anada des d'un vèrtex, i els camins de tornada cap a un vèrtex. Aquests són els resultats que es presenten en el capítol 3.

Quan es fixa un diàmetre parell, $D = 2l$, es sap que l'ordre màxim d'un anell cordal amb aquest diàmetre és més petit que $\frac{3D^2}{2}$, que és la cota que s'obté fent els càlculs de la mateixa manera que en el cas de diàmetre senar. També es coneix que hi ha anells cordals d'ordre $m_D = \frac{3D^2}{2} - D$ i diàmetre D . L'ordre màxim és m_D si tots els anells cordals d'ordres entre m_D i $\frac{3D^2}{2}$ tenen diàmetre més gran que D . De fet, això es compleix en tots els exemples que s'han pogut estudiar.

En tot cas, per a un anell cordal de diàmetre parell i ordre màxim no passa el que passava per als de diàmetre senar. Ara, el graf de triple llaç associat no té ordre màxim respecte del diàmetre. Això fa que hi hagi més vèrtexs del graf repetits en la rajola que conté tots els triangles a distància D de l'origen. Per tant, la rajola es pot definir de més d'una manera. Per a definir un encaminament, doncs, el primer que s'haurà de fer és fixar la rajola, és a dir, decidir quins dels triangles que contenen un mateix vèrtex es consideraran. El pas següent és definir els camins, segons la posició dels vèrtexs en la rajola. Treballant d'aquesta manera, es redueixen les possibilitats per a la definició de l'encaminament, però n'hi ha moltes més que en el cas de diàmetre senar. I en tots els casos que s'han estudiat, no ha sigut possible trobar vèrtexs centrals.

L'estudi del cas general passa per la resolució del problema en el cas particular, però no òptim, dels anells cordals de diàmetre parell i ordre màxim.

5.2.5 Encaminaments òptics

Donat un encaminament en una xarxa, una de les mesures de la seva eficiència és el seu comportament quan hi ha diverses comunicacions simultànies. Si dos o més camins volen passar per un mateix node o utilitzar un mateix enllaç, en el model estàndard de comunicació no poden fer-ho simultàniament. Per a l'estudi d'aquests problemes, s'introdueix el concepte de càrrega d'un vèrtex o d'un arc, i l'índex de transmissió d'un graf [35]. Alguns resultats sobre aquests paràmetres es troben en [63, 64].

Degut als avenços tecnològics, les xarxes òptiques amb tecnologia WDM estan actualment en el punt de mira de molts treballs [19, 34]. En aquesta mena de xarxes, un enllaç òptic pot ser utilitzat per comunicacions simultànies, gràcies a la utilització de diferents longituds d'ona. Llavors, un problema important és determinar quantes longituds d'ona són necessàries

com a mínim en la xarxa per tal d'evitar conflictes. Aquest nombre s'anomena índex òptic del graf. És clar que si en un graf es té definit un encaminament, el mínim nombre de longituds d'ona necessàries per a aquest encaminament és com a mínim la càrrega màxima de les arestes. L'índex òptic és per tant més gran o igual que l'índex de transmissió per arestes.

Determinar l'índex òptic d'un graf és un problema complicat, fins i tot en grafs amb bones propietats de simetria [97], i alguns resultats sobre encaminaments òptics són conjectures que estan per provar [19]. En aquest sentit, s'està treballant en l'estudi de l'índex de transmissió i l'índex òptic dels anells cordals, i es tenen alguns resultats quan els grafs són arc-transitius que, com s'ha vist en la secció 2.5, són els anells cordals òptims.

Bibliografia

- [1] A. Ádám. Research problem 2-10. *J. Combinatorial Theory*, 2:393, 1967.
- [2] F. Aguiló and M. A. Fiol. An efficient algorithm to find optimal double loop networks. *Discrete Math.*, 138:15–29, 1995.
- [3] F. Aguiló, M. A. Fiol, and C. Garcia. Triple loop networks with small transmission delay. *Discrete Math.*, 167/168:3–16, 1997.
- [4] W. Aiello, S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, and A. L. Rosenberg. Augmented ring networks. June 1997.
- [5] S. Akers and B. Krishnamurthy. On group graphs and their fault-tolerance. *IEEE Trans. on Comp.*, 36:885–888, 1987.
- [6] S. Akers and B. Krishnamurthy. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. on Comp.*, 38:555–566, 1989.
- [7] B. Alspach. *Isomorphism and Cayley graphs on abelian groups*, pages 1–22. In Hahn and Sabidussi [58], 1997.
- [8] B. Alspach and T. D. Parsons. Isomorphism of circulant graphs and digraphs. *Discrete Mathematics*, 25:97–108, 1979.
- [9] B. Alspach and C. Q. Zhang. Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups. *Ars Combinatoria*, 28:101–108, 1989.
- [10] F. Annexstein and M. Baumslag. On the diameter and bisector size of Cayley graphs. *Math. Systems Theory*, 26:271–291, 1993.
- [11] F. S. Annexstein, M. Baumslag, and A. L. Rosenberg. Group action graphs and parallel architectures. *SIAM Journal of Computing*, 19(3):544–569, 1990.
- [12] B.W. Arden and H. Lee. Analysis of chordal ring network. *IEEE Trans. Comput.*, C-30(4):291–295, April 1981.

-
- [13] T. Armitage. *Broadcasting on Torus-like Chordal Rings*. PhD thesis, School of Computer Science, Simon Fraser University, 1996.
- [14] H. Attiya, J. van Leeuwen, N. Santoro, and S. Zaks. Efficient elections in chordal ring networks. *Algorithmica*, 4:437–446, 1989.
- [15] L. Barrière. Triangulations and chordal rings. In Cyril Gavoille, Jean-Claude Bermond and André Raspaud, editors, *Sirocco'99, The 6th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, volume 5 of *Proceedings in Informatics*, pages 17–31. Carleton Scientific, 1999.
- [16] L. Barrière, J. Cohen, and M. Mitjana. Gossiping in chordal rings under the line model. In J. Hromkovic and W. Unger, editors, *Proceedings of the MFCS'98 Workshop on Communication*, pages 37–47, 1998.
- [17] L. Barrière and J. Fàbrega. Edge-bisection width of chordal ring. Technical report, 1999.
- [18] L. Barrière, J. Fàbrega, E. Simó, and Zaragoza. Fault-tolerant routings in chordal ring networks. Submitted to *Networks*, 1997. Accepted in May, 1999.
- [19] B. Beauquier, J.-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. Technical Report 3165, INRIA, 1997.
- [20] J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu. Distributed loop computer networks: A survey. *J. Parallel Distributed Comput.*, 24:2–10, 1995.
- [21] J.-C. Bermond, C. Delorme, and J. Quisquater. Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory. *J. Parallel Distributed Computing*, 3:433–449, 1986.
- [22] J.-C. Bermond, C. Delorme, and J.-J. Quisquater. Table of large (Δ, d) -graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 37/38:575–577, 1992.
- [23] J.-C. Bermond and D. Tzvieli. Minimal double-loop networks: dense optimal families. *Networks*, 21:1–9, 1991.
- [24] S. R. Blackburn. Node bisectors of Cayley graphs. *Mathematical Systems Theory*, 29:589–598, 1996.
- [25] F. Boesch and R. Tindell. Circulants and their connectivities. *Journal of Graph Theory*, 8:487–499, 1984.

-
- [26] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North Holland, 1976.
- [27] J.M. Brunat and M. Maureso. Endo-circulant digraphs of degree two: which are abelian Cayley digraph. Technical report, Departament de Matematica Aplicada II, UPC, 1998.
- [28] J.M. Brunat, M. Maureso, and M. Mora. Characterization of c -circulant digraphs of degree two which are circulant. *Discrete Mathematics*, 165/166:125–137, 1997.
- [29] J.M. Brunat, M. Maureso, and M. Mora. Endo-circulant digraphs: connection and generalized cycles. Technical report, Departament de Matematica Aplicada II, UPC, 1997.
- [30] A. Cayley. On the theory of groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1(9):126–133, 1878.
- [31] A. Cayley. The theory of groups: Graphical representations. *Amer. J. Math.*, 1:174–176, 1878.
- [32] G. Chartrand and L. Lesniak. *Graphs and Digraphs*. Wadsworth and Brooks/Cole, 1986.
- [33] S. Chen and Jia X.-D. Undirected loop networks. *Networks*, 23:257–260, 1993.
- [34] N.K. Cheung and al. Special issue on dense WDM networks. *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, 8, 1990.
- [35] F. R. K. Chung, E. G. Coffman, M. I. Reiman, and B. E. Simon. On the capacity and vertex-forwarding index of communication networks. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 33:224–232, 1987.
- [36] F. Comellas and P. Hell. Broadcasting in chordal rings. Manuscript, 1997.
- [37] H. S. M. Coxeter. *Zero-Symmetric Graphs*. Academic Press, 1976.
- [38] H.S.M. Coxeter. Self dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:413–455, 1950.
- [39] Curran and Gallian. Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs – A survey. *Discrete Mathematics*, 156, 1996.
- [40] P. J. Davis. *Circulant Matrices*. John Wiley and Sons, New York, 1979.

- [41] C. Delorme, O. Favaron, and M. Maheo. Isomorphism of Cayley multi-graphs of degree 4 on finite abelian groups. Technical report, Laboratoire de Recherche en Informatique, U. de Paris-Sud, 1986.
- [42] R.F. DeMara and D.I. Moldovan. Performance indices for parallel marker-propagation. In *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*, pages 658–659, 1991.
- [43] M. J. Dinneen and P. R. Hafner. New results for degree/diameter problem. *Networks*, 24:359–367, 1994.
- [44] D. Dolev, J. Halpern, B. Simons, and R. Strong. A new look at fault tolerant network routing. In *Proc. ACM 16th STOC*, pages 526–535, 1984.
- [45] J.J. Dongarra and D.W. Walker. Software libraries for linear algebra computation on high performances computers. *SIAM review*, 37:151–180, 1995.
- [46] D.-Z. Du, D.F. Hsu, Q. Li, and J. Xu. A combinatorial problem related to distributed loop networks. *Networks*, 20:173–180, 1990.
- [47] B. Elspas and J. Turner. Graphs with circulant adjacency matrices. *J. Combinatorial Theory*, 9:297–307, 1970.
- [48] P. Erdős and D.F. Hsu. Distributed loop networks with minimum transmission delay. *Theoret. Comput. Sci.*, 100:223–241, 1992.
- [49] M. Escudero, J. Fàbrega, and P. Morillo. Fault-tolerant routings in double-loop networks. *Ars Combin.*, 25 A:187–198, 1988.
- [50] P. Esqué, F. Aguiló, and M. A. Fiol. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. *Discrete Math.*, 114:147–157, 1993.
- [51] J. Fàbrega and M. Zaragoza. Fault-tolerant routings in double fixed-step networks. *Discrete Applied Mathematics*, 78:61–74, 1997.
- [52] A.M. Farley. Minimum-time line broadcast networks. *Networks*, pages 59–70, 1980.
- [53] M. A. Fiol. On congruence in \mathbb{Z}^n , finite abelian groups and the chinese remainder theorem. *Discrete Math.*, 67:101–105, 1987.
- [54] M. A. Fiol. On congruence in \mathbb{Z}^n and the dimension of a multidimensional circulant. *Discrete Math.*, 141:123–134, 1995.
- [55] M. A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre, and M. Valero. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Trans. Comput.*, C-36:702–713, 1987.

- [56] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Appl. Math.*, pages 79–133, 1994.
- [57] J. A. Gallian and D. Witte. A survey: Hamiltonian cycles in Cayley graphs. *Discrete Mathematics*, 51:293–304, 1984.
- [58] G. Hahn and G. Sabidussi, editors. *Graph Symmetry. Algebraic Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [59] M. Hall. *Theory of Groups*. Chelsea, New York, 1976.
- [60] Y. O. Hamidoune and O. Serra. On small cuts separating an abelian Cayley graph into two equal parts. *Mathematical Systems Theory*, 29:407–409, 1996.
- [61] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, and A. Liestman. A survey of gossiping and broadcasting in communication networks. *Networks*, 18:319–349, 1986.
- [62] M.-C. Heydemann. *Cayley graphs and interconnection networks*, pages 167–224. In Hahn and Sabidussi [58], 1997.
- [63] M.-C. Heydemann, J. C. Meyer, J. Opatrny, and D. Sotteau. Forwarding indices of consistent routings and their complexity. *Networks*, 24:75–82, 1994.
- [64] M.-C. Heydemann, J. C. Meyer, and D. Sotteau. On forwarding indices of networks. *Discrete Appl. Math.*, 23:103–123, 1989.
- [65] W. D. Hillis. *The connection machine*. ACM Distinguished dissertation. MIT Cambridge Press, 1987.
- [66] J. Hromkovic, R. Klasing, B. Monien, and R. Peine. Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping). In D.Z. Du and F. Hsu, editors, *Combinatorial Network Theory*, pages 125–212, 1995.
- [67] J. Hromković, R. Klasing, E. A. Stöhr, and H. Wagener. Gossiping in vertex-disjoint paths mode in d -dimensional grids and planar graphs. *Information and Computation*, 123(1):17–28, 1995.
- [68] J. Hromkovic, R. Klasing, W. Unger, and H. Wagener. Optimal algorithms for broadcast and gossip in edge-disjoint path modes. In *(SWAT'94), Lecture Notes in Computer Science 824*, 1994.
- [69] D.F. Hsu and J. Shapiro. Bounds for the minimal number of transmission delays in double loop networks. *J. Combinatorics, Information and System Sciences*, 16:55–62, 1991.

- [70] D.F. Hsu and J. Shapiro. A census of tight one-optimal double loop networks. *Graph Theory, Combinatorics Algorithms and Applications ed. by J. Alavi et al.*, pages 254–265, (SIAM) 1991.
- [71] F. Hsu. Introduction to special issue of networks on interconnection networks. *Networks*, 23:211–213, 1993.
- [72] X. D. Hu and F. K. Hwang. Reliabilities of chordal rings. *Networks*, 22:487–501, 1992.
- [73] F.K. Hwang and P.E. Wright. Survival reliability of some double-loop networks and chordal rings. *IEEE Trans. Comput.*, 44(12):1468–1471, 1995.
- [74] Y. Iwasaki, Y. Kajiwara, K. Obokata, and Y. Igarashi. Independent spanning trees of chordal rings. *Lecture Notes in Computer Science*, 1276:431–440, 1997.
- [75] R. Klasing. *On the Complexity of Broadcast and Gossip in Different Communication Modes*. PhD thesis, Universitat-Gesamthochschule Paderborn, 1995.
- [76] R. Klasing. The relationship between the gossip complexity in vertex-disjoint paths mode and the vertex-bisection width. *Discrete Applied Mathematics*, 83:229–246, 1998.
- [77] D. Krizanc and F. Luccio. Boolean routing on chordal rings. In *Proceedings of the colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, 1995.
- [78] C. Laforest. Gossip in trees under line-communication mode. In *Euro-Par'96 Parallel Processing*, volume 1123 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 371–373. Springer, August 1997.
- [79] F. T. Leighton. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees and Hypercubes*. Morgan Kaufmann Publishers, 1992.
- [80] F.T. Leighton. Circulants and the characterization of vertex-transitive graphs. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 88(6):395–402, 1983.
- [81] C. H. Li, C. E. Praeger, and M. Y. Xu. On finite groups with the Cayley isomorphism property. *Journal of Graph Theory*, 1998.
- [82] A. L. Liestman, J. Opatrny, and M. Zaragozá. Network properties of double and triple fixed step graphs. *Inter. J. Foundations Comput. Science*, 9(1):57–76, 1998.

- [83] Y. Manabe, M. Imase, and T. Soneoka. Reliable and efficient fixed routings on digraphs. *The Transactions of IECE*, E 71(12):1212–1220, December 1988.
- [84] B. Mans, F. Pappalardi, and I. Shparlinski. On the Ádám conjecture on circulant graphs. In W-L. Hsu and M-Y. Kao, editors, *Proceedings of the Fourth Annual International Computing and Combinatorics Conference, Cocoon'98*, volume 1449 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 251–260. Springer-Verlag, 1998.
- [85] B. Mans and N. Santoro. Optimal fault-tolerant leader election in chordal rings. In *Proceedings of the 24th Annual International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, pages 392–403, Los Alamitos, CA, USA, June 1994. IEEE Computer Society Press.
- [86] Bernard Mans. Optimal distributed algorithms in unlabeled tori and chordal rings. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 46(1):80–90, 1 October 1997.
- [87] B. Monien and R. Diekmann. A local graph partitioning heuristic meeting bisection bounds. *8th SIAM Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing*, 1997.
- [88] Mercè Mora. *Digrafs c-circulants com a models de xarxes d'interconnexió*. PhD thesis, Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC, 1988.
- [89] P. Morillo. *Grafos y digrafos asociados con teselaciones como modelos para redes de interconexión*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1987.
- [90] P. Morillo, F. Comellas, and M. A. Fiol. Metric problems in triple loop graphs and digraphs associated to an hexagonal tessellation of the plane. Technical Report 05-0286, Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC, June 1986.
- [91] P. Morillo, F. Comellas, and M. A. Fiol. The optimization of chordal ring networks. In W. Xiuying Q. Yasheng, editor, *Communication Technology*, pages 295–299. World Scientific Singapore, 1987. Proc. Int. Conf. on Communication Technology ICCF87, China 1987.
- [92] P. Morillo, M.A. Fiol, and J. Fàbrega. The diameter of directed graphs associated with plane tessellations. *Ars Combin.*, 20A:17–27, 1985.
- [93] P. Morillo, M.A. Fiol, and J.L.A. Yebra. A new family of graphs associated with plane tessellations. *Ars Combin.*, 20A:163–169, 1985.

- [94] K. Mukhopadhyaya and B.P. Sinha. Fault-tolerant routing in distributed loop networks. *IEEE Trans. on Comput.*, 44:1452–1456, 1995.
- [95] M.E. Muzychuk and G. Tinhofer. Recognizing circulant graphs of prime order in polynomial time. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 5(1):R25, 1998.
- [96] L. Narayanan and J. Opatrny. Compact routing on chordal rings of degree four. In Danny Krizanc and Peter Widmayer, editors, *Sirocco'97, The 4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, volume 1 of *Proceedings in Informatics*, pages 125–137. Carleton Scientific, 1997.
- [97] L. Narayanan, J. Opatrny, and D. Sotteau. All-to-all optical routing in optimal chordal rings of degree four. In *Proceedings of the 10th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'99)*, pages 695–703, 1999.
- [98] A. Nayak, V. Accia, and P. Gissi. A note on isomorphic chordal rings. *Information Processing Letters*, 55(6):339–341, 1995.
- [99] P. Pacheco. *Parallel programming with MPI*. Morgan Kaufmann, 1995.
- [100] Carles Padró. *Vulnerabilitat en famílies òptimes de dígrafs per al disseny de xarxes d'interconnexió*. PhD thesis, Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC, 1993.
- [101] A. Pothen, H. D. Simon, and K. P. Liu. Partitioning sparse matrices with eigenvalues of graphs. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 11(3):430–452, 1990.
- [102] Robinson. *A Course in Theory of Groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Math*. Springer, 1996.
- [103] A. L. Rosenberg. Theoretical research on networks: Models and methodology. In Danny Krizanc and Peter Widmayer, editors, *Sirocco'97, The 4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, volume 1 of *Proceedings in Informatics*, pages 283–293. Carleton Scientific, 1997.
- [104] J. de Rumeur. *Communication dans les reseaux de processeurs*. Masson, 1984.
- [105] G. Sabidussi. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:800–804, 1958.
- [106] R. Scapellato. *Vertex-transitive graphs and digraphs*, pages 319–378. In Hahn and Sabidussi [58], 1997.

-
- [107] S. T. Schibell and R. M. Stafford. Processor interconnection networks from Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 40:333–357, 1992.
- [108] K.W. Tang and Bruce R. Arden. Class-congruence property and two-phase routing of Borel-Cayley graphs. *IEEE Trans. Comput.*, 44(12):1462–1468, 1995.
- [109] S. Toida. A note on Ádám’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, B 23:247–250, 1977.
- [110] J. Turner. Point-symmetric graphs with a prime number of points. *Journal of Combinatorial Theory*, 3:136–145, 1967.
- [111] T. Tzvieli. Minimal diameter double-loop networks. i. Large infinite optimal families. *Networks*, 21:387–415, 1991.
- [112] C.K. Wong and D. Coppersmith. A combinatorial problem related to multimode memory organizations. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 21:392–402, 1974.
- [113] H. Xu, P. McKinley, and L. Ni. Efficient implementation of barrier synchronization in wormhole-routed hypercube multicomputers. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 16:172–184, 1992.
- [114] J.L.A. Yebra, M.A. Fiol, P. Morillo, and I. Alegre. The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations. *Ars Combin.*, 20B:159–171, 1985.
- [115] Marisa Zaragozá. *Redes de interconexión: contribución al estudio de su vulnerabilidad*. PhD thesis, Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC, 1994.
- [116] G. W. Zimmerman and A.-H. Esfahanian. Chordal rings as fault-tolerant loops. *Discrete Applied Mathematics*, 37/38:563–573, 1992.