

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de
Doctorado de Matematica Aplicada*

**ESTUDIO SOBRE ALGUNAS
NUEVAS CLASES DE
CONECTIVIDAD CONDICIONAL
EN GRAFOS DIRIGIDOS**

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Quiero agradecer sinceramente a los profesores J. Fábrega y M.A. Fiol el que hayan querido dirigir esta tesis. Estoy verdaderamente orgullosa de que ellos hayan sido mis directores y de que hayan orientado mi trabajo. En todo momento me han apoyado, incluso en aquellos tiempos en los que yo distaba mucho de escribir una tesis. Creo que he tenido una gran suerte al poder disfrutar de su generosidad, de su alegría y sobre todo de largas, estupendas y fructíferas conversaciones. Sin sus ideas y sus correcciones estoy segura de que esta tesis no hubiera sido escrita.

Durante el periodo de realización de la tesis he tenido el placer de trabajar de manera muy estrecha con mi colega Angeles Carmona. Por la excelente colaboración durante estos últimos años y la profunda amistad que he trabado con ella quisiera expresarle mi agradecimiento más sincero.

Guardo una profunda deuda de gratitud con mi marido, sin cuyo entendimiento y paciencia me hubiera sido mucho más difícil esta tarea.

Quiero dar también las gracias a Paz Morillo, por creer en mí, en mi capacidad para el trabajo, pero sobre todo por presentarme a Fiol y a Fábrega.

Doy las gracias también a Francisco Aguiló por su ayuda en el manejo del ordenador, así como a todos los compañeros del grupo de grafos con quien he compartido seminarios y viajes.

No puedo olvidar a mi compañero Agustín Medina a quien nunca le ha importado perder su tiempo en instruirme sobre las virtudes del Tex. Por último quiero agradecer el cariño de todos mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada III y en particular el apoyo de su director, el profesor Juanjo Egozcue.

Contenido

Lista de figuras	iii
Indice de símbolos	v
Introducción	ix
1 Definiciones y notaciones	1
1.1 Definiciones generales	1
1.2 Grafos y digrafos de Moore	3
1.2.1 Grafos y digrafos bipartitos de Moore	5
1.3 La técnica del digrafo línea	6
1.4 El parámetro ℓ y digrafos s -geodéticos	8
1.5 Conectividad	10
2 Distancia conectividad en digrafos y grafos	15
2.1 Introducción	15
2.2 Cotas sobre la distancia conectividad	20
2.3 Construcciones	22
2.4 Digrafos maximalmente distancia conectados	27
2.5 Digrafos bipartitos con distancia conectividad óptima	30
3 Conectividad de digrafos y grafos bipartitos densos	33
3.1 Introducción	33
3.2 Digrafos bipartitos densos	36
3.3 Grafos bipartitos densos	45

4 Superconectividad	51
4.1 Introducción	51
4.2 Conjuntos desconectores en digrafos superconectados	54
4.3 Superconectividad de digrafos densos	60
4.4 Digrafos con superconectividad óptima	64
4.5 Grafos superconectados	69
5 Superconectividad de digrafos bipartitos	75
5.1 Introducción	75
5.2 Superconectividad de digrafos bipartitos con diámetro pequeño . .	77
5.3 Superconectividad de digrafos bipartitos densos	81
5.4 Conjuntos desconectores en digrafos bipartitos superconectados	88
5.5 Superconectividad de grafos bipartitos densos	92
6 Extraconectividad	97
6.1 Introducción	97
6.2 Grafos con extraconectividad óptima	99
6.3 Rama-extraconectividad	119
Conclusiones	121
Algunos problemas	126
Referencias	129
Indice alfabético	135

Lista de Figuras

1.1	Grafo de Petersen	4
1.2	Grafo de Hoffmann-Singleton	4
1.3	Digrafos de Kautz	8
2.1	Digrafo de Geller y Harary con $\kappa = 2$, $\lambda = 3$, $\delta = 4$	19
2.2	Proceso de construcción de un digrafo con $\kappa(t) = c_t$, $2 \leq t \leq D$	24
2.3	Digrafo con $\kappa(t) = a$, $\lambda(t) = b$, $\delta(t) = c$	25
2.4	Grafo con $\kappa(2) = \dots = \kappa(\rho) = c_\rho$, $\kappa(\rho + 1) = c_{\rho+1}$, \dots , $\kappa(D) = c_D$	26
3.1	Digrafo $BD(2, 5)$	34
3.2	Dos representaciones de un digrafo bipartito 3-regular de 14 vértices con diámetro 3 y conectividad 2	40
3.3	Dos representaciones de dos digrafos bipartitos 2-regulares de 8 y 14 vértices con conectividad igual a 1	41
3.4	Dos representaciones de un digrafo bipartito 3-regular de 16 vértices con diámetro $D = 4$ y arco-conectividad $\lambda = 2$	42
4.1	Digrafos de Soneoka con $D = 2$ y 3 cuando $d = 3$	53
4.2	Demostración del Lema 4.2.2	57
5.1	Un digrafo $\vec{K}_{3,3} \uplus \vec{K}_{3,3}$	76
5.2	Un digrafo $2K_{2,3}^*$	77
5.3	Subdigrafo de un digrafo bipartito con $\ell = 1$	80
5.4	Un digrafo bipartito 3-regular con $\lambda = 3$ y no super- λ , con 12 vértices y diámetro 3	85
6.1	Extraconectividad del grafo de Petersen	100

6.2	Necesidad de alejamiento máximo	101
6.3	Arboles T' y $T = T' \oplus T^*(s)$	104
6.4	Casos (i), (ii)	105
6.5	Caso (iii)	106
6.6	Caso (iii)	107
6.7	Casos (iv) y (v)	108
6.8	Caso (vi)	109
6.9	Arboles tipo (a) y (b)	110
6.10	Arboles tipo (c)	112
6.11	Caso (ii) para $\eta = 11$	114
6.12	Caso (iii) para $\eta = 11$	115
6.13	$\mu = 3$ y árbol tipo (b) para $\eta = 13$	115

Indice de símbolos

Símbolo	Significado	Pág.
$A = A(G)$	conjunto de arcos	1
$B(d, D)$	digrafo de de Bruijn	8
$BD(d, n)$	digrafo bipartito BD	33
$D = D(G)$	diámetro	2
D_T	diámetro del árbol T	103
d	grado de un digrafo regular	2
$d(x, y)$	distancia desde un vértice a otro	2
$d(x, F)$	distancia desde un vértice a un conjunto	2
E	subconjunto de arcos o ramas	11
F	subconjunto de vértices	11
G	digrafo o grafo	1
G^*	digrafo simétrico	3
C_n	ciclo dirigido	3
$e^-(x)$	excentricidad negativa	16
$e^+(x)$	excentricidad positiva	16
$f^-(x)$	vértice de F tal que $d(x, F) = d(x, f^-(x))$	55
f_h	vértice de F tal que $d(h, F) = d(h, f_h)$	102
$g = g(G)$	girth	2
K_n	grafo completo	3
$K_{p,q}$	grafo bipartito completo	3
$K(d, D)$	digrafo de Kautz	7

Símbolo	Significado	Pág.
LG	digrafo línea	6
ℓ	parámetro ℓ	9
ℓ_π	parámetro ℓ_π	9
m	tamaño	20
$N_H(v)$	adyacentes de v que no son de $V(H)$	98
$N(H)$	vecindad de H	98
$N_T^*(v)$	vecindad extendida de $v \in V(T)$	102
$N^*(T)$	vecindad extendida de un árbol	102
n	orden	1
P	camino	102
$p_T(v, v')$	camino $v \leftrightarrow v'$ en T	103
r^+	radio positivo	16
r^-	radio negativo	16
r	radio	16
S_z	árbol estrella	104
s	s -geodeticidad	10
T	árbol	98
T^*	árbol extendido	102
$T^*(v)$	camino extendido	102
$V = V(G)$	conjunto de vértices	1
V^-	(α^-) fragmento	11
V^+	(α^+) fragmento	11
Z_n	enteros módulo n	3
$\Gamma(x)$	adyacentes de x	2
$\Gamma^+(x)$	vecinos de salida	2
$\Gamma^-(x)$	vecinos de entrada	2
Δ^+	grado máximo de salida	2
Δ^-	grado máximo de entrada	2
Δ	grado máximo	2
$\delta^+(x)$	grado de salida de un vértice	2
$\delta^-(x)$	grado de entrada de un vértice	2
δ^+	grado mínimo de salida	2
δ^-	grado mínimo de entrada	2

Símbolo	Significado	Pág.
δ	grado mínimo	2
$\delta(t)$	t -grado	18
η	mínimo cardinal de una componente	97
κ	vértice-conectividad	11
$\kappa(x, y)$	conectividad local	16
$\kappa(t)$	t -distancia conectividad	16
κ_1	superconectividad	58
κ_η	η -extraconectividad	98
λ_η	rama η -extraconectividad	119
λ	arco-conectividad	11
$\lambda(x, y)$	arco-conectividad local	17
$\lambda(t)$	arco t -distancia conectividad	17
λ_1	super-arco-conectividad	58
μ	profundidad de un fragmento	12
$\mu(C)$	profundidad de una componente	100
ν	profundidad de un α - fragmento	12
$\tau(\eta)$	$(\eta + 1)\delta - 2\eta$	99
$V \times V$	producto cartesiano	1
$G - E$	supresión de arcos	11
$G - F$	supresión de vértices	11
$T \oplus P$	árbol unión de árbol y camino	102
K_n^*	digrafo simétrico completo	3
$K_{p,q}^*$	digrafo simétrico bipartito completo	3
$L^k G$	digrafo línea k -iterado	7
$V' \subset V$	subconjunto	10
$V \setminus F$	diferencia de conjuntos	11
$p(\Delta, D)$	$1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^D$	34
$x \rightarrow y$	camino desde x hasta y	2
$ x \rightarrow y $	longitud del camino	2
$ V $	cardinal de un conjunto	3
$\lfloor \cdot \rfloor$	parte entera inferior	10
$\lceil \cdot \rceil$	parte entera superior	10
$\langle U \rangle$	subdigrafo inducido por U	11