UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de Doctorado de Matematica Aplicada

ESTUDIO SOBRE ALGUNAS NUEVAS CLASES DE CONECTIVIDAD CONDICIONAL EN GRAFOS DIRIGIDOS

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 2

Distancia conectividad en digrafos y grafos

2.1 Introducción

La distancia conectividad es una nueva clase de conectividad que podría ser considerada como un tipo de conectividad condicional. La condición se impone a la distancia entre vértices dados de G. Precisando más, requerimos que los conjuntos desconectadores separen vértices que estaban suficientemente alejados en el digrafo original. Esta clase de conectividad fue introducida por Fiol y Fàbrega en [31], y puede jugar un papel destacado a la hora de medir la fiabilidad de la red como una función de la distancia entre los nodos que queremos comunicar.

Otra posible aproximación sería estudiar los conjuntos mínimos de vértices cuya eliminación convierte el digrafo en uno nuevo que continua siendo conexo, pero al que imponemos que su diámetro no exceda de una cota dada. De hecho, éste es un ejemplo particular del llamado *problema de vulnerabilidad del diámetro*, el cual está estrechamente relacionado con el estudio de la tolerancia a fallos de una red, es decir, con su capacidad para seguir funcionando aunque fallen unos cuantos nodos, y ha merecido atención especial en la literatura. Ver por ejemplo la referencia estándar de Bollobás [16].

El resto de esta sección está dedicada a recordar ciertos conceptos básicos, así como a revisar algunos resultados en los que se ha inspirado el trabajo contenido en este capítulo. También introduciremos los conceptos nuevos que ha sido necesario definir. En la Sección 2 construimos un digrafo que tiene como distancia-conectividades una sucesión dada de números. En la última sección se hace especial hincapié en derivar condiciones suficientes para obtener distancia-conectividad óptima en digrafos s-geodéticos, y para ello usaremos el parámetro ℓ, ya comentado en el Capítulo 1. Los resultados del presente capítulo se encuentran en [5, 3, 4].

Sea $G = (V, A)$ un digrafo conexo. La *excentricidad positiva* de un vértice $x \in V$ se define como $e^+(x) = \max_{y \in V}\{d(x, y)\}$. La *excentricidad negativa* es $e^-(x) = \max_{y \in V}\{d(y, x)\}$. El *radio positivo* de G es $r^+ = \min_{x \in V}\{e^+(x)\}$ y de un modo similar se define el *radio negativo*, r^-. El *radio* r de G es el mínimo de los dos. Nótese que el diámetro es $D = \max_{x \in V}\{e^+(x)\} = \max_{x \in V}\{e^-(x)\}$.

Dados $x, y \in V$ tales que $(x, y) \notin A$, un conjunto $S = S(x, y) \subset V \backslash \{x, y\}$ se dice que es un $x \rightarrow y$ *conjunto separador* si no hay ningún $x \rightarrow y$ camino en $G - S$. La *conectividad local desde x hasta y* es

$$\kappa(x, y; G) = \kappa(x, y) = \min\{|S| : S \text{ es un } x \rightarrow y \text{ conjunto separador}\}.$$

Asímismo, el teorema de Menger afirma que $\kappa(x, y)$ es el número máximo de caminos internamente disjuntos que hay desde x hasta y.

A continuación enunciamos los nuevos conceptos de conectividad que serán estudiados en este capítulo. Como ya se ha dicho anteriormente, estos conceptos fueron introducidos por primera vez en [31].

Definición 2.1.1 *Dado t, $1 \leq t \leq D$, la t-distancia conectividad de un digrafo G, denotada por $\kappa(t; G)$ o simplemente $\kappa(t)$, se define como*

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \min\{\kappa(x, y) : x, y \in V,\ d(x, y) \geq t\}, \ \text{si } t \geq 2, \\ \kappa(1) &= \kappa(G) = \kappa, \end{aligned}$$

siendo κ la conectividad estándar de G.

De la propia definición se deduce fácilmente que

$$\kappa = \kappa(1) = \kappa(2) \leq \kappa(3) \leq \cdots \leq \kappa(D), \tag{2.1}$$

ya que los conjuntos sobre los que se toma el mínimo forman una cadena decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos. Obérvese que si para algún t, $1 \leq t \leq D$, se cumple que $\kappa(t) < \kappa(t + 1)$, entonces al suprimir $\kappa(t)$ vértices del digrafo desconectamos vértices que se encuentran a una distancia $\leq t$, pero no vértices a mayor distancia. Así pues, el estudio de las secuencias de t-distancias conectividades puede ser una información útil sobre la conexión de los vértices atendiendo a la distancia entre ellos. Nuestro objetivo será obtener condiciones suficientes que aseguren que un digrafo tenga t-distancias conectividades óptimas, ya que en este caso la fiabilidad de la red en lo que respecta a nodos alejados será alta.

Para arcos o ramas definimos los siguientes conceptos. Dados $x, y \in V$, un conjunto $S' = S'(x,y) \subset A$ se dice que es un $x \to y$ *conjunto de arcos o ramas separador* si no existe ningún $x \to y$ camino en $G - S'$. La *arco-conectividad local desde x hasta y* es

$$\lambda(x,y) = \min\{|S'| : S' \text{ es un } x \to y \text{ conjunto de arcos o ramas separador}\}.$$

También el teorema de Menger asegura que la arco-conectividad local es el número máximo de $x \to y$ caminos internamente arco-disjuntos.

Definición 2.1.2 *Dado t, $1 \le t \le D$, la arco t-distancia conectividad de un digrafo G, denotada por $\lambda(t; G)$ o simplemente $\lambda(t)$, se define como*

$$\lambda(t) = \min\{\lambda(x,y) : x, y \in V,\ d(x,y) \ge t\}.$$

En este caso tenemos

$$\lambda = \lambda(1) \le \lambda(2) \le \cdots \le \lambda(D), \tag{2.2}$$

donde $\lambda = \lambda(G)$ denota la *arco-conectividad* estándar de G.

Una de las primeras relaciones que se verifica de una manera natural entre la t-distancia conectividad y la arco t-distancia conectividad, es la siguiente. Para cada t, $1 \le t \le D$, $\kappa(t) \le \lambda(t)$. Cuando $t = 1$ obtenemos la conocida desigualdad $\kappa \le \lambda$, que como sabemos se completa con el grado mínimo, es decir, $\kappa \le \lambda \le \delta$. Al abordar el problema para el caso que nos ocupa de t-distancia conectividad observamos que, en general, no es cierto que $\lambda(t) \le \delta$. Sin embargo por definición $\lambda(t)$ verifica claramente $\lambda(t) \le \delta^+(x)$ para cualquier $x \in V$ tal que $e^+(x) \ge t$, y $\lambda(t) \le \delta^-(x)$ para cualquier $x \in V$ con $e^-(x) \ge t$. Entonces, para cada t, $1 \le t \le D$, es útil considerar un nuevo parámetro, que llamaremos *t-grado* y que definimos del siguiente modo.

Definición 2.1.3 *Para cada t, $1 \leq t \leq D$, llamamos t-grado $\delta(t)$, al mínimo entre $\delta^+(t)$ y $\delta^-(t)$, donde*

$$\delta^+(t) = \min_{x \in V}\{\delta^+(x),\ e^+(x) \geq t\}$$

$$\delta^-(t) = \min_{x \in V}\{\delta^-(x),\ e^-(x) \geq t\}.$$

Por tanto, los t-grados forman una sucesión creciente, cuyos primeros términos son iguales hasta el radio de G.

$$\delta = \delta(1) = \cdots = \delta(r) \leq \delta(r+1) \leq \cdots \leq \delta(D). \tag{2.3}$$

Ahora, para cualquier t, $1 \leq t \leq D$, se cumple que

$$\kappa(t) \leq \lambda(t) \leq \delta(t). \tag{2.4}$$

Diremos que un digrafo G es *maximalmente t-distancia conexo* si $\kappa(t) = \lambda(t) = \delta(t)$, y *maximalmente arco t-distancia conexo* si $\lambda(t) = \delta(t)$. Nótese que si G es maximalmente conexo, entonces G es maximalmente t-distancia conexo para cualquier $1 \leq t \leq r$.

Veamos ahora como se comporta la t-distancia conectividad en el digrafo línea LG de un digrafo G. Como ya hemos visto en la sección dedicada a la técnica del digrafo línea del Capítulo 1, los vértices de LG corresponden a arcos de G y por tanto, cada camino en LG de longitud $t+1$, con $1 \leq t+1 \leq D+1$, corresponde a un camino en G de longitud t. Por tanto se verifica que

$$\kappa(t+1; LG) = \lambda(t; G) \ \text{ si } \ 1 \leq t \leq D-1. \tag{2.5}$$

Además, como el grado de salida de cada vértice en el digrafo línea coincide con el grado de salida del vértice final del arco en G que lo define y el grado de entrada coincide con el grado de entrada del vértice inicial del arco que lo define, se cumple que,

$$\delta(t+1; LG) = \delta(t; G) \ \text{ si } \ 1 \leq t \leq D.$$

También hemos de recordar que si G es diferente de un ciclo

$$D(L^k G) = D(G) + k. \tag{2.6}$$

$$\ell(L^k G) = \ell(G) + k. \tag{2.7}$$

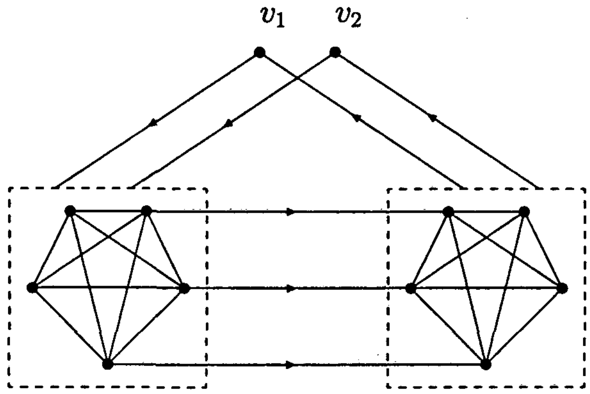

Figura 2.1: Digrafo de Geller y Harary con $\kappa = 2$, $\lambda = 3$, $\delta = 4$

En el caso de grafos se aplican notaciones y resultados similares.

El trabajo desarrollado en la primera sección se inspiró en un estudio realizado por Geller y Harary en [36]. Como ya se ha dicho anteriormente, la conectividad κ, arco-conectividad λ, y grado mínimo δ están relacionados por las desigualdades, $\kappa \leq \lambda \leq \delta$. Pues bien, Geller y Harary mostraron su independencia, es decir dados tres números cualesquiera, $a \leq b \leq c$, construyeron un digrafo G en el cual $\kappa = a$, $\lambda = b$, $\delta = c$. El digrafo que propusieron es el siguiente:

Se consideran dos copias de un digrafo completo de $c + 1$ vértices, $K^{*(i)}_{c+1}$, $i = 1, 2$, y a vértices adicionales v_i. Se añaden todos los arcos desde $K^{*(1)}_{c+1}$ a los vértices v_i y desde éstos hasta los vértices de $K^{*(2)}_{c+1}$. A continuación b arcos desde $K^{*(1)}_{c+1}$ hasta $K^{*(2)}_{c+1}$, distribuidos tan uniformemente como sea posible. El digrafo obtenido G tiene $\kappa = a$, $\lambda = b$ y $\delta = c$ como se prueba en [36]. (Ver Figura 2.1)

El trabajo contenido en las últimas secciones es una continuación del llevado a cabo en [31]. El teorema principal de este artículo afirma que todo digrafo G con grado mínimo $\delta > 1$, parámetro ℓ y diámetro D satisface que

si $D \leq 2\ell - 1$, o, $\kappa < \kappa(2\ell)$, entonces $\kappa = \delta$;

si $D \leq 2\ell$, o, $\lambda < \lambda(2\ell + 1)$, entonces $\lambda = \delta$.

Examinaremos estos resultados en digrafos s-geodéticos, utilizando el t-grado, así como en digrafos s-geodéticos bipartitos. Recuérdese que $s \leq \min\{\ell, g - 1\}$, donde g designa el girth de G. Además si G es s-geodético, entonces el digrafo línea, LG, es s'-geodético con $s' = \min\{s - 1, g - 1\}$.

2.2 Cotas sobre la distancia conectividad

Iniciamos esta sección con un lema que estudia la relación entre el parámetro ℓ y el radio r del digrafo G.

Lema 2.2.1 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, $\ell = \ell(G)$ y radio r. Entonces, $\ell \leq r$.*

Demostración: Sea $G = (V, A)$ un digrafo y supongamos $r < \ell$. Entonces, o bien $r^+ < \ell$, o, $r^- < \ell$. Sin pérdida de generalidad supongamos $r^+ < \ell$. Sea $x \in V$, tal que $e^+(x) = r^+$. Consideremos una partición del conjunto de vértices V en subconjuntos $V_i = \{y \in V : d(x, y) = i\}$, es decir, según su distancia desde x por lo que $0 \leq i \leq r^+$. Probaremos que si $z \in V_{r^+}$ entonces $\delta^-(z) = 1$. En caso contrario, si $\delta^-(z) > 1$ existen $w_1, w_2 \in \Gamma^-(z)$ tales que $w_1 \neq w_2$. Supongamos que w_1 está en el único camino corto desde x a z (Recuérdese que hemos supuesto $r^+ < \ell$). Veamos que $w_2 \notin V_i$, $0 \leq i \leq r^+$. Como $d(x, z) = r$, $w_2 \in V_{r^+-1}$, o, $w_2 \in V_{r^+}$, pero en cualquiera de los dos casos habría dos caminos de longitud r^+ o $r^+ + 1$, contradiciendo la definición del parámetro ℓ. $\square$

En el siguiente lema se encuentran cotas superiores para la t-distancia conectividad en función del orden, el tamaño (o número de arcos) y el diámetro de un digrafo, que más adelante serán de utilidad en nuestro estudio. Una cota superior para la conectividad estándar, $\kappa = \kappa(1)$, fue dada por Watkins en [58].

Lema 2.2.2 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D, orden n, tamaño m y t-distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor$, $1 \leq t \leq D$;

(b) $\lambda(t) \leq \lfloor \frac{m-2}{D} \rfloor$, $1 \leq t \leq D - 1$; $\quad \lambda(D) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor$.

Demostración: (a) Sea $G = (V, A)$ un digrafo y sean $x, y \in V$ dos vértices tales que $d(x, y) \geq t$, y $\kappa(x, y)$ la conectividad local desde x hasta y. Como $\kappa(x, y)$ es el máximo número de $x \to y$ caminos internamente disjuntos, el orden del digrafo debe satisfacer $\kappa(x, y)(d(x, y) - 1) + 2 \leq n$. Entonces, $\kappa(t)(t - 1) + 2 \leq n$, y de aquí que $\kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-2}{t-1} \rfloor$. Cuando $t = D$ tenemos $\kappa(D) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor$, y el resultado se sigue de (2.1).

(b) En virtud de (2.5), del hecho de que $D(LG) = D(G)+1$ y de lo visto en el caso (a), como el orden de LG es m, deducimos que $\lambda(t) = \kappa(t+1; LG) \leq \lfloor \frac{m-2}{D} \rfloor$, $1 \leq t \leq D-1$. Por otra parte, sean $x, y \in V$ tales que $d(x,y) = D$ y $\lambda(x,y)$ la arco-conectividad local desde x hasta y. Como $\lambda(x,y)$ es el máximo número de $x \to y$ caminos internamente arco-disjuntos, el tamaño del digrafo debe satisfacer: $\lambda(x,y)d(x,y) \leq m$. Entonces, $\lambda(D)D \leq m$, de donde se deduce que $\lambda(D) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor$. □

Nótese que un razonamiento directo para el caso de la arco t-distancia conectividad nos conduciría a que $\lambda(t) \leq \lfloor \frac{m}{D} \rfloor$, que es peor que la obtenida razonando a través del digrafo línea.

Obsérvese que si $\ell = D$, se tiene que $\kappa = \lambda = \delta$ debido al Teorema 1.5.1. Luego si $\delta > 1$, entonces $\kappa(t) > 1$ para todo t. En este caso un razonamiento similar al del lema anterior nos permite mejorar ligeramente este resultado.

Lema 2.2.3 *Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D, orden n, tamaño m, parámetro $\ell = D$ y t-distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) \leq \lfloor \frac{n-1}{D} \rfloor$, $1 \leq t \leq D$;

(b) $\lambda(t) \leq \lfloor \frac{m-1}{D+1} \rfloor$, $1 \leq t \leq D-1$; $\quad \lambda(D) \leq \lfloor \frac{m+1}{D+1} \rfloor$.

Demostración: Basta tener en cuenta que al ser $\ell = D$, entre dos vértices a distancia D sólo existe un camino de longitud mínima D, los caminos restantes deben ser de longitud $\geq D+1$. Por tanto, en este caso el orden debe verificar $(D-1)+2+(k(x,y)-1)D \leq n$, para cualquier par de vértices $x, y \in V$ tales que $d(x,y) \geq D$. □

Observación: Si $\ell = D$, por el Lema 2.2.1 se satisface que $\ell = D = r$, por tanto podemos afirmar que:

$$\kappa(1) = \kappa(2) = \ldots = \kappa(D) = \delta \leq \left\lfloor \frac{n-1}{D} \right\rfloor;$$
$$\lambda(1) = \lambda(2) = \ldots = \lambda(D) = \delta \leq \left\lfloor \frac{m-1}{D+1} \right\rfloor.$$

Como ejemplo de los resultados anteriores podemos mencionar los digrafos de Kautz $K(d,D) = L^{D-1}K^*_{d+1}$. Estos digrafos satisfacen $\ell = D = r$, y por tanto en virtud del Teorema 1.5.1 son maximalmente conectados. Ahora podemos añadir además que son maximalmente t-distancia conectados para cualquier t.

2.3 Construcciones

En esta sección construimos un digrafo G que tiene como t-distancias conectividades una secuencia dada de $D-1$ enteros positivos $c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_D$. Asímismo, demostramos, que para un t dado, los parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y $\delta(t)$ son independientes, es decir, dados tres enteros positivos, $a \leq b \leq c$, existe un digrafo G que tiene a estos números como t-distancia conectividad, arco t-distancia conectividad y t-grado, respectivamente. Comenzamos estableciendo el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *Dados $D-1$ (>2) enteros positivos $c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_D$, existe un digrafo G cuyas t-distancia conectividades son $\kappa(2) = c_2, \kappa(3) = c_3, \cdots, \kappa(D) = c_D$.*

Demostración: Sabemos que si n es el orden del digrafo buscado y D el diámetro, se debe verificar que $\kappa(D) \leq \lfloor \frac{n-2}{D-1} \rfloor$. Entonces, el orden del digrafo $G=(V,A)$ debe satisfacer $n = |V| \geq c_D(D-1)+2$. Por tanto, construiremos un digrafo G con orden $n = c_D(D-1)+2$, y denotaremos sus vértices como v_0, v_{ij}, $1 \leq i \leq D-1$, $1 \leq j \leq c_D$ y v_D. Consideremos una partición de V en los siguientes subconjuntos $B_0 = \{v_0\}$, $B_i = \{v_{i1}, \cdots, v_{ic_D}\}$, $1 \leq i \leq D-1$ y $B_D = \{v_D\}$. Las adyacencias del digrafo son las siguientes:

- $\Gamma^+(v_0) = B_1$;
- Sea $w \in B_i$, $1 \leq i \leq D-2$. Sus vecinos de salida son $\Gamma^+(w) = B_{i+1}$, $w \neq v_{i1}$, y $\Gamma^+(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}, \cdots, v_{i+1,c_{D-i}}\} \subset B_{i+1}$;
- $\Gamma^+(w) = V - \{w\}$, para cualquier $w \in B_{D-1}$;
- $\Gamma^+(v_D) = B_{D-1}$.

Procedemos a probar que el digrafo descrito satisface las condiciones requeridas. En primer lugar, calculamos el diámetro de G. Cualquier $w \in B_{D-1}$, posee $e^+(w) = 1$, ya que estos vértices son adyacentes a cualquier vértice del digrafo G excepto a sí mismos, y $e^+(v_D) = 2$, ya que $\Gamma^+(v_D) = B_{D-1}$. Cualquier $w \in B_i$, $1 \leq i \leq D-2$, cumple que $d(w, v_{D-1,1}) = D-1-i$, y de aquí que, $d(w,y) \leq D-i$, para cualquier $y \in V$. Por tanto, $e^+(w) = D-i \leq D-1$.

Finalmente, $e^+(v_0) = D$, porque $d(v_0, v_D) = D$ y si $v \in V$, $v \neq v_D$, $d(v_0, v) < D$. Así pues, $D(G) = \max_{v \in V}\{e^+(v)\} = e^+(v_0) = D$.

Como sólo los vértices v_0 y v_D están a distancia D y hay exactamente c_D, $v_0 \to v_D$ caminos internamente disjuntos en G, $\kappa(D) = \kappa(v_0, v_D) = c_D$. Para estudiar las otras t-distancia conectividades calculamos las conectividades locales $\kappa(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in V$. Primero, nótese que $\Gamma^+(v_D) \subset \Gamma^-(y)$, para cualquier $y \in V$, y de aquí que $\kappa(v_D, y) = \delta^+(v_D) = c_D$. Si $x = v_{i1}$, $1 \leq i \leq D-2$, recordemos que $\Gamma^+(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}, \ldots, v_{i+1,c_{D-i}}\} \subset B_{i+1}$. (A modo de ilustración considerese por ejemplo $x = v_{D-2,1}$, ver Fig 2.2). Distinguimos tres casos diferentes en función del vértice $y \in V$, teniendo presente que para cualquier $y \in B_{j+1}$, $1 \leq j \leq D-1$, o bien $B_j \subset \Gamma^-(y)$ ó $B_j \setminus \{v_{j1}\} \subset \Gamma^-(y)$.

(i) Cuando $y = v_{j1}$, $1 \leq j \leq D-1$, tenemos que $B_{j-1} \subset \Gamma^-(v_{j1})$, y por tanto podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \to v_{j1}$ caminos internanente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1r} \cdots v_{j-1r}v_{j1}$ si $i+1 < j \leq D-1$, ó $v_{i1}v_{i+1r} \cdots v_{D-1r}v_{j1}$ si $1 \leq j \leq i+1$, $j \neq i$, donde $1 \leq r \leq c_{D-i}$. De aquí que $\kappa(v_{i1}, v_{j1}) = \delta^+(v_{i1}) = c_{D-i}$.

(ii) Cuando $y \in B_j$, $y \neq v_{j1}$, $1 \leq j \leq D-2$, en el peor de los casos tenemos que $v_{j-1,1} \notin \Gamma^-(y)$. En este caso podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \to y$ caminos internamente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1r} \cdots v_{j-1,r}y$ si $i+1 < j \leq D-1$, ó, $v_{i1}v_{i+1r} \cdots v_{D-1,r}y$ si $1 \leq j \leq i+1$, donde en ambos casos $2 \leq r \leq c_{D-i}$. Además, tenemos el siguiente camino desde v_{i1} hasta y, el cual es internamente disjunto con los anteriores, a saber, $v_{i1}v_{i+1,1} \cdots v_{D-1,1}y$. De aquí que $\kappa(v_{i1}, y) = \delta^+(v_{i1}) = c_{D-i}$, para cualquier $y \in B_j$, $y \neq v_{j1}$, $1 \leq j \leq D-2$.

(iii) Cuando $y = v_0$ ó $y = v_D$, tenemos que $\Gamma^-(y) = B_{D-1}$ y por tanto podemos encontrar los siguientes $v_{i1} \to y$ caminos internamente disjuntos: $v_{i1}v_{i+1,r} \cdots v_{D-1,r}y$, para $1 \leq r \leq c_{D-i}$, y de aquí que $\kappa(v_{i1}, y) = c_{D-i}$.

Finalmente, si $x = v_0$ ó $x \in B_i$, $x \neq v_{i1}$, $1 \leq i \leq D-2$, entonces $\Gamma^+(x) = B_{i+1}$ y es fácil verificar que $\kappa(x, y) = c_D$ para cualquier $y \in V$.

De los anteriores resultados obtenemos que:

$\kappa(i) = \min\{\kappa(x, y) : d(x, y) \geq i\} = c_i$, donde $2 \leq i \leq D$. □

Observación: El digrafo construido tiene radio 1 y para cualquier t, $\kappa(t) = \lambda(t) = \delta(t)$. Nótese que el digrafo tendrá radio r con este pequeño cambio en la

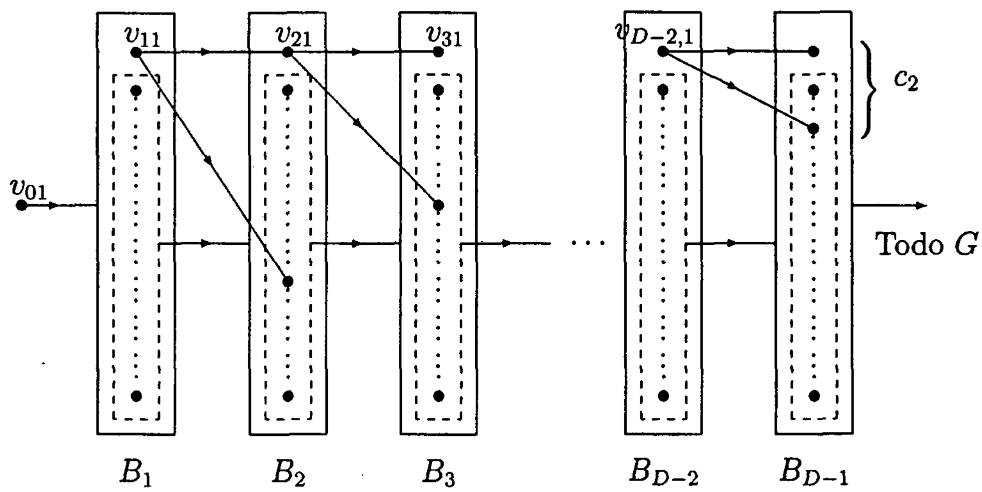

Figura 2.2: Proceso de construcción de un digrafo con $\kappa(t) = c_t$, $2 \leq t \leq D$

construcción anterior: Para cada $x \in B_{D-1}$, definimos $\Gamma^+(x) = V \setminus (B_{D-1} \cup \ldots \cup B_{D-r+1})$. De este modo obtenemos $\kappa(2) = \ldots = \kappa(r)$, y por tanto, podríamos definir para cada $x \in B_i$, $\Gamma^+(x) = B_{i+1}$, $D - r + 1 \leq i \leq D - 1$ y distinguir los primeros vértices hasta B_{D-r}.

Procedemos ahora a demostrar que los tres parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$, y $\delta(t)$ de un digrafo son independientes.

Teorema 2.3.2 *Dados tres números enteros positivos satisfaciendo $a \leq b \leq c$, y, $3 \leq t$, existe un digrafo G con diámetro $D \geq t$, en el cual $\kappa(t) = a$, $\lambda(t) = b$, y $\delta(t) = c$.*

Demostración: Construimos un digrafo $G = (V, A)$ con orden $n = |V| = s(D-1) + 2$, donde s es un número mayor que c, y denotamos sus vértices como en la demostración del Teorema 2.3.1, es decir, $V = B_0 \cup \ldots \cup B_D$, siendo $B_0 = \{v_0\}$, $B_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{is}\}$, $1 \leq i \leq D-1$, $B_D = \{v_D\}$. Describimos ahora las adyacencias:

- $\Gamma^+(v) = V \backslash \{v\}$, para cualquier $v \in B_{D-1}$.
- $\Gamma^+(v_D) = B_{D-1}$.

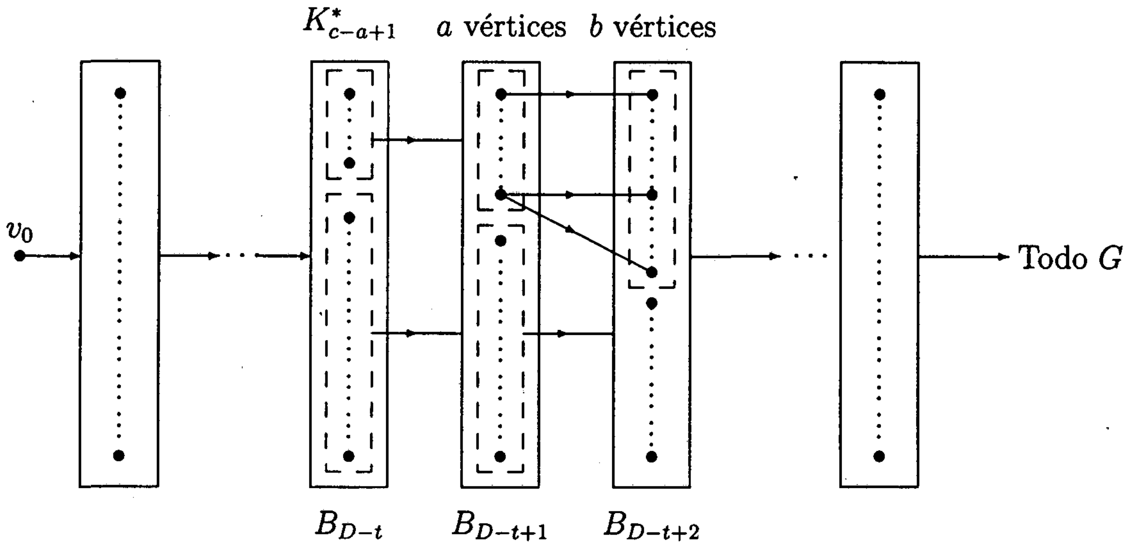

Figura 2.3: Digrafo con $\kappa(t) = a$, $\lambda(t) = b$, $\delta(t) = c$

- Para cualquier $v \in B_i$, $0 \leq i \leq D-t-1$, ó, $D-t+2 \leq i \leq D-2$, $\Gamma^+(v) = B_{i+1}$.
- Consideramos un digrafo completo simétrico K^*_{c-a+1} con los primeros $c-a+1$ vértices de B_{D-t} y además todos estos vértices tienen también los siguientes vecinos de salida: $\{v_{D-t+1,1}, \ldots, v_{D-t+1,a}\} \subset \Gamma^+(v_{D-t,i})$, $1 \leq i \leq c-a+1$. Además, para cualquier $v \in B_{D-t}$ diferente de tales vértices, $\Gamma^+(v) = B_{D-t+1}$.
- Para cualquier $v \in B_{D-t+1}$, $v \notin \Gamma^+(v_{D-t,1})$, $\Gamma^+(v) = B_{D-t+2}$;
- Para cualquier $v \in \Gamma^+(v_{D-t,1}) \cap B_{D-t+1}$, $\Gamma^+(v_{D-t+1,i}) = v_{D-t+2,i}$, $1 \leq i \leq a-1$, y, $\Gamma^+(v_{D-t+1,a}) = \{v_{D-t+2,a}, \ldots, v_{D-t+2,b}\}$.

Un esquema del digrafo obtenido se muestra en la Figura 2.3. Probemos que satisface el teorema. Nótese que cualquier vértice $x \in V$, $x \neq v_{D-t,i}$, $1 \leq i \leq c-a+1$, tal que $e^+(x) \geq t$, verifica $\delta^+(x) = s > c$ y $\delta^-(x) = 2s > c$, y también es fácil probar que $\kappa(x,y) = \lambda(x,y) = s$ para cualquier $y \in V$. De aquí que, $\delta(t) = \delta^+(v_{D-t,i}) = c$, $1 \leq i \leq c-a+1$, ya que $e^+(v_{D-t,i}) = t$. Además, para cualquier $y \in V$, tenemos $\kappa(v_{D-t,i}, y) = a$, ya que existen exactamente a caminos internamente disjuntos desde $v_{D-t,i}$ hasta y. Por ejemplo, para $i = 1$ tales caminos son $v_{D-t,1}v_{D-t+1,i}\cdots v_{D-1,i}y$, $1 \leq i \leq a$. Por tanto, $\kappa(t) =$

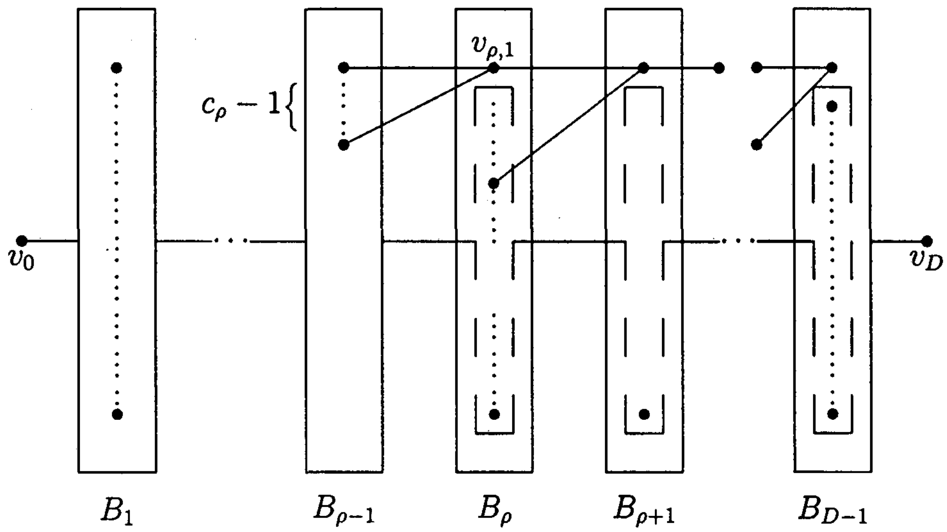

Figura 2.4: Grafo con $\kappa(2) = \cdots = \kappa(\rho) = c_\rho$, $\kappa(\rho+1) = c_{\rho+1}$, $\cdots$, $\kappa(D) = c_D$

a. Por otro lado, tenemos los siguientes b caminos internamente arco disjuntos desde $v_{D-t,1}$ hasta cualquier $y \in V$: $v_{D-t,1}v_{D-t+1,i}v_{D-t+2,i}\cdots v_{D-1,i}y$, $1 \leq i \leq a$; $v_{D-t,1}v_{D-t,j}v_{D-t+1,a}v_{D-t+2,j}\cdots v_{D-1,j}y$, $a+1 \leq j \leq b$. De donde se deduce, $\lambda(t) = b$. □

Observamos que esta construcción generaliza la que fue dada por Geller y Harary en [36], como ya hemos comentado en la sección anterior.

En el caso de grafos obtenemos un resultado similar al Teorema 2.3.1. Ahora, recordemos que el radio y el diámetro de un grafo G están siempre relacionados por las siguientes desigualdades: $r \leq D \leq 2r$. Además, si $\kappa = \delta$ se satisface que $\kappa = \kappa(1) = \kappa(2) = \cdots = \kappa(\rho) = \cdots = \kappa(r)$, donde $\rho = \lfloor \frac{D}{2} \rfloor$.

Teorema 2.3.3 *Dados $D - \rho + 1$ números enteros positivos $c_\rho \leq c_{\rho+1} \leq \cdots \leq c_D$, con $c_\rho \geq 2$ y $t > 4$ existe un grafo G con diámetro $D \geq t$ y t-distancia conectividades son $\kappa(2) = \cdots = \kappa(\rho) = c_\rho$, $\kappa(\rho+1) = c_{\rho+1}$, $\cdots$, $\kappa(D) = c_D$.*

Demostración: Construimos un grafo $G = (V, A)$ con orden $n = |V| = c_D(D-1)+2$, y denotamos los vértices como en la demostración del Teorema 2.3.1. Las adyacencias son las siguientes (ver Fig. 2.4):

- $\Gamma(v_0) = B_1$, y $\Gamma(v_D) = B_{D-1}$.
- Todas las ramas entre los conjuntos partitos: B_i y B_{i+1}, $1 \leq i \leq \rho - 2$; $B_{\rho-1}$ y $(B_\rho \setminus \{v_{\rho 1}\})$ y $(B_j \setminus \{v_{j1}\})$ y $(B_{j+1} \setminus \{v_{j+1,1}\})$, $\rho \leq j \leq D-1$.
- $\Gamma(v_{i1}) = \{v_{i+1,1}\} \cup \{$los $(c_i - 1)$ primeros vértices de $B_{i-1}\}$, para todo $\rho \leq i \leq D-1$.

La demostración de que el grafo descrito satisface las condiciones requeridas transcurre a lo largo de las mismas líneas de razonamiento que en la demostración del teorema para digrafos. □

2.4 Digrafos maximalmente distancia conectados

En esta sección obtenemos condiciones suficientes para que un digrafo s-geodético sea maximalmente t-distancia conectado. De ahora en adelante supondremos $\delta(t) > 1$, ya que si $\delta(t) = 1$ el digrafo es obviamente maximalmente t-distancia conectado. El siguiente resultado muestra que para un digrafo s-geodético con parámetro ℓ, la distancia conectividad $\kappa(2\ell)$ determina únivocamente las conectividades $\kappa(t)$ para cualquier $t \leq 2s$, y análogamente para la arco t-distancia conectividad.

Teorema 2.4.1 *Sea G un digrafo s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ, t-distancia conectividades $\kappa(t)$ y $\lambda(t)$, y t-grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \min\{\delta(t), \kappa(2\ell)\}$, *para cualquier* $t \leq 2s$;

(b) $\lambda(t) = \min\{\delta(t), \lambda(2\ell + 1)\}$, *para cualquier* $t \leq 2s + 1$.

Demostración: Probaremos en primer lugar (a). Sea F un conjunto t-distancia desconectador de $G = (V, A)$ de cardinal mínimo, es decir $|F| = \kappa(t)$. Entonces, existen dos vértices $u, v \in V \setminus F$ tales que $d(u, v) \geq t$ de manera que no hay caminos desde u hasta v en $G - F$. De aquí que el conjunto $V \setminus F$ puede ser dividido en dos fragmentos V^-, V^+ tales que $G - F$ no tiene arcos desde V^- hasta V^+. Podemos considerar a su vez una partición de los fragmentos V^- y

V^+ en subconjuntos V_i y V'_j, donde $1 \le i \le \mu$, $1 \le j \le \mu'$, de acuerdo con sus distancias hacia F y desde F, es decir, $V_i = \{x \in V^- : d(x,F) = i\}$ y $V'_j = \{x \in V^+ : d(F,x) = j\}$. Como cualquier camino desde V^- hasta V^+ debe atravesar F, la distancia desde un vértice en V_μ hasta uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu+\mu'$ y de aquí $D \ge \mu+\mu'$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\mu \le \mu'$ (si no, usamos el digrafo inverso de G).

Sabemos que $\kappa(t) \le \delta(t)$. Debido a que $t \le 2s \le 2\ell$ se sigue que $\kappa(t) \le \kappa(2\ell)$, por tanto $\kappa(t) \le \min\{\delta(t), \kappa(2\ell)\}$. Para probar la desigualdad inversa distinguimos dos casos:

(a.1) $\mu \ge \ell$. Entonces, si $x \in V_\mu$, $y \in V'_{\mu'}$, tenemos que $d(x,y) \ge \mu+\mu' \ge 2\ell$. De aquí, $\kappa(t) = |F| \ge \kappa(2\ell)$.

(a.2) $\mu \le \ell - 1$. Consideramos ahora dos subcasos:

(i) $\mu \le s-1$. Consideramos el vértice anteriormente mencionado $u \in V_i$, $i \le \mu$, y $\delta(t)$ de sus vecinos de salida $u_1, u_2, \ldots, u_{\delta(t)}$. Para cada u_i, sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde u_i. Si $f_i = f_j$ para algún $i \ne j$, entonces deberían haber dos $u \to f_i$ caminos de longitud a lo sumo $\mu+1 \le s$, contradiciendo que G es s-geodético. Por tanto, $\kappa(t) \ge \delta(t)$.

(ii) $s \le \mu$. Sea $x \in V_\mu$, tenemos que $e^+(x) \ge t$ ya que, para cualquier $y \in V'_{\mu'}$, $d(x,y) \ge \mu+\mu' \ge 2s \ge t$. Consideremos $\delta(t)$ de sus vecinos de salida $x_1, x_2, \ldots, x_{\delta(t)}$. Como en el caso (i), para cada x_i, sea f_i el vértice de F a mínima distancia desde x_i. Ahora, si $f_i = f_j$, para algún $i \ne j$, deberían existir dos $x \to f_i$ caminos diferentes de longitud μ ó $\mu+1$ contradiciendo la definición del parámetro ℓ, ya que $\mu \le d(x,f_i) \le 1 + d(x_i,f_i) \le 1+\mu \le \ell$. Por tanto, $\kappa(t) \ge \delta(t)$.

(b) En este caso, sea E un conjunto de arcos t-distancia desconectador de cardinal mínimo y consideremos los α-fragmentos que determina V^- y V^+. Sean los dos conjuntos disjuntos de vértices $F = \{f : (f,f') \in E\}$ y $W = \{f' : (f,f') \in E\}$. Entonces definimos $V_i = \{x : d(x,F) = i\} \subset V^-$, $0 \le i \le \nu$, y $V'_j = \{x : d(W,x) = j\} \subset V^+$, $0 \le i \le \nu'$, como antes. Ahora la distancia desde un vértice en V_ν hasta uno en $V'_{\nu'}$ es al menos $\nu+\nu'+1$ y de aquí que $D \ge \nu+\nu'+1$. Además, tenemos que $\lambda(t) \le \min\{\delta(t), \lambda(2\ell+1)\}$. Para completar la demostración consideramos de nuevo dos casos:

(b.1) $\nu \geq \ell$. Entonces, si $x \in V_\nu$, $y \in V'_{\nu'}$, se verifica $d(x,y) \geq \nu+\nu'+1 \geq 2\ell+1$. De donde, $\lambda(t) = |E| \geq \lambda(2\ell+1)$.

(b.2) $\nu \leq \ell - 1$. Si $\nu \geq 1$, podemos razonar como en el caso (a.2). Cuando $\nu = 0$, tenemos que $V^- = F$. En este caso, consideremos $u \in F$ con $e^+(u) \geq t$, y $\delta(t)$ de sus vecinos de salida, u_1, u_2, ..., $u_{\delta(t)}$. Si $\Gamma^+(u) \subset F'$ es claro que $\delta(t) \leq |F'| \leq |E| = \lambda(t)$. Si no es así, supongamos que $u_1, u_2, \ldots, u_j \in F$ y $u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_{\delta(t)} \in F'$. Entonces, E contiene los arcos (u_i, w), $1 \leq i \leq j$, $w \in F'$, y los arcos (u, u_i), $j+1 \leq i \leq \delta(t)$. Como G no tiene lazos, todos estos arcos son diferentes y por tanto, $\delta(t) \leq |E| = \lambda(t)$. □

Este teorema permite deducir condiciones suficientes sobre el diámetro para que un digrafo s-geodético con parámetro ℓ sea maximalmente t-distancia conectado.

Corolario 2.4.2 *Sea G un digrafo s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ, t-distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t-grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \delta(t)$ para cualquier $t \leq 2s$, si $D \leq 2\ell - 1$;

(b) $\lambda(t) = \delta(t)$ para cualquier $t \leq 2s+1$, si $D \leq 2\ell$.

Demostración: (a) Como $D \leq 2\ell - 1$, usando la misma notación que en el Teorema 2.4.1, tenemos que $2\mu \leq \mu + \mu' \leq D \leq 2\ell - 1$. De aquí que $\mu \leq \ell - 1$ y por el caso (a.2) de la demostración anterior, tenemos que $\kappa(t) = \delta(t)$.

(b) Usamos el mismo razonamiento que en el caso (a). □

Como $s \geq 1$, cuando $t = 1$ el corolario anterior es el Teorema 1.5.1, condición que ya fue formulada en [23, 32, 31].

Un digrafo se llama *maximalmente distancia conectado* si para todo $1 \leq t \leq D$, $\kappa(t) = \lambda(t) = \delta(t)$ y *maximalmente arco distancia conectado* si $\lambda(t) = \delta(t)$ para todo $1 \leq t \leq D$. El siguiente corolario da una condición suficiente para que un digrafo sea maximalmente distancia conectado.

Corolario 2.4.3 *Sea G un digrafo s-geodético con diámetro D, t-distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t-grado $\delta(t)$. Entonces,* *(a)* $\kappa(t) = \delta(t)$ *para todo* $t \leq D$, *si* $D \leq 2s - 1$;

(b) $\lambda(t) = \delta(t)$ *para todo* $t \leq D$, *si* $D \leq 2s$. □

Si k es suficientemente grande, el digrafo línea k-iterado L^kG satisface las condiciones sobre el diámetro exigidas por el Corolario 2.4.2 ya que, de las propiedades (2.6) y (2.7),

$$D(L^kG) \leq 2\ell(L^kG) - 1 \Leftrightarrow k \geq D(G) - 2\ell(G) + 1;$$

$$D(L^kG) \leq 2\ell(L^kG) \Leftrightarrow k \geq D(G) - 2\ell(G).$$

Además, si G es s-geodético entonces L^kG es s'-geodético con parámetro $s' = \min\{s + k, g - 1\}$, donde g denota el girth de G.

Corolario 2.4.4 *Sea G un digrafo s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ, girth g y t-grado $\delta(t)$. Sea $s' = \min\{s + k,\ g - 1\}$. Entonces,*

(a) $\kappa(t; L^kG) = \delta(t; L^kG)$ *para cualquier* $t \leq 2s'$, *si* $k \geq D - 2\ell + 1$;

(b) $\lambda(t; L^kG) = \delta(t; L^kG)$ *para cualquier* $t \leq 2s' + 1$, *si* $k \geq D - 2\ell$. □

2.5 Digrafos bipartitos con distancia conectividad óptima

Las ideas de las secciones precedentes pueden utilizarse sin cambios significativos para llevar a cabo un estudio similar en digrafos bipartitos s-geodéticos con parámetro ℓ. Teniendo presente que en el caso bipartito entre dos vértices cualesquiera sólo hay caminos de igual paridad, la definición del parámetro ℓ puede ser simplificada diciendo que es el entero más grande comprendido entre 1 y D tal que, para cualesquiera $x, y \in V$ a distancia $d(x, y) \leq \ell$, el $x \rightarrow y$ camino corto es único.

El siguiente resultado es análogo al Teorema 2.4.1.

Teorema 2.5.1 *Sea G un digrafo bipartito s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ, t-distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t-grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \min\{\delta(t), \kappa(2\ell + 1)\}$, *para todo* $t \leq 2s$;

(b) $\lambda(t) = \min\{\delta(t), \lambda(2\ell + 2)\}$, *para todo* $t \leq 2s + 1$.

Demostración: Sea $G = (V, A)$, $V = U_1 \bigcup U_2$, un digrafo bipartito. Usamos la misma notación que en la demostración del Teorema 2.4.1. Así, como antes, para probar (a) distinguimos dos posibilidades:

$(a.1)$ $\mu \geq \ell$. Si $\mu \geq \ell + 1$, la demostración es directa, ya que dados $x \in V_\mu$, $y \in V_{\mu'}$, $d(x, y) \geq d(x, F) + d(F, y) \geq 2\ell + 2$, de donde podemos concluir que $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell+2) \geq \kappa(2\ell+1)$. Por otro lado, si $\mu = \ell$ necesitamos considerar dos subcasos:

(i) $V_\mu \bigcap U_i \neq \emptyset$, para cada $i = 1, 2$. Entonces existen dos vértices $x \in V_\mu \bigcap U_1$, $x' \in V_\mu \bigcap U_2$, tales que $d(x, y) \geq \mu + \mu' \geq 2\ell$, y, análogamente, $d(x', y) \geq 2\ell$. Por tanto, como x y x' pertenecen a diferentes conjuntos de partes, al menos una de las dos distancias anteriores debe ser superior a $2\ell + 1$. Entonces, $\kappa(t) = |F| \geq \kappa(2\ell + 1)$.

(ii) $V_\mu \bigcap U_i = \emptyset$ para, por ejemplo, $i = 2$. Entonces, todos los vecinos de salida de $x \in V_\mu$ deben estar en $V_{\mu-1}$. Como $e^+(x) \geq 2\ell \geq t$, podemos considerar $\delta(t)$ de sus vecinos de salida y, como antes, si $f_i = f_j$ para algún $i \neq j$, debería haber dos $x \rightarrow f_i$ caminos diferentes de longitud ℓ, lo cual es una contradicción. Entonces, $\kappa(t) \geq \delta(t)$.

$(a.2)$ $\mu \leq \ell - 1$. Se razona como en el Teorema 2.4.1. □

Este teorema permite enunciar las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo bipartito s-geodético sea maximalmente t-distancia conectado.

Corolario 2.5.2 *Sea G un digrafo bipartito s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ, t-distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t-grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \delta(t)$ *para todo* $t \leq 2s$ *si* $D \leq 2\ell$;

(b) $\lambda(t) = \delta(t)$ *para todo* $t \leq 2s + 1$ *si* $D \leq 2\ell + 1$ □.

En particular, cuando $t = 1$ obtenemos las mismas condiciones suficientes que que ya fueron dadas en [31] para asegurar que un digrafo bipartito con parámetro ℓ alcanza máxima conectividad.

Como $s \leq \ell$ también se obtienen las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo bipartito s-geodético sea maximalmente distancia conectado.

Corolario 2.5.3 *Sea G un digrafo bipartito s-geodético con diámetro D, t-distancia conectividades $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ y t-grado $\delta(t)$. Entonces,*

(a) $\kappa(t) = \delta(t)$ *para todo* $1 \leq t \leq D$ *si* $D \leq 2s$;

(b) $\lambda(t) = \delta(t)$ *para todo* $1 \leq t \leq D$ *si* $D \leq 2s + 1$ $\Box$.

Para el digrafo linea k-iterado L^kG tenemos ahora el siguiente resultado.

Corolario 2.5.4 *Sea G un digrafo bipartito s-geodético con diámetro D, parámetro ℓ y t-grado $\delta(t)$. Entonces las t-distancia conectividades de L^kG satisfacen:*

(a) $\kappa(t; L^kG) = \delta(t; L^kG)$ *para todo* $t \leq 2s$ *si* $k \geq D - 2\ell$;

(b) $\lambda(t; L^kG) = \delta(t; L^kG)$ *para todo* $t \leq 2s + 1$ *si* $k \geq D - 2\ell + 1$.