



UNIVERSITAT_{DE}
BARCELONA

**Uso combinado del *Lesson Study*
y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el
desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la
formación de profesores de matemáticas**

Viviane Beatriz Hummes



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution 4.0. Spain License.**

TESIS DOCTORAL

Uso combinado del *Lesson Study* y de los
Criterios de Idoneidad Didáctica para el
desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la
formación de profesores de matemáticas

Viviane Beatriz Hummes

Enero de 2022



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Uso combinado del *Lesson Study* y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas

Memoria presentada para optar al grado de doctor por la Universitat de Barcelona

Programa de doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades

Autora: Viviane Beatriz Hummes

Directores: Dra. Adriana Breda y Dr. Vicenç Font Moll

Tutor: Dr. Vicenç Font Moll

Facultad de Educación



Resumen

Muchas tendencias sobre la formación de profesores, sea inicial o continua, sugieren la investigación de los docentes y la reflexión sobre la práctica docente como fundamental para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Desde la Didáctica de las Matemáticas, diferentes propuestas proporcionan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la reflexión del profesorado. Entre ellos destacan el enfoque *Lesson Study* (LS) y la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), propuesta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) como pauta para organizar la reflexión del profesor sobre la práctica, ambos referentes teóricos de esta investigación.

En la línea de buscar una sinergia entre ambos enfoques, esta tesis busca analizar de qué forma un dispositivo formativo basado en el LS y los CID promueve el desarrollo de la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio. Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos: O1) realizar una profundización teórica sobre el LS y los CID buscando complementariedades entre ambos; O2) diseñar y aplicar un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID, cuyo objetivo sea que los participantes diseñen, implementen, valoren y rediseñen secuencias de tareas para sus alumnos de enseñanza básica; O3) investigar el papel que tienen los CID en una experiencia de LS, antes de que dicha herramienta haya sido enseñada a los participantes como pauta para organizar su reflexión; O4) analizar de qué forma el ciclo formativo implementado desarrolla la reflexión en los profesores de matemáticas participantes.

Para alcanzar estos objetivos, se ha estudiado, de forma cualitativa, el caso de un curso de formación enfocado en desarrollar la reflexión docente. La metodología ha seguido cuatro etapas, una para cada objetivo específico.

En la primera etapa, para comprender cómo los enfoques LS y CID proponen el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y hallar algunas complementariedades y diferencias entre ambos enfoques, los instrumentos utilizados para el análisis fueron: (i) fuentes documentales (de investigaciones ya realizadas sobre el LS y sobre el uso de los CID para organizar la reflexión del profesor) y (ii) análisis de algunas experiencias de ciclos de LS en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas realizados en el contexto de diferentes países. Estas experiencias fueron recogidas de videos presentes en la plataforma *YouTube* y fueron

analizadas según las herramientas del EOS, en particular, según los CID y según el estudio de las trayectorias didácticas (conjunto de configuraciones didácticas). La segunda etapa metodológica fue estructurada en tres momentos. En un primero momento, se realizó el diseño e implementación de un curso formativo piloto, basado en el LS y los CID, con profesores en ejercicio del sur de Brasil, y se analizaron los datos seleccionando párrafos en la reflexión de los profesores que podrían ser considerados evidencias de uso implícito de algunos de los indicadores y componentes de los diferentes CID. En un segundo y tercer momento, se pasó al diseño e implementación del curso que ha sido el foco de la investigación. El curso de educación continua, realizado en colaboración con la *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (Brasil), de forma virtual, vía *Skype*, titulado "*Lesson Study* y Criterios de Idoneidad Didáctica: formación continua para docentes que enseñan Matemáticas", tuvo como objetivo promover, en ocho profesores de matemáticas de la Educación Básica, el desarrollo de la reflexión. El curso se estructuró para desarrollarse en tres fases. En la primera fase del curso se llevaron a cabo dos ciclos completos de LS y se consideraron las etapas típicas de un LS: estudio del currículo y metas, cuyo contenido matemático elegido para ser enseñado en la clase fue el Teorema de Pitágoras; planificación de la clase; implementación y observación de la clase, implementada en un grupo de noveno año del *Ensino Fundamental*; y reflexión conjunta sobre la clase implementada. En la segunda fase, se realizó el estudio de los CID. Para ello, se realizó una importante adaptación al diseño ya aplicado y experimentado en másteres para la formación de profesores de matemáticas de secundaria en España, donde este constructo es un contenido a ser enseñado para ser utilizados como guía para la organización de la reflexión sobre la propia práctica. En la tercera fase, se realizó un nuevo análisis de la clase implementada en el ciclo de LS, utilizando los CID como herramienta para orientar la reflexión de los docentes y llegar a una propuesta de rediseño de la clase. Para hacer esta reflexión, cada uno de los profesores analizó la clase aplicada desde la perspectiva de uno de los seis CID: el epistémico, el cognitivo, el mediacional, el interaccional, el afectivo y el ecológico. Posteriormente, cada docente presentó su análisis a todo el grupo y luego hubo una discusión de lo que se debería mantener y lo que se debería mejorar en la clase. Todas las sesiones fueron grabadas para el registro de los datos de la investigación, con el consentimiento previo de los participantes. La recolección de datos se realizó a través de: (i) la grabación de video de todas las reuniones virtuales y la clase implementada en la Educación Básica; (ii) las respuestas de los participantes de un cuestionario final de evaluación del curso y (iii) la entrevista realizada con la profesora que implementó la clase

con los alumnos de la Educación Básica. En la tercera etapa metodológica se realizó una transcripción de las sesiones grabadas referentes a la fase 1 del curso. El análisis de contenido sobre la reflexión del grupo de docentes sobre las etapas del LS se hizo utilizando, como categorías previas, los componentes e indicadores de los CID. Para analizar el uso implícito de componentes o indicadores de los CID en la reflexión de los docentes, se estableció un nivel de escala discreta (de 0 a 4), el cual fue asignado después de una triangulación con los directores de esta tesis doctoral. En la cuarta etapa metodológica, se puso el foco en el análisis de las reflexiones de los docentes participantes, sobre todo, de las realizadas en la tercera fase del curso formativo (donde se usan los CID como herramienta que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase 1 del curso). Para ello, los datos fueron tomados, sobre todo, de las sesiones correspondientes a la tercera fase del curso, de la entrevista con la profesora que implementó la clase del Teorema de Pitágoras con los alumnos del noveno año del *Ensino Fundamental*, de las respuestas del cuestionario final aplicado a los participantes y del rediseño final de la clase. El análisis de contenido sobre la reflexión del grupo de docentes se realizó utilizando, como categorías previas, los componentes e indicadores de los CID enseñados en la segunda fase del curso. Para este análisis, a diferencia del realizado en el objetivo 3, se observó el uso explícito y correcto de los componentes e indicadores de los CID. Para ello, se estableció una escala discreta de valoración (de 0 a 4), la cual fue asignada después de una triangulación entre la doctoranda y sus dos directores de tesis. Además, los análisis de la fase 3 fueron triangulados con los resultados de los análisis de la fase 1 del curso (referentes al objetivo 3).

Las conclusiones para cada objetivo específico son las siguientes. Para el O1, se concluye que el LS favorece la organización y recolección de datos, permitiendo la identificación de los CID implícitos en el discurso de los profesores en todas las etapas analizadas del LS. En el análisis realizado se evidencia que en una clase de LS surge un consenso implícito entre el docente que desarrolla la clase y el resto de docentes participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales pueden ser reinterpretados en términos de los indicadores y componentes de los CID. En particular, una de las ventajas de trabajar con la dinámica del LS es que algunos aspectos que no están presentes en la reflexión del docente pueden estar presentes en la reflexión de otros docentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Sobre el O2, la conclusión es que, el diseño e implementación de los dos cursos cuyo objetivo fue potenciar el desarrollo de la reflexión del profesorado de matemáticas mediante un ciclo formativo que combina el LS y los CID,

confirma experimentalmente la conclusión hipotética obtenida en el estudio teórico de revisión de la literatura realizado en el O1, ya que se evidencia que, efectivamente, es posible diseñar e implementar este tipo de cursos cuya estructura básica debe ser: a) primer momento: *Lesson Study*; b) segundo momento: hacer observar a los participantes que en la fase del *Lesson Study* han usado de manera implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID; c) tercer momento: enseñanza de los CID; y d) cuarto momento: uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase de reflexión y rediseño del LS (primer momento del curso). Por otra parte, el diseño e implementación de los dos cursos evidencian que un dispositivo de formación que combina la utilización del LS y los CID desarrolla la reflexión del profesor (como se muestra en los O3 y O4). En particular, en el O3, se evidencia que las experiencias de LS permiten una fase inicial de reflexión más amplia en la planificación de la secuencia didáctica y un trabajo colaborativo a lo largo de la experiencia, lo que permite el surgimiento de algunos indicadores y componentes de los CID. En particular, se observa que las reflexiones de los participantes están implícitamente organizadas a través de algunos indicadores de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica y, además, que la valoración positiva de estos indicadores, en algunos casos, se basa en el supuesto implícito de que existen ciertas tendencias en la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una educación matemática de calidad. Una de las razones por las que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los docentes, sin que se les haya enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, es que los CID reflejan un consenso sobre lo que se considera bueno para la enseñanza de las matemáticas, ampliamente asumido en la comunidad de educadores, además, es plausible el uso implícito que los docentes hacen de esta herramienta, dado que en sus procesos de formación se hacen partícipes de estos consensos. Sobre el O4, al observar los resultados de la reflexión en la fase 3 del curso, se nota una mejora en la reflexión en todos los componentes de los CID. Este resultado indica que, además de ser importante estructurar la reflexión sobre la práctica, el uso de los CID puede servir como herramienta útil para orientar la reflexión de los docentes. En cuanto a la enseñanza de los CID, podemos decir que pueden ser enseñados y también aprendidos por los participantes, tal como se evidencia en las valoraciones de la fase tres del curso, resultado que coincide con otras experiencias realizadas en el contexto de formación inicial y continua del profesorado. Sin embargo, lo que se observa es que esta enseñanza y aprendizaje de los CID, por parte de los docentes, presentan diferentes niveles de aprendizaje.

Las perspectivas futuras de este estudio se orientan, sobre todo, a: implementar el curso en otro contexto y con otros participantes; aplicar el curso en la modalidad presencial; realizar un análisis basado en la noción de argumentación práctica, buscando identificar los argumentos esgrimidos por los docentes participantes (y el papel que tienen en ellos los CID) para justificar el rediseño de la clase previamente diseñada e implementada en un contexto de *Lesson Study*; y, por último, analizar, con el apoyo de los diferentes tipos de análisis del EOS, las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos adquiridos por los participantes al final del proceso formativo.

Abstract

Many trends on initial and continuous teacher training, suggest teacher research and reflection on teaching practice as fundamental aspects to professional development and improvement of teaching. From the Didactics of Mathematics, different proposals provide conceptual frameworks related to the development of teachers' reflection. Among them, the Lesson Study (LS) approach and the Didactic Suitability Criteria (DSC) tool stand out, the latter proposed by the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) as a tool to organize the teacher's reflection on practice, and that are considered as theoretical references within this research.

In the line of seeking a synergy between both approaches, this thesis seeks to analyse how a training device, based on the LS and the DSC, promotes the development of in-service mathematics teachers' reflection. This general objective is specified in the following specific objectives: O1) Carry out a theoretical deepening of the LS and the DSC looking for complementarities between both; O2) Design and apply a training cycle for in-service mathematics teachers based on the LS and the DSC, whose objective is that the participants design, implement, assess, and redesign sequences of tasks for their primary and secondary education students; O3) Investigate the role of the DSC in a LS experience, before this tool has been taught to the participants as a guideline to organise their reflection; O4) Analyse how the training cycle implemented develops reflection in the participating mathematics teachers. To achieve these objectives, the case of a training course focused on developing teacher reflection has been studied qualitatively. The methodology has followed four stages, one for each specific objective.

In the first stage, in order to understand how the LS and the DSC approaches propose the development of reflection on practice in teacher training and to find some complementarities and differences between both approaches, the instruments used for the analysis were: (i) documentary sources (from research already carried out on LS and on the use of the DSC to organise teacher reflection); and (ii) analysis of some experiences of LS cycles in the field of mathematics teaching carried out in the context of different countries. These experiences were collected from videos found on the YouTube platform and were analysed according to the tools provided by the OSA, particularly, according to the DSC and to the study of didactic trajectories (a set of didactic configurations). The second methodological stage was structured in three moments. The first

moment was carried ad hoc and implementation design of a training pilot course, based on the LS and the DSC with in-service teachers from southern Brazil, and the data were analysed by selecting paragraphs within the teachers' reflection which could be considered as evidences of implicit use of some of the indicators and components of the different DSC. In a second and third moment, the design and implementation of the course, which has been the focus of this research, began. The continuous training course, carried out virtually via *Skype* in collaboration with the *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (Brazil), entitled "Lesson Study and Didactic Suitability Criteria: Continuous training for teachers who teach Mathematics" aimed to promote, in eight mathematics teachers of Basic Education, the development of reflection. The course was structured to be developed in three phases. In the first phase of the course, two complete cycles of LS were carried out and the typical stages of a LS were considered: Study of the curriculum and goals, whose mathematical content chosen to be taught in a lesson was the Pythagorean theorem; Lesson planning; Implementation and observation of the lesson, implemented in a ninth-year group from *Ensino Fundamental*; Joint reflection on the implemented lesson. In the second phase, the DSC study was carried out. For this, an important adaptation was made to the design already applied and experienced in master's programs for the training of secondary school mathematics teachers in Spain, where this theoretical construct is a content taught to be used as a guide for the organisation of reflection on the own practice. In the third phase, a new analysis of the lesson implemented in the LS cycle was carried out, using the DSC as a tool to guide the teachers' reflection and then arrive at a proposal for the redesign of the lesson. To make this reflection, each of the teachers analysed the lesson applied from the perspective of one of the six DSC: epistemic, cognitive, mediational, interactional, affective, and ecological criteria. Subsequently, each teacher presented his/her analysis to the whole group and then there was a discussion of what should be kept and what should be improved in the lesson. All sessions were recorded for the registration of research data, with the prior consent of the participants. Data collection was carried out through: (i) the video recording of all virtual meetings and the lesson implemented in Basic Education; (ii) the responses from the participants to a final evaluation questionnaire for the course; and (iii) an interview with the teacher who implemented the lesson with Basic Education students. In the third methodological stage, a transcription of the recorded sessions from the phase 1 of the course was made. The content analysis on the reflection of the group of teachers on the stages of the LS was done using, as a priori categories, the components and indicators of the DSC. To analyse the

implicit use of the components or indicators of the DSC in the teachers' reflection, a discrete scale level (from 0 to 4) was established, which was assigned after triangulation with the supervisors of this doctoral thesis. In the fourth methodological stage, the focus was placed on the analysis of the reflections of the participating teachers; above all, of those carried out in the third phase of the training course (where the DSC are used as a tool that allows organising and improving the reflection carried out in phase 1 of the course). For this reason, the data were taken, above all, from the sessions corresponding to the third phase of the course, from the interview with the teacher who implemented the Pythagorean theorem lesson with the students of the ninth-year of the *Ensino Fundamental*, from the responses of the final questionnaire applied to the participants, and the final redesign of the lesson. The content analysis on the reflection of the group of teachers was carried out using, as a priori categories, the components and indicators of the DSC taught in the second phase of the course. For this analysis, unlike the one carried out in objective 3, the explicit and correct use of the components and indicators of the DSC was observed. To do this, a discrete assessment scale (from 0 to 4) was established, which was assigned after a triangulation between the doctoral student and her two thesis supervisors. In addition, the analyses of phase 3 were triangulated with the results of the analyses of phase 1 of the course (referring to objective 3).

The conclusions for each specific objective are as follows. For O1, it is concluded that the LS favours the organisation and collection of data, allowing the identification of the implicit DSC in the teachers' discourse in all the analysed stages of the LS. In the analysis carried out, it is evident that in a LS lesson an implicit consensus arises between the teacher who develops the lesson and the rest of the participating teachers on aspects that are positively assessed, which can be reinterpreted in terms of the indicators and components of the DSC. In particular, one of the advantages of working with the LS dynamics is that some aspects that are not present in the teacher's reflection may be present in the reflection of other teachers who participate in the teaching and learning process. Regarding O2, the conclusion is that the design and implementation of the two courses, whose objective was to promote the development of reflection of mathematics teachers through a training cycle that combines the LS and the DSC, experimentally confirms the hypothetical conclusion obtained in the theoretical study of literature review carried out in O1, since it is evident that, indeed, it is possible to design and implement this type of course whose basic structure must be: first moment: *Lesson Study*; second moment: make the participants observe that in the *Lesson Study* phase they have implicitly used some of the components and indicators of

the DSC; third moment: teaching the DSC; and fourth moment: use of the DSC as a methodological tool that allows organising and improving the reflection carried out in the reflection and redesign phase of the LS (first moment of the course). On the other hand, the design and implementation of the two courses make evident that a training device that combines the use of the LS and the DSC develops the teacher's reflection (as shown in the O3 and O4). Specifically, in O3 is made evident that the LS experiences allow an initial phase of a broader reflection in the planning of the didactic sequence and collaborative work throughout the experience, which allows the emergence of some indicators and components of the DSC. In particular, it is observed that the reflections of the participants are implicitly organised through some indicators of the components of the Didactic Suitability Criteria and, furthermore, that the positive assessment of these indicators, in some cases, is based on the implicit assumption that there are certain trends in the teaching of mathematics that indicate how a quality mathematics education should be like. One of the reasons why the DSC work as regularities in the teachers' discourse, without having been taught the use of this tool to guide their reflection, is that the DSC reflect a consensus on what is considered good for the mathematics teaching, widely assumed in the educators' community. In addition, the implicit use that teachers make of this tool is plausible, since in their training processes they participate in these consensuses. Regarding the O4, when observing the results of the reflection in phase 3 of the course, an improvement in the reflection is observed in all the components of the DSC. This result indicates that, in addition to being important to structure reflection on practice, the use of DSC can be a useful tool to guide teachers' reflection. Regarding the teaching of DSC, we can say that they can be taught and also learned by the participants, as made evident in the assessments of the phase three of the course, a result that coincides with other experiences carried out in the context of initial and continuous teachers training. However, what is observed is that this teaching and the learning of the DSC, on the part of the teachers, presents different levels of learning.

The future perspectives of this study are oriented, above all, in: implementing the course in another context and with other participants; apply the course in the face-to-face mode; carry out an analysis based on the notion of practical argumentation, seeking to identify the arguments put forward by the participating teachers (and the role that the DSC have in them) to justify the redesign of the lesson previously designed and implemented in a LS context; and, finally, to analyse, as support for two different types of analysis of OSA, the didactic-mathematical skills and knowledge acquired by the participants at the end of the training process.

Resumo

Muitas tendências relacionadas à formação de professores, seja ela inicial ou contínua, sugerem a pesquisa e a reflexão docente sobre a prática docente como fundamentais para o desenvolvimento profissional e aprimoramento da docência. A partir da Didática da Matemática, diferentes propostas fornecem marcos conceituais relacionados ao desenvolvimento da reflexão docente. Entre eles, destacam-se a abordagem *Lesson Study* (LS) e a ferramenta Critérios de Adequação Didática (CAD), proposta na Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (AOS), como ferramenta para organizar a reflexão do professor sobre a prática, ambos referenciais teóricos desta investigação.

Na linha de buscar uma sinergia entre as duas abordagens, esta tese busca analisar como um curso de formação, baseado no LS e nos CAD, promove o desenvolvimento da reflexão de professores de matemática em exercício. Este objetivo geral encontra-se especificado nos seguintes objetivos específicos: O1) realizar um aprofundamento teórico do LS e dos CAD, procurando complementaridades entre ambos; O2) conceber e aplicar um ciclo de formação de professores de matemática em exercício com base no LS e nos CAD, cujo objetivo é que os participantes planejem, implementem, valorem e redesenhem sequências de tarefas para os seus alunos do ensino básico; O3) investigar o papel dos CAD em uma experiência de LS, antes que essa ferramenta tenha sido ensinada aos participantes como uma diretriz para organizar sua reflexão; O4) analisar como o ciclo formativo implementado desenvolve a reflexão nos professores de matemática participantes.

Para atingir esses objetivos, estudou-se, qualitativamente, o caso de um curso de formação voltado para o desenvolvimento da reflexão docente. A metodologia seguiu quatro etapas, uma para cada objetivo específico.

Na primeira etapa, para entender como as abordagens LS e CAD propõem o desenvolvimento da reflexão sobre a prática na formação de professores e encontrar algumas complementaridades e diferenças entre as duas abordagens, os instrumentos utilizados para a análise foram: (i) fontes documentais (de pesquisas já realizadas sobre o LS e sobre a utilização dos CAD para organizar a reflexão dos professores) e (ii) análise de algumas experiências de ciclos do LS, no campo do ensino da matemática, realizadas no contexto de diferentes países. Essas experiências foram coletadas a partir de vídeos na plataforma *YouTube* e analisadas de acordo com

as ferramentas AOS, em particular, de acordo com os CAD e de acordo com o estudo de trajetórias didáticas (conjunto de configurações didáticas). A segunda etapa metodológica foi estruturada em três momentos. Em um primeiro momento, foi realizado o desenho e a implementação de um curso piloto de formação, baseado no LS e nos CAD, com professores atuantes no sul do Brasil, e os dados foram analisados selecionando parágrafos de reflexão de professores que pudessem ser considerados indícios de uso implícito de alguns dos indicadores e componentes dos diferentes CAD. Em um segundo e terceiro momento, iniciou-se a concepção e implementação do curso, que tem sido o foco da pesquisa. O curso de formação continuada, realizado em colaboração com a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brasil), virtualmente, via *Skype*, intitulado "*Lesson Study* e Critérios de Adequação Didática: formação continuada para professores que ensinam matemática", teve como objetivo promover, em oito professores de matemática da Educação Básica, o desenvolvimento da reflexão. O curso foi estruturado para ser desenvolvido em três fases. Na primeira fase do curso, foram realizados dois ciclos completos de LS e foram consideradas as etapas típicas de um LS, isto é, o estudo do currículo e objetivos, cujo conteúdo matemático escolhido para ser ensinado em sala de aula foi o Teorema de Pitágoras; planejamento da aula; implementação e observação da aula realizada numa turma do nono ano do Ensino Fundamental; reflexão conjunta sobre a classe implementada. Na segunda fase, foi realizado o estudo dos CAD, para isso, foi feita uma adaptação importante do desenho já aplicado e experimentado em mestrados para a formação de professores de matemática da *Educación Secundaria Obligatoria* na Espanha, onde esse construto é um conteúdo a ser ensinado para ser usado como guia para a organização da reflexão sobre a própria prática. Na terceira fase, foi realizada uma nova análise da aula implementada no ciclo de LS, utilizando os CAD como ferramenta para orientar a reflexão dos professores e chegar a uma proposta de reformulação da aula. Para fazer essa reflexão, cada um dos professores analisou a aula aplicada, na perspectiva de um dos seis CAD: epistêmico, cognitivo, de meios, de interação, afetivo e ecológico. Posteriormente, cada professor apresentou sua análise para todo o grupo e, em seguida, houve uma discussão sobre o que deveria ser mantido e o que deveria ser melhorado na aula. Todas as sessões foram gravadas para o registro dos dados da pesquisa, com a autorização prévia dos participantes. A coleta de dados foi realizada por meio de: (i) gravação em vídeo de todos os encontros virtuais e da aula implementada na Educação Básica; (ii) respostas dos participantes a um questionário de avaliação final do curso e (iii) entrevista com a professora que implementou a aula com alunos da Educação Básica. Na terceira

etapa metodológica, foi feita a transcrição das sessões gravadas referentes à fase 1 do curso. A análise de conteúdo sobre a reflexão do grupo de professores sobre as etapas do LS foi feita utilizando, como categorias prévias, os componentes e indicadores dos CAD. Para analisar o uso implícito de componentes ou indicadores dos CAD na reflexão dos professores, foi estabelecido um nível de escala discreta (de 0 a 4), que foi atribuído após triangulação com os diretores desta tese de doutorado. Na quarta etapa metodológica, o foco foi colocado na análise das reflexões dos professores participantes, sobretudo, das realizadas na terceira fase do curso de formação (onde se utilizam os CAD como ferramenta que permite organizar e melhorar a reflexão realizada na fase 1 do curso). Para isso, os dados foram coletados, sobretudo, das sessões correspondentes à terceira fase do curso, da entrevista com a professora que implementou a aula de Teorema de Pitágoras com os alunos do nono ano do Ensino Fundamental, das respostas do questionário final aplicado aos participantes e do redesenho final da aula. A análise de conteúdo sobre a reflexão do grupo de professores foi realizada utilizando, como categorias prévias, os componentes e indicadores dos CAD, ministrados na segunda fase do curso. Para esta análise, diferentemente da realizada no objetivo 3, observou-se o uso explícito e correto dos componentes e indicadores dos CAD. Para isso, foi estabelecida uma escala de avaliação discreta (de 0 a 4), que foi atribuída após uma triangulação entre a doutoranda e seus dois orientadores de tese. Além disso, as análises da fase 3 foram trianguladas com os resultados das análises da fase 1 do curso (referente ao objetivo 3).

A seguir, apresentam-se as conclusões para cada objetivo específico. Para o O1, conclui-se que o LS favorece a organização e coleta de dados, permitindo a identificação dos CAD implícitos no discurso dos professores em todas as etapas analisadas do LS. Na análise realizada, é evidente que, numa aula de LS, surge um consenso implícito entre o professor que desenvolve a aula e os demais professores participantes sobre aspectos que são valorizados positivamente, que podem ser reinterpretados em termos de indicadores e componentes dos CAD. Em particular, uma das vantagens de trabalhar com dinâmicas de LS é que, alguns aspectos que não estão presentes na reflexão do professor, podem estar presentes na reflexão de outros professores que participam do processo de ensino e aprendizagem. Relativamente ao O2, conclui-se que o planejamento e implementação dos dois cursos, cujo objetivo foi promover o desenvolvimento da reflexão dos professores de matemática através de um ciclo de formação que combina o LS e os CAD, confirma, experimentalmente, a hipotética conclusão obtida no estudo teórico para revisar a literatura realizada no O1, pois é evidente que, de fato, é possível conceber e implementar este tipo de curso

cuja estrutura básica deve ser: primeiro momento: *Lesson Study*; segundo momento: fazer com que os participantes observem que na fase de *Lesson Study* utilizam implicitamente alguns dos componentes e indicadores dos CAD; terceiro momento: ensino dos CAD; e quarto momento: uso dos CAD como ferramenta metodológica que permite organizar e melhorar a reflexão realizada na fase de reflexão e redesenho do LS (primeiro momento do curso). Além disso, o planejamento e implementação dos dois cursos mostram que um dispositivo de formação que combina a utilização do LS e dos CAD desenvolve a reflexão do professor (como mostrado em O3 e O4). Em particular no O3, evidencia-se que as experiências de LS permitem uma fase inicial de reflexão mais ampla do planejamento da sequência didática e trabalho colaborativo ao longo da experiência, o que permite o surgimento de alguns indicadores e componentes dos CAD. Em particular, observa-se que as reflexões dos participantes estão implicitamente organizadas por meio de alguns indicadores dos componentes dos Critérios de Adequação Didática e, além disso, que a avaliação positiva desses indicadores, em alguns casos, se baseia no pressuposto implícito de que existem certas tendências no ensino da matemática que indicam como deve ser uma educação matemática de qualidade. Uma das razões pelas quais os CAD funcionam como regularidades no discurso dos professores, sem que tenha sido ensinado o uso dessa ferramenta para orientar sua reflexão, é que os CAD refletem um consenso sobre o que é considerado bom para a educação, consenso amplamente assumido na comunidade de educadores, ademais, o uso que os professores fazem dessa ferramenta é plausível, pois em seus processos de formação eles participam desses consensos. No O4, ao observar os resultados da reflexão na fase 3 do curso, nota-se uma melhora na reflexão em todos os componentes dos CAD. Esse resultado indica que, além de ser importante para estruturar a reflexão sobre a prática, o uso dos CAD pode servir como uma ferramenta útil para orientar a reflexão dos professores. Em relação ao ensino dos CAD, podemos dizer que eles podem ser ensinados e também aprendidos pelos participantes, conforme evidenciado nas avaliações da fase três do curso, resultado que coincide com outras experiências realizadas no contexto da formação e educação inicial e contínua de professores. No entanto, o que se observa é que esse ensino e a aprendizagem dos CAD, pelos professores, apresentam diferentes níveis de aprendizagem.

As perspectivas futuras deste estudo orientam-se, sobretudo, em implementar o curso em outro contexto e com outros participantes; aplicar o curso na modalidade presencial; e realizar uma análise com base na noção de argumentação prática, procurando identificar os argumentos

apresentados pelos professores participantes (e o papel que os CAD têm neles) para justificar o redesenho da aula previamente concebida e implementada em um contexto de *Lesson Study*; e, por fim, analisar, com o apoio dos diferentes tipos de análise da AOS, as competências e conhecimentos didático-matemáticos adquiridos pelos participantes ao final do processo de formação.

Reconocimiento

Esta tesis doctoral se enmarca en el proyecto de investigación sobre formación de profesores *Use of the Lesson Study and the Concept of Didactic Suitability in the Development of the Competence in Analysis and Didactical Intervention in the Frame of Mathematics Teacher's Training*, PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), y tuvo apoyo financiero del *Programa de Doutorado Pleno no Exterior* de la *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES), Brasil - Código de Financiamento 001, bajo el proceso n.º 88881.173616/2018-01.

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, a mis directores de tesis, Adriana y Vicenç, por su apoyo incondicional, dedicación y disponibilidad para orientarme y enseñarme. Sin sus incansables esfuerzos, no habría sido posible llegar a finalizar esta investigación.

Muchas gracias a los profesores de Matemáticas, Graciela, Isaura, Letícia, Lucas, Natali, Roger A., Roger R. y Vera, quienes participaron como sujetos de esta investigación, por su dedicación y participación en el dispositivo formativo desarrollado, crucial para la realización de esta tesis doctoral. Además, agradezco al profesor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, por su apoyo y dedicación para la realización del curso de extensión en la UFRGS.

Al *Programa de Doutorado Pleno no Exterior* de la *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES), Brasil, por la asistencia y apoyo financiero brindado de fundamental importancia para la realización de esta investigación.

Al profesorado y a la coordinación del Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona por su competencia y dedicación.

A los compañeros y colaboradores que, de alguna forma, estuvieron presentes a lo largo de esta investigación, apoyándome, animándome y colaborando con mi aprendizaje durante mi doctorado. En particular a Alicia, Telesforo, Carlos, Gemma, Roser y Javier por sus conversaciones, compañerismo y valiosos aportes a esta investigación.

A los miembros de mi familia, que siempre estuvieron conmigo, apoyándome y confiando en mi potencial. En particular a mi madre Ledi, un ejemplo de mujer y profesora, por sus enseñanzas y por alentarme a continuar.

A los profesores miembros del tribunal examinador, por aceptar evaluar este trabajo de tesis.

Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina a aprender.
Paulo Freire.

Índice

Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1. Motivación.....	1
1.2. Justificación y contexto de la investigación	4
1.3. Estructura de la memoria de tesis	7
Capítulo 2. Objetivos	9
2.1 Objetivo general	9
2.2 Objetivos específicos.....	9
Capítulo 3. Marco teórico	11
3.1. <i>Lesson Study</i>	11
3.1.1 <i>Lesson Study</i> : caracterización, objetivos y etapas	11
3.1.2 <i>Lesson Study</i> en el mundo occidental.....	16
3.2. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos	21
3.2.1 EOS: problemas, herramientas metodológicas y tipos de análisis	21
3.2.1.1 Los cuatro primeros tipos de análisis didáctico propuestos por el EOS.....	24
3.2.1.2 El quinto tipo de análisis didáctico propuesto por el EOS: Criterios de Idoneidad Didáctica.....	28
3.2.2 Articulación entre el EOS y otros marcos teóricos.....	34
Capítulo 4. Metodología.....	39
4.1 Etapa metodológica 1: profundización teórica sobre LS y CID.....	41
4.2 Etapa metodológica 2: Diseño y aplicación un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID.....	54
4.2.1 Diseño, aplicación y análisis de un ciclo formativo: estudio piloto	54

4.2.2	Diseño e implementación de un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID: contexto y participantes	57
4.3	Etapa metodológica 3: Papel que tienen los CID en una experiencia de LS	65
4.4	Etapa metodológica 4: Análisis del desarrollo de la reflexión en los profesores de matemáticas participantes del curso	69
Capítulo 5. Resultados e discussão		85
5.1	Complementariedades entre o LS e os CAD	86
5.2	Desenho e aplicação de um ciclo formativo que combina a abordagem LS e os CAD	94
5.2.1	Resultados do desenho e implementação do curso piloto	94
5.2.2	Desenho do curso	101
5.2.3	Implementação do curso	105
5.3	Papel dos CAD em uma experiência de LS	232
5.4	Desenvolvimento da reflexão em um curso que combina o LS e os CAD	263
Capítulo 6. Conclusões.....		321
6.1	Conclusões relacionadas a cada objetivo específico	321
6.1.1	Conclusões sobre o objetivo específico 1	321
6.1.2	Conclusões sobre o objetivo específico 2	323
6.1.3	Conclusões sobre o objetivo específico 3	325
6.1.4	Conclusões sobre o objetivo específico 4	327
6.2	Limitações e perspectivas futuras da pesquisa	328
Publicaciones derivadas de la tesis		331
Referencias		335
Anexos		347
Anexo 1. Proposta da aula de pesquisa no Ensino Fundamental.....		349
Anexo 2. Redesenho da aula de pesquisa no Ensino Fundamental		353

Anexo 3. Transcrição da entrevista com P4	375
Anexo 4. Questionário final aplicado aos professores participantes do curso	389
Anexo 5. Termo de aceitação assinado pelos participantes do curso piloto.....	391
Anexo 6. Termo de aceitação assinado pelos professores participantes da pesquisa.	393

Lista de abreviaturas

- AOS – Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática
BNCC – Base Nacional Comum Curricular
CAD – Critérios de Adequação Didática
CANP – *Capacity and Network Project*
CCDM – Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos
CCPPM – Grupo de Conocimientos, Creencias y Prácticas de Profesores que enseñan Matemáticas
CD – Configuración Didáctica
CELEPI – Centro de Estudios de Lingüística Aplicada y Educación de Profesores de Inglés como Lengua Extranjera
CID – Criterios de Idoneidad Didáctica
CPEIP – Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile
CS – Conflicto semiótico
EDCCP – Experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor
EOS – Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos
ESO – Enseñanza Secundaria Obligatoria
FS – Función Semiótica
IA1 – Intereses y necesidades
IA2 – Actitudes
IA3 – Emociones
IC1 – Conocimientos previos
IC2 – Adaptación curricular a las diferencias individuales
IC3 – Aprendizaje
IC4 – Alta demanda cognitiva
ICMI – *International Commission on Mathematical Instruction*
IE1 – Errores
IE2 – Ambigüedades
IE3 – Riqueza de procesos
IE4 – Representatividad de la complejidad del objeto que se va enseñar
IEC1 – Adaptación al currículo
IEC2 – Conexiones intra e interdisciplinares
IEC3 – Utilidad socio-laboral
IEC4 – Innovación didáctica
II1 – Interacción profesor-alumno
II2 – Interacción entre alumnos
II3 – Autonomía
II4 – Evaluación formativa
IM1 – Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)
IM2 – Número de alumnos, horario y condiciones del aula
IM3 – Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutorización, tiempo de aprendizaje)
IME – Instituto de Matemática e Estatística
LS – *Lesson Study*
NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RL – *Research Lesson*
RS – Rio Grande do Sul
TDE – *Teacher Development Experiment*
TEC – Teoría extendida de las conexiones matemáticas
TFM – Trabajo de fin de máster
TGI – Teoría de la Génesis Instrumental
TO – Teoría de la Objetivación
TP – Teorema de Pitágoras
TRRS – Teoría del registro de representación semiótica
UB – Universitat de Barcelona
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

Índice de figuras

Figura 1. Objetivos de la tesis doctoral.	10
Figura 2. Ciclo de un <i>Lesson Study</i>	12
Figura 3. Esquema que relaciona los objetivos específicos y las etapas metodológicas.....	41
Figura 4. Prisma que el profesor muestra a los alumnos	45
Figura 5. FS presentes en la CD1	47
Figura 6. Tarea propuesta por el profesor P	50
Figura 7. Regla del problema	51
Figura 8. Formulario de registro de cursos de Google	61
Figura 9. Póster de difusión del curso	61
Figura 10. Formulario de <i>Google</i> para la selección de profesores participantes.....	62
Figura 11. Gráfica de la evolución de la mejora de la reflexión del Criterio de Idoneidad Cognitiva	83
Figura 12. Slides de apresentação da estrutura do curso de extensão	106
Figura 13. Registro do momento do curso onde os professores se apresentaram	107
Figura 14. Conjunto de slides do <i>PowerPoint</i> sobre LS apresentado no curso.....	108
Figura 15. Registro da discussão e divisão dos dois grupos de LS	108
Figura 16. Fotos do material confeccionado pelos alunos de P4.....	129
Figura 17. Momento da aula onde P4 tenta mostrar que a soma das áreas dos quadrados de lado três e quatro era equivalente a área do quadrado de lado cinco	131
Figura 18. Registro das respostas dos estudantes no <i>chat</i> do <i>YouTube</i>	133
Figura 19. Slide da apresentação de evidência de uso implícito do CAD na sessão 7 do curso .	141
Figura 20. Quadro com perguntas e respostas associadas a cada uma das dimensões dos CAD	145
Figura 21. Hexágono regular dos CAD apresentado aos participantes do curso.	146
Figura 22. Representação icônica do triângulo apresentada por Adriana	154
Figura 23. Exemplo de definição de função logarítmica apresentado na sessão 8.....	156
Figura 24. Erro de procedimento apresentado por Adriana na sessão 8.....	157
Figura 25. Exemplo de metáfora ao trabalhar gráfico de funções.....	159
Figura 26. Momento da sessão 8 do curso onde Adriana explica a metáfora em forma de gestos	159

Figura 27. Representação dos 35 <i>hexaminós</i> possíveis	161
Figura 28. Momento da sessão 8 quando os professores dizem que <i>hexaminós</i> formam cubos .	162
Figura 29. Significado do coeficiente angular como inclinação da reta.....	165
Figura 30. Momento da sessão 8 onde PI apresenta um exemplo de situação problema que apresenta o significado algébrico do coeficiente angular	166
Figura 31. Exemplo de situação problema com um significado funcional do coeficiente angular	167
Figura 32. Exemplo de situação problema que apresenta o significado trigonométrico do coeficiente angular.....	168
Figura 33. Momento da sessão 9 onde PI apresenta um exemplo de conhecimento prévio como falsa ideia ou ideia equivocada.....	175
Figura 34. Momento da sessão 9 onde PI apresenta um exemplo de situação problema onde o aluno aplica o TP a um triângulo não retângulo.....	175
Figura 35. Problema e soluções apresentadas pelos professores.....	182
Figura 36. Conjunto de slides apresentados por P3, análise da aula CAD de meios	196
Figura 37. Estrutura dinâmica da aula	204
Figura 38. Esquema, apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado geométrico parcial 1 do TP.....	207
Figura 39. Esquema, apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado geométrico parcial 2 do TP.....	208
Figura 40. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado aritmético-algébrico do TP	209
Figura 41. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta a complexidade do TP na matemática	210
Figura 42. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta a complexidade do TP na da aula desenvolvida na fase 1 do curso	211
Figura 43. Quadro resumo da análise da aula a partir do viés do CAD cognitivo apresentado por P7 e P8 na sessão 13 do curso	215
Figura 44. Quadro resumo da análise da aula com o uso dos CAD apresentado por PI na sessão 14 do curso	219

Figura 45. Proposta de sequência didática com quatro blocos de aulas apresentado por PI na sessão 14 do curso	220
Figura 46. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Epistêmica.....	233
Figura 47. Experimento sobre TP apresentado.....	234
Figura 48. Registro do momento em que P2 apresenta a construção no triângulo retângulo	237
Figura 49. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Cognitiva.....	244
Figura 50. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação de Interação.....	245
Figura 51. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação de Meios.....	249
Figura 52. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Afetiva.....	254
Figura 53. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Ecológica.....	256
Figura 54. Comentários dos participantes sobre os erros e análise dos especialistas.....	266
Figura 55. Comentários dos participantes sobre as ambiguidades e análise dos especialistas....	269
Figura 56. Quadro apresentado por PI que mostra o nível de uso dos processos matemáticos usados na aula sobre o TP	273
Figura 57. Nível de uso implícito do CAD Epistêmico (fase 1 do curso).....	281
Figura 58. Nível de uso explícito e correto do CAD Epistêmico (fase 3 do curso)	281
Figura 59. Nível de uso implícito do CAD Cognitivo (fase 1 do curso).....	282
Figura 60. Nível de uso explícito e correto do CAD Cognitivo (fase 3 do curso)	282
Figura 61. Nível de uso implícito do CAD de Interação (fase 1 do curso)	289
Figura 62. Nível de uso explícito e correto do CAD de Interação (fase 3 do curso).....	289
Figura 63. Nível de uso implícito do CAD de Meios (fase 1 do curso).....	299
Figura 64. Nível de uso explícito e correto do CAD de Meios (fase 3 do curso)	299
Figura 65. Nível de uso implícito do CAD Afetivo (fase 1 do curso).....	306
Figura 66. Nível de uso explícito e correto do CAD Afetivo (fase 3 do curso).....	306
Figura 67. Nível de uso implícito do CAD Ecológico (fase 1 do curso).....	316
Figura 68. Nível de uso explícito e correto do CAD Ecológico (fase 3 do curso).....	316

Índice de cuadros

Cuadro 1. Componentes e indicadores de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID)	31
Cuadro 2. Configuración Didáctica (CD1).....	46
Cuadro 3. Fases y etapas del curso	60
Cuadro 4. Nivel de atribución para el uso implícito de cada componente de los CID.....	66
Cuadro 5. Escala de valoración para el uso explícito y correcto de cada componente de los CID	71
Cuadro 6. Cuadro de la evolución de la mejora de la reflexión del Criterio de Idoneidad Cognitiva	82
Quadro 7. Concordâncias entre os critérios presentes em um ciclo de LS e os CAD.....	90
Quadro 8. Critérios de avaliação para a atividade de verificação experimental do TP criado no redesenho da aula.....	225
Quadro 9. Quadro que compara o nível de uso dos componentes dos CAD nas fases 1 e 3 do curso	316

Capítulo 1. Introducción

Esta tesis doctoral, titulada *Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas*, tiene su origen en dos ámbitos. El primero, es la trayectoria que la doctoranda ha seguido, desde su formación académica como profesora de matemáticas, en el mundo de la enseñanza de las matemáticas; en particular en su etapa como profesora de matemáticas de la educación básica y, también, en las experiencias vividas en el ámbito de la formación de profesores en el contexto brasileño. El segundo, es el proyecto de investigación y desarrollo en el cual se enmarca esta investigación.

En este capítulo, se explica, primero, desde el punto de vista personal, la motivación de la doctoranda para realizar este trabajo de investigación (apartado 1.1). En segundo lugar, desde el punto de vista de la revisión de la literatura de trabajos de investigación previos y del proyecto I+D en el cual se enmarca esta tesis, se justifica la relevancia del problema investigado (apartado 1.2). Por último, en el apartado 1.3 se explica la estructura de la memoria de tesis que aquí se presenta.

1.1. Motivación

Esta sección, escrita en primera persona, tiene como objetivo dar a conocer al lector algunos pasajes de mi historia académica y profesional que, de alguna manera, han sido relevantes para la génesis y desarrollo de esta tesis.

Así, comienzo este apartado señalando los principales factores que contribuyeron a mi elección de la profesión, describo mis primeras experiencias docentes y concluyo con lo que ha sido, desde mi punto de vista, una búsqueda de respuestas a cuestiones relacionadas con la formación docente y la mejora de la calidad en la enseñanza de las matemáticas.

Aprender, del latín *apprendere*, significa comenzar a tener conocimientos sobre, comenzar a poseer destreza técnica, comenzar a comprender mejor, o incluso percibir a partir de la experiencia. Personalmente, creo que venimos a este mundo para aprender. Y esto es lo que me motiva en todos los ámbitos de mi vida. Desde muy temprana edad descubrí que disfrutaba mucho aprendiendo. Es cierto que no siempre me gustó la escuela, pero aprender siempre me ha gustado.

La profesión de docente, que tanto me fascina, ha tenido un papel muy relevante en la historia de mi familia. Mi madre tiene cuatro hermanos y todos, incluso ella, son profesores. Puedo decir que mi primer contacto con esta profesión proviene de mi familia. Además, asistí a la escuela

como alumna mientras en mi casa seguía las experiencias de mi madre como profesora, de esta manera, incluso antes de convertirme en profesora, pude experimentar la rutina de esa actividad profesional.

A medida que avanzaba en los grados escolares, mi interés por las clases de matemáticas se hizo cada vez más evidente. Desde muy pequeña, realizaba las actividades propuestas con mucho provecho y dedicación; incluyendo tareas extraescolares, que realizaba con mucha autonomía. Por otra parte, ayudaba a mis compañeros que tenían dificultades para entender las matemáticas. Cuando terminé el bachillerato, ya estaba decidida a hacer el examen de ingreso al grado de Licenciatura en Matemáticas.

Buscando poder estudiar lo que me había propuesto, ingresé en la *Universidade Federal de Rio Grande do Sul* (UFRGS) en el 2003 y, al año siguiente, inicié una práctica docente en una asignatura donde pude estar en contacto directo con un grupo de alumnos por primera vez. En esta asignatura, los estudiantes de pregrado participaban en un proyecto de extensión, cuyo principal objetivo era asistir y orientar a los alumnos de la escuela básica en la comprensión de los conceptos estudiados en el horario de las clases de matemáticas. Para ello, tuve que explorar algunas estrategias para la enseñanza de las matemáticas, entre ellas: el uso de tecnologías digitales y materiales manipulativos; y crear, diseñar e implementar situaciones, problemas y ejercicios de matemáticas. Desde mi participación en este curso de pregrado, me di cuenta que la tarea de ser profesora representaba un desafío para mí, especialmente con relación a cómo enseñar los conceptos matemáticos y cuál podía ser la metodología de enseñanza más adecuadas para enseñarlos.

Durante tres semestres académicos del grado de Licenciatura en Matemáticas pude trabajar con alumnos de varios niveles educativos. A partir de esta práctica, tuve la oportunidad de comenzar a desarrollar competencias y conocimientos importantes de un docente, tales como: autonomía, compromiso individual y colectivo, conocer diferentes herramientas y métodos de enseñanza. Estas prácticas me brindaron la posibilidad de vivir una situación práctica cercana a la realidad que iba a vivir después de la graduación, y, además, me permitieron experimentar una propuesta de cooperación entre profesores, estudiantes de grado y alumnos de la etapa básica.

Después de terminar el grado en Licenciatura en Matemáticas, comencé a poner en práctica lo aprendido durante mis experiencias en el curso de pregrado y, además, fui generando nuevo conocimiento a partir de mi experiencia como profesora de matemáticas en la enseñanza básica.

Antes de incorporarme al curso de maestría, ya había trabajado en todos los grados de secundaria y bachillerato como profesora de matemáticas. Durante mi experiencia en el aula, siempre he intentado contestar cuestiones relacionadas con "cómo se enseña" y "cómo se aprende".

Cuando trabajé en la escuela secundaria, descubrí que, la mayoría de mis estudiantes, tenían dificultades para aprender muchos conceptos de la matemática escolar. Desde entonces, sentí la necesidad de investigar las principales causas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de los grados de Educación Básica.

A partir de mis experiencias, llegué al convencimiento de que las innovaciones en la enseñanza no solo dependen de un cambio de las concepciones de los profesores, sino que también es necesaria una reestructuración didáctico-metodológica del trabajo en el aula. En este sentido, llegué al convencimiento de que era necesario renovar la enseñanza actual de las matemáticas, no sólo en cuanto a los temas y contenidos a enseñar, sino también en cuanto a las estrategias de enseñanza. Desde esta perspectiva, consideré importante realizar investigaciones que brinden apoyo a los docentes, en el sentido de mejorar su formación y su enseñanza de las matemáticas, y, además, llegué al convencimiento de que se pueden realizar a partir del desarrollo, adecuación y aplicación de dispositivos formativos que pueden contribuir a la búsqueda de una enseñanza en la que el alumno realice un aprendizaje significativo.

En estos años tratando de intentar que mis alumnos aprendieran, me di cuenta que, en realidad, era más complicado de lo que ingenuamente pensaba. Por esta razón, decidí seguir aprendiendo para enseñar a aprender. Aprendí un poco más participando en cursos de extensión y estudiando la maestría en Enseñanza de las Matemáticas del *Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática* de la UFRGS. También he estado colaborando en proyectos orientados a la formación de profesores de matemáticas, como el *Math Circle* y las Olimpiadas de Matemáticas en las Escuelas Públicas, además de buscar más información participando en eventos de Educación Matemática (congresos nacionales e internacionales).

De todos modos, después de casi una década intentando aprender a enseñar y también intentando hacer que mis alumnos aprendieran, decidí correr más riesgos y dejar de enseñar por un tiempo y buscar una educación de tiempo completo para entender mejor la formación del docente de matemáticas. Después de un poco de esfuerzo y mucho apoyo de grandes amigos y colegas en el campo, que tenían el mismo objetivo que yo, entender cómo se aprende y cómo se enseña, encontré la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas del programa de doctorado

“Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades” de la Universidad de Barcelona, que parecía que podía dar algunas respuestas a las preguntas que me interesaban: ¿Cómo se aprende? ¿Cómo se enseña? ¿Cómo es una clase? ¿Cómo se hace una buena clase de matemáticas, donde los alumnos aprenden y el profesor enseña y también donde los alumnos enseñan y el profesor aprende? ¿Qué criterios debo tener en cuenta para preparar una buena clase? ¿Y qué criterios debo tener en cuenta para evaluar esta clase y saber si su resultado fue el aprendizaje de los alumnos?

Motivada por todas estas cuestiones, y con la ayuda de mis directores de tesis, llegué a formular las preguntas y objetivos de esta tesis doctoral y al desarrollo de esta investigación aplicada en el contexto brasileño, donde se realizó un curso de formación para docentes de matemáticas que combina el *Lesson Study* y los Criterios de Idoneidad Didáctica. La certeza que tengo ahora, al haber finalizado la investigación que se presenta, es que aprendí mucho y que, también, lo han hecho las personas que han colaborado en ella, mis directores de tesis y los profesores participantes en el curso de formación.

1.2. Justificación y contexto de la investigación

Recientemente, Godino, Batanero y Font (2019) retoman la discusión sobre cuáles son las finalidades del área de la Didáctica de las Matemáticas y describen que esta disciplina científica se enmarca en tres grandes ejes: a) cuestiones teóricas del propio conocimiento matemático (sus características ontológicas, epistemológicas, semióticas); b) cuestiones descriptivas, explicativas, predictivas (relaciones de las cuestiones teóricas del conocimiento matemático con los procesos de enseñanza y aprendizaje), que sirven para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y c) cuestiones prescriptivas y valorativas, que sirven para guiar la mejora de dichos procesos (Font y Godino, 2011; Godino, Batanero y Font, 2019).

Uno de los actores que intervienen en los tres ejes descritos anteriormente es el profesor, en particular, el profesor de matemáticas. En ese sentido, la investigación de la reflexión sobre la práctica del profesorado es una estrategia clave para el desarrollo profesional docente que sirve, tanto para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como para su mejora. Dewey (1989), por ejemplo, afirma que un valor propio del pensamiento reflexivo es que nos libera de la actividad meramente impulsiva y puramente rutinaria, es decir, nos permite dirigir nuestras actividades con previsión y fines claros. De la misma forma, Schön (1992) resalta la

necesidad de la formación de profesionales reflexivos, enfatizando que los centros de formación de profesores deben repensar la epistemología de la práctica y los fundamentos pedagógicos en que se basan sus planes de estudio, al mismo tiempo que deben favorecer cambios en sus instituciones para que abran un espacio para la práctica reflexiva, como un elemento clave en la formación de sus profesionales. A su vez, Brockbank y McGill (2002) afirman que la reflexión es una competencia que nos permite aprender de la práctica y mejorarla. En esta misma línea, Perrenoud (2004) argumenta que, para conseguir profesores reflexivos, se necesita combinar aspectos diferentes. Por un lado, es necesario que el profesor tenga un método de reflexión (que en general puede ser similar en diferentes asuntos) y, por otro lado, son necesarias estructuras conceptuales específicas de cada disciplina.

Según Breda, Font y Pino-Fan (2018), muchas tendencias sobre la formación de profesores, sea inicial o continua, sugieren la investigación de los docentes y la reflexión sobre la práctica docente como fundamental para el desarrollo profesional y el perfeccionamiento de la enseñanza. Desde la Didáctica de la Matemática surgen diferentes propuestas que proporcionan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la reflexión, tales como: la competencia de mirar con sentido (Mason, 2002), la metodología del Estudio del Concepto (Davis, 2008), el conocimiento matemático para una enseñanza de matemáticas de calidad (Hill et al., 2008), la mirada profesional (Llinares, 2012), el *Lesson Study* (LS) (Isoda, Arcavi y Lorca, 2007) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Font, Planas, y Godino, 2010).

El LS, que es uno de los referentes de esta investigación, consiste en una actividad de investigación en el aula (Baldin, 2009; Burghes y Robinson, 2010; Fernández y Yoshida, 2004), que fomenta el desarrollo de la competencia reflexiva durante la realización de la actividad docente. Por otro lado, en la línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, tenemos el constructo CID (y su desglose en componentes e indicadores), propuesto en el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2019). En esta perspectiva, los CID pueden servir para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para evaluar sus implementaciones. En este sentido, los CID son, en primer lugar, unos principios que indican cómo las cosas deben ser hechas y, en segundo lugar, sirven para valorar el proceso de instrucción realizado (Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Los CID pueden ser utilizados como herramienta metodológica para organizar la reflexión del profesor, tal como se viene haciendo en diferentes

procesos de formación en algunos países (Esqué y Breda, 2021; Breda, Pochulu, Sánchez y Font; Font, Breda y Pino-Fan, 2017; Morales-López y Araya-Román, 2020; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Ramos, 2006; Seckel, 2016).

Las ideas descritas hasta aquí comprenden un campo complejo y singular en lo que se refiere a los aspectos de la formación del docente del área de Matemáticas, dado que el desarrollo de la reflexión sistematizada sobre la propia práctica es un elemento clave para que el docente pueda desarrollar la reflexión con la finalidad de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Con la finalidad de fomentar el desarrollo de la reflexión del profesor de matemáticas, en el 2018 se ha diseñado e implementado un proyecto de investigación y desarrollo, actualmente en curso, coordinado por el Dr. Vicenç Font y el Dr. Javier Díez Palomar del Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la *Universitat de Barcelona*, denominado *Use of the Lesson Study and the Concept of Didactic Suitability in the Development of the Competence in Analysis and Didactical Intervention in the Frame of Mathematics Teacher's Training*¹, promocionado por el Programa Estatal de Generación de Conocimiento y Fortalecimiento Científico y Tecnológico del Ministerio de Ciencia Innovación y Universidades del Gobierno de España. El objetivo del proyecto es diseñar dispositivos de formación utilizando los CID y el LS en la formación profesional inicial y continua de profesores de matemáticas de primaria y secundaria – en España y en los siguientes países latinoamericanos: Panamá, Ecuador, Chile, Perú, México, Argentina, Costa Rica y Brasil – con el fin de desarrollar la reflexión y evaluar la competencia en análisis e intervención didáctica, para que los participantes puedan realizar prácticas docentes orientadas a la excelencia, que les permitan diseñar e implementar secuencias didácticas. Además, se pretende investigar, en el marco de los dispositivos de formación desarrollados, cómo se desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica y cómo este desarrollo incide en la implementación de prácticas docentes orientadas a la excelencia.

Esta tesis doctoral, es una de las investigaciones enmarcadas en el proyecto de investigación acabado de mencionar y busca contestar a la siguiente pregunta: ¿de qué forma se desarrolla la

¹ Código del proyecto: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

² Página web del proyecto: <<https://reflexiondocenteidoneidaddidacticaylessonstudy.wordpress.com/>>.

reflexión de los profesores de matemáticas en ejercicio, cuando estos participan en un ciclo formativo basado en el LS y los CID? Para contestar a esa pregunta, el objetivo general de esta tesis es investigar de qué forma un dispositivo formativo basado en el LS y los CID promueve el desarrollo de la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, valoración y rediseño de secuencias de tareas.

En las siguientes publicaciones se justifica la relevancia de la pregunta de investigación a la que pretende dar respuesta esta tesis:

- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2019). desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica en un ciclo formativo que combina el uso de los criterios de idoneidad didáctica y la metodología de estudios de clases. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 531 - 538.
- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., y Seckel, M. J. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. In: *Actas del 7th International Congress of Educational Sciences and Development*, (p. 233-233). Asociación Española de Psicología Conductual (AEPC), Granada.

1.3. Estructura de la memoria de tesis

Esta memoria de tesis, de mención internacional, está escrita en dos idiomas, castellano y portugués, y su estructura es la siguiente: a) En idioma castellano se presenta el capítulo 1 de introducción; el capítulo 2, donde se explica el objetivo general y los específicos; el capítulo 3, donde se detalla el marco teórico utilizado como referencia para el diseño, implementación y análisis de los resultados del curso formativo realizado, en particular se explica la metodología LS y los CID y otras herramientas de análisis que propone el EOS; y el capítulo 4, donde se explican, con detalle, las 4 etapas metodológicas seguidas para alcanzar los objetivos planteados. b) En idioma portugués, se presenta el capítulo 5, con los resultados alcanzados y una discusión y consideración sobre los mismos; y el capítulo 6, donde se exponen las conclusiones sobre la investigación, sus limitaciones y perspectivas futuras.

Capítulo 2. Objetivos

2.1 Objetivo general

En esta investigación se pretende analizar de qué forma un dispositivo formativo basado en el *Lesson Study* (LS) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) promueve el desarrollo de la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, valoración y rediseño de secuencias de tareas.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos.

2.2 Objetivos específicos

- ✓ O1) Realizar una profundización teórica sobre los LS y los CID, buscando: i) comprender cómo cada uno propone el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y ii) complementariedades y diferencias entre ambos enfoques.
- ✓ O2) Diseñar y aplicar un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID, cuyo objetivo sea que los participantes diseñen, implementen, valoren y rediseñen secuencias de tareas para sus alumnos de enseñanza básica.
- ✓ O3) Investigar el papel que tienen los CID en una experiencia de LS, antes de que dicha herramienta haya sido enseñada a los participantes como pauta para organizar su reflexión, en el marco de un dispositivo formativo diseñado para combinar ambas metodologías.
- ✓ O4) Analizar de qué forma el ciclo formativo implementado desarrolla la reflexión en los profesores de matemáticas participantes.

Sintéticamente, la Figura 1 ilustra cómo los objetivos específicos están relacionados con el objetivo general.

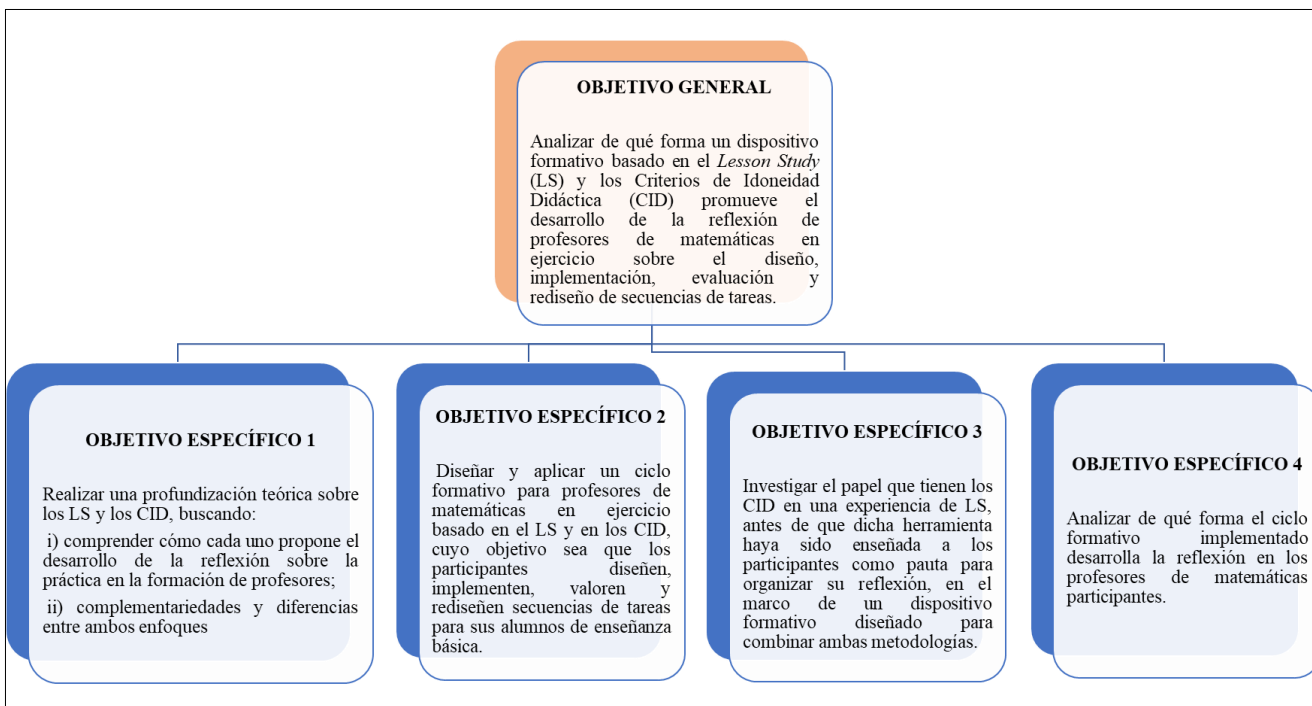


Figura 1. Objetivos de la tesis doctoral.

Fuente: elaboración propia.

En el transcurso de esta memoria, iremos ampliando la Figura 1 conforme se va describiendo el proceso metodológico de la investigación.

Capítulo 3. Marco teórico

En el primer apartado de este capítulo se presenta el marco teórico referente al *Lesson Study* (LS) y se hace una revisión de literatura respecto a este enfoque. En un segundo apartado se presenta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticas (EOS). En particular, se explican los cinco tipos de análisis propuesto por este enfoque y, con bastante detalle, la herramienta propuesta para realizar el quinto tipo de análisis, los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID). También se hace una revisión de la literatura previa, dado que esta herramienta, además de ser parte del marco teórico utilizado en esta tesis doctoral, es la herramienta usada para el diseño del curso formativo y también, la principal herramienta utilizada para el análisis de los datos de esta investigación.

3.1. *Lesson Study*

En este apartado se explica en qué consiste el *Lesson Study* (LS). Para ello, se presenta su caracterización y objetivos, y, también, las etapas de un ciclo completo de LS. Además, se revisan algunas investigaciones realizadas con esta perspectiva en el ámbito de la formación de profesores de matemáticas en el contexto del mundo occidental, en particular, las realizadas en Brasil.

3.1.1 *Lesson Study*: caracterización, objetivos y etapas

El *Lesson Study* (en inglés), Estudio de Clases (en español), *Estudos de Aula* (en portugués) o el *Jugy Kenkyuu* (en japonés) surgió como una estrategia de desarrollo profesional docente cuyo foco es el aprendizaje colectivo y la práctica lectiva de los profesores. Se focaliza en el aprendizaje colectivo a partir de la práctica de enseñanza. Consiste, básicamente, en el diseño colaborativo y detallado de una clase, en su implementación y observación directa en el aula, y en un análisis conjunto posterior (Fernández y Yoshida, 2004; Hart, Alston y Murata, 2011; Lewis, 2002; Murata y Takahashi, 2002; Wang-Iverson y Yoshida, 2005). El LS es una metodología de trabajo docente apoyada en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que al mismo tiempo que mejoran el aprendizaje de los estudiantes, mejoran también la práctica docente y el desarrollo profesional de los profesores.

La idea es que un grupo de profesores y especialistas se reúnan con una problemática en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planeen una lección para que el alumno aprenda, y, por último, examinen y discutan lo que ellos observan en dicha implementación. A través de

múltiples interacciones, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo la enseñanza incide sobre él.

Según investigadores internacionales, existen diferentes modelos de ciclos de LS. La Figura 2 ilustra un ejemplo de un ciclo de LS que tiene lugar en Japón, y considera las siguientes etapas: estudio del currículo y metas; planificación de la clase; realización y observación de la clase; reflexión conjunta sobre los datos registrados y rediseño y nueva implementación de la clase.

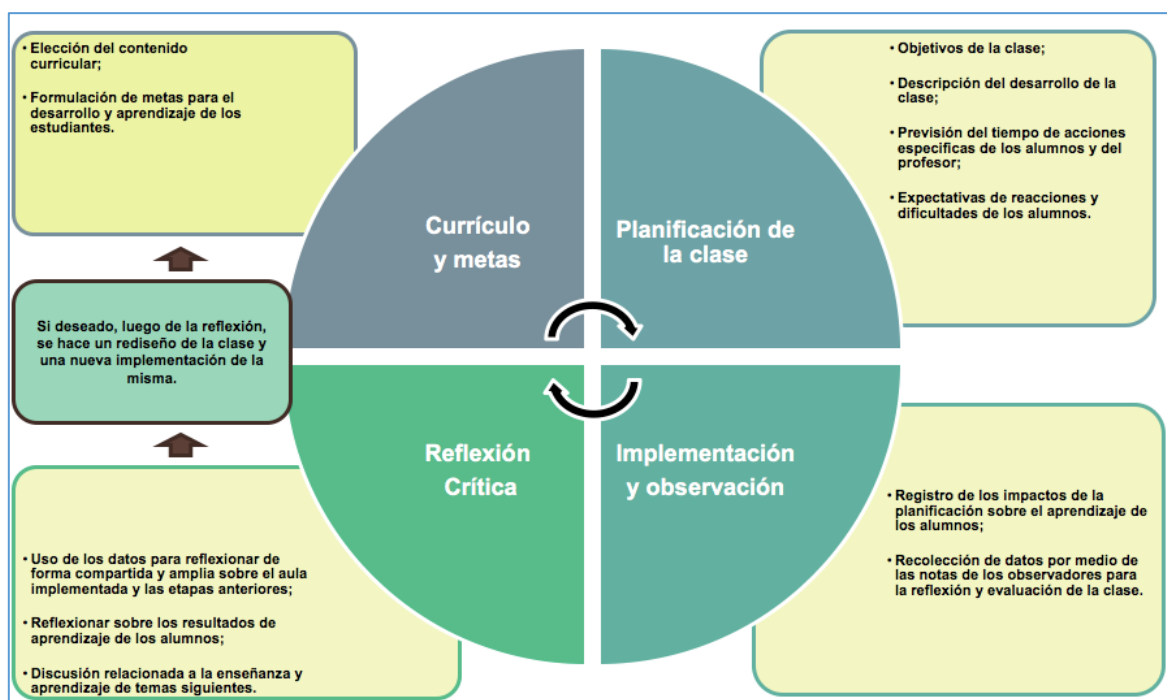


Figura 2. Ciclo de un *Lesson Study*.
Fuente: Adaptación de Murata (2011).

Para que se lleve a cabo el desarrollo de un ciclo completo de LS, existen algunos criterios que deben ser considerados para cada etapa del ciclo, (Hurd y Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013).

En la primera etapa, *currículo y metas*, no se trata de diseñar una clase basada solo en los tópicos del currículo vigentes, hay que analizar cómo cada tópico del currículo se presenta y se relaciona con el uso de diferentes materiales en diferentes etapas educativas. Para ello, es imprescindible que el grupo de profesores conozca el currículo de la institución educativa en la cual trabaja (currículo local), así como el currículo regional y nacional. También es importante que se tengan presente los currículos de otros países, dado que estos pueden ser fuente de inspiración para el aula diseñada que será investigada, es decir, la *Research Lesson* (RL); la comparación entre diferentes currículos puede ayudar al grupo de profesores a elegir la mejor manera de que sus

alumnos aprendan un determinado contenido. La consulta no debe restringirse solamente a los currículos, ya que se debe de ampliar con el análisis diferentes materiales didácticos, opiniones de profesionales expertos en el contenido del tema y, también, investigaciones científicas que abordan la enseñanza del tema. En esta fase se debe tener en cuenta tres grandes preguntas: 1) ¿cuáles son las comprensiones que deben tener los estudiantes para desarrollar determinado contenido y cómo ellos las deben desarrollar?; 2) ¿Cómo los currículos tratan determinado tema y cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno? ¿Cuáles son los impactos de los modelos, ejemplos y abordajes utilizados en cada currículo?; 3) ¿Lo que las investigaciones nos dicen sobre la comprensión de los alumnos y cómo esta debe ser desarrollada? Se recomienda, además, que toda esta discusión sea registrada y que, por una parte, se especifiquen cuáles son los conceptos que los alumnos deben haber aprendido previamente (conocimientos previos) relacionados con el tema estudiado y, por otra parte, los conceptos que se aprenderán en la RL. Estos estudios preliminares fundamentaran la formulación de las metas de aprendizaje que se van a proponer en la próxima fase (planificación de la RL).

La segunda etapa, *planificación de la clase*, debe iniciarse con la elección del tema de la RL. Por ejemplo, el grupo de profesores puede desear que la clase desarrolle el razonamiento geométrico en los alumnos mediante el descubrimiento de patrones. El grupo de profesores debe estar convencido de la importancia del tema para el desarrollo de un LS que justifique el esfuerzo personal y colectivo. Además, en esta fase, debe de explicitarse cómo la planificación de esta clase va a permitir alcanzar las metas generales fijadas en todas las etapas de la RL que se está diseñando. El siguiente paso es la concreción de las metas específicas de la clase, por una parte, por medio del estudio de los materiales que serán utilizados y, por otro lado, por la concreción de cómo será la evaluación y sobre qué será enfocada. Esta segunda etapa de la RL orientará a los profesores en la observación de los aprendizajes de los alumnos.

La planificación de la clase debe prever las reacciones y dudas de los alumnos. En este sentido, el grupo de profesores debe anticipar y detallar el modo como el profesor va a gestionar la clase, que, en general, se sugiere que sea una clase basada en la indagación. Es decir, el grupo de profesores que planifica la clase debe tener en mente una clase activa que permita a los alumnos construir sus propios conocimientos. En esta línea, en un determinado momento de la resolución de un problema, el tipo de pregunta adecuada que podría hacer el profesor sería, por ejemplo: ¿qué

tipo de datos hay en el problema? ¿Qué pide el problema? ¿Ya has resuelto un problema similar? Este tipo de preguntas facilita que el estudiante construya su propio conocimiento de manera activa.

La literatura académica, los libros didácticos y expertos y profesionales de la educación pueden ayudar al grupo de profesores a que los alumnos construyan conocimiento sobre un determinado tópico. Por ejemplo, para trabajar el concepto de fracción en la educación básica, investigaciones didácticas señalan que esta noción debe ser trabajada también a partir de su relación con la medida de magnitudes y en la recta numérica, por ejemplo. Por tanto, planificar una secuencia de tareas donde se trabajen las fracciones solamente con la interpretación de parte-todo es una opción que puede limitar la comprensión amplia del concepto de fracción por parte del estudiante, restringiendo su capacidad de resolver determinados problemas y limitándolo en el aprendizaje de contenidos futuros. Evidentemente, trabajar fracciones solamente por medio de la noción parte-todo puede garantizar un mayor éxito de aprendizaje entre los alumnos, pero ese no es el objetivo que propone una RL. Por el contrario, el aprendizaje de los alumnos sobre un determinado tema debe ser lo más amplio y completo posible. Este es un aspecto importante que el grupo de profesores debe tener en cuenta en la planificación de la RL. En la planificación, el grupo también debe tener presente otros aspectos como la distribución de las sillas en el aula de clase, la organización del contenido en la pizarra, procurando que las diferentes soluciones, las justificaciones y las estrategias, es decir, que el producto de discusión de la clase esté disponible para todos los alumnos. En esta etapa también se considera el tiempo estimado y la síntesis de las ideas de los estudiantes.

Es en esta etapa, la RL, que se decide la recogida de datos de la investigación que será llevada a cabo por el grupo de profesores. El registro de la RL no es meramente un *script*, en este sentido, el profesor que implementará la clase podrá hacer cambios en algunos aspectos de la clase, bien sea por cuestiones imprevistas, o bien por considerar que, con estos cambios, se facilita mejor la construcción del conocimiento de los alumnos que de la manera como lo planificó el grupo.

En la tercera etapa del LS, *implementación y observación*, un profesor imparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para lo cual, este profesor debe estar de acuerdo en que los demás puedan presenciar su clase en vivo. En esta fase, la participación de los alumnos es activa en cada etapa de resolución de las cuestiones propuestas, desde la comprensión del problema, el establecimiento de estrategias y el análisis de la resolución. Se trata de una etapa donde se da mucha importancia al proceso de resolución de problemas, en

particular, el profesor que implementa la clase debe estimular el *Neriage*, momento en el cual los alumnos, cuidadosamente guiados por el profesor, comparten sus comprensiones, analizan, comparan y contrastan críticamente sus ideas, considerando cuestiones como eficiencia, generalización y semejanza con lo que fue aprendido. La conclusión colectiva acordada por todos se concretiza en un *Matome*, que es la síntesis del profesor sobre los conceptos aprendidos por los alumnos por medio de las tareas implementadas. En particular, la gestión de un profesor que implementa una clase basada en el LS debe ser, metafóricamente hablando, la de un maestro de orquesta, es decir, un mediador que estimule y oriente la producción activa de conocimiento del alumnado a partir de la planificación colaborativa realizada por el grupo para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos.

En la cuarta etapa, *reflexión crítica*, a continuación de la clase implementada, el grupo que ha planificado la clase junto con otros profesionales invitados que la han observado, se reúne para analizar los impactos de esta clase sobre el aprendizaje de los alumnos. En este momento, cada observador expone sus impresiones sobre la producción de conocimiento de los alumnos. Es importante que algunos puntos hayan sido observados y tomados en consideración en la discusión. Por ejemplo: ¿la clase generó conocimiento sobre el tópico por parte de los alumnos?; ¿Cuáles fueron las principales dudas de los alumnos?; ¿Hubo diversidad de pensamientos?; ¿El material elegido por el grupo de profesores fue adecuado para fomentar la motivación de los alumnos?; ¿El problema propuesto cumplió el rol de eje conductor del aprendizaje de los alumnos? Después de la reflexión del grupo es posible que los profesores realicen ajustes para una clase futura sobre el mismo tópico. En este aspecto, la planificación de la clase implementada debe ser modificada con acciones direccionadas a la mejora de lo que han considerado pertinentes. Esto corresponde al inicio de un nuevo ciclo, *rediseño y re implementación*, ubicado en un escalón de mayor madurez. En Japón, por ejemplo, el rediseño no es frecuente para la misma clase, ni para el mismo profesor, posiblemente porque ellos han acumulado mucha experiencia y reconocen con facilidad cuando alguna acción puede dificultar que los alumnos alcancen los objetivos previamente planificados por el grupo de profesores. Es decir, la nueva planificación e implementación puede ser aplicada en otras escuelas u otros alumnos, siempre incorporando las adaptaciones adecuadas a las nuevas situaciones.

3.1.2 *Lesson Study* en el mundo occidental

En la literatura reciente, el libro *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspective* (Huang, Takahashi y da Ponte, 2019), reúne textos de investigaciones actuales sobre adecuación, conceptualización y teorización del enfoque LS. Los editores presentan una colaboración internacional en investigación y adaptación de LS en treinta y ocho capítulos aportados por noventa académicos de veintiún países distintos. En el prefacio, James Hiebert Newark y James W. Stigler señalan la influencia y el alcance global de LS y mencionan que los autores de los capítulos muestran lo que se puede aportar analizando la naturaleza de LS a medida que se desarrolla en diferentes entornos educativos y para diferentes propósitos. En la primera parte del libro, hay siete capítulos que tratan de las perspectivas teóricas de LS, sintetizando e ilustrando las principales perspectivas. En la segunda parte, se presentan cinco capítulos que tratan de las perspectivas históricas y culturales de LS en Japón y China, enriqueciendo la conceptualización del LS al interpretar la actividad tal como se usa en estos países desde perspectivas históricas y culturales diferentes. En la tercera parte, en ocho capítulos, se explica la adaptación y aplicación de LS en una variedad de contextos educativos, mostrando cómo los docentes y los formadores de docentes mejoran la calidad de la enseñanza y el aprendizaje a través de esta metodología.

Los capítulos de la cuarta parte exponen informes de experiencias de la incorporación de LS en programas de formación docente de muchas partes del mundo, en ellos se hallan los aspectos organizativos y logísticos que se han modificado para incorporar la metodología LS en estos programas de formación docente. Presentar las prácticas y teorías de LS con maestros en ejercicio y futuros maestros en más de 10 países, permite al lector tener una amplia perspectiva comparativa. La quinta parte, presenta y discute estudios sobre aspectos clave del LS, como la planificación de lecciones, la discusión posterior a la lección, las teorías orientadoras, la conexión entre la investigación y la práctica. Todos los documentos de esta sección se enfocan en aspectos que son críticos para el éxito de la LS. En la sexta parte, se presenta un capítulo de John Elliott, sobre la perspectiva occidental de LS y otro de Mun Ling Lo desde la perspectiva asiática.

Los estudios de Hervas (2022) y Utimura, de Souza Borelli y Curi (2020) muestran que, además de Japón, otros países del mundo occidental han contribuido para la diseminación de esta estrategia profesional. Los Estados Unidos, por su importancia en la difusión de nuevas estrategias; Reino Unido, debido a la forma en que se usó el LS entre 2000 y 2015 y cómo se constituyó como una política pública para la formación de docentes, permitiendo una mejora en la enseñanza y el

aprendizaje de los estudiantes; Portugal y Chile, que han invertido en investigar con esta metodología cómo mejorar la práctica de los docentes, buscando mejorar también el aprendizaje de los estudiantes y Brasil, por trabajar con pequeños grupos de profesores enfocados en el desarrollo profesional docente y por generar investigaciones de maestría y doctorado basadas en el LS.

En los Estados Unidos, el LS comenzó a fines de la década de 1990 y, diez años más tarde, más de 400 escuelas ya estaban utilizando dicha estrategia profesional. En EUA el LS, conforme apuntan Lewis y Perry (2017) y Takahashi y Mcdougal (2016), funciona de la siguiente manera: el grupo de profesores decide qué funcionará con los estudiantes, luego planifican la lección, preparan tareas y estudian el tema. En la planificación de la clase, plantean algunos aspectos, como: el objetivo de aprendizaje de la clase (teniendo en cuenta el contenido a enseñar), la elección de la metodología de aprendizaje que se desarrollará, la búsqueda de indicadores de evaluación, la elección de los materiales de la clase, la decisión de pensar de antemano en lo que cada observador debe enfocar su mirada, y, en la reflexión de la clase, los maestros discuten el desarrollo de la práctica docente, abordan las percepciones que tenían sobre lo que ellos aprendieron y lo que sus alumnos necesitan para avanzar en su aprendizaje, pero, también, lo que necesitan proporcionarles en las próximas clases (Yoshida, 2012).

Conforme apunta Dudley (2014), en el Reino Unido el LS pasó por tres periodos: el primero fue una etapa exploratoria (2001 - 2005); el segundo fue una expansión nacional (2005 - 2011); y en el tercero hubo una adaptación al "Mercado Común Europeo" (2011 - 2015), que se concretizó en una política pública de formación de profesores basada en el LS. En el Reino Unido la práctica de los LS implica a profesores e investigadores que se unen para definir el tema o enfoque para el aprendizaje de los estudiantes y, también, la evaluación de los aprendizajes de los alumnos. Para este último aspecto, se utilizan datos de evaluaciones diarias de, al menos tres estudiantes, que se seleccionan de manera que evidencien diferentes desempeños en el aula. Estos alumnos son entrevistados al final de la clase, con la finalidad de verificar el alcance del aprendizaje del tema implementado.

El LS en Portugal se organizó teniendo en cuenta los pasos del LS desarrollado en Japón: la identificación del tema, problema o la dificultad de los estudiantes (muchas veces relacionadas con las pautas del plan de estudios que se utilizan en el país), la planificación de la lección, la observación de la lección (observada por investigadores del Instituto de Educación de la

Universidad de Lisboa y por el grupo de profesores participantes del LS) y la reflexión sobre la lección, que también tiene lugar de manera colaborativa (da Ponte, Baptista, Velez y Costa, 2012). Los estudios portugueses muestran que el LS ofrece potencial para promover el desarrollo profesional de los maestros participantes y que los desafíos presentados son convencer a los maestros de que la metodología se puede llevar a cabo en las escuelas con el grupo de maestros de la escuela.

En el contexto chileno, los estudios de Lorca (2007) presentan la adaptación de la metodología LS en Chile e indican que la preparación de la clase se basa en un problema identificado por los maestros y en las pautas para la enseñanza que se encuentran en los libros de texto, previamente seleccionados. Después de la lección preparada, un maestro del grupo pone en práctica lo planeado. Los maestros, los estudiantes universitarios y el investigador pueden participar en la clase observando y haciendo registros que sean significativos para ellos y que merecen ser discutidos en la sección de revisión y reflexión de la clase implementada.

En la reflexión se discuten las observaciones que cada participante hizo sobre la clase; se hacen preguntas sobre los problemas presentados en el aula, sobre la práctica del profesor, sobre el aprendizaje de los alumnos, verificando si lo planificado e implementado se acercan a los objetivos previstos. La clase puede prepararse nuevamente y luego volver a aplicarse, alimentando todo el proceso del LS. Un aspecto diferencial que merece ser destacado en Chile es que el LS se lleva a cabo en escuelas en asociación con universidades que trabajan con cursos de formación inicial y continua de profesores (Isoda, Arcavi y Lorca, 2007).

En Brasil las experiencias de LS también se basan en las etapas del LS de Japón, es decir, se identifica el tema, se planifican las actividades con un estudio más profundo del tema que se desarrollará, se monitorea el trabajo en el aula y se hace una reflexión posterior a la clase.

Aunque la literatura sobre LS es extensa en todo el mundo, la investigación bajo este enfoque en Brasil, en el campo de la enseñanza y formación de profesores de matemáticas, es aún escasa. A partir de una revisión de los estudios de LS realizados en Brasil, destacamos el de Félix (2010), quien señala las dificultades en la aplicación de esta estrategia de desarrollo profesional docente con el profesorado brasileño, debido a su carácter marcadamente individualista. Además, también hay que destacar la investigación de Carrijo Neto (2013), en la que reflexiona sobre la práctica docente relacionada con la enseñanza de la multiplicación y división, máximo común divisor, fracción, números decimales y geometría, con un grupo de sexto curso en un contexto de

LS adaptada a la realidad brasileña. También es de destacar el trabajo de Coelho, Oliveira y Vianna (2014), quienes analizan las contribuciones del enfoque LS en la formación inicial del profesorado. Otra investigación importante es la de Utimura (2015), quien destaca que los docentes que participaron en la investigación en un contexto de LS evolucionaron tanto en sus concepciones matemáticas como didácticas y, por lo tanto, se sintieron más seguros para planificar y gestionar sus clases. Además, se destaca la tesis de Bezerra (2017), por sus aportes a la comprensión de cómo aprenden los docentes que enseñan matemáticas en los primeros años de la escuela primaria y cuáles son los indicios del desarrollo profesional en el contexto de la LS; en esta tesis se concluye que la reflexión, el trabajo en grupo, la colaboración, el intercambio de experiencias, la confianza en el trabajo en grupo, el dominio de los contenidos, la relación entre teoría y práctica pedagógica, así como el apoyo de la escuela, compañeros y familia fueron determinantes para el aprendizaje del docente, principalmente, el aprendizaje relacionado con el conocimiento pedagógico del contenido. Por otra parte, Araújo (2018), con el objetivo de identificar y describir evidencias sobre la problematización del conocimiento especializado del docente de matemáticas en un contexto de LS, concluye que existe un conocimiento movilizado por los docentes participantes sobre la temática de función, además de revelar evidencia del desarrollo del pensamiento funcional.

Richit, da Ponte y Tomkelski (2019) y Richit y Tomelski (2020), con el objetivo de identificar desafíos y adaptaciones de un proceso de formación y su potencial para promover el aprendizaje y el desarrollo profesional de un grupo de docentes de matemáticas en el contexto de LS, concluyen que los participantes sintieron que hubo un cambio en su práctica profesional en aspectos como: la planificación de clases, el trabajo colectivo y la negociación de decisiones y actividades; y que la experiencia les brindó un aprendizaje profesional relacionado con la profundización de los contenidos curriculares para la docencia en el aula, así como recursos didácticos para la enseñanza de temas matemáticos y también sobre el trabajo colaborativo en el contexto escolar y la reflexión sobre prácticas profesionales. Además, Richit, da Ponte y Tomasi (2021), al examinar aspectos de la colaboración profesional en una LS realizada con profesores de matemáticas de los últimos años de la escuela primaria en las escuelas públicas del estado de Rio Grande do Sul, muestran que la dinámica utilizada en el LS aprovechó varios aspectos básicos de la colaboración, como el estímulo y el apoyo mutuos, la cooperación y la reflexión compartida.

Actualmente, hay cinco grupos de investigación que trabajan con el abordaje LS en Brasil:

- a) el grupo coordinado por la profesora Yuriko Baldin, de la Universidad Federal de São Carlos;

b) el Grupo del Sábado, de la *Universidade Estadual de Campinas* (UNICAMP); c) el Centro de Estudios de Lingüística Aplicada y Educación de Profesores de Inglés como Lengua Extranjera (CELEPI), de la *Universidade Federal do Oeste do Paraná*; d) el Grupo de Conocimientos, Creencias y Prácticas de Profesores que enseñan Matemáticas (CCPPM), de la *Universidade Cruzeiro do Sul*; y e) el grupo de formación continuada del Instituto de Matemática de la *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS) en conjunto con la Universitat de Barcelona, donde trabajan la combinación del LS y la metodología Idoneidad Didáctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Vale la pena señalar que solo dos países entre los estudiados, Japón y el Reino Unido, desarrollan o han desarrollado una política de capacitación a gran, mediana y pequeña escala, basada en el LS, sin embargo, el recorte de presupuesto llevó a los municipios de Reino Unido a reducir el gasto en mantenimiento de equipos que trabajasen en esta capacitación (Dudley, 2015). Estados Unidos, Portugal y Brasil han desarrollado investigaciones con pequeños grupos de docentes utilizando el LS en el aula. En los Estados Unidos, ya hay indicadores que nos permiten ver que los resultados en el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo profesional de los maestros son significativos cuando se utiliza el LS, sin embargo, el número de maestros que se adhieren a esta metodología ha disminuido, argumentando que hay que dedicar mucho tiempo para hacer un ciclo completo de LS y que, por consiguiente, no logran cumplir el programa de estudios (Utamura, de Souza Borelli y Curi, 2020). Por otro lado, otros países, como, por ejemplo, Irlanda, presentan trabajos en el contexto de LS de forma puntual (McSweeney y Gardner, 2018).

En esta tesis doctoral el LS es la metodología utilizada en el diseño y la implementación del curso formativo. Esta elección se debe al hecho de que, en primer lugar, hay pocas investigaciones que han desarrollado ciclos de LS en Brasil en la formación de profesores de matemáticas. En segundo lugar, porque, según la literatura, el LS es una metodología que apoya el desarrollo de reflexión docente, individual y colectiva, permite la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y fomenta el desarrollo profesional.

Una síntesis de parte del marco teórico relacionado con el LS acabada de exponer se ha publicado en:

- ✓ Hummes, V. B. (2019). Theory and practice of lesson study in mathematics: An international perspective. [Review]. *Redimat*, 8(2), 339-340.
<http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.4789>

3.2. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

Con base en los estudios de revisión de literatura realizados en Breda, Bolondi y Silva (2021), en este apartado se explica, brevemente, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), describiendo en primer lugar los problemas que aborda este enfoque teórico y las herramientas propuestas para resolverlos. En segundo lugar, con la finalidad de justificar la necesidad de articular el EOS con el LS en el ámbito de la formación de profesores, se presentan algunas articulaciones existentes entre el EOS y otros enfoques teóricos.

3.2.1 EOS: problemas, herramientas metodológicas y tipos de análisis

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. El primero de ellos es un problema de naturaleza epistemológica (¿cómo surgen y se desarrollan las matemáticas?). En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar, etc.). Las herramientas propuestas por EOS para dar respuesta a esta primera problemática son la noción de situación- problema y la noción de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema.

El segundo es un problema de naturaleza ontológica (¿qué es un objeto matemático y qué tipo de objetos intervienen en la actividad matemática?). En el EOS se considera que, para realizar estas prácticas matemáticas, hay que activar diferentes objetos primarios (problema, lenguaje, definición, proposición y argumento) que cumplen diferentes roles (representación, explicación y justificación, etc.), formando redes de objetos conectados por medio de funciones semióticas que forman una configuración de objetos primarios conectados entre sí. En este enfoque la actividad matemática se modeliza mediante prácticas matemáticas y configuraciones de objetos primarios que son activadas en ellas. Este enfoque propone la herramienta denominada configuración ontosemiótica de objetos y procesos (Godino, 2014), la cual permite articular las nociones de práctica, objeto y proceso matemático.

El tercero es de naturaleza semiótico-cognitiva (¿qué significa conocer un objeto matemático? ¿Qué es un objeto para un sujeto, en un momento dado, circunstancia y contexto dado?). Para dar respuesta a este problema, la EOS asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada *análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas* (Godino, 2014; Godino y Batanero, 1994).

El cuarto está relacionado con el ámbito educativo e instruccional (¿qué es enseñar?, ¿qué es aprender?, ¿cómo se relacionan?, ¿qué tipos de interacción entre asignaturas, conocimientos y recursos deben implementarse en los procesos instruccionales para optimizar el aprendizaje?). En este enfoque, se postula que el propósito del aprendizaje es la apropiación de significados y objetos institucionales por parte de los estudiantes, lo que les permite abordar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona. Además, el estudio de los significados personales de los estudiantes es un componente esencial del problema educativo, ya que la apropiación de los significados institucionales pretendidos está condicionada por los significados personales iniciales de los estudiantes. Para el estudio de los procesos instruccionales, en EOS se realiza *el análisis de la configuración didáctica* (secuencia de acciones de docentes y estudiantes y los medios utilizados para abordar el estudio de una situación problema) y la *trayectoria didáctica* (secuencia de configuraciones didácticas). La optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje requiere tener en cuenta factores globales y, en muchos casos, locales porque, dadas las condiciones *in loco*, es necesario cuestionar las circunstancias y recursos necesarios para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El quinto es un problema de tipo ecológico (¿qué factores condicionan y sustentan el desarrollo de los procesos educativos y qué normas los regulan?). En el EOS se considera fundamental identificar los factores y normas que orientan los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que permite evaluar la relevancia de las intervenciones de docentes y estudiantes, teniendo en cuenta: el conjunto de factores y normas que influyen en la enseñanza y el aprendizaje; cambios en los tipos de normas que ayudan a mejorar la función y el control de los procesos de instrucción; e

identificación de formas de actuar sobre algunos factores que influyen en el sistema. La herramienta proporcionada por EOS para identificar este conjunto de aspectos se denomina *tipología de normas y metanormas* (Godino, 2014, p. 38).

El sexto problema está relacionado con la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje (¿qué tipo de acciones y recursos deben implementarse en un proceso de instrucción realizado en un contexto dado para optimizar el aprendizaje de las matemáticas?). Para enfrentar este problema, el EOS ofrece principios, no considerados como reglas o leyes generales, llamados *Criterios de Idoneidad Didáctica* (CID), los cuales son generados a través de un consenso en la comunidad de Educación Matemática (Breda, Font y Pino-Fan, 2018) sobre cómo llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sobre cómo se podrían mejorar estos procesos. Dichos criterios deben ser aplicados localmente, en este sentido, deben ser evaluados y adaptados por el docente y deben referirse a cada una de las facetas involucradas en los procesos de instrucción matemática: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2013; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

Y finalmente, el séptimo problema está relacionado con la formación del profesorado (¿qué conocimientos y habilidades deben tener los profesores para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?). En el EOS se considera que la formación del profesorado debe tener en cuenta y considerar las diferentes dimensiones, fases, facetas y tipos de análisis involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, los docentes deben tener los conocimientos didáctico-matemáticos necesarios para analizar y comprender los procesos instruccionales y las competencias profesionales necesarias para una adecuada actuación en dichos procesos. Las herramientas propuestas por el EOS para abordar esta problemática son, sobre todo: *dimensiones y componentes del conocimiento didáctico-matemático* (Pino-Fan y Godino, 2015) y *la competencia de análisis e intervención didáctica* (Godino et al., 2017).

En resumen, para dar respuesta a estas preguntas, el EOS propone cinco tipos de análisis sobre procesos instruccionales (Font, Planas y Godino, 2010), 1) Identificación de prácticas matemáticas; 2) elaboración de configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) análisis de trayectorias e interacciones didácticas; 4) identificación del sistema de normas y meta-normas; y 5) evaluación de la idoneidad didáctica del proceso instruccional. El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemática. El segundo se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como

los que surgen de ellas. El tercer tipo de análisis didáctico se orienta principalmente a la descripción de patrones de interacción (Leguizamón-Romero, 2017), de configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas. El cuarto tipo de análisis se centra en las normas que regulan el proceso instruccional (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro Hernández, 2009). El quinto tipo se basa en los cuatro análisis anteriores y tiene como objetivo identificar posibles mejoras para el proceso instruccional en nuevas implementaciones (Breda; Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013; Malet; Giacomone y Repetto, 2021).

El desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica permite a los profesores realizar estos tipos de análisis didácticos propuestos en el EOS y, a su vez, los dispositivos de formación para la enseñanza y aprendizaje de estos tipos de análisis didáctico contribuyen al desarrollo de dicha competencia y a la adquisición de los conocimientos del profesor contemplados en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (CCDM). A continuación, explicamos sintéticamente los primeros cuatro tipos de análisis (Breda, Hummes, Silva y Sánchez, 2021; Kaiber, Lemos y Pino-Fan, 2017). En un segundo momento, se explica en profundidad el quinto tipo de análisis didáctico cuya herramienta principal son los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Breda y Lima, 2016; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018), que también es la principal herramienta teórico-metodológica de esta tesis.

3.2.1.1 Los cuatro primeros tipos de análisis didáctico propuestos por el EOS

En el EOS se asume que la actividad matemática tiene como objetivo la resolución de tareas. Como resultado de un proceso de problematización, el sujeto, o la institución, asume resolver un problema, realizando, para ello, prácticas matemáticas. Para su realización y para la interpretación de sus resultados como válidos, se necesita, además del problema, poner en funcionamiento otros objetos matemáticos.

En la resolución es necesario el uso de lenguajes (verbales, simbólicos etc.), que son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de los argumentos que permiten resolver el problema. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font, Godino y Gallardo, 2013).

En el EOS, la noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y emergen de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan y se agrupan en las distintas dualidades (Font, Godino y Gallardo, 2013):

- ✓ *Extensivo-intensivo*: los objetos matemáticos pueden estar participando como particulares, o bien, como generales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser particulares a generales o viceversa.
- ✓ *Expresión-contenido*: los objetos matemáticos pueden estar participando como representaciones, o bien, como objetos representados y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser representaciones a ser objetos representados o viceversa.
- ✓ *Personal-institucional*: los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos personales, o bien, como objetos institucionales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser personales a ser institucionales. La dialéctica personal-institucional es esencial en los procesos de instrucción, ya que en ellos se pretende que los alumnos se apropien de los objetos institucionales (aprendan).
- ✓ *Ostensivo-no ostensivo*: estos dos modos de estar de los objetos matemáticos en la práctica matemática se han de tomar como algo que se puede mostrar a otro directamente versus algo no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro algo, que sí se puede mostrar directamente. Los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas del mundo real, que es la existencia real en el tiempo y en el espacio, mientras que a los objetos no ostensivos no se les atribuye este tipo de existencia, pues usualmente se considera que tienen una existencia ideal.
- ✓ *Unitario-sistémico*: cuando una entidad matemática es considerada como un objeto, se está adoptando una perspectiva unitaria sobre el mismo. Ahora bien, hay momentos en que interesa adoptar una perspectiva sistémica sobre dicho objeto, por ejemplo, considerando las partes que lo componen. En esta dualidad, los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos unitarios, o bien, como un sistema.

La resolución de problemas se realiza mediante la articulación de secuencias de prácticas. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas,

definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Por otra parte, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

Una noción clave para relacionar las prácticas con los objetos primarios y los procesos activados en ellas es la noción de función semiótica (FS). En el EOS, las FS se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019).

La FS se relaciona, de entrada, con la dualidad expresión/contenido y con el proceso de significación; por ejemplo, cuando a alguien se le pregunta qué entiende por triángulo (expresión) y responde que es un polígono de tres lados (contenido). Pero en el EOS se amplía esta manera de entender la FS y se considera que, tanto el plano de la expresión como el del contenido, pueden ser objetos materiales o mentales, que pueden ser cualquiera de los seis tipos de objetos primarios de la configuración y, además, cualquiera de las maneras de estar participando en la práctica matemática consideradas en las dualidades, por ejemplo, la FS que relaciona una propiedad con otra (la FS que relaciona el Teorema de Pitágoras con el Teorema de Pitágoras generalizado, por ejemplo), al contemplar la dualidad extensivo-intensivo, la podemos convertir, si es el caso, también en una FS que relaciona un particular (un extensivo) con un general (un intensivo). En este trabajo entendemos las FS como un instrumento relacional entre los objetos primarios activados en las prácticas matemáticas. La noción de función semiótica es más general que la noción de conexión tal como se usa en la Teoría extendida de las conexiones (TEC), ya que los tipos de conexiones contempladas en este marco teórico se consideran casos particulares de funciones semióticas (Rodríguez-Nieto, Font, Borji y Rodríguez-Vásquez, 2021).

En el EOS, la noción de configuración didáctica (CD) constituye la principal herramienta metodológica para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción (Godino, Contreras, Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una tarea. Incluye, por tanto, las

acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea.

Se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas. La configuración *adidáctica* se concreta en una secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización. La manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación caracteriza la configuración *magistral*. Cuando la resolución de la tarea se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente (por ejemplo, resolver ejercicios propuestos por el profesor fuera del aula) se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el *estudio personal*. Otro tipo de configuración puede definirse respetando el momento de exploración por parte de los alumnos, pero asumiendo el profesor la validación y la institucionalización mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos. Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen están más o menos próximas a estas configuraciones teóricas.

En el EOS, se considera que la metodología para investigar los procesos de instrucción consiste en realizar el análisis de la configuración didáctica y de la trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas). En particular, un aspecto importante de estas configuraciones didácticas son las normas y metanormas que regulan tanto las prácticas matemáticas como el proceso de instrucción; entre otras, normas epistémicas (regulan las prácticas y contenidos matemáticos, en correspondencia con el discurso matemático que es posible desarrollar en una institución), normas mediacionales (regulan los recursos – temporales o artefactos – utilizados en las prácticas), normas interaccionales (regulan los modos de interacción entre las personas involucradas en la práctica o proceso instructivo matemático), normas ecológicas (aspectos externos –directrices curriculares, políticas educativas– que condicionan las prácticas del aula) (Godino, Batanero, Font, 2019).

Dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, a veces conviene centrarse en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007) entendemos por conflicto semiótico (CS) cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones (por tanto, los conflictos semióticos generan ambigüedades). Cuando el profesor lo utiliza como estrategia didáctica con la intención de crear una contradicción en el alumno acerca de las prácticas que ha realizado; hablamos de CS de tipo cognitivo, puesto que la disparidad se

produce entre prácticas de un mismo sujeto). Cuando se produce un conflicto, por ejemplo, entre el mundo de las matemáticas y el aula de matemáticas o entre el aula de matemáticas y el mundo cotidiano, la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes. En este caso, hablamos de CS de tipo epistémico. En los otros casos, se trata de una disparidad de interpretaciones entre profesor y alumno o entre los mismos alumnos y hablamos de conflicto semiótico.

En toda CD se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (prácticas, objetos, FS y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes y las normas que las regulan) y c) una configuración cognitiva - afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que lo acompañan, así como los CS que pueden dificultar el aprendizaje).

Es importante recalcar que estos cuatro tipos de análisis propuestos por el EOS fueron utilizados para contestar, parcialmente, al objetivo específico 1 de esta tesis (realizar una profundización teórica sobre los LS y los CID). La operacionalización de las herramientas correspondientes a los 4 tipos de análisis está explicada, en detalle, en la sección 4.1 de la metodología.

3.2.1.2 El quinto tipo de análisis didáctico propuesto por el EOS: Criterios de Idoneidad Didáctica

En campo de la Educación Matemática no hay un consenso sobre la noción de calidad y, en particular, no hay consenso sobre los métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Básicamente existen dos maneras de afrontar esta problemática, desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font y Godino, 2011). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguirlos. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas, debe emanar del discurso

argumentativo de la comunidad científica, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor”.

La noción de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019) se posiciona en la perspectiva consensual (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, los CID deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar *mejor* (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro Hernández, 2009). Se trata de una noción inspirada en la idea de la teoría consensual de la verdad de Peirce y de sus desarrollos realizados por Apel y Habermas, explicado en Nicolás y Frápolli (1997); pero, que también tiene en cuenta los puntos de vista que señalan la importancia del poder en la producción y en el funcionamiento y mantenimiento de consensos (Foucault, 1998). Desde esta perspectiva, la Didáctica de las Matemáticas nos puede ofrecer principios provisionales, consensuados por la comunidad interesada, que pueden servir para guiar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tal como se explica en Breda, Font y Pino-Fan (2018), las tendencias en la enseñanza de las matemáticas son una primera manera de observar consensos en la comunidad de la Educación Matemática, dado que pueden ser consideradas como regularidades que se hallan en los discursos sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas (De Guzmán, 2007). Un caso paradigmático de reconversión de algunas de estas tendencias en principios explícitos, es el caso de los principios y estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). En el proceso seguido para establecer, con un amplio consenso, dichos principios y estándares intervinieron profesores, asociación de profesores, formadores de profesores de matemáticas, representantes de las administraciones educativas, investigadores y matemáticos, todos ellos con gran experiencia educativa.

Por otra parte, en la Didáctica de las Matemáticas se han generado conocimientos y resultados que gozan de amplio consenso y, por otra parte, han aparecido diferentes enfoques teóricos (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010) Una característica de muchos enfoques teóricos del área es que, además de asumir unos principios para el desarrollo de su construcción teórica, consideran que estos principios deben tenerse en cuenta en la enseñanza de las matemáticas para que ésta sea mejor, de más calidad (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Para el desarrollo del constructo idoneidad didáctica, se ha considerado las tendencias

actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos, enseñanza y aprendizaje de tipo activo, considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación), los principios del NCTM y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Dicha noción es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan “cómo se deben hacer las cosas”. *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

1. Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”.
2. Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
3. Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

5. Idoneidad Afectiva, para valorar la implicación (intereses, motivaciones, ...) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
6. Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos concordamos que es necesario implementar unas “buenas” matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los indicadores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores, agrupados en componentes y en criterios, que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, y que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. A continuación, se reproducen los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica propuestos en Breda y Lima (2016, p. 80-83):

Cuadro 1. Componentes e indicadores de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID)

Componentes	Código del componte	Indicadores
<i>Idoneidad Epistémica</i>		
Errores	IE1	✓ No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	IE2	✓ No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	IE3	✓ La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto que se quiere enseñar	IE4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) ✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas.

		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), tratamientos y conversiones entre los mismos.
<i>Idoneidad cognitiva</i>		
Conocimientos previos	IC1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). ✓ Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias individuales	IC2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	IC3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	IC4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) ✓ Promueve procesos meta-cognitivos.
<i>Idoneidad Interaccional</i>		
Interacción profesor - alumno	II1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) ✓ Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) ✓ Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento ✓ Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. ✓ Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión
Interacción entre alumnos	II2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. ✓ Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	II3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	II4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
<i>Idoneidad Mediacional</i>		
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	IM1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. ✓ Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	IM2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. ✓ El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). ✓ El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutorización, tiempo de aprendizaje)	IM3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial).

		<ul style="list-style-type: none"> ✓ Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. ✓ Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.
<i>Idoneidad Afectiva</i>		
Intereses y necesidades	IA1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Selección de tareas de interés para los alumnos. ✓ Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	IA2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. ✓ Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	IA3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. ✓ Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.
<i>Idoneidad Ecológica</i>		
Adaptación al currículo	IEC1	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	IEC2	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	IEC3	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	IEC4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: adaptado de Breda y Lima (2016).

Tal como se muestra en la revisión de la literatura realizada en Breda, Font y Lima (2015), la noción de idoneidad didáctica ha tenido un impacto relevante en la formación de profesores en diferentes países (Mallart, Font y Malaspina, 2015; Seckel y Font, 2020; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016). Tal impacto, se evidencia, por un lado, en el uso de los CID en diferentes investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas, en las cuales se usa dicho constructo, pero no se hace en el marco de un dispositivo formativo pensado, expresamente, para enseñar la idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica (Breda, 2020; Morales-López y Font, 2017; Morales-López y Araya-Román, 2020; Moreira, Gusmão y Font, 2018). Por otro lado, se encuentran investigaciones sobre dispositivos formativos en los cuales se observa el uso de los criterios de idoneidad didáctica, como contenido a explicar, para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, en grados (Seckel y Font, 2020) y postgrados (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Godino, Giacomone, Font y Pino- Fan, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019).

La herramienta CID en esta investigación es de suma relevancia, una vez que este constructo ha sido aplicado: a) en el diseño del curso formativo, b) como herramienta que se ha enseñado a los profesores participantes del curso formativo y c) como herramienta utilizada para analizar el desarrollo de la reflexión del grupo de profesores que participan de un curso formativo que combina el CID y el LS, objetivo general de esta tesis doctoral. En particular, los CID fueron utilizados para contestar los objetivos específicos 1, 2, 3 y 4 de esta tesis.

3.2.2 Articulación entre el EOS y otros marcos teóricos

En Breda, Bolondi y Silva (2021) se ha realizado una revisión de literatura sobre la articulación del EOS con otros enfoques teóricos, Entre ellas destacan las siguientes.

Uno de los trabajos de articulación teórica está relacionado con la noción de significado y sentido (Godino, Burgos y Gea, 2021). En él se realiza una descripción de la noción de significado y sentido a partir de distintos enfoques teóricos y se comparan con la propuesta por el EOS.

Otro estudio realiza un *networking* de teorías entre la Teoría Extendida de las Conexiones Matemáticas (TEC) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Rodríguez-Nieto et al., 2021). En particular, se identifican las concordancias y complementariedades en las concepciones de ambas teorías sobre las conexiones matemáticas, como resultado de la aplicación de estos marcos teóricos al protocolo de respuesta de un alumno en la resolución de una tarea sobre la derivada. La principal conclusión es que ambas teorías se complementan para hacer un análisis más detallado de las conexiones matemáticas.

También, existe concordancia y complementariedades entre la teoría de la objetivación (TO) de Luis Radford y el EOS (Godino, Beltran-Pelicer y Burgos, 2020; Vergel, Godino, Font y Pantano, 2021). En la primera investigación, para contextualizar la reflexión, utilizaron el informe de una investigación empírica sobre la interpretación de un gráfico cartesiano que representa el movimiento relativo, planteado en el ámbito de la teoría de la objetivación; mientras que en la segunda usaron algunos episodios de clase en los que estudiantes colombianos de la etapa básica resuelven tareas de patrones numéricos.

La teoría APOE es una teoría básicamente cognitiva en la que no se ha profundizado aún en la reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, mientras que el EOS es una teoría más general en la que este tipo de reflexión ya se ha realizado. Al ser dos tipos de teorías diferentes es difícil hacer una comparación entre ellas, incluso si el foco se limita al uso que hacen ambas

teorías del término objeto, por tanto, para articular ambas teorías en Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2016) se optó por la siguiente metodología 1) partir del APOE y, de acuerdo con esta teoría, elaborar una descomposición genética de la derivada, que sirva como contexto de reflexión. 2) reflexionar sobre dicha descomposición genética desde las herramientas teóricas que se proponen en el EOS. Este proceso permite concluir que la manera de conceptualizar la emergencia de objetos en el APOE — básicamente como resultado de dos procesos cognitivos, llamados encapsulación y tematización en esta teoría — resalta aspectos parciales del complejo proceso que, según el EOS, hace emerger los objetos matemáticos personales de los alumnos a partir de las prácticas matemáticas realizadas en el aula. Esta primera articulación entre APOE y EOS, ha continuado con el uso conjunto de ambos marcos teóricos para estudiar aspectos de los procesos de instrucción de los objetos del Cálculo (derivada, integral, etc.). Por ejemplo, en Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) se estudia, mediante el uso conjunto del APOE y del EOS, la comprensión de los estudiantes de los primeros cursos universitarios de una universidad de Irán, cuando resuelven problemas donde se deben interpretar características de una función, a partir de su gráfica, para determinar características de la gráfica de la derivada de dicha función.

Las nociones de registro de representación semiótica (TRRS) de Raymond Duval y la configuración ontosemiótica del EOS también están relacionadas. Godino y colaboradores (2016) analizan una tarea que requiere la formulación de una conjetura y su demostración utilizando representaciones icónicas y algebraicas, aplicando estas dos herramientas teóricas. Concluyen que en los análisis realizados con la TRRS es posible identificar contradicciones en la actividad cognitiva del sujeto y estas determinan si la tarea se resolvió con éxito o no. Por otro lado, con las herramientas del EOS es posible dar una explicación, desde un punto de vista epistémico, sobre las deficiencias en el conocimiento del sujeto sobre un determinado problema, identificando y describiendo con detalle los objetos y procesos matemáticos involucrados en las prácticas matemáticas. A su vez, en Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval (2017) se presenta un estudio de *networking* de teorías, entre la teoría de los registros de representación semióticos (TRRS) y el EOS. Los resultados obtenidos revelan complementariedades entre estas dos perspectivas teóricas cuya aplicación simultánea permitiría hacer análisis más pormenorizados de las producciones de los estudiantes.

También se estudiaron las similitudes, diferencias y complementariedades de los modelos teóricos: Teoría de las Situaciones Didácticas, Teoría Antropológica de lo Didáctico y Teoría de

los Campos Conceptuales con el fin de establecer un marco unificado para el estudio de los fenómenos cognitivos e instruccionales en la Didáctica de las Matemáticas (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006). En concreto, los autores muestran cómo la ontología matemática, propuesta en el EOS, junto con la noción de función semiótica, puede contribuir al progreso y articulación coherente de dichas teorías. A su vez, D'Amore y Godino (2007) presentan las principales características de dos miradas utilizadas como marcos teóricos de referencia en investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas, denominadas antropológicas y ontosemióticas, con el objetivo de enfatizar analogías y diferencias entre estos dos enfoques y abrir la puerta a otros desarrollos teóricos. En esta línea, en Wilhelmi, Godino y Font (2005) se confrontan la forma de producción y desarrollo de nociones teóricas en la teoría de situaciones didácticas y en el enfoque ontológico y semiótico y, al mismo tiempo, las formas de aplicación y funcionamiento de sus métodos de investigación.

En Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013) se ha abordado la comparación y articulación del EOS con la Teoría de la Génesis Instrumental (TGI), mediante la aplicación de las respectivas herramientas al análisis de un episodio instruccional. Además de analizar el mismo episodio con las herramientas teóricas de cada teoría se realiza una comparación de: a) Principios, b) Métodos, c) Cuestiones paradigmáticas y d) Conocimientos que el uso de la teoría aporta. Los principales resultados son: a) El análisis conjunto del episodio no es contradictorio y permite tener una visión más completa que la que se tiene usando un solo marco teórico; b) Se observan muchos puntos de contacto en las nociones teóricas que permiten una buena coordinación entre las dos teorías, c) El EOS ha incorporado la noción de artefacto (Font, Godino y Gallardo, 2013). Asimismo, se estudiaron las características básicas de la Etnomatemática y el EOS, presentando los referentes teóricos de cada uno de ellos, comparando cuestiones paradigmáticas abordadas e identificando algunos acuerdos y complementariedades entre los dos enfoques (Oliveras y Godino, 2015).

Finalmente, el EOS presenta un modelo de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas que integra y amplía los desarrollos y avances de diferentes modelos sobre el conocimiento del docente de matemáticas, especialmente los de Lee Schulman y colaboradores y Deborah Ball y colaboradores. Como resultado, el EOS presenta un modelo de conocimiento didáctico-matemático compuesto por tres dimensiones (matemática, didáctica y meta didáctico-matemática) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan y Godino, 2015).

Esa revisión nos hace observar que aún no se ha realizado un trabajo de articulación entre el EOS, en particular, entre el quinto tipo de análisis de este enfoque (valoración de la idoneidad didáctica con los CID) y el abordaje *Lesson Study*. En ese sentido, este trabajo de investigación, al articular los CID y el LS, pretende, en términos teórico-metodológicos, aportar a la formación de profesores un modelo de formación que permite potenciar el desarrollo de la reflexión docente.

Capítulo 4. Metodología

Esta investigación, de carácter exploratorio y analítico-interpretativo, busca analizar de qué forma un curso de formación basado en el *Lesson Study* (LS) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) promueve la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas. En términos generales, se trata de una investigación cualitativa de estudio de caso (Da Ponte, 2006) de un diseño e implementación de un curso de formación para promocionar el desarrollo de la reflexión del profesor.

En el marco teórico utilizado en esta tesis – el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) –, se han realizado una serie de investigaciones y experimentos de cursos de formación que, por una parte, han permitido el desarrollo de un modelo teórico de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) y, por otra parte, han permitido ponerlo a prueba en situaciones empíricas (por ejemplo, Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico propuestos por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010), ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo CCDM. Estos ciclos formativos, en el EOS, son considerados experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor (EDCCP) y son un tipo de *Teacher Development Experiment* (TDE) (Simon, 2000). Los TDE estudian el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan en los principios de los experimentos de enseñanza (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003), lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. Las investigaciones TDE también contemplan el estudio de casos.

Esta tesis doctoral, en particular, no pretende caracterizar los conocimientos y competencias del profesor cuando este realiza un ciclo formativo. Sin embargo, lo que busca la investigación que se presenta es analizar cómo se desarrolla la reflexión de un grupo de profesores que participa de un curso de formación basado en el LS y en los CID. El foco sobre la reflexión del profesor se debe, por una parte, a que la reflexión sobre la práctica es una actividad estrechamente relacionada con el análisis didáctico que hace el profesor en su práctica profesional y, por otra parte, porque en

muchas investigaciones se ha evidenciado como un aspecto clave para el desarrollo profesional y la mejora de la docencia.

Para lograr el objetivo general de esta investigación, analizar de qué forma un dispositivo formativo basado en el *Lesson Study* (LS) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) promueve el desarrollo de la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas, se han seguido cuatro etapas metodológicas, una para cada objetivo específico. La primera etapa, explicada en el apartado 4.1, se ha seguido para alcanzar el objetivo específico 1 (O1) – Realizar una profundización teórica sobre los LS y los CID, buscando: i) comprender cómo cada uno propone el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y ii) complementariedades y diferencias entre ambos enfoques—. La segunda etapa, explicada en el apartado 4.2, se ha seguido para conseguir el objetivo específico 2 (O2) –Diseñar y aplicar un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID, cuyo objetivo sea que los participantes diseñen, implementen, valoren y rediseñen secuencias de tareas para sus alumnos de enseñanza básica—. La tercera, explicada en el apartado 4.3, se ha llevado a cabo para investigar el papel que tienen los CID en una experiencia de LS, antes de que dicha herramienta haya sido enseñada a los participantes como pauta para organizar su reflexión, en el marco de un dispositivo formativo diseñado para combinar ambas metodologías, objetivo específico 3 (O3) de esta tesis. Finalmente, la cuarta etapa, descrita en el apartado 4.4, se ha seguido para analizar de qué forma el ciclo formativo implementado desarrolla la reflexión en los profesores de matemáticas participantes, objetivo específico 4 (O4) de esta tesis. Es importante subrayar que, en cada una de las etapas del estudio metodológico, se presenta, en un primer momento, cuáles fueron los instrumentos de recogida de datos utilizados en cada una de las etapas y, en un segundo momento, cómo fue el procedimiento de análisis de estos datos.

La conexión entre los objetivos específicos y la etapa metodológica se puede ver en la siguiente figura (Figura 3):

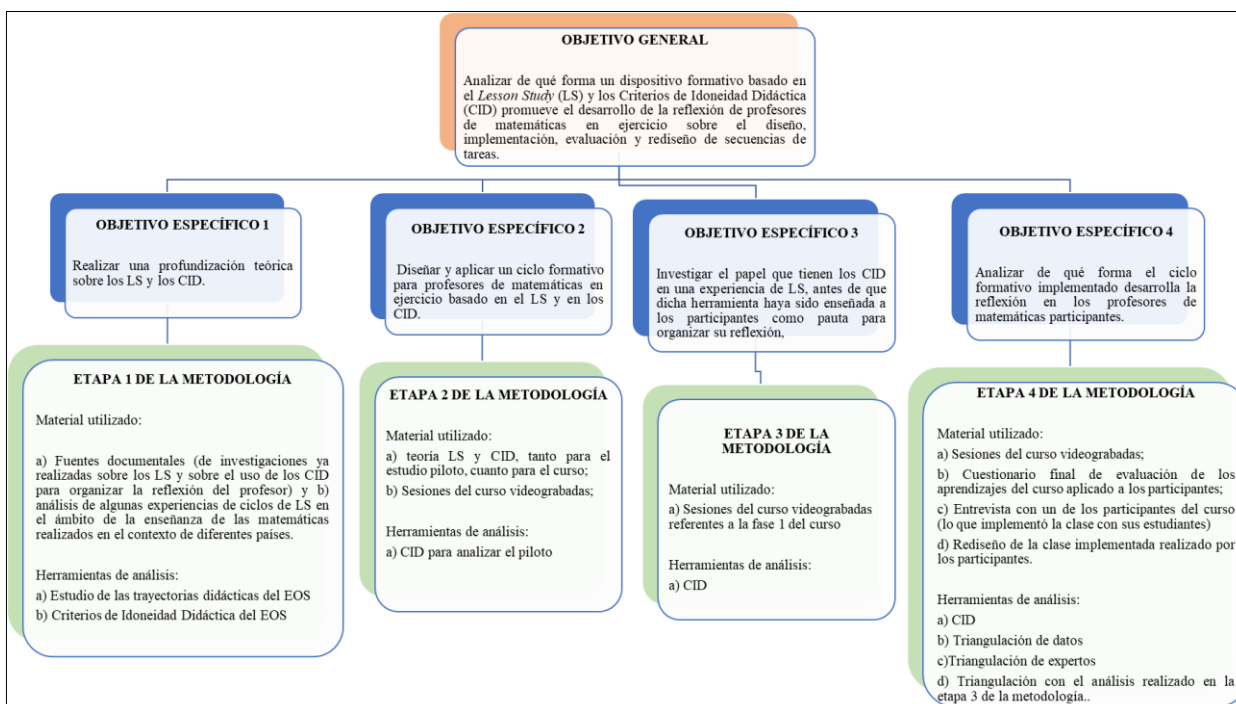


Figura 3. Esquema que relaciona los objetivos específicos y las etapas metodológicas
 Fuente: Elaboración propia.

4.1 Etapa metodológica 1: profundización teórica sobre LS y CID

En esta etapa, se explica con detalle cómo se ha estructurado el proceso de: i) comprender cómo los enfoques LS y los CID proponen el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y ii) hallar algunas complementariedades y diferencias entre ambos enfoques.

Para comprender cómo los enfoques LS y los CID proponen el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y hallar algunas complementariedades y diferencias entre ambos enfoques, los instrumentos utilizados para el análisis fueron: a) fuentes documentales (de investigaciones ya realizadas sobre los LS y sobre el uso de los CID para organizar la reflexión del profesor) y b) análisis de algunas experiencias de ciclos de LS en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas realizados en el contexto de diferentes países. Estas experiencias fueron recogidas de videos presentes en la plataforma *YouTube* y fueron analizadas según las herramientas del EOS, en particular, según los CID y según el estudio de las trayectorias didácticas (conjunto de configuraciones didácticas).

Desarrollo de la reflexión en programas que usan los CID

Para estudiar cómo se desarrolla la reflexión en cursos de formación que utilizan el constructo CID, en un primer paso, se seleccionaron un conjunto de documentos para generar un banco de datos sobre el desarrollo teórico y el uso del constructo CID. Para ello, se comenzó con una búsqueda de documentos que describían experiencias de uso de los CID. Además de artículos de investigación, se consideró la revisión de la literatura realizada por Kaiber, Lemos y Pino-Fan (2017) y la búsqueda de investigaciones que utilizaran los CID en actividades de formación docente. Como criterio prioritario para la selección de los documentos, se consideraron los trabajos que se enfocaron al desarrollo de la reflexión de los docentes que participaron en los cursos de formación (cursos de perfeccionamiento docente, cursos de pregrado y/o posgrado), como, por ejemplo, entre otros, los diseños formativos que se documentan en Font, Breda y Pino-Fan (2017); Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer (2018); Morales-López y Font (2017) y en Seckel y Font (2020). Algunos de estos documentos son videos.

En un segundo paso, se estudiaron, especialmente, los momentos de reflexión previos a la introducción de la enseñanza de la herramienta CID y los momentos en que el profesor hace uso de dicha herramienta para organizar la reflexión sobre la práctica propia o ajena.

Un ejemplo de documento de este banco es un taller de formación de profesores que fue grabado en video <https://educast.pucp.edu.pe/video/6343/capacity_and_network_project_camp_5peru>. El contexto institucional en el que se realizó fue el *Capacity and Network Project* (CANP) de Lima. El (CANP) es un proyecto de desarrollo de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). En 2016, se realizó el CANP 5 en Lima, orientado a la subregión sudamericana conformada por Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú. Los sujetos participantes fueron 40 profesores asistentes al CANP 5 de diferentes nacionalidades: Bolivia, Ecuador, Paraguay, Perú, Francia, EEUU, Costa Rica y Brasil (en el caso de estos cuatro últimos países los participantes eran profesores del CANP 5).

Los momentos de reflexión previos a la introducción de la enseñanza de la herramienta CID transcurrieron de la siguiente manera: lo primero que hizo el profesor fue proponer a los asistentes la lectura y análisis de un episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010, p. 93-94). En este episodio un grupo de tres alumnos de 15-16 años resuelven un problema contextualizado en una clase de cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) (España) durante diez minutos. Este primer análisis se debía realizar a partir de su experiencia previa. El proceso seguido fue el

siguiente: 1) Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción. 2) Formación de grupos de 3-4 personas. 3) Análisis didáctico, sin pauta previa, del episodio de clase en grupo. 4) Elaboración de conclusiones. 5) Presentación a los otros grupos de las conclusiones.

Desarrollo de la reflexión en experiencias de LS

Para estudiar cómo se desarrolla la reflexión en experiencias de LS, en un primer momento, se seleccionó un conjunto de documentos para generar un banco de datos sobre este enfoque. Para ello, se comenzó con una búsqueda de documentos que describían experiencias de LS. En particular, desde el punto de vista teórico, para identificar algunas concordancias entre los criterios establecidos entre las dos teorías, LS y CID, se realizó un estudio en profundidad de la literatura relacionada con ambas nociones. Concretamente, a partir del estudio de los trabajos publicados por Hurd y Lewis (2011) y Lim-Ratnam (2013), que intentan explicar paso a paso un ciclo de LS, se elaboró una tabla comparativa identificando qué CID están presentes en cada una de las etapas del LS. Específicamente, los CID se utilizaron como categorías cualitativas previas para clasificar los criterios presentes en cada etapa de un ciclo de LS.

Además de artículos de investigación, en un segundo momento, se buscaron videos sobre LS en la plataforma web *Youtube*, a partir de los siguientes criterios: i) el importante número de visualizaciones del video y ii) que en ese video se podía observar el proceso de LS de forma completa, es decir, dónde hay una fase de diseño, una de implementación, una de reflexión y una de rediseño de la clase.

Para cada uno de los videos seleccionados, en un tercer momento, usando los cuatro primeros tipos de análisis didáctico que propone el EOS, se realizaron “radiografías” de los procesos de instrucción diseñados e implementados en una experiencia de LS (cuando esta era posible con la información que se tenía, es decir cuando se describía de manera detallada la implementación). Después, en un cuarto momento, se realizó un análisis de contenido para inferir criterios que orientan la práctica del profesor en las experiencias de LS, sobre todo en la etapa de diseño y de reflexión. Seguidamente, en un quinto momento, se realiza un proceso de triangulación entre lo que observan los investigadores a partir del análisis detallado de la tercera fase con los resultados del cuarto momento. Se trata de ver si la “radiografía” obtenida muestra aspectos relevantes no considerados o bien contradictorios con la reflexión realizada por los maestros, sobre todo en la etapa de planificación y en la de reflexión del LS.

Ejemplo de aplicación de los cinco primeros momentos para una experiencia de LS realizada en Chile

Un ejemplo del banco de documentos creados (teniendo en cuenta las dos características fijadas previamente) es un video <<https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8&t=1165s>> sobre una experiencia de LS en Chile (producto del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile) (CPEIP) que fue publicado en la plataforma *YouTube* en el 24 de enero de 2012. El video tiene tres partes; en la primera, los maestros se reúnen para planificar colectivamente una clase de matemáticas basada en un estándar de desempeño del currículo chileno para nivel básico 2: a) Caracterizan prismas rectos y pirámides considerando el número y la forma de las caras y el número de aristas y vértices; b) Seleccionan redes de prismas y pirámides para armar un cuerpo geométrico dadas algunas características de éste. En la segunda parte, un profesor que participó de la planificación implementa la clase con los alumnos de nivel básico 2 (duración aproximada de 10 minutos ya que algunos segmentos de la implementación se han recortado). En la tercera parte, el colectivo de maestros hace una reflexión, poniendo atención en cómo los alumnos y alumnas reaccionaron en el aula, cómo expresaron sus ideas y cómo el profesor condujo el proceso de aprendizaje.

El análisis del video que se ha realizado en esta investigación se divide en los siguientes pasos. En el primer paso se hace una transcripción de la implementación de la clase evidenciada en el video. En el segundo se segmenta la transcripción en partes, donde cada parte se considera que corresponde a una configuración didáctica (CD), es decir un segmento de actividad de enseñanza y aprendizaje que ocurre entre los momentos de inicio y finalización de una tarea implementada. Aunque el criterio básico para determinar un segmento de transcripción correspondiente a una CD es el intervalo que va desde el inicio hasta la finalización de una tarea implementada, la agrupación en configuraciones didácticas es flexible y queda a la discreción del investigador. El proceso de enseñanza de un contenido matemático tiene lugar en un determinado tiempo que incluye una secuencia de CD (trayectoria didáctica).

En el tercer paso, para cada CD, se han identificado las prácticas matemáticas, los procesos y los objetos primarios activados en ellas (tareas, representaciones, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos), las funciones semióticas (FS) que debe establecer el alumno para dar significado a la actividad matemática realizada, las funciones/acciones del profesor y de los

alumnos, el tipo de CD, los conflictos semióticos (CS), los patrones de interacción y las normas. En el cuarto paso se triangularon los hechos didácticos significativos que los investigadores observaron en el análisis de las CD con las reflexiones que hicieron los participantes del LS sobre la implementación de la clase.

A continuación, en esta sección se presenta un ejemplo de cómo se desarrollaron estos pasos de análisis. Primero, se presentan la Figura 4 y las líneas de la transcripción del inicio de la clase implementada las cuales se considera que se corresponden con la CD1. A continuación, se detalla la estructura de la CD1 (Cuadro 2) y también la trama de FS (Figura 5) contemplada en esta CD1. Por último, se triangula con los comentarios del grupo de maestros en la etapa de reflexión del LS.

a) Transcripción correspondiente a la CD1

Profesor: Vamos a recordar lo que son los vértices y las aristas. ¿Ok?

Alumnos: Ok.

Profesor: Ya. Entonces vamos primero a observar este cuerpo que tenemos acá ¿Ya? Y

Ustedes me van a decir: ¿cuántas aristas tenemos acá? (CPEIP, 2012, s/p)

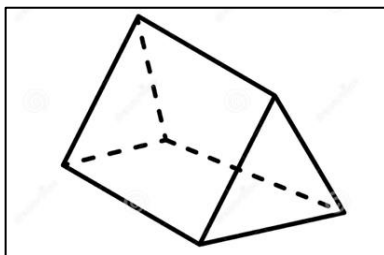


Figura 4. Prisma que el profesor muestra a los alumnos
Fuente: adaptado de CPEIP (2012)

b) Configuración Didáctica CD1

Cuadro 2. Configuración Didáctica (CD1)

Prácticas	Procesos	Objetos	FS	Funciones del docente	Funciones del alumno	Tipo de Configuración	CS	Patrones de interacción	Normas
Práctica 1: Entender las preguntas del profesor.	Proceso de comprensión (significación/comunicación) Proceso de problematización	Tarea 1: vamos a recordar que son los vértices y las aristas Tarea 2: Observar un cuerpo (modelo tridimensional de prisma triangular) y determinar cuántas aristas tiene. Representación 1: tridimensional de un prisma triangular Representación 2: lingüísticas (arista, vértice, cuerpo)	De la FS1 a la FS10	Presentar la tarea	Resolver la tarea	Adidáctica/Personal/Grupal	No se observa	No hay evaluación directa por parte del profesor sobre el proceso de interacción: Pregunta del profesor – Respuesta de los alumnos.	Hay que intentar resolver las tareas que propone el profesor y contestarlas
Práctica 2: Contar el número de aristas, sobre representaciones/modelos tridimensionales	Proceso de algoritmización (aplicación semiautomática de un procedimiento) Proceso de formulación (enunciación) de una conjetura	Procedimiento 1: Contar Proposición: El número de aristas de este cuerpo es seis	FS11 FS12 y 13		Responder la pregunta				

Fuente: elaboración propia

Dado que las configuraciones didácticas se inician normalmente con una tarea, los dos primeros procesos (comprensión y problematización) están presentes en casi todas las CD, por más simple que sea la tarea, ya que los alumnos deben entender lo que se les pregunta y asumirlo como algo que tienen que resolver. Por otra parte, el tipo de configuración se considera de tipo Adidáctica/Personal/Grupal porque el profesor presenta la tarea, los alumnos se responsabilizan de resolverla y no hay ningún tipo de evaluación (ni de validación, ni de institucionalización) directa de la respuesta de los alumnos por parte del profesor (sí existe de manera indirecta al no cuestionar la respuesta dada por los alumnos), ni ninguna demanda del profesor para que los alumnos justifiquen su respuesta.

c) FS presentes en la CD1

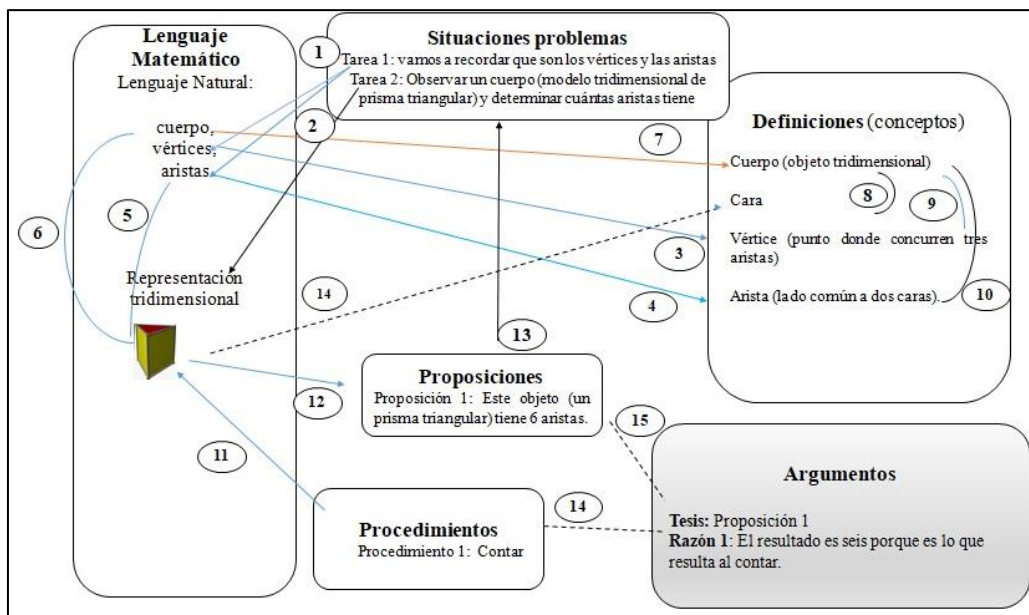


Figura 5. FS presentes en la CD1
Fuente: elaboración propia.

En la Figura 5 se muestra la trama de FS que deben hacer los alumnos para dar significado a la actividad matemática realizada en la CD1. Por ejemplo, la FS1 relaciona el objeto primario tarea (expresión) con un objeto lingüístico (contenido) y la FS13 una proposición (expresión) con una tarea (contenido). Para entender las tareas, los alumnos deben relacionar los términos lingüísticos verbales y la representación tridimensional que aparecen en la tarea entre sí y también darles algún tipo de significado (FS1 hasta FS7).

A su vez, estos significados (definiciones implícitas) se relacionan entre ellos (FS8 hasta FS10). Después, deben contar las aristas de la representación tridimensional (FS11) que les permite concluir que este cuerpo tiene seis aristas (FS12), con lo que se puede considerar resuelta la tarea (FS13). Además, hay una FS que sería importante establecer, la que relaciona la representación tridimensional con la noción de cara de un prisma y dos que están implícitas que se podrían haber establecido claramente si el profesor hubiese preguntado cómo estaban seguros de que la respuesta era seis (FS14 y FS15) (representadas en la Figura 3 por líneas discontinuas y con el contenido de la FS en color gris).

d) Triangulación del análisis de la implementación, referente a la CD1, con la etapa de reflexión del LS.

No se observaron en la fase de reflexión de los maestros comentarios sobre la CD1, aunque hay algunos hechos en esta CD que resultan muy significativos para los investigadores. El primero es que el profesor no evalúa explícitamente el resultado que dan los alumnos (lo hace indirectamente al no cuestionar la respuesta dada por los alumnos, con lo que valida e institucionaliza al mismo tiempo la respuesta dada), el segundo es que no les pide que argumenten su respuesta. Teniendo en cuenta que el objetivo que había planificado el grupo de maestros era el descubrimiento de una relación entre el número de lados de la base de una pirámide y el número de vértices y de aristas, se podría aprovechar esta CD1 para hacerles observar que habían encontrado la respuesta contando los vértices del cuerpo que el profesor presentó, y después, preguntar si también contarían en el caso de un cuerpo que tuviese, por ejemplo, 105600 vértices. La limitación del procedimiento de contar directamente se podría utilizar como una buena razón para buscar el número de vértices y aristas sin tener que contar directamente (objetivo planificado).

En la experiencia de un LS, además de la etapa de implementación, hay la etapa en que los participantes reflexionan sobre el diseño de la clase y sobre su implementación. En el tercer paso, se seleccionaron las consideraciones manifestadas por los profesores participantes sobre la secuencia de tareas planificada e implementada o bien sobre su rediseño, que se pudiesen considerar evidencias de reflexión. Después, en un cuarto paso, se analizó si estas consideraciones podrían considerarse como evidencia del uso implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CID.

Ejemplo de aplicación del segundo y cuarto paso para una experiencia de LS realizada en Japón

Otro ejemplo del banco de documentos creados (teniendo en cuenta las dos características fijadas anteriormente) es un video experiencia de LS en Japón en una clase de segundo grado de la escuela primaria de la Universidad de Tsukuba y que fue publicado en la plataforma *YouTube* <<<https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>>> en el 12 de junio de 2012. De forma similar al ejemplo anterior, en este ejemplo se ha utilizado la tercera fase de análisis la cual se seleccionaron las consideraciones manifestadas por los profesores participantes sobre una secuencia de tareas planificada e implementada o bien sobre

su rediseño, que se pudiesen considerar evidencias de reflexión. Esencialmente, se buscó primero seleccionar consideraciones empleadas por el profesor y sus colegas para fundamentar la secuencia de tareas que se proponen en la clase. A continuación, se analizó si estas consideraciones pudieran considerarse como evidencia del uso implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CID.

Ejemplo de cómo se ha inferido los CID en la reflexión de los profesores que han participado de esta experiencia realizada en Japón

El video analizado trata de un proceso de instrucción llevado a cabo por un maestro de segundo grado en la escuela primaria. Al final de las clases, el profesor P empieza a planear la clase que presentará en la semana siguiente. El tema de la clase que él está planeando es la sustracción. En particular, la clase se enfoca en sustraer de un número de tres dígitos un número de dos dígitos, de manera que el resultado sea un número de un dígito, y, para eso, el profesor utiliza problemas de restas en los que hay que rellenar los espacios en blanco cuándo solo se sabe el resultado.

Ahora bien, la primera formulación que hace el profesor no es muy clara ya que dice literalmente lo siguiente:

P: Con ese tipo de problema solo uno o dos dígitos están escondidos. No voy a esconder los dos números en el problema de restas. La respuesta está ahí. Los estudiantes tienen que averiguar la ecuación de resta que conduzca a esa respuesta. Pienso que será suficiente para atraer su atención en el problema.

Por lo que se observa en la implementación posterior, cuando dice dígitos se está refiriendo a números (minuyendo y sustrayendo), y, a pesar que dice que no va esconder los dos números, resulta que esconde el minuendo y el sustraendo y, cuando dice ecuación de resta, se está refiriendo a las combinaciones de minuendo y sustraendo que dan el resultado suministrado.

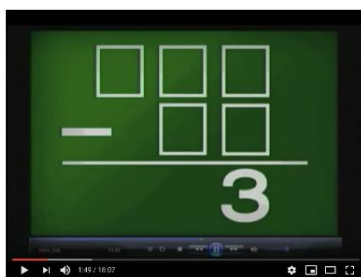


Figura 6. Tarea propuesta por el profesor P

Fuente: video disponible en <<https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>>

Ahora bien, con independencia de la diferencia que se observa entre esta primera formulación del objetivo y la implementación posterior, podemos observar que P está realizando una valoración positiva de determinados aspectos en la experiencia de LS prevista. En concreto, está utilizando implícitamente el indicador “selección de tareas de interés para los alumnos” del componente *intereses y necesidades* (IA1) del criterio de idoneidad afectivo, ya que valora positivamente el hecho de elaborar una actividad que favorezca el interés de los alumnos. Además, esta motivación se va a conseguir presentando una tarea de alta demanda cognitiva (otro componente de la idoneidad cognitiva).

Además de la motivación, P también pretendía que los estudiantes encontraran ciertas reglas ocultas en las respuestas del problema. La primera regla era la de que dado un resultado y hallada una combinación de minuendo y sustraendo que dan dicho resultado, si el minuendo y el sustraendo se incrementan en una unidad, entonces se obtiene el mismo resultado. La segunda regla era que para un valor de la diferencia x hay un número x de combinaciones de minuendo y sustraendo posibles. Por ejemplo, hay tres combinaciones cuando la diferencia es tres, cinco combinaciones cuando la diferencia es cinco y así en adelante. Al descubrir estas reglas, pueden encontrar todas las combinaciones del minuendo y sustraendo más rápidamente.

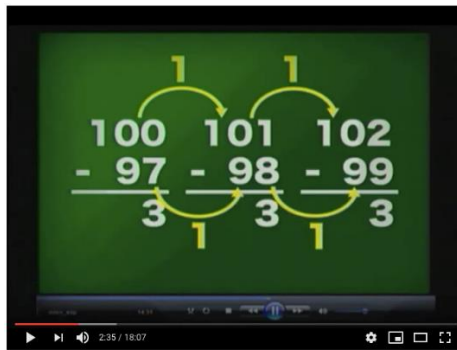


Figura 7. Regla del problema

Fuente: video disponible en <<https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>>

El supervisor de las clases (S), hace una visita al profesor en el momento en que él está planeando su clase. En este momento el profesor P le pide su opinión.

P: Tú ves que la diferencia y el número de ecuaciones es el mismo. Yo creo que los estudiantes van a notar que hay algo aquí.

S: Sí, de ahí te mueves dependiendo de cómo reaccionen los estudiantes. No necesitas empujarlos, sólo ve hacia donde te lleven. Entonces, en algún punto lanza una palabra que los lleve hacia el camino correcto.

P: Sí, eso es.

S: “Notan algo en esto?” o algo así.

En ese diálogo podemos inferir primero que P y S están preocupados por diseñar una tarea que esté a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, pero que, al mismo tiempo, les exija una alta demanda cognitiva, en el sentido que los lleve a realizar procesos relevantes de la actividad matemática (en este caso, observar una regularidad y formular una conjetura << Yo creo que los estudiantes van a notar que hay algo aquí>>). En segundo lugar, podemos observar como comentan el tipo de gestión que debe hacer el profesor para conseguir que los alumnos tengan éxito, pero sin pautar demasiado la tarea (<<Sí, de ahí te mueves dependiendo de cómo reaccionen los estudiantes. No necesita empujarlos, sólo ve hacia donde te lleven. Entonces, en algún punto lanza una palabra que los lleve hacia el camino correcto>>).

Más adelante, podemos observar cómo P insiste que ha diseñado la tarea con el objetivo de que los estudiantes hagan conjeturas que les permitan formular las reglas comentadas anteriormente:

P: Pienso que los estudiantes tarde o temprano descubrirán ciertas reglas mientras que tratamos con 1, 2 y 3 como respuestas a la ecuación. Estoy esperando ansiosamente el momento en que descubran las reglas. Voy a resaltar cosas que ellos pueden decir sobre las reglas, de tal forma que el resto de la clase comprenda hasta a dónde vamos. ¿Finalmente, les preguntaré “Cuántas ecuaciones pueden realizar cuando la respuesta es 9?” Llegar al punto donde puedo realizar esta pregunta es crucial.

Posteriormente, en el momento de la reflexión sobre la clase impartida, al ser cuestionado sobre si la clase se había desarrollado como él la había planeado, comenta lo siguiente:

P: Se desarrolló muy de acuerdo a lo que yo quería que sucediera. Los niños llegaron a las conclusiones exactas que yo quería que descubrieran. Sin embargo, podría haber reunido o conectado los pensamientos y explicaciones de una mejor manera para ayudar a que todos comprendieran lo que algunos estudiantes estaban diciendo.

En ese párrafo podemos inferir en el discurso del P la importancia dada al indicador “los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas” del componente de la idoneidad cognitiva *aprendizaje* (IC3) de los alumnos. También se hace evidente el uso implícito del indicador “valorar si las interacciones gestionadas en clase resuelven dudas y dificultades de los alumnos” del componente del criterio de idoneidad interaccional *interacción docente-discente* (II1).

Más tarde, el profesor reflexiona porque algunos alumnos tuvieron dificultades:

P: Es interesante observar que los estudiantes que usualmente son buenos en las matemáticas, tuvieron dificultades en un principio. Me pregunté el por qué más tarde y me dije: Aquellos que son buenos en las matemáticas, estaban tratando de dar con el número que va en la columna de las decenas, cuando la diferencia era 3. Aquellos que inesperadamente obtuvieron la respuesta correcta miraron el problema como un todo. Debido a que la diferencia era 3, ellos simplemente llegaron al 100 y 97 inmediatamente.

En esa reflexión se puede inferir el uso implícito del indicador “observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos” que conforma parte del componente *evaluación formativa* (II4) del criterio de idoneidad interaccional.

Un maestro (M1) propone al profesor una forma alternativa de presentar el problema:

M1: Estaba preguntándome por qué no permitiste que los niños intentaran con el número uno. Creo que sería bueno empezar con uno, porque así puedes explicar todo lo que debe ser cubierto en la clase del día de hoy. Aquellos que no son buenos en las matemáticas probablemente tendrán

problemas con este. Si el problema fuera por ejemplo $9 - 8 = 1$, trabajar con el número uno podría darles a los niños una mejor pista de lo que está sucediendo.

La reflexión realizada por M1, hace hincapié en que los significados pretendidos deben presentar una dificultad manejable, indicador de la idoneidad cognitiva. En contrapartida, el profesor argumenta que:

P: Hoy utilicé el número tres y 27 o 28 estudiantes lo captaron de inmediato. Hubo aproximadamente 10 estudiantes que tardaron un largo tiempo en resolverlo. Si miras el promedio, creo que presentar el problema usando el número tres fue una buena solución.

En esa afirmación, lo que el profesor no tiene en cuenta es la diversidad en el ritmo de aprendizaje de sus alumnos, es decir, no contempla el componente *adaptación curricular a las diferencias individuales* (IC2) del criterio cognitivo.

Otro maestro (M2) propone al profesor una forma alternativa de desarrollar la tarea:

M2: ¿Tienen esas cartas, correcto? El problema de restar un número de dos dígitos de uno de tres dígitos que da una diferencia de cinco es, bueno, estaba preguntándome el por qué les está dando inmediatamente las respuestas. (comentario de que el profesor les había dado a los estudiantes las respuestas muy prontamente). Si dejas a los niños resolver los problemas, sería mucho más interesante. Escoge algunos niños al azar, llámalos al pizarrón y pídeles que escriban las respuestas. Creo que eso lo hará más interesante. De esta forma no hay orden en sus respuestas. Si ellos dicen, “hay cinco respuestas” entonces tú dices, “escojamos a 5 estudiantes”. Si les pides que escriban las respuestas, entonces no les presentarás ese orden tan perfecto. Puede haber respuestas duplicadas también. De esa forma ellos podrán ver claramente qué es lo que hace falta. Si haces eso, ¿no hará que los estudiantes trabajen juntos en “poner las ecuaciones en orden correcto”?

En esa reflexión, el maestro M2 hace la sugerencia de que se promueva el componente *alta demanda cognitiva* (IC3) del criterio de idoneidad cognitivo. En particular, que se contemplen los procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) presentes en el componente *riqueza de procesos* (IE3) (la secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática: modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.) de la idoneidad epistémica.

Aunque el profesor, en su clase no tuvo en cuenta la diversidad en el ritmo de aprendizaje de sus alumnos (del criterio cognitivo), otro maestro (M3) tiene presente este aspecto en su reflexión:

M3: Debido a que cada niño puede tomar un camino distinto para descubrir las reglas que el maestro usa, sería mejor enfocarse en cómo cada niño descubre. Al hacer eso, se compartirían dichos descubrimientos con la clase entera para profundizar en el entendimiento de todos.

Por otra parte, el maestro (M4) hace un comentario relacionado con la afectividad entre el profesor y sus estudiantes, contemplando la idoneidad afectiva.

M4: El profesor tiene una relación maravillosa con los niños. No creo que nadie puede construir una relación tal en un día. Él ha tenido que poner un gran esfuerzo día a día con los niños para alcanzar una relación de ese tipo.

Al final del video el profesor P presenta un rediseño de la clase tomando en cuenta las observaciones de mejora sugeridas por los otros profesores que han participado de esta experiencia de *Lesson Study*.

Después de seguir los pasos explicados anteriormente para las experiencias que usan los CID y para las que usan el LS, en un último análisis se obtuvieron, primero, resultados sobre el rol de la reflexión en las experiencias que usan los CID y también sobre las que usan el LS y, después, se buscaron complementariedades entre ambos tipos de experiencias.

4.2 Etapa metodológica 2: Diseño y aplicación un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID

En este subapartado se explica el proceso metodológico del diseño de un ciclo formativo piloto (ítem 4.2.1) y, en el siguiente subapartado, se detalla el proceso metodológico del diseño y aplicación del ciclo formativo llevado a cabo en esta tesis, detallando, de manera particular, el contexto del estudio y las características de los sujetos participantes (ítem 4.2.2).

4.2.1 Diseño, aplicación y análisis de un ciclo formativo: estudio piloto

Antes de diseñar el curso formativo previsto, se ha realizado un estudio piloto. El objetivo del estudio piloto fue verificar las posibilidades y limitaciones del curso para lograr el objetivo de la tesis doctoral –analizar de qué forma un dispositivo formativo basado en el LS y los CID promueve la reflexión de profesores de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas.

Para el estudio piloto, se realizó un diseño e implementación de un dispositivo formativo que combina ambas metodologías, que sirvió como estudio de caso, con profesores

en ejercicio participantes de un máster profesional en enseñanza de matemáticas en una institución pública de enseñanza superior ubicada en el sur de Brasil. El diseño fue realizado por la doctoranda y sus directores de tesis y la implementación por la doctoranda.

Estructura del curso piloto

La estructura del dispositivo formativo que permite combinar el LS con los CID es la siguiente: 1) Primer momento: *Lesson Study*; 2) Segundo momento: Hacer observar a los participantes que en la fase del *Lesson Study* han usado de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID, 3) Tercer momento: Enseñanza de los CID y 4) Cuarto momento: Uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase de reflexión y rediseño del LS (primer momento del curso), lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en el LS.

Participantes del estudio piloto

Participaron de la investigación 13 alumnos (denominados A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M) de un curso de maestría profesional del *Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática* de una universidad estatal ubicada en el sur de Brasil. Todos eran profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria de escuelas de la red pública o privada de diferentes ciudades del estado de *Rio Grande do Sul*, Brasil. Los profesores participaron voluntariamente firmando una carta de compromiso, habiéndoseles informado de los objetivos de la investigación y de cómo serían utilizadas sus producciones.

Contexto y funcionamiento del curso

Se realizaron cinco encuentros semanales de una hora y media con el grupo de profesores participantes (además de esta parte presencial, los participantes realizaban un trabajo autónomo por su cuenta). Dados los objetivos planteados en esta investigación, en el diseño e implementación del dispositivo formativo piloto se puso el énfasis en el primer momento (realización de un LS); en particular, las cuatro primeras sesiones se dedicaron a desarrollar tres de las cuatro etapas del LS: indagación-planeación; ejecución-observación; y revisión-reflexión. En el primer encuentro, se presentó a los participantes la metodología LS

(previamente ya habían realizado lecturas sobre dicha metodología como trabajo autónomo). Dado que un LS se desarrolla con un grupo inferior a trece profesores y, con la expectativa de obtener diferentes resultados, el gran grupo fue subdividido en tres subgrupos. Un grupo con cinco profesores y los otros dos con cuatro cada uno. Los propios profesores tomaron la iniciativa de agruparse de acuerdo con las afinidades entre ellos. Hay que resaltar que era un grupo que ya se conocían entre ellos y que ya tenían experiencia de trabajo colaborativo.

En el segundo encuentro se explicaron algunas directrices mínimas para la realización de la planificación de la clase (cada tarea debería tener objetivos y aprendizajes esperados, una breve justificación de porqué realizar la tarea, etc.). Además, los profesores deberían explicar en la planificación cómo iban a trabajar cada actividad (metodología/didáctica). Las discusiones de los grupos en esta fase de diseño y planificación de la clase fueron registradas mediante grabaciones de voz y con observaciones del diario de campo de la investigadora que tuvo el rol de profesora del dispositivo formativo implementado. El tercer encuentro fue el día en que se impartió la clase planificada, la cual se registró en vídeo, para que más tarde los profesores pudiesen analizarla y reflexionar sobre ella. En el cuarto encuentro, los profesores de cada grupo visionaron los vídeos de la clase implementada, la analizaron y reflexionaron sobre lo que se podría mejorar en futuras implementaciones.

En el quinto encuentro, se condensaron las otras tres etapas del dispositivo formativo que permite combinar el LS con los CID. Primero se resaltaron los criterios que ellos usaron en los cuatro encuentros anteriores y se les hizo observar que usaron, de manera explícita o implícita, algunos de los componentes e indicadores de los CID. A continuación, se les comentó que los criterios que ellos usaron forman parte de una lista mucho más amplia y detallada de criterios y componentes que se deben tener en cuenta para la planificación, desarrollo y rediseño de una clase de enseñanza de las matemáticas; en este momento se presentaron los Criterios de Idoneidad Didáctica y se les suministraron lecturas y videos para que de manera autónoma profundizaran en el conocimiento de este constructo. Por último, se les propuso realizar un rediseño de la secuencia de tareas de su LS teniendo en cuenta los criterios, componentes e indicadores de los CID (ellos debían entregar el rediseño de forma online como última etapa de la asignatura del máster que estaban realizando). Para la

recolección de datos se utilizaron registros de observaciones en diarios de campo, grabaciones de videos y voz de intervenciones reflexivas durante el proceso del ciclo formativo realizado.

Los datos analizados son los del primer momento del dispositivo formativo (correspondiente al LS), en la que los profesores participantes diseñaron, implementaron y analizaron una secuencia didáctica. En ese sentido, los LS favorecieron la organización y recolección de los datos, permitiendo identificar los CID implícitos en el discurso de los profesores en todas las etapas del LS implementado. Básicamente, la metodología consiste en seleccionar párrafos en la reflexión de los profesores que pueden ser considerados evidencias de uso implícito de algunos de los indicadores y componentes de los diferentes CID.

4.2.2 Diseño e implementación de un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en el LS y en los CID: contexto y participantes

Una vez explicado cómo se ha realizado el estudio piloto, se explica el contexto del curso formativo y participantes (y el proceso de selección de los participantes). El diseño e implementación del curso están descritos en el capítulo de resultados de esta tesis (subapartado 5.2.2 y 5.2.3, respectivamente).

Contexto de realización del curso

Para la realización del curso, se contactó inicialmente con el Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, investigador y profesor de la *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS), institución pública de educación superior ubicada en la ciudad de *Porto Alegre*, en el estado de *Rio Grande do Sul* (RS), sur de Brasil, para conocer y concretar la posibilidad de promover y certificar una acción de extensión - actividad complementaria opcional que permite a los profesionales y egresados conocer temas que no fueron cubiertos en su carrera o que no fueron suficientemente profundizados durante su formación inicial.

Con la aceptación del profesor Rodrigo, la acción de extensión se propuso en forma de un curso de educación continua titulado "*Lesson Study* y Criterios de Idoneidad Didáctica: formación continua para docentes que enseñan Matemáticas". El público del curso fueron profesores de matemáticas en servicio que enseñan a estudiantes brasileños en Educación Básica y el objetivo general presentado en la propuesta de curso fue “promover el desarrollo

de la reflexión de los docentes participantes a través de un curso de formación que combina el uso del LS y los CID”.

El equipo de profesores investigadores que desarrolló e impulsó el curso de formación estuvo formado por la candidata a doctora y autora de esta tesis, Viviane Beatriz Hummes, por sus supervisores de la Universitat de Barcelona, la Dra. Adriana Breda y el Dr. Vicenç Font y por el Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, profesor coordinador y responsable de la acción de extensión promovida en la UFRGS. La autora de esta tesis, en adelante denominada profesora investigadora (PI), fue la profesora que impartió las sesiones del curso a los profesores participantes.

La formación continua destinada al curso propuesto tuvo una carga de trabajo total de 40 horas, presenciales, repartidas en cuatro meses, con reuniones semanales (total de 16 reuniones de dos horas y media cada), de marzo a julio de 2020. El curso se estructuró para desarrollarse en tres fases:

En la primera fase del curso, con los profesores divididos en dos grupos, se llevaron a cabo dos ciclos completos de LS (cuatro profesores desarrollaron un ciclo de LS en el *Ensino Fundamental* y los otros cuatro un ciclo de LS en el *Ensino Médio*). En esta fase se consideraron las etapas típicas de un LS: 1) Planificación de la lección: un grupo de docentes elige los temas a desarrollar y establece los objetivos. 2) Realización y observación en el aula: un docente comparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza/aprendizaje. 3) Reflexión conjunta sobre los datos registrados: después de la clase, los profesores se reúnen para evaluar el desempeño de la clase, reflexionando, entre otros aspectos, sobre las actitudes de estudiantes y profesores durante la clase. El contenido matemático elegido en los dos grupos para ser enseñado en la clase fue el Teorema de Pitágoras. En el *Ensino Fundamental* como un contenido para ser visto por primera vez y en el *Ensino Médio* como una herramienta para resolver un problema concreto.

Inmediatamente después de terminar los ciclos de LS, es decir, después de planificar, implementar, observar, analizar y reflexionar sobre la clase implementada, se realizó la segunda fase del curso de extensión: el estudio de los CID. Para la enseñanza de los CID, se realizó una importante adaptación al diseño ya aplicado y experimentado en másteres para la formación de profesores de matemáticas de secundaria en España, donde este constructo es un

contenido a ser enseñados para ser utilizados como guía para la organización de la reflexión sobre la propia práctica. En el caso de Máster Interuniversitario de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas, en la asignatura *innovación e investigación sobre la propia práctica*, por ejemplo, se enseñan los CID con la siguiente secuencia: a) análisis de casos; b) aparición de tipos de análisis didáctico; c) tendencias en la enseñanza de las matemáticas; d) teoría (CID); y e) leer y comentar partes de algunos proyectos finales de maestría de cursos anteriores, donde se han usado los CID para organizar la reflexión sobre la propia práctica. Después, en (f) cada participante usa los CID para organizar su reflexión en su Trabajo de Fin de Máster (TFM). En el caso del curso de extensión que combina el LS y los CID, desarrollado en esta investigación, se ha realizado una adaptación de las dos primeras fases (a y b) acabadas de comentar, las cuales fueron sustituidas por las etapas correspondientes a los ciclos de LS, pues al realizar el LS, los docentes hicieron reflexiones sobre cómo debería ser la secuencia de tareas que habían propuesto. Estas reflexiones se utilizaron como evidencia del uso implícito de algunos componentes e indicadores de los CID, lo que dio lugar a la explicación de los ítems c y d, mientras que los últimos ítems son reemplazados por una nueva reflexión, guiada por los CID, sobre la clase realizada y evaluada anteriormente sin la pauta de los CID.

Después de estudiar los CID, en una tercera fase, se realizó un nuevo análisis de la clase implementada en ciclo de LS del grupo del *Ensino Fundamental*, utilizando los CID como herramienta para orientar la reflexión de los docentes y llegar a una propuesta de rediseño de la clase (por razones de tiempo, no fue posible hacer lo mismo con la clase del *Ensino Médio*).

Para hacer esta reflexión, cada uno de los profesores analizó la clase aplicada en el *Ensino Fundamental* desde la perspectiva de uno de los seis CID: el epistémico, el cognitivo, el mediacional, el interaccional, el afectivo y el ecológico. Posteriormente, cada docente presentó su análisis a todo el grupo y luego hubo una discusión de lo que se debería mantener y lo que se debería modificar/mejorar en la clase. Nuevamente, por razones de tiempo, no fue posible aplicar la clase rediseñada y hacer un nuevo ciclo de LS.

Es importante subrayar que hubo una fase anterior a la fase 1 (que llamamos de fase 0) una vez que fue el momento de presentar a los participantes la dinámica y el cronograma del curso. El siguiente cuadro (Cuadro 3) resume las fases y etapas del curso:

Cuadro 3. Fases y etapas del curso

Fases del curso		Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
Fase 1	Desarrollo de ciclos de LS	Estudiar el plan de estudios y las metas	Planificación de la lección	Implementación y observación de la lección	Reflexión de la lección
Fase 2	Enseñanza de los CID	CID implícitos en experiencias de LS	CID epistémico	CID cognitivo	CID interaccional, mediacional, afectivo y ecológico
Fase 3	Uso de los CID como una herramienta metodológica	Nueva reflexión con los CID de la clase implementado en el LS	Rediseño con los CID de la clase implementada en el LS		

Fuente: elaboración propia.

Selección de los participantes

Las inscripciones al curso se realizaron mediante un formulario de *Google* (Figura 8), del 04/12/2019 al 07/12/2019, publicado por la UFRGS y, también, a través de publicaciones publicadas en las redes de la autora de esta tesis (Figura 9). Se pusieron a disposición de los interesados en realizar el curso diez plazas, que tuvieron 45 inscripciones en tan solo 3 días.

Lesson Study e Critérios de Idoneidade Didática: Uma Formação Continuada para Professores que Ensinam Matemática

Esta proposta de curso de extensão busca promover o desenvolvimento da competência reflexiva na formação de professores de Matemática. Para isso, será oferecido um curso de formação continuada que combina o uso da metodologia japonesa Lesson Study e a ferramenta Critérios de Idoneidade Didática, por meio de uma colaboração internacional entre pesquisadores em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e da Universidade de Barcelona (UB).

*Obrigatório

ANO/SÉRIE EM QUE LECIONA *

6o ano do Ensino Fundamental

7o ano do Ensino Fundamental

8o ano do Ensino Fundamental

9o ano do Ensino Fundamental

1o ano do Ensino Médio

2o ano do Ensino Médio

3o ano do Ensino Médio

Endereço de e-mail *

Seu e-mail _____

HÁ QUANTO TEMPO LECIONA MATEMÁTICA EM ESCOLAS? *

Sua resposta _____

NOME *

Sua resposta _____

POSSUI GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA LICENCIATURA? *

Sim

Não

ESCOLA *

Sua resposta _____

TÍTULO MÁXIMO *

Doutorado

Mestrado

Especialização

Graduação

Enviar

Figura 8. Formulário de registro de cursos de Google
Fuente: elaboración propia.

CURSO DE EXTENSÃO

LESSON STUDY E CRITÉRIOS DE IDONEIDADE DIDÁTICA: UMA FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

PÚBLICO ALVO: professores de matemática em exercício

INSCRIÇÕES: via preenchimento de [formulário Google](#)

PERÍODO DE REALIZAÇÃO: de 09/03/2020 a 29/06/2020 (segundas-feiras das 19h às 21h40)

DURAÇÃO: 40 horas

CUSTO: gratuito

LOCAL: Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, Campus do Vale, Porto Alegre

Figura 9. Póster de difusión del curso
Fuente: elaboración propia.

Así, junto con el Dr. Sychocki da Silva, responsable de la acción de extensión de la UFRGS, se evaluó la posibilidad de ampliar las vacantes para los participantes del curso. Se decidió aumentar el número de vacantes a 18 docentes y realizar tres ciclos de LS en lugar de dos, con 6 docentes cada uno. Para seleccionar a los 18 profesores que tomarían el curso, se creó un nuevo formulario de *Google* (Figura 10) y se aplicó a los 45 profesores interesados en la primera etapa de postulación.

Inscrição Curso de Extensão UFRGS - PARTE 2

Você se inscreveu para participar do curso de extensão "Lesson Study e Critérios de Idoneidade Didática: Uma Formação Continuada para Professores que Ensinam Matemática" da Universidade Federal do Rio Grande do Sul com a participação de pesquisadores da Universidade de Barcelona. No entanto, o número de professores interessados em realizar o curso ultrapassou o número de vagas disponíveis. Para selecionar os professores participantes será realizado um sorteio. A confirmação da participação no sorteio ocorrerá após você responder algumas perguntas complementares apresentadas neste formulário.

Endereço de e-mail *

Endereço de e-mail válido

Este formulário coleta endereços de e-mail. [Alterar configurações](#)

NOME *

Texto de resposta curta

Você concorda em assinar um Termo de Consentimento Informado (uso de imagem, voz e discurso) para uma pesquisa de doutorado da Universidade de Barcelona? *

Sim

Não

Você aceitaria que uma ou mais de suas aulas fossem gravadas e assistidas pelos demais colegas do curso? *

Sim

Não

Na escola onde você leciona é possível fazer gravações de vídeo de suas aulas? *

Sim

Não

O curso será oferecido às segundas-feiras e às terças-feiras, sempre das 19h às 21h40. Em que turno você prefere fazer o curso? *

Segunda-feira

Terça-feira

Qualquer um dos dois dias da semana

Você ainda tem interesse em participar do curso? *

Sim

Não

Figura 10. Formulario de *Google* para la selección de profesores participantes
Fuente: elaboración propia.

Solo 24 de los 45 profesores que llenaron el primer formulario mostraron interés y respondieron las preguntas del segundo instrumento de registro. De las respuestas de estos profesores, se seleccionaron 18 profesores para participar en el curso de extensión.

De esta forma, se decidió realizar el curso en dos días a la semana, dividiendo a los participantes en tres grupos. El primero, que se llevaría a cabo los lunes, contó con 6 profesores que formaron un grupo que desarrollaría un ciclo de LS. El segundo, que tendría las reuniones del curso los martes, estuvo conformado por 12 participantes, quienes se dividirían en dos grupos de 6 docentes que desarrollarían otros en dos ciclos de LS.

El primer encuentro fue presencial, el 9 de marzo de 2020, y tan solo asistieron 2 profesores de los 6 inscriptos. Por ello, se replanteó la idea de 3 grupos de LS y se propuso a los profesores de este grupo pasar al grupo del día siguiente, quedando una reunión semanal con solo dos grupos de LS.

Al día siguiente asistieron 7 profesores de los 12 seleccionados y los 2 profesores que asistieron el día anterior. Por tanto, el grupo de profesores que participarían en el curso se constituyó con 9 participantes, que se dividirían en dos grupos de LS.

Se esperaba que el curso se realizara en modalidad presencial, sin embargo, luego del primer y único encuentro presencial, se declaró la pandemia COVID-19 en Brasil (Breda, Farsani y Miarka, 2020). Así, se suspendieron las actividades presenciales, tanto en las escuelas, como en las universidades de todo el territorio nacional. Debido a esto, el curso se reestructuró y se llevó a cabo en la modalidad online con la misma frecuencia, a través de sesiones de clase virtual realizadas por *Skype*. Por tanto, a excepción de la primera sesión del curso, todas las demás se realizaron a través de la plataforma digital *Skype*, en modo sincrónico, y las reuniones se grabaron y, una vez finalizadas, se pusieron a disposición del grupo de participantes en la plataforma de videos de *YouTube* en una versión privada. Todas las sesiones fueron grabadas para el registro de los datos de la investigación, con el consentimiento previo de los participantes que firmaron un documento de consentimiento informado (anexo 6). Tras informar a los profesores que el curso continuaría en la modalidad a distancia, uno de los profesores participantes se retiró del curso, alegando que no contaba con la estructura necesaria para llevarlo a cabo en esta modalidad. Así, el curso continuó con ocho profesores, divididos en dos grupos de cuatro participantes, cada uno de los cuales desarrollaría un ciclo completo de LS.

Participantes del curso

Uno de los grupos de LS lo conformaron los siguientes participantes: P1, docente de Matemáticas de Educación Secundaria (12-15 años), con quince años de experiencia docente, Licenciado en Matemáticas y Magíster en Ciencias y Educación Matemática, profesor de colegios municipales en las ciudades de Gravataí y Sapucaia do Sul, RS, Brasil; P2, docente de Matemáticas de Educación Secundaria (12-15 años) con tres años de experiencia docente,

Licenciado en Matemáticas y profesor temporal en una asociación cultural que promueve clases extraescolares de matemáticas para estudiantes desfavorecidos en la ciudad de Porto Alegre, RS, Brasil; P3, docente de Matemáticas de Educación Secundaria (12-15 años), con cinco años de experiencia docente, licenciada en Licenciatura en Matemáticas y con especialización en el área de Educación, y docente de escuela pública en los colegios municipales de la ciudad de Guaíba, RS, Brasil; y P4, docente de Matemáticas de Escuela Secundaria (12-15 años), con cinco años de experiencia docente, Licenciada en Matemáticas y docente en la red de escuelas de la ciudad de Canoas, RS, Brasil.

El segundo grupo de LS estuvo conformado por los siguientes docentes: P5, docente de Matemáticas de Bachillerato (16-18 años), con seis años de experiencia como docente, Licenciada en Matemáticas y Magíster en Docencia Matemática, docente del sistema escolar privado de la ciudad de Porto Alegre, RS, Brasil; P6, docente de Matemáticas de Escuela Secundaria (12-15 años), con cinco años de experiencia como docente, Licenciada en Matemática y Magíster en Enseñanza de las Matemáticas, docente en el sistema escolar privado en la ciudad de Porto Alegre, RS, Brasil; P7, docente de Matemáticas de Secundaria (12-15 años) y Bachillerato (16-18 años), con cinco años de experiencia como docente, egresada de Licenciatura en Matemáticas y con especialización en Educación, docente en el sistema escolar privado de la ciudad de Porto Alegre, RS, Brasil y de la red de educación municipal de la ciudad de Canoas, RS, Brasil; y P8, docente de Matemáticas de Educación Secundaria (12-15 años), con tres años de experiencia como docente, egresado de la Licenciatura en Matemáticas y docente en el sistema escolar privado en la ciudad de Porto Alegre, RS, Brasil.

Recogida de los datos

En términos globales, la experiencia se desarrolló del 10 de marzo de 2020 al 7 de julio de 2020. La recolección de datos se realizó a través de: (i) grabación de video de todas las reuniones virtuales y la clase implementada en la Educación Básica (*Ensino Fundamental*); (ii) respuestas de los participantes de un cuestionario final de evaluación del curso, (iii) entrevista realizada con la profesora P4 que implementó la clase con los alumnos de la Educación Básica (*Ensino Fundamental*) y (iv) rediseño de la clase implementada. La

recolección de datos buscó identificar elementos particularmente significativos desde el punto de vista del aprendizaje profesional de los docentes, así como otros posibles indicadores de desarrollo profesional, tanto en los momentos de trabajo colectivo como en sus reflexiones. Desde esta perspectiva, se planteó el reto inicial de realizar dos ciclos de LS y el equipo de investigadores condujo las distintas etapas del proceso como interlocutores. Así, el papel de los investigadores fue, sobre todo, el de brindar espacios de reflexión a los docentes involucrados, sobre el aprendizaje de los estudiantes y sobre sus prácticas.

4.3 Etapa metodológica 3: Papel que tienen los CID en una experiencia de LS

Una vez caracterizados el contexto del curso formativo y los sujetos participantes, para dar respuesta al objetivo específico 3 de esta tesis doctoral –investigar el papel que tienen los CID en una experiencia de LS, antes de que dicha herramienta haya sido enseñada a los participantes como pauta para organizar su reflexión–, se explica como se ha llevado a cabo el análisis de las reflexiones realizadas por el grupo de docentes participantes de esta investigación, cuyos datos fueron recolectados en la fase 1 del curso formativo, en particular, se realizó una transcripción de las sesiones del curso grabadas referentes a las etapas de estudio del currículo y metas (primera etapa de la LS); planificación de clases (segunda etapa); y reflexión de la clase (cuarta etapa) del ciclo LS desarrollado por el grupo de docentes que condujo la clase con alumnos de noveno año de primaria. En la primera y segunda etapa, los profesores P1, P2, P3 y P4 participaron de la reflexión y en la tercera y cuarta etapa también estuvieron presentes los profesores P5, P6, P7 y P8, los cuales eran el grupo que realizó el ciclo LS con estudiantes del *Ensino Medio*. El motivo es que, en un ciclo de LS, en las etapas de implementación y reflexión conjunta de la clase, también pueden participar profesores, investigadores u otros profesionales invitados ajenos al estudio, aunque no estuvieran presentes en las etapas anteriores. En estos análisis, no se consideraron los datos recolectados en la etapa de implementación y observación de la clase, ya que, en este momento, no hubo una reflexión conjunta por parte del grupo de docentes participantes.

El análisis de contenido sobre la reflexión del grupo de docentes sobre las etapas de *estudio del currículo y metas de aprendizaje*, la *planificación* y la *reflexión* de la clase se

realizó utilizando, como categorías previas, los componentes e indicadores de los CID presentados en el cuadro 1. Para analizar el uso implícito de componentes o indicadores de los CID en la reflexión de los docentes, se estableció un nivel de escala discreta (de 0 a 4), el cual fue asignado después de una triangulación con dos especialistas del EOS (los directores de esta tesis doctoral). Este tipo de análisis es similar al realizado en Breda (2020). El Cuadro 4 explica las características asignadas a cada nivel.

Cuadro 4. Nivel de atribución para el uso implícito de cada componente de los CID

Nivel de atribución para el uso implícito de cada componente de los CID	Características
0	En la reflexión de los docentes, no hay extractos del discurso que muestren el uso implícito de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
1	La reflexión del profesorado presenta esporádicamente extractos del discurso que pueden considerarse evidencia del uso implícito de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
2	En la reflexión de los docentes, hay extractos del discurso que muestran el uso implícito de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
3	En la reflexión de los docentes, hay extractos del discurso que muestran el uso implícito de la mayoría de los indicadores del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
4	En la reflexión de los docentes, hay extractos muy detallados y coherentes del discurso que muestran el uso implícito de la mayoría de los indicadores del componente del Criterio de Idoneidad que se está analizando.

Fuente: elaboración propia.

El siguiente es un ejemplo sintético de cómo se llevó a cabo el análisis de contenido. En particular, muestra cómo se asignaron los niveles de uso implícito de cada componente de la idoneidad cognitiva. En cuanto al componente de *conocimientos previos* (IC1), cuando los docentes están hablando de su experiencia en la enseñanza del Teorema de Pitágoras, en la etapa de estudio del currículo y metas, el docente investigador (PI) buscó conocer más detalles sobre el docente P4, quien más adelante implementaría la clase:

PI: Pero comentaste que, antes de trabajar el Teorema de Pitágoras, explicaste qué es un triángulo rectángulo y la hipotenusa, ¿verdad?

P4: Hipotenusa y cateto.

PI: Entendido. Haces un [...] ¿tienes algún conocimiento previo en el que trabajes?

P4: Exactamente. No sé si recordarán qué es un triángulo rectángulo. Por lo general, lo han visto en octavo grado [refiriéndose al año anterior], pero no sé si lo recordarán.

Luego de la discusión, cuando los maestros del grupo ya habían definido que la clase estaría planeada para una clase de noveno grado de la escuela primaria, donde estaba enseñando el maestro P4, PI indagó sobre cuánto sabía P4 de lo que ya habían aprendido sus alumnos:

PI: Y es el primer contacto con el Teorema de Pitágoras, ¿no? Porque eras su maestra, como dijiste en nuestro primer encuentro, ¿ya llevas varios años con ellos, ¿verdad?

P4: Sí.

PI: Es el tercer o cuarto año que has sido su maestra, ¿no es así?

P4: No. Les enseñé en octavo grado y también en noveno, que es ahora. Pero, hay algunos estudiantes a los que también enseñé en sexto grado.

PI: ¿Entonces conoces bien a estos estudiantes porque fuiste su profesora de matemáticas el año pasado? ¿El año anterior?

P4: Exactamente.

PI: Entonces, ¿sabes que no tuvieron contacto con el Teorema de Pitágoras?

P4: Todavía no [...]

A partir de esta información, los profesores del grupo se basaron en lo que P4 les había explicado sobre los conocimientos previos de sus alumnos. Después de este episodio, los profesores, estudiaron cómo se presenta el TP en el currículo y los libros de texto, para planificar la clase. En este momento, P4 comentó una preocupación que tenía con relación al conocimiento de sus alumnos sobre operaciones con raíces:

P4: ¿Sabes lo que me preocupa? Cuánto vamos a trabajar con las raíces, porque lo estarían viendo ahora, ¿sabes? ¿Por qué pensé en esto? Porque el libro aquí tiene un ejemplo de un triángulo donde la hipotenusa es la raíz del número 38. Por supuesto, cuando lo elevé al cuadrado, la raíz sería la operación inversa y se cancelarían entre sí. No creo que eso ellos todavía lo puedan comprender. Esa parte aún falta.

En este comentario de P4 se evidencia una preocupación por los conocimientos previos que tienen sus alumnos. Y, en este caso concreto, conocimientos de operaciones con números irracionales. Además, a lo largo del desarrollo de las etapas analizadas, se identifican varios

extractos más de los diálogos de los docentes que se relacionan con el indicador "los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema".

También se identificaron comentarios de los docentes relacionados con el indicador "se pueden lograr los significados pretendidos (tiene una dificultad manejable)", como, por ejemplo, el siguiente:

P1: No se puede olvidar que trabajamos en las escuelas públicas, trabajamos con alumnos con mucha dificultad, que están ahí en noveno grado, pero aún tienen dificultad para dibujar un cuadrado, por ejemplo.

P4: No trabajaron tanto con las raíces cuadradas. Por supuesto que conocen una raíz cuadrada, pero no trabajaron las propiedades, lo que aparece aquí en esta ecuación cuadrática, cuando tenemos x al cuadrado igual a 64.

Se concluye que la reflexión de los docentes, realizada en las diferentes etapas analizadas, presenta comentarios o diálogos que pueden considerarse evidencia del uso implícito de la mayoría de los indicadores del componente IC1 (del criterio de idoneidad cognitiva). Además, son extractos del discurso que presentan muchos detalles, profundidad y coherencia. Por este motivo, se asigna un nivel 4 al uso de este componente.

En cuanto al componente de *adaptación curricular a las diferencias individuales* (IC2), no se identificaron extractos del discurso de las reflexiones realizadas por los docentes en las etapas analizadas, lo que puede considerarse evidencia implícita sobre la no inclusión de actividades de ampliación y refuerzo para contemplar las diferencias individuales presentes en el aula. De esta forma, se asigna un nivel 0 al componente IC2. En cuanto al componente de *aprendizaje* (IC3), P4, después de decir que la clase de TP podría realizarse con un grupo de estudiantes de noveno grado a los que actualmente está enseñando, pregunta si será interesante saber qué aprendieron los estudiantes después de la clase, es decir, pregunta si será necesario evaluar el aprendizaje de los estudiantes:

P4: [...] ¿Sabes lo que aprendieron?

PI: Sí. Si tuviéramos eso, sería genial.

P4: Porque podríamos hacer un formulario en Google para que respondan.

En este extracto del diálogo, P4 destaca la idea de cómo evaluar el aprendizaje de los estudiantes en una clase a distancia y comenta el uso de una herramienta de *Google* que podría funcionar como herramienta de evaluación. Se puede inferir que la preocupación de P4 está

relacionada con el componente IC3 de idoneidad cognitiva, específicamente con el indicador “los distintos modos de evaluación demuestran la apropiación de conocimientos / competencias previstos o implementados”. Además de esta evidencia, se identificaron extractos del diálogo relacionado con el mismo indicador. El análisis reveló evidencias que pueden considerarse uso implícito de la mayoría de los indicadores del componente IC3 de idoneidad cognitiva. Por esta razón, a este componente se le asigna un nivel 2. Para la *alta demanda cognitiva* (componente IC4), el docente P1, sabiendo que los estudiantes no tenían los conocimientos previos necesarios sobre números irracionales, sugiere:

P1: Pensé ahora, con tu discurso, incluso pensando así: pensemos en cómo sería un cuadrado donde el área sería 2, entonces, por ejemplo, tienes un cuadrado con el lado 1, donde tienes el área 1, para tener el lado 2, ¿qué pasará? Si el lado del cuadrado es 2, será cuatro. Entonces tendrán la sensación de que para dar el área 2, el número debe estar entre el número 1 y el número 2. Es menor que 2 y es mayor que 1. Y luego, como ya han visto el resultado, por ejemplo, de la raíz de 2, allá por el octavo año, la intención aquí es que recuerden, por ejemplo, este número. Pero, ¿cómo vamos a recordarles? Podrán tener acceso a la calculadora, ¿verdad? Allí tendrán su teléfono. Y luego, ¿qué? ¿Qué números podemos usar, en el lado de este cuadrado, para que este cuadrado tenga área 2? Y luego, por ejemplo, van a intentar hacer con 1.1, como 1.2, como 1.4, ¿cuál se acerca más? ¿Qué piensas, P4?

De la evidencia resaltada se puede inferir que P1 considera relevante trabajar con una actividad que "activa procesos cognitivos relevantes", indicador del componente IC4. Si bien existe evidencia en el discurso de los docentes de que las actividades tienen una cierta riqueza de procesos (lo cual, metafóricamente hablando se puede considerar la otra cara de la moneda del componente alta demanda cognitiva), en ningún otro momento se produjo otro comentario relacionado claramente con la alta demanda cognitiva. Por este motivo, se asigna un nivel 1 al uso de este componente.

4.4 Etapa metodológica 4: Análisis del desarrollo de la reflexión en los profesores de matemáticas participantes del curso

Para la consecución del específico 4 de esta tesis doctoral —analizar de qué forma el ciclo formativo implementado desarrolla la reflexión en los profesores de matemáticas participantes—, se explica a continuación cómo se ha llevado a cabo el análisis de las

reflexiones de los docentes participantes; sobre todo, de las realizadas en la tercera fase del dispositivo formativo (donde se usan los CID como herramienta que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase 1 del curso), en particular, la realizada en la etapa de reflexión del LS, con la finalidad de que los docentes participantes rediseñen secuencias de tareas que mejoren las rediseñadas en la primera fase del curso (realización del LS).

Por ello, los datos fueron tomados, sobre todo, de las sesiones 12, 13, 14, 15 y la sesión extra del curso, de la entrevista de la profesora que implementó la lección del Teorema de Pitágoras (TP) con los alumnos de básica en la primera fase del curso (realización del LS), de las respuestas del cuestionario final aplicado a los participantes y del rediseño final de la clase. En esta fase del curso los participantes fueron todos los profesores asistentes al curso (P1-P8). En particular, se realizó la transcripción de estas sesiones y, también, de la entrevista.

Escala de valoración del uso de los componentes de los CID en la reflexión del profesorado

El análisis de contenido sobre la reflexión del grupo de docentes se realizó utilizando, como categorías previas, los componentes e indicadores de los CID presentados en el cuadro 1, que son los que se les había enseñado en la segunda fase del curso. Para este análisis, a diferencia del realizado en el objetivo 3, interesa observar el uso explícito de los criterios, componentes e indicadores de los CID y, también, el grado de corrección de este uso. Por esta razón, de manera similar a como se hizo en Breda (2020) y en los análisis del objetivo 3, se estableció una escala discreta de valoración (de 0 a 4), la cual fue asignada después de una triangulación entre la doctoranda y sus dos directores de tesis. El Cuadro 5 explica las características de cada nivel de la escala:

Cuadro 5. Escala de valoración para el uso explícito y correcto de cada componente de los CID

Nivel de valoración para el uso explícito y correcto de cada componente de los CID	Características
0	En la reflexión de los docentes, no hay extractos del discurso que muestren el uso explícito y correcto de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
1	La reflexión del profesorado presenta esporádicamente extractos del discurso que pueden considerarse evidencia del uso explícito y correcto de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
2	En la reflexión de los docentes, hay extractos del discurso que muestran el uso explícito y correcto de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
3	En la reflexión de los docentes, hay extractos del discurso que muestran el uso explícito y correcto de la mayoría de los indicadores del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando.
4	En la reflexión de los docentes, hay extractos muy detallados y coherentes del discurso que muestran el uso explícito y correcto de la mayoría de los indicadores del componente del Criterio de Idoneidad que se está analizando.

Fuente: elaboración propia.

A continuación, sigue un ejemplo sintético de cómo se llevó a cabo el análisis de contenido. En particular, se muestra cómo se asignaron las valoraciones de uso explícito y correcto de los componentes del criterio de idoneidad cognitiva.

Los profesores que se responsabilizaron, en la tercera fase del curso, de hacer una primera valoración de la idoneidad cognitiva de la lección sobre el Teorema de Pitágoras implementada en la primera fase del curso (realización del LS) fueron P7 y P8. Estos dos profesores presentaron conjuntamente la reflexión que fundamentaba su valoración de la idoneidad cognitiva.

Aplicación de la escala de valoración al componente IC1 del Criterio de Idoneidad Cognitiva.

En la fase 2 del curso, a los participantes se les enseñó el significado del componente

conocimientos previos (componente IC1) que deben poseer los estudiantes, para que lo usaran, después, en su reflexión. Para ello, se trabajaron ejemplos de evaluación diagnóstica, se discutieron algunas razones que hacen que los alumnos puedan cometer errores (por ejemplo, se mostró un ejemplo en que un alumno aplica el TP en un triángulo que no es rectángulo). También se presentaron casos sobre la enseñanza del TP en los que los participantes deberían seleccionar cuál de ellos estaba más cerca de la zona de desarrollo próximo de sus alumnos. Una vez enseñado ese componente, los participantes hicieron una nueva reflexión sobre la clase implementada teniendo en cuenta este componente.

En cuanto al componente *conocimientos previos* (IC1) P8 hace los siguientes comentarios:

P8: En cuanto a los conocimientos previos, notamos que la profesora estaba muy preocupada en retomarlos. Ella ha comenzado recordando el área de figuras, el área de cuadrados, haciendo esto de diferentes maneras. También en términos de ángulos. Ella comenta que esto se estudió con ellos el año anterior. De todos modos, trabaja nociones de qué es un ángulo recto, qué es un ángulo en sí mismo. Nuestra sugerencia, entonces, es aprovechar este momento para trabajar la clasificación de esos triángulos según el ángulo. Identificar no solo qué es un triángulo rectángulo, sino también comentar los otros tipos de triángulos [...]

En estas reflexiones de P7 y P8 se observa el uso explícito y correcto del indicador “Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)” del componente *conocimientos previos* del criterio de idoneidad cognitiva. Con relación al otro indicador “Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable)” de este mismo componente del criterio de idoneidad cognitiva, si bien no se menciona explícitamente si se hacen comentarios sobre que la dificultad no es insalvable, ya que comentan algunas de las dificultades observadas en sus alumnos y cómo evitarlas:

P7: Solo para complementar lo que dijo P8 [...] Ahí, en la parte de clasificación, comentamos, cuando planificamos este material, que, muchas veces, en nuestras experiencias, los alumnos, después de aprender Pitágoras, quieren aplicarlo a cualquier triángulo. A veces tienen dificultades para comprender que este Teorema es aplicable solo en un triángulo rectángulo. Entonces, sugerimos este comentario sobre la clasificación de triángulos para enfatizar que el uso del TP debe ser en un triángulo rectángulo [...]

Dado que, en la reflexión de los docentes, hay extractos del discurso que muestran el uso explícito y correcto de algún indicador del componente del Criterio de Idoneidad Didáctica que se está analizando (el IC1 en este caso), la valoración, según la escala del cuadro 5, como mínimo es un 2. Ahora bien, dado que, por una parte, el otro indicador no se cita explícitamente, pero que, por otra parte, se está haciendo en cierta manera un uso correcto de él, la duda es si aumentar esta valoración hasta tres. Para decidir finalmente que la valoración es 3 se triangulan y se discuten las valoraciones que han hecho por separado la doctoranda y los dos directores de tesis. En esta triangulación se tiene muy en cuenta, además, el detalle, la profundidad y la coherencia de las reflexiones de los participantes.

Después de la presentación de los profesores P7 y P8 se produce una discusión con todo el grupo de profesores. En esta fase del dispositivo formativo los profesores no solo reflexionan criterio a criterio, sino que también reflexionan sobre varios criterios a la vez. Por ejemplo, en la fase dos del dispositivo formativo, al enseñar el criterio epistémico, se consideró la complejidad del objeto matemático (distintas representaciones, ¿qué significa?, conexiones entre significados, etc.) y la riqueza de procesos (en particular el proceso de argumentación), y en un momento posterior, en la fase 3 del curso, los profesores reflexionaron, por primera vez, sobre si se hace o no una demostración más rigurosa del TP que no se limite a ejemplificar el Teorema con el triángulo de lados 5, 4 y 3. En esta fase tres se observa que los profesores tienen en cuenta varios CID y se observa como los comentarios relacionados con los criterios epistémico y cognitivo tienen más peso. En este momento, los profesores tienen en cuenta implícitamente el indicador “Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes” ya que consensuan que el hecho de que los alumnos no comprenderán la demostración por no estar acostumbrados a hacer demostraciones es un factor determinante para decidir no hacerla y limitarse a hacer una conjetura y generalización a partir de más casos de ternas pitagóricas.

En estas discusiones y otras similares, se evidencia que los profesores participantes comprenden y usan los dos indicadores del componente IC1 y, también, que saben identificar los conocimientos previos en la clase implementada analizada y cuáles deberían ser trabajados

en un rediseño. Como resultado de una nueva triangulación entre lo que se acaba de comentar y la valoración dada inicialmente, basada en la reflexión de P7 y P8, se concluye que la valoración de la reflexión de todo el grupo, sobre el componente IC1, es de 4.

Por último, se hace una triangulación entre el nivel de valoración asignado a este componente (IC1) en la fase 1 del curso (ver sesión anterior) y el obtenido en la fase tres del curso. En la fase 1 se ha observado que los participantes han realizado muchas reflexiones sobre los conocimientos previos y han valorado implícitamente si los conocimientos que poseen los alumnos están a una distancia razonable de lo que se quiere enseñar. Por esta razón se ha asignado el nivel 4 de uso implícito. En la fase 3, más que hablar de una mejora de la reflexión, lo que hay que señalar es que lo que antes era implícito, los conocimientos previos, ahora, se manejan de forma explícita y se analizan con más detalle los conocimientos previos, por ejemplo, la clasificación de los triángulos a partir de sus ángulos es algo incorporado, en la reflexión, solamente en la fase 3 del curso. Con relación a otro indicador del componente IC1 “los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable)”, si bien no se observa un uso explícito, sí que se observa que hay reflexiones detalladas y correctas sobre lo que pueden llegar a aprender los alumnos, en particular se pasa de presentar un solo caso para ejemplificar el TP a considerar que es conveniente presentar varios casos y después, incluso, en el rediseño, se propone incorporar la demostración geométrica (ver anexo 2, tarea propuesta por el grupo de participantes en el rediseño de la clase).

Aplicación de la escala de valoración al componente IC2 del Criterio de Idoneidad Cognitiva.

En la fase 2 del curso, a los participantes se les enseñó el significado del componente *adaptación curricular a las diferencias individuales* (componente IC2). Para ello, se realizó una discusión sobre qué tipos de actividades deberían ser diseñadas y aplicadas a un grupo de alumnos que presenta mucha diversidad. También se reflexionó sobre lo qué es la diversidad. También se discutió con los participantes cómo se contemplan las diferencias en un contexto de pandemia y, además, tenían que explicar hasta qué punto es posible contemplar la

diversidad en sus contextos escolares. Una vez enseñado ese componente, los participantes hicieron una nueva reflexión sobre la clase implementada teniendo en cuenta este componente.

En cuanto al componente de adaptación curricular a las diferencias individuales (IC2), a diferencia de lo que había ocurrido en la fase 1 del curso donde no se identificaron reflexiones relacionadas con este componente, en esta tercera fase del curso los profesores si hacen comentarios sobre él. Con relación a este componente IC2, P7 y P8, los profesores que se responsabilizaron, en la tercera fase del curso, de hacer una primera valoración de la idoneidad cognitiva de la lección sobre el Teorema de Pitágoras implementada en la primera fase del curso (realización del LS), ahora hacen comentarios sobre el tratamiento de la diversidad que hizo el docente que implementó la clase. En particular valoran positivamente que usó estrategias que podían ayudar a tener en cuenta las diferencias individuales de los alumnos, como, por ejemplo, que trató el tema de varias maneras diferentes y que realizó una interacción que facilitó la comprensión de alumnos con dificultades:

P7: Para las adaptaciones, creemos que P4 y el grupo han logrado presentar [el TP] de manera adecuada y diversa, intentando proponer varios tipos de estrategias para abordar el Teorema. Creo que se han tenido en cuenta muchos recursos visuales, una parte más histórica, una parte más manipulable, ahí, trabajando con el triángulo, de todos modos. Y creemos que el estímulo fue una buena estrategia. La comunicación con los estudiantes - como dije, estoy experimentando esto -, P8 también, desde hace noventa días. Entonces, superé, al menos, mis expectativas en relación con una clase en *YouTube*. Y creo que P4 lo ha hecho muy bien, en ese sentido, aunque no podía ver a los alumnos, buscaba constantemente la comunicación, la interacción, y creo que fue estupendo, así que logró lidiar con este aspecto. También logró involucrarlos. Incluso comenté que me llamó mucho la atención, la sensación que tuve fue que en la clase de P4 interactuaban más los alumnos que en la clase de P5, que estaba en *Google Meet*, que era diferente, que ya estaba pasando. Entonces, sentí que no se trataba tanto del maestro, sino más de los propios estudiantes. De todos modos, fueron más participativos. Así que pensé que era realmente genial, como, esto ... poder cuantificarlo, era algo que era mucho, así. Por supuesto, también estaba ese maestro, pero los estudiantes estaban interactuando, mostrando sus dificultades también. No se avergonzaban de exponer, de preguntar.

P8: Notamos, cuando reflexionamos sobre los pocos estudiantes que hicieron, o no lo hicieron, correctamente la propuesta de la actividad exploratoria anterior, que construyen los cuadrados y lo evaluamos como muy interesante, como muy positivo. Notamos que ella [P4] siempre regresaba para ayudar - vi que había una estudiante que se unió a la llamada más tarde y no había dado parte

de la explicación - P4 retomó e hizo toda la explicación nuevamente. Creo que, en este sentido de adaptaciones curriculares, lo que más me llamó la atención fue, en relación a haber usado diferentes recursos para hacer la explicación, que se usó video, se usó imagen, se usó ejercicios. Entonces esa parte fue realmente interesante.

A continuación, la reflexión pasa de poner el foco al tratamiento de la diversidad del grupo en general sin poner el foco en las adaptaciones curriculares para tratar la diversidad, al tratamiento de la diversidad que necesitan los alumnos con necesidades especiales:

P7: Ahí como una atención, en la que incluso pensé con P8 después, no es que no, porque era yo hasta que lo mencioné, no es que no haya inclusión, pero es algo que me tiene muy preocupado, en este período de cuarentena, así, desde las clases a distancia, y de forma virtual, nuestra interacción con los alumnos con necesidades especiales. Y, por supuesto, debemos pensar en incluir y reunir a todos o la mayoría de los estudiantes para lograr esto de manera efectiva, solo para que no noté esta preocupación por la inclusión de los estudiantes en ninguno de los grupos. Ni mío ni de P4. No sé si tal vez P4 no tenga estudiantes de inclusión, pero seguí preguntándome sobre eso. Creo que, en ningún momento, incluso en toda esta discusión que hicimos, mencionamos a estudiantes con necesidades especiales, y es algo que necesitaremos tener y, quizás, es importante para los docentes que se fueron a trabajar con este modelo que estamos teniendo la oportunidad de conocer. En este proceso de inclusión, creo que el intercambio, la conversación es super importante, entonces quería resaltar esta parte, así que sigo pensando que tal vez un alumno con necesidades especiales no sé cuánto está, de hecho, incluido. Un alumno con discapacidad intelectual, un alumno con autismo, no sé cuánto, de hecho, está incluido en nuestros horarios. Fue solo por eso que puse ese símbolo de atención.

Después de esta primera reflexión presentada por P7 y P8, los otros profesores también hicieron algún comentario sobre este componente, en particular P5, uno de los dos docentes que implementó la clase, aclaró que en su clase sí que tiene un alumno con déficit de atención, pero que no estuvo presente el día que se implementó la clase por problemas de salud:

P5: Solo quiero responder a P7, en mi clase solo tengo un alumno que tiene déficit de atención y no estaba participando en el momento en que implementamos nuestra clase, porque tenía problemas de salud. Del resto, no hay estudiantes, en esa clase de tercer año, con otras discapacidades.

P7: Genial, P5.

Lo que resulta significativo es que en este momento P8 y, sobre todo P7, manifiestan que en la fase 1 del curso no tuvieron en cuenta este aspecto, es decir que no tuvieron en cuenta que podían tener alumnos que necesitasen un tratamiento individualizado:

P8: Creo que la sugerencia fue más pensar en planificar la clase, como tener una tarjeta en la manga para crear oportunidades para que estos estudiantes también tengan acceso. Era más pensar en esa dirección.

P7: Sabes que estaba pensando, más tarde, que no sabía si, por ejemplo, había un alumno en la clase de P5 con una discapacidad y no pregunté. Entonces, luego, cuando comencé a pensar en este aspecto, me estaba cuestionando: "bah, pero ni siquiera hice la primera pregunta", me sentí como: Ni siquiera planifiqué un estudiante con ... Entonces, claro, probablemente si se tratara de un alumno con un caso más difícil, P5 lo hubiera dicho, por ejemplo. Pero fue solo porque yo tampoco lo pensé. Así que quería compartirlo con ustedes.

En esta misma sesión PI les hace observar que no sólo no se tuvo en cuenta si había alumnos con necesidades especiales, sino que tampoco se plantearon secuencias de tareas para adaptarse a los alumnos con más dificultades (actividades de refuerzo) o para adaptarse a los alumnos que podían profundizar más (actividades de ampliación). Es decir, el foco de la clase siempre había sido el gran grupo sin tratamiento diversificado para adaptarse a las necesidades individuales, más allá de usar diferentes recursos y de atender a las dificultades de algún alumno específico de manera puntual (por ejemplo, el alumno que se perdió una parte de la explicación).

Por otra parte, hay que destacar que en el rediseño de la clase que propusieron en la tercera fase del curso, no se llegó a contemplar el tratamiento de la diversidad con actividades de refuerzo o de ampliación.

A la hora de valorar este componente con la escala del cuadro 5 surgen algunas dudas relacionadas, sobre todo, con el hecho de que este componente tiene un solo indicador, por lo que la valoración podía variar entre 1 y 3. Ahora bien, la valoración que se consensuó entre la doctoranda y sus directores de tesis fue 2 ya que no se trata de un uso esporádico de este componente. Dicho de otra manera, en la tercera fase del curso los profesores participantes reflexionaron sobre este componente, primero lo hicieron de una manera que no se puede considerar propiamente un uso correcto de este componente ya que no llegan a enfocar la reflexión sobre las adaptaciones curriculares, pero después, reflexionan sobre las adaptaciones curriculares a alumnos con necesidades especiales y son conscientes que este aspecto no fue tratado en la reflexión de la fase 1 del curso. Ahora bien, no llegan a profundizar en el indicador

“se incluyen actividades de refuerzo y de ampliación”, de hecho, no las contemplan en el rediseño que proponen.

Si se compara la reflexión sobre este componente en la primera fase con esta tercera, se observa que los participantes ahora lo tienen en cuenta y son conscientes de que en la primera fase no lo tuvieron en cuenta, por otra, parte no profundizan en este componente y, de hecho, no lo contemplan en el rediseño de la clase.

Aplicación de la escala de valoración al componente IC3 del Criterio de Idoneidad Cognitiva.

En la fase 2 del curso, a los participantes se les enseñó el significado del componente *aprendizaje* (IC3). Para ello, se reflexionó sobre cuáles son los errores más comunes que cometen los alumnos cuando trabajan el TP y también se trabajó cómo hacer tipos de evaluación formativa (especificando criterios y descriptores de nivel de desarrollo) para minimizar esas dificultades y errores y, sobre todo, avanzar en el aprendizaje. Una vez enseñado ese componente, los participantes hicieron una nueva reflexión sobre la clase implementada teniendo en cuenta este componente.

En cuanto al componente de *aprendizaje* (IC3), P7 y P8, los profesores que se responsabilizaron, en la tercera fase del curso, de hacer una primera valoración de la idoneidad cognitiva de la lección sobre el TP implementada en la primera fase del curso (realización del LS), hacen los comentarios siguientes:

P8: Pensando en el aprendizaje, observamos uso de diferentes recursos, como habíamos dicho, diferentes formas de facilitar este aprendizaje. Ejercicios con diferentes niveles de dificultad. Ejercicios más fáciles, ejercicios más duros, eso es lo que pensamos. Cuando se hace la relación de igualdad entre las áreas, ella [P4] mostró y les dejó construir esa relación. No les dijo cómo llegar allí, esperó a que hicieran esta construcción. Por lo tanto, también destacamos esto como positivo. Como destacada, pongo "comunicación para dar seguimiento a las dificultades". Creo que podría haber sido más constante, en cada momento preguntar "¿entiendes?", "¿Está todo bien?" y esperar una respuesta de ellos. Es solo, de hecho, todos los aspectos que ponemos, los entendemos, como dijo P7, por todo lo que estamos pasando. Porque este contacto es más difícil, entendemos todo esto, pero lo destacamos, aun así. Sugerimos, para el rediseño, algún tiempo, al menos, donde los alumnos puedan hacer alguna explicación y luego, nuevamente, Meet sería el recurso que facilitaría

esta, o alguna otra plataforma. Y, además, lo que ya hemos comentado, sobre la contextualización de los ejercicios, para acercar los ejercicios a la vida cotidiana de los alumnos y no solo a la aplicación directa del Teorema o algún problema más práctico.

Se trata de un tipo de comentarios de tipo general sobre cómo se facilitó el aprendizaje de los alumnos en la clase implementada o sobre cómo facilitarlo en el rediseño (uso de diferentes recursos, procurar que el alumno sea activo en su aprendizaje, diseñar tareas con diferentes niveles de dificultad, gestionar la interacción para facilitar el aprendizaje, etc.), pero no analizan cómo se evaluó el aprendizaje previsto, que es lo que se pretende valorar con este componente.

PI hace unas reflexiones que, de entrada, van en esta línea general y hace observar que en la clase se utilizaron diferentes figuras de un triángulo rectángulo (base no horizontal) y letras diferentes para evitar el fenómeno del prototipo (por ejemplo, que los alumnos piensen que todos los triángulos rectángulos tienen una base horizontal). Además, comentó que se utilizó una metodología activa (no magistral) y que la docente, al observar las dificultades de los alumnos, trató de resolverlas. Asimismo, les hizo observar a los participantes que la profesora usó los símbolos más adecuados, por ejemplo, representó el área con una letra mayúscula. Como aspecto negativo comentó que observó falta de conexión entre la explicación del TP como relación entre áreas y los problemas propuestos (cálculo de longitudes de lados).

Después de estos comentarios generales sobre el aprendizaje de los alumnos, PI pone el foco en la evaluación de los aprendizajes y comenta que algunas de las respuestas de los alumnos evidencian falta de aprendizaje y, también, pone en cuestión que el instrumento final de evaluación aplicado permita obtener información sobre el aprendizaje competencial de los alumnos (por ejemplo, todos los problemas son del mismo estilo). PI afirma que, en su opinión, con la evaluación realizada no se puede inferir si realmente hubo aprendizaje o no.

Una vez que PI pone el foco en la evaluación hay que resaltar que el grupo de profesores si tiene en cuenta este componente en el rediseño de la lección, ya que especifican muy claramente cómo evaluarán el aprendizaje de los alumnos. De entrada, se proponen tres tipos de evaluación (inicial en el bloque 1, formativa en los bloques 2 y 3 y final en el bloque 4), además, concretan con mucho detalle cómo será la evaluación diagnóstica inicial y, para la

evaluación formativa, establecen criterios de evaluación con indicadores para asignar un nivel de consecución. Por otra parte, confeccionan una prueba final con tareas diversas donde se tiene que aplicar el TP como una relación entre áreas y también como una relación entre las longitudes de los lados, con problemas contextualizados y descontextualizados, con problemas de diferente dificultad, con ejercicios para realizar en un formulario *google forms*, etc. (ver anexo 2).

Si se compara la reflexión sobre este componente en la primera fase con la realizada en esta tercera fase del curso, se observa que los participantes ahora confeccionan un rediseño de la clase con unos instrumentos de evaluación que permiten evidenciar el aprendizaje de los alumnos. Es decir, hay una mejora con relación a la reflexión de la primera fase del curso, de hecho, por el nivel de detalle de la evaluación del rediseño se le podría asignar una valoración de 4, pero dado que el paso de la reflexión general sobre el aprendizaje a una reflexión enfocada en cómo evidenciar el aprendizaje por medio de los instrumentos de evaluación fue provocado, sobre todo, por la intervención de PI, hemos consensuado asignarle a este componente un valor de 3.

Aplicación de la escala de valoración al componente IC4 del Criterio de Idoneidad Cognitiva.

En la fase 2 del curso, a los participantes se les enseñó el significado del componente *alta demanda cognitiva* (IC4). Para ello, se reflexionó sobre cuáles son las tareas que pueden activar procesos cognitivos relevantes (comprensión, generalización, conexiones, cambios de representación, argumentación, formulación de conjeturas, proposición de problemas, etc.). También se comentó el papel relevante de la metacognición de los alumnos para la resolución de problemas. Una vez enseñado ese componente, los participantes hicieron una nueva reflexión sobre la clase implementada teniendo en cuenta este componente.

En cuanto al componente *alta demanda cognitiva* (IC4), P7 y P8 hacen comentarios que parecen ser sobre el primer indicador y dicen explícitamente que no han tenido en cuenta el indicador “se promueven procesos metacognitivos”, Con relación al indicador “Se activan procesos cognitivos relevantes”, si bien no lo mencionan explícitamente, sugieren algunos cambios en el rediseño que facilitan este tipo de procesos:

P8: [...] Y, además, lo que ya hemos comentado, sobre la contextualización de los ejercicios, para acercar los ejercicios al día a día de los alumnos y no solo a la aplicación directa del Teorema o algún problema más práctico.

P7: Solo iba a agregar eso, pensando en el rediseño como una nueva oportunidad, también, para que los estudiantes interactúen con el conocimiento, que tal vez podamos proponer actividades que ellos también creen en esta clase. Entonces, pensando que, tal vez, teóricamente no volveremos a aplicar la clase, no es lo mismo, pero que podemos pensar en actividades que los estudiantes también busquen, ya que P5 hizo que los estudiantes crearan ejercicios, tal vez los estudiantes investigando la historia detrás el Teorema o la historia de Pitágoras, en fin, tratando de hacerlo también, por lo tanto, más finalmente invitándolos. Pero, creo que fueron más de estos temas los que pensamos. Vi que PI puso el cuarto tema allí, no lo hicimos. De la metacognición creo.

Por otra parte, hay que resaltar que: 1) PI comentó que el docente promovió una cierta exigencia cognitiva al proponer que, de manera autónoma, los estudiantes pudieran construir los cuadrados y encajarlos en el triángulo rectángulo, 2) en la clase rediseñada el grupo de profesores terminan incorporando una demostración geométrica del TP y que también aumentan la riqueza de procesos de las tareas rediseñadas, lo cual indirectamente aumenta la exigencia cognitiva de los alumnos.

Ahora bien, la valoración que se consensuó fue de 1 ya que la reflexión del profesorado no va más allá de presentar esporádicamente extractos del discurso que pueden considerarse evidencia del uso explícito y correcto de uno de los dos indicadores del componente IC4 del criterio de idoneidad cognitiva que se está analizando. Dicho de otra manera, no encontramos suficientes evidencias de que este componente tuviese un papel relevante en la reflexión del grupo de profesores, más allá de ser un resultado indirecto del aumento de la riqueza de procesos en el rediseño de la clase y de aumentar la distancia de las tareas dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno.

Conclusión general sobre la mejora global de la reflexión del profesorado sobre el Criterio de Idoneidad Cognitiva

Si se compara la reflexión sobre este criterio en la primera fase con la realizada en esta tercera fase del curso, se observa que los participantes ahora, además del IC1, que ya estuvo muy presente en la reflexión de la primera fase del curso, tienen en cuenta el IC2 y el IC3, que

apenas se tuvieron en cuenta en la primera fase, mientras que el IC4 sigue sin tenerse, explícitamente, muy en cuenta. Es decir, se observa una mejora en la reflexión sobre el criterio de idoneidad cognitiva.

Con relación al IC1 han pasado de tenerlo muy en cuenta de manera implícita en la fase 1 del curso, a tenerlo en cuenta de manera explícita en la reflexión de la fase 3, lo cual ha permitido reflexionar con más detalle sobre los conocimientos previos, y, también, diseñar tareas que están a mayor distancia dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno. Con relación al IC2 se ha pasado de no pensar en la necesidad de hacer adaptaciones curriculares, para tener en cuenta la diversidad, a ser conscientes de que este aspecto no estuvo presente en su primera reflexión, pero que hay que tenerlo en cuenta al reflexionar sobre el diseño y rediseño de una lección. Con relación al IC3 confeccionan un rediseño de la clase con unos instrumentos de evaluación que permiten evidenciar el aprendizaje de los alumnos. Con relación al IC4 no se nota una mejora en la reflexión de este componente más allá de su mejora indirecta derivada del IC1 (zona de desarrollo próximo) y del aumento de la riqueza de procesos del criterio de idoneidad epistémica (Cuadro 6 y Figura 11).

Cuadro 6. Cuadro de la evolución de la mejora de la reflexión del Criterio de Idoneidad Cognitiva

Componente del CID	Valoración fase 1	Valoración fase 3
Conocimientos previos (IC1)	4	4
Adaptación curricular a las diferencias individuales (IC2)	0	2
Aprendizaje (IC3)	2	3
Alta demanda cognitiva (IC4)	1	1

Fuente: elaboración propia.

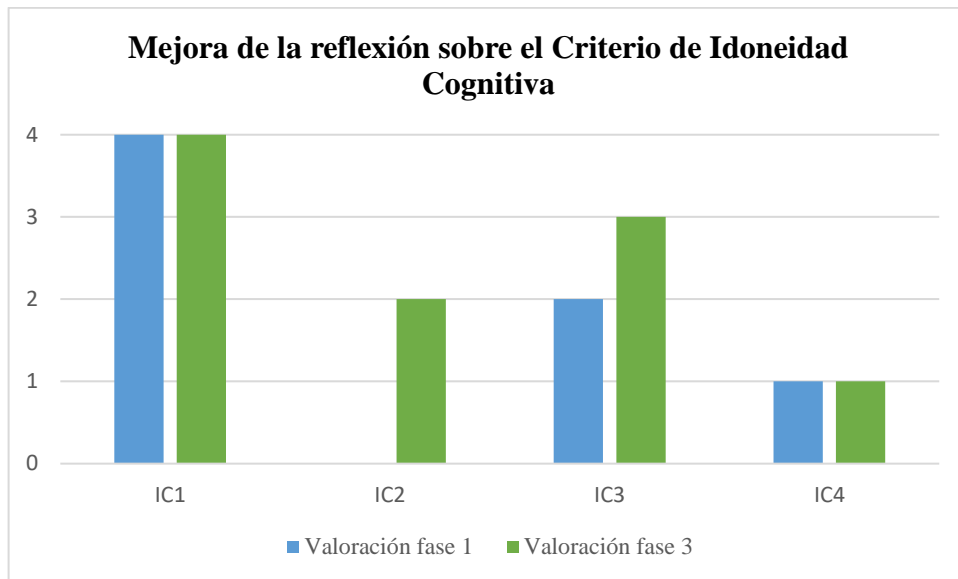


Figura 11. Gráfica de la evolución de la mejora de la reflexión del Criterio de Idoneidad Cognitiva
Fuente: elaboración propia.

Capítulo 5. Resultados e discussão

Neste capítulo, escrito em língua portuguesa, apresentam-se os resultados alcançados a partir da análise dos dados. Para cada resultado encontrado, realiza-se, também, uma discussão em relação ao mesmo.

O primeiro resultado, explicado na seção 5.1, está relacionado ao objetivo específico 1 (O1) desta tese, que é o de realizar um aprofundamento teórico sobre a abordagem *Lesson Study* (LS) e os Critérios de Adequação Didática (CAD, a partir de agora) da Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS, a partir de agora)³. Para isso, apresenta-se como cada uma das abordagens propõem o desenvolvimento da reflexão sobre a prática (própria ou alheia) na formação de professores e, em seguida, apontam-se as diferenças e complementariedades entre ambos enfoques.

O segundo resultado, explicado na seção 5.2, está relacionado com o objetivo específico 2 (O2) desta tese, que é desenhar e aplicar um ciclo formativo para professores de matemática em exercício, baseado nas abordagens LS e CAD, cujo objetivo é que os participantes planejem, implementem, valorem e redesenhem uma sequência didática para um grupo de alunos da educação básica. Para tal, primeiro, apresentam-se os resultados de um curso piloto desenhado e aplicado a um grupo de professores brasileiros (diferentes dos sujeitos participantes desta tese doutoral, subseção 5.2.1 desta tese), com a finalidade de poder fazer os ajustes necessários para realizar, efetivamente, o planejamento e implementação do curso baseado na LS e nos CAD. Em um segundo momento, na subseção 5.2.2, descreve-se o desenho e na 5.2.3, a implementação do curso baseado na LS e nos CAD.

O terceiro resultado, explicado na seção 5.3, cujo objetivo específico 3 (O3) é pesquisar o papel que têm os CAD em uma experiência de LS, antes que tal ferramenta tenha sido ensinada aos participantes como pauta para organizar suas reflexões, no marco de um curso formativo desenhado para trabalhar de forma conjunta, as duas abordagens. Para isso, discorre-se sobre os resultados do nível de uso implícito dos CAD, pelo grupo de professores participantes, ao:

³ Critérios de Adequação Didática (CAD) é a tradução mais idônea à língua portuguesa do termo castelhano *Criterios de Idoneidad Didáctica* (CID). Assim como a Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS) é a melhor tradução ao português de *Enfoque Ontosemiotico del Conocimiento y la Instruccion Matemáticos* (EOS).

selecionarem o conteúdo Teorema de Pitágoras (TP) a ser trabalhado na com um grupo de alunos do Ensino Fundamental; planejem a sequência didática para ensinar o TP; implementarem e refletirem sobre tal implementação em um ciclo completo de LS. É importante ressaltar que o material utilizado para esta análise são as gravações das seções do curso referentes à fase 1 (ciclo completo do LS).

Por fim, para analisar de que forma o ciclo formativo implementado desenvolve a reflexão dos participantes, objetivo específico 4 (O4) desta tese, se apresentará o nível de desenvolvimento da reflexão nas três fases do curso implementado. É importante ressaltar que, para esse resultado, tomou-se como material as análises das fases 2 e 3 do curso e comparou-se com os resultados da fase 1 do curso, referente ao objetivo específico 3. Também, utilizou-se como material de análise a entrevista realizada com um dos professores participantes (professora que implementou a aula sobre o ensino do TP no Ensino Fundamental), as respostas do participantes relacionadas ao questionário final de avaliação do curso e o redesenho da aula previamente implementada.

5.1 Complementariedades entre o LS e os CAD

Nesta seção, mostra-se o primeiro resultado, relacionado ao objetivo específico 1 (O1), que é o de realizar um aprofundamento teórico sobre a abordagem *Lesson Study* (LS) e os Critérios de Adequação Didática (CAD). Para isso, explica-se como cada uma das abordagens propõem o desenvolvimento da reflexão sobre a prática (própria ou alheia) na formação de professores e, em seguida, apresenta-se as diferenças e complementariedades entre ambos enfoques.

Um primeiro resultado relacionado às experiências que utilizam os CAD é o de que, nos momentos iniciais anteriores à introdução deste construto, os participantes são propostos a refletir (sem uma orientação previamente dada) sobre um episódio de sala de aula implementado por outro professor, etc. Em outras palavras, os dispositivos formativos para ensinar o CAD começam com uma primeira fase de reflexão não regulamentada. Nesta primeira fase, observa-se que os participantes formulam e utilizam implicitamente alguns indicadores e componentes do CAD antes que o referido construto lhes seja ensinado.

Este é um fenômeno observado em outras investigações que não pretendiam implementar um dispositivo formativo para ensinar os CAD. Por exemplo, em Morales-López e Font (2017), ao analisar os portfólios que os professores, em formação inicial na Costa Rica, elaboravam para explicar suas práticas profissionais, observou-se que, quando os professores expressavam opiniões valorativas, elas se organizavam implícita ou explicitamente por meio de alguns indicadores dos componentes dos CAD. Breda e Lima (2016), ao analisarem as características da análise em didática realizadas por professores brasileiros, que cursavam o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), para justificar que suas propostas representavam uma melhoria no ensino de matemática, observaram que as justificativas dadas pelo corpo docente se baseavam, sobretudo, na utilização implícita dos critérios de adequação epistêmica, ecológica e de meios e, em menor medida, na utilização dos critérios cognitivos, afetivos e interacionais.

Algumas experiências de cursos formativos ensinam os CAD como conteúdo a ser explicitado para organizar a reflexão do professor sobre sua própria prática tanto em cursos de graduação (Seckel, 2016; Seckel e Font, 2020) quanto em cursos de pós-graduação (Font, Breda e Pino-Fan, 2017; Giacomone, Godino e Beltrán-Pellicer, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Perez-Maya e Bustamante, 2019). Por exemplo, em Font, Breda e Pino-Fan (2017), explica-se um ciclo de formação que, ao invés de apresentar o CAD como princípios já elaborados, cria espaços para sua geração a partir do consenso no grupo. Posteriormente, os CAD são utilizados para refletir sobre a implementação das sequências didáticas a fim de que se proponham replanejamentos que tenham, *a priori*, uma maior adequação didática. Esta última aplicação dos CAD é feita em disciplinas diferentes daquelas que foram utilizados para gerar os CAD e com um certo lapso de tempo.

Em síntese, nas experiências de ensino dos CAD (Font, Breda e Pino-Fan, 2017), embora a reflexão dos professores se organize por meio de uma agenda ampla e detalhada, observa-se que: a) o momento inicial de reflexão é curta; b) os participantes não realizam um planejamento conjunto de uma sequência de atividades, nem realizam uma reflexão crítica desse planejamento de forma grupal e dialógica; c) A utilização dos CAD como diretriz para organizar a reflexão sobre a sequência de tarefas implementada ocorre com certa defasagem em relação ao ensino e aprendizagem deste construto.

Um segundo resultado da análise dos documentos sobre as experiências de LS é que o fenômeno anteriormente comentado sobre o uso implícito de CAD também é observado nessas experiências. Na metodologia LS, de certa maneira, pode-se considerar que as etapas de reflexão são bastante amplas e que está orientada à melhora do processo de ensino e aprendizagem da matemática, por tanto, é de se esperar que, na etapa de *estudo do currículo e estabelecimento de metas*; na de *planejamento*; na de *observação*; e na de *reflexão* e, posterior, *redesenho* orientado à melhora, os participantes usem de maneira implícita muitos dos indicadores e componentes dos CAD para fazer avaliações positivas de alguns aspectos da experiência realizada. Por exemplo, em Felix (2010, p. 01) se afirma o seguinte:

[...] conseguimos estabelecer resultados positivos que refletem na pesquisa, que incluem: um maior interesse dos alunos na aula, mudança de postura na relação professor-aluno, menor índice de indisciplina, melhora gradual de notas dos alunos, participação efetiva de alunos com maiores déficits de aprendizagem, maior confiança dos alunos em relação ao resultado obtido por eles mesmos.

Podemos observar que o autor está realizando uma avaliação positiva de determinados aspectos observados na experiência de LS realizada. Concretamente está utilizando implicitamente o indicador “apresenta uma seleção de tarefas interessantes para os alunos” do componente *interesses e necessidades* (IA1) do critério de adequação afetivo, já que avalia positivamente o fato de haver conseguido aumentar o interesse dos alunos; ou o indicador “se facilita a inclusão dos alunos durante a dinâmica da aula evitando a exclusão” do componente *interação professor-aluno* (III1) do critério de adequação de interação, já que considera positiva a participação efetiva dos alunos com déficit de aprendizagem; ou o indicador “promoção da autoestima, evitando a rejeição, fobia ou medo da matemática” do componente *emoções* (IA3) do critério de adequação afetivo, já que considera haver conseguido que os alunos tenham maior confiança neles mesmos.

Em Hummes, Breda e Seckel (2019), inferem-se os critérios utilizados pelo grupo de professores chilenos que participam da experiência LS do vídeo comentado na seção de metodologia, por meio de uma metodologia de análise de conteúdo, ao planejar, implementar e refletir sobre o processo instrucional no âmbito desta experiência. O grupo de professores se reuniu para planejar coletivamente uma aula de matemática com base em um padrão de

desempenho presente no currículo chileno para o nível da Educação Básica. Conclui-se que o grupo de professores utiliza, implicitamente, alguns dos componentes e indicadores do CAD; ou seja, existe um consenso implícito entre o professor que desenvolve a aula e os demais professores participantes sobre aspectos valorados positivamente, que podem ser reinterpretados em termos de indicadores e componentes dos CAD.

Outro exemplo é a pesquisa relatada em Hummes, Breda, Seckel e Font (2020) na qual analisa uma experiência de LS no Japão (também comentada no capítulo da metodologia) realizada em uma turma de segundo ano da escola primária da Universidade de *Tsukuba*, publicada na plataforma *YouTube* <<https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>> em 12 de junho de 2012. Neste caso, também foi observado que o grupo de professores utiliza, implicitamente, alguns dos componentes e indicadores do CAD.

Um terceiro resultado, relacionado ao tipo de reflexão realizada pelos professores nas experiências de LS, encontra-se em Breda, Hummes, da Silva e Sánchez (2021). Neste artigo, a análise didática detalhada da fase de implementação da experiência do LS chilena discutida acima é apresentada pela primeira vez (em um processo de instrução sobre geometria espacial). Em primeiro lugar, foram aplicados os quatro tipos de análises didáticas propostas pela AOS (explicadas no item 3.2.1.1 do marco teórico desta tese e exemplificadas na seção 4.1 da metodologia), o que nos permite, metaforicamente, fazer uma radiografia da implementação da aula que torna visível muitos aspectos sobre os quais é importante refletir. Em seguida, é feita uma triangulação com a reflexão realizada pelos participantes. Os resultados mostram que a análise detalhada da execução da aula permite observar aspectos relevantes que não foram contemplados pelo grupo de professores na fase de reflexão da LS. Conclui-se que deve ser atribuído um papel mais importante à fase de observação da implementação da metodologia LS, por exemplo, pactuando o que foi observado antes de passar à fase de reflexão. Em outras palavras, conclui-se que a etapa de pactuar entre os participantes da LS o que aconteceu na implementação, é uma etapa que não é dada, nesta metodologia, a importância que deveria ter.

Um quarto resultado, no âmbito teórico relacionado às etapas do LS, a partir do exercício de identificar quais CAD estão presentes nas fases de um ciclo de LS, encontrou-se que a maioria dos CAD são contemplados em um ciclo completo de LS. Em particular, os CAD ecológico e cognitivo são evidenciados na etapa de *seleção do tema e estudo do*

currículo; os CAD epistêmico, de meios, cognitivo e interacional estão relacionados à etapa de *planejamento da aula*; os CAD cognitivo, epistêmico e afetivo estão presentes na etapa de *implementação e observação* e os CAD cognitivo e de meios estão presentes na etapa de *reflexão da observação*, conforme aponta o Quadro 7. Contudo, é importante salientar que, embora muitos critérios tenham sido contemplados, nem todos os componentes foram considerados nas fases de um ciclo de LS.

Quadro 7. Concordâncias entre os critérios presentes em um ciclo de LS e os CAD

Etapas do Lesson Study (Hurd e Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013)	Crítérios de Adequação Didática (Breda, Font e Pino-Fan, 2018)
<p><i>Escolha do tema e estudo do currículo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Se está baseada nos tópicos do currículo vigente. ✓ Estudar como se processa a aprendizagem do estudante. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Idoneidade Ecológica (adaptação ao currículo). ✓ Idoneidade Cognitiva (Conhecimentos prévios; adaptação curricular às diferenças individuais).
<p><i>Planejamento da aula</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Desenvolver o raciocínio matemático. ✓ Fazer o estudo dos materiais. ✓ Definir como e em que será enfocada a avaliação. ✓ Prever reações e dúvidas dos alunos. ✓ Trabalhar por meio da resolução de problemas. ✓ Fazer com que os alunos produzam conhecimento. ✓ Ter presente a distribuição das carteiras no espaço de aula e o tempo estimado da aula. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Idoneidade Epistêmica (Riqueza de Processos). ✓ Idoneidade de Meios (recursos materiais; condições da aula). ✓ Idoneidade Interacional (Interação docente-discente; avaliação formativa). ✓ Idoneidade Cognitiva (Aprendizagem).
<p><i>Implementação e observação da aula</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Considerar se a participação dos alunos é ativa em cada etapa de resolução das questões propostas, a partir da compreensão do problema, o estabelecimento de estratégias e análise da resolução. ✓ Observar o processo de resolução de problemas. ✓ Analisar, comparar e contrastar criticamente suas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Idoneidade Cognitiva (alta demanda cognitiva). ✓ Idoneidade Epistêmica (Riqueza de processos). ✓ Idoneidade Afetiva (atitudes e emoções).

Reflexão da observação

- ✓ A aula gerou conhecimento por parte dos alunos?
 - ✓ Quais foram as principais dúvidas dos alunos? Houve diversidade de pensamentos?
 - ✓ O material escolhido pelo grupo de professores foi suficiente para fomentar o estímulo na aula?
- ✓ Idoneidade Cognitiva (aprendizagem, adaptação curricular às diferenças individuais).
 - ✓ Idoneidade de meios (recursos materiais).

Fonte: elaboração própria.

Considerações sobre os resultados

Os resultados obtidos mostram como, nas etapas de planejamento e reflexão das experiências de LS, alguns dos componentes e indicadores do CAD aparecem implicitamente nas reflexões dos participantes como resultado da discussão em grupo. Portanto, uma das vantagens de se trabalhar com a dinâmica de LS é que alguns aspectos, que não estão presentes na própria reflexão do professor, podem estar presentes na reflexão dos demais professores que participam do processo instrucional. Ou seja, a metodologia LS torna-se uma espécie de dispositivo formativo que favorece que alguns dos indicadores e componentes do CAD surjam como consenso na reflexão do grupo de professores.

Os resultados apresentados suportam que, para desenvolver (e investigar) a reflexão sobre a prática na formação de professores de matemática, um dispositivo de formação adequado pode ser aquele que combina a utilização do LS e do CAD como instrumento metodológico de organização da reflexão do professor sobre a prática, visto que esse uso combinado pode produzir uma sinergia relevante para o desenvolvimento da reflexão do professor. Por um lado, as experiências de LS permitem uma fase inicial mais ampla de reflexão sobre o planejamento da sequência didática e um trabalho colaborativo ao longo da experiência, o que permite o surgimento de alguns indicadores e componentes do CAD. Por outro lado, o ensino e o uso, do CAD permitem que os professores tenham um padrão de reflexão mais completo para organizar a reflexão em grupo.

Com relação aos que usam a metodologia CAD nos processos formativos, embora a reflexão dos professores seja organizada através de uma pauta ampla e detalhada, faz-se falta

de um espaço onde os professores possam planejar e discutir a aplicação de uma sequência de atividades de forma mais aprofundada, em particular, de forma grupal, dialogada e crítica.

Já, com relação aos que usam a metodologia LS, a revisão da literatura e os vídeos analisados nos permitiram observar, que, nas reflexões realizadas pelos participantes, embora aparecem implicitamente alguns indicadores e componentes dos CAD, não se observa o uso de todos. Por exemplo, no estudo de caso apresentado em Hummes, Breda, Seckel e Font (2020), conclui-se que o grupo de professores utiliza os critérios de interação e cognitivo de forma bastante significativa e com menos ênfase os critérios de adequação epistêmica e afetiva; e que, por outro lado, os critérios de meios e ecológico são pouco utilizados na reflexão do grupo de professores. O fato de haver pouca reflexão sobre esses dois últimos critérios pode ser devido à própria abordagem LS, ou ao fato de que esses dois critérios já são altamente desenvolvidos no Japão, ou à falta de uma orientação explícita que inclua todos os elementos que deve ser levado em consideração ao refletir sobre a realização de um processo de instrução matemático e como melhorá-lo.

Os dispositivos formativos que pretendem ensinar os CAD, também partem da suposição de que estes podem ser ensinados como ferramenta para organizar a reflexão do professor e, por tanto, a maior parte do ciclo de formação se dedica a implementar um processo de ensino e aprendizagem dessas noções aos participantes. Por outro lado, nas experiências de LS não se realiza este processo de geração de uma pauta organizada em critérios, componentes e indicadores como ferramenta para organizar a reflexão. Por tanto, se a metodologia LS pode ser muito útil para melhorar a fase inicial da metodologia dos CAD e proporcionar um espaço de reflexão conjunta (entre o professor e seus pares), esta última pode ser uma ampliação da metodologia LS para gerar uma pauta para organizar a reflexão do professor.

Desta forma, a metodologia LS pode ser convertida em um tipo de dispositivo de formação que favorece que alguns dos indicadores e componentes da CAD surjam como consensos da reflexão do grupo de professores, o que leva à extensão da LS como um ciclo de formação para introduzir os indicadores e componentes dos CAD.

Os resultados aqui apresentados sustentam que, para desenvolver (e investigar) a reflexão sobre a prática na formação de professores de matemática, um dispositivo de formação adequado pode ser aquele que combina a utilização do LS e do CAD como

instrumento metodológico que auxilie a organização do professor quando este reflete sobre a prática, visto que esse uso combinado pode produzir uma sinergia relevante para o desenvolvimento da reflexão do professor. Por um lado, as experiências de LS permitem uma fase inicial mais ampla de reflexão sobre o planejamento da sequência didática e um trabalho colaborativo ao longo da experiência, o que permite o surgimento de alguns indicadores e componentes dos CAD. Além disso, o ensino e o uso dos CAD permitem que os professores tenham um padrão de reflexão mais completo para organizar a reflexão em grupo.

Os resultados relacionados a esta etapa da pesquisa foram publicados em revistas, capítulos de livro e atas de congressos, conforme as referências que seguem:

- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2021). El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el *Lesson Study* y los criterios de idoneidad didáctica. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu, y W. F. Castro (Eds.). *Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina* (en prensa).
- ✓ Breda, A., Hummes, V. B., Silva, R. S., Sánchez, A. (2021). The Role of the Phase of Teaching and Observation in the *Lesson Study* Methodology. *Bolema (Rio Claro)*, 35(69), 263-288. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>
- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J., & Font, V. (2020). Criterios de idoneidad didáctica en una clase basada en el *Lesson Study*. *Praxis & Saber*, 11(26), e10667. <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667>
- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. (2020). Didactical Suitability Criteria in Videos of *Lesson Study*. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 3, 257-268.
- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2020). Concordâncias e complementaridades entre o *Lesson Study* e a Idoneidade Didática para O desenvolvimento da prática reflexiva na formação de professores. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(2), 796-806.
- ✓ Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.

5.2 Desenho e aplicação de um ciclo formativo que combina a abordagem LS e os CAD

Para alcançar ao objetivo específico 2 –desenhar e aplicar um ciclo formativo para professores de matemática em exercício, baseado nas abordagens LS e CAD, cujo objetivo é que os participantes planejem, implementem, valorem e redesenhem uma sequência didática para um grupo de alunos da educação básica– apresentam-se os resultados de um curso piloto desenhado e aplicado a um grupo de professores brasileiros (diferentes dos sujeitos participantes desta tese de doutorado, explicado na subseção 5.2.1 desta tese), com a finalidade de poder fazer os ajustes necessários para realizar, efetivamente, o planejamento e implementação do curso baseado na LS e nos CAD. Em um segundo momento, na subseção 5.2.2, descreve-se o desenho e na 5.2.3 a implementação do curso baseado na LS e nos CAD com os sujeitos participantes desta pesquisa.

5.2.1 Resultados do desenho e implementação do curso piloto

O estudo piloto tinha como objetivo verificar as possibilidades e limitações de implementar um curso formativo que combina os enfoques LS e CAD. Além disso, o que se buscava era mostrar como nas etapas de um LS aparecem, implicitamente, nas reflexões dos participantes, alguns dos componentes e indicadores dos CAD. Nesse sentido, encontra-se evidências que permitem afirmar que os resultados esperados foram obtidos, em particular, na fase de planejamento da aula e na fase de reflexão conjunta, onde os participantes tentam justificar que a proposta didática que desenvolveram representa uma melhoria no ensino de matemática. Ainda que os treze professores tivessem sido divididos em três grupos, dois de quatro e um de cinco participantes, considerou-se apenas os dados coletados durante o planejamento e análise da aula de um dos grupos participantes, composto pelos professores F, G, J e S.

Reflexão no momento do planejamento

Na fase de planejamento da aula, foi sugerido que os professores desenvolvessem uma aula e elaborassem uma proposta didática que significasse uma mudança ou inovação da própria prática. O grupo escolheu o professor F para ministrar a aula. O tema escolhido foi

Função Afim, pois era o assunto que ele iria abordar com seus alunos do primeiro ano de ensino médio (Brasil), na época do curso. Inicialmente, eles pensaram em abordar o estudo dos gráficos deste tipo de função, utilizando como ferramenta para construir o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*. Porém, na escola, nenhum computador estava disponível para os alunos. Desta forma, eles concordaram que o professor só poderia projetar a construção gráfica para o grupo total de alunos. A ideia inicial da aula era elaborar um problema de contexto real que permitiu aos alunos comparar quais meios de transporte seriam mais vantajosos, táxi ou Uber. Como esperado, foi possível identificar em alguns fragmentos de diálogos dos professores evidências do uso implícito de alguns dos indicadores e componentes dos critérios de adequação didática, conforme demonstrado a seguir.

Adequação Epistêmica

A reflexão sobre a qualidade matemática não aparece explicitamente na elaboração da sequência de tarefas, no entanto, aparece implicitamente em algumas partes do discurso dos professores. Em particular, pode-se notar uma preocupação em elaborar uma sequência de atividades que contemplem a *realização de processos que são relevantes na atividade matemática* (IE3) –um dos componentes do critério de adequação epistêmica–, como a resolução de problemas:

G: Começamos com os problemas e os alunos devem responder às coisas fazendo perguntas.

F: Boa ideia!

G: Você vai escolher os problemas?

F: Tive uma ideia. Vamos tentar fazê-los entender o coeficiente angular, quando está aumentando e diminuindo com os problemas, ou seja, para entender o coeficiente da função afim por meio da resolução de problemas.

Os professores também usam o indicador "uso de diferentes representações", um dos indicadores de componente *amostra representativa da complexidade do objeto matemático a ser ensinado* (componente IE4), quando tiverem interesse em fazer uso de diferentes modos de expressão, neste caso, a fórmula da função e seu gráfico:

G: O melhor seria definir a fórmula das funções e depois desenhá-las no *GeoGebra* para analisar como seriam os gráficos e comparar as diferenças entre um e outro.

F: Na verdade, o gráfico vai ser uma evidência para mostrar as diferenças entre funções.

O interesse em apresentar e conectar diferentes significados da Função Afim (funcional e geométrico), também pode ser inferido, o qual pode ser considerado como evidência do uso implícito do indicador "os significados parciais são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática a ser ensinada", outro dos indicadores do componente IE4.

S: Quais são os objetivos específicos da aula?

F: Explore o coeficiente angular e as ordenadas na origem. Mas eu acho que sei deve ter o objetivo de identificar a intersecção entre as duas linhas que representam as duas situações propostas.

S: Na verdade, para comparar duas taxas de crescimento aí, certo? Apesar de que taxas das duas situações estão aumentando, uma é mais íngreme do que a outra. Sim, nós trabalhamos com isso lá também. Acho que a intersecção é uma consequência.

Adequação Cognitiva

No diálogo a seguir, onde os professores discutem como o uso de diferentes representações podem facilitar a aprendizagem, também está implícito a importância de considerar o *conhecimento prévio* (IC1) necessário para a compreensão da matéria em questão que os alunos têm:

G: Você não acha que construir uma tabela os ajudaria? No evento de que eles cometam algum erro. É que a tabela ajuda o aluno a modelar a função. Um que nunca teve contato com uma Função Afim, por exemplo.

F: Mas a tabela ajuda a modelar ainda mais o gráfico.

G: Ajuda modelar a função para que o que está acontecendo seja compreendido. Porque a variação é sempre a mesma. Isso é característico da Função Afim.

F: Não sei. Acho que eles já têm uma noção de como fazer um gráfico.

Adequação de Interação

Podemos inferir do discurso dos professores a importância que eles atribuem à *autonomia* (II3) dos alunos, um dos componentes do critério de adequação de interação:

S: Como vai ser a aula?

G.: Você não vai dar a eles o problema formulado?

F: Ele começa declarando o problema.

S: Qual é o problema?

F: Das taxas de ...

G: Posso te dar uma ideia? Você apresenta a situação a eles. Você os deixa organizados em grupos. Deixe-os quebrar a cabeça! Não traga, pronto.

No discurso dos professores é possível encontrar evidências do uso implícito de alguns indicadores e componentes do critério de adequação de meios. Pode ser afirmado, ainda, que este é o critério mais presente na fase de planejamento. Por exemplo, o componente *recursos materiais* (IM1) é evidente em muitos diálogos dos professores. Por outro lado, os professores também mostram atenção ao componente *números de alunos, horários e condições da sala de aula* (IM2), quando refletem sobre se o número ou à distribuição dos alunos permite realizar o ensino pretendido.

F: Eu acho que, aos pares, é muita gente trocar todas as cadeiras.

G: É muita gente. Então, talvez nós os agrupemos três por três.

S: Grupos de quantas pessoas?

F: Duplas.

S: As duplas são muitas. Vão sair 19.

F: Mas é muita gente. Não há como mover as cadeiras. Vamos perder muito tempo.

J: Então, trios.

G: Você pode fazer gráficos *GeoGebra* no seu celular.

F: Mas eles não podem usar o celular na aula.

G: É uma exceção, certo?

Também podemos observar reflexões relacionadas ao *tempo* (IM3), um dos componentes do critério de adequação de meios, em particular o indicador “Adequação de significados pretendido no tempo disponível”.

S: É uma hora e meia que vamos ficar com eles?

F: A priori terei apenas um período (45 minutos).

J: Você acha que é possível? O que é tempo suficiente para fazer dois Atividades?

S: Acho que vai demorar muito.

F: Sim, pode estar faltando, mas é um bom tipo de trabalho

Adequação Afetiva e Adequação Ecológica

Com relação aos indicadores de adequação afetiva e ecológica, não foi possível identificar nenhuma referência de seu uso nos trechos dos diálogos analisados.

Reflexão sobre a Análise de Classe

Na etapa de análise da aula, os professores fizeram uma discussão /reflexão sobre a aula implementada pelo professor F. Eles tentaram ser moderados em criticar seu colega, sendo ele o participante que mais argumentou os motivos para o qual a classe poderia ser melhorada.

Adequação Epistêmica

A reflexão realizada pelo grupo, a respeito da adequação epistêmica, concentra a ideia de que o professor deve ter domínio do conteúdo, embora os participantes não especifiquem o que eles entendem por isso, além disso comentam que o professor não deve cometer *erros* matemáticos (um dos componentes do referido critério, IE1):

F: Acho que o importante é que o professor tenha o controle da turma.

G: Claro. Domínio da aula e domínio do conteúdo.

F: E do conteúdo, é claro.

G: Porque se o professor não tiver domínio do conteúdo, ele pode realizar o melhor planejamento do mundo que na prática vai ser terrível.

F: E os alunos percebem quando tem falhas.

Adequação Cognitiva

A reflexão realizada pelos professores, do ponto de vista da aprendizagem dos alunos (cognitivo), tende a defender que os alunos construam seus conhecimentos. Esse tipo de reflexão nos dá a entender que o que é importante para aprendizagem é que os alunos ativem processos cognitivos relevantes (generalização, conexões intra-matemáticas, mudanças de diferentes representações, formulação de conjecturas, etc.). Esse tipo de argumento coloca o aluno como protagonista de sua própria aprendizagem e posiciona o professor como mediador da aprendizagem matemática do aluno.

J: Incentive os alunos a pensar.

G: Porque se não sobrar uma aula muito expositiva. Você não constrói com eles, você apenas expõe, você apenas apresenta.

Adequação de Interação

Em relação à interação em sala de aula, os participantes enfatizaram que a interação entre professor e aluno, deve ser mais dialógica do que magistral. Implicitamente, eles defendem que o professor deve fazer uma apresentação adequada do tema, interpretando as perguntas dos alunos e usando dispositivos retóricos para captar a atenção de os alunos.

G: Não é só ter controle do conteúdo, é ter segurança. O professor pode conhecer muito o conteúdo, mas de nada adianta se você não sabe se expressar, você não sabe comunicar-se com os alunos.

F: Temos que começar a aula com algo que os convide. Isso atraí.

G: Os alunos devem ser mais protagonistas da aula do que apenas ouvintes.

Adequação de Meios

Ao contrário da reflexão realizada na fase de planejamento das aulas, neste estágio, os participantes valorizaram que uma das deficiências da sala de aula era a não utilização de recursos de computação pelos alunos.

G: Mas acho que a única coisa que faltou foi manipular o *GeoGebra*.

F: Sim, claro.

G: Porque lá, na escola, você também não podia.

F: Bem, sim, sim. A tecnologia era limitada

Adequação Afetiva e Adequação Ecológica

Ao contrário da reflexão feita no planejamento, onde os participantes não comentaram sobre a adequação afetiva e ecológica, na etapa da análise da aula implementada, os professores apontam a necessidade de trazer o conteúdo ensinando à realidade dos alunos. Isso, segundo eles, é uma forma para motivar os alunos. Do ponto de vista afetivo e ecológico, os participantes argumentam que uma seleção de tarefas de interesse dos alunos deve ser feita por meio da proposição de situações que permitam avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional.

G: Outra coisa que também acho importante é trazer o que está acontecendo na sua vida real com os problemas que vão ser utilizados na aula. O que era que as pessoas fizeram, usando informações do Uber e do Táxi.

F: Temos que começar a aula com algo que os convide. Isso atraí.

Discussão e considerações sobre os resultados da experiência piloto

O objetivo da experiência piloto foi de verificar as possibilidades e limitações de implementar um curso formativo que abordasse os enfoques LS e CAD. Além disso, o que se buscava era mostrar como nas etapas de um LS aparecem implicitamente, nas reflexões dos participantes, alguns dos componentes e indicadores dos CAD. O estudo corrobora com o que se havia inferido da revisão da literatura com relação ao uso implícito dos CAD nas experiências de LS: há o uso implícito de alguns indicadores e componentes dos CAD na reflexão feitas pelos participantes. Em outras palavras, os CAD funcionam implicitamente como regularidades no discurso dos professores, sem ter sido ensinado o uso desta ferramenta para guiar sua reflexão.

Este é um resultado que está em linha com os obtidos em outras investigações que se interessaram pelo papel dos CAD na reflexão dos professores ou futuros professores em dispositivos de formação em que não foram ensinados o uso desta ferramenta (Breda, 2020; Morales-López e Font, 2017, entre outras). Uma das razões pelas quais os CAD funcionam como regularidades no discurso dos professores, sem ter sido ensinado o uso desta ferramenta para guiar sua reflexão, é que os CAD refletem o consenso sobre o que é considerado bom para o ensino de matemática, amplamente assumido na comunidade de educadores. Além disso, é plausível o uso implícito que os professores fazem desta ferramenta, dado que em seus processos formativos se tornam sujeitos partícipes de estes consensos (Breda, Font e Pino-Fan, 2018). Este resultado, juntamente com outros, é uma evidência que as reflexões do corpo docente, quando são valorativas e orientadas para a melhoria dos processos instrucionais, são organizadas, implicitamente, usando alguns indicadores dos componentes dos CAD.

Uma limitação do estudo piloto foi o tempo do curso, considerado baixo, para poder realizar com profundidade todas as etapas da LS e, a partir daí realizar um processo de instrução dos CAD com os professores participantes, para que eles usassem esta ferramenta em novos ciclos de LS. Por essas razões, e com o objetivo de fomentar o desenvolvimento da reflexão, um dos aspectos do conhecimento didático matemático de professores de matemática (Pino-Fan, Assis e Castro, 2015), nas próximas subseções apresentamos o desenho e a implementação de um curso de formação de professores que combina o uso da metodologia LS com CAD como ferramenta para organizar a reflexão sobre a prática.

Salientamos que o resultado referente ao estudo piloto foi publicado no seguinte periódico:

- ✓ Hummes, V. B., Font, V., Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers, *Acta Scientiae*, 21(1), 64-82. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>.

5.2.2 Desenho do curso

Dada a possibilidade auferida no estudo piloto, nesta subseção explica-se o desenho do curso de formação, consideravelmente ampliado em comparação ao estudo piloto.

O curso estava programado para ocorrer, de forma presencial, no período de 09/03/2020 a 29/06/2020, com periodicidade semanal, com duração de 2 horas e 40 minutos por sessão, durante 15 semanas (15 sessões), a ser realizado em uma sala de aula no Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, em Porto Alegre, Brasil.

Inicialmente, o calendário e a programação das sessões do curso foram organizados da seguinte forma:

- ✓ Sessão 1 (09/03/2020): apresentação dos objetivos e desenho do curso; introdução e explicação da estrutura e elementos de um LS; conformação das turmas LS, escolha do tema da aula para os dois ciclos LS, escolha do professor que implementaria a aula em cada um dos ciclos LS. A escolha do tópico da aula LS deve focar as qualidades que o grupo de professores gostaria que seus alunos desenvolvessem por meio de seu aprendizado. O grupo de professores deve estar convencido da importância do tema escolhido para o desenvolvimento de uma LS que justifique tanto esforço pessoal e grupal.
- ✓ Sessão 2 (16/03/2020): desenvolvimento da etapa de estudo do tema no currículo e estabelecimento dos objetivos de LS. Com turmas distintas de professores e o tema LS escolhido, em momentos distintos, seria analisado como o tema escolhido se apresenta e se comporta nos diferentes materiais e para o ano letivo para o qual a aula LS seria proposta; Seria estudado o currículo praticado na instituição do professor que ministraria a aula e outro em nível nacional; Os diferentes currículos com os quais os

professores estão familiarizados seriam comparados para capturar o raciocínio por trás do desenvolvimento de conceitos e abordagens que poderiam inspirar um plano de aula que melhor refletisse a melhor maneira de os alunos aprenderem um determinado conteúdo.

- ✓ Sessão 3 (23/03/2020): conclusão da fase de planeamento de LS, preparação de uma aula que seja relevante dentro do tema escolhido, se possível um conteúdo-chave ou núcleo do tema escolhido, pelos grupos de professores e em momentos diversos. Neste estágio do LS, um plano de aula para a aula de investigação desenvolvido de forma colaborativa. Ao planejar uma aula de pesquisa, as justificativas de como o planeamento para esta aula funcionaria em direção aos objetivos gerais definidos em todos os estágios da aula em construção devem ser explicitamente declaradas. O estudo dos materiais que seriam utilizados, a determinação do que e como seriam avaliados, seria marcado pelo desenvolvimento dos objetivos da aula. A lição de investigação orientaria a observação dos professores sobre a aprendizagem dos alunos. Toda a aula de pesquisa deve ser registrada por escrito para que o grupo estude e observe criticamente a aula.
- ✓ Sessão 4 (30/03/2020): acompanhamento da realização da fase de planificação de LS, continuação da planificação das aulas, por grupos de professores e em momentos distintos. Na semana entre as sessões 4 e 5 do curso, as aulas planejadas seriam implementadas nas turmas de LS.
- ✓ Sessão 5 (04/04/2020): realização da etapa de reflexão e análise da aula, visualização do vídeo da implementação da aula e reflexão conjunta sobre a mesma. Imediatamente após a aula, cada grupo que a planejou, juntamente com convidados para observá-la, se esquivaria de analisar os impactos dessa aula na aprendizagem dos alunos. Nesse momento, cada observador apresentaria suas impressões sobre a produção de conhecimento dos alunos.
- ✓ Sessão 6 (13/04/2020): realização da segunda parte da etapa de reflexão e análise da aula, sugestões de aspectos a melhorar ou manter para a aula, aprimoramento das tarefas. Durante a reflexão, o grupo de professores poderia decidir fazer ajustes para a futura aula sobre o mesmo tema. Nesse caso, o planeamento deve sofrer modificações

com ações destinadas a corrigir ou ajustar o que for considerado pertinente.

- ✓ Sessão 7 (27/04/2020): introdução ao estudo dos Critérios de Adequação Didática. Ao desenvolver ciclos LS completos, os professores teriam feito reflexão. É sobre como deve ser a sequência de tarefas que eles propõem. Essas reflexões seriam utilizadas como evidência do uso implícito de alguns componentes e indicadores do CAD, o que daria origem à explicação do construto CAD.
- ✓ Sessão 8 (04/05/2020): estudo do Critério de Adequação Epistêmica, a partir da apresentação de cada um de seus componentes e indicadores e da execução das tarefas relacionadas a este CAD.
- ✓ Sessão 9 (05/11/2020): estudo do Critério de Adequação Cognitiva, explicando cada um dos seus componentes e indicadores e realizando as tarefas relacionadas a este CAD.
- ✓ Sessão 10 (18/05/2020): estudo dos Critérios de Adequação de Interação, Afetiva, de Meios e Ecológica, explicando cada um de seus componentes e indicadores e realizando tarefas relacionadas a estes CAD.
- ✓ Sessão 11 (25/05/2020): nova reflexão das aulas implementadas na primeira fase do curso (ciclo LS) orientada pelo CAD (somente foi realizada a reflexão com os CAD da aula implementada no Ensino Fundamental)
- ✓ Sessão 12 (01/06/2020): reflexão sobre as aulas implementadas na primeira fase do curso (ciclo LS) orientada pelo CAD a título indicativo (somente foi realizada a reflexão com os CAD da aula implementada no Ensino Fundamental).
- ✓ Sessão 13 (08/06/2020): redesenho das aulas implementadas na primeira fase do curso (ciclo LS) regulado pelos CAD. Entre as sessões 13 e 14, as aulas redesenhadas seriam implementadas (somente foi realizado o redesenho da aula implementada no Ensino Fundamental).
- ✓ Sessão 14 (15/06/2020): reflexão e análise da segunda implementação tendo o CAD como diretriz (não realizada por questões de tempo)
- ✓ Sessão 15 (22/06/2020): Preenchimento de um questionário de avaliação e encerramento do curso.

Considerações sobre o desenho do curso

Embora tivesse sido realizado um desenho prévio do curso, é importante salientar que a implementação do mesmo não seguiu, estritamente, a pauta referente ao desenho. Alguns fatores foram geradores de algumas mudanças consideráveis: a) mudança na modalidade do curso; b) número de professores participantes; c) cronograma e atividades desenvolvidas no curso.

O primeiro fator de mudança foi a emergência sanitária decorrente da pandemia do Covid-19, a qual direcionou o estudo presencial para a modalidade remota. Nesse sentido, o curso foi realizado de forma virtual via *Skype*. O segundo fator de mudança é que o curso não foi realizado com todos os participantes aprovados inicialmente no processo de seleção (18 professores participantes), resultando que o número de professores participantes ativos do início ao fim do curso foram 8 (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8). Nesse sentido, dado o número total de participantes, os 8 professores trabalharam conjuntamente na reflexão com os CAD e no redesenho da aula do Ensino Fundamental (nesta terceira fase do curso não foi trabalhado com divisão de grupos).

O terceiro fator se relaciona com que o tempo de realização do curso não foi suficiente para cumprir o desenho inicial, ocasionando uma mudança das atividades. Por exemplo, não foi possível reimplementar a aula refletida e replanejada, ou seja, não foi possível realizar um segundo ciclo completo de LS. Além disso, como o tema a ser planejado e implementado, foi escolhido pelos participantes (com o curso em andamento), foi necessário dedicar uma quantidade de tempo considerável para o ensino da adequação epistêmica, uma vez que o objeto matemático Teorema de Pitágoras é de alta complexidade.

Na próxima subseção, explica-se com detalhe, a implementação do curso. Durante a leitura, será possível identificar as modificações que ocorreram na implementação do curso relacionadas ao desenho inicial do mesmo.

Os resultados referentes ao desenho do curso estão publicados nas seguintes atas:

- ✓ Hummes, V., Breda, A., Font, V., Silva, R. S. (en prensa). *Lesson Study* e idoneidad didáctica en la reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de*

Lesson Study (p. 402-409). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

- ✓ Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2020). Desenho de um curso de formação que combina o uso do *Lesson Study* e da idoneidade didática para o desenvolvimento da competência reflexiva de professores de matemática (p. 190-195). In: *Actas del 5 Encuentro Internacional de Educación Matemática (EIEM)*, Universidad del Atlántico: Barranquilla, Colombia.

5.2.3 Implementação do curso

Explicado o desenho do curso, neste momento, descreve-se a implementação do mesmo. É importante ressaltar que, ao explicar cada sessão do curso, serão trazidas à tona, em alguns momentos, as evidências das falas dos professores participantes. O curso foi organizado em três grandes fases (fase 1, fase 2 e fase 3) e mais uma fase anterior à fase 1 (a qual chamamos fase zero). A fase zero está conformada pela sessão 1. A fase 1 compreende as sessões 2, 3, 4, implementação da aula (entre as sessões 4 e 5) e a sessão 5, e corresponde ao ciclo completo de LS. A fase 2 engloba às sessões 7, 8, 9 e 10 e equivale ao momento do curso em foram ensinados os CAD ao grupo de professores participantes. Por fim, a fase 3, composta pelas sessões 11, 12, 13, 14 e 15, a qual representa a reflexão e o redesenho com os CAD, que fazem os professores participantes, da aula implementada na fase 2. Além disso, há uma sessão extra na qual realizam, tanto os participantes como a investigadora, uma discussão e avaliação do curso de formação.

Implementação da fase zero do curso

A fase zero refere-se a apresentação e estrutura do curso aos participantes. Além disso, nesta fase, explica-se aos participantes o que é o *Lesson Study*.

Sessão 1 do curso - Apresentação da estrutura do curso e introdução ao LS

A primeira sessão do curso ocorreu no dia 10 de março de 2020, teve duração de duas horas e quarenta minutos e ocorreu de modo presencial em uma sala de aula do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Nesta sessão, foram apresentadas a estrutura do curso e a estratégia de desenvolvimento profissional docente LS. Além dos professores participantes, estiveram presentes três dos professores responsáveis pelo desenvolvimento do curso: a professora pesquisadora (PI a partir de agora) e autora desta tese, Viviane Hummes, o professor do IME/UFRGS, Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, e a professora Dra. Adriana Breda, orientadora desta pesquisa de doutorado vinculada à *Universitat de Barcelona* (UB). Esta última, participou por meio de uma vídeo-chamada por *Skype*, já que se encontrava em Barcelona no momento da sessão do curso.

Para apresentar a estrutura e organização do curso de extensão que estava sendo proposto, fez-se uso do programa para edição e exibição de apresentações gráficas *PowerPoint* que teve uma estrutura de nove slides (ver Figura 12).



Figura 12. Slides de apresentação da estrutura do curso de extensão
Fonte: elaboração própria.

Neste momento, tanto os professores responsáveis pelo curso, quanto os professores participantes, fizeram uma apresentação individual e um breve relato sobre sua trajetória acadêmica e profissional (Figura 13).

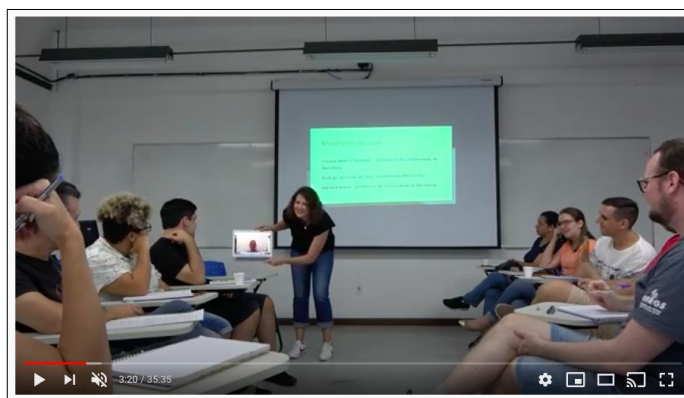


Figura 13. Registro do momento do curso onde os professores se apresentaram
Fonte: elaboração própria.

Após esta introdução e apresentação da estrutura do curso aos participantes, iniciou-se a apresentação da estratégia LS, também, por meio de apresentação do *PowerPoint*, conforme o conjunto de slides da Figura 14 a seguir:

<p style="text-align: center;"><i>Lesson Study</i> Origem e principais características</p>	<p>O que é <i>Lesson Study</i>?</p> <p>É um modo de desenvolvimento profissional, elaborado por educadores e pesquisadores japoneses, que ajudam o professor a trabalhar de forma cooperativa em um processo de ação e investigação da prática educativa.</p>	<p>Fonte: https://www.scribd.com/document/333774648/15-417202/772018701-8a28f8a6-9a6a-4a</p>
<p>Origem de <i>Lesson Study</i></p> <p>Originou-se no Japão, no final do século XIX, onde tem ampla tradição até hoje. Surgiu como estratégia para impulsionar o progresso científico e tecnológico do país que estava atrasado em relação à civilização ocidental. Na última década do século XX estendeu-se para outros países da Ásia e para o ocidente (Europa, América do Norte, Chile, etc.) como estratégia de formação e aperfeiçoamento docente mais relevantes.</p>	<p>Objetivos de <i>Lesson Study</i></p> <p>Formação docente apoiada em atitudes investigativas e práticas colaborativas, que busca, ao mesmo tempo:</p> <ul style="list-style-type: none"> > melhoria da prática docente; > melhoria da aprendizagem dos estudantes; > desenvolvimento profissional docente; > aperfeiçoamento de determinado tópico curricular. 	<p>Como funciona <i>Lesson Study</i>?</p> <p>Os professores estudam os conteúdos e materiais de um tópico curricular e como devem ensiná-los em uma sala de aula, por meio de participação e planejamentos colaborativos de aulas, observação dessas aulas entre os participantes e posterior discussão crítica sobre os resultados na aprendizagem dos alunos.</p>
<p>Organização de <i>Lesson Study</i></p> <p>Um grupo de quatro a seis professores se reúne de modo regular durante um período longo de tempo (quatro a doze meses) para trabalhar no planejamento, implementação, reflexão, redesenho e aperfeiçoamento de uma proposta didática (lição) experimental.</p>	<p>Ciclo da <i>Lesson Study</i></p>	<p>ETAPA 1 - Encontrar um tema para <i>Lesson Study</i></p> <ul style="list-style-type: none"> → Estudo do currículo e formulação de metas de desenvolvimento de aprendizagem dos alunos. → Identificar o tema, o eixo da lição. → Analisar como esse tema se apresenta e se comporta em diferentes materiais e para diferentes anos escolares. → Compartilhar desejos e incertezas. → Estabelecer os objetivos da <i>Research Lesson</i>.

<p>ETAPA 2 – Planejar a lição (<i>Research Lesson</i>)</p> <ul style="list-style-type: none"> → Definir o tema de pesquisa. → Compartilhar experiências e conhecimentos sobre o tema. → Discutir, debater e desenhar uma proposta. → Articular os objetivos da "lição". → Justificar como o planejamento dessa aula irá trabalhar as metas gerais fixadas. → Escrever um plano detalhado (guia da proposta). → Identificar de que maneira está relacionada com o currículo da instituição educativa. → Testar as tarefas da lição e antecipar o pensamento do aluno. → Destacar os dados a serem coletados durante a lição. 	<p>ETAPA 3 – Ensinar, observar e recolher evidências</p> <ul style="list-style-type: none"> → Um membro da equipe ensina a lição. → Outros membros da equipe observam e registram o pensamento e o aprendizado dos alunos. → Preparar os alunos e a situação. → Desenhar estratégias: "Quem se observa?" (individual, grupos); "O que se observa?" (escrever uma guia para observação); como se registra os dados? (gravação, diário de campo, etc...) <p>Antes o grupo de professores deve preparar os materiais necessários: cópias das atividades, horários da escola, revisar permissão para registro de dados e gravação e agendar data para a aula.</p>	<p>ETAPA 4 – Descrever, analisar e revisar</p> <ul style="list-style-type: none"> → Organizar a moderação e tentar que todo mundo possa ser ouvido. → Refletir sobre o que os alunos aprenderam durante o ciclo como um todo. → Manter o debate na lição e na aprendizagem dos estudantes. → Explorar as mudanças em suas aprendizagens. → Organizar as sessões adicionais necessárias com os materiais adequados em função da necessidade: momentos chaves da observação, examinar sequências, contrastar diferentes casos de aprendizagem. → Propor a revisão da lição.
<p>ETAPA 5 – Repetir o ciclo</p> <p>Uma oportunidade para melhorar o processo, em outra aula e com outra prática, cada um pode desenvolvê-lo e construir um ciclo.</p>	<p>ETAPA 6 – Documentar e disseminar o estudo</p> <ul style="list-style-type: none"> → Fazer cópia detalhada do plano da proposta. → Descrever o estudo. → Estabelecer uma análise e um resumo dos dados recolhidos. → Inserir as reflexões dos participantes acerca da lição e materiais anexos de interesse. <p>Será um documento relevante para compartilhar entre o grupo de docentes que melhorar suas práticas de <i>Lesson Study</i>.</p>	<p>Como será a <i>Lesson Study</i> do nosso curso</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Planejamento da <i>Lesson Study</i>. <input type="checkbox"/> Implementação da <i>Lesson Study</i>. <input type="checkbox"/> Reflexão/análise da <i>Lesson Study</i>. <input type="checkbox"/> Redesenho da <i>Lesson Study</i> com os Critérios de Idoneidade Didática. <input type="checkbox"/> Implementação da <i>Lesson Study</i> redesenhada. <input type="checkbox"/> Reflexão/análise da <i>Lesson Study</i> com os Critérios de Idoneidade Didática. <input type="checkbox"/> Redesenho com os Critérios de Idoneidade Didática.
<p><i>Lesson Study</i> (LS) ao redor do mundo</p> <p>A disseminação de <i>Lesson Study</i> a diferentes países e contextos causou uma variação significativa na maneira como LS é adaptada e aplicada em todas as suas fases.</p> <p>Cinco características são definidas como essenciais para o uso eficaz de LS:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Foco no aprimoramento pedagógico e não apenas no refinamento de uma lição individual, como é em muitos projetos fora do Japão; 2) LS é uma escola, uma instituição coletiva, não um indivíduo; 3) Tempo para o trabalho coletivo (o estudo de materiais) é essencial; 4) Um ciclo de LS, com observação ao vivo e avaliação detalhada pós-aula, é conduzido por várias semanas, e não em poucos horas; 5) Para além dos professores, outros especialistas desempenham um papel muito importante em todos os pontos do processo de LS, mas suas contribuições para a avaliação pós-aula são particularmente destacadas. 		

Figura 14. Conjunto de slides do *PowerPoint* sobre LS apresentado no curso
 Fonte: elaboração própria.

Depois deste primeiro contato com o LS, o grupo de professores participantes se subdividiu em dois grupos, um de quatro e outro de cinco professores, com a intenção de desenvolver separadamente dois ciclos completos de LS. O tema escolhido para a aula de pesquisa foi o Teorema de Pitágoras (TP) em ambos os grupos, um deles para alunos do nono ano do Ensino Fundamental (alunos de 14-15 anos) de uma escola pública de uma cidade da região metropolitana de Porto Alegre, Brasil, e o outro para um grupo de alunos do terceiro ano do Ensino Médio (alunos de 17-18 anos) de uma escola particular de Porto Alegre, Brasil. Nos dois grupos, um dos professores participantes era o docente titular de matemática da turma onde desenvolver-se-ia a aula de pesquisa.



Figura 15. Registro da discussão e divisão dos dois grupos de LS
 Fonte: elaboração própria.

Implementação da fase 1 do curso: desenvolvimento do ciclo de Lesson Study no Ensino Fundamental

Esta fase do curso representa o desenvolvimento de ciclos completos de LS, com os professores participantes divididos em dois grupos. Com o TP definido como sendo o tema da aula de pesquisa, durante três sessões do curso (sessões 2, 3 e 4) os professores participantes realizaram o *estudo do currículo e metas* e o *planejamento da aula*, etapas 1 e 2 do LS, isto é, averiguaram como o tema escolhido para a aula está apresentando no currículo nacional e, também, no currículo das instituições onde os professores trabalhavam no momento do curso, estabeleceram metas e fizeram o planejamento a aula.

Sessão 2 do curso: Etapas estudo do currículo e metas e planejamento da aula do LS

A segunda sessão do curso foi realizada no dia 07 de abril de 2020 e teve duração de duas horas e quarenta minutos, a qual contou com a presença dos professores P1, P2 e P4 no grupo da aula de pesquisa no Ensino Fundamental e das professoras P5 e P6 no grupo da aula de pesquisa no Ensino Médio, além de PI que conduziu as sessões em cada um dos grupos. A continuação descreve-se o que ocorreu na sessão do grupo do Ensino Fundamental.

PI iniciou a discussão dizendo que o grupo iria conversar sobre o ensino e aprendizagem do TP e começar a desenhar uma aula de pesquisa relacionado a este tema. Em ambos os grupos, num primeiro momento, os professores participantes definiram que iriam organizar um arquivo em conjunto que seria um documento norteador para organizar a aula de pesquisa. No Ensino Fundamental, a aula seria preparada para uma turma do nono ano, ano escolar onde normalmente se ensina o TP pela primeira vez no Brasil. Já a aula do Ensino Médio seria planejada para uma turma do terceiro ano, último ano escolar do Ensino Básico no Brasil. Nessa perspectiva, PI sugeriu o uso da ferramenta *Google Docs* para a criação desse documento, já que esta possibilita que várias pessoas, concomitantemente, possam editar e visualizar as alterações realizadas no documento em tempo real.

Após isso definido, PI enfatizou o que seria feito nesta e nas seguintes sessões do curso e destacou, mais uma vez, quais etapas do *Lesson Study* seriam desenvolvidas. Em seguida, PI

sugeriu que, para dar um direcionamento ao que seria exatamente abordado na aula de pesquisa, os professores falassem da sua experiência em ensinar o TP.

Falando das experiências particulares de cada um em ensinar o TP, o professor P1 comentou que costumava abordar o TP já no oitavo ano do Ensino Fundamental, quando ele ensina os números irracionais. Como o professor P2 comentou que não tinha experiência em ensinar o TP e a professora P3 não esteve presente nesta sessão do curso, o professor P1 perguntou particularmente à professora P4 se ela fazia o mesmo com seus alunos do oitavo ano.

Após um tempo de discussão sobre quais os significados parciais do TP os professores costumavam trabalhar em aula com os seus alunos, sobre as conexões intra e interdisciplinares que costumavam fazer e de averiguar como o TP se apresenta nos livros didáticos, na sequência da discussão, PI propôs contextualizar para quem seria planejada a aula, para que grupo de alunos e na aula de qual professor ela seria realizada. Os professores participantes começaram a descrever como eram seus contextos de aula e, no caso particular do grupo da aula de pesquisa no Ensino Fundamental, quais eram as adaptações que estavam sendo feitas para as aulas que, naquele momento, começavam a ser a distância, devido à pandemia de Covid-19.

Após comentarem sobre as várias dificuldades que estavam enfrentando para a realização de um ensino a distância, devido a realidade dos alunos, PI comentou que, em muitos casos, havia boa disponibilidade por parte dos professores para fazer as aulas a distância acontecerem, fazer com que a pandemia não impedisse os alunos a seguirem tendo acesso à educação, mas se depararam com a dura realidade do contexto onde estão localizadas as escolas de periferia onde, muitos dos professores participantes do curso trabalhavam. Contudo, P4 contrariou a ideia de PI e argumentou que, talvez, seria possível realizar a aula de pesquisa em uma de suas turmas de nono ano. Nessa perspectiva, P4 comentou que iria averiguar com seus alunos a possibilidade de fazer essa aula acontecer.

A seguir, P4 descreveu um pouco como vinha sendo sua experiência com o ensino a distância com os seus alunos e na escola onde trabalhava. Neste momento, PI viu nos alunos de P4 a possibilidade de realização da aula de pesquisa e perguntou à professora. PI também questionou sobre a possibilidade de fazer a aula online de modo síncrono. Os professores

participantes decidiram, então, preparar uma aula para a turma da professora P4. Neste momento, PI buscou averiguar mais alguns detalhes para a aula.

Com o contexto onde se daria a aula definido, PI chamou a atenção dos professores para realizarem um estudo de como o TP é apresentado no currículo nacional e também da instituição de ensino da professora que daria a aula, ação prevista na primeira etapa do LS. Desta forma, com a ideia de fazer com que os professores chegassem a um acordo sobre o que fariam na aula, como apresentariam o TP aos alunos de P4, PI fez alguns questionamentos de qual ou quais documentos os professores iriam utilizar para fundamentar a aula de pesquisa.

A discussão, então, seguiu sendo sobre quais livros didáticos cada professor costumava usar nas escolas onde lecionam e como o TP é abordado nesses livros. Os professores destacaram, ainda, que nos livros didáticos aparecem os códigos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) referentes às habilidades que pretendem ser trabalhadas em cada seção ou atividade do livro didático.

A discussão seguiu sobre o modo como o TP é apresentado nos livros didáticos. P2 destacou que, nos livros averiguados, o ensino do TP começa pela representação geométrica e, em seguida, pela representação aritmética-algébrica. Ademais, comentou que os livros apresentam exercícios e aplicações do TP a problemas contextualizados e, ainda, atividades que trabalham a relação entre comprimento dos lados do triângulo retângulo.

Neste momento, a discussão se alinhou mais para o planejamento da aula que seria aplicada e, nessa perspectiva, os professores comentaram que seria interessante iniciar a aula apresentando a ideia do TP como uma relação entre as áreas dos quadrados de lados iguais aos lados do triângulo retângulo. Neste momento, P4, ao verificar que os livros didáticos apresentam tarefas para os alunos com medidas irracionais no triângulo retângulo, demonstrou preocupação em abordar esse tipo de questão para os seus alunos, argumentando que eles não tinham conhecimentos suficientes sobre os números irracionais. Nesse sentido, na sequência da discussão, os professores decidiram que, primeiramente, apresentariam aos alunos apenas exemplos de triângulos retângulos com medidas inteiras, isto é, apenas triângulos pitagóricos. Além disso, decidiram que fariam a representação geométrica do TP como relação entre áreas de quadrados, com o auxílio de uma malha quadriculada.

Na sequência, P1 perguntou se haveria problema em fazer um exemplo para o TP como relação entre áreas de quadrados sendo, por exemplo, um dos lados do triângulo um número não natural e deu o exemplo do triângulo retângulo que é metade do quadrado de lado unitário. P4 comentou que não haveria problema e P1 sugeriu que, nesse caso, se fizesse a construção utilizando régua e compasso. Na continuação, os professores comentaram sobre a possibilidade de fazer essa construção com o auxílio do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* e também sugeriram fazer uma vídeo-aula onde apresentariam essa construção.

Depois, P1 compartilhou um documento que apresentou a definição do TP apoiando-se em dois significados parciais do TP, como relação entre áreas dos quadrados de mesmo lado do triângulo retângulo e como relação entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo. Na sequência, o material apresentava exemplos de exercícios onde se podia identificar a medida de um dos lados do triângulo retângulo conhecendo-se os outros dois.

A seguir, os professores retomaram a ideia de fazer a construção geométrica do TP como relação entre áreas de quadrados com o auxílio do *software GeoGebra*. P1 perguntou se os professores fariam a construção ou se elas seriam realizadas pelos alunos. Após discutirem um pouco, os professores concluíram que seria melhor somente mostrar a construção no *GeoGebra* e deixar para os alunos fazerem apenas a construção geométrica de triângulos pitagóricos, com o auxílio da malha quadriculada.

Na sequência da discussão, P4 apresentou um vídeo que apresenta o significado geométrico do TP como relação entre áreas de quadrados com o auxílio de material manipulativo e sugeriu mostrar esse vídeo para os alunos na aula. Os demais professores concordaram.

P4 concluiu, sugerindo mostrar o vídeo primeiro e depois fazer a construção no *GeoGebra* para o caso do triângulo com hipotenusa igual a raiz quadrada de dois e catetos unitários. Neste momento, os professores questionaram sobre o tempo que teriam disponível para a aula, o horário que seria a aula e sobre o tipo de acesso dos alunos à internet. P4 sugeriu que a aula fosse realizada no horário onde teriam a maior participação dos alunos e, neste caso, comentou que imaginava que, muitos alunos, teriam acesso à aula por meio do aparelho celular dos pais e que, portanto, dever-se-ia perguntar qual seria o melhor horário para eles acessarem a aula. Além disso, os professores discutiram que seria interessante que a aula tivesse a duração

de dois períodos (45 minutos cada, totalizando 1 hora e meia). Ademais, os professores comentam sobre como se faria a avaliação das aprendizagens dos alunos e sugeriram elaborar um formulário online por meio do *Google Forms*, onde os alunos teriam que responder algumas questões relacionadas aos conceitos abordados em aula.

Por último, P2 questionou se P4 sabia se seus alunos conheciam a malha quadriculada e se já haviam trabalhado a ideia de área de quadrados utilizando esse material. P4 comentou que, em particular, não havia utilizado esse material. O professor P2, então, sugeriu que se fizesse a introdução ao TP fazendo-se a construção dos quadrados de lados 3, 4 e 5 com o uso de malha quadriculada e, assim, poder-se-ia verificar facilmente a área de cada uma dessas figuras. P4 sugeriu que cada aluno construísse esses quadrados e tentasse dispor de modo a formar o triângulo retângulo com esse material, mostrando assim a relação entre as áreas. P2 também sugeriu, como instrumento de avaliação, que os alunos enviassem uma foto da relação encontrada com o uso do material construído pelos alunos. P4 considerou a ideia de P2 muito boa e ressaltou, ainda, que os alunos deveriam enviar a foto durante a aula, uma vez que acabassem a construção. P2 concluiu dizendo que P4, como professora da turma onde mais tarde seria realizada a aula, deveria pensar se o que ele sugeriu faria sentido para seus alunos. P4 encerrou a discussão dizendo que sim, que a proposta teria sentido para seus estudantes.

PI concluiu a segunda sessão do curso destacando que P4 deveria confirmar com seus alunos a possibilidade de fazer a aula e o horário em que esta seria realizada. Além disso, comentou que na próxima sessão dar-se-ia sequência ao planejamento da aula, alinhando-se os objetivos para a aula de pesquisa.

Sessão 3 do curso: Etapa planejamento da aula do Lesson Study

A terceira sessão do curso foi realizada no dia 14 de abril de 2020 e teve duas horas e trinta minutos de duração. Estiveram presentes os professores P1, P2, P3 e P4 do grupo da aula no Ensino Fundamental e P5, P6, P7 e P8 do grupo da aula no Ensino Médio. Nesta sessão, deu-se sequência ao desenvolvimento da etapa de *planejamento da aula* do LS em cada grupo. A continuação descreve-se o que ocorreu na sessão do grupo do Ensino Fundamental.

PI iniciou a terceira sessão do curso no grupo do Ensino Fundamental destacando o que se havia discutido na sessão anterior e, como forma de continuar o planejamento da aula

de pesquisa, nesta sessão, os professores deveriam estabelecer os objetivos da aula e desenhar uma proposta conjunta. Em seguida, P1 perguntou qual havia sido o retorno dos alunos de P4 em relação à participação na aula que seria proposta.

A continuação, P4 comentou que havia averiguado com seus alunos a possibilidade de eles participarem de uma aula virtual de maneira síncrona e, dos quase 30 alunos da turma, 13 responderam que poderiam participar. Neste momento, P4 não estava tendo aulas a distância com os seus alunos e a aula de pesquisa seria oferecida de modo optativo para este grupo de estudantes. Nesse sentido, os professores participantes consideraram uma conquista ter quase a metade dos alunos da turma de P4 interessados em participar.

Em seguida, P4 comentou que faria a aula por meio da plataforma de compartilhamento de vídeos *YouTube*, através da ferramenta *YouTube Live*, que permite realizar atividades ao vivo e transmiti-las em tempo real. Depois que a transmissão é concluída, o conteúdo fica automaticamente disponibilizado para consumo *offline* no próprio *YouTube*. Os demais professores demonstraram entusiasmo em fazer a aula por esse meio e, também, comentaram que poder-se-ia fazer a interação entre a professora e os alunos através do *chat* do *YouTube*. Ademais, P4 comentou que dominava os meios para fazer a transmissão da aula por *YouTube* e suas maiores dúvidas, naquele momento, eram sobre as ordens que teria que dar aos alunos no momento da aula, principalmente em relação a como solicitar que seus alunos construíssem os quadrados para a atividade que trabalharia a ideia do TP como relação entre as áreas dos quadrados de lados iguais aos lados do triângulo retângulo.

Na sequência desta sessão, os professores ressaltaram o que haviam decidido na sessão anterior sobre fazer uso da malha quadriculada para trabalharem as áreas de números naturais e utilizar a construção no *GeoGebra* para o caso particular do triângulo retângulo com hipotenusa igual a raiz de dois e catetos unitários. Em seguida, P1 trouxe à discussão a ideia de os alunos confeccionarem a malha quadriculada no próprio caderno de aula. Os professores discutiram a esse respeito e decidiram que, antes da aula, P4 solicitaria aos alunos que construíssem uma malha quadriculada.

A seguir, os professores comentaram sobre qual seria o dia e horário para a implementação da aula. Nesse sentido, sugeriram que a aula ocorresse no turno da tarde para não correr o risco de os alunos não participarem no turno da manhã, porque eles poderiam

estar dormindo no momento da aula. Também decidiram que a aula seria implementada no dia 23 ou 24 de abril e que os alunos poderiam definir, depois, qual dia prefeririam.

Na sequência da discussão, P3 perguntou aos demais professores sobre a possibilidade de fazer a introdução ao estudo do TP trazendo uma contextualização histórica deste Teorema. Depois de discutirem um pouco a esse respeito, os professores decidiram utilizar, no começo da aula, algum vídeo que tratava da contextualização histórica do TP. Ficou combinado que cada um faria uma busca na internet e enviaria ao longo da semana para os demais colegas decidirem qual vídeo utilizariam. Neste momento, P1 comentou, então, sobre a ordem em que se realizaria a aula, e enfatizou que, depois de mostrarem um vídeo que contextualiza a história do TP, fariam a construção dos quadrados de lados naturais e perguntou sobre o objetivo dessa construção para além da relação com o TP. Perguntou, ainda, para P4, se seus alunos teriam os conhecimentos prévios necessários sobre as figuras geométricas planas, em particular, o quadrado e o retângulo. P4 respondeu dizendo que acreditava que alguns de seus alunos sabiam, mas que haviam outros que sabiam mais ou menos. Nesse sentido, P3 sugeriu que se explicasse na aula o fato de que o TP é uma propriedade dos triângulos retângulos. Neste momento, P1 ressaltou a ideia, inspirada em uma atividade de um livro didático que ele havia apresentado na sessão anterior, de se trabalhar o significado geométrico do TP como uma relação entre áreas de quadrados, partindo de um exemplo de um triângulo retângulo que seria obtido a partir da divisão, pela diagonal, desse retângulo em dois triângulos retângulos.

Na sequência da discussão, P1 ressaltou a sequência de passos para a aula, anotados no documento onde os professores estavam registrando o planejamento da aula, e os professores foram desenhando uma proposta de aula.

A seguir, os professores discutiram sobre a ideia de pedirem aos alunos, antecipadamente ao dia da aula, que desenhassem na malha quadriculada, confeccionada pelos alunos, quadrados que seriam mais tarde aproveitados quando fizessem a atividade sobre o significado geométrico do TP como relação entre áreas de quadrados. Com isso, os professores decidiram que iriam pedir aos alunos para fazerem apenas a construção dos quadrados de lado 3, 4 e 5 na malha quadriculada. A discussão procedeu com os professores retomando a possibilidade de, também, fazerem essa construção no *GeoGebra*. Nessa perspectiva, P4 começou a questionar e destacar suas dúvidas sobre como faria essa construção em uma *live*

no *YouTube*, com que meios tecnológicos, e ressaltou sobre a necessidade de apropriação das tecnologias necessárias. P2 concordou e comentou que não teriam tempo hábil, naquele momento, para fazê-lo. E, desta forma, os professores abandonaram a ideia de fazerem a construção, também, no *GeoGebra*.

Pouco a pouco os professores foram alinhando o passo a passo para a proposta da aula e, nesse sentido, decidiram, então, além de fazerem a construção dos quadrados de lados 3, 4 e 5, na malha quadriculada, solicitar aos alunos a construção de um retângulo de base 3 e altura 4 no mesmo material. Para, assim, obter um triângulo retângulo com base nesse retângulo. Decidiram que esse seria o próximo passo para a aula e, desta forma, retomariam a definição de triângulo retângulo.

A discussão seguiu nessa perspectiva e os professores chegaram, então, ao desenho final da primeira atividade para aula: desenhar, em uma malha quadriculada, os quadrados de lados 3, 4 e 5 e um retângulo de dimensões 3 e 4; recortar todas as figuras e recortar o retângulo ao meio, pela diagonal, para obtenção de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5; encaixar os lados dos quadrados nos lados do triângulo retângulo obtido; verificar que a soma das áreas dos quadrados de mesmo lados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa. Ficou combinado, também, que depois de fazerem essa construção, os alunos enviariam uma foto à professora para averiguar se os alunos haviam feito a construção corretamente.

Na continuação desta sessão, os professores discutiram como seriam exatamente as ordens que P4 daria para a realização dessa atividade e como a professora iria institucionalizar o TP a partir do caso particular do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Nesse sentido, P3 questionou se não seria importante fazer outros exemplos, além desse caso particular. Apesar de P3 sugerir fazer uma verificação do TP para mais casos, na sequência da discussão, os professores decidiram não fazer a mesma construção com o auxílio de malha quadriculada para outros casos particulares do triângulo retângulo, escolheram trabalhar a ideia de área, mas apenas aritmeticamente, sem a representação geométrica.

Naquele momento, a discussão começou a ser sobre a ideia de apresentar exemplos de triângulos retângulos com medidas irracionais. Os professores argumentaram que os alunos, normalmente, apresentam dificuldades com esse tipo de números, especialmente para fazerem operações. Os participantes discutiram como poderiam sanar essas dificuldades, pois, apesar

de saberem que os alunos não tinham os conhecimentos prévios adequados, queriam ampliar a amostra de problemas. Depois de discutirem um pouco, decidiram colocar um exemplo de triângulo retângulo com medida irracional, mas de modo a não precisarem fazer operações com números irracionais na aula. A discussão seguiu sobre os materiais que seriam usados para a aula e os modos de apropriação das tecnologias para a transmissão da aula por *YouTube*.

Na sequência do planejamento, P1 sugeriu apresentar mais exemplos de triângulos retângulos com medidas irracionais. P4 destacou que seus alunos ainda não entendiam muito sobre operações com números irracionais e, assim, seria difícil eles entenderem o TP com esse tipo de exemplo. P4 sugeriu, então, fazer uma aula prévia para desenvolver mais as operações com números irracionais, mas destacou, também, que não estava tendo aulas virtuais de maneira síncrona com seus alunos, naquele momento, o que dificultava essa ideia. Dessa forma, P1 sugeriu que P4 averiguasse uma forma de fazer essa aula prévia e, dependendo do resultado, os professores colocariam ou não mais exemplos de triângulos retângulos com medidas irracionais nos exercícios do plano de aula.

Na continuação da sessão, P1 lembrou que, quando P1 falou da sua experiência em ensinar o TP, ele havia comentado que o fazia quando ensinava os números irracionais, na representação desses números na reta numérica e, nesse sentido, P1 questionou sobre a possibilidade de fazer o mesmo na aula que estava sendo planejada. P1 considerou interessante a ideia, mas duvidou se isso seria possível pela questão do tempo previsto para a aula que estava sendo planejada. Nessa perspectiva, os professores destacaram que ainda não haviam estabelecido um tempo para a aula e questionaram P4 sobre qual seria esse tempo. Após discutirem um pouco, pensaram que talvez um tempo interessante seria o tempo equivalente a dois períodos de quarenta e cinco minutos de uma aula presencial.

No momento seguinte da sessão, P1 apresentou a espiral de Teodoro, para ilustrar o que havia comentado sobre o ensino dos números irracionais com o TP, e questionou se seria interessante construir essa espiral como os alunos na aula que estava sendo planejada.

Após discutirem um pouco e ressaltarem sobre a beleza dessa construção, os professores debateram sobre se seria interessante fazê-la na aula que eles estavam planejando e, então, P2 perguntou especificamente a P4 se faria sentido para seus alunos fazerem a espiral de Teodoro. P4 contestou dizendo que não tinha certeza e ressaltou, mais uma vez, que seus

alunos conheciam os números irracionais, mas a dificuldade seria em fazer operações com esse tipo de número, visto que eles não dominavam bem essas operações. P3 destacou que objetivo geral para essa aula era apresentar o TP, seu contexto histórico e fazer algumas atividades de aplicação e sugeriu deixar exemplos com números irracionais para uma outra aula. Nesse sentido, PI ressaltou que os professores haviam discutido muitas coisas e tinham tido muitas ideias, mas não haviam registrado o objetivo geral e os objetivos específicos da aula. Desta maneira, PI sugeriu que os professores registrassem quais seriam os objetivos da aula para, então, decidirem. P3 destacou, ainda, que, além dos objetivos, dever-se-ia pensar em fazer uma verificação das aprendizagens dos alunos para cada objetivo e isso deveria ser encaixado, também, no tempo da aula.

PI comentou que P3 fez uma ótima colocação e ressaltou que os professores foram falando e construindo uma sequência de aula, mas os objetivos da aula não haviam sido registrados e questionou quais seriam os objetivos da aula então. Assim, na sequência da sessão, os professores discutiram sobre quais seriam os objetivos da aula.

Após discutirem muito sobre a decisão ou não de construir a espiral de Teodoro e sobre quais seriam as metas para a aula, os professores decidem deixar de fora do plano de aula essa construção. Na sequência da sessão, os professores debateram sobre quais exercícios colocariam no plano de aula. P1 perguntou se os exercícios seriam os do livro que ele havia sugerido na sessão anterior. P4 respondeu que sim, mas que os professores deveriam testá-los antes de escolher quais seriam colocados no plano de aula. Na continuação da discussão, P2 sugeriu também colocarem atividades que tratassem do significado aritmético-algébrico do TP, ou seja, TP como uma relação aritmética-algébrica entre três números. Os demais professores concordam em adicionar atividades desse tipo no plano de aula.

A seguir, os professores verificaram os exemplos de exercícios do livro e decidiram quais colocariam no plano de aula. P4 perguntou, então, se esses exercícios seriam realizados na aula com o auxílio do professor ou se seriam oferecidos aos alunos para serem realizados de maneira autônoma. P1 sugeriu que se fizesse um exemplo de cada exercício antes de oferecê-los para serem resolvidos pelos alunos. Nessa perspectiva, P2 perguntou se esses exercícios eram os que estariam no formulário de avaliação que seria aplicado aos alunos através da ferramenta *Google Forms*. Assim, P2 sugeriu que os alunos colocassem no

formulário avaliativo as respostas finais dos exercícios e enviassem uma foto da resolução para P4, depois de resolvê-los.

Na continuação da sessão, P1 foi registrando os passos da aula no documento que continha o planejamento da aula e, desta forma, destacou aos demais colegas que o passo dez seria a resolução de exemplos, o onze seriam os exercícios e o doze seria a correção dos exercícios e resoluções de dúvidas. E questionou, ainda, como seria realizado esse último passo da aula, se por meio de uma nova *live* no *YouTube*. P2 sugeriu que se fizesse tudo na mesma aula. P4 comentou que sim, que poderia fazer tudo na mesma aula, mas que teria que dar tempo e esperar que os alunos resolvessem os exercícios e perguntou quanto seria esse tempo. P1 sugeriu 30 minutos. Depois de dizer isso, P4 sugeriu deixar a resolução dos exercícios gravada e disponibilizar aos alunos, depois da aula, e deixaria seu *WhatsApp* disponível para esclarecimento de dúvidas.

Em seguida, P1 comentou que considerava que o planejamento da aula estava concluído. P4 ressaltou que os professores deveriam definir, ainda, quais os exemplos e exercícios seriam colocados no planejamento. Assim, P1 destacou que ainda faltavam mais detalhes no documento que continha o plano de aula, como, por exemplo, a duração exata da aula, os exemplos e exercícios, os objetivos (geral e específicos). Além disso, destacou que, na sessão seguinte, os professores deveriam testar os exercícios e tentar antecipar o pensamento dos alunos. Nesse sentido, os professores comentaram sobre erros corriqueiros que os alunos poderiam cometer, como, por exemplo, elevar o três ao quadrado e obter seis como resposta.

Quase terminando a sessão, P1 sugeriu aos professores escolherem os exercícios que seriam colocados no planejamento da aula. Os professores, então, propuseram começar com um exercício que trabalhasse o significado aritmético-algébrico do TP. Em seguida, escolheram um exercício que trabalhava a ideia do significado geométrico parcial do TP, relação entre medidas dos lados do triângulo retângulo. A partir dessa sugestão, P3 perguntou se os alunos já conheciam o conceito de "hipotenusa" e se haveriam de fazer exercícios de reconhecimento dos lados do triângulo retângulo. P4 respondeu que os alunos não conheciam esse conceito. Nessa perspectiva, os professores discutiram um pouco essa questão e, então, P2 sugeriu que se fizesse esse exercício de reconhecimento e características dos lados de um

triângulo retângulo quando se trabalhasse a tarefa sobre o TP como relação entre áreas de quadrados com o material manipulativo. Na continuação, os professores discutiram e elegeram mais alguns exercícios para a aula e, assim, terminou a terceira sessão do curso.

Sessão 4 do curso: Etapa planejamento da aula do Lesson Study

A quarta sessão do curso foi realizada no dia 21 de abril de 2020 e teve duas horas e quarenta e cinco minutos de duração. Nesta sessão, estiveram presentes os professores P1, P3 e P4 do grupo da aula de pesquisa no Ensino Fundamental e P5, P6, P7 e P8 do grupo da aula no Ensino Médio. Nesta sessão, deu-se sequência e se concluiu a etapa de *planejamento da aula* do LS em cada um dos dois grupos. A seguir, descreve-se o que ocorreu na sessão do grupo do Ensino Fundamental.

A sessão iniciou com P4 contando que havia perguntado a seus alunos em qual dia da semana eles preferiam participar da aula, se na quinta-feira ou na sexta-feira, visto que P4 havia combinado com os demais professores, na sessão anterior, que iria averiguar qual seria o melhor dia para a realização da aula. P4 informou que seus alunos disseram que poderia ser em qualquer um dos dois dias propostos, mas ressaltou que ela mesma preferia fazer a aula na sexta-feira porque lhe daria mais tempo para preparar-se. Além disso, sugeriu que a aula ocorresse às 15 horas. Além da PI concordar, os demais professores também estiveram de acordo. A seguir, P4 comentou, também, que havia testado uma *live* no *YouTube* para ver como ficaria e que a enviaria para apreciação dos demais professores.

Na sequência da sessão, PI destacou em qual direção deveria ir a discussão da sessão. Neste sentido, ressaltou que os professores deveriam concluir o planejamento da aula. Para tanto, os professores deveriam revisar as atividades propostas e tentar antecipar o pensamento dos alunos. PI também registrou, no planejamento da aula, a data e horário da aula, 24 de abril de 2020, às 15 horas. Além disso, ficou combinado que a aula teria uma hora e meia de duração.

Continuando a discussão, os professores retomaram quais recursos tecnológicos seriam utilizados na aula e, nessa perspectiva, P4 comentou que havia se esforçado bastante para entender como faria a transmissão da sua tela do computador enquanto estivesse ao vivo na *live* no *YouTube* e que, depois de pesquisar muito, havia conseguido. Além disso, P4

comentou, também, que teve inclusive um pouco de ansiedade até conseguir entender como usar o recurso tecnológico. Mas, depois de estudar muito, encontrou uma maneira e se sentiu mais tranquila para realizar a aula.

Na sequência da sessão, P4 comentou que havia buscado um vídeo que apresentasse uma contextualização histórica do TP e que, mesmo procurando muito, não havia encontrado um que lhe agradasse. Comentou, ainda, que era muito difícil encontrar um vídeo que falasse da história do TP sem explicar também esse conceito, coisa que os professores não queriam.

Nos próximos momentos do curso, os professores buscaram e falaram sobre alguns vídeos que tratam sobre o TP e, também, sobre o próprio Pitágoras. A seguir, P1 questionou P4 sobre a ideia de, em lugar de mostrar um vídeo aos alunos, contar um pouco a história do TP ao mesmo tempo que se fosse mostrando imagens relacionadas. P4 concordou e, na sequência, P1 comentou que não precisaria ser algo muito extenso. P4 comentou que achava melhor que fosse mesmo assim, pois não se sentia muito segura, já que não sabia muito sobre o tema. Nesse sentido, P1 sugeriu que P4 preparasse algumas informações e que, se fosse necessário, para sentir-se mais segura, P4 poderia ler o que haveria anotado. P4 considerou uma boa ideia. P1 acrescentou que, no momento da aula, P4 poderia dizer que, caso alguém demonstrasse mais curiosidade sobre o assunto, poderiam pesquisar no próprio *YouTube*, argumentando que haviam várias informações a respeito disponíveis ali.

Em seguida, revisando o plano de aula, P1 perguntou se P4 pediria a seus alunos para fazerem a confecção de uma malha quadriculada. P4 respondeu dizendo que havia realmente ficado com dúvidas sobre isso, pois, afinal, não havia ficado claro, durante a discussão com os demais professores. P3 destacou que os professores haviam concordado que P4 daria essa ordem para seus alunos, a fim de ter a malha quadriculada já disponível para a aula. P4 ressaltou que achava melhor que fosse dessa maneira. P1 finalizou dizendo que isso deveria ser escrito também no plano de aula. P3 perguntou, ainda, se os alunos iriam recortar as figuras desenhadas na malha quadriculada, também, antes da aula. P4 respondeu dizendo que sim, que os alunos no início da aula deveriam ter os três quadrados (lados 3, 4 e 5) e o retângulo (de dimensões 3 e 4) desenhados numa mesma malha quadriculada e já recortados para estarem preparados para a realização da atividade que seria proposta no começo da aula. Além disso, P4 comentou que faria a divisão do retângulo em dois triângulos de lados 3, 4 e 5 no momento

da aula. P1 perguntou, ainda, se os alunos confirmariam com P4 que haviam confeccionado o material solicitado e P4 confirmou que sim e que daria a ordem aos alunos dois dias antes da aula.

Na continuação, P1 perguntou se os treze alunos que haviam dito que participariam da aula estavam realmente confirmados. P4 respondeu que sim e que esperava, inclusive, que participassem mais alunos. Nessa perspectiva, P4 perguntou à professora investigadora se seria interessante convidar também seu outro grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental para participarem da aula.

Na continuação desta sessão, os professores repassaram o passo a passo do que seria a sequência da aula. Os professores decidiram que haveria um passo prévio à aula que seria a confecção da malha quadriculada; desenho de quadrados e retângulo; e recorte das figuras desenhadas. Ficou combinado, também, que a aula iniciaria com uma contextualização histórica do TP. O próximo passo seria perguntar aos alunos sobre as figuras geométricas construídas antes da aula e aproveitar esse material para relembrar o conceito de área de quadrado, utilizando os exemplos de quadrados confeccionados pelos alunos e a unidade de área determinada pelos quadrados da malha quadriculada. A seguir, o próximo passo seria a obtenção do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 a partir da divisão em duas partes iguais, por recorte na diagonal, de um retângulo de medidas 3 e 4, desenhado em uma malha quadriculada e relembrar as características do triângulo retângulo (nomenclatura dos lados, classificação quanto aos ângulos e quanto aos lados).

A seguir na discussão, P1 comentou que os exercícios que os professores haviam selecionado na sessão anterior já eram suficientes, argumentando que haveria muitas coisas para uma mesma aula. P3 e P4 concordaram e, além disso, P3 ressaltou que deveria fazer a correção e esclarecimento de dúvidas dos alunos, tudo isso em uma hora e meia de aula. Desta forma, P1 perguntou se alguns exercícios poderiam ser colocados no formulário que faria a avaliação dos alunos e os professores consideraram possível fazer isso. Nesse sentido, ficou decidido que P4 faria alguns exemplos durante a aula e os exercícios para os alunos ficariam todos no formulário de avaliação.

A discussão seguiu mais especificamente revendo e analisando quais exercícios seriam oferecidos aos estudantes. O primeiro exercício tratava-se da recíproca do TP, ou seja, dados

três números, os alunos deveriam verificar por meio do TP se esses números correspondiam a ternas pitagóricas. No seguinte exercício, os alunos teriam que indicar qual era o valor correspondente a hipotenusa e os catetos, em cada terna pitagórica identificada.

Após discutirem sobre como esses exercícios seriam resolvidos pelos alunos, P1 chamou a atenção que não havia nenhuma "situação problema" como exercício. Assim sendo, sugeriu que fosse feito uma situação problema contextualizada e deu o exemplo de um problema para medir a altura de uma escada. Desta forma, P4 respondeu que considerava ótimo, porque mostraria uma aplicação do TP, mas que pensava que talvez fosse demais para uma primeira aula, que ficaria pesado para os alunos. P1 contra argumentou que seria apenas mais um exercício, que não seriam colocadas muitas situações problemas. Em vista disso, P4 concordou em adicionar uma situação problema.

Na sucessão da discussão, os professores definiram detalhes dos enunciados das atividades que seriam propostas, pensando em um modo mais acessível para os alunos entenderem. Além disso, testaram alguns valores de ternas pitagóricas e estabeleceram o tempo que seria deixado para a realização de cada exercício e como seria feito o retorno dos alunos. No caso da situação problema, os professores sugeriram que P4 apresentasse um exemplo durante a aula e disponibilizasse uma outra situação problema que trabalhasse o mesmo significado do TP, no caso particular, relação entre comprimento dos lados do triângulo retângulo.

Dando prosseguimento à sessão, os professores discutiram sobre a dificuldade dos alunos em interpretar os enunciados de tarefas matemáticas e falaram, também, sobre suas experiências em vista disso. Como forma de evitar problemas com a interpretação dos estudantes nos exercícios que eles teriam que resolver de maneira autônoma, os professores sugeriram disponibilizar um desenho para dar apoio a interpretação do enunciado, por exemplo, no problema da altura de uma escada apoiada num muro, fazer um desenho que ilustrasse essa situação.

Mais adiante na discussão, P1 averiguou se os professores ainda teriam a intenção de colocar no plano de aula exemplos de triângulos com medidas de lados irracionais. Naquele momento, os professores disseram que não, pois ficaria muita coisa para uma mesma aula. No entanto, mais adiante na sequência da sessão, P4 identificou que algumas respostas para os

exemplos e exercícios que seriam propostos dariam números irracionais. Desta forma, os professores decidiram acrescentar um exemplo, prévio aos exercícios, de um triângulo retângulo com uma medida irracional e decidiram colocar o exemplo de identificar o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários, destacando que dessa forma os alunos não teriam que fazer operações com raízes, pois apenas chegariam num número irracional como resposta. Contudo, P4 identificou, também, que, nos exercícios seguintes, os alunos teriam que fazer operações com raízes, especialmente entender a inversa da raiz quadrada, e pediu que os colegas a ajudassem a pensar em uma melhor forma de abordar isso para os alunos. Por esse lado, P1 sugeriu que P4 não resolvesse o problema através do conceito da inversa da raiz quadrada, mas que, quando chegasse em um exemplo que teria que elevar ao quadrado um número x igual a 64, que teria que ser determinado, o fizesse perguntando, por exemplo, quanto deveria ser o lado de um quadrado para que ele tivesse área 64. Na sequência da discussão, os professores testaram todos os resultados dos exemplos e exercícios, anteciparam o pensamento e as possíveis dificuldades dos alunos e pensaram em estratégias para solucionar essas dúvidas.

Depois disso, P1 também ressaltou que os professores não haviam escrito os objetivos no plano de aula. Os professores, então, discutiram sobre isso, decidiram os objetivos da aula e anotaram no plano de aula. Além disso, repassaram mais uma vez os exercícios que seriam propostos e de que forma eles seriam disponibilizados no formulário de avaliação e fizeram uma organização final do que foi proposto.

Por último, P3 perguntou se P4 solicitaria aos alunos que eles fizessem anotações durante a aula. Concluindo, P3 destacou que o seu modo de gravar as coisas que ela estuda é ir anotando e, por isso, sugeriu que P4 solicitasse aos seus alunos que fossem registrando, por meio da escrita, aspectos mais importantes. P4 argumentou que não gostava dessa ideia porque, com base em sua experiência, considerava que alguns alunos não poderiam fazer as duas coisas ao mesmo tempo, prestar atenção na aula e anotar os aspectos mais relevantes.

Por fim, P1 perguntou a P4 se ela poderia elaborar o formulário de avaliação no *Google Forms*, conforme combinado, e enviar depois aos demais professores para sua apreciação. A sessão terminou com P4 mostrando o vídeo teste da aula realizada no *YouTube*.

Entre a sessão 4 e a sessão 5: Implementação da aula

A aula de pesquisa no Ensino Fundamental foi implementada no dia 24 de abril de 2020 e a do Ensino Médio no dia 27 de abril e, cada uma, teve uma hora e meia de duração. Foi realizada entre as sessões 4 e 5 do curso. Ambas as aulas foram gravadas com o consentimento prévio dos estudantes participantes.

Sessão 5 do curso: Etapa reflexão da aula do LS do Ensino Fundamental

A quinta sessão do curso aconteceu no dia 28 de abril de 2020 e teve duração de duas horas e trinta e cinco minutos. Estiveram presentes todos os professores participantes do curso (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), além da PI, que conduziu o andamento da sessão.

Esta sessão do curso, corresponde a etapa de *reflexão da aula* do LS da aula de pesquisa sobre o TP que foi desenvolvida no nono ano do Ensino Fundamental, isto é, a aula que havia sido planejada pelos professores P1, P2, P3 e P4 e que foi implementada pela professora P4. Os demais professores participantes do curso (P5, P6, P7 e P8), também, participaram desta etapa da aula de pesquisa no Ensino Fundamental, apesar de não terem colaborado nas etapas anteriores. Isto ocorreu em razão de que, num ciclo de LS, no Japão, está previsto que nas etapas de observação e reflexão da aula participem também outros professores ou especialistas na expectativa de colaborar com o estudo. Para diferenciar os dois grupos, o de professores que não participou das primeiras etapas do LS da aula de pesquisa que foi analisada, nesta sessão, será chamado de professores convidados.

PI começou esta sessão do curso contando aos professores convidados sobre o contexto da aula que havia sido desenvolvida. Apesar de alguns professores terem assistido a aula no momento em que ela ocorreu ou por meio da sua gravação em vídeo, PI sugeriu que, durante a sessão, o grupo fosse assistindo a gravação da aula por partes e, então, discutissem sobre os aspectos relevantes observados.

Antes de começarem a assistir a aula gravada, PI comentou sobre algumas informações relacionadas a etapa de *planejamento da aula*. Nesse sentido, PI contou aos professores convidados que, no momento em que o grupo de professores começou a planejar a aula para a

turma de P4, seus alunos não estavam tendo aulas a distância, pois, naquele momento, P4 estava fazendo um ensino remoto com os seus alunos, disponibilizando materiais através do *WhatsApp* e do *Google Sites*.

Depois, PI contou quais eram os objetivos da aula e comentou que P4 solicitou aos alunos, antes da aula, que realizassem a confecção de uma malha quadriculada, desenhassem nessa malha um quadrado de lado três, um quadrado de lado quatro, um quadrado de lado cinco e um retângulo com dimensões três e quatro. PI contou, também, que a aula começou com P4 apresentando uma contextualização histórica do TP e perguntou se os professores queriam começar a reflexão da aula assistindo esse trecho da gravação da aula em vídeo. Após discutirem um pouco, os professores decidiram que queriam assistir, uma vez mais, essa parte da aula por meio de sua vídeo-gravação.

Após assistirem a parte da aula em que P4 apresentou uma contextualização histórica do TP, PI perguntou o que os professores haviam observado e que comentários eles tinham para fazer sobre isso. A seguir, PI exibiu outro trecho da gravação da aula em vídeo, destacando que, a parte que seria exibida, estava relacionada com os objetivos específicos da aula "relembrar o conceito de área, usando os quadrados já confeccionados" e "recortar na diagonal o retângulo, formando dois triângulos, relembrar as propriedades".

Após assistirem essa parte da aula, uma vez mais, PI perguntou o que os professores teriam para comentar sobre a aula. P1 perguntou sobre o retorno dos alunos, se os alunos haviam enviado as fotos do resultado. P4 comentou que vários alunos lhe haviam enviado e que ela mostraria no seguimento da sessão esses registros. Naquele momento, P4 aproveitou que P1 havia falado dos registros dos alunos para a avaliação e comentou que, pelos registros que havia recebido, suspeitava que muitos alunos haviam copiado um dos outros as respostas relacionadas ao formulário de avaliação e explicou as razões para suas suspeitas, mas ressaltou que, mais adiante na sessão, mostraria esses resultados. P4 também ressaltou que os alunos não haviam respondido ao formulário de avaliação logo que a aula foi finalizada e, que, depois, também, não o fizeram. P1 ressaltou que esse fato poderia ter acontecido pela aula ser a distância, o que dificulta o controle do professor. Sobre a parte da aula exibida, P4 comentou que, nesta parte da aula, perguntou aos alunos o que era um ângulo reto e que, na sequência da aula, foi falando outras coisas e não retornou mais para falar sobre o que é um ângulo reto,

ressaltou inclusive que usou, muitas vezes, na aula a expressão ângulo reto, mas que não retomou o conceito e que isso havia faltado na aula.

A seguir, P5 comentou que P4 havia falado sobre o conceito de área de quadrado, mas que poder-se-ia, também, ter calculado a área do retângulo para depois aproveitar para concluir que a área do triângulo obtido, a partir da divisão pela diagonal do retângulo em dois, era a metade da área do retângulo. Seguindo a discussão, P5 acrescentou uma crítica ao momento em que P4 explicou o conceito de área de quadrado, afirmando que P4 havia dito que "fazer a área era contar os quadradinhos" da malha quadriculada, e que o conceito de área de quadrado era muito mais amplo que isso. Nessa perspectiva, P5 sugeriu que P4 dissesse aos alunos que, no caso particular que eles estavam estudando, se usaria contar o número de "quadradinhos" para obter-se a área. P4 respondeu dizendo que, em relação ao modo como ela abordou a área de quadrado, não havia sido uma decisão individual dela e, sim, de todo o grupo de professores que planejou a aula. Em relação a sugestão de calcular a área de retângulo e do triângulo, P4 perguntou qual seria a razão para isso e disse que o grupo de professores havia decidido não calcular essas áreas, durante a aula, pois elas não teriam utilidade. P5 concordou com P4. Nesse sentido, P1 acrescentou que a contagem de unidade de área, com o apoio do recurso de malha quadriculada, era apenas para auxiliar na revisão de um conceito de área de quadrados que se considerava já entendido pelos alunos. P1 concluiu dizendo que não era uma aula sobre áreas e que era um conceito que seria necessário depois para o entendimento do TP. P2 ressaltou, também, essa mesma ideia. E, por fim, P5 rebateu dizendo que a crítica poderia ter sido um exagero da parte dela e que entendeu que havia sido uma escolha do grupo de professores que planejou a aula e, desta forma, respeitava sua decisão, mas que o fato havia chamado sua atenção e decidiu compartilhar com o grupo. Neste momento, P2 acrescentou dizendo que era válida sua crítica e que, sim, quando se usou o apoio da malha quadriculada para relembrar o conceito de área de quadrado, poder-se-ia ter aprofundado mais a razão de cada quadradinho da malha quadriculada representar uma unidade de área. Nessa perspectiva, P1 fez uma sugestão de usar um vídeo como recurso para ensinar essa ideia, argumentando que, durante a aula, ele observou que os alunos se mostraram bastante empolgados nos momentos em que P4 fez uso de vídeos na aula. Por outro lado, P6 ressaltou que, no nono ano, os alunos já deveriam

ter bem claro o conhecimento de área e que, nesse sentido, não seria necessário trazer um vídeo para tratar este conceito numa aula de TP.

P4 comentou que concordava com P6, pois o conteúdo da aula era o TP e que, no caso de ter que retomar todos os conhecimentos prévios necessários tornar-se-ia uma aula muito copiosa. No seguimento da discussão, P4 destacou que, realmente, no nono ano, se espera que os alunos já saibam bem o conceito de área, mas, no caso particular dos seus alunos, não havia o domínio desse conceito por parte de todos, porque em anos escolares anteriores isso não havia sido bem trabalhado. Além disso, P4 ressaltou que seus alunos tinham ainda outras lacunas em relação aos conteúdos prévios ao TP.

Com relação a esse comentário, P6 disse que considerava muito interessante o que havia sido feito e que ela faria o mesmo em aula. Mas, que seu comentário era no sentido de defender a ideia de que não seria necessário aprofundar mais do que já havia sido feito na aula, argumentando que a aula poderia tomar outro caminho e que seria difícil retomar a ideia de se trabalhar o TP na mesma aula.

Por último, em relação a essa parte da aula, P3 sugeriu que, para um redesenho da aula, também, dever-se-ia retomar o conceito de diagonal no momento em que se fizesse o recorte do retângulo pela diagonal.

A seguir, P1 continuou reproduzindo a gravação da aula em vídeo. Após assistirem mais esse trecho da aula, gerou-se o seguinte diálogo:

P4: Eu percebi que, nesse momento, eles não compreenderam a montagem do quebra-cabeça. Eu tive que repetir depois disso, de novo, falar sobre os tamanhos, que seria o próximo trecho, porque eles não estavam retornando a montagem. Talvez seja uma insegurança minha, porque eu tinha já perguntado no nosso planejamento como que eu ia dizer que seria feita essa montagem sem fazer ela, de fato. Eu não sei.

P2: É isso é verdade.

P1: De repente, no momento que tu pediste “quebra-cabeça”, tu tinhas que ter falado “de repente vocês pensem o quadrado ele corresponde a qual lado do triângulo?”, “vocês tentam a partir dessa ideia”, não sei se faltou essa parte aí.

P2: Mas, não, eu acho que P4 falou.

P4: Depois.

P1: Depois, é.

P2: P4 falou, é.

P1: Depois, é, mas já tinha que ter começado com aquela...

P2: Ah, sim!

PI: P3 quer falar.

P3: Será que eles não pensaram em ter que formar alguma figura específica. Porque um “quebra-cabeça” de repente tinha que formar alguma coisa e eles ficaram pensando que “ah será que vai voltar a ser um quadrado?”, “vai dar um triângulo?”, “que figura que vai dar esse quebra-cabeça?”. Daqui a pouco eles ficaram nessa dúvida.

P1: Eu acho que foi mal formulado, até por nós. Eu acho que nós é que...

P4: Eu acho que depois eu falei exatamente isso. Eu acho que não afeta tanto eu não ter começado a falar perfeitamente, assim como vocês tinham dito. Porque depois eu falei “esse quadradinho tem lado três, onde ele vai se encaixar aqui nesse triângulo? No que tem lado quatro? Nesse que tem lado cinco?”. Eu acho que a gente não sabia que ele tinha lados. Eu falei, depois, isso. Mas, mesmo assim, não ficou claro. Até também por causa do material construído por alguns, que estava bem ruinzinho, não tinha como encaixar o material deles.

Depois do que comentou P4 em relação ao material confeccionado pelos alunos, PI pediu que P4 mostrasse as fotos que os alunos haviam enviado a ela durante a aula (Figura 16).



Figura 16. Fotos do material confeccionado pelos alunos de P4
Fonte: elaboração própria

Tendo em vista que muitos alunos confeccionaram a malha quadriculada de maneira incorreta, P4 suspeitou que os alunos tivessem produzido o material solicitado, no último

momento antes da aula e que, por isso, tantos alunos não haviam chegado a um resultado satisfatório. Em vista disso, P3 sugeriu que, no redesenho da aula, fosse determinado uma medida específica para o lado do quadradinho da malha quadriculada. P2 contra argumentou dizendo que o problema havia sido os alunos não terem confeccionado o material com antecedência suficiente. Assim sendo, P4 retomou o que já havia comentado anteriormente, e que, naquele momento, todos estavam em quarentena, pela pandemia de Covid-19, e os professores estavam tendo aulas remotas, e os alunos não estavam realizando as atividades propostas. A professora acrescentou que havia sido "uma conquista" os alunos terem enviado suas produções, ainda que incorretas, porque, normalmente, ela não estava tendo esse retorno com as aulas remotas. Nesse sentido, P1 comentou que os professores deveriam olhar para essa parte positiva da aula, que foi a participação dos estudantes. Para terminar, P4 concluiu que o que deve ser revisto é a autonomia que havia sido dada aos estudantes para confecção do material proposto. P1, acrescentou que, ainda assim, P4 havia tido um logro, porque, mesmo se esforçando muito, ele não estava conseguindo ter a mesma participação de seus alunos em suas aulas remotas. Depois disso, P4 acrescentou a informação de que a turma de alunos para a qual ela havia proposto a aula tinha aproximadamente 30 alunos e que, dessa quantidade de alunos, apenas dois não tinham acesso à internet.

Na sequência da sessão, P1 perguntou quantos alunos haviam participado da aula e P4 respondeu que havia contado 16 alunos, que ela havia dito o nome durante a aula. P1 disse que era um número bom e acrescentou que observou, durante a aula, que os alunos tinham uma relação próxima com a professora, porque, ao longo da aula, muitos pediram ajuda para esclarecer dúvidas e P4 concordou. P1 reafirmou que era muito importante enfatizar essa parte que ele chamou "positiva" da aula, onde teve muita participação dos alunos e realização das atividades propostas e, enfatizou ainda, que numa aula presencial, muitas vezes, não é possível fazer que os alunos todos tenham interação com o professor e que, na aula implementada, P4 havia conseguido interação suficiente com os seus alunos. Nessa perspectiva, P4 comentou o que segue:

P4: Bom tu falar isso! Essa experiência toda tem sido um turbilhão de emoções. Porque, primeiro, eu tive problema com a minha internet aqui em casa, aí, como é que eu ia fazer uma *live* em 24 horas com a minha internet ruim? Aí, eu fui pesquisar sobre o equipamento do modem para ver o

que eu poderia fazer. Aí, eu furei a quarentena e fui para casa da minha mãe gravar o vídeo lá, para que fosse possível. Aí, quando eu estava lá, 5 minutos antes, deu um problema na câmera do celular e, aí, eu comecei a ficar nervosa. Aí, depois, quando eles estavam lá, eu fiquei feliz que eles estavam. Daí eu fiquei esperando o retorno deles, e não mandaram o retorno já, eu fiquei triste. Então, um monte de coisas acontecendo ao mesmo tempo, às vezes, eu penso: será que foi ruim? Será que foi bom? Então tu falar para mim, assim, até teve um retorno bom, me deixa muito feliz.

A seguir, PI reproduziu mais uma parte da aula gravada em vídeo. Após isso, os professores fizeram alguns comentários sobre essa parte da aula. P4 comentou que considerou o vídeo reproduzido durante a aula, que mostrava a relação entre as áreas dos quadrados de mesmos lados do triângulo retângulo, muito interessante, porque identificou que, no momento depois de mostrar o vídeo na aula, os alunos imediatamente começaram a dizer, no *chat* do *YouTube*, que haviam entendido a relação. P1 acrescentou dizendo que estava de acordo com P1 e que o vídeo, por ser um recurso que ofereceu um certo dinamismo à atividade, foi muito importante para auxiliar na aprendizagem dos alunos.

Falando sobre o trecho da aula assistida, P2 comentou que essa parte, para ele, foi a que mais gerou dúvidas aos estudantes. Trata-se do momento em que P4 tentou fazer com que os alunos identificassem que a soma das áreas dos quadrados de lado três e quatro era equivalente a área do quadrado de lado cinco (Figura 17), e comentou que P4, ao ver que os alunos não percebem essa equivalência apenas visualizando geometricamente, tentou que eles descobrissem que havia uma relação de igualdade entre os números 9, 16 e 25, valores equivalentes às áreas dos quadrados usados no exemplo da aula.

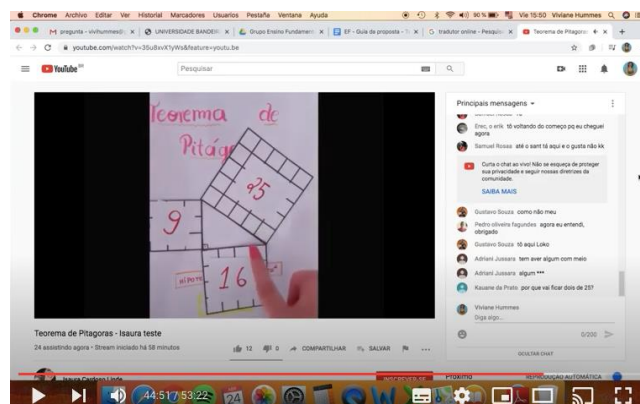


Figura 17. Momento da aula onde P4 tenta mostrar que a soma das áreas dos quadrados de lado três e quatro era equivalente a área do quadrado de lado cinco

Fonte: elaboração própria.

Nessa perspectiva, P4 comentou que já havia comentado, durante o planejamento da aula, que, talvez, essa seria uma dificuldade que apareceria na realização da aula e que, naquele momento, os professores comentaram que esperavam que alguém concluísse a relação, mas que havia demorado muito, durante a aula, para algum aluno chegar a essa conclusão. Relacionado a isso, P8 comentou que a maior dificuldade dos estudantes era relacionar o geométrico com o número e que, por isso, o vídeo utilizado havia facilitado nessa compreensão.

Por conseguinte, P1 afirmou que considerava que a dúvida é algo que faz parte do processo de aprendizagem do aluno. A seguir, P4 comentou que sentiu falta de poder visualizar os alunos na aula por meio de uma *live* no *YouTube*, coisa que, em uma aula presencial, isso naturalmente ocorre. Assim, P4 considerou uma limitação em relação a reconhecer e resolver as dúvidas dos estudantes. Comentou, ainda, que esperava que os alunos colocassem as respostas ao que ela perguntava no *chat* do *YouTube* e, quando essa resposta não chegava, ela entendeu que os alunos não haviam entendido, apesar de esperar bastante tempo, considerando o atraso que poderia haver pela conexão de internet de cada um. E, comentou ainda, que em uma aula presencial essa interação é bem mais rápida e eficiente. P1 concluiu dizendo que o tempo dado por P4 para as respostas dos alunos, foi adequado.

Em seguida, P1 perguntou aos professores convidados quais haviam sido suas impressões sobre introduzir o TP da maneira que foi feito na aula. P6 respondeu que considerou muito interessante e que essa proposta fazia ela pensar na sua própria aula sobre o TP. Nesse sentido, P1 destacou que, durante o planejamento da aula, P4 comentou que não costumava ensinar o TP falando do seu significado geométrico parcial, relação entre áreas de quadrados. P4 acrescentou que, a partir desse momento, faria a adesão ao material e a atividade desenvolvida na aula de pesquisa analisada. P6 acrescentou dizendo que considerou muito interessante o fato de a atividade propor um processo de experimentação. P4 também comentou que, se ela fosse fazer a mesma atividade, depois, em uma aula presencial, com outro grupo de alunos, ela faria a construção da malha quadriculada juntamente com eles, pois considerou que os alunos tiveram pouca autonomia para fazerem a tarefa proposta. P1 complementou a ideia dizendo que os erros que os alunos cometeram eram interessantes, porque permitiam aos professores identificarem quais eram as dificuldades dos estudantes e

complementou dizendo que, em uma aula presencial, os alunos apresentariam as mesmas dificuldades. Por fim, P1 comentou que os erros cometidos faziam parte do processo de ensino e aprendizagem e que era importante salientar que o contexto dos professores que planejaram a aula era de alunos de escolas públicas, que tinham muitas dificuldades e defasagens de conteúdo.

Na continuação da sessão, P5 fez algumas sugestões de como P4 poderia desenvolver essa aula com outros grupos de alunos, por exemplo, colorindo a malha quadriculada para fazer algo semelhante ao que estava proposto no vídeo apresentado na aula do LS. P4 achou válido o que comentou P5 e anotou sua sugestão. Depois, P4 comentou que havia um momento no trecho da aula onde ela cometeu um erro ao dizer que um quadrado tem dois lados e, desta forma, comentou que gostaria de poder voltar ao momento da aula e poder corrigir o seu equívoco.

Na sequência da sessão, P1 retomou os objetivos específicos da aula e reproduziu mais uma parte da gravação em vídeo da aula. Nesse trecho exibido, P4 apresentou um exemplo para os alunos onde eles tinham que calcular a medida de um dos lados do triângulo retângulo conhecendo-se os outros dois.

Durante a aula, os alunos foram colocando suas respostas no *chat* do *YouTube* (Figura 18) e, durante a reflexão da aula, os professores discutiram sobre essas respostas.

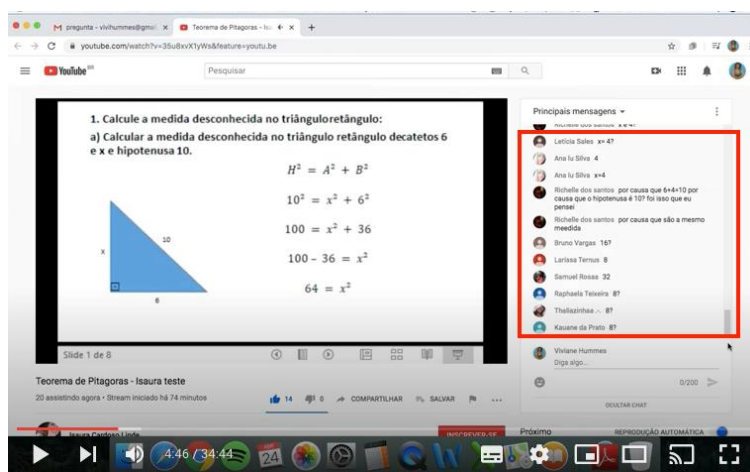


Figura 18. Registro das respostas dos estudantes no *chat* do *YouTube*
Fonte: elaboração própria.

A seguir, os professores comentaram sobre a resposta dada por uma aluna que comentou que x equivalia a quatro, argumentando que seis mais quatro dava dez. Sobre isso,

PI comentou que, provavelmente, a aluna havia entendido que a soma das medidas dos catetos é igual à medida da hipotenusa no lugar de a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Além disso, sobre as respostas que os alunos colocaram no *chat*, PI comentou que a resposta 32 devia ser porque o aluno pensou que era a metade de 64, no lugar de raiz quadrada de 64. Neste momento, P6 questionou o comentário de PI perguntando se a resposta 16 também poderia ter sido em função da pergunta "quanto é 4 ao quadrado?" que P4 havia feito. P1 concordou com a afirmação de P6. P4 comentou que era uma boa observação e PI acrescentou dizendo que realmente poderia ser isso. P1 disse que fazia sentido esse raciocínio, pois P4 havia perguntado quanto era 4 ao quadrado e como o resultado não era 64, imediatamente, outro aluno colocou no *chat* que era 8. PI complementou dizendo que era verdade, porque as respostas 8 vieram quando P4 perguntou qual era o número que elevado ao quadrado dava 64. P4 comentou, também, que, durante o planejamento da aula, os professores haviam antecipado que os alunos poderiam cometer erros relacionados à potenciação, pois isso normalmente ocorria, com base em suas experiências. Assim, P4 acrescentou dizendo que identificou esses tipos de erros também nas respostas dos alunos ao formulário de avaliação. P4 comentou, ainda, que não queria mostrar as fotos da produção dos seus alunos para os demais professores, pois haviam muitos erros dos alunos. P1 comentou que era algo que fazia parte do processo de ensino e, inclusive, sugeriu que P4 perguntasse, também, aos professores participantes do curso, que davam aula em escolas particulares, que nesse caso também os alunos cometem muitos erros.

A seguir na discussão, os professores comentaram que a aula, apesar de ser virtual, havia tido uma boa participação dos alunos. Em vista disso, P5 comparou com a experiência particular que ela estava tendo com suas aulas virtuais e comentou que havia pouca participação dos seus alunos em comparação a aula que estava sendo analisada.

Na sequência da discussão, P8 questionou se, no lugar de resolver equações, devido aos erros que os alunos apresentaram, não seria melhor trabalhar de maneira que ele chamou "mais intuitiva" as equações. Nesse sentido, deu um exemplo, relacionado ao problema que estava sendo analisado "se a soma de um número mais 36 dá 100 que número é esse?". Nessa perspectiva, P5 comentou que considerou que havia muita informação para uma mesma aula e que, dessa forma, era dificultosa para os estudantes. P1 complementou dizendo que, ao longo

da aula, foi possível observar que a participação dos alunos diminuiu, e argumentou que isso devia haver ocorrido, pois os alunos tiveram dificuldades para acompanhar o que estava sendo proposto ao longo de toda a aula. Neste momento, os professores comentaram sobre o tempo da aula que havia sido um bom tempo, mas que havia uma desproporcionalidade entre o tempo da aula e os conteúdos tratados. Nessa perspectiva, P4 falou para os professores convidados, pois já havia comentado com os demais professores, durante o planejamento da aula, que seus alunos não dominavam bem o conteúdo relacionado aos números irracionais, especialmente as operações e, por isso, a conduta da aula foi no sentido de tentar sanar, apesar da falta de conhecimentos prévios dos alunos, essas lacunas para fazer uma amostra mais completa de problemas. Desta forma, os professores comentaram sobre as dificuldades dos alunos em relação a não dominarem as operações com números irracionais e como isso afetou a resolução das atividades propostas.

Na continuação da sessão, P1 reproduziu mais um trecho da gravação em vídeo da aula. Nessa parte da aula exibida, P4 apresentou um exemplo de um problema que era encontrar o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que os dois catetos são unitários, o resultado encontrado é um número irracional, o número raiz de dois, e como os alunos não tinham os conhecimentos prévios necessários sobre o conceito de número irracional, P4 explicou esse conceito durante a aula. Nessa perspectiva, P6 comentou que, se fosse ela a professora que estaria dando a aula, não traria tanta informação para uma mesma aula. Sua eleição seria não colocar exemplos de triângulos retângulos com medidas irracionais. P1 comentou que, durante o planejamento da aula, os professores haviam tido dúvidas se colocariam ou não esse tipo de exemplo na mesma aula. P2 acrescentou dizendo que eles haviam decidido colocar esse tipo de exemplo, pois gostariam de proporcionar uma amostra representativa de problemas de TP, ou seja, queriam apresentar aos alunos, também, exemplos de triângulos retângulos com medidas, além de naturais, irracionais, decimais, etc. Sobre isso, P4 comentou que muitas respostas dos exercícios propostos no formulário de avaliação davam um número irracional e que considerava que isso não deveria ter acontecido, pois a aula havia sido quase em sua totalidade com triângulos retângulos com medidas naturais. P1 ressaltou que, durante o planejamento da aula, os professores haviam pensado em mudar esses

exemplos, a fim de obter apenas resultados números naturais, mas que, depois de discutirem, resolveram arriscar colocar exemplos com resultados irracionais.

Nessa perspectiva, P4 comentou que, muitos alunos, haviam comentado que não queriam enviar a resolução das atividades propostas, pois haviam encontrado muitos "números quebrados" como resposta e, desta forma, pensavam que estariam incorretas. Por fim, P4 comentou que não considerava ruim os professores terem colocado exemplos com números irracionais, mas que achou excessivo o número de exemplos com medidas irracionais no formulário de avaliação. Ainda sobre isso, P8 reforçou o que havia dito P6 no sentido de que considerava que, para uma mesma aula, num mesmo dia, era muita informação e que seria melhor não colocar exemplos com medidas irracionais num primeiro momento. Nesse sentido, P6 complementou dizendo que estava de acordo que se deveria trabalhar uma amostra representativa de exemplos de TP, mas que isso deveria ser feito ao longo de várias aulas e não num primeiro momento. P1 contra argumentou que, durante o planejamento da aula, os professores haviam ficado em dúvida se deveriam fazer realmente tudo numa mesma aula ou se deveriam dividi-la em mais partes e, desta forma, concluiu que considerava que seria necessário dividir a aula em mais tempo. Neste momento, P4 enfatizou que ela mesma nunca colocaria tudo que o foi abordado em uma mesma aula. Nesse sentido, P4 disse, ainda, que, primeiramente, trabalharia bem os conhecimentos prévios necessários, depois seguiria o que foi feito na aula, mas em várias sessões, e complementou enfatizando que os professores fizeram na aula implementada foi tentar colocar tudo aquilo que consideravam importante para o processo de ensino e aprendizagem do TP. P4 terminou contando aos professores convidados que, inclusive durante o planejamento, os professores haviam pensado em colocar ainda mais coisas na aula. Na sequência, os professores comentaram o que haviam considerado, mas que não incluíram na aula por questões de tempo.

A seguir, P1 comentou que, um aspecto interessante a ser observado na aula, é que, por ser uma *live* no *YouTube*, ela ficou gravada em vídeo e que os alunos poderiam assistir quantas vezes fossem necessárias. Nesse sentido, P3 perguntou se P4 teve algum registro de alunos que assistiram o vídeo da aula alguma vez mais. P4 respondeu que sim, pois alguns alunos, que não haviam assistido à aula de maneira síncrona, assistiram depois, pois enviaram o formulário de avaliação resolvido. Além disso, contou o exemplo da mãe de uma aluna que

comentou que a filha estava com dificuldade e P4 destacou que o vídeo da aula estava disponível para assistirem, outra vez, se fosse o caso. Depois disso, a aluna enviou o formulário de avaliação preenchido. Ainda sobre isso, P2 comentou que provavelmente, muitos alunos, haviam assistido outra vez a aula, pois, no momento em que os professores estavam analisando a aula, haviam 180 visualizações do vídeo da aula, registradas no *YouTube*.

Na sequência da sessão, P1 perguntou a P4, se a aula estivesse dividida em dois momentos, onde os exemplos com números irracionais fossem mostrados apenas no segundo, e que no primeiro fossem propostos apenas situações problemas mais simples, os alunos não teriam tantas dificuldades e dúvidas no momento de fazerem o formulário de avaliação. P4 concordou. P2 enfatizou que, no planejamento da aula, os professores consideraram a possibilidade de fazerem a aula em dois momentos, mas concluíram que se fizessem em dois momentos, talvez os alunos não participassem do segundo, considerando-se que era uma aula não obrigatória. P4 destacou, ainda, que, como era uma aula com duração de uma hora e meia, eram praticamente duas aulas. No entanto, salientou que era necessário um tempo maior para a apropriação do conhecimento.

A seguir, devido ao tempo da sessão do curso, PI decidiu não mostrar o trecho restante da aula. Assim, PI sugeriu que, naquele momento, P4 mostrasse os registros das respostas dos alunos sobre o formulário de avaliação. Os professores analisaram as evidências dos estudantes e fizeram alguns comentários relacionados sobre o que os alunos tiveram facilidade e dificuldades e os erros cometidos pelos estudantes. Nesse sentido, comentaram que um retorno sobre os erros que os alunos cometeram deveria ser dado, no sentido de esclarecer as lacunas nas aprendizagens que haviam sido identificadas.

Por fim, P2 perguntou à P4 se ela considerava que o formulário de avaliação havia sido uma ferramenta útil para identificar as aprendizagens dos estudantes. P4 disse que achava que não, pois suspeitava que muitos alunos haviam copiado as respostas um dos outros e que, por isso, não podia avaliar a aprendizagem de todos. P1 complementou, nesse sentido, perguntando se esse problema poderia ser resolvido se o instrumento de avaliação fosse realizado durante a aula. P4 comentou que, numa aula virtual, talvez, fosse melhor utilizar outro meio, onde os alunos pudessem se conectar também com vídeo, pois argumentou que os alunos não estavam habituados a realizarem formulários em modo digital para depois enviar para a professora, que

isso causou um certo estranhamento por parte dos estudantes e deixou-os menos seguro e com medo de enviarem as respostas erradas.

No final da sessão, PI perguntou aos professores se eles consideravam o tempo disponibilizado para a reflexão da aula suficiente, salientando que haveria depois também tempo para realização do redesenho da aula. Nesse sentido, os professores disseram que consideravam o tempo suficiente e que havia sido muito produtiva a sessão. Por fim, PI comentou que, na sessão seguinte, os professores fariam a reflexão da aula implementada no Ensino Médio. Na conclusão da sessão, PI perguntou se P4 havia se sentido desconfortável durante essa sessão do curso, correspondente à etapa de *reflexão da aula* do LS, nesse sentido, P4 comentou o que segue:

P4: Então, eu tive que fazer uma análise, assim, eu mesma. Eu pensei: tá, eu vou receber críticas e eu vou receber elogios e isso vai acontecer. E eu já aceitei. Eu vou fazer essa aula hoje, já tá marcada. E eu fiquei muito feliz, porque eu aprendi muito, em vários aspectos. Estou falando de tecnologia, estou falando sobre uma aula do Teorema de Pitágoras, então, eu acho que o meu sentimento maior foi gratidão por estar aprendendo tanta coisa, assim, nova. E eu até estava assistindo, um pouquinho antes da nossa aula, um vídeo aqui no *YouTube* sobre o *Lesson Study*, que o redesenho e que as críticas não são para o professor, diretamente, e sim para aula. Também, fiquei mais feliz e fiquei mais tranquila. Claro que eu tenho insegurança, sim, não vou mentir que estou supersegura, mas, não foi tão desconfortável, como eu falei anteriormente, o bônus é muito maior.

Para concluir, P1 comentou que P4, inclusive, havia convidado outros professores de sua escola para assistirem a aula e considerou esse fato muito interessante. P2 ressaltou, ainda, o que segue:

P2: Eu acho que, também, foi um exercício de reflexão de todos nós que planejamos a aula, né? Porque todos... porque querendo ou não tem um pouquinho de cada experiência nessa aula. Então, eu acho que foi... para mim foi muito bom, assim, eu gostei bastante.

Concluindo a sessão, PI ressaltou quais seriam as próximas etapas do curso e o que seria abordado nas próximas sessões. Por último, PI perguntou se os professores queriam fazer algum comentário final sobre a sessão e de maneira geral. Desta forma, P3 felicitou P4 pela aula e pela oportunidade. P1 comentou que P4 deveria agradecer aos seus alunos pela participação. PI completou dizendo que o momento era difícil e que, apesar disso, foi possível fazer a aula e, assim, concluiu-se a quinta sessão do curso.

Sessão 6 do curso: Etapa de reflexão da aula do LS da aula no Ensino Médio

A sexta sessão do curso aconteceu no dia 06 de maio de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos. Estiveram presentes todos os professores participantes do curso (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), além de PI, que conduziu o andamento da sessão. Por razões metodológicas desta pesquisa, não se fará a descrição desta sessão, uma vez que, nesta tese somente se teve em conta a reflexão realizada sobre a experiência de LS implementada com o grupo de alunos do Ensino Fundamental.

Implementação da fase 2 do curso: ensino dos Critérios de Adequação Didática (CAD)

Esta fase do curso engloba as sessões 7, 8, 9, 10 e refere-se ao ensino dos CAD aos professores participantes do curso. Na sessão 7, realizou-se uma introdução aos CAD, na sessão 8 trabalhou-se com o CAD epistêmico, na 9 com o cognitivo, na 10 com o afetivo, o interacional, o de meios e o ecológico.

Sessão 7 do curso: Introdução aos Critérios de Adequação Didática (CAD)

A sétima sessão do curso ocorreu no dia 12 de maio de 2020 e teve duração de duas horas e dez minutos. Estiveram presentes os professores P1, P3, P4, P5, P6, P7 e P8, além de PI, que conduziu a discussão. Com a fase 1 do curso completada, isto é, conclusão dos ciclos de LS, nesta sessão, iniciou-se a segunda fase do curso, o estudo dos CAD. Num primeiro momento, PI perguntou aos professores participantes: como deve ser uma boa aula de matemática? Imediatamente, os professores começaram a discutir sobre a questão proposta.

Na sequência da sessão, PI apresentou uma segunda pergunta: que critérios devem ser levados em conta para preparar uma aula sobre o Teorema de Pitágoras? Nessa perspectiva, PI ressaltou que alguns desses critérios haviam sido discutidos, pelo grupo de professores, tanto ao longo das sessões de planejamento da aula de pesquisa desenvolvida por cada um dos grupos, quanto nas sessões de reflexão dessas mesmas aulas. PI destacou ainda, que nesses momentos, o grupo de professores participantes havia estabelecido alguns critérios que deveriam ser considerados na preparação da aula. Continuando a discussão, PI propôs um terceiro questionamento: que critérios devem ser considerados em cada etapa de

desenvolvimento de uma aula de pesquisa no *Lesson Study*? PI lembrou que o ciclo de LS, que havia sido desenvolvido, teve quatro etapas, onde a primeira foi o estudo do tema no currículo e o estabelecimento de metas, a segunda foi o planejamento conjunto de uma aula de pesquisa, a terceira foi a de implementação e observação da aula e a quarta foi a etapa de reflexão crítica conjunta sobre a aula implementada. Para cada etapa do LS, PI ressaltou qual eram os critérios que haviam sido considerados nos ciclos de LS desenvolvidos pelos professores na fase anterior do curso.

Feito isso, na sequência da sessão, PI apresentou algumas evidências de uso implícito dos CAD, observadas nos diálogos das sessões do curso equivalentes às primeiras e segundas etapas do LS desenvolvido pelos dois grupos de professores participantes. A continuação, a cada momento em que PI apresentou uma evidência, pediu que os professores fizessem uma classificação desse indício. O primeiro indício destacado foi o seguinte [disponível a partir do tempo 5:37 da gravação em vídeo da sessão 2 do curso do grupo da aula no Ensino Fundamental]:

P4: Eu queria perguntar o que pode ser considerado nesta aula. Por exemplo, a gente pode considerar projetor, uso de projetor? Ou não, vai ser só quadro?

Após apresentar a evidência esgrimida por P4, na etapa de planejamento da aula do LS desenvolvido, PI perguntou que critério estava implícito na fala de P4. Os professores falaram a respeito, conforme seguinte resposta dada por P5:

P5: As ferramentas. Ela está considerando que tipo de ferramentas que ela vai usar para desenvolver a aula dela, eu acho. Eu não sei se é um critério.

A seguir, PI comentou que o comentário observado tinha relação com o critério "recursos materiais" e ressaltou que era uma outra forma de dizer "ferramentas". Na sequência desta sessão, PI explicou que, para cada evidência que seria destacada, depois da resposta dada pelos professores, destacar-se-ia uma expressão em vermelho, no slide do *PowerPoint* apresentado na aula, que seria o critério atribuído por PI (Figura 19) e pediu aos professores que fossem registrando essas expressões, destacadas ao longo da sessão.

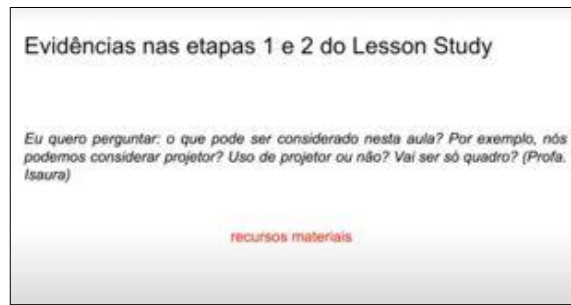


Figura 19. Slide da apresentação de evidência de uso implícito do CAD na sessão 7 do curso
Fonte: elaboração própria

Dando sequência a sessão, PI apresentou a seguinte evidência:

P1: Eu trabalho o Teorema de Pitágoras entre o oitavo e o nono ano. Então, dependendo do ano, eu trabalho de uma determinada forma. Eu já introduzo no oitavo ano. Agora, este ano, por exemplo, a gente começou com a BNCC e eu tive que adaptar o meu planejamento. Então, não é mais o mesmo planejamento que eu fazia anteriormente. Eu não sei se para os colegas também foi assim.

Em relação a evidência destacada, os professores disseram que teria relação com o currículo. A expressão específica usada por PI foi "adaptação ao currículo". Em seguida, PI apresentou a próxima evidência, conforme segue:

P6: E tem outra coisa também, antes de entrar no TP, tem que rever com eles toda a questão do triângulo retângulo, porque a grande maioria não sabe o que é hipotenusa e o que são os catetos do triângulo retângulo.

P4 usou a expressão "pré-requisitos" para expressar o critério que estaria em questão no comentário de P6, os demais professores concordaram. PI destacou que se tratava dos "conhecimentos prévios". A próxima evidência destacada foi a seguinte:

P4: Eu geralmente dou no nono ano e começo definindo o que é um triângulo retângulo, o que é hipotenusa e catetos, para poder falar depois do Teorema.

Mais uma vez, os professores associaram, também, essa evidência com os "conhecimentos prévios". A seguir, PI comentou que, além dessas duas evidências destacadas, que demonstram a preocupação com os conhecimentos prévios dos alunos, em muitos outros comentários realizados pelos professores na fase de LS, identificou-se a ideia de considerar os "conhecimentos prévios" para o ensino do TP. E destacou que uma razão para isso poderia ser que, durante a formação dos professores, seja ela inicial ou continuada, se estabeleceu um

consenso que considera necessário que os alunos, para aprenderem um determinado conceito, necessitam de um conjunto de conhecimentos anteriores.

A seguir, PI apresentou a seguinte evidência:

P1: E lá nos números irracionais do oitavo ano, tu já não trabalhas um pouco do Teorema de Pitágoras? Por exemplo, para chegar a raiz de dois ou a raiz de três, raiz de quatro [...]

Os professores participantes responderam dizendo que se tratava de uma "conexão entre os conteúdos". PI destacou, ainda, que seria uma "conexão intra-matemática". Na sequência da sessão, os professores fizeram uma pequena discussão a esse respeito. A seguir, PI destacou outra evidência:

P6: Eu acho que esse tem que ser, sei lá, pelo menos para mim, o foco da aula. Fazer eles perceberem que eu posso aplicar o TP em diversas circunstâncias. Fazer eles enxergarem o triângulo retângulo em diferentes situações. Porque é uma coisa que não acontece muito, no geral, em matemática, nas aulas de matemática. Porque eles estão acostumados "bom, agora a gente tá vendo o TP, então eu sempre vou usar o TP", fugiu disso, não existe mais o Teorema.

Após exibir o comentário realizado por P6 na etapa de planejamento da aula, PI perguntou aos participantes qual seria o critério implícito na evidência apresentada. Imediatamente os professores disseram que se tratava, também, das "conexões intra-matemáticas".

Na sequência da sessão, PI apresentou muitas evidências identificadas nas etapas de *planejamento da aula* e *reflexão da aula* dos ciclos de LS desenvolvidos e, para cada uma, os professores participantes foram discutindo e registrando quais os critérios que estariam implícitos em cada comentário destacado.

Após apresentar e discutir com os participantes muitas evidências do uso implícito de alguns critérios usados pelos professores, nas etapas dos LS desenvolvidos na primeira fase do curso, na sequência da sessão, PI levantou as seguintes questões: como deve ser uma boa aula (ou uma sequência de aulas) de matemática?; que critérios usamos para justificar que houve (ou poderia haver) uma melhora nos processos de ensino e aprendizagem da matemática?

Para dar resposta a essas perguntas, PI comentou que considera-se que existem duas perspectivas. Uma delas seria a perspectiva positivista e a outra seria a perspectiva consensual. Para explicar o que seria a perspectiva positivista, PI destacou o que P1 falou, na etapa de *planejamento da aula* do LS, sobre a geração da BNCC, destacando que, em sua origem, o

referente curricular citado, deveria ser o produto de uma discussão ampla e exaustiva entre professores, pesquisadores de distintas subáreas da educação, instituições educativas, etc. Mas, na prática, essa discussão não ocorreu de maneira completa e exaustiva e, por questões de tempo, ela foi elaborada por um grupo menor e, de certa maneira, imposta como um referencial curricular obrigatório. E, nesse sentido, quando os critérios usados para justificar a qualidade dos processos de ensino e aprendizagem são prescritos de maneira impositiva, seja por meio de leis, de currículos obrigatórios exigidos por uma determinada instituição de ensino ou, ainda, por resultados de uma única pesquisa acadêmica (por exemplo, uma única tese de doutorado que indica o que se deve considerar no processo de ensino aprendizagem de determinado tema escolar), trata-se de uma perspectiva positivista, uma perspectiva "imposta".

Por outro lado, em uma perspectiva consensual consideram-se os resultados de amplas e exaustivas discussões e pesquisas realizadas por professores, instituições educativas, especialistas em educação matemática, especialistas em teorias cognitivistas, especialistas em educação especial e inclusiva, especialistas em educação em geral, etc. sobre quais parâmetros, orientações ou critérios devem ser considerados no processo de ensino e aprendizagem de determinado tópico da matemática escolar.

A seguir, P1 afirmou que, sob a ótica da perspectiva consensual, estavam posicionados os CAD. Continuando, P1 argumentou dizendo que os CAD haviam sido estabelecidos através de um consenso que, *a priori*, são princípios de como dever-se-ia fazer as coisas e que, *a posteriori*, servem para validar o processo de estudo efetivamente implementado. Nesse momento, P5 comentou que, algo que fazia falta em sua atividade docente, era tempo para analisar suas aulas implementadas, argumentando, por exemplo, que ela apenas avaliava o "resultado" de suas aulas quando corrigia os exames de avaliação aplicados aos seus alunos, no final do processo de ensino aprendizagem. Nessa perspectiva, a professora P5 comentou que o exercício que ela estava fazendo, participando do curso, era algo que não costumava fazer na sua prática profissional. A seguir, P4 elogiou o comentário realizado por P5 e, na mesma perspectiva, P4 e P1 comentaram que, se fosse possível realizar o mesmo exercício de reflexão que os professores estavam fazendo no curso, a qualidade da educação brasileira seria outra. A seguir, P1 comentou, ainda, que, sem dúvida, o Japão tinha uma educação de qualidade reconhecida mundialmente porque utilizava o LS como estratégia de

desenvolvimento profissional docente. À vista disso, P8 disse que, em geral, a realidade dos professores, era avaliarem suas aulas por meio de resultados de avaliações dos alunos, no lugar de avaliarem o processo de maneira completa. A seguir, P1 comentou que as escolas, onde os professores participantes desempenham sua profissão, ainda, possuem um sistema educacional "do século passado".

A seguir, PI destacou que, a partir daquele momento do curso, os professores estudariam os CAD, destacando que os CAD haviam sido estabelecidos por meio de consensos de como dever-se-ia desenvolver um processo de ensino aprendizagem de matemática. Nesse sentido, P8 perguntou se os CAD estariam dentro do contexto LS ou em um contexto de uma aula de matemática em geral. O questionamento de P8 possibilitou a PI dizer aos professores que os CAD era uma ferramenta que fazia parte da abordagem teórica conhecida como Abordagem Ontosemiótica do Conhecimento e a Instrução Matemática (AOS) e que, com as evidências identificadas nas etapas dos ciclos de LS desenvolvidos, destacadas nesta sessão do curso, PI queria mostrar aos professores que os CAD funcionam como regularidades no seu discurso, mesmo antes de terem aprendido essa ferramenta que poderia orientar suas reflexões.

PI destacou, ainda, que, neste curso, os CAD seriam ensinados a partir de processos de instruções que haviam sido desenvolvidos no contexto de um LS, mas que normalmente não eram ensinados assim.

Na sequência da sessão, PI destacou os Princípios e Estandartes do Conselho Nacional de Professores (NCTM) - maior organização de ensino de matemática do mundo, como um exemplo de um conjunto de critérios que haviam sido elaborados com base em um consenso. A seguir, PI explicou que os CAD haviam sido estabelecidos considerando-se o que dizem as tendências em educação matemática, os princípios do NCTM e os conhecimentos e resultados gerados pela comunidade científica.

A continuação, PI comentou que os CAD estavam organizados em seis dimensões, justificando que uma delas referia-se a que, quando pensamos em como deve ser uma aula de matemática, algo que devemos ter em conta é que a matemática que vamos apresentar deve ser de qualidade, ou seja, quando o professor questiona se fez uma boa aula, ele deveria perguntar-se "eu ensinei uma matemática adequada?". A seguir, PI contou que uma outra dimensão dos CAD estava relacionada com a pergunta "os alunos aprenderam com as tarefas

propostas?", ou seja, um aspecto que indica a aprendizagem dos estudantes, a dimensão cognitiva. Depois, PI comentou, ainda, que, para ter uma boa aula de matemática, dever-se-ia pensar nos meios para isso, ou seja, a pergunta que deveria ser feita seria: "eu utilizei recursos, materiais, TIC, etc. adequados?". Continuando, PI disse que uma outra dimensão dos CAD estava relacionada com a pergunta "as tarefas e sua gestão promoveram o envolvimento dos alunos?". E, completando as seis dimensões dos CAD, PI disse que as outras duas estavam relacionadas com as perguntas "fiz uma gestão adequada da interação da turma que permitiu resolver as dificuldades dos alunos?" e "os conteúdos correspondem ao currículo e são úteis para sua inserção social e trabalhista?".

Após expor as seis perguntas relacionadas com cada uma das dimensões dos CAD, PI pediu aos professores que classificassem as expressões em vermelho, relacionadas com cada uma das evidências destacadas no começo desta sessão do curso, de acordo com cada uma das seis perguntas.

Para exemplificar, PI retomou a expressão "uso de recursos materiais" e perguntou com qual das perguntas elencadas ela estaria melhor associada. Imediatamente, PI respondeu que em relação à pergunta 3. A seguir, os professores, em conjunto, foram dizendo, uma de cada vez, as expressões registradas e associando com cada uma das perguntas. Durante a discussão, PI foi registrando cada expressão falada como resposta à pergunta associada (Figura 20).

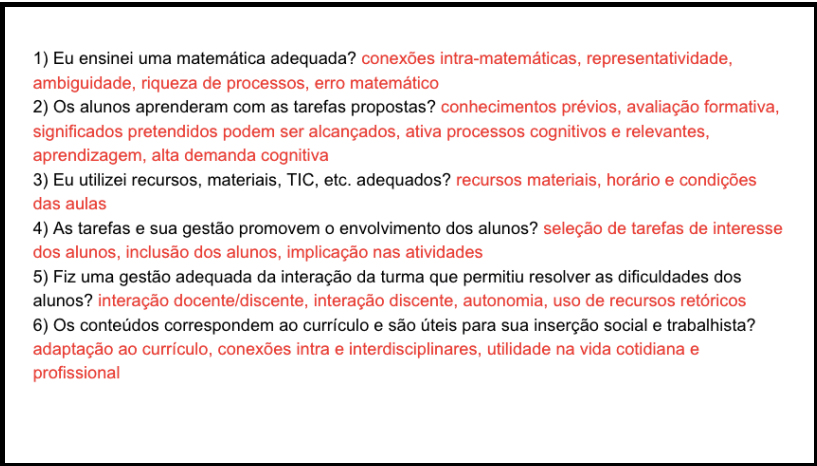
- 
- 1) Eu ensinei uma matemática adequada? conexões intra-matemáticas, representatividade, ambiguidade, riqueza de processos, erro matemático
- 2) Os alunos aprenderam com as tarefas propostas? conhecimentos prévios, avaliação formativa, significados pretendidos podem ser alcançados, ativa processos cognitivos e relevantes, aprendizagem, alta demanda cognitiva
- 3) Eu utilizei recursos, materiais, TIC, etc. adequados? recursos materiais, horário e condições das aulas
- 4) As tarefas e sua gestão promovem o envolvimento dos alunos? seleção de tarefas de interesse dos alunos, inclusão dos alunos, implicação nas atividades
- 5) Fiz uma gestão adequada da interação da turma que permitiu resolver as dificuldades dos alunos? interação docente/discente, interação discente, autonomia, uso de recursos retóricos
- 6) Os conteúdos correspondem ao currículo e são úteis para sua inserção social e trabalhista? adaptação ao currículo, conexões intra e interdisciplinares, utilidade na vida cotidiana e profissional

Figura 20. Quadro com perguntas e respostas associadas a cada uma das dimensões dos CAD
Fonte: elaboração própria.

Após a conclusão do exercício proposto, PI apresentou uma ilustração (Figura 21) que mostra os CAD organizados a partir do uso da metáfora de um hexágono regular para representar suas seis dimensões.

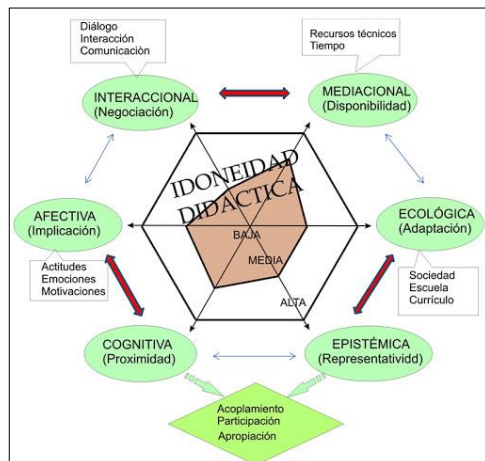


Figura 21. Hexágono regular dos CAD apresentado aos participantes do curso.
Fonte: Godino (2013).

Com base nessa ilustração, PI explicou que a primeira pergunta estava relacionada com a dimensão epistêmica, a segunda com a cognitiva, a terceira com a de meios, a quarta com a afetiva, a quinta com a interacional e a sexta com a ecológica. Na sequência, PI explicou que, no AOS, usava-se essa metáfora do hexágono regular, pois num processo de ensino aprendizagem da matemática deve-se observar as seis dimensões assinaladas, em cada um dos vértices do hexágono regular, e que o professor deve ser uma espécie de malabarista ou equilibrista, pois é ele quem dará mais ou menos ênfase a uma dimensão ou outra, de modo a estabelecer um equilíbrio entre as dimensões do CAD, considerando o contexto.

A seguir, PI exemplificou dizendo que o professor não pode pensar em uma aula de matemática considerando o nível mais alto da dimensão epistêmica se os alunos não aprenderem na mesma proporção. Ou ainda, pensar numa aula que tenha muita qualidade matemática, que os alunos aprendam, mas que terminam rejeitando ou não entendendo a sua utilidade. Da mesma forma, o professor pode fazer uma aula onde a matemática é de qualidade e os alunos aprendem e gostam, mas não tem os meios adequados para isso ou, ainda, o horário e as condições da aula são inadequados. Neste momento, P8 comentou que havia uma relação entre cada uma das dimensões dos CAD e, exemplificou, dizendo que seria muito provável

que os alunos gostariam de uma aula de matemática se o professor fizer uso de recursos interessantes, que tenha qualidade matemática, que os alunos percebam a utilidade do que estão estudando, etc. A continuação, PI explicou que o professor é quem deve procurar este equilíbrio entre cada uma das dimensões dos CAD e comentou, ainda, que essa não era uma tarefa fácil.

A seguir, PI comentou que, para melhorar a operacionalização dos CAD, cada dimensão está organizada em componentes e indicadores. E, destacou ainda, que, de maneira geral, entende-se que é necessário ensinar "boa matemática", mas cada professor pode entender coisas diferentes por "boa matemática". Nesse sentido, os componentes e indicadores de CAD se fazem necessários para dar uma direção do que realmente é uma "boa matemática". PI destacou, também, que, para alguns CAD, é fácil encontrar um consenso e deu, como exemplo, o componente do CAD de meios relacionado ao tempo da aula, amplamente discutido pelo grupo de professores.

Na sequência da sessão, PI apresentou um quadro para cada um dos CAD e descreveu os seus componentes e indicadores. Desta forma, PI destacou, mais uma vez, que a razão para a presença de tantas evidências de uso implícito dos componentes e indicadores de cada uma das dimensões dos CAD, identificadas na reflexão dos professores na fase de LS, é porque eles foram estabelecidos a partir de consensos das tendências em Educação Matemática, que foram trabalhadas na formação inicial ou continuada dos professores, por meio de cursos de formação ou pelas experiências vivenciadas durante a prática profissional. A continuação, PI explicou de modo detalhado uma tabela que apresentava os componentes e indicadores do CAD Epistêmico (ver quadro 1).

Logo depois, PI apresentou os quadros de cada uma das demais dimensões dos CAD,, cognitivo, de meios, interacional, afetivo e ecológico. Em seguida, PI perguntou se os professores haviam identificado algum componente ou indicador de algum CAD que não tivesse sido evidenciado nos comentários da reflexão dos professores, destacados na primeira parte da sessão 7. P5 comentou que os professores não haviam considerado em sua reflexão anterior a "adaptação curricular às diferenças individuais", componente do CAD cognitiva. Alguns professores concordaram e P5 comentou, ainda, que se a aula tivesse sido desenhada para ser realizada de maneira presencial, talvez, esse componente pudesse ter sido atendido.

Nesse sentido, PI destacou que, para um redesenho, isso poderia ser considerado, na tentativa de aumentar o nível cognitivo da aula.

Apesar de ser o primeiro contato dos professores com os quadros que apresentavam os componentes e indicadores de cada CAD, naquele momento, os professores fizeram algumas reflexões sobre os processos de ensino aprendizagem realizados por eles na fase de LS do curso. Na continuação da sessão, observando-se o quadro dos componentes e indicadores do CAD interacional, PI comentou que ele estava pensando, para uma aula presencial, e que, talvez, devido ao contexto de pandemia vivenciado naquele momento, alguns elementos desse critério deveriam ser repensados, considerando-se as diferenças entre o espaço de sala de aula presencial e o virtual.

Finalizando a sessão, PI enfatizou, mais uma vez, que, *a priori*, os CAD são úteis no planejamento da aula, pois auxiliam os professores em como fazer as coisas, e dão uma pauta de que critérios devem ser considerados em uma aula de matemática. Por outro lado, *a posteriori*, os CAD servem para avaliar o processo de ensino e aprendizagem implementado e pensar em que aspectos podem ser melhorados para um redesenho da aula.

Por fim, PI comentou qual seria a agenda para as próximas sessões do curso e que, desde aquele momento, o grupo inteiro de professores participantes continuaria discutindo conjuntamente em uma mesma sessão semanal. Além disso, o grupo combinou alguns detalhes relacionados a essa programação.

Terminado a sétima sessão do curso, P6 comentou que considerou os CAD muito interessantes e, nesse sentido, P1 perguntou a razão dos CAD não terem sido ensinados antes, pois os professores já poderiam fazer uso deles durante os ciclos de LS desenvolvidos. Nesse sentido, PI justificou dizendo que, o objetivo da primeira fase do curso, fase de desenvolvimento dos ciclos de LS, era obter evidências do uso implícito dos CAD, de modo a explicar aos professores a ideia de que os CAD são consensos. Por fim, P4 comentou que, muitas vezes, se sentia "perdida" nos momentos em que planejava suas aulas e que os CAD poderiam muito bem servir para guiar a sua prática. Nessa perspectiva, P1 concluiu "ele dá um norte".

Sessão 8: Estudo do CAD Epistêmico

A oitava sessão do curso ocorreu no dia 19 de maio de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos. Estiveram presentes os professores P1, P2, P4, P5, P6, P7 e P8. Além de PI, participaram desta sessão, também, a professora Dra. Adriana Breda, como ministrante do curso, e o professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva como ouvinte.

A professora Adriana iniciou a sessão lembrando que, na primeira fase do curso, os professores participantes desenvolveram, paralelamente, dois ciclos de LS. A professora convidada também lembrou que, em ambos os ciclos desenvolvidos, o tema central escolhido havia sido o TP. Adriana destacou, também, que, até aquele momento, havia assistido todo o conjunto das gravações em vídeo das sessões do curso e que inclusive a aula no Ensino Fundamental ela havia assistido de maneira síncrona pela plataforma *YouTube*. Sobre a aula no Ensino Médio, afirmou, ainda, que também havia assistido o vídeo da implementação.

A seguir, Adriana destacou que, o grupo de pesquisa da UB, onde esta pesquisa de doutorado estava sendo desenvolvida, trabalhava muito com a abordagem teórica AOS e que uma das ferramentas que o AOS oferece são os CAD, que, *a priori*, são úteis para o desenho de um processo de ensino e aprendizagem. E, *a posteriori*, servem para avaliar esse processo de instrução indicando elementos para seu redesenho. Adriana destacou, ainda, que os CAD ajudam a melhorar a reflexão do professor sobre a sua prática e, também, sobre a prática alheia, uma das metas do curso de extensão que estava sendo desenvolvido e ao qual os professores estavam participando.

Na sequência, Adriana destacou que a ideia do curso era, a partir daquele momento, fazer o estudo detalhado de cada um dos seis CAD, iniciando pelo CAD epistêmico, considerado um dos mais importantes e densos. Adriana sinalizou que era possível encontrar pesquisas acadêmicas brasileiras onde os CAD serviam como uma ferramenta de análise de um processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Adriana comentou que nessas pesquisas o termo *idoneidad* (em espanhol) havia sido traduzido como adequação. Ou seja, comentou que os *Criterios de Idoneidad Didáctica* (em espanhol) haviam sido traduzidos para Critérios de Adequação Didática (em português), pois a palavra adequação teria o mesmo significado da palavra *idoneidad* em espanhol.

Logo depois, Adriana lembrou as questões que haviam sido propostas por PI na sessão anterior: "como deve ser uma (boa) aula (sequência de aulas) de matemática?"; que

critérios usamos para justificar que houve/ou poderia haver nos processos de ensino aprendizagem de matemática?". E, a seguir, Adriana acrescentou uma nova pergunta: como deve ser um "bom" professor de matemática? Seguidamente, Adriana lembrou que os CAD "nasceram" de três elementos importantes. O primeiro deles, seria as tendências globais no ensino de matemática, por exemplo, uso de tecnologias, modelagem matemática, resolução de problemas, princípio da equidade (todos devem saber um mínimo de matemática), etc. Outro elemento são os conhecimentos gerados pelos resultados de investigações da comunidade científica, como por exemplo, assumir em uma aprendizagem determinada avaliação formativa ou uma aprendizagem autônoma construtiva - relacionada com os estudos desenvolvidos por Piaget. Adriana destacou que, esse último, é um consenso, mas que também é um resultado de uma pesquisa científica. E outro elemento importante são os princípios dos NTCM (2000), produto de um consenso de uma comunidade educativa em geral (professores, pais, alunos, gestores da escola, etc.). E, concluiu, dizendo que os CAD foram constituídos a partir desses três elementos.

Na sequência, Adriana destacou, uma vez mais, a figura do hexágono regular que representa as seis dimensões dos CAD, consideradas as seis faces da atividade matemática que ocorre em uma sala de aula. Nesse sentido, destacou, mais uma vez, que há uma dimensão, relacionada à matemática (epistêmica); outra relacionada à aprendizagem dos alunos (cognitiva); outra relacionada às emoções dos alunos (afetiva); outra relacionada à gestão da sala de aula, ao contrato didático que existe entre professor e aluno (interação); outra relacionada aos recursos que devem ser escolhidos para a realização da aula (meios); e, por último, uma relacionada ao entorno, o currículo, ao contexto escolar, contexto social e cultural (ecológica).

Logo após, Adriana comentou que a pergunta "como deve ser um "bom" professor de matemática?" havia sido também colocada para muitos outros professores que participaram de cursos de formação em distintos países, e deu como exemplo o Equador, o Brasil e a Espanha. Desta forma, a professora destacou algumas respostas interessantes observadas nesses cursos: "o professor é o maestro de uma orquestra"; "o professor é quem tem o plano de seguir"; "o professor é o guia"; "o professor é um treinador"; "o professor é arquiteto"; "o professor é um chefe de restaurante"; "o professor é um planejador"; "o professor é um motivador"; "o

professor é um treinador"; "o professor é um ator de teatro (dramaturgo, etc.)"; "o professor também é alguém que precisa adaptar-se ao contexto"; "o professor é um equilibrista"; "o professor é um malabarista"; "o professor é um super-homem/super-mulher". A professora concluiu destacando a metáfora de que o professor deve ser uma junção de malabarista e equilibrista, pois, como o malabarista, manipula objetos com agilidade e precisão, e, como o equilibrista, mantém esses objetos em equilíbrio.

Nessa perspectiva, Adriana comentou que, quando o professor se baseia em um conjunto de princípios de critérios para guiar os processos de ensino e aprendizagem de matemática, ele deve considerar o contexto. Por exemplo, o professor pode elaborar uma aula muito rica em termos matemáticos e isso pode ser muito bom. Mas, essa aula pode estar inserida em um contexto, onde os alunos não conseguem desenvolver atividades ricas em processos matemáticos, por razões relacionadas a esse contexto, por exemplo, de alguma vulnerabilidade social, que provoca questões emocionais que causam rejeição ou fobia às matemáticas. Dessa forma, se o professor conseguir melhorar as questões relacionadas à afetividade e aos interesses dos alunos, talvez, os alunos possam resolver esse tipo de atividade matemática. Sob essa ótica, o professor deve estar sempre buscando um equilíbrio entre os critérios que orientam o processo de ensino e aprendizagem.

Continuando, Adriana comentou que, para ter uma "boa" aula ou ser um "bom" professor de matemática, é necessário que se sigam alguns princípios ou critérios nos processos de ensino e aprendizagem de matemática. Esses critérios, provenientes de consensos da comunidade de educação, devem ser usados com um certo "equilíbrio". Assim, dentro de um determinado contexto particular, pode surgir algum outro critério que possa ser próprio de tal contexto. De forma geral, um dos princípios que se deve ter em conta, para se ter uma "boa aula de matemática", é considerar que a matemática que vamos ensinar seja idônea ou adequada.

Continuando, Adriana explicou que, dentre os seis princípios dos CAD, um deles tem a ver com o fato de que se o professor quer dar "uma boa aula de matemática" ele deve ensinar uma matemática adequada para os alunos com os quais o professor irá trabalhar. Nessa perspectiva, Adriana questionou "o que significa ensinar uma matemática adequada ou ensinar uma boa matemática?". Podem existir diferentes opiniões sobre o que seria uma boa

matemática, mas os CAD indicam, a partir da ideia de consenso, que essa matemática deve ser isenta de erros. Ou seja, o professor que estará ensinando, ou o material que ele estará usando, deve ser isento de erro matemático. A professora observou, ainda, que esse erro não se refere ao erro que pode ser cometido pelo aluno, trata-se do erro cometido pelo professor ou do erro cometido pelo aluno e considerado correto pelo professor. Ressaltou, também, que nos cursos que ensinam os CAD, um dos primeiros critérios utilizados é averiguar se na prática analisada o professor que implementou a aula cometeu algum erro do ponto de vista da matemática.

O segundo aspecto do CAD epistêmico, destacado por Adriana, foi a ideia de que o professor em sua prática deve apresentar o menor número possível de explicações ambíguas, que podem gerar uma confusão ou ambiguidade no entendimento por parte dos estudantes. A professora comentou, também, que algumas vezes, o professor tem um modo de explicar determinado conceito que pode gerar uma compreensão equivocada por parte dos alunos. Destacou, também, que era tarefa difícil o professor, em aula, não cometer alguma ambiguidade, mas que é muito importante cometer o mínimo de explicações ambíguas possíveis. Ou, para o caso em que o professor cometer uma ambiguidade, explicar que a explicação que ele acaba de dar, pode gerar determinado entendimento equivocado.

Além disso, Adriana ressaltou que uma aula que tenha uma boa matemática deve apresentar processos relevantes na atividade matemática, que promovem atividades ricas, que implicam em processos importantes cognitivos dos estudantes, componente que também seria tratado nesta sessão do curso.

Por fim, ressaltou que o quarto componente do CAD epistêmico, um dos mais importantes desde a perspectiva do AOS que indica que a matemática que o professor pretende ensinar deve oferecer uma amostra representativa da complexidade da noção matemática ou do conceito que se quer ensinar. Adriana terminou esta parte da sessão, dizendo que os quatro elementos citados eram importantes para trabalhar-se uma matemática adequada.

No momento seguinte do curso, Adriana começou a explicar, de forma mais detalhada, o componente do CAD epistêmico "erros" e seus respectivos indicadores: a) erro cometido pelo professor; erro validado pelo professor (o erro está no livro ou na produção dos alunos e o professor não corrige ou o erro é cometido pelo aluno e o professor o valida).

Para começar, Adriana ressaltou, uma vez mais, que, nesse caso, tratavam-se dos erros cometidos pelo professor e não pelos alunos. Nesse sentido, explicou que os erros do professor podem ser classificados de duas maneiras. Uma, estaria relacionada aos erros matemáticos cometidos em uma explicação que o professor faz e, a outra, seria em relação aos erros validados pelo professor. Para esse último caso, a professora deu o exemplo do erro estar no livro didático ou na produção do aluno e o professor não fazer a correção, ou ainda, o erro é cometido pelo aluno e o professor o convalida.

Na sequência da sessão, Adriana explicou que o erro também poderia ser classificado como a causa, ou seja, o professor pode se confundir, no momento de uma determinada explicação, e até mesmo corrigir esse erro quando o perceber depois. Destacou, ainda, que a causa do erro também pode se dar pela falta de conhecimento matemático relacionado a um conceito determinado que ele quer ensinar e, nessa perspectiva, enfatizou que, por exemplo, muitas pesquisas acadêmicas, que tratam do professor de anos iniciais, indicam que, muitas vezes, esses professores não têm um conhecimento aprofundado sobre determinados objetos matemáticos que eles tem que ensinar na escolas, devido à sua formação que é generalista.

Uma terceira razão para que o professor cometa "erros", seria porque os alunos estão muito inquietos ou agitados e essa situação distrai o professor. Neste caso, Adriana apresentou uma evidência, identificada em um curso de formação de professores em Catalunha, Espanha, conforme a seguinte fala, relacionada a prática do professor, no momento em que ele desenvolvia seu estágio: "durante o desenvolvimento das práticas, houve um pequeno erro de linguagem e um pequeno erro matemático, ao corrigir um exercício, causado por não estar focado porque os alunos estavam inquietos".

A seguir, Adriana destacou que os erros também poderiam ser classificados de acordo com o conteúdo. Nesse sentido, o professor pode cometer um erro quando ele propõe que os alunos resolvam uma determinada situação problema que é incoerente, por exemplo, no lugar de usar a terna pitagórica 3, 4 e 5 propõe um problema onde, a partir da "terna pitagórica" 4, 4 e 5, os alunos precisam encontrar outras ternas pitagóricas. Além desse erro, relacionado ao conteúdo, Adriana citou o erro de representação. Para explicar esse tipo de erro, a professora convidada apresentou um vídeo do *YouTube* (disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=BTkSDsIIGEE>) em que um professor apresenta uma demonstração do TP. Nesse

vídeo, todas as representações icônicas, desenhos que o professor realiza na aula, estão incorretas. Nessa aula, o professor não desenha um triângulo retângulo, por exemplo (Figura 22), aliás nem um triângulo ele desenhou.

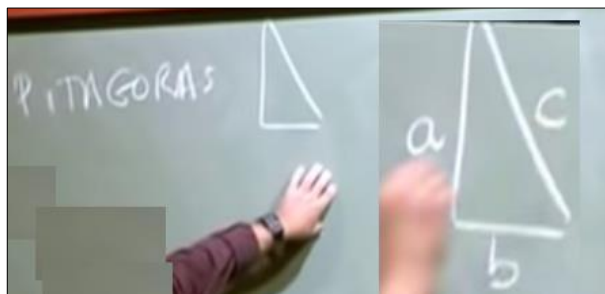


Figura 22. Representação icônica do triângulo apresentada por Adriana
Fonte: Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=BTkSDsI1GEE>>

Durante o processo de demonstração, o professor comete um erro de representação, coisa que acontece frequentemente em sala de aula, pois, muitas vezes, as ferramentas corretas para fazer as construções geométricas adequadas não são utilizadas. No entanto, numa aula de matemática, muitas vezes, a representação visual é corrigida pela representação verbal, linguística, ou seja, apesar do professor fazer uma representação visual incorreta, o professor compensa essa falha com o discurso, pois enuncia de maneira correta os conceitos matemáticos que está utilizando. No entanto, se o aluno se fixar apenas na representação visual, entenderá de maneira incorreta o conceito que se quis ensinar.

Logo depois, Adriana comentou que outro tipo de "erro" é o erro de definição. No caso particular do TP, a professora convidada comentou que é muito difícil que aconteça um erro de definição desse Teorema. No entanto, o que pode acontecer é que, o aluno que está aprendendo este conceito novo, tenha um conceito anterior de maneira incorreta, por exemplo, definição incorreta de triângulo, de hipotenusa e cateto, etc. ou bem uma ideia errada sobre o que é o TP, um dos poucos Teoremas cuja demonstração é acessível para alunos do nível básico do ensino.

A seguir, Adriana explicou o erro na proposição, isto é, por exemplo, enunciar de maneira incorreta o TP. Ressaltou que não é comum acontecer esse erro no ensino do TP e que se ele ocorrer, provavelmente, ele será rapidamente corrigido pelo professor. Outro erro seria o erro de procedimento, nesse caso, a professora destacou que o TP não é um procedimento,

mas ele permite gerar um procedimento para calcular a medida de um dos lados do triângulo conhecendo-se os outros dois, por exemplo. Geralmente, esse tipo de erro são distrações que o professor corrige imediatamente.

A seguir, Adriana comentou que havia destacado exemplos de erros que podem ocorrer no ensino do TP, já que o grupo de professores participantes havia desenvolvido, durante a primeira fase do curso, processos de instrução relacionados a esse tema. Por último, a professora convidada apresentou o erro por demonstração. Nesse sentido, questionou os professores participantes se demonstrar era o mesmo que mostrar o TP a partir da generalização do TP, a partir de alguns casos particulares, que era o que os professores haviam realizado na aula do LS no Ensino Fundamental. Além disso, a professora convidada destacou que no Ensino Básico não são feitas demonstrações tão rigorosas, mas é importante que os professores comentarem com os alunos que o termo "Teorema" indica que há uma demonstração por trás. E destacou, ainda, que uma demonstração do TP não é o mesmo que fazer uma verificação para um caso particular, e que isso pode gerar um entendimento incorreto por parte dos alunos, que poderiam entender que uma verificação do TP para alguns casos particulares, seria o mesmo que uma demonstração.

Na sequência do curso, Adriana apresentou alguns exemplos de verificações do TP que são tratadas como demonstrações. Dois exemplos apresentados foram os vídeos do *YouTube*, disponíveis em https://www.youtube.com/watch?v=r_BmG03hwe8Q e em <https://www.youtube.com/watch?v=uAysIFmOSBA>. Em ambos os casos, realiza-se uma verificação da relação de igualdade existente entre as áreas dos quadrados de lados equivalentes aos lados do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, com o auxílio de material manipulativo. Nos dois casos a verificação do TP para o caso particular é considerada como a demonstração do TP.

Após isso, a professora comentou que poder-se-ia fazer uma demonstração do TP a partir de um elemento genérico. Para isso, Adriana apresentou, como exemplo, a demonstração geométrica do TP disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=oqbCJb6AzzU> e a demonstração algébrica do TP disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=fvj6jIbJkvI>. Concluindo, a professora comentou que

dever-se-ia tomar o cuidado de, no momento que se faça uma generalização do TP, a partir de um caso particular, não considera-lo uma demonstração, mas sim uma comprovação.

A continuação, Adriana apresentou um exemplo de definição de função logarítmica (Figura 23) e pediu aos professores participantes do curso que identificassem e classificassem o erro.

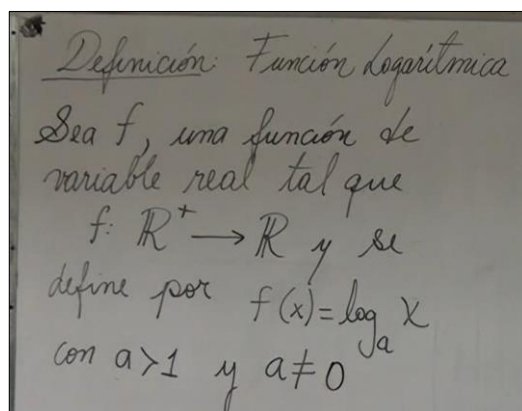


Figura 23. Exemplo de definição de função logarítmica apresentado na sessão 8

Fonte: elaboração própria.

A seguir, P5 respondeu dizendo que o primeiro erro que havia identificado estava relacionado com o enunciado, se a é maior que um ($a > 1$), obviamente, a é diferente de zero. P6 complementou dizendo que havia observado o mesmo erro. Nesse sentido, Adriana perguntou: "e se fosse o contrário? Se a fosse maior que zero e diferente de um, estaria correto?". P5 respondeu que sim. Adriana complementou dizendo que, realmente, esse era o erro e que se tratava de um erro de definição, onde o professor havia definido de maneira equivocada a função logarítmica e, em particular, o erro se encontrava nos critérios estabelecidos para a base da função logarítmica. Logo depois, Adriana perguntou como os professores classificariam o erro apresentado. Para estimular a discussão, Adriana comentou que, particularmente, ela classificaria o erro apresentado como "erro por confusão", pois o professor poderia ter se confundido quando definiu a função logarítmica. A professora convidada concluiu dizendo que era um erro de definição, provavelmente causado por confusão.

Na continuação da sessão, Adriana apresentou um outro erro cometido por um professor (Figura 24) e perguntou qual era e como poderiam classificar esse erro.

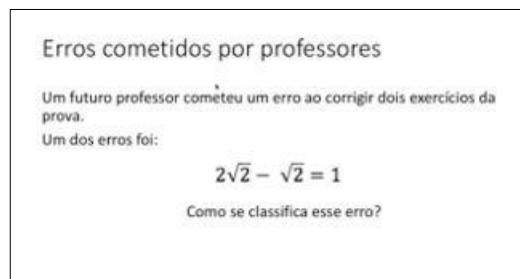


Figura 24. Erro de procedimento apresentado por Adriana na sessão 8
Fonte: elaboração própria

P1 comentou que se tratava de um erro matemático. Adriana complementou dizendo que era um erro de procedimento, o professor cometeu um erro ao fazer uma operação com números irracionais. A professora, também, comentou que esse poderia ter sido um erro cometido por um aluno, em um exame de avaliação, e que acabou sendo validado pelo professor. E, no caso desse erro ter sido cometido pelo professor, seria um erro por falta de conhecimento matemático do docente. Adriana comentou, ainda, que poderia apresentar muitos outros exemplos de erros cometidos pelo professor ou erros que poderiam ser encontrados, por exemplo, até mesmo em livros didáticos.

Na sequência da discussão, Adriana perguntou se os professores haviam ficado com alguma dúvida relacionada ao que ela havia tratado sobre os erros ou se alguém gostaria de contar alguma experiência pessoal relacionada a isso. Imediatamente, P4 comentou que pensava ter cometido muitos erros na sua aula, realizada na *live* do *YouTube*, na fase do desenvolvimento do ciclo de LS do curso. Nesse sentido, Adriana falou que era bem comum haver erros em uma aula de matemática, dado que o contexto de sala de aula é muito dinâmico e o professor deve dar conta de tantos aspectos e, desta forma, acontecem os despistes. Adriana acrescentou que, no processo de reflexão da aula, deve-se fazer uma tentativa de identificar os erros e suas causas e, desta forma, tentar não reproduzir o mesmo erro em uma outra situação. Agora, se o professor tem uma falta de conhecimento matemático, é muito difícil o próprio professor identificar o erro cometido por ele mesmo, no momento da reflexão. Nesse sentido, seria necessário o auxílio de outro professor, que tenha mais conhecimento matemático, para identificar os possíveis erros e como corrigi-los. Nessa perspectiva, o LS apresenta uma vantagem, pois a reflexão da aula é feita de maneira colaborativa por um grupo de professores.

Seguidamente, Adriana começou a introduzir a ideia relacionada ao componente “ambiguidades” do CAD epistêmico. Para isso, a professora convidada explicou que poderiam ocorrer ambiguidades numa aula de matemática por diversas causas, entre elas, Adriana citou três como principais: o uso de materiais manipulativos, o uso de metáforas e gestos e o uso de programas de computador dinâmicos.

Em relação às ambiguidades, Adriana explicou que o professor pode ter um papel bem relevante ou o aluno pode ter um papel mais relevante. Os estudantes podem cometer muitas confusões e erros, mas não necessariamente por causa das explicações do professor. A causa pode estar relacionada com algum outro fator ou pelo próprio uso de material manipulativo, por exemplo. Nesse sentido, Adriana apresentou um exemplo de uma atividade desenvolvida por uma futura professora de matemática, estudante de um mestrado profissional de formação de professores de matemática

A atividade consistia em fazer os alunos medirem a massa de objetos de madeiras que representavam o quadrado da hipotenusa e dos catetos de um determinado triângulo retângulo e, desta forma, a ideia era que os alunos verificassem que a soma das massas dos quadrados dos dois catetos é igual a massa do quadrado da hipotenusa. No momento em que a professora foi refletir sobre a sua prática e sobre a atividade realizada, a própria professora assinalou que o TP se refere à ideia de relação entre áreas de quadrados e não entre massas. Nesse sentido, Adriana destacou que o fato de os pesos coincidirem, na atividade trazida como exemplo, reside no fato de que a densidade dos objetos era uniforme e a espessura das peças era mesma e, desta forma, a área e a massa são proporcionais e esse fato garante essa comprovação.

A seguir, Adriana explicou que, além da atividade que ela havia exemplificado, existiam muitas outras atividades que faziam a comprovação do TP considerando coisas diferentes das áreas de quadrados, como, por exemplo, atividades com volumes que poderiam gerar ambiguidades aos alunos. Adriana destacou, ainda, que o uso desses materiais era muito interessante, principalmente, porque despertam o interesse dos estudantes, mas o professor que faz o seu uso deve discutir com seus alunos as limitações relacionadas ao uso desse tipo de materiais, para que os alunos compreendam que, nesses casos, são necessárias condições ideais para que a relação de igualdade funcione.

A seguir, Adriana apresentou um outro fator causador das ambiguidades cometidas pelo professor em aula, trata-se do uso de metáforas em seu discurso. Por exemplo, quando o professor ensina as frações e diz que "a fração é uma pizza dividida em partes iguais"; ou quando o professor diz que "a função é uma máquina que transforma", ou, ainda, quando o professor explica que "o gráfico de uma função é um caminho".

A seguir, Adriana explicou que, quando o professor explica os conceitos matemáticos fazendo uso de metáforas pode ocasionar que o aluno compreenda de maneira incorreta. Utilizando a tabela abaixo (Figura 25), Adriana explicou, também, que, quando o professor faz uso de metáforas em seu discurso, ele pensa que o aluno entendeu o que está na coluna da direita, mas o que o aluno entende é, na verdade, o que está na coluna esquerda da tabela.

Domínio de partida Camino	Domínio de llegada Gráficas de funciones
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla: "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino"

Figura 25. Exemplo de metáfora ao trabalhar gráfico de funções
Fonte: elaboração própria.

Na sequência, Adriana apresentou um exemplo de metáfora em forma de gestos e movimentos fictícios (Figura 26).

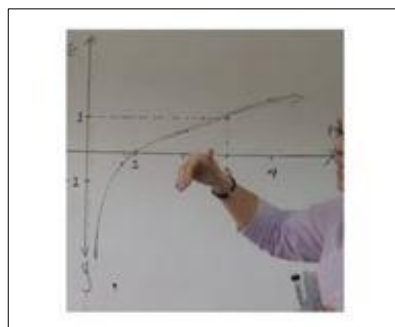


Figura 26. Momento da sessão 8 do curso onde Adriana explica a metáfora em forma de gestos
Fonte: elaboração própria.

No exemplo destacado por Adriana, uma professora explica com gestos que a linha pontilhada, paralela ao eixo y, representa uma cerca elétrica e, se o gráfico encostasse nessa linha pontilhada, ficaria eletrocutado, ou seja, nesse caso, o aluno terá o entendimento que a assíntota é uma cerca elétrica. Adriana destacou, ainda, que, durante a explicação, a professora, a todo momento, fazia movimentos com as mãos e, nesse sentido, o aluno poderia ter uma ideia muito equivocada sobre o conceito de infinito, por exemplo.

Por último, Adriana apresentou o exemplo dos programas dinâmicos de computador que são usados no ensino da matemática que, muitas vezes, podem gerar ambiguidades em uma aula de matemática. Por exemplo, dizer que um ponto do gráfico se move, já que o programa de computador dinâmico traz essa ideia. A professora finalizou dizendo que não é que esteja errado fazer uso desses materiais, mas há necessidade de se fazer uma explicação matemática mais rigorosa e uma discussão com os alunos, nesses casos.

Para falar da “riqueza de processos”, outro componente do CAD epistêmico, PI fez uma provocação a partir das seguintes perguntas: como pensar em uma aula rica em processos matemáticos? Que tipo de atividade implementar? O que se deve considerar em uma sequência didática para que ela tenha processos matemáticos relevantes? Para ajudar a responder a essas perguntas, PI mostrou um trecho de um vídeo de uma aula sobre o TP (disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=dUiiGW0Tw5M>>). Após a exibição do vídeo, PI solicitou aos professores participantes do curso que classificassem a aula exibida no vídeo como uma aula rica em processos ou como uma aula magistral "condutista". P1 comentou que a aula exibida no vídeo não era uma aula rica em processos, porque não explicava detalhes e que, inclusive, havia vários erros na explicação do professor. P5 comentou que o professor não usou nenhum recurso na aula, apenas apresentou de modo expositivo o conceito que se queria ensinar.

Após discutirem um pouco sobre a aula do vídeo, PI perguntou aos professores: e nas aulas elaboradas por vocês, houve uma tentativa de fazer os alunos enunciarem e experimentarem o TP? Respondendo a essa pergunta, P5 comentou que, na aula implementada por P4, no Ensino Fundamental, considerava que havia existido uma tentativa de fazer isso,

mas em sua aula, implementada no Ensino Médio, não, pois não era o objetivo. P1, apoiando-se na resposta dada por P5, comentou que também achava que sim.

A seguir, PI perguntou: e entre um vídeo explicativo em uma aula magistral/expositiva e o que vocês fizeram, teve diferenças de processos? Imediatamente, P2 respondeu que sim, que eles haviam, em primeiro lugar, pensado para quais alunos a aula seria realizada e, uma vez que eles tinham informações sobre os alunos, os professores elaboraram a aula.

A continuação, PI questionou: houve exploração, estabelecimento de conjecturas e demonstração? Em seguida, P1 disse que demonstração e conjectura ele não tinha certeza que eles haviam trabalhado na aula, mas exploração sim.

Depois disso, PI comentou que o TP é um dos Teoremas que, no ensino básico, é possível fazer a demonstração geométrica, por exemplo. Nesse sentido, PI fez a seguinte pergunta: seria possível fazer uma demonstração mais genérica depois de considerar um caso particular, como o triângulo 3, 4 e 5 no redesenho?

Na sequência, PI apresentou um exemplo de como poderia ser uma atividade rica em processos, conforme segue: "Os *hexaminós* são figuras formadas por seis quadrados, de modo que cada um deles tem pelo menos um lado em comum. Abaixo (Figura 27) estão desenhados todos os 35 *hexaminós* possíveis. Entre esses *hexaminós*, quais são os 11 casos que permitem construir um cubo?".

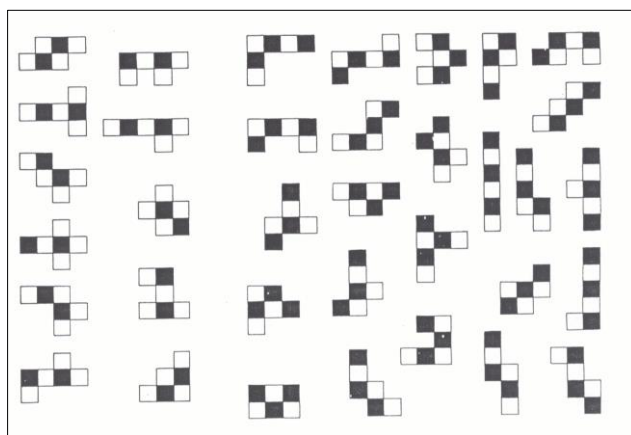


Figura 27. Representação dos 35 *hexaminós* possíveis
Fonte: elaboração própria.

Após apresentar a atividade, os professores começaram a discuti-la e começaram a resolvê-la. Nesse sentido, foram surgindo algumas conjecturas, por exemplo: a) os *hexaminós* que possuem quatro quadrados com um vértice coincidente não formam cubos; b) para formar cubo, o *hexaminó* deve ter três quadrados de altura. Um a um os professores foram dizendo quais *hexaminós* formavam um cubo (Figura 28).

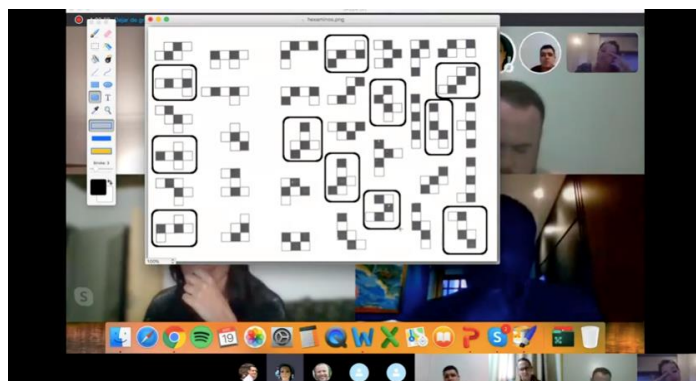


Figura 28. Momento da sessão 8 quando os professores dizem que *hexaminós* formam cubos
Fonte: elaboração própria.

Na sequência, os professores chegaram aos 11 *hexaminós* que poderiam ser a planificação de um cubo. A seguir, PI fez a seguinte pergunta: dos 35 *hexaminós*, 24 não são cubos, porquê? Nesse sentido, Adriana entrevistou dizendo que, o primeiro processo da atividade, havia sido o processo de experimentação e que, com essa última pergunta de PI, começaria-se um novo processo, outro tipo de raciocínio deveria ser realizado com esse tipo de pergunta.

Logo depois, PI comentou que poder-se-ia pensar que um cubo possui faces, arestas e vértices. Nessa perspectiva, PI fez as seguintes perguntas: quantas faces tem um cubo? quantas são laterais e quantas são base? Quantas arestas um cubo possui? Quantas faces concorrem em um vértice? A resposta à última pergunta tem relação com a conjectura (a) realizada pelos professores, já que em um cubo três faces concorrem em um vértice. Assim, os *hexaminós* que tem quatro quadrados coincidindo em um mesmo vértice não podem ser um cubo.

Na sequência da sessão, os professores participantes seguiram discutindo sobre as características dos *hexaminós* que não eram cubos. Nessa perspectiva, surgiu a conjectura "os *hexaminós* que tem uma sequência de cinco quadrados alinhados não são a planificação de um cubo". A próxima conjectura que surgiu foi "os *hexaminós* que tem quatro quadrados em uma

mesma linha e os outros dois quadrados estão numa mesma linha ao lado não são planificação do cubo".

Depois disso, PI propôs a seguinte tarefa: "Para construir um cubo a partir de um *hexaminó*, que seja uma planificação sua, precisamos de abas: a) desenhe um *hexaminó* que seja uma planificação do cubo com as abas necessárias. Corte e verifique se realmente dá um cubo. b) Repita o mesmo processo com outro *hexaminó* que também é a planificação do cubo. c) Você precisou da mesma quantidade de abas nos dois casos? Qual é o número mínimo de abas necessárias?"

A partir da tarefa sugerida e os professores discutirem um pouco, PI comentou que tal atividade poderia gerar uma nova investigação e poder-se-ia levar os alunos a concluir que os *hexaminós* que são a planificação de um cubo tem quatorze lados livres e, quando se monta o cubo no espaço tridimensional, os lados se agrupam de dois em dois, então o número mínimo de abas é sete. Isso é um raciocínio de 2D para 3D. Mas, também há um raciocínio de 3D para 2D que é dizer: com um cubo formado, quantos cortes tenho que fazer no cubo para desmontá-lo? Então se eu tenho um cubo montado para planificá-lo tenho que fazer sete cortes para desmontá-lo e, nesse caso, vamos de 3D para 2D.

Na sequência da sessão, PI perguntou sobre quais processos poderiam ser realizados na execução da atividade proposta. Desta forma, PI comentou que, especialmente na tarefa de detectar que *hexaminós* geram cubos, o processo realizado havia sido "tentativa e erro". Continuando, PI comentou que, durante esse processo realizado, os professores fizeram conjecturas e se poderia chegar, na segunda parte da atividade, às seguintes conclusões: a número de abas coincide com o número de cortes (seguindo as arestas) que devem ser feitos para espalhar o cubo em uma superfície plana; há uma relação entre o número de cortes e o número de vértices do cubo e, também, entre o número de arestas sem cortes (aquelas que unem duas faces no desenvolvimento do plano) e o número de faces; é importante perceber que: a) o número de arestas que são cortadas é igual ao número de vértices menos um; e b) o número de arestas que não são cortadas é igual ao número de faces menos um. Concluindo, PI disse, também, que esse último resultado poderia ser estendido a outros poliedros e relacionado ao Teorema de Euler.

Na continuação da sessão, PI comentou que, na riqueza de processos, é importante pensar em tarefas onde se consideram seguir alguns passos. Primeiro, uma vez que o professor propõe um enunciado que obrigue os alunos a lerem, a atividade deve tratar de fazer que os estudantes entendam o que está sendo proposto, isto é, deve existir um processo de comunicação, uma comunicação passiva em termos matemáticos. Entender uma tarefa matemática.

Depois, nessa tarefa matemática, os alunos devem manipular, experimentar, explorar, fazer tentativa e erro. Como consequência dessa exploração, que os alunos tenham que formular ou enunciar alguma conjectura, e que tenham que justificar de alguma maneira essa conjectura. E, por último, uma vez que convençam aos demais colegas, que comuniquem o resultado como sendo bom ao grupo, ao professor, que façam alguma comunicação escrita em termos matemáticos. PI concluiu dizendo que esses seriam como uns passos básicos para seguir uma determinada "riqueza de processos". Continuando, PI comentou que, a medida que o professor vai elaborando suas atividades, de maneira a propor algo e esse algo busca que os alunos façam experimentos, que experimentem conjecturas, que as conjecturas tenham que lhe justificar, e ao final tenha que escrever o que descobriram através de uma justificativa, estarão fazendo bastante. Desta forma, PI comentou que os professores poderiam pensar no que tinham feito nas aulas, nos ciclos de LS desenvolvidos, e pensar numa melhora nos processos para o redesenho.

Por fim, PI comentou que existem outros tipos de riquezas de processos matemáticos que incorporam os processos apresentados anteriormente. Nessa direção, Adriana citou a modelagem matemática e a resolução de problemas, exemplos de megaprocessos, tendências na Educação Matemática.

Na sequência da sessão, PI apresentou o último componente do CAD epistêmico, a “representatividade da noção matemática que se quer ensinar”. Nessa perspectiva, PI comentou que, em todo o discurso da educação atual, há um discurso sobre competências. E a ideia de fundo da ideia de competência é que o que ensinamos deve ser útil a pessoa no âmbito onde ela irá se movimentar. Ou seja, a ideia de fundo de todo o discurso de competência é a ideia de utilidade. O que tu ensinas em classe o aluno tem que usar onde ele precisar usar, essa é a ideia. Continuando, PI explicou que, se o professor ensina o TP, se supõem que o aluno

tem que resolver todas as situações ou ao menos uma grande variedade de situações que se resolvem com o TP.

Com essa ideia destacada, na sequência da sessão, PI apresentou alguns exemplos de conceitos matemáticos e qual seria a representatividade desses objetos. O primeiro exemplo destacado foi a complexidade do coeficiente angular da função afim. Desta forma, PI questionou o que os professores poderiam dizer sobre qual era a ideia do coeficiente angular da função afim. Ademais, pediu que cada um dissesse qual era o significado do coeficiente angular da função afim. P4 e P5 comentaram que o coeficiente angular da função afim determinava a inclinação da reta. P1 falou que o coeficiente angular da função afim "diz se a função cresce ou decresce". A seguir, PI explicou que o coeficiente angular da função afim tem um significado geométrico. Além disso, possui um significado trigonométrico, isto é, a tangente do ângulo entre a reta e a parte positiva do eixo das abscissas. O coeficiente angular também tem um significado algébrico, ou seja, é o número "a" que multiplica x na fórmula $y = ax + by$. E, tem, também, um significado funcional que é o aumento da variável dependente por unidade da variável independente.

A seguir, PI apresentou um exemplo de situação problema (Figura 29) e perguntou aos professores, se seus alunos tivessem que resolver o problema apresentado, que significado de coeficiente angular utilizariam.

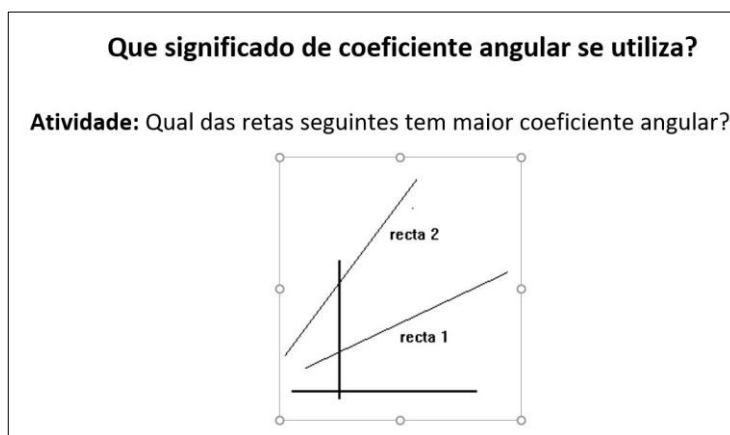


Figura 29. Significado do coeficiente angular como inclinação da reta
Fonte: elaboração própria.

Em seguida, os professores responderam que, para resolver o problema apresentado, o aluno necessita saber o significado que tem a ver com a inclinação da reta, que seria o significado geométrico. A seguir, PI apresentou outro problema (Figura 30) e perguntou se sabendo o significado geométrico do coeficiente angular da função afim os alunos poderiam resolver esse tipo de problema.

Que significado do coeficiente angular se utiliza?

Atividade: Escreva a fórmula das seguintes funções?

coeficiente angular	-2	3	0
ordenada na origem	0	4	-5

Atividade: Qual é o coeficiente angular na reta $y = 4x + 5$?

Figura 30. Momento da sessão 8 onde PI apresenta um exemplo de situação problema que apresenta o significado algébrico do coeficiente angular
Fonte: elaboração própria.

Na sequência, PI explicou que ou o aluno deveria ser muito criativo ou muito brilhante para entender que a inclinação da reta tem a ver com o número que multiplica o x na função da reta. Então, o aluno tem que entender uma outra interpretação do coeficiente angular que é a interpretação do tipo algébrica, onde o coeficiente angular é o número que multiplica o x . Se o aluno interpretar que o coeficiente angular é o número que multiplica o x , é muito fácil resolver esse tipo de problemas.

Continuando, PI desafiou os professores perguntando: "imaginem que eu tenha dado aos alunos o significado geométrico e algébrico do coeficiente angular da função afim e proponho este problema (Figura 31), os alunos conseguem resolver?". O problema proposto é para que o aluno desenhe uma reta $y = 5x + 1$ e diga se estão corretos ou incorretos os comentários.

Que significado do coeficiente angular se utiliza?

Atividade: Desenhe o gráfico da função $y = 5x + 1$ e diga se os comentários dos seguintes alunos estão corretos.

- Juan: Se permaneceremos em algum ponto da linha e movermos uma unidade para a direita, então temos que mover 5 unidades verticalmente para cima para tocar a linha novamente.
- Alba: Se estamos em qualquer ponto da linha e movemos uma unidade para a direita, temos que mover 5 unidades verticalmente até tocarmos a linha.
- José: Se formos à origem das coordenadas e movermos cinco unidades para a direita, temos que mover 1 unidade verticalmente para cima para tocar a linha.
- Ana: Se estamos em algum ponto da linha e movemos duas unidades para a direita, temos que mover 10 unidades verticalmente para cima para tocar a linha.
- Alberto: Se estamos no ponto em que a linha cruza o eixo das ordenadas e movemos 3 unidades para a direita, temos que mover 15 unidades verticalmente para cima para tocar a linha.
- Laura: Se nos colocarmos em qualquer ponto da linha e movermos um número de unidades horizontalmente, para tocar a linha novamente, temos que mover 5 unidades para cima para cada unidade de deslocamento horizontal.

Figura 31. Exemplo de situação problema com um significado funcional do coeficiente angular
Fonte: elaboração própria.

Logo depois, PI comentou que todos os comentários do problema teriam a ideia de uma relação que tem a ver com a razão que há entre o que varia a variável dependente por unidade que varia a variável independente. Algumas afirmações estão corretas e outras incorretas. A primeira, diz que se nos situamos em um ponto da reta e nos movemos uma unidade para a direita, teremos que nos deslocar 5 unidades para cima em vertical, até voltar a tocar na reta. Então, nesse caso, estamos lidando com a ideia de que o coeficiente angular são 5 unidades de variação vertical por uma unidade de variação horizontal, e é correto. Por outro lado, José diz que “se formos à origem das coordenadas e movermos cinco unidades para a direita, temos que mover 1 unidade verticalmente para cima para tocar a linha.” Isso ele diz mal, mas também manipula a mesma ideia. Para resolver este problema, a ideia é de que o coeficiente angular é uma relação entre as variáveis, que de alguma forma me indicam a variação da variável dependente por unidade da variável independente. Trata-se de um significado funcional.

A seguir PI perguntou, imaginem que eu expliquei o significado geométrico, o significado algébrico e o funcional e proponho este problema (Figura 32). PI comentou que, nesse caso, o aluno não poderá resolver o problema proposto. Somente o resolverá se ele conhecer o significado trigonométrico do coeficiente angular.

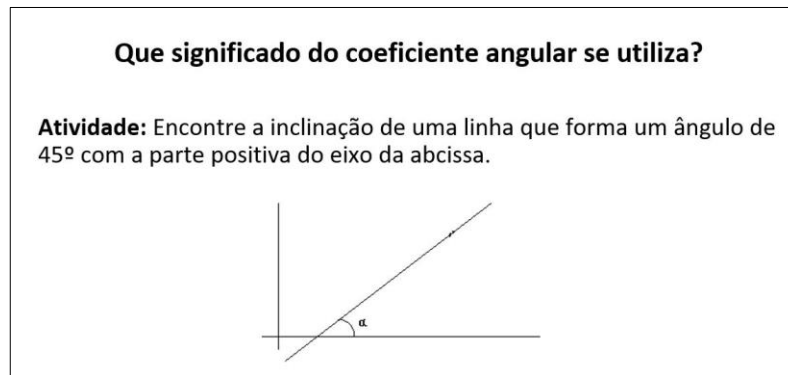


Figura 32. Exemplo de situação problema que apresenta o significado trigonométrico do coeficiente angular
Fonte: elaboração própria.

Concluindo, PI comentou que, se o professor quer que os alunos resolvam esses quatro tipos de problemas, se ele explicar somente um significado parcial, dificilmente o aluno, a não ser que seja muito brilhante e criativo, resolverá toda essa variedade de problemas. Então, se o professor quer que seus alunos resolvam toda essa diversidade de problemas, ele deve abordar as várias interpretações do coeficiente angular da função afim e conectá-las. PI completou dizendo que, então, a pergunta que o professor deve fazer é "o que é o coeficiente angular?". PI destacou, ainda, que é importante selecionar quais significados é possível abordar em cada etapa escolar e se é possível trabalhar cada um deles.

A seguir, PI apresentou outro exemplo de representatividade do objeto matemático, a complexidade do Teorema de Tales. Para isso, perguntou aos professores "como vocês explicam o Teorema de Tales?". Em seguida, PI comentou que, muitas vezes, somente explicamos o que se chama de "versão reduzida do Teorema de Tales", que diz que os triângulos em posição de Tales têm os lados proporcionais e que, muita gente, explica isso como o Teorema de Tales. PI, então, explicou a versão ampliada do Teorema de Tales. Os exemplos utilizados correspondem ao publicado em (Font, Breda e Seckel, 2017, p. 8-9).

Nessa direção, PI enfatizou que, se o professor quer que seu aluno resolva uma boa variedade de problemas sobre o Teorema de Tales, ele deverá trabalhar as duas versões do Teorema de Tales e conectá-las. Continuando, PI destacou, também, que se o professor dá apenas uma versão parcial, então os alunos poderão resolver alguns tipos de problemas, mas há outros que eles não poderão resolver.

Concluindo a oitava sessão do curso, PI comentou com os professores que eles fossem pensando no que seria a representatividade do TP, isto é, quais são os significados do TP e quais seriam importantes explicar em cada etapa escolar e de que forma pode-se conectá-los. PI enfatizou, ainda, que tudo isso seria considerado para um redesenho das aulas. Por fim, PI concluiu que, nesta sessão, havia-se estudado os quatro componentes dos CAD epistêmico: *erros, ambiguidades, riqueza de processos e representatividade do objeto matemático que se quer ensinar*, e fez um resumo final a esse respeito.

Sessão 9: Estudo do CAD Cognitivo

A nona sessão do curso ocorreu no dia 26 de maio de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos. Nesta sessão do curso, estiveram presentes os professores P1, P4, P5, P6 e P7. Além de PI, que coordenou a sessão, participaram também a professora Dra. Adriana Breda e o professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva.

No início da sessão, PI apresentou algumas perguntas norteadoras. A primeira delas foi "como avaliar a aprendizagem do aluno como resultado de um processo de instrução?". Nesse sentido, PI explicou que um processo de instrução, no caso particular do LS, corresponde a um ciclo que abrange as etapas de planejamento, implementação, reflexão e redesenho de uma aula ou sequência de aulas.

A seguir, em relação a esse questionamento, P5 comentou que tentaria mostrar aos seus alunos uma comparação entre o que eles sabiam fazer, antes, e o que eles conseguiram fazer depois do processo de ensino e aprendizagem ao qual participaram. Ainda tentando responder a questão, P5 comentou que o sistema de avaliação ao qual os professores estavam acostumados era um sistema que ela chamou de "quantitativo". Em seguida, P1 questionou se essa avaliação poderia ser feita a partir da "verificação" da aprendizagem de todos os conceitos apresentados. Nessa linha, P7 acrescentou dizendo que a pergunta era "como fazer isso?" e sugeriu que, inclusive algo que, segundo ela se usa pouco, era que o aluno pudesse fazer uma autoavaliação, permitindo que o próprio aluno indique o quanto ele entendeu do processo de instrução desenvolvido. P7 acrescentou que poder-se-ia perguntar ao aluno, também, como foi sua organização para estudar, como ele se sentiu resolvendo as atividades. P7 destacou, ainda, que com essa autoavaliação a aluno deveria medir todo o processo e não apenas a

aprendizagem de um determinado conteúdo. Nesse sentido, P1 acrescentou que dever-se-ia fazer as duas coisas, alguns exercícios de verificação dos conceitos trabalhados e fazer uma avaliação geral do processo de aprendizagem do aluno.

A continuação, PI fez a pergunta "que aspectos (ou características) devemos ter em conta para que a aprendizagem da matemática seja considerada adequada ou idônea como resultado de um processo de instrução?". Respondendo a pergunta, P7 falou que dever-se-ia observar "o processo", "a interpretação". A seguir, P7 também disse que se deveria considerar a evolução do aluno, a partir da leitura de determinada situação problema, evoluindo para a interpretação da ordem do exercício e, depois, definindo os conhecimentos, habilidades e instrumentos que poderiam ser utilizados para resolver esse determinado problema. P7 enfatizou dizendo que se deveria avaliar todo o processo e não apenas o resultado final. A seguir, P5 comentou que outra forma de avaliar a aprendizagem seria, por exemplo, quando o aluno chega a um resultado errôneo e ele mesmo percebe que chegou numa resposta incorreta, se ele consegue voltar ao processo realizado e identificar o que precisa ser modificado, para que ele chegue a um resultado correto, é boa uma forma de verificar que o aluno entendeu do que se trata. P1 complementou, dizendo que é possível verificar a aprendizagem do aluno quando ele consegue aplicar o conceito aprendido a qualquer tipo de situação problema que pode ser resolvido com o apoio daquele conceito. E, no momento em que o aluno consiga fazer isso, será possível dizer que o aluno aprendeu.

A continuação, PI comentou que, conforme havia-se explicado nas sessões anteriores, o AOS, teoria que dá suporte a ferramenta CAD, decompõem cada uma das suas dimensões em componentes e indicadores. E um dos componentes do CAD Cognitivo são os "conhecimentos prévios". Dentro desse componente, são considerados dois indicadores e o primeiro indicador é "os alunos têm os conhecimentos prévios necessários para estudar o tópico". Isto é, num processo de instrução um aspecto importante a se considerar é se alunos possuem determinadas condições prévias para o aprendizado. Depois, PI disse que, durante todas as etapas do LS desenvolvidas pelos professores participantes, foram encontradas algumas evidências de como os professores haviam dado importância a alguns conhecimentos prévios, e destacou, por exemplo a seguinte evidência explanada por P6: "antes de entrar no

Teorema de Pitágoras, tem que rever com eles toda a questão do triângulo retângulo, porque a grande maioria não sabe o que é a hipotenusa e o que são os catetos do triângulo retângulo”.

No comentário feito por P6, durante o planejamento do LS, ela destaca a importância de se trabalhar alguns conceitos que são prévios à aprendizagem do TP, tais como a ideia de triângulo retângulo, hipotenusa e catetos. Um outro trecho da que PI destacou foi o seguinte: “Sabe o que me preocupa? O quanto que nós vamos trabalhar com raízes, porque eles estariam vendo isso agora ... Porque o livro aqui traz um exemplo de triângulo onde a hipotenusa é a raiz do número 38. É claro que, quando se elevar ao quadrado, a raiz será a operação inversa. Eu acho que eles não vão se ligar nisso ainda. Está faltando essa parte ainda.” (comentário feito por P4).

Nesse comentário, P4, que conhecia bem os seus alunos, pois já dava aulas de matemática para esse grupo desde o ano anterior, evidenciou uma preocupação por considerar pouco familiar para seus alunos fazerem operações com os números irracionais e cálculos com raízes.

A continuação, PI destacou o seguinte comentário: “Olhando para essa questão aqui, que P7 compartilhou com a gente, eu penso, também, nas operações em si, porque se envolver um número decimal ou se envolver uma conversão de unidades de medida, eu penso que essa também é uma lacuna que, muitas vezes, eles têm dificuldade.” (comentário feito por P8).

A seguir, PI comentou que, nesse outro comentário, o professor P8 destacou sua preocupação sobre os alunos, em geral, terem dificuldades para resolver operações com números decimais ou para realizarem conversão de medidas, conceitos que, segundo ele, são “lacunas” que podem interferir na aprendizagem do novo conceito. A seguir, PI trouxe o seguinte comentário feito por P1: “E então, trabalhar, revisar com eles, a questão de o triângulo ser retângulo, lembrando. Eu acho também que eles devem ter uma noção dos ângulos, não é P4? [...] Então, ir lembrando que aquele triângulo vai ter um ângulo reto, um ângulo de 90° ”.

PI comentou que, nesse outro comentário, o professor P1 questionou P4, professora da turma para a qual estavam planejando a aula, se seus alunos entendiam o conceito de ângulo reto, ideia que ele considera prévia para a aprendizagem do TP.

Por último, destacou o seguinte comentário de P7: “Saber como o estudante dimensiona o que ele sabe e se ele também consegue relacionar com algum conhecimento

prévio”. A partir dessa evidência, PI comentou que P8 destacava a importância de o aluno avaliar o que ele sabe e relacionar este saber com os conceitos prévios necessários para a aprendizagem do novo conceito. Nessa perspectiva, PI comentou que, essa evidência, era um pouco mais aberta que as demais, no sentido que ela não falava especificamente do que pudesse chamar "pré-requisitos lógicos", como apareceram nos comentários destacados anteriormente. P7 fala de modo mais amplo de conhecimentos anteriores e não esmiúça alguns conceitos.

A continuação, PI perguntou: "por que, nos processos de instrução desenvolvidos, vocês deram importância a alguns conhecimentos prévios?". A partir da pergunta exposta gerou-se o seguinte diálogo:

P7: Eu acho que é consenso entre nós, porque eu vi que foi uma preocupação de todos, que tem uma evolução no pensamento matemático. O conteúdo está sempre interligado a algo que já foi trabalhado. Então, muitas vezes, se a gente optou por não fazer, por exemplo, uma sondagem inicial, a gente vê que o conteúdo acaba ficando mais truncado, mais difícil de trabalhar, porque aí a gente vai descobrir que eles não tinham algumas coisas anteriores. Então, eu acredito que tem a ver com a nossa percepção de que os conteúdos estão interligados e que não é um fim, não tem só aquele momento ali estanque, tem toda uma história de antes que está chegando naquele conteúdo ali. Não é uma coisa que saiu do nada.

P1: Não adianta, por exemplo, eles terem o Teorema de Pitágoras, sabendo que aquele aluno vai chegar a um número irracional. Aí, se ele não souber o número irracional, ele vai simplesmente estancar e não vai evoluir.

PI: E não vai conseguir resolver uma operação envolvendo os números irracionais, quando for operar com o Teorema de Pitágoras.

P7: Ou não vai ver sentido, vai achar que tá errado, porque é um número que não tem raiz exata, não existe aquela medida. Da mesma forma, se ele não souber identificar o que é um triângulo retângulo, não vai fazer sentido, também ele saber que o Pitágoras só pode ser aplicado no triângulo retângulo.

P4: Inclusive entender o próprio Teorema de Pitágoras. O próprio Teorema também é necessário ter os conhecimentos prévios. Além de tudo isso que o pessoal falou, de encontrar um problema no meio, que tu não sabes resolver, de outra disciplina, de parte dentro da disciplina, o próprio Teorema também. Por exemplo, ali aquela parte que a gente estava falando do que é cateto e hipotenusa e tal, então, tu vais estar falando sobre uma coisa para explicar o Teorema que o aluno não sabe o que é.

PI: Então, são alguns pré-requisitos lógicos, não é? Porque é lógico que tem que saber, antes do Teorema de Pitágoras, mas também conforme P7 comenta, são conhecimentos anteriores que o

aluno tem que ter, não é? Também tem conteúdos prévios, mas também são conhecimentos prévios, conceitos anteriores.

A seguir, PI comentou que poderiam haver duas principais razões para as evidências dos professores considerarem a importância dos conhecimentos prévios num processo de instrução. A primeira destacada por PI, seria pela experiência acumulada. PI comentou que, durante as vivências e experiências como professores de matemática, os professores participantes obtiveram evidências empíricas de que, para aprender um novo conceito, são necessários alguns conhecimentos anteriores, alguns conceitos pré-requisitos lógicos. A segunda razão seria pelos resultados de pesquisas científicas consolidados. Nesse sentido, PI, destacou que, de alguma forma, os professores concordam com resultados que foram destacados em muitas pesquisas acadêmicas, e que está muito consolidado na comunidade científica em educação, que é fundamental considerar os conhecimentos prévios para conseguir uma boa aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, PI destacou uma frase do célebre livro "Psicologia Educacional" de David Ausubel, teórico cognitivista e de alguns de seus apoiadores, que diz que: "o fator isolado mais importante que influencia o aprendizado é aquilo que o aprendiz já conhece".

Na sequência desta sessão, PI comentou que há uma classificação dos conhecimentos prévios e que se considera que há dois tipos de conhecimentos prévios. O primeiro deles trata-se dos conhecimentos que são prévios para entender a nova noção que se quer ensinar. É uma espécie de hierarquia de aprendizagem. Trata-se daqueles conhecimentos que são pré-requisitos lógicos para entender a nova noção. Nesse sentido, PI perguntou: "por exemplo, no caso específico do Teorema de Pitágoras, quais seriam esses conhecimentos?". PI comentou, ainda, que alguns desses conhecimentos já haviam sido destacados nas evidências expostas anteriormente. A seguir os professores comentaram que seriam, por exemplo, a ideia de triângulo, triângulo retângulo, ângulo reto, hipotenusa, catetos, potenciação, números irracionais, etc. Neste último, os professores comentaram que não seria exatamente um conhecimento prévio ao TP e que inclusive o TP servia para fazer a construção geométrica desse número.

Na sequência da sessão, PI comentou que pode ocorrer, por exemplo, que o aluno não entenda o que é TP, porque não sabe o que é um triângulo retângulo, ou mais inicial ainda, não

entenda o que é um triângulo. Ou não entenda o TP, porque não entende o que é um ângulo reto. E isso nos leva a pensar "quais são os conhecimentos prévios que o aluno necessita para entender o TP". Ou também conceitos que os alunos devem entender e saber usar para realizar procedimentos de cálculos nas aplicações do TP. Como, por exemplo, realizar operações com raízes, saber fazer potências, resolver equações, etc. Mas, esses conceitos, não têm relação direta com o que é o TP em si. Não é necessário saber operar com raízes para entender o TP, apenas é necessário quando se faz operações com o Teorema.

A seguir, PI explicou que, para averiguar se os alunos possuem esses conhecimentos prévios, pode ser que o professor conheça muito bem seus alunos, porque já trabalha com eles há bastante tempo. Mas, no caso de que não saiba bem quais as aprendizagens anteriores tiveram os seus alunos, uma ideia interessante é fazer uma avaliação diagnóstica antes de começar a se trabalhar com o novo conceito. E, a seguir, PI apresentou uma ideia de avaliação diagnóstica encontrada em um trabalho final de graduação na internet.

Logo depois, PI comentou que todas essas questões tinham a ver com as ideias prévias para entender o TP, mas não avaliam se os alunos têm os conhecimentos prévios para fazer operações geradas a partir do TP. Nesse sentido, PI destacou que, se ideia da aula é utilizar o TP no cálculo de distâncias, por exemplo, seria importante averiguar se os alunos possuem os conhecimentos prévios necessários para fazer operações com raízes e potências, por exemplo. Tal como comentou a professora P4, quando seu grupo do LS planejava a aula.

Na sequência do curso, PI explicou que outro tipo de conhecimento prévio tem relação com as "falsas ideias ou ideias equivocadas que fazem com que os alunos cometam erros", isto é, o aluno possui umas ideias prévias que já não são conhecimentos prévios como pré-requisitos lógicos. Nessa perspectiva, PI exemplificou dizendo que o TP é um dos poucos Teoremas que todo mundo conhece. Por ser um Teorema muito conhecido, pode ser que os alunos, mesmo antes de estudarem sobre o TP na escola, podem já ter ouvido falar sobre ele, por exemplo, os pais já podem ter comentado alguma coisa do tipo: "vão te ensinar o TP na escola, etc." e podem dar alguma ideia equivocada. Pode ser que, antes de estudarem na escola, tenham construído alguma ideia errada sobre o TP. Seria interessante perguntar aos alunos para verificar essa classificação de conhecimentos prévios. Poder-se-ia fazer as perguntas "alguma vez escutaste algo sobre o TP?", "o que é para ti o TP?", para ver se os alunos já o

conheciam ou teriam alguma ideia prévia sobre o TP. PI concluiu dizendo que poderia ser que os alunos já teriam escutado antes pela fama ou visibilidade que tem o Teorema de Pitágoras.

Na sequência, PI apresentou um exemplo de situação problema onde aparece esse tipo de conhecimento prévio (Figura 33). Em seguida, PI explicou que muita gente responde 10 meses, porque se demorar 5 meses para cobrir a metade, vai demorar o dobro do tempo para cobrir o total. Por que muita gente responde "10 meses"? Porque, em geral, a ideia prévia é que tudo funciona por proporcionalidade. Então, é muito comum as pessoas usarem este tipo de raciocínio. Embora se trate de um crescimento exponencial e não linear.

Exemplos:

Uma Vitória Régia duplica sua superfície todos os meses. Se levou cinco meses para cobrir metade de um pequeno lago, quantos meses seriam necessários para cobrir tudo?

Resposta: 10 meses

Figura 33. Momento da sessão 9 onde PI apresenta um exemplo de conhecimento prévio como falsa ideia ou ideia equivocada

Fonte: elaboração própria

Na sequência do curso, PI comentou que, no caso do TP, o aluno pode cometer erros ao aplicar o TP em qualquer situação, como, por exemplo, em triângulos que não são retângulos. A seguir, PI apresentou um exemplo de situação problema em que o aluno aplica o TP em um triângulo que não é retângulo (Figura 34).

Caso em que o aluno aplica o Teorema de Pitágoras em um triângulo que não é retângulo

Como você pode ver na figura, a distância do caracol até a ponta da árvore é de 8m e a distância da formiga até a ponta da árvore é de 6m. A árvore tem 5m de altura. A que distância estão o caracol e a formiga?



Figura 34. Momento da sessão 9 onde PI apresenta um exemplo de situação problema onde o aluno aplica o TP a um triângulo não retângulo

Fonte: desconhecida

A seguir, PI explicou que alguns alunos poderiam pensar que o triângulo formado pelos lados de 6m, 8m e a distância do caracol à formiga é um triângulo retângulo. De fato, é praticamente, mas não inteiramente (um cálculo rápido nos permite ver que, se fosse, sua "hipotenusa" iria medir 10m, e a área do triângulo seria 25m^2 ou 24m^2 , dependendo de como tomarmos como base a lado que mede 10m ou aquele que mede 6m). Neste caso, o aluno poderia ter uma ideia equivocada de aplicar o TP a qualquer triângulo e não apenas para o caso de triângulo retângulo.

Em seguida, PI perguntou se, alguma vez, os professores identificaram esse tipo de conhecimento prévio em seus alunos. P4 respondeu dizendo que, como já havia comentado antes, em sua experiência, a professora de ciências de sua escola já havia usado o TP com os alunos, quando trabalhou o conceito de força, antes que P4 tivesse trabalhado o TP nas aulas de matemática para o mesmo grupo de alunos e, essa situação, gerou nos alunos ideias equivocadas sobre o TP, por exemplo, que ele poderia ser aplicado a qualquer triângulo. A seguir, P6 comentou que, em sua experiência, ela já encontrou alunos que haviam ouvido falar do TP, mas não de maneira equivocada.

Na continuação da sessão, PI apresentou o segundo indicador do componente conhecimentos prévios do CAD cognitivo "os significados pretendidos podem ser alcançados (eles têm uma dificuldade gerenciável)". Para ajudar na compreensão desse indicador, PI propôs a questão "dos seguintes casos quais vocês consideram estar dentro da zona de desenvolvimento proximal dos alunos?". Antes de expor os casos, PI explicou que os professores deveriam pensar no contexto dos seus alunos e opinar sobre quais situações consideravam que, com a ajuda do professor, os alunos poderiam aprender.

O primeiro caso tratava-se da comprovação do TP pela terna pitagórica 3, 4 e 5. PI perguntou aos professores "vocês consideram que este caso está dentro da zona proximal dos alunos? Ou seja, os alunos, com a ajuda do professor, podem entender e depois resolverem sozinhos?". A seguir, todos os professores concordaram que o primeiro caso exemplificado poderia ser entendido por seus alunos.

A seguir, PI apresentou um segundo caso, que tratava da demonstração do TP por cálculo diferencial, e perguntou aos professores: "este caso está dentro da zona de

desenvolvimento proximal dos seus alunos?". Rapidamente os professores responderam que seus alunos não entenderiam essa demonstração.

Continuando, PI perguntou sobre um terceiro caso, que tratava da demonstração geométrica que em lugar de triângulos utiliza figuras semelhantes. Nesse sentido, PI perguntou aos professores se essa seria uma demonstração razoável para seus alunos. P1 imediatamente respondeu que sim. No entanto, PI perguntou se haveria alguma restrição para fazer esse tipo de demonstração. Considerando que nenhum professor respondeu outra coisa, PI comentou que considerava ser possível fazer essa demonstração para alunos do Ensino Básico, se ela estivesse bem desenhada e contasse com o apoio do professor. Nessa perspectiva.

Na sequência, em relação a um quarto caso apresentado, PI perguntou: "e a demonstração algébrica? Poderia ser apresentada? Bom, depende dos alunos, certo?" Respondendo a pergunta, P5 respondeu que dependendo do grupo de alunos seria possível sim, alguns grupos entenderiam e outros não. Nessa mesma linha, P1 disse que alunos do Ensino Médio entenderiam melhor.

Nessa perspectiva, PI comentou que, fazendo um link com isso, porque pode ser que algum aluno que já esteja muito mais avançado poderia entender essa demonstração e isso tem a ver com o segundo componente *adaptação curricular às diferenças individuais* do CAD cognitivo. A seguir, PI apresentou o indicador deste componente: "estão incluídas atividades de ampliação e reforço". Como forma de promover a discussão, PI perguntou: "que tipo de atividades deveriam ser oferecidas no caso em que a turma apresenta diversidades?". Nessa perspectiva, P1 comentou que para isso poder-se-ia partir de atividades com um nível baixo de dificuldade, garantindo, assim, o engajamento de todos os alunos nas atividades propostas.

Na sequência, PI comentou que, em uma sala de aula, pode haver muita diversidade de alunos e, inclusive, podem haver alunos com algum tipo de limitação física ou mental. Nessa perspectiva, P7 comentou sobre a necessidade de planejar atividades com diferentes níveis de dificuldades e com as adaptações necessárias para incluir o máximo possível a todos os alunos. P7 contou sobre algumas experiências particulares de diversidade de alunos para os quais teve que adaptar as situações de aula.

Continuando, PI comentou que diferentes pesquisas científicas demonstram que os alunos são diferentes e, portanto, deve-se contemplar um tratamento a diversidade. Contudo,

as condições das instituições de ensino, muitas vezes, não nos dão espaço, formação e ferramentas para trabalhar essas diferenças. Por um lado, nós temos os resultados científicos apontando que devemos ter em conta uma adaptação às diferenças de aprendizagem de cada um, mas, por outro lado, a administração deixa os professores um pouco abandonados nesse sentido. Todo o peso cai sobre o professor. Ou seja, é uma proposta que está muito bem teoricamente, mas que na prática não funciona.

Nessa perspectiva, PI explicou que, o que se entende por diversidade, é muito diverso. Em todas as salas de aula existe o que podemos chamar de "diversidade cognitiva". Quando falamos de diferenças individuais, pode-se pensar em estilos de aprendizagem. Não é necessário pensar apenas em uma limitação mental ou física, previamente diagnosticada, mas podemos pensar que todos são diferentes. Ou seja, cada aluno tem um "estilo" de aprendizagem, alguns vão aprender mais visualizando, outros contando, outros escrevendo, outros escutando, outros fazendo os exercícios, etc. Se entrarmos nessa ideia, podemos também ampliar a discussão nesse sentido, porque temos que considerar que todos são diferentes. PI destacou ainda que as diferenças cognitivas vão estar em qualquer grupo. Além dos diferentes estilos de aprendizagem, podem haver diferentes desenvolvimentos cognitivos, etc. Mas, também há outros tipos de diversidades. Por exemplo, tudo que está relacionado ao tema da Etnomatemática defende que há também uma diversidade cultural, que é uma diversidade relativa. Por exemplo, se tu estás trabalhando em um centro que atende aos povos nativos de uma determinada região é muito provável que não sejam tão diversos culturalmente, aí pode haver uma diferença entre a cultura do professor e a cultura do grupo. E isso é muito diferente, por exemplo, na Espanha, onde numa mesma turma pode haver alunos que são do Marrocos, do Paquistão, da China, etc. Dentro da sala de aula tem muita diversidade cultural. E pode haver também a diversidade religiosa, que, por exemplo, pode haver alunos que são de religião islâmica, e que vão ter uma professora mulher, e isso pode ser um problema para que aceitem a autoridade feminina. Podem haver, às vezes, diferenças sociais, culturais e religiosas, mas, independentemente disso, a que vai estar sempre presente é a diversidade cognitiva. A seguir, cada professor comentou um pouco sobre as diversidades que identificavam em seus locais de trabalho.

Nesse sentido, PI destacou que, para ajudar no entendimento do indicador "adaptação curricular às diferenças individuais" do CAD cognitivo, seria interessante tentar responder algumas questões provocativas: "que tipos de ações os professores deveriam realizar para contemplar todas as diferenças individuais? E num contexto de aula que é online (como no caso agora da pandemia)?" ; "você consideram factível considerar esse tratamento às diferenças individuais?"; "nas suas experiências, até que ponto você podem contemplar essa adaptação às diferenças individuais? Podem citar alguns exemplos?". Para cada questão houve uma pequena discussão entre os professores a esse respeito.

Na sequência da sessão, PI apresentou o componente *aprendizagem* do CAD cognitivo, dizendo que esse componente tem relação com a ideia de se realmente existiu aprendizagem. A seguir, PI apresentou o indicador do componente aprendizagem "os vários modos de avaliação mostram a apropriação dos conhecimentos/competências pretendidos ou implementados".

Nessa perspectiva, PI explicou que a aprendizagem implica pensar em tipos de erros que são mais habituais quando se trabalha determinado tema e em quais são as dificuldades mais importantes que os alunos apresentam ao se trabalhar esse tema. E, a partir disso, é importante que o professor pense em soluções para isso. Nesse sentido, PI destacou, ainda, que é importante pensar no que se entende por erro e no que se entende por dificuldade. Em relação ao erro, PI comentou que falamos de erro quando o aluno realiza uma prática matemática que não é válida do ponto de vista da matemática. O que não se pode dizer que o erro não possa ser aproveitado desde o ponto de vista da didática, como utilidade para aprendizagem, por exemplo. Por outro lado, a dificuldade tem a ver com o número de alunos que cometeram o mesmo erro. Podemos dizer que algo é muito difícil quando muita gente se equivoca. E algo é muito fácil quando todo mundo resolve o problema ou tarefa proposta. Todas as teorias sobre o ensino-aprendizagem da matemática coincidem na necessidade de identificar os erros dos alunos no processo de aprendizagem, determinar suas origens e organizar o ensino levando em consideração essas informações.

Depois, PI perguntou: "quais são os erros mais habituais entre os alunos quando trabalham o TP?". Na sequência, os professores responderam que um erro muito comum era os alunos confundirem a hipotenusa com algum dos catetos e, também, comentaram sobre

erros nas operações algébricas e aritméticas quando os alunos aplicam o TP para identificar o valor de um dos lados do triângulo retângulo conhecendo-se os outros dois.

A seguir, PI apresentou alguns erros mais comuns que os alunos habitualmente cometem quando trabalham o TP, são eles: a) na aplicação do TP a qualquer tipo de triângulo; b) na aplicação incorreta do TP, diferenciando o que são os catetos da hipotenusa; c) ao cometer erros de cálculos quando se aplica o TP para calcular determinada ^[1]_{SEP} distância; d) ao fazer demonstrações incorretas; e) ao entender o TP como distância em um espaço métrico.

A continuação, PI destacou que as dificuldades que os alunos habitualmente cometem, quando trabalham o TP, podem estar relacionadas aos conteúdos matemáticos. Por exemplo, se queremos fazer uma demonstração do TP, pode ser complicado porque tem a ver com a dificuldade de raciocínio abstrato dos alunos. Ou, também, podem ter a ver com as dificuldades relacionadas com os professores. Às vezes, os alunos podem ter dificuldades, porque o professor explica mal determinado assunto. Ou, ainda, podem haver dificuldades relacionadas com a organização do centro escolar. Por exemplo, organização do centro onde há turmas multisseriadas ou onde há uma pedagogia teórica por trás, mas que não funciona naquele determinado contexto. E, por último, as dificuldades podem estar relacionadas com os alunos. Continuando, PI questionou: "como eu deveria fazer minha avaliação para que ela seja idônea/adequada?". A partir do questionamento de PI, os professores contaram um pouco como costumam fazer suas avaliações.

Depois, PI comentou que dever-se-ia fazer uma avaliação formativa para identificar que coisas os alunos não aprenderam. Conseguir aprendizagem em termos de competências. Quando o professor desenha essa avaliação formativa, deve considerar todos esses erros e dificuldades. Inclusive deve desenhar a sequência didática de modo a pensar em maneiras de solucionar essas dificuldades e esses erros. Isso obriga o professor a fazer uma análise de quais são as dificuldades mais habituais nos alunos sobre esse tema e quais são os erros mais habituais e mais ou menos ter isso em conta no processo de aprendizagem e na avaliação para que no final haja um êxito na aprendizagem. Por fim, PI destacou que o professor deve ter em conta as competências apresentadas na base curricular de referência.

PI explicou que a *alta demanda cognitiva*, outro componente do CAD cognitivo, é o outro lado da moeda da *riqueza de processos*, componente do CAD epistêmico. O primeiro

indicador do componente *alta demanda cognitiva* é "processos cognitivos relevantes são ativados (generalização, conexões intra-matemáticas, mudanças de representação, conjecturas, etc.)". Nessa perspectiva, PI comentou que a ideia é que, de todos os alunos, o professor possa exigir o máximo possível, considerando as diferenças individuais. Com o tratamento da diversidade, para alguns pode-se colocar mais exigências que para outros. Então, que sejam propostas tarefas, ao menos para alguns, que os obriguem a fazer esses processos relevantes para a atividade matemática. Pelo menos para alguns, por exemplo, cheguem a que façam a demonstração algébrica do TP, e para outros apenas a demonstração geométrica genérica. Propor que eles resolvam problemas do TP onde eles tenham que utilizar as diferentes representações do Teorema.

Na sequência, para auxiliar na compreensão do que havia explicado, PI propôs que os professores resolvessem uma determinada situação proposta. Durante os próximos minutos desta sessão do curso, os professores discutiram como resolver a situação proposta para chegarem a uma possível resposta. Após algum tempo, PI apresentou algumas possíveis formas de resolver o problema em questão (Figura 35).

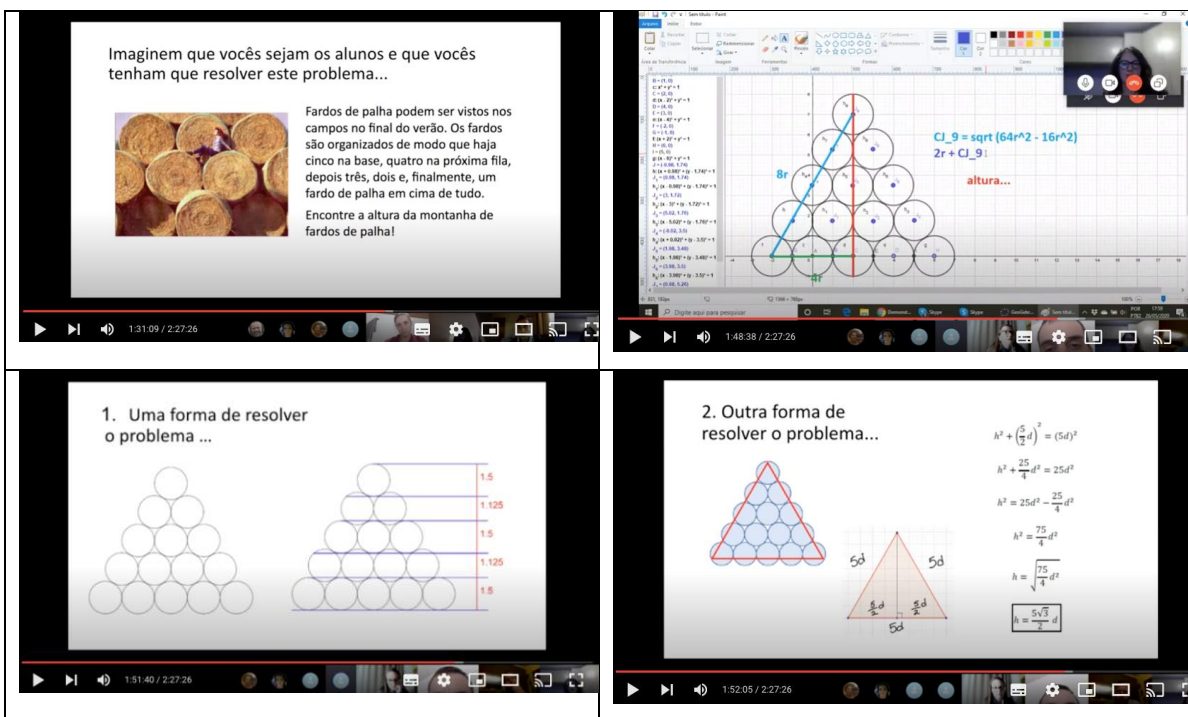


Figura 35. Problema e soluções apresentadas pelos professores
 Fonte: elaboração própria.

A continuação, PI explicou que, na verdade, o problema apresentado tratava-se de um problema de modelagem matemática, adaptado de Borromeo Ferri (2011; 2018). A seguir, PI explicou que Borromeo estabelece algumas fases para um ciclo da modelagem matemática. A primeira coisa que apresenta é uma situação real e representação do problema através da imagem. Depois, a representação mental da situação, que pode ter a ver com as experiências de cada pessoa, com os conhecimentos extra matemática da pessoa. Em alguns lugares é comum ter esse tipo de material, então eles têm uma ideia de como se organiza a representação mental, tem a ver com essa experiência própria. Depois, transforma para o modelo real, então pensar em círculos ao invés de fardos de palha e desenhar a situação. Uma das possibilidades seria desenhar a mulher com uma linha, supor que ela tem 1,70 e, as duas resoluções que foram apresentadas, foram por modelo matemático, por adição múltipla da altura da mulher ou então pelo uso do TP. O resultado matemático, resultado do modelo, deve ser de aproximadamente sete para a altura. PI concluiu, dizendo que a ideia de apresentar essa atividade era dar um exemplo de tarefa que provoca um processo relevante na atividade matemática.

Por fim, PI comentou que os processos que estão envolvidos para resolver o problema proposto são: compreender o problema a partir do enunciado ou da imagem; desenhar um plano para resolver esse problema; fazer uma simplificação da figura; fazer uma representação; argumentar e validar o resultado; examinar a solução e validar levando em conta se resultado é um resultado factível levando em conta o contexto.

Nessa perspectiva, PI comentou que a alta demanda cognitiva te leva à riqueza de processos e a processos metacognitivos. A metacognição é o que permite que os processos relevantes tenham algum ponto de chegada, um porto. Por exemplo, para um determinado tema o aluno faz um planejamento e tem que cumprir alguns passos do planejamento e tem que dar-se conta se esse planejamento funcionou ou não e modificar o planejamento, caso ele não funcione. A parte metacognitiva é a parte que regula e permite chegar ao final dos processos relevantes para resolver o problema. No planejamento de como resolver o problema está a metacognição.

Por fim, para a próxima sessão, PI solicitou que os professores pensassem em duas atividades de aula que contemplassem dois significados parciais distintos do TP.

Sessão 10: Estudo dos CAD de Meios, Afetiva, Ecológica e Interacional

A décima sessão do curso ocorreu no dia 02 de junho de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos. Estiveram presentes os professores participantes P1, P2, P3, P4, P5 e P7. Além de PI, ministrante do curso, esteve também presente o professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, que participou como ouvinte. PI iniciou a sessão ressaltando que seriam apresentadas as quatro outras dimensões dos CAD: a de Meios, a Afetiva, a Ecológica e a Interacional.

CAD Mediacional ou de Meios

PI iniciou a sessão pelo CAD de Meios, ressaltando que se tratava da dimensão que tem a ver com os recursos utilizados num processo de instrução, que ajudam a ensinar uma matemática adequada e a proporcionar a aprendizagem dos alunos. Para provocar a discussão, PI propôs a seguinte pergunta: "o que vocês entendem por uso de recursos em um processo de instrução?". Após uma breve discussão entre os professores participantes, PI comentou que os

recursos são instrumentos/ferramentas, que, algumas vezes, são usados para dar apoio às diferentes formas de representação e, em outras vezes, como referência direta. Os recursos ajudam a construir o conhecimento fornecendo significados (parciais) do conteúdo curricular.

Na sequência da sessão, PI perguntou: vocês selecionaram algum recurso que consideram interessante para uma aula de TP? Poderiam apresentar agora? Quem quer começar? A seguir, os professores falaram sobre alguns recursos que haviam utilizado. E, depois, PI comentou que, além dos recursos que os professores haviam apresentado, poder-se-ia destacar algumas evidências sobre a importância que os professores deram em relação ao uso de recursos nos processos de instrução desenvolvidos neste curso.

Nesse sentido, PI destacou a seguinte fala de P4: “Eu quero perguntar o que pode ser considerado nesta aula? Por exemplo, nós podemos considerar projetor? Uso de projetor ou não? Vai ser só quadro?” A seguir, PI comentou que, no comentário destacado, percebe-se a preocupação de P4 com relação aos recursos que seriam usados para fazer a aula, se seria projetor, quadro negro, etc.

Logo depois, PI destacou um diálogo entre P1, P3 e P4 na etapa de *planejamento da aula* do Ensino Fundamental do LS desenvolvido. PI ressaltou que, no diálogo entre os professores, eles demonstraram uma preocupação sobre quais recursos tecnológicos seriam usados durante a aula, tais como vídeos, e que programas seriam usados para reproduzir os vídeos no momento da aula.

Depois, PI apresentou outro diálogo entre P6 e P5 onde elas também falavam de recursos para aula, tais como instrumentos de desenho como a régua e o quadro-negro para representar as ideias dos alunos durante a aula.

Por último, PI destacou, ainda, um comentário feito por P2: “Ao mesmo tempo, também, mostrar no *GeoGebra* o lance do quadrado de lado um, que a diagonal vira raiz de dois, que também é hipotenusa. E, então, fazer isso depois.” PI destacou que o comentário de P2 considerava o uso de materiais tecnológicos, como o software de geometria dinâmica *GeoGebra*.

Logo depois, PI ressaltou que, tanto nos exemplos de recursos que os professores apresentaram, para o caso particular das aulas sobre o TP, quanto nas evidências destacadas das etapas dos LS desenvolvidos, pode-se perceber que, quando falamos especificamente de

materiais e não apenas da ideia geral recursos podemos destacar dois tipos de materiais no processo de ensino da matemática: 1) são os materiais manipulativos e 2) os recursos tecnológicos, particularmente as TIC que consistem em tecnologias da informação, assim como quaisquer formas de transmissão de informações e correspondem a todas as tecnologias que fazem a mediação entre os processos informacionais e comunicativos.

A partir disso, PI questionou o que poderiam ser exemplos de materiais manipulativos e destacou algumas imagens de materiais manipulativos. Além disso, PI perguntou o que pode-se considerar como recursos tecnológicos no ensino da matemática. E, após uma breve discussão entre os professores, PI destacou alguns exemplos de materiais informáticos que são úteis para fazer mapas conceituais; criar questionários, jogos e conteúdo; criar blogs e *webquests*; objetos digitais de aprendizagem; websites com atividades online; aplicativos para o celular; atlas e mapas virtuais; softwares para a construção de conceitos, conteúdo específico, simuladores; robótica e iniciação a programação; e jogos digitais,

Na sequência da sessão, PI destacou que os materiais poderiam servir para criar problemas, fazer argumentações, fazer representações, ou como modelo que concreta definições e propriedades, etc.

Na sequência da sessão, PI apresentou alguns materiais que servem para criar problemas e também para fazer demonstrações, do tipo visuais, por exemplo. E, além disso, apresentou alguns materiais para trabalhar o TP como, por exemplo, o famoso quebra cabeça de *Perigal*, que, por um lado permite montar o quadrado sobre a hipotenusa e, por outro, os quadrados dos catetos. PI também destacou um vídeo que mostra seis demonstrações visuais do TP e destacou que o vídeo estava mais para uma TIC, mas a partir desta TIC poder-se-ia construir materiais manipulativos para a demonstração do TP.

Logo depois, PI perguntou sobre quais materiais e como eles poderiam ser usados. Nesse sentido, PI enfatizou que os materiais manipulativos podem não ser apropriados para as tarefas matemáticas e, além disso, podem ser usados de modo inadequado. Um exemplo seria a demonstração do TP por pesos ou por volume, como visto anteriormente no curso. Não são os materiais mais adequados, porque o professor utiliza materiais ruins e explica de maneira inadequada, não distingue bem o tema de peso ou de volume com a área. Ou o contrário, pode ser que os materiais não sejam apropriados, mas o professor o utiliza de modo adequado.

Sabendo do problema, o professor explica claramente que uma coisa é o peso ou volume e outra coisa é a área e evita, assim, uma possível confusão entre os alunos.

Na sequência da sessão, PI destacou que há também os casos onde os materiais manipulativos podem ser apropriados e bem utilizados. É o caso, por exemplo, das cartolinas, que é um material adequado para fazer a demonstração do TP dos quatro triângulos que se recolocam, com o professor manipulando. Ou pode-se solicitar que cada aluno construa com sua cartolina, com medidas diferentes, e ver que para todos acontece a mesma coisa. O material já é adequado, mas há um nível ainda mais adequado se o professor faz cada aluno construir com medidas diferentes do que se ele fizer somente de um caso particular.

A seguir, PI comentou que um segundo componente do CAD de Meios tem a ver com o número de alunos, horários e condições da aula. Em relação ao número de alunos, PI enfatizou que um número grande ou pequeno depende da organização do grupo de acordo com a atividade, o número e a distribuição de estudantes possibilitam a realização do ensino pretendido.

Sobre o horário, PI destacou que o horário da aula deve ser adequado, pois o horário afeta a conduta dos alunos. E, em relação as condições da sala de aula, PI destacou alguns aspectos como quadro negro, projetor, internet (interconectividade), ruídos externos, a sala de aula e a distribuição dos alunos devem ser adequadas para o desenvolvimento do processo instrucional pretendido.

Por último, PI destacou o componente do CAD de Meios que tem a ver com o tempo de ensino e o tempo de aprendizagem. Nessa perspectiva, PI explicou que, a verdade é que sempre falta tempo. Mas, o problema não é tanto a falta de tempo, mas como usamos o tempo que temos em aula. E deveríamos usar o tempo que temos para as coisas importantes. Para tanto, PI perguntou: "pensemos para o caso particular do TP o que seria importante, então?". Nessa perspectiva, PI seguiu perguntando e comentando o que segue: "como aproveitar (otimizar) o tempo para trabalhar o TP?"; "em que aspecto do TP você dedicaria mais tempo?"; "já que o TP é um dos poucos Teoremas que poderia ser demonstrado na Educação Básica seria importante fazer um esforço para demonstrá-lo"; "se trabalhamos com a ideia de que saber matemática é saber resolver um problema contextualizado ou aplicá-lo a diferentes contextos é importante dedicar tempo para isso e trabalhar com problemas como o do bloco

de palhas ou da escada de incêndio."; e "dedicar tempo adequadamente aos conhecimentos prévios. Às vezes, não se trabalha os conhecimentos prévios, mas pode ser também que o tempo que se dedica aos conhecimentos prévios é tanto que não sobra tempo para trabalhar o problema que se quer discutir”.

CAD Afetivo

Na sequência da sessão, PI apresentou o CAD Afetivo, que tem a ver com os aspectos emocionais. Para isso, PI apresentou algumas evidências encontradas nos LS desenvolvidos. Por exemplo, um diálogo identificado na etapa de *planejamento da aula* de pesquisa onde pode-se perceber a preocupação dos professores em usar materiais que cativam a atenção dos alunos, coisas que sejam interessantes e que, de certa forma, justificam a importância dos alunos estudarem este conteúdo. A seguir, PI destacou um comentário de P7 na etapa de *planejamento da aula* de pesquisa no Ensino Médio, conforme segue: “Como faz diferença a forma como a gente aborda, pois isso influencia muito na forma como eles vão enxergar, tanto na aplicação, quanto na utilidade. Muitas vezes, acaba ficando uma coisa fútil, porque a gente lida de uma forma super direcionada, super descontextualizada, como se aquilo não fosse servir para nada mesmo além daquela lista de exercícios. Então, como faz diferença isso, né?” PI, destacou que, o comentário evidenciava a importância de abordar-se o conteúdo de maneira contextualizada e relacionada com os interesses e necessidades dos alunos.

A seguir, PI destacou que, quando falamos em interesses dos alunos, é complicado, explicando que podemos apresentar situações que se nota claramente a utilidade na vida cotidiana e profissional, mas pode ser que isso não interesse ao aluno de nenhuma maneira. Uma coisa é apresentar uma situação onde se evidencie que a matemática é útil para resolver problemas da vida cotidiana e outra coisa é que essa situação interesse aos alunos. Digamos que, para interessar ao aluno, há que ter um elemento a mais.

A seguir, PI também comentou que, de certa maneira, a tarefa tem que estar a uma distância razoável do que os alunos podem desenvolver para que se sintam realmente desafiados a resolver a atividade. Mas, pode ser que essa condição seja atendida e, ainda assim, pode ser que o que propomos não interesse de nenhuma maneira ao estudante. Nesse sentido,

há que se preocupar que a atividade seja útil e que seja desafiadora, mas isso não é suficiente para despertar o interesse dos alunos.

A seguir, PI citou um exemplo sobre desenvolver com os alunos uma pesquisa estatística na escola e, nessa perspectiva, destacou que, quando se trabalha conceitos de estatística com informações que não tem a ver com os alunos, é muito provável que não desperte o interesse deles. Mas, quando se propõem atividades que tragam coisas que estão em voga entre os estudantes pode ser que desperte mais o interesse. Por exemplo, perguntar sobre músicos ou gêneros musicais favoritos ou ainda sobre quantas horas por dia o aluno passa nas redes sociais e o que mais faz nesses meios.

Na sequência da sessão, PI apresentou o componente *atitudes* do CAD afetivo que tem a ver com a promoção do envolvimento dos estudantes nas atividades, a perseverança, a responsabilidade, etc. E se a argumentação em situações de igualdade é favorecida; se o argumento é valorizado em si e não por quem o diz.

Depois, PI questionou: "como promover a implicação dos estudantes na realização das atividades? A responsabilidade ou perseverança?". Em seguida, PI explicou que, se não damos a cada aluno um status de pessoa com plenos direitos, o aluno pode se desmotivar. Além disso, PI enfatizou que um problema que é muito recorrente é aquele aluno que está em aula, mas que não faz nada. Então, se eu tenho um aluno que foi "maltratado" no sentido de que não se considerou o que ele diz, com o tempo esse aluno se desinteressa. Se o professor não fomentar o reconhecimento do que diz o aluno, não dará importância, pode dar a impressão que dá menor valor a essa pessoa. Isso é basicamente uma questão de psicologia, se eu tenho um grupo de pessoas e eu as trato de maneira desigual, se eu dou mais valor ao que diz um em relação aos demais, não escuto a todos, eu não explico para aquele que necessita ouvir mais uma vez a explicação, é provável que se sintam desmotivados. Então, uma forma de que o aluno se sinta valorizado e bem estimado no grupo é que, quando ele participa, se reconheça isso.

Na sequência PI perguntou: "por que os alunos que têm 11 ou 12 anos, muitas vezes, apresentam fobia ou medo em relação à matemática? A seguir, PI respondeu dizendo que este aluno pode pensar que é porque não serve para a matemática. Nessa perspectiva, uma saída seria argumentar que o esforço deve ser maior para conseguir perseverar na atividade (avaliar

o esforço e a dedicação na realização das tarefas) e uma estratégia seria respeitar a voz do aluno e promover aprendizagem significativa.

Por último, PI apresentou o componente *emoções*, que tem a ver com a promoção da autoestima, evitando rejeição, fobia ou medo da matemática, onde as qualidades estéticas e de precisão da matemática devem ser destacadas. Para tanto, PI perguntou: "encontrou algum caso de aluno que apresenta baixa autoestima ou fobia em relação à matemática? Como você lidou com essa questão?". A seguir, os professores fizeram alguns relatos de suas experiências que respondiam essas questões.

Depois, PI perguntou aos professores participantes o que havia ocorrido para eles decidirem ser professores de matemática e cada um contou um pouco da sua experiência particular para essa decisão.

Na sequência, PI explicou que a emoção é uma reação de tipo individual, bastante química, inclusive, quando tu te emocionas podes ficar vermelho ou suar. Estas emoções podem ser, por exemplo, de vergonha, de tristeza, de raiva, de felicidade, etc. A emoção é assim uma coisa muito primitiva. Depois, PI disse que o sentimento é um processo de elaboração da emoção. Ou seja, posso ter um certo medo, mas isso não significa que eu vou sair correndo de pânico. Tem situações que produzem um certo medo, que é a emoção básica, mas logo tenho um processo mais elaborado que é o sentimento de medo, que não significa que eu vou sair correndo imediatamente, vou pensar um pouco antes de sair. É um pouco mais elaborado que a ideia de emoção. Por fim, PI comentou que a afetividade significa como te afetam as coisas, tem a ver com a interação que o aluno apresenta com o grupo ou professor. E a interação te afeta. Por exemplo, tu como aluno te reprovos e isso te afeta. As emoções podem ser diferentes em uma pessoa ou outra que têm o mesmo tipo de implicação, os alunos podem ser afetados da mesma maneira, mas podem ter emoções diferentes. Concluindo, PI disse que ser professor, normalmente, tem relação com o caráter sólido e bem argumentado da disciplina, sensação de precisão.

CAD Ecológico

A continuação, PI explicou que outra dimensão dos CAD era a ecológica, que tem a ver com o entorno. PI também explicou que a palavra ecológica foi usada como uma metáfora,

é o nome um pouco estranho e metafórico, mas que quer dizer que é estar bem com o entorno em que tu te encontras, estar adaptado onde tu te encontras. PI também comentou que, se falamos do entorno de um processo de instrução, o que temos é o entorno curricular. E o indicador se refere a “se o conteúdo, sua implementação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares”. Nesse sentido, PI explicou que há o currículo oficial, que pode ser nacional, regional ou municipal. Mas, há também o currículo do centro (da escola, do departamento) e pode haver diferenças e contradições entre o currículo oficial e o currículo da instituição. E há também o que podemos chamar de "currículo oculto" que é tudo que tu acabas ensinando e trabalhando que não é explícito. É tudo que está oculto, que não aparece. O currículo oficial diz uma coisa e tu acabas por trabalhar outra. E tem também o currículo que é implementado na aula, e que deve estar acima de tudo relacionado com o currículo oficial. PI enfatizou que o professor deve seguir o currículo, mas também deve estar atento para fazer as mudanças necessárias e promover inovações didáticas, pois, muitas vezes, há situações que exigem mudanças, adaptações, etc.

A seguir, PI destacou que considera ser muito importante realizar conexões entre os conteúdos da matemática. Então, nesse sentido, se podemos fazer conexões com outras partes da matemática ou até mesmo conexões com outras disciplinas, seria fantástico. PI explicou que este indicador tem a ver com a ideia de fazer conexões da matemática avançada com a matemática do currículo e conexões entre os diferentes conteúdos matemáticos contemplados no currículo e, além disso, fazer conexões num contexto extra-matemático, com conteúdo de outras disciplinas do estágio educacional, como a física, a biologia, a história, etc.

A seguir, PI perguntou o que poder-se-ia entender por conexões. E explicou que, em primeiro lugar, para compreender a matemática, é importante fazer conexões entre os conteúdos e, logo, para que os alunos vejam a utilidade da matemática, para que saibam utilizá-la e que sejam competentes (isso tem a ver com o discurso das competências). Temos que procurar fazer os alunos verem onde se aplicam esses conhecimentos matemáticos, então, isso implica que saber matemática significa aplicá-la a diferentes contextos ou em diferentes disciplinas.

Logo depois, PI questionou como poder-se-ia realizar conexões intra matemáticas e interdisciplinares ao se trabalhar o TP. Nesse sentido, PI explicou que, por exemplo, no caso

particular do TP, o grupo da aula no Ensino Fundamental, além de fazer conexões intra matemáticas, fez conexões com a história, a geografia, e, inclusive, a filosofia. E que o grupo do Ensino Médio, que também fez uma atividade que tinha muitas conexões intra matemáticas, mas também havia uma conexão extra matemática, onde a atividade era aplicada a uma situação contextualizada.

Em seguida, PI destacou que existem muitos discursos sobre as conexões intra matemáticas. Há muitos discursos sobre a importância das conexões, para a compreensão matemática, mas também, por exemplo, para a modelagem matemática. Então, nesse sentido, há todo um consenso de dar importância às conexões. Quando falamos da complexidade dos objetos matemáticos e das conexões que existem entre eles, estávamos nos referindo às conexões intra matemáticas. Mas, além das conexões intra matemáticas, há também as conexões extra matemáticas que tem a ver com o entorno, com o contexto. Por exemplo, atividades de modelagem podem gerar conexões intra matemáticas ou extra matemáticas.

A continuação, PI explicou que a palavra conexão vem do universo de estudos do cognitivo e a conexão se divide entre intra matemática, que é quando se conecta algo matemático com outro algo matemático, por exemplo, conecto a ideia de circunferência com equação. E logo há também as conexões extra matemáticas, onde em alguma situação extra matemática cai sob o domínio de algum conceito matemático. Então, há que se trabalhar muito essas conexões extra matemáticas para que se veja as aplicações, sua utilidade, etc. E, dentro dessas aplicações, temos as outras disciplinas, do ensino básico, como física, química, história, etc.

A seguir, PI apresentou outro componente do CAD ecológico, a *utilidade sócio laboral*, cujo indicador tem a ver com se o conteúdo é útil para inserção sócio laboral. PI destacou que, nesse caso, estamos nos referindo ao social e ao que se refere ao mundo do trabalho. PI explicou que o laboral é uma coisa que tem a ver com o ensino básico, então temos que dar alguns conhecimentos básicos para que o aluno não seja um analfabeto e possa entender um pouco esta sociedade complexa e tal, além de é claro prepará-lo para o trabalho. Mas, para o aspecto social, também, temos que considerar os aspectos culturais e sociais. Por exemplo, se tu tens alunos cujo o contexto destes alunos é, por exemplo, ajudarem os seus pais a venderem na feira, trabalhar aritmética é uma coisa fácil e corriqueira para eles. Mas, se tu

trabalha a geometria, pode ser que para eles seja mais difícil verem a utilidade disso na vida cotidiana.

Depois, PI explicou o componente *inovação didática*, cujo indicador tem a ver com a inovação baseada em pesquisa e prática reflexiva (introdução de novos conteúdos, recursos tecnológicos, formas de avaliação, organização da sala de aula, etc.). PI explicou que a inovação didática seria a contraposição em relação ao currículo (como uma oposição de seguir um currículo). Digamos que o professor tem que seguir um currículo, mas, ao longo do desempenho da profissão de professor, passam vários currículos. Então, nem sempre vamos estar pendentes de seguir um currículo, devemos estar atentos à todas as possibilidades para estarmos abertos às inovações didáticas que surgem. PI destacou ainda que uma inovação é uma mudança. Então, por exemplo, agora com o tema do Coronavírus, os professores haviam feito uma inovação didática que foi adaptar às aulas ao modo online e de maneira remota. Mas, uma coisa é uma inovação e outra coisa é que a inovação seja boa. Este seria um pouco o resultado global. Os professores tiveram que inovar de uma certa maneira obrigatória. E essa inovação pode ser boa ou ruim. A questão é que podem haver inovações que podem ser negativas e outras que podem ser muito positivas. PI destacou, ainda, que haver-se-ia que averiguar que mudanças foram positivas e o que poder-se-ia absorver disso.

CAD Interacional ou de Interação

Nesta sessão, PI apresentou também o CAD de interação, cujo primeiro componente tem a ver com a *interação professor-aluno*. PI destacou que, nesse componente, o primeiro indicador é "o professor faz uma apresentação adequada do tópico". Ou seja, se a apresentação é clara e bem organizada, se ele não fala muito rápido e enfatiza os principais conceitos do tópico, etc. PI destacou que, quando o professor interage com seus alunos, uma questão fundamental é que ele seja claro. Ou seja, que o problema não seja o próprio professor causar uma confusão aos alunos, por não compreenderem o que está no quadro ou porque não entendem o que o professor fala. Muitas vezes, o professor pode causar muita confusão. Ou porque fala muito baixo, ou porque não tem boa dicção ou fala uma linguagem muito distante da do aluno. A parte que corresponde ao professor tem que ser minimamente compreensível.

A seguir, PI destacou outro indicador do componente *interação professor-aluno*, que tem a ver com se os silêncios dos alunos, suas expressões faciais, suas perguntas são interpretadas corretamente, é feito um jogo apropriado de perguntas e respostas.

Depois, PI explicou que havia outro indicador que tem a ver com o respeito aos alunos. Ou seja, o primeiro era que o professor, como emissor, tem que ser minimamente claro, segundo é que o professor deve aproveitar a interação para resolver as dificuldades dos alunos. E o terceiro é que isso não pode ocorrer de uma forma autoritária, nem repreensiva, e, sim, de uma forma respeitosa com os alunos.

A seguir, PI explicou o indicador "são usados diferentes recursos retóricos", explicando que, pode ser que o professor seja muito respeitoso, mas pode ser que ele seja desagradável e termine fazendo com que os alunos não prestem atenção no que se está trabalhando. Por fim, PI explicou que, como resultado disso, é que não haja exclusão. Porque, muitas vezes, o professor pode tratar os alunos com respeito, mas no final pode acabar excluindo-os. Então se deve incluir os alunos na dinâmica das aulas para não haver a exclusão.

A continuação, PI explicou que há um componente do CAD de interação relacionado à *interação entre os estudantes*. Nesse sentido, o professor deve estimular a participação e a colaboração entre os alunos e sugerir atividades que estimulem a interação entre eles. PI explicou que um indicador desse componente tem a ver com favorecer a que os alunos incluam uns aos outros e não excluam, evitando o bullying, por exemplo.

Depois, PI explicou que também há um componente que tem a ver com promover a *autonomia* dos estudantes. E, nesse sentido, o professor deve promover atividades de exploração, formulação e validação que permitam que os alunos assumam a responsabilidade pelo estudo e promovam a autonomia.

Por último, PI apresentou o componente que tem a ver com a avaliação formativa, cujo indicador tem relação com a observação do progresso cognitivo dos alunos. PI enfatizou que, se o professor faz uma atividade rica em processos, pode observar sistematicamente a evolução e aprendizagem dos estudantes. Nesse caso, não é necessário fazer apenas uma avaliação ao final da unidade didática desenvolvida, mas, ao longo do processo, realizar uma avaliação sistemática do progresso dos estudantes.

Implementação da fase 3 do curso: reflexão e redesenho com os critérios de adequação didática

Esta fase do curso corresponde a parte da sessão 11 e as sessões 12, 13, 14 e 15. Além disso, compreende o momento onde os professores participantes utilizam os CAD como ferramenta para pautar sua reflexão. Na sessão 11, os professores realizaram uma análise individual, pela óptica de uma das dimensões dos CAD, da aula sobre o TP implementada na fase 1 do curso. Nas sessões 12 e 13, os professores apresentaram as reflexões individuais, com os CAD, da aula e reflexionaram, em conjunto, sobre que aspectos considerar para um redesenho da aula. E, nas sessões 14 e 15, os professores participantes realizaram efetivamente o redesenho da aula.

Sessão 11: Uma sessão assíncrona

A décima sessão não aconteceu de modo síncrono, pela plataforma *Skype*, e correspondeu a realização das seguintes atividades (realizadas entre os dias 2 e 9 de junho de 2020):

- 1) Visualização do vídeo da entrevista do Prof. Dr. Vicenç Font, da Universidade de Barcelona, orientador desta pesquisa de doutorado, disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=YZ1A0Gx3F1E>>.
- 2) Leitura do artigo Breda, A., Font, V., Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, 32(60), 255-278. <disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n60/0103-636X-bolema-32-60-0255.pdf>>.
- 3) Preparação para a sessão de reflexão da aula de pesquisa sobre o TP desenvolvida no Ensino Fundamental com os CAD. Para isso, cada professor participante ficou responsável por fazer uma análise da aula de TP, implementada no Ensino Fundamental, pelo prisma de uma das dimensões dos CAD. P1 e P2 ficaram responsáveis por fazer a análise pela perspectiva do CAD epistêmico, P3 pelo viés do CAD de meios, P4 pela óptica do CAD ecológico, P5 pela perspectiva do CAD afetivo, P6 pelo ponto de vista do CAD interacional e P7 e P8 pelo CAD cognitivo.

Sessão 12: Reflexão com os CAD (parte 1)

A décima segunda sessão do curso foi realizada no dia 09 de junho de 2020, teve duração de duas horas e quarenta minutos, e contou com a presença de todos os professores participantes (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), de PI, da professora Dra. Adriana Breda e do professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva. Estes dois últimos participaram apenas como observadores ouvintes.

No final da décima sessão do curso, PI solicitou que cada professor participante fizessem uma reflexão individual da aula sobre o TP, implementada no Ensino Fundamental na primeira fase do curso, a partir do viés de uma das dimensões dos CAD. Com a análise individual realizada, nesta sessão do curso e na seguinte, cada professor apresentou os resultados encontrados para todos os demais professores participantes do curso.

Nesta sessão, ficou combinado que, após a finalização da exposição de cada um dos professores participantes, se realizaria uma discussão entre todos os participantes e PI para destacar os aspectos que, de alguma forma, poderiam não haver sido observados na reflexão individual apresentada. Feito isso, PI apresentaria, também, alguns apontamentos registrados a partir do que o grupo de professores apresentou na etapa de *reflexão da aula* do LS (primeira fase do curso de extensão), quando os professores fizeram a análise sem os CAD e, a partir disso, seriam anotadas sugestões para um redesenho da aula.

A seguir, PI mostraria para os professores uma análise com os CAD da aula feita por especialistas. E, depois, se tomariam as sugestões para o redesenho da aula feita pelos professores adicionando aspectos da análise da aula com os CAD feita por especialistas. Nesta sessão, foram trabalhadas as CAD de meios, ecológico e epistêmico. A seguir descreve-se o que ocorreu.

Reflexão da aula realizada por P3 sob a ótica do CAD de Meios

A exposição dos resultados identificados por cada professor começou pela análise realizada pela professora P3, que ficou responsável por fazer uma reflexão pela ótica do CAD de meios. P3 apresentou alguns slides de *PowerPoint* (programa para exibição gráfica) que organizavam sua reflexão por componentes e indicadores do CAD em questão. A Figura 36 mostra o conjunto de slides apresentados por P3 em sua exposição.

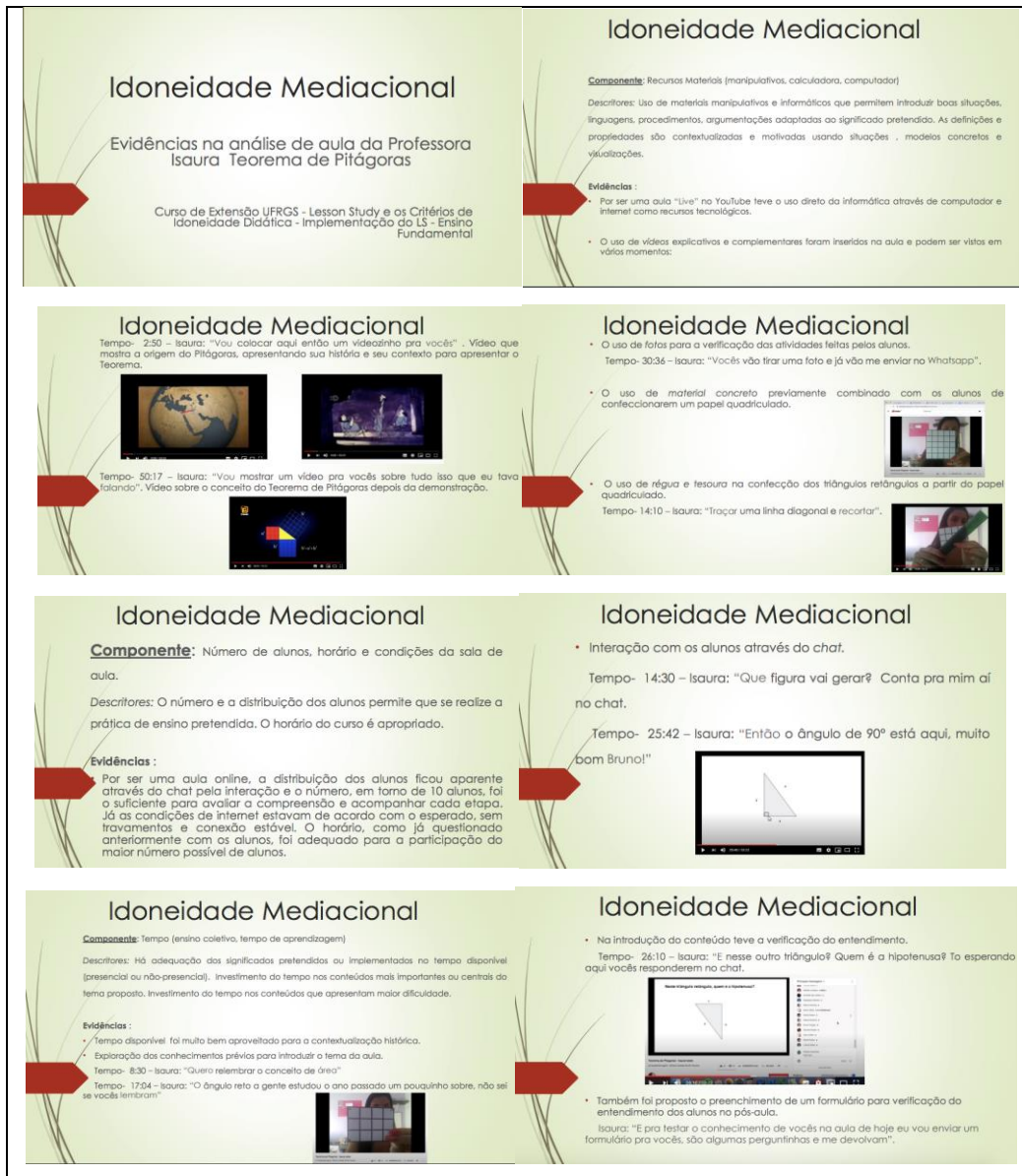


Figura 36. Conjunto de slides apresentados por P3, análise da aula CAD de meios
Fonte: elaboração própria.

Após P3 apresentar sua análise da aula, os demais professores fizeram alguns comentários e sugestões para o redesenho. Depois disso, os professores fizeram uma breve discussão sobre os aspectos da aula destacados por P3 em relação ao CAD de meios. A seguir, PI apresentou um resumo de evidências implícitas que os professores haviam feito na primeira reflexão da aula.

Com relação ao que os professores haviam observado na primeira reflexão da aula sobre os meios, sem utilizarem os CAD como pauta, PI destacou que, relativo às condições da aula, os professores haviam dito que o número de alunos havia sido adequado para uma aula em modo virtual e que este aspecto, também, estava bastante relacionado com o CAD de interação. Sobre o uso de materiais, PI lembrou que, na reflexão da aula sem os CAD, os professores haviam sinalizado que o material manipulativo utilizado para a aula (cartolinas, malha quadriculada, etc.) foi adequado, contudo observaram que os alunos tiveram dificuldades para preparem as malhas quadriculadas de maneira autônoma. Além disso, os professores haviam, também, destacado que o uso dos recursos tecnológicos (vídeos, mapas, etc.) também era adequado. Já em relação ao tempo, os professores haviam dito que se havia dedicado pouco tempo para conceitos essenciais e que foram abordadas muitas coisas em pouco tempo e, nessa perspectiva, os professores haviam sugerido, por exemplo, eliminar os exemplos com os números irracionais para solucionar a questão do tempo. Também disseram que o tempo para tratarem dos conhecimentos prévios e para a contextualização histórica era adequado. E, por fim, PI destacou, também, que os professores avaliaram como positiva o tempo dedicado para deixar que os alunos realizassem as tarefas propostas durante a aula. Mas, o tempo dedicado para os exercícios de aplicação, não havia sido suficiente.

Na sequência da sessão, PI solicitou que, naquele momento, os professores fizessem uma comparação entre o que haviam pontuado na primeira reflexão (sem os CAD) e o que haviam destacado na segunda reflexão (com os CAD). Para isso, PI perguntou aos professores se o que se havia anotado da primeira reflexão sobre a aula, em relação ao CAD de meios, não estava contemplado na reflexão com o CAD de meios ou vice-versa. Logo depois, P6 comentou que, na segunda reflexão, P7 havia comentado mais detalhadamente sobre o que se poderia fazer para otimizar o tempo dedicado para fazer a contextualização histórica e que P1 havia sugerido, também, colocar referências relacionadas a essa contextualização de modo que os aluno pudessem, autonomamente, dedicar-se a isso depois da aula, conforme o interesse de cada estudante. Nessa perspectiva, P4 destacou que, na primeira reflexão, os professores haviam dito que o tempo dedicado a fazer uma contextualização histórica do TP na aula havia sido adequado, mas que, na segunda reflexão, os professores haviam argumentado que este tempo poderia ser otimizado.

A seguir, PI destacou, uma vez mais, a tabela que apresenta o CAD de meios, seus componentes e indicadores. E, depois disso, PI pediu aos professores que anotassem as sugestões para o redesenho da aula, conforme seguem: 1) manter os materiais utilizados, mas repensar a questão das folhas quadriculadas; 2) adequar os significados pretendidos para o tempo a aula; 3) ter em conta que o tempo de uma aula virtual é diferente de uma aula presencial; 4) manter o horário da aula; 5) manter a plataforma por onde a aula foi realizada, pois foi adequada (*YouTube*); 6) manter o mesmo número de alunos; e 7) ressaltar que quem for observar a aula não pode interagir.

A seguir, após algumas observações destacadas pelos professores, PI comentou que, naquele momento, não havia como garantir que o redesenho seria feito para uma aula que seria novamente aplicada para o contexto da professora P4. E que, por isso, talvez esse detalhe de decidir sobre o espaço de sala de aula virtual deveria ser pensado uma vez que se estabelecesse o contexto. Dessa forma, os professores decidiram colocar na lista de sugestões para o redesenho da aula que, além do *YouTube*, poderia-se considerar o uso de outras plataformas virtuais, como por exemplo, o *Google Meet*, dependendo do contexto dos estudantes. Nesse sentido, P3 ressaltou que muitas outras ferramentas estavam começando a estar mais acessíveis para se fazer o espaço de aula virtual e que isso poderia ser melhor definido mais adiante.

Análise de especialistas CAD de Meios

Na sequência da sessão, PI apresentou uma análise da aula, pelo viés do CAD de meios, realizada por especialistas em CAD. Assim, PI explicou que, além do que havia-se falado sobre as condições da aula, a análise de especialistas revelou que, durante a aula, houveram muitos ruídos externos que poderiam prejudicar a atenção dos alunos e, desta forma, PI sugeriu, para um redesenho, que a aula fosse realizada num local com pouco ou nenhum ruído externo. Além disso, PI também destacou que os especialistas haviam observado a falta de autonomia, por parte dos alunos, para a confecção das malhas quadriculadas, o que prejudicou o entendimento da atividade proposta. Ademais, PI também disse que os especialistas consideraram adequados os demais materiais (manipulativos e tecnológicos) utilizados para a aula. Ainda sobre o tempo da aula, PI comentou que havia sido muito adequado o tempo que a professora esperou os alunos entrarem na *live* no *YouTube* e a confirmação que ela fazia, pois, à medida que cada

aluno entrava, a professora cumprimentava dizendo o nome do aluno. E, além disso, PI também comentou sobre os tempos dedicados para cada coisa da aula, dizendo o que estava adequado e o que deveria ser melhorado.

Na sequência, PI apresentou uma lista de sugestões para um redesenho da aula em relação a análise de especialistas desde a perspectiva do CAD de meios. A seguir, PI sugeriu aos professores que fossem tomadas as duas listas de sugestões para o redesenho da aula, sob a ótica do CAD de meios e, a partir de um cruzamento, chegassem a uma única lista com as sugestões para o redesenho. Após uma breve discussão, os professores chegaram a uma lista final de sugestões para o redesenho da aula, conforme segue: 1) procurar estar num ambiente onde hajam poucos ruídos externos, que podem atrapalhar a aula; 2) manter alguns materiais utilizados (vídeos, imagens, figuras construídas em papel pela professora); 3) deixar disponíveis as folhas quadriculadas no site da professora e na escola, evitando que os alunos cometam erros na construção dos quadradinhos ou pensar em outro material; 4) seguir usando o recurso de mudar a câmera de computador para celular e vice-versa; 5) adequar os significados pretendidos para o tempo da aula; 6) considerar que o tempo de aula virtual é diferente de uma aula presencial (dividir o tempo total em mais aulas); 7) manter horário da aula; 8) o meio da aula foi adequado (*YouTube*), mas, para diminuir o tempo de resposta, poderia ser usado o *Google Meet*; 9) número de alunos foi adequado, manter; 10) quem for assistir a aula não pode interagir, estar apenas como ouvinte; 11) procurar manter o número de alunos para este tipo de aula online; 12) manter a contextualização histórica utilizada no início da aula e com o uso dos vídeos (materiais tecnológicos) e manter o tempo utilizado; 13) manter o tempo dedicado para trabalhar os conhecimentos prévios (inclusive ampliar para a preparação das folhas quadriculadas); e 14) repensar o tempo dedicado à justificação do TP e à parte de aplicação do problema e introdução dos números irracionais.

Reflexão da aula realizada por P4 sob a ótica do CAD Ecológico

A professora que ficou responsável por fazer uma análise da aula desde a perspectiva do CAD ecológico foi P4. Assim, P4 apresentou alguns slides de *PowerPoint* com o título "Idoneidade Ecológica: entorno". Sua apresentação também foi organizada por cada componente e indicadores do CAD em questão.

P4 começou sua exposição falando sobre o indicador "os conteúdos, sua implementação e avaliação fazem correspondência com as diretrizes curriculares" do componente *adaptação ao currículo* do CAD ecológico.

O próximo componente que P4 considerou para fazer a análise da aula foi *conexões intra e interdisciplinares*. Começando com as conexões intra matemáticas. Continuando, P4 apresentou as conexões interdisciplinares com o TP. P4 conclui dizendo que, de certa maneira, na aula, considerou-se algumas conexões intra e interdisciplinares e, por tanto, considerou adequado esse componente do CAD ecológico.

A continuação, P4 apresentou aspectos observados em relação ao componente *utilidade sócio-laboral*. A seguir, P4 confirmou na tabela de componentes do CAD ecológico que se havia uma necessidade de mostrar aos alunos a utilidade do TP na vida social e laboral, mas não analisou se na aula havia-se ressaltado essa importância.

A seguir, P4 apresentou uma reflexão com relação ao componente *inovação didática* do CAD ecológico. Por fim, P4 explicou que o símbolo de "*check*" destacado, em verde, ao lado de cada um dos componentes da tabela com os componentes do CAD ecológico não significava que a aula avaliada estava adequada em cada um dos componentes e indicadores. P4 ressaltou que utilizou essa simbologia para destacar que, pelo menos um pouco de cada um a aula havia atingido.

A seguir, PI apresentou um resumo do que os professores observaram na primeira reflexão da aula (sem os CAD) na fase de LS do curso. Nesse ponto de vista, PI destacou que os professores não haviam sinalizado aspectos relacionados ao TP no currículo, pois isso tinha sido muito falado na etapa de *estudo do currículo e metas* do LS desenvolvido. Além disso, PI lembrou que, na primeira reflexão, os professores destacaram alguns aspectos relacionados às conexões interdisciplinares que foram estabelecidas durante a aula, por exemplo, abordar o TP a partir da ideia da história do filósofo e apresentar o exemplo da escola pitagórica e sua relação com a música. Ademais, PI comentou que na primeira reflexão os professores, em certa medida, os participantes falaram de uma certa "inovação didática" que tiveram que realizar devido a aula ser em modo virtual. Por fim, PI comentou que era fácil de identificar que a segunda análise da aula (com os CAD) era bem mais profunda nesse aspecto.

A seguir, os professores discutiram alguns aspectos que queriam considerar para o redesenho da aula e, nesse sentido, P4 perguntou se o redesenho seria para uma aula ou para uma sequência de aulas. Desta forma, PI comentou que, devido ao tempo do curso, talvez não fosse possível pensar em todos os detalhes de uma sequência de aulas, e que, por isso, poder-se-ia pensar, minuciosamente, em uma aula dentro dessa sequência de aulas. Assim, os professores decidiram anotar as sugestões para um redesenho considerando uma aula e também em uma sequência de aulas (unidade didática). Por fim, os professores registraram sugestões para um redesenho, conforme segue: 1) considerar o que diz o currículo e tentar contemplá-lo (na unidade didática); fazer a demonstração do TP e, além da verificação (currículo)/mostração (como falado no curso); 2) apresentar mais problemas que envolvam a realidade dos alunos e, também, sugerir que os alunos elaborem problemas e tarefas relacionadas com o seu contexto; e 3) manter as inovações didáticas empregadas (Google formulário, *YouTube*, etc.)

A continuação, PI apresentou a análise da aula realizada por especialistas pelo viés do CAD ecológico. Em relação ao currículo, os especialistas observaram que a aula cumpria, parcialmente, elementos contemplados no currículo e deu, como sugestão, aproveitar o que diz o currículo para o CAD epistêmico, componente representatividade, isto é, buscar resolver e elaborar problemas de aplicação do TP. Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o TP. Acerca das conexões interdisciplinares, os especialistas ressaltaram que, durante a aula, trabalhou-se a ideia do TP a partir da história do filósofo e, também, apresentou o exemplo da escola pitagórica e sua relação com a música. No que tange às conexões extras matemáticas, os especialistas sugeriram fazer a aplicação do TP para cálculo de pirâmides (vídeo apresentado inicialmente na aula) e, também, destacaram uma conexão extra matemática em alguns exercícios realizados durante a aula. No que concerne às conexões intra matemáticas os especialistas destacaram o momento em que a professora relacionou a ideia de Teorema, demonstração, proposição, etc. (iniciação, resposta, validação), em seguida a professora validou a resposta do aluno. Por exemplo, conexão entre retângulo e triângulo retângulo. Conexão intra matemática que não se fez é a conexão entre a recíproca do TP e o Teorema (justificativa para o recíproco do TP).

Por fim, PI, juntamente com os professores participantes, elaboram uma lista de sugestões para um redesenho da aula, conforme segue: 1) fazer os alunos verem o uso do TP

no cotidiano (pedreiros, carpinteiros); 2) conectar com o uso do TP na história (construção das pirâmides do Egito); 3) revisar a demonstração do TP e a tipologia de problemas e adaptar ao currículo; 4) fazer a conexão intra matemática do TP e seu recíproco; 5) considerar o que diz o currículo e tentar contemplá-lo (unidade didática): fazer a demonstração do TP, além da verificação (currículo) “mostração” (como falado no curso); 6) apresentar mais problemas que envolvam a realidade dos alunos e, também, sugerir que os alunos elaborem problemas e tarefas relacionadas com o seu contexto; 7) manter as inovações didáticas empregadas (Google formulário, *YouTube*, etc.)

Reflexão da aula realizada por P1 e P2 sob a ótica do CAD Epistêmico

P2 começou apresentando sua avaliação dizendo que o CAD epistêmico tem quatro componentes: *erros, ambiguidades, riqueza de processos e representatividade*. Nesse sentido, P2 explicou que, ao analisar a aula com o CAD epistêmico como pauta, o professor percebeu dois erros. Em relação às ambiguidades, P2 comentou que não identificou nenhuma ambiguidade na aula analisada. A seguir, P2 comentou sobre a riqueza de processos da aula e a representatividade da noção matemática que se quer ensinar. Por fim, P2 apresentou uma análise das atividades mandadas pelos demais professores.

Na sequência da sessão, P1 apresentou sua análise da aula também pela ótica do CAD epistêmico. A seguir, PI perguntou aos professores o que eles tinham para falar com relação às análises da aula, apresentadas por P2 e P1, com base no CAD epistêmico. A seguir, PI comentou que se deveria retomar bem o que era considerado erro e ambiguidade, porque poderiam acontecer algumas confusões nesse sentido. Ademais, comentou que se deveria analisar se os erros anotados eram erros matemáticos ou erros didáticos, porque tratam-se de coisas diferentes.

A continuação, PI apresentou uma lista de alguns aspectos da aula, no tocante ao CAD epistêmico de modo implícito, que os professores haviam falado na primeira reflexão da aula. Em seguida, após uma breve discussão, os professores apontaram algumas sugestões para o redesenho da aula, conforme segue: 1) evitar os erros de conceito e de expressões empregadas; 2) escrever as definições de Teorema, de quadrado, etc. (formalizar); 3) refinar quais conceitos vão ser trabalhados na aula (por exemplo, retirar os casos em que as soluções são números

decimais); e 4) apresentar exemplos e problemas que tenham diferentes significados do TP (variedade de significados).

Por fim, PI ressaltou que as análises que haviam sido realizadas, até aquele momento, eram análises desde o viés dos CAD de meios, ecológico e epistêmico, de maneira isolado e que, quando acabassem de fazerem e apresentarem essas análises de forma separada, para um redesenho da aula, os professores pensariam desde a perspectiva de uma união de cada uma dessas dimensões.

Sessão 13: Reflexão com os CAD (parte 2)

A décima terceira sessão do curso foi realizada no dia 16 de junho de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos, a qual contou com a presença de todos os professores participantes (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), de PI, da professora Dra. Adriana Breda e do professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva. Estes dois últimos participaram apenas como observadores ouvintes.

Nesta sessão, deu-se continuidade à reflexão da aula com o uso dos CAD seguindo-se a mesma dinâmica da sessão anterior, cada professor, que havia ficado responsável por fazer uma análise pela perspectiva de um dos CAD, apresentou suas ponderações aos demais professores participantes, depois, foi feita uma discussão geral no grupo e sugestões para um redesenho da aula. Em seguida, PI apresentou a reflexão com os CAD realizada por especialistas e chegou-se a uma lista final de sugestões para um redesenho da aula. Completando os CAD que faltavam, nesta sessão, foram apresentadas as reflexões pelo viés dos CAD epistêmico (especialistas), interacional, cognitivo e afetivo.

Dando continuidade a sessão anterior, PI iniciou apresentando a reflexão da aula com o CAD epistêmico realizada por especialistas. Para isso, PI apresentou uma estrutura dinâmica da aula (Figura 37).

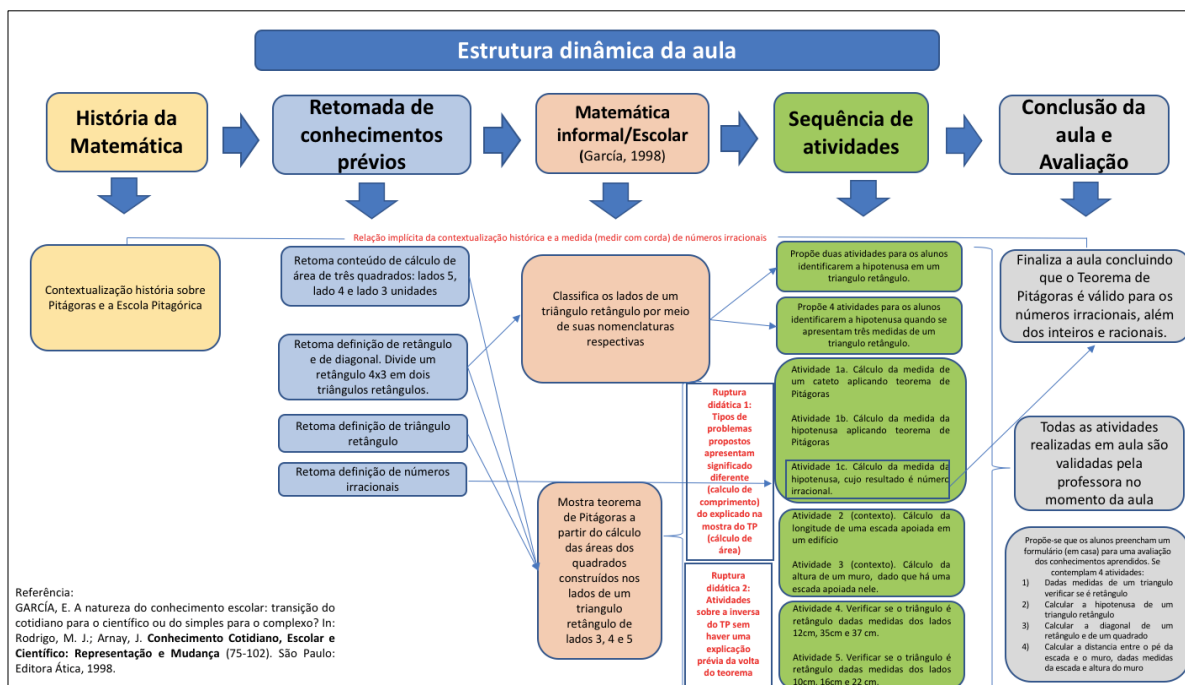


Figura 37. Estrutura dinâmica da aula
Fonte: elaboração própria.

Ao explicar essa estrutura da aula, PI destacou que houveram rupturas didáticas. A primeira ruptura ocorreu, pois, os exemplos de tarefas propostas apresentavam significado diferente (TP como relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo) do explicado na verificação experimental do TP apresentada aos alunos (TP como relação entre áreas dos lados do triângulo retângulo). E, a segunda ruptura didática, ocorreu quando, na aula, foram realizadas atividades sobre a inversa do TP, mas sem haver uma explicação prévia da recíproca do TP.

A seguir, PI retomou a ideia do componente *erro* do CAD epistêmico. Nessa perspectiva, PI relembrou que, na sessão anterior, dois professores (P1 e P2) haviam apresentado as suas análises da aula desde a perspectiva do CAD epistêmico. Então, PI explicou que o grupo de especialistas que estava desenvolvendo o curso, resolveu analisar o que havia sido apresentado por P1 e por P2, em relação ao componente erro, e verificar se se tratavam realmente de erros matemáticos ou algum outro tipo de erro ou até mesmo uma ambiguidade.

No caso dos dois erros destacados por P2, a análise dos especialistas revelou que não se tratavam de erros matemáticos e, sim, erros cometidos por distração da professora e que foram rapidamente corrigidos em aula.

Já em relação aos erros destacados por P1, a professora pesquisadora apresentou a análise dos especialistas para cada caso apresentado. Nessa perspectiva, PI destacou que, apenas dois erros destacados por P1, eram realmente erros matemáticos (componente do CAD epistêmico), os demais tratavam-se de erro didático, má opção didática, erro de distração ou ambiguidade.

Em seguida, PI explicou que o erro presente na aula pode acontecer por engano, porque entende-se algo errado do ponto de vista matemático, ou seja, são erros que o professor comete ou são erros cometidos pelos alunos e validados pelo professor. Desta forma, PI destacou que, além dos dois erros destacados na análise de P1, os especialistas identificaram outros três erros mais, presentes na aula.

Na sequência da sessão, PI falou das ambiguidades identificadas na análise com os CAD epistêmico, realizada pelos professores. PI lembrou que P2 não havia identificado nenhuma ambiguidade e P1 havia identificado quatro. Desta forma PI apresentou a análise de especialistas das ambiguidades destacadas por P1 e, nesse sentido, duas delas foram destacadas como ambiguidades, mas as outras duas não, pois tratavam-se de questões didáticas e não quase erros (ambiguidades).

A seguir, PI destacou que haviam outras quatro ambiguidades presentes na aula que não haviam sido identificadas pelos professores que fizeram a análise com o CAD epistêmico. Logo após, PI comentou que, para um redesenho da aula se deveria controlar os erros e as ambiguidades. Ou, como mínimo, não cometer os mesmos que haviam sido realizados na aula analisada.

Logo depois, PI apresentou aspectos destacados pelos especialistas relacionados com o componente *riqueza de processos* do CAD epistêmico. Em seguida, PI apresentou uma tabela com uma avaliação dos processos realizados na aula.

Na sequência da sessão, PI apresentou uma discussão para um redesenho da aula, considerando-se o que havia sido apresentado na tabela de processos identificados na aula, conforme segue: 1) Pela demonstração (discussão sobre até que ponto se pode fazer uma

demonstração mais rigorosa sobre o Teorema de Pitágoras; várias ternas (medidas diferentes, indução, “mostração”/verificação experimental); generalização com as figuras feitas em cartolina amarela e verde (elemento genérico, com um só caso que pode representar qualquer caso). 2) Pelo tipo de atividade (atividades usando a ideia de modelagem (como o exemplo do problema dos blocos de palhas). Conexões (nenhuma conexão é estabelecida entre o significado geométrico <<relação entre áreas>> com o significado <<relação entre comprimentos dos lados do triângulo>> e nenhuma conexão entre o Teorema de Pitágoras e sua recíproca é estabelecido.

Depois disso, PI apresentou a *representatividade* do TP, identificada pelos especialistas, que esteve presente na aula, de acordo com o que segue: 1) mostra representativa de procedimentos para calcular área dos quadrados (medida direta com a ideia de contagem dos quadrados de uma unidade e medida indireta usando a ideia de lado x lado); 2) possui dois significados geométricos parciais (como uma relação de áreas de quadrados e relação entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo); 3) mostra variada de representações (usa diferentes representações do triângulo retângulo); 4) pouca representatividade na variedade de problemas (todos são para calcular um dos lados (comprimento) do triângulo), ou seja, não há nenhum problema que esteja relacionado com cálculo de áreas; e 5) variedade de resultados nas atividades propostas (dentro do mesmo significado) onde aparecem números naturais e números irracionais.

Em seguida, PI apresentou uma discussão da representatividade do TP para um redesenho da aula. Para isso, PI tratou de responder a pergunta "o que é o TP". Nesse sentido, PI comentou que o TP tem um significado geométrico (Figura 38).

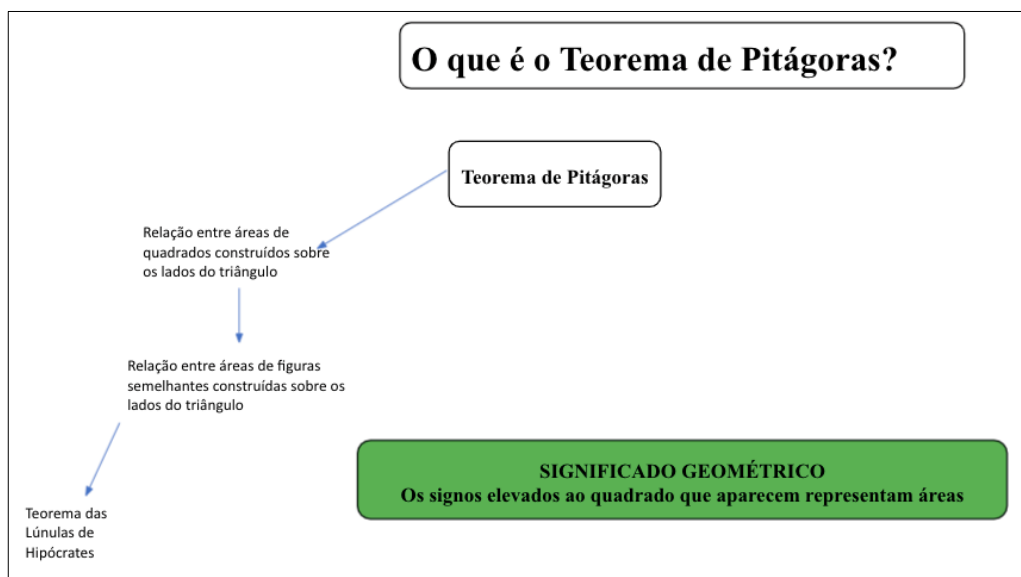


Figura 38. Esquema, apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado geométrico parcial 1 do TP
 Fonte: elaboração própria.

Além disso, PI explicou que esse significado geométrico havia sido abordado na aula, embora tenha-se sido usado apenas para um caso particular de ternas pitagóricas e não se tenha realizado a parte genérica, tampouco uma verificação para mais casos particulares de ternas pitagóricas.

A seguir, PI destacou que, na aula, havia faltado uma atividade que abordasse o significado geométrico do TP apresentado. Por tanto, apresentou um exemplo de atividade sobre isso. Depois disso, PI apresentou um exemplo de demonstração do TP onde se utiliza um procedimento algébrico, mas a ideia está relacionada com o significado geométrico TP como relação entre áreas de quadrados.

Logo após, PI explicou que há também outro significado geométrico do TP (Figura 39) que é a relação existente entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo e que havia sido muito trabalhada na aula. PI também explicou que esse significado também está relacionado com a recíproca do TP.

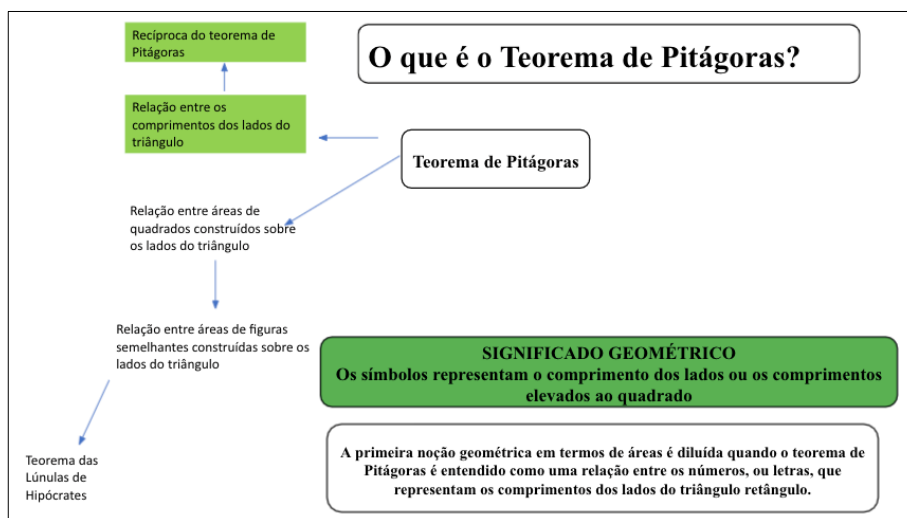


Figura 39. Esquema, apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado geométrico parcial 2 do TP

Fonte: elaboração própria.

A seguir, PI apresentou dois exemplos que se havia trabalhado na aula que estavam relacionados com esse significado geométrico do TP. E um exemplo de atividade de cálculo de comprimento, onde procedimentalmente se utiliza aritmética e álgebra, contudo a ideia de comprimento está relacionada a um significado geométrico.

Finalizando, PI explicou que, nos dois aspectos, chamados de significados geométricos, os números ou letras substituem comprimentos de segmentos ou áreas de quadrados e sua função é representá-los. Nessa visão, os símbolos representam magnitudes ou relações entre eles, mas, embora possam ser executadas ações sobre eles, eles não são considerados objetos, independentemente da magnitude que representam. Os valores que os símbolos podem ter são aqueles que permitem as magnitudes e a situação que eles representam (por exemplo, ao calcular raízes quadradas, apenas o valor positivo é obtido). Embora muita álgebra seja usada na resolução, falamos sobre significado geométrico se os símbolos são considerados para representar magnitudes (comprimento e área).

Logo depois, PI explicou que o TP também tem um significado aritmético-algébrico e que se poderia abordar esse significado com atividades que envolvam ternas pitagóricas ou ternas de números (Figura 40).

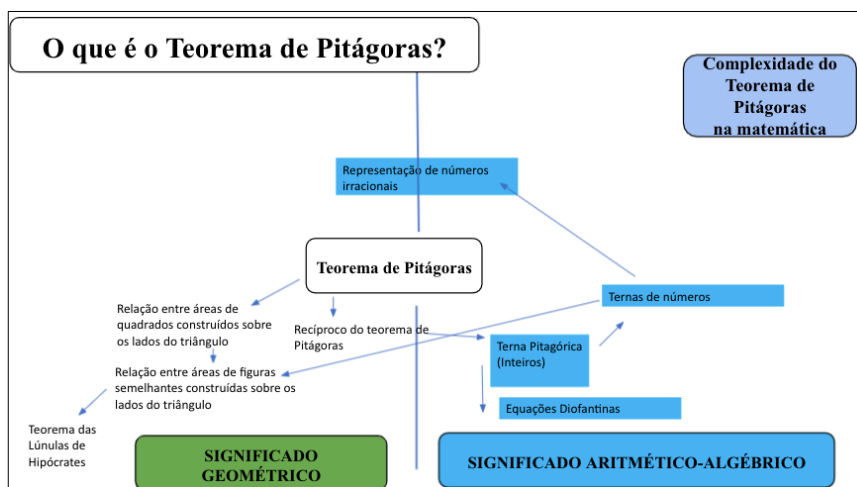


Figura 40. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta o significado aritmético-algébrico do TP

Fonte: elaboração própria.

Depois, PI explicou que, quando os valores que os símbolos podem ter são aqueles que você deseja considerar e não são condicionados pela situação que eles representaram inicialmente. Os símbolos são agora considerados objetos, sobre os quais podem ser realizadas ações e, inclusive, os objetos, relações e situações que eles representam podem ser dispensados. Essa aparência leva a entender a , b , c como números ou letras que não representam quantidades geométricas e que $a^2 = b^2 + c^2$. Primeiro, como ternas pitagóricas de números inteiros, passando por frações pitagóricas e chegando a ternas (a, b, c) que podem não ser inteiros, mas que cumprem a relação $a^2 = b^2 + c^2$. E, nesse sentido, PI apresentou exemplos de exercícios com ternas pitagóricas.

Na sequência da sessão, PI explicou que o TP também apresenta conexões interessantes com outros problemas e teorias, que podem expandir os significados parciais anteriores, mas, apenas alguns serão considerados neste trabalho focado no Ensino Fundamental, que é onde esse Teorema é ensinado pela primeira vez. São conexões com: noção de módulo de um vetor, diagonal de um prisma, distância, seção áurea, simetria dinâmica, espirais logarítmicas, trissecção do ângulo, duplicação de cubos, quadratura do círculo, determinação do valor de π , conceito de número irracional, polígonos e poliedros regulares estrelados, teoria dos números, consuntibilidade de ângulos e polígonos, frações contínuas, trigonometria, geometria analítica,

espaços de Hilbert, etc. Como exemplos de atividades, PI apresentou os problemas que os professores haviam sugerido num momento anterior.

Logo depois, PI apresentou um esquema da complexidade do TP na matemática (Figura 41), no currículo e o que se havia trabalhado na aula (Figura 42).

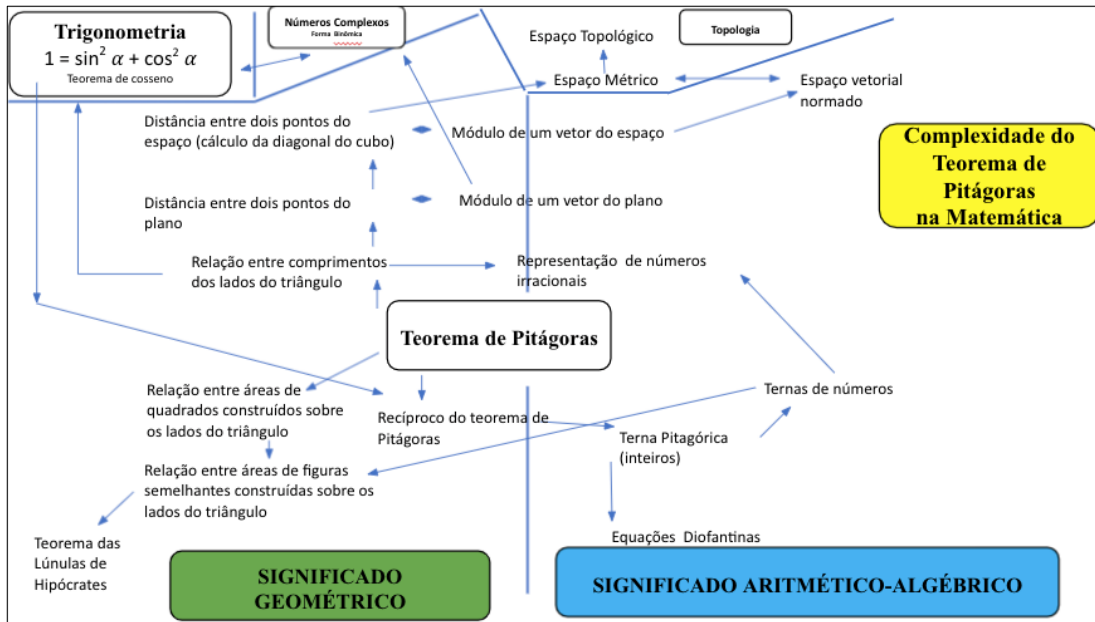


Figura 41. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta a complexidade do TP na matemática

Fonte: elaboração própria.

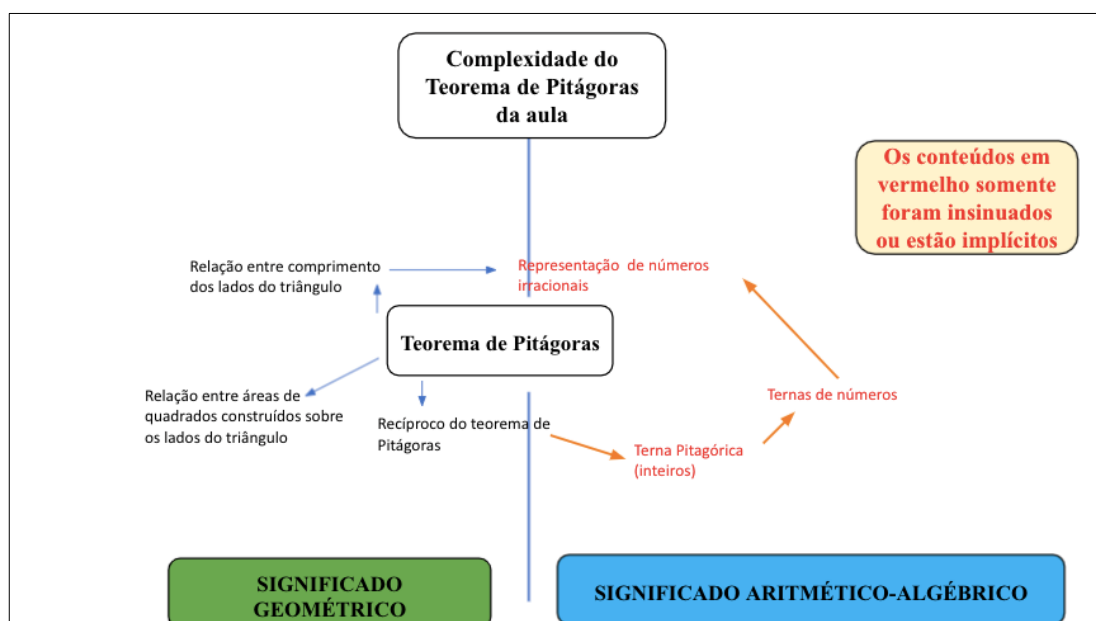


Figura 42. Esquema apresentado por PI na sessão 13 do curso, que apresenta a complexidade do TP na da aula desenvolvida na fase 1 do curso
 Fonte: elaboração própria.

Depois disso, PI apresentou as conclusões sobre os significados parciais. Dentre os significados apresentados no currículo, se trabalhou na aula o geométrico (área de quadrados construídos nos lados do triângulo e cálculo do comprimento dos lados do triângulo). Houve uma tentativa implícita de trabalhar o significado algébrico, partindo do recíproco do Teorema, para conectar com as ternas pitagóricas, ternas numéricas até chegar aos números irracionais, porém esse trabalho não foi realizado.

Uma vez que foram trabalhados os significados parciais, nos interessa saber se os problemas são todos do mesmo estilo (resolvidos com um dos significados) ou há uma variedade de problemas (o qual leva a usar outros significados). Todos os problemas são para calcular um dos lados do triângulo (o que varia é o lado que se busca, se o resultado é exato ou não ou se o problema é descontextualizado ou não.) Não há problemas de cálculo de áreas, nem problemas que os obriguem a usar conjuntamente ambos significados. Nesse sentido, PI apresentou o exemplo de um problema contextualizado que conecta a noção de área de quadrados com o comprimento. A seguir, apresentou a resolução e os processos envolvidos.

Por fim, chegou-se a uma lista de sugestões para o redesenho da aula, de acordo com o que segue: 1) controlar os erros e ambiguidades; 2) conectar melhor os dois significados

parciais do TP e este Teorema com seu recíproco; 3) aprofundar a demonstração ou realizar verificações experimentais variadas do TP; 4) buscar mais representatividade nos tipos problemas propostos e, se possível, criar um problema para conectar as duas noções do significado geométrico (área e comprimento); 5) pensar em atividades para melhorar a riqueza de processos. Por exemplo, atividade de modelagem matemática ou resolução de problemas (como, por exemplo, o problema apresentado anteriormente); e 6) pensar em se incorporar ou não o significado aritmético-algébrico (mediante as ternas pitagóricas) até chegar às representações dos números irracionais.

Reflexão da aula realizada por P6 sob a ótica do CAD interacional ou de interação

A professora que havia ficado responsável por fazer uma análise da aula com o CAD de interação foi P6. Nessa perspectiva, P6 apresentou sua análise a partir de cada um dos componentes da adequação interacional, ou seja, *interação professor-alunos, interação entre os alunos, autonomia e avaliação formativa*.

Em seguida, PI apresentou um quadro resumo com os apontamentos dos professores realizados na etapa de *reflexão da aula* do LS. Logo após, os professores discutiram alguns aspectos e fizeram uma lista de sugestões para o redesenho da aula, com relação ao que havia sido observado pelo viés do CAD interacional, conforme segue: 1) manter a interação com a professora por meio do *chat* (coletivo) e *WhatsApp* (individual); 2) repensar a avaliação formativa (manter o formulário ou fazer uma folha de atividades para os alunos irem completando durante a aula, etc.); 3) uso da plataforma *Google Meet* para melhorar a interação entre alunos (formar grupos, etc.); 4) usar o *chat* para perguntar e deixar que os alunos se ajudem a responder a pergunta (para fomentar a interação entre alunos); e 5) controlar o “excesso” de autonomia. Ou seja, deve haver um controle do professor no material que os alunos devem elaborar em casa.

Na sequência da sessão do curso, PI apresentou a análise da aula com o CAD interacional feita por especialistas. Em relação ao componente *interação professor-alunos*, PI explicou que, em geral, a aula estava bem organizada e a professora era clara em sua explanação, mas haviam dois aspectos que poderiam ser melhorados no redesenho da aula: 1) a conexão do TP com seu recíproco; 2) o fato de que foi demonstrado uma relação do TP por

áreas, mas em seguida só se trabalhou com problemas de comprimento de lados do triângulo. Ainda sobre esse componente, PI comentou que, em geral, tentou-se resolver os conflitos de significados dos alunos. Por exemplo, há um momento em que a professora interage com os alunos para sanar uma dificuldade dos alunos. Contudo, pergunta o que é um ângulo reto, mas não responde, nesse caso a interação não resolveu a dificuldade dos alunos. Uma explicação que pode estar relacionada a este fator é a de que a interação não é propriamente simultânea, pois há um pequeno atraso de mais ou menos um minuto, entre o momento que a professora pergunta e o momento que os alunos respondem. Outro aspecto apontado foi que houve um certo padrão de interação onde a professora pergunta e ela mesma responde (pode ser um tema técnico e um tema de trabalhar de uma forma que não é multimodal como uma aula presencial). Propõe uma nova tarefa, traçar a diagonal de um retângulo e recortar retângulo na diagonal. Explica a ideia de diagonal. Pergunta para que eles digam no *chat* quais figuras vão ser geradas. A professora mesma dá a resposta (iniciação – validação pela própria professora). Também há interação entre a professora e os alunos, porque a professora faz várias perguntas durante a aula e eles respondem. Estabelece estratégias para captar a atenção dos alunos. Por exemplo, quando a professora explica sobre a origem de Pitágoras, da Escola Pitagórica e quando realiza a verificação experimental e institucionaliza o TP. Por último, relacionado a esse componente, PI comentou que a professora se preocupou se os alunos a escutavam bem e interagiam via *chat* no *YouTube* ou no *WhatsApp*. A professora fez uma interação individual, personalizada, chamando os alunos de forma individual.

Já em relação ao componente *interação entre alunos*, PI explicou que a análise por especialistas em CAD revelou que a interação entre os estudantes (durante a atividade de verificação experimental do TP com os quadrados de lado 3, 4 e 5). Porém, como conseguir no redesenho que a interação entre os alunos seja mais intensa durante o transcorrer da aula? Ademais, PI comentou que faltou estimular o diálogo e a comunicação entre os alunos e o trabalho em grupo.

No que tange o componente *autonomia*, PI disse que a análise de especialistas em CAD considerou que os alunos tiveram que ter autonomia para organizar o material manipulativo (barato, fácil de fazer e os alunos devem fazer). Alunos fazem o material de forma autônoma. Além disso, os alunos produzem material e enviam foto dele para a professora (aqui há

autonomia, mas também interação). Observar que os alunos que não conseguem fazer o material podem perder-se na atividade. E, também, alguns alunos que não viram a aula, no momento da aula, podem ver a gravação para depois responder o formulário.

Por último, no que se refere ao componente *avaliação formativa*, PI destacou que os especialistas consideraram que existe um processo interativo que permite com que exista avaliação formativa (entrega de fotos com material produzido pelos alunos, atividades e perguntas para serem respondidas no *chat* do *YouTube*, formulário final).

Após PI apresentar a análise da aula realizada pelos especialistas em CAD, o grupo construiu uma lista de sugestões para um redesenho da aula em relação a essa dimensão dos CAD, conforme segue: 1) conectar melhor as duas "rupturas didáticas", isto é, conectar o TP com sua recíproca e conectar a definição do TP por áreas de quadrados com o significado de comprimento e ternas pitagóricas; 2) procurar resolver os conflitos de significado, por exemplo, o conceito de ângulo reto, etc.; 3) organizar algum tipo de trabalho em grupo para melhorar/favorecer a interação entre os alunos; 4) manter a autonomia dada aos estudantes, mas procurar identificar aqueles que necessitam mais auxílio e demonstram menos autonomia, a fim de melhorar suas aprendizagens; 5) manter a interação com a professora por meio do *chat* (coletivo) e *WhatsApp* (individual); 6) repensar a avaliação formativa (manter o formulário ou fazer uma folha de atividades para eles irem completando durante a aula, etc.); 7) fazer uso da plataforma *Google Meet* para melhorar a interação entre alunos (formar grupos, etc.); 8) usar o *chat* para perguntar e deixar que os alunos se ajudem a responder a pergunta (para fomentar a interação entre alunos); e 9) controlar o "excesso" de autonomia. Ou seja, deve haver um controle do professor no material que os alunos devem elaborar em casa.

Reflexão da aula realizada por P7 e P8 sob a ótica do CAD cognitivo

Os professores que ficaram responsáveis por fazerem uma análise da aula desde a perspectiva do CAD cognitivo foram P7 e P8. Ao contrário do que fizeram os dois professores que haviam feito uma reflexão da aula com o CAD epistêmico, P7 e P8 fizeram e apresentaram juntos uma reflexão da aula pelo CAD cognitivo. P7 começou falando, conforme:

P7: Eu só queria falar, mais diretamente para P4, que eu estou dando aula desde o começo pelo computador, então, está sendo bem difícil e foi difícil avaliar a aula dela, assim, com certa dureza,

porque eu me identifiquei, assim, muito com as dificuldades. Então, eu acho que, eu e P8, a gente tentou destacar as coisas positivas, assim, e pensar algumas ideias, também, já para um redesenho, porque a gente sabia que teria esse momento. Então, parabenizar P4, assim, porque está sendo um momento bem difícil. Eu acho que ninguém imaginou que chegaria uma situação assim. E acho que estamos tentando fazer o nosso melhor, assim. Então, parabenizar P4 e os colegas. Mas, acho que a P4 que estava ali, então, o nome dela [...] Dar parabéns para todo mundo, assim, porque foi um momento bem legal.

A seguir, P8 explicou que eles haviam pensado na análise da aula a partir do viés do CAD cognitivo considerando cada um dos seus componentes, isto é, *conhecimentos prévios*, *adaptações curriculares* e *aprendizagens*. P8 também explicou que eles fizeram uma classificação do que havia sido bom na aula, do que haveria que pensar-se em como melhorar para o redesenho da aula e aspectos que estiveram ruins na aula. Para a apresentação, P7 e P8 utilizaram alguns símbolos para destacar cada um desses níveis de avaliação. Para isso, usaram a imagem de uma mão com o polegar levantado para representar os bons aspectos, imagem de uma lâmpada acendida para o que dever-se-ia pensar em melhorar em um redesenho da aula e a imagem de um triângulo com um ponto de exclamação no centro para o que consideraram ruim na aula (Figura 43).



Figura 43. Quadro resumo da análise da aula a partir do viés do CAD cognitivo apresentado por P7 e P8 na sessão 13 do curso
Fonte: elaboração própria.

Logo depois, P7 e P8 explicaram cada um dos aspectos observados. Em seguida, PI perguntou se algum professor gostaria de fazer algum comentário sobre a análise de aula apresentada e isso gerou uma breve discussão.

Logo depois, PI apresentou uma lista de aspectos identificados na etapa de *reflexão da aula* (sem os CAD) em relação ao CAD cognitivo. Com os aspectos destacados nas duas reflexões da aula (com e sem o CAD) anotados, os professores elaboraram uma lista de sugestões para o redesenho da aula, relacionados ao CAD cognitivo, conforme segue: 1) explorar melhor outros conhecimentos prévios (classificação quanto ao ângulo, resolução de equações); 2) melhorar o tratamento das diferenças individuais (alunos de inclusão); 3) melhorar a comunicação para acompanhamento das dificuldades; e 4) melhorar o formulário de avaliação.

Na continuação da sessão, PI apresentou a análise dos especialistas desde a perspectiva do CAD cognitivo. Com relação ao componente *conhecimentos prévios*, PI destacou que, na aula, se havia retomado as noções de área do quadrado, ângulo reto, números irracionais, raiz quadrada, etc. Mas, que seria importante retomar os conhecimentos que os alunos têm para resolver equações, potências (uma retomada de procedimentos) e explicar melhor alguns outros (p.e. ângulo reto). No que diz respeito à componente *adaptação às diferenças individuais*, PI disse que se observou que não havia adaptações curriculares às diferenças individuais na aula. Já em relação ao componente *aprendizagem*, PI falou que foram usadas figuras diferentes de triângulo retângulo (base não horizontal) e uso de diferentes letras. Além disso, utilizou-se uma metodologia ativa (não magistral) e a professora quando observou dificuldades dos alunos tentou resolvê-las. Também, observou-se que usa os símbolos mais adequados, por exemplo, a letra maiúscula geralmente representa a ideia de área. Em certos momentos da aula, se produziu uma desconexão entre a explicação realizada e as tarefas, por exemplo, não há uma relação do primeiro problema (calcular um lado, ideia de comprimento de um lado) com a explicação (verificação experimental) que se realiza sobre Teorema (cálculo de área).

Em um primeiro momento, se observou que não houve suficiente aprendizagem, pois nas respostas dos alunos (por exemplo, na atividade 1) eles fazem a soma dos números (lados) e não das áreas (quadrado dos lados). Apresentam, também, erros de procedimento de cálculo.

Ver a explicação que faz a professora (minuto 38-40 da aula), que procura melhorar a aprendizagem explicando de outra maneira. Em relação à avaliação formativa, as evidências das atividades, realizadas em aula, mostram que alguns alunos não apresentam aprendizagem. Por outro lado, o formulário final não parece ser um instrumento desenhado para obter a aprendizagem por competências (por exemplo, todos os problemas são do mesmo estilo). Não se pode inferir se realmente houve ou não aprendizagem. No que tange a alta demanda cognitiva, a professores produz alta demanda cognitiva ao propor que, de forma autônoma, os alunos construam os quadrados e façam o encaixe deles no triângulo retângulo.

Em seguida, o grupo elaborou uma lista de sugestões para um redesenho a aula desde a perspectiva do CAD cognitivo, conforme segue: 1) para melhorar a aprendizagem, manter os conhecimentos trabalhados e acrescentar outros (operações com potência, radicais e resolução de equações) e repensar a formulação dos materiais utilizados pelos alunos; 2) analisar a diversidade da aula e pensar em atividades que contemplem esta diversidade. Em particular, investigar quais alunos são menos autônomos e necessitam mais auxílio para realizar as tarefas propostas; 3) melhorar a aprendizagem (mantendo a estrutura e dinâmica da aula: mantendo o uso do *chat* e das fotos como instrumentos de avaliação, melhorar a instrução sobre a construção das folhas quadriculadas, repensar o uso das letras utilizadas); e 4) reformular as atividades do formulário, porque não permite avaliar a competência matemática dos alunos pela falta de variedade nas tarefas propostas.

Reflexão da aula realizada por P5 sob a ótica do CAD Afetivo

A professora que ficou responsável por realizar uma análise da aula com as lentes do CAD afetivo foi P5. Nessa perspectiva, P5 apresentou sua análise desde cada um dos componentes e seus respectivos indicadores dessa dimensão da adequação didática.

Em seguida, PI apresentou os aspectos evidenciados na primeira reflexão da aula em relação ao CAD afetivo. Logo após, devido ao pouco tempo restante da sessão, PI apresentou a análise da aula feita por especialistas. Em relação ao componente *interesses e necessidades*, PI destacou que as atividades poderiam ser consideradas motivadoras pela dinâmica da aula (autonomia, uso do *chat*); não se trabalhou atividades que tratam da utilidade do TP na vida cotidiana dos alunos. No que tange o componente *atitudes*, PI disse que, durante a aula, a professora tratou os alunos de maneira individual, chamando-os pelo nome, como forma de

motivar e felicitar os alunos presentes; fez comentários motivadores como “show de bola”, etc.; validou as respostas dos alunos do cálculo de área dos quadrados com ênfase; e, inúmeras vezes, fez comentários motivando os alunos para se implicarem, persistirem e realizarem as atividades. Por último, em relação ao componente *emoções*, PI falou que a gestão que a professora promoveu em aula era muito inclusiva, muito convidativa, em nenhum momento promoveu a fobia ou medo em relação à matemática.

Por fim, os professores fizeram uma lista de sugestões para o redesenho da aula, com relação ao CAD afetivo, de acordo com o que segue: 1) trabalhar atividades que permitem que o aluno perceba a utilidade na vida profissional e cotidiana; 2) manter o tratamento individual (personalizado) e a dinâmica de considerar as respostas apresentadas pelos alunos (as respostas erradas para corrigi-las e as respostas corretas para felicitá-los); e 3) manter forma de gestão realizada pela professora, considerada uma dinâmica inclusiva.

Para finalizar a décima terceira sessão, PI informou aos professores participantes que, nas duas próximas sessões do curso, seria realizado o redesenho da aula com os CAD e de que modo isso seria feito.

Sessão 14: Redesenho da Aula com os CAD (parte 1)

A décima quarta sessão do curso foi realizada no dia 23 de junho de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos, a qual contou com a presença de todos os professores participantes (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8), de PI, da professora Dra. Adriana Breda e do professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva. Estes dois últimos participaram apenas como observadores ouvintes.

Após a análise da aula com o uso dos CAD, como ferramenta pautando a reflexão dos professores, realizada nas duas sessões anteriores do curso, nesta sessão, começou-se a fazer o redesenho da aula. Para isso, PI apresentou um quadro resumo com todas as sugestões para um redesenho da aula, elaboradas a partir da reflexão realizada sob a ótica de cada uma das dimensões dos CAD (Figura 44).












MEDIACIONAL	ECOLÓGICA	EPISTÊMICO
  Materiais utilizados Duas câmeras Horário da aula Número de alunos Tempo Contextualização histórica Tempo Conhecimentos Prévios Papel quadriculado YouTube ou Meet Participação externa Tempo da aula Tempo justificação do Teorema de Pitágoras Ruídos externos	  Inovações didáticas (Google Forms, YouTube) TP no cotidiano TP na história Contemplar currículo Conectar TP e recíproco Problemas com a realidade dos alunos Alunos elaboram problemas	 Controlar erros e ambiguidades Conexão TP e recíproco Demonstração TP? Verificações experimentais do TP? Representatividade nos problemas Conexão dentro do significado geométrico (área e comprimento) Melhorar a riqueza de processos Significado aritmético-algébrico? Representações dos números irracionais?
INTERACIONAL	AFETIVO	COGNITIVO
  Autonomia estudantes Conexão TP com seu recíproco Conexão TP áreas e comprimento Resolver conflitos significado Interação chat/whats Interação alunos chat/grupos Identificar pouco autônomos Avaliação formativa Controlar autonomia mat. prévio	  Tratamento individual (personalizado) Dinâmica de considerar as respostas apresentadas Gestão da aula Aula dinâmica inclusiva Utilidade social e laboral	  Conhecimento Prévios Trabalhados Dinâmica aula (chat/fotos instrumentos avaliação) C.P operações/equações Materiais alunos Atividades diversidade Instrução papel quadriculado Letras utilizadas Atividades formulário

Figura 44. Quadro resumo da análise da aula com o uso dos CAD apresentado por PI na sessão 14 do curso
 Fonte: elaboração própria.

PI explicou, também, que, para organizar esse quadro, utilizou os mesmos símbolos que P7 e P8 utilizaram para apresentar a análise da aula com o CAD cognitivo, onde a imagem de uma mão com o polegar levantado representava o que os professores haviam considerado bom e a imagem da lâmpada representava o que deveria ser repensado para a aula do redesenho.

Após apresentação desse quadro, PI destacou o que os professores já haviam comentado na etapa de reflexão com os CAD que a proposta de redesenho se tornaria uma unidade didática, considerando que a reflexão realizada trouxe elementos para ir muito além de apenas uma aula do TP. Para isso, PI apresentou uma proposta de sequência didática com quatro blocos de aulas (Figura 45). Onde, o primeiro bloco seria o estudo e reforço dos conhecimentos prévios necessários para compreensão do TP e apresentação do contexto histórico. O segundo bloco seria para trabalhar o TP e, neste momento, trabalhariam-se os significados parciais 1 (significado geométrico TP como relação entre áreas de quadrados) e 2 (significado geométrico TP como relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo). No terceiro bloco, a proposta era trabalhar o significado parcial 3 (significado

aritmético-algébrico, ternas pitagóricas, ternas de números) e a recíproca do Teorema de Pitágoras. E, no quarto bloco, seriam realizadas atividades de aplicação do Teorema de Pitágoras.

	Conhecimentos prévios	Contexto Histórico	Teorema Pitágoras			Volta do Teorema de Pitágoras	Aplicação do Teorema de Pitágoras	Avaliação Formativa
			SP 1	SP 2	S P3			
Bloco 1	X	X					X (A. Inicial)	
Bloco 2			X	X			X (A. Contínua)	
Bloco 3					X	X	X (A. Contínua)	
Bloco 4						X	X (A. Final)	

Figura 45. Proposta de sequência didática com quatro blocos de aulas apresentado por PI na sessão 14 do curso
Fonte: elaboração própria.

Em seguida, PI comentou com os professores se seria realmente essa a proposta para a unidade didática ou se os professores gostariam de fazer alguma modificação, de acordo com a necessidade e interesse dos professores. Depois disso, PI apresentou um outro quadro que resumia qual era a proposta para cada um dos blocos de aula. Considerando-se a questão do tempo, PI sugeriu que os professores concentrassem o redesenho no bloco 2 da unidade didática.

Ao explicar o detalhamento do que poderia ser programado para cada bloco de aula, PI comentou que no bloco 2 a decisão de fazer-se ou não a demonstração do TP ou apenas uma verificação experimental para mais casos deveria ser considerada a partir do estabelecimento de um contexto para a aula, considerando principalmente os aspectos cognitivos dos estudantes. Além disso, PI comentou que os professores deveriam pensar no tempo e na quantidade de horas/aula necessárias para cada bloco da unidade didática, considerando, mais uma vez, o contexto da aula.

Logo após, desenvolveu-se um diálogo sobre a proposta de unidade didática exposta por PI, conforme segue:

P6: Bom, eu achei interessante o fato de dividir aula em blocos, sim, e aí a gente vai ter que fazer a análise, para ver qual que é a parte. Porque, toda ela junto, fazer toda essa sequência, essa unidade

didática, é muito legal, sim, porque aí a gente consegue aproveitar todos os pontos da aula. Mas, a gente já tinha concordado anteriormente, que não dá para fazer tudo em uma aula só. Então, eu acho bem ok.

P1: Eu também concordo.

P2: Eu estava pensando aqui nos colegas que dão aula regular em sala de aula, se não seria legal cada bloco ser uma aula. Porque, dependendo da quantidade de períodos que tem numa aula, por exemplo, um período, daí dá tempo de fazer a contextualização histórica e essa questão de conhecimentos prévios, por exemplo. Mas, já o dois, o três e o quatro precisaria, eu acredito, que uns dois períodos, se de maneira presencial. Eu não sei o que vocês acham sobre isso.

P1: Tá, no redesenho a gente pode estabelecer outros períodos, como P2 falou?

PI: Sim. Exatamente. Não precisa ser só naquele tempo que a gente colocou inicial de uma hora e meia. Até porque a gente percebeu que não daria para fazer tudo isso numa hora e meia, né? Então, a gente vai ter que alargar isso. Vai ter que fazer o que a gente está chamando de uma unidade didática, uma sequência didática. Então, a gente estruturou dessa maneira, mas agora a gente pode conversar e pode mudar essa estrutura.

P6: PI, agora com a pergunta do P2 me surgiu uma dúvida. Cada bloco não precisa necessariamente ter a mesma duração.

PI: Não.

P6: Não, né? Só para confirmar. Porque, sim, o bloco 2 e o bloco 3 tomariam mais tempo.

PI: E me deixa explicar melhor também que, assim, o bloco 2, até ele está assinalado em amarelo, porque esse seria o bloco, seria um momento, da unidade didática, onde a gente vai trabalhar em detalhe no planejamento. A gente vai fazer um redesenho e planejar detalhadamente essa parte, devido ao tempo. A gente já vai detalhar, então, e cada coisa que a gente escolher a gente vai justificar por que a gente tá escolhendo aquela atividade ou aquele exemplo. Quais significados do Teorema de Pitágoras a gente vai trabalhar. A gente vai pensar muito detalhado nesse bloco 2. E os outros blocos, se der tempo, a gente detalha até onde der tempo, certo? Mas, a gente acredita que, em função do tempo, não seja possível fazer o detalhamento dos quatro blocos. A gente vai ter que ter as atividades em todos eles, por exemplo, mas a gente não precisa de repente, talvez lá no bloco 3 não dê tempo de a gente justificar cada atividade.

P1: Tá. Aí no caso a gente pode também mudar, por exemplo, tem irracionais, operações com irracionais, a gente pode tirar ali e fazer...? É que lembra que a gente pensou em não trabalhar os irracionais?

Após o questionamento de P1, a professora pesquisadora explicou que os professores deveriam guiar o redesenho a partir das listas de sugestões que eles haviam estabelecido na etapa de reflexão da aula como os CAD. Nesse sentido, PI explicou que, olhando para o quadro

resumo com as sugestões para cada uma das dimensões dos CAD (Figura 45) e pensando no contexto da aula, os professores poderiam decidir quais ações tomariam para planejar a unidade didática.

Após discutirem um pouco, os professores decidiram que a unidade didática seria planejada para um contexto hipotético, pois, devido ao tempo do curso, o que seria planejado para essa unidade didática não seria aplicado em uma turma de alunos. Mas, os professores quiseram preparar essa unidade didática pensando que, num futuro, ela poderia ser aproveitada por eles em suas práticas profissionais. Nesse sentido, surgiu a dúvida se a unidade didática seria planejada para um contexto de aulas virtuais ou presenciais, pensando em um momento de contexto sem pandemia em que as aulas pudessem voltar a ser outra vez presencialmente. P5 disse que considerava que a unidade didática deveria ser planejada de maneira virtual, pois sua opinião pessoal era que a pandemia demoraria muito tempo ainda para terminar. Da mesma forma, P4 comentou que a ideia de se fazer uma unidade didática, a partir da reflexão realizada pelos professores, havia surgido de um contexto de aula virtual e que toda a discussão havia sido realizada nessa perspectiva. Por essa razão, sugeriu que se planejasse a unidade didática para que fosse virtual. Da mesma forma, P6 comentou que estava de acordo com P4 e que o redesenho deveria ser realizado pensando-se no contexto de uma aula virtual. Em seguida, P1 perguntou se os demais professores que concordaram em planejar a aula do redesenho para essa modalidade.

Na sequência do curso, os professores discutiram e decidiram o que fariam em cada bloco da unidade didática sugerida. O primeiro aspecto bastante discutido e que ficou definido foi que no segundo bloco se faria uma verificação experimental do TP para mais casos, trazendo a ideia de generalização. E, depois disso, os professores sugeriram fazer a demonstração geométrica usando algum material manipulativo. No entanto, este último aspecto ficou para ser melhor pensado mais adiante.

A seguir, a partir do documento editável do *Google Drive*, que continha o primeiro planejamento da aula de pesquisa, os professores começaram a editar e a detalhar o redesenho da aula. Nesse sentido, o restante desta sessão foi utilizado para discutir detalhes do redesenho da aula.

Por fim, PI sugeriu que os professores construíssem os materiais para a aula e testassem antes para que pudessem antecipar o pensamento dos alunos e discutirem os detalhes relacionados a isso na próxima sessão do curso. Ficou definido, também, que os professores iriam pesquisar uma possível demonstração do TP para apresentar aos alunos e atividades para trabalhar os significados parciais do TP.

Sessão 15: Redesenho da Aula com os CAD (parte 2)

A décima quinta sessão do curso foi realizada no dia 30 de junho de 2020 e teve duração de duas horas e trinta minutos, a qual contou com a presença de todos os professores participantes do curso, de PI e da professora Dra. Adriana Breda, esta última participou apenas como observadora ouvinte.

Nesta sessão, deu-se sequência ao redesenho da aula, que acabou virando uma unidade didática. Novamente, PI apresentou o quadro resumo (ver sessão 14 do curso) com todas as sugestões para um redesenho da aula, elaboradas a partir da reflexão realizada pela perspectiva de cada uma das dimensões dos CAD.

PI começou a sessão retomando o que se havia decidido trabalhar em cada bloco da unidade didática. Nessa perspectiva, PI retomou como seria feito uma avaliação formativa em cada bloco da unidade didática. No primeiro bloco, referente a retomada dos conhecimentos prévios e a contextualização histórica do TP, ficou combinado que os professores iriam elaborar uma avaliação inicial para identificar quais conhecimentos prévios os alunos já compreendiam bem e quais deveriam ser melhorados. Nos blocos 2 e 3, destinados ao estudo de três significados parciais do TP, significados geométricos 1 e 2 e significado aritmético-algébrico, ficou decidido que os professores fariam um instrumento de avaliação contínua. E, no quarto e último bloco, far-se-ia uma avaliação final dos conceitos trabalhados. Essa seria a estrutura que daria suporte para a realização da avaliação da unidade didática.

Depois disso, PI destacou que os professores haviam decidido fazer, no bloco 2 da unidade didática, uma verificação experimental para o TP com mais casos além do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Nesse sentido, os professores fizeram uma breve discussão sobre usar ou não apenas ternas pitagóricas primitivas para fazerem a atividade que tratava do significado parcial do TP (relação entre áreas de quadrados), mas devido a limitação pelo uso

de material manipulativo (papel quadriculado), decidiram usar apenas duas ternas pitagóricas primitivas, (3, 4, 5) e (5, 12, 13), e as demais seriam ternas pitagóricas múltiplas de uma terna primitiva. Os outros exemplos de ternas pitagóricas primitivas seriam usados em atividades que não se usaria o papel quadriculado, por exemplo.

A seguir, P1 e P2 apresentaram duas propostas distintas de demonstração do TP com o uso de material manipulativo. P1 sugeriu uma demonstração geométrica do TP baseada em comparação de áreas (demonstração clássica do TP) e P2 sugeriu fazer uma demonstração do TP que usa semelhanças. Em seguida, os professores discutiram aspectos relacionados aos conhecimentos prévios e sobre a autonomia dos alunos que seriam necessários para a compreensão dessas demonstrações e, nesse sentido, qual seria a mais viável. Após cada professor expressar sua opinião, com base em suas experiências, os participantes decidiram propor para um redesenho da aula a demonstração geométrica clássica do TP (ver anexo 2).

Na sequência da sessão, os professores discutiram algumas sugestões de materiais manipulativos que poderiam ser utilizados na demonstração geométrica do TP (Tangram, cartolinas pintadas).

A continuação, P3 e P5 apresentaram um material que poderia ser usado para fazer a atividade de verificação experimental do TP (ver anexo 2) e os professores discutiram a esse respeito, com relação a aspectos relacionados à autonomia dos estudantes e ao tipo de aula (virtual ou presencial).

Em seguida, os professores discutiram questões relacionadas ao modo como seria realizada a avaliação formativa da aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, P1 apresentou, a título de exemplo, uma tabela que estabelecia critérios de avaliação e os respectivos níveis de desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, relacionado a esses critérios.

A seguir, os professores comentaram que era mais difícil avaliar a aprendizagem dos estudantes em uma aula a distância. P1 concordou, mas ressaltou que, mesmo assim, era importante os professores pensarem em critérios de avaliação e em quais instrumentos seriam usados para avaliar a aprendizagem dos estudantes para cada atividade que eles estavam elaborando para um redesenho da aula. Depois, os professores discutiram quais seriam os critérios de avaliação e quais seriam os instrumentos de avaliação que seriam usados para evidenciar a aprendizagem dos estudantes. O Quadro 8 apresenta o exemplo de como se

estabeleceu esses critérios, por exemplo, para avaliar a atividade de verificação experimental do TP.

Quadro 8. Critérios de avaliação para a atividade de verificação experimental do TP criado no redesenho da aula

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO	NÍVEL 1 (satisfatório)	NÍVEL 2 (notável)	NÍVEL 3 (excelente)
Encaixar os quadrados nos lados correspondentes dos triângulos retângulos (instrumento de avaliação: envio de fotos).	Conseguir encaixar os quadrados corretos em um dos triângulos	Conseguir encaixar os quadrados corretos em dois triângulos diferentes	Conseguir encaixar os quadrados correspondentes nos três triângulos.
Estabelece relação entre as áreas dos quadrados e os lados dos triângulos retângulos (instrumento de avaliação: fala dos alunos através do <i>chat</i> , ou respostas ao formulário).	Percebe que existe uma relação entre as áreas dos quadrados e os lados do triângulo	Verifica que a soma das áreas dos quadrados menores é a mesma área do quadrado maior.	Relaciona o tamanho das áreas dos quadrados com os lados dos triângulos, chegando assim ao Teorema de Pitágoras.

Fonte: elaborado pelos participantes do curso.

Como forma de melhorar a representatividade do TP, na continuação da sessão, P6 apresentou atividades que têm em conta o significado geométrico parcial do TP, relação entre áreas de quadrados de lados equivalentes aos lados do triângulo retângulo. Em seguida, os professores tiveram uma ampla discussão sobre maneiras de adaptar as duas atividades apresentadas para o entorno dos estudantes, a fim de destacar a utilidade sócio laboral do TP.

Na sequência da sessão, PI destacou que se deveria, também, pensar em atividades, para o redesenho da aula, que abordassem o outro significado geométrico parcial do TP, relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo. Nesse sentido, P1 perguntou sobre a possibilidade do aproveitamento dos exemplos utilizados na primeira aula e os demais professores concordaram. Mas, PI ressaltou a necessidade de melhorar os enunciados dos problemas propostos, de modo a melhorar a adaptação ao contexto dos estudantes e que tivesse uma certa riqueza de processos, conforme havia-se observado na reflexão da aula.

A seguir, os professores participantes pensaram em uma atividade que relaciona os dois significados geométricos parciais do TP. Nessa perspectiva, depois de discutirem um pouco, os professores decidiram que P8 ficaria responsável por elaborar essa atividade e nos critérios e instrumentos de avaliação.

Na sequência, PI dividiu as atividades do redesenho entre os professores participantes. Assim, cada professor, ficou responsável por elaborar os enunciados de uma das atividades propostas, elaborar um quadro com os critérios de avaliação e um exercício relacionado à atividade no formulário final de avaliação. Desta forma, P3 e P5 ficaram responsáveis por pensar nos detalhes da atividade de verificação experimental do TP. A demonstração geométrica do TP ficou sob a responsabilidade de P1. Já, P6 comprometeu-se em elaborar e pensar na avaliação das atividades sobre o significado geométrico parcial 1 do TP (relação entre áreas de quadrados). P4 ficou com os exercícios sobre o significado geométrico parcial 2 do TP (relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo). P7 e P8 responsabilizaram-se pelos exercícios de conexão entre os significados geométricos parciais 1 e 2 do TP.

A seguir, os professores falaram sobre a ideia de se trabalhar, no bloco 3 da unidade didática, a recíproca do TP e realizar exercícios de aplicação sobre a recíproca do TP introduzindo as ternas pitagóricas (significado parcial 3, aritmético-algébrico). Nesse sentido, P1, P7 e P8 ficaram responsáveis por pensar nas atividades relacionadas a isso e na sua respectiva avaliação.

Em relação ao que seria tratado no bloco 1, contextualização histórica, os professores decidiram trabalhar o mesmo que na primeira aula. P2 e P5 ficaram responsáveis por organizar o que seria trabalhado na unidade didática. Em relação aos conhecimentos prévios, P3 e P4 se ofereceram para pensar nas atividades da avaliação diagnóstica e exercício sobre os conhecimentos anteriores, necessários para a compreensão do TP. Em relação ao instrumento final de avaliação, cada professor ficou responsável por elaborar uma atividade.

Por fim, PI apresentou o questionário final de avaliação do curso e informou que os professores deveriam respondê-lo no prazo de uma semana, quando se faria o relatório final e avaliação do curso. Por último, PI combinou uma sessão extra, para fazer o fechamento do

curso, que seria realizada na semana seguinte. E, assim, conclui-se a décima quinta sessão do curso.

Sessão extra: fechamento do curso

A sessão extra do curso ocorreu no dia 07 de julho de 2021 e teve duração de uma hora e quinze minutos de duração. Estiveram presentes todos os professores participantes, a professora pesquisadora, o professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva e a professora Dra. Adriana Breda.

Nesta sessão, o professor Rodrigo agradeceu a participação dos professores no curso de extensão da UFRGS e comunicou as questões relativas ao relatório final e certificado do curso. Além disso, cada professor participante apresentou as atividades que havia desenvolvido para o redesenho da aula e alguns detalhes finais para a unidade didática foram discutidos e decididos.

Por fim, PI agradeceu a participação de todos os professores no curso e pediu que cada um fizesse um comentário geral sobre o curso sobre aspectos que gostariam de destacar. A seguir, cada participante falou um pouco sobre a experiência vivida e agradeceu de modo geral a sua participação no curso e a colaboração dos colegas. Por último, a professora Adriana fez um agradecimento e resumo final de como foi o desenvolvimento do curso. E, assim, PI deu por encerrado o curso.

Considerações sobre a implementação do curso

A implementação do curso deu-se em três fases (fase 1, fase 2 e fase 3), mais uma fase anterior à fase 1 (fase 0). Na fase 0 do curso, que coincide com a sessão 1, realizou-se a apresentação e estrutura do curso e explicou-se o que é o LS aos participantes.

A fase 1 do curso foi composta pelas sessões 2, 3, 4, 5 e 6 e correspondeu ao desenvolvimento de dois ciclos completos de LS, com os oito professores participantes separados em dois grupos de quatro componentes cada. Parte da sessão 2, conforma a etapa 1 do LS, *estudo do currículo e metas*, isto é, nessa etapa os professores estudaram como o Teorema de Pitágoras, tema escolhido para a aula de pesquisa do LS, está apresentado no

currículo nacional (BNCC) e no currículo das escolas onde as aulas de pesquisa foram implementadas. Ainda na sessão 2 e, também, durante as sessões 3 e 4 desenvolveu-se a etapa 2 do LS, *planejamento da aula*, os professores planejaram detalhadamente aulas sobre o TP. Os professores participantes desenvolveram duas aulas sobre o TP, uma para o Ensino Fundamental e a outra para o Ensino Médio e essas aulas foram implementadas entre as sessões 4 e 5 do curso (etapa 3 do LS, *implementação da aula*). As sessões 5 e 6 representam a etapa 4 do LS, *reflexão da aula*, onde realizou-se a análise conjunta da aula no Ensino Fundamental (sessão 5) e no Ensino Médio (sessão 6). Nesta etapa do LS, todos os professores participaram da reflexão das duas aulas implementadas.

Na sequência do curso, com sessões onde todos os professores participaram em conjunto, realizou-se a fase 2 do curso (sessões 7, 8, 9 e 10). Neste ponto do curso, os CAD foram ensinados ao grupo de professores participantes. A sessão 7 correspondeu a etapa de introdução ao estudo dos CAD, através de evidências do uso dos CAD, de modo implícito, pelos professores na fase 1 do curso. Na sessão 8 do curso trabalhou-se o CAD epistêmico, na sessão 9 o CAD cognitivo e na sessão 10 os CAD de meios, de interação, afetivo e ecológico.

Por fim, na fase 3 do curso (sessões 11, 12, 13, 14 e 15), os professores fizeram uso dos CAD para fazer uma nova reflexão sobre a aula de TP, implementada no Ensino Fundamental, e um redesenho da aula a partir do que se observou com o uso dos CAD como ferramenta que pautou a reflexão dos professores. Na sessão 11, cada professor realizou uma análise individual a partir da ótica de um dos critérios de adequação didática. Nas sessões 12 e 13 os professores apresentaram suas reflexões individuais e fez-se uma reflexão conjunta por CAD da aula, além disso, uma análise da aula realizada por especialistas nos CAD foi apresentada e anotou-se sugestões para um redesenho da aula. Finalmente, nas sessões 14 e 15 realizou-se o redesenho da aula do TP no Ensino Fundamental, que acabou tornando-se uma unidade didática. Por último, deu-se uma sessão extra para concluir alguns aspectos da unidade didática desenvolvida e realizar uma avaliação, a partir de comentários gerais dos professores participantes, e fechamento do curso.

Uma primeira conclusão relacionada à implementação do curso é a de que os professores participantes consideram que participar de um curso que combina o LS e os CAD desenvolveu neles algumas competências docentes, principalmente a competência de análise didática, ou seja, a competência reflexiva, tanto para desenhar uma aula, quanto para valorá-la, aspecto que fica evidente na resposta dos oito professores relacionadas ao questionário final de avaliação do curso.

P1: Sim, o curso nos proporcionou ricas reflexões no processo ensino e aprendizagem e pude perceber a necessidade de usar cada critério para verificar se a aula estava de acordo. Pude colaborar com a proposta/estratégia pensando nas aulas que tivemos, inclusive usando de minha análise feita para melhorar a construção da demonstração do Teorema de Pitágoras contextualizado à aula que planejamos. Além de participar de todo o redesenho, concordando e dando sugestões.

P2: Sim. Eu, como um professor que nunca deu aula de Teorema de Pitágoras para alguma turma, aprendi muito e consigo entender melhor como ensinar os alunos.

P3: Com certeza. Esses critérios fizeram com que enxergasse a aula de uma maneira muito mais ampla e profissional.

P4: Sim, o curso ajudou a refletir e pensar sobre problemas que não sei lidar e repensar sobre outros que não tinha percebido.

P5: Sim. Aprendi a olhar com mais cuidado o aluno e suas necessidades (em todos os aspectos). Acredito que seja costume pensar apenas no ponto de vista cognitivo, que o aluno aprenda aquele conteúdo apenas. Com o curso aprendi a olhar os outros critérios e já estou implementando nos meus planejamentos.

P6: Sim, antes do curso eu já era muito exigente comigo mesma, mas depois do curso passei a ser mais ainda. A prestar atenção aos detalhes, por exemplo sobre a diversificação de exercícios, ou seja, exercícios que trabalham diferentes conceitos sobre o mesmo tema, eu já fazia isso antes, mas por uma crença minha, agora possuo mais clareza sobre a importância disso. Tento evitar questões ambíguas e presto mais atenção na minha fala.

P7: Sim. Acredito que ajudou a formalizar e teorizar pensamentos que eu já tinha sobre o ensino e também acrescentou em conhecimentos sobre o ensino de matemática.

P8: Acredito que sim, pois ao conhecer os critérios de idoneidade didática, pude analisar a aula com um olhar diferenciado.

Uma segunda conclusão é a de que os professores assumem haverem desenvolvido alguns sentimentos e emoções ao trabalhar de forma cooperativa e grupal (aspecto contemplado na abordagem LS), conforme segue:

P1: O trabalho em equipe proporcionou sentimentos de cooperação em poder contribuir junto com os colegas. De empatia para entender que a aula ministrada pela professora P4 poderia ser ministrada por mim e por alguns fatores eu poderia cometer os mesmos erros cometidos. Na análise da aula, pude refletir em minha prática que ações e quais estratégias eu preciso melhorar na elaboração dos meus planos de aula e melhorar minha ação em sala de aula. Pude refletir que, para uma boa aula, é preciso refletir, mensurar e pesquisar e não temos conhecimentos prontos, mas a cada aula podemos melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática valorando cada critério de adequação didática. Refleti que somos docentes em construção e não devemos ter medo de errar, mas termos a disposição de melhorar o conhecimento construído.

P2: Eu iniciei o curso muito empolgado, tanto para aprender como para colaborar com o planejamento e a análise da aula. Contudo, com a união dos dois grupos, em diversos momentos, senti uma certa competição de poder e conhecimento, cujos alguns colegas não levavam em consideração sobre as contribuições dos demais colegas. Me senti muito confortável com a mediação da professora-pesquisadora que conseguiu conduzir o processo muito bem. De maneira geral, foi muito bom fazer o curso.

P3: Muitos, desde a satisfação de ver a aula pronta e aplicada até um desconforto quando não conseguia acompanhar as ideias e discussões dos colegas. Mas, acredito que isso fez com que eu me desafiasse a sair da zona de conforto no meio de uma pandemia e me ajudou muito a estar ativa e querer que tudo volte o quanto antes para divulgar e aplicar os conhecimentos que tivemos.

P4: Alegria, muita empolgação, curiosidade, gratidão, humor, medo e vergonha.

P5: O primeiro planejamento acredito que tenha sido mais fácil que o segundo, já que éramos menos pessoas na discussão, e provavelmente tínhamos o mesmo tipo de ideias. Mas, me senti confortável para expressar a minha opinião. Foram muito ricas as discussões que surgiram ao longo dos planejamentos.

P6: Apesar da aula analisada não ter sido a minha, o curso me trouxe sensações, às vezes boas, às vezes ruins, pois me fez pensar muito sobre a minha prática, várias questões que discutimos passamos batido no dia a dia de sala de aula e, apesar de tentarmos melhorar, é muito difícil, pois a discussão em grande grupo, no meu ponto de vista, é muito enriquecedora. Quando preparamos a aula sozinhos, acredito que deixamos várias questões passarem, por não conseguirmos enxergar diferentes pontos de vista, que são apontados por colegas. Também percebi que ainda tenho muito a melhorar como professora, pois planejar exige tempo e na grande maioria das vezes não temos. Então tive um misto de angústia, por saber que é quase impossível dar uma aula perfeita.

P7: Sim. Muitas vezes a rotina corrida não possibilita a construção coletiva dentro da escola. Muitas vezes, é difícil ouvir e falar sobre a nossa prática. Gostei de ter esses momentos e poder ter subsídios para incentivar essa prática nas escolas que trabalho.

P8: Devido à situação atual da pandemia, partilhar experiências com colegas foi muito importante e gerou um sentimento de segurança, carinho e empatia. Partilhar com os colegas e perceber que as dificuldades que encontro são partilhadas pelos colegas e encontrar meios de amenizá-las foi muito importante.

Embora os participantes evidenciem que desenvolveram a competência reflexiva durante o curso e algumas emoções positivas quanto ao trabalho cooperativo, uma terceira conclusão referente à implementação do curso de formação é a de que o tempo total do curso realizado de forma virtual, de 40 horas, não permitiu uma nova implementação da aula redesenhada com os CAD e, conseqüentemente, sua análise. Outra conclusão é a de que algumas sessões do curso foram realizadas muito rapidamente. Nesse sentido, para uma próxima edição, sugere-se aumentar o tempo de um curso de 40 horas para 60 horas ou mais.

P1: Acredito, que seria possível uma modalidade com mais horas, para podermos ter mais tempo no redesenho da aula.

P6: Acredito que a única sugestão seria ampliar o tempo de duração do curso na modalidade EAD, pois acabamos limitando nosso tempo nas últimas aulas e outro aspecto seria repensar as aulas teóricas, talvez mais curtas, ou com um intervalo.

Por último, destaca-se que, apesar de a implementação do curso ter ocorrido no meio de uma pandemia, tanto os pesquisadores que o implementaram, quanto os participantes, puderam adaptar-se e realizar o curso adequadamente por meio das plataformas virtuais de comunicação.

Alguns resultados referentes à implementação podem ser encontrados nas seguintes publicações. É importante salientar que os participantes do curso de formação tiveram um papel ativo na divulgação dos resultados parciais, uma vez que atuaram como coautores de algumas publicações. Entre outros aspectos, a publicação dos resultados de um LS é uma característica valorada positivamente pelos autores que defendem esta abordagem teórico-metodológica.

- ✓ Silva, R. A., Führ, L., Henrique, V. R. C., Hummes, V. (en prensa). Reflexão sobre uma aula de Teorema de Pitágoras em um ciclo de *Lesson Study*: um olhar desde os critérios de idoneidade didática mediacional, ecológico e epistêmico. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de*

Lesson Study (p. 340-348). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

- ✓ Agache, G. E. T., Brandt, N., Linde, I. C., Hummes, V. (en prensa). Análise e reflexão desde o olhar dos critérios de idoneidade didática interacional, cognitivo e afetivo de uma aula de Teorema de Pitágoras em um ciclo *de Lesson Study*. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de Lesson Study* (p. 302-309). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

5.3 Papel dos CAD em uma experiência de LS

Nesta seção, explanam-se os resultados relacionados ao objetivo específico número 3 (O3), que é pesquisar o papel que têm os CAD em uma experiência de LS, antes que tal ferramenta tenha sido ensinada aos participantes como pauta para organizar suas reflexões. Para isso, apresentam-se os resultados do nível de uso implícito dos componentes de cada CAD, presentes na reflexão do grupo de professores, realizada na fase de desenvolvimento do ciclo de LS, em particular, nas etapas de *estudo do currículo e metas, planejamento da aula e reflexão da aula* sobre o ensino do Teorema de Pitágoras para alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Adequação Epistêmica

A análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores relacionados a três dos componentes da adequação epistêmica (ver Figura 46).

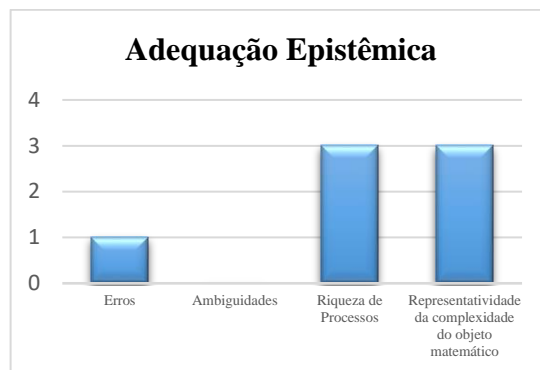


Figura 46. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Epistêmica
Fonte: elaboração própria.

Quanto ao componente *erros* (IE1), há apenas um comentário realizado por P4 que implementou a aula:

P4: Tem um momento ali que eu falo, que eu quero falar das áreas e tal, e eu falo: os dois lados deste quadrado medem, acho que 3 ou 4, não lembro. E não são só os dois lados, não é? [...] se eu pudesse eu voltaria e arrumaria isso.

Além desse comentário, não há mais ponderações dos professores, durante as etapas de LS, com relação às práticas que são consideradas incorretas desde a perspectiva do conteúdo matemático. Por essa razão, se atribui um nível 1 para o componente IE1.

Ao analisar o discurso dos professores, não se observa nenhum comentário realizado por eles com relação a se algum tipo de explicação ou instrução pode gerar um pensamento ambíguo ou uma confusão na compreensão do TP por parte dos alunos. Contudo, é importante destacar que, durante a etapa de *planejamento da aula*, PI decide averiguar como P4 normalmente trabalha com os seus alunos o TP, conforme seguinte diálogo

PI: E tu P4, como é que tu introduzes [o estudo do Teorema de Pitágoras]? Assim também?

P4: Mais ou menos assim. Só queria comentar que eu também uso... vou mandar aqui no *chat*... eu gosto de usar esse “videozinho” que demonstra mais ou menos a mesma coisa, só que com volume. [referindo-se ao experimento apresentado no endereço do *YouTube*: <https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=bS-D0XeFMPQ>]. Porque é um líquido que sai do quadrado da hipotenusa e escorre para os outros dois. Vocês já devem ter visto. Mas, a ideia é a mesma. A questão da área, não é?

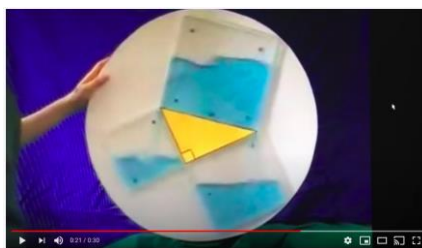


Figura 47. Experimento sobre TP apresentado

Fonte: Disponível em < <https://www.youtube.com/watch?v=bS-D0XeFMPQ>>

PI: Então tu pegas esse vídeo e mostra para eles [alunos]?

P4: Depois da explicação, eu tento mostrar esse vídeo para eles entenderem que a área vai ser a mesma.

Com o exemplo apresentado, P4 comenta que se trata da ideia do Teorema de Pitágoras como relação entre áreas de quadrados. No entanto, o que P4, neste momento, não se dá conta é que esse tipo de exemplo, com material concreto, pode gerar uma compreensão ambígua sobre o TP nos alunos, já que o experimento considera a relação entre os volumes e não entre as áreas.

PI: Explica um pouquinho como é que é isso, P4.

P4: O quadrado... o volume que tem ali dentro do quadrado da hipotenusa, o volume da água é o mesmo ocupado pelos outros dois, pelo volume dos outros dois catetos. Mas, eu não falo em volume com eles. Eu comento na minha aula. Porque, eu não sei se eles entendem essa noção de volume, tão claramente. Eu falo que a quantidade de líquido que tem no quadrado da hipotenusa é o mesmo que o dos outros dois quadrados dos catetos. A soma dos outros dois é a mesma quantidade de água que tem naquele grandão lá.

No comentário que P4 faz, ao tentar explicar o experimento, fica evidente a confusão ou ambiguidade que esse tipo de experimento pode gerar com relação ao conceito que se quer ensinar. A própria professora atrapalha-se entre as ideias de volume e área.

Embora essa evidencia tenha sido identificada na etapa de *planejamento da aula*, em nenhum momento se encontrou comentários realizados pelos professores referentes às definições ou procedimentos que não estão corretamente enunciados. Por esse motivo, se concede um nível 0 para o componente *ambiguidade* (IE2) do critério de adequação epistêmica.

Além dos componentes *erros* e *ambiguidades*, observa-se que a reflexão dos professores, realizadas nas etapas do ciclo de LS analisadas, apresenta alguns comentários ou

diálogos que podem ser considerados evidências do uso implícito do componente *riqueza de processos* (IE3) da adequação epistêmica, por esse motivo se atribui um nível 3 a esse componente.

Para ilustrar, durante a etapa de *planejamento da aula*, observou-se algumas sugestões de tarefas para a aula que podem ser consideradas evidências implícitas do uso do componente *riqueza de processos* (IE3), algumas delas tem relação com a ideia de se trabalhar megaprocessos matemáticos, como a resolução de problemas, por exemplo:

P1: A gente pode elaborar uma resolução de problemas também.

Também há evidências de propostas relacionadas com a ideia de se trabalhar um processo de exploração e experimentação com os alunos, realizar provas de tentativa e erro, contagem, manipular objetos, conforme seguintes comentários:

P2: Eu tinha pensado, no início, eles criarem as áreas, como vocês falaram que trabalham com a área e tal e, não, necessariamente, relacionar diretamente com o triângulo. Primeiro, eles entenderem que um quadrado de lado de cinco tem área vinte cinco. Eles já trabalharam isso, né? Para depois relacionar "bom se a gente tem um quadrado de lado três, um de lado quatro e um lado cinco, quando eles dispostos daquela forma formam um triângulo. E, aí, sim, a gente trabalhar aqui, bom a área daquele quadrado de lado cinco é a soma dos outros quadrados. Fazer uma relação com a questão da área, como vocês já trabalharam.

P2: É que eu visualizo, com essa conta antes, quadrados, para eles relembrem a questão da área, não é? Por exemplo, se eles criarem um quadrado de lado 5, quando eles contarem os quadradinhos que vão estar dentro, terão 25 quadradinhos. O quadrado de lado 4... Para que, quando a gente trabalhar com o triângulo pitagórico, de [lados] três, quatro e cinco, eles consigam entender que 9 mais 16 é 25. Que a soma das áreas dos quadrados três e quatro é igual a área do quadrado de lado cinco. É mais lógico. Eu penso mais em um "relembra" para que eles consigam realmente entender não apenas decorar, entende? Por isso eu sugeri essa questão dos quadrados.

Ademais, identifica-se a ideia de apresentar uma tarefa proposta para a aula de modo a promover um processo de institucionalização, ou seja, institucionalizar o TP a partir de mostrar que a área do quadrado formado na hipotenusa é igual a soma das áreas formadas nos catetos e considerar o resultado válido para qualquer triângulo retângulo:

P2: Eu acho que, P4, nessa hora da explicação, tu podes pedir para os alunos contarem nos quadradinhos, quem sabe? Fazer com que os alunos contem os quadradinhos... a soma do três com o quatro é o mesmo número que é do lado cinco, para que eles [alunos] consigam ver: "o que vocês concluem com isso?". A gente espera que alguém responda: "concluímos que...", "eu concluo

que...” se eu pegar os quadrados de lado três e quatro e juntar, dá o mesmo número que o quadrado de lado cinco. Para que eles realmente entendam que o Teorema de Pitágoras é isso. E, então, depois tu formalizas.

Em um determinado momento do planejamento da aula, P3 sugere que se faça uma verificação para mais casos, além do caso particular do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, justificando que fazer a verificação para apenas este caso poderá gerar a impressão que o TP somente funciona para esse caso em particular, conforme expõe:

P3: E será que não seria legal fazer com outro [referindo-se a um triângulo retângulo com medidas diferentes de 3, 4 e 5 de lado] para eles verem que com outro também dá certo? Para eles não acharem que é só nesse que dá certo? Confirmar a teoria com outro tamanho, um lado diferente.

No comentário feito por P3, evidencia-se a ideia de se trabalhar um processo de argumentação/validação quando propõe-se fazer a comprovação do TP para mais casos de triângulos retângulos, ou seja, a partir disso estabelecer justificativas, razões e mostrar uma conjectura.

Já, na etapa de *reflexão da aula*, observa-se um comentário que avalia positivamente o fato de haverem realizado um processo de exploração e experimentação:

P6: E o fato de fazerem eles construírem e cortarem e usarem [...]. Eu achei bem interessante isso, eles poderem montar.

Além disso, nessa mesma etapa, observa-se uma sugestão feita por P8 que é estabelecer um processo de formulação de conjecturas:

P8: Sobre a resolução, será que... pensando até nesses erros deles assim... se a gente fizesse de uma forma mais intuitiva de perguntar "se a soma de um número com 36 é 100 qual é esse número?" e, depois, ao invés de ir resolvendo como equação, ir fazendo de uma forma mais intuitiva, será que isso não ajudaria?

Conclui-se que, a reflexão dos professores realizadas nas etapas do ciclo de LS analisadas, apresenta alguns comentários ou diálogos que podem ser considerados evidências do uso implícito do componente *riqueza de processos* (IE3) do critério de adequação epistêmica, por esse motivo se atribui um nível 3 a esse componente.

Também, observa-se que a reflexão dos professores, realizada nas etapas do LS contempladas neste estudo, apresenta comentários ou diálogos que podem ser considerados evidências do uso implícito da maioria dos indicadores do componente *representatividade da*

complexidade do objeto matemático que se quer ensinar (IE4), neste caso, a complexidade de significados relacionados ao TP, conforme explica-se na sequência.

Em um determinado momento, quando os professores estão contando suas experiências em ensinar o TP, na etapa de *estudo do currículo e metas*, a professora investigadora pede ao professor P1 que seja mais específico e explique exatamente como apresenta o TP pela primeira vez aos seus alunos, conforme seguinte diálogo:

PI: E como é que tu fazes essa apresentação do Teorema de Pitágoras, como tu introduz esse assunto?

P1: Geralmente eu começo com aquela construção do triângulo retângulo. E pego os catetos e a hipotenusa e eu construo com eles quadrados. Por exemplo, um quadrado de lado 3, outro quadrado de lado 4, outro quadrado de lado 5...

P2: Isso? [aponta para uma construção geométrica de quadrados desenhados a partir dos lados de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.]

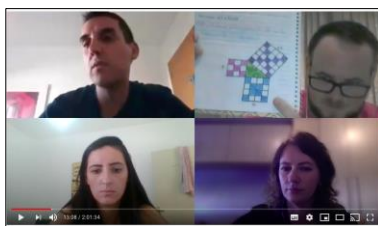


Figura 48. Registro do momento em que P2 apresenta a construção no triângulo retângulo
Fonte: elaboração própria

PI: Tu constróis quadrados de acordo com os lados do triângulo retângulo?

P1: Isso. Então, eu faço eles [referindo-se aos seus alunos] verem a relação do Teorema de Pitágoras. Que o quadrado da hipotenusa seria a soma dos outros quadrados dos catetos. [...] E o melhor... digamos o melhor tamanho de lados seria 3, 4 e 5. É o melhor triângulo para começar a trabalhar.

O professor P1, ao explicar como introduz o estudo do TP aos seus alunos, apresenta a ideia do Teorema de Pitágoras como a relação entre as áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, especificamente, apresenta o exemplo do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Trata-se de um dos significados parciais do TP, o significado geométrico, os sinais elevados ao quadrado que aparecem representam áreas.

Além de P1 defender que o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 é um bom triângulo para se introduzir a ideia do TP como uma relação entre as áreas de quadrados de lados de mesmo tamanho dos lados do triângulo retângulo, o professor P2 destaca que investigou em

vários livros didáticos e que todos iniciam o estudo do TP dessa maneira, com esse exemplo de triângulo retângulo, conforme segue o diálogo

P2: Inclusive todos os livros que eu olhei, todos começam dessa maneira.

PI: Os livros didáticos que tu investigaste?

P2: Livro didático. Todos eles começam dessa maneira.

Estes comentários reforçam e, de alguma maneira, atribuem um valor de verdade ao ensino do TP desde seu significado geométrico (estabelecimento da relação entre as áreas dos quadrados formados nos lados do triângulo retângulo), uma vez que, esta forma de introduzir o TP, está plenamente institucionalizada nos livros didáticos.

Na sequência da discussão, a professora investigadora questiona se é dessa maneira que os professores pretendem introduzir o estudo do TP na aula, conforme segue:

PI: Então nós estamos planejando uma aula conjunta, nós vamos iniciar com essa forma de representação do Teorema de Pitágoras? O que vocês acham?

Todos: [concordam]

PI: Vocês acham, então, que essa é a melhor forma?

P1: [faz sinal que concorda]

P4: Sim.

PI: Por quê? O que vocês notam nos alunos? O que vocês percebem?

P1: Eu acho que eles [os alunos] enxergam melhor a relação. Eles precisam visualizar o porquê funciona aquela equivalência de áreas. O que eu costumo fazer, também, é incentivá-los a trocar, se mudássemos os valores dos lados, depois disso, como é que ficaria essa relação. E aí que vai aparecer a dificuldade deles, porque é bem simples fazer uma equivalência de áreas, por exemplo, de cinco ao quadrado igual a três ao quadrado mais quatro ao quadrado. Agora, para outros valores já é mais complicado. E aí vem a relação, a construção do conceito.

Nesses comentários, observa-se a evidencia de que os professores assumem como importante ensinar o significado geométrico do TP, pois este está institucionalizado no livro didático. Esta é uma evidencia do uso implícito do indicador “os significados parciais (definições, propriedades, procedimentos, etc.) são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática que se quer ensinar contemplada no currículo”, neste caso, em todos livros didáticos consultados pelos professores.

P1 comenta que, ademais do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, ele também trabalha a relação entre áreas de quadrados de lados equivalentes aos lados do triângulo retângulo para distintos valores numéricos dos lados do triângulo retângulo. No entanto, destaca que há casos

em que fazer essa construção geométrica é complicada para os alunos e, por isso, dá importância à construção do conceito do TP, isto é, dá valor a que se deve trabalhar além do significado geométrico outros significados do TP, apesar de não dizer quais.

A partir do exemplo mostrado por P2, que baseia-se nos livros didáticos para dizer que todos eles introduzem o estudo do TP a partir da construção de quadrados nos lados do triângulo retângulo, em particular o triângulo de lados 3, 4 e 5, e calculando as áreas dos quadrados a partir de figuras quadriculadas, a professora pesquisadora, então, decide perguntar como os professores fariam essa construção geométrica para lados de triângulos retângulo sendo números irracionais, por exemplo. Em particular, cita o exemplo da diagonal do quadrado de lado 1 como a hipotenusa do triângulo, conforme segue:

PI: E quando tu tens lados diferentes, vamos ver, por exemplo, um triângulo retângulo que é a metade de um quadrado de lado um... que a hipotenusa vai ser, por exemplo... Qual vai ser o valor da hipotenusa? Vai ser raiz quadrada de dois, não é mesmo? Como é que se vai fazer a construção geométrica do quadrado de lado raiz de dois. Porque, pelo desenho que P2 mostrou, que se mostra nos livros, para mostrar a área, faz a unidade de área que são os quadradinhos. E nesse caso, como é que faz? Como vocês fariam?

P1: Como eu já dei, lá no oitavo ano, a construção dos números irracionais, eu faço eles lembrarem, por exemplo, que a raiz de 2 foi construída através do Teorema de Pitágoras. Eles conseguem formar o quadrado de lado 1 e verificar, então, que o Teorema de Pitágoras determina a hipotenusa em raiz de 2. Então, eles começam a perceber que eles usam outros valores e que esses valores não precisam ser números naturais. Eles podem ser números racionais. Eles podem ser números irracionais. Eu trabalho com os outros conjuntos numéricos, não somente os naturais. Primeiro os naturais e depois a gente trabalha com os racionais e irracionais.

P1 faz um comentário onde ele valoriza a importância de, em um mesmo significado do TP, a relação entre áreas de quadrados formados pelos lados do triângulo retângulo, ter valores de lados do triângulo para além dos números naturais, também números racionais, irracionais. P1 considera importante que, dentro de um mesmo significado parcial da noção matemática que se quer ensinar, ter uma amostra representativa de situações, neste caso, triângulos com lados de tamanho não apenas números naturais. Na sequência da discussão, identifica-se a mesma ideia, conforme os seguintes comentários:

P1: Mas aí como é que a gente faz? Por exemplo, tu construístes agora a raiz de 2, ok? Então com que objetivo a gente construiu a raiz de 2?

P4: Para mostrar que o Teorema de Pitágoras também abrange, não abrange somente os números naturais. Abrange, inclusive, números irracionais

P2: Isso! Para mim sempre... para mim foi... eu pensei que esse lance de mostrar a raiz de 2 seria a título de informação de que vale para outros números, e não só para os naturais, para que eles não fiquem também com essa coisa engessada de que só pode números naturais.

P4: Até, de repente, a gente pode colocar um número não natural, por exemplo, um número decimal.

P3: Sim. Uma fração.

P4: Vamos pensar nos exercícios e eu acho que nesses exercícios a gente pode colocar, inicialmente, então números, mais triângulos pitagóricos, depois, de repente, números decimais.

Na continuidade da discussão a professora pesquisadora retoma o exemplo do experimento apresentado por P4:

PI: E tu P4? Como é que tu fazes depois dessa parte geométrica e de mostrar esse experimento do vídeo do *YouTube*, por exemplo, que é transferir todo o líquido que está no quadrado. Seria um quadrado? Na verdade, é um cubo. Porque, nesse caso, entra uma coisa que é: o quadrado tem volume? Pois, tem um líquido ali que é transferido para os outros quadrados. Ou seja, tem um experimento que mostra que tem um líquido, que está dentro de um quadrado, que passa para os outros quadrados. É um quadrado ou é um cubo? Não sei como é que fica para os alunos essa questão.

P4: Eu falo que aquilo ali é só para representar a ideia. Eu até faço um parêntese e falo que sim, aquilo ali é volume, são três dimensões, que nós não vamos trabalhar com aquilo ali. Mas, que aquilo ali é para apresentar a ideia. E, na verdade, é a área. Eu até comento, assim, que seria tipo o papel de presente, que ocupado ali para colocar no quadrado da hipotenusa, é a mesma quantidade de papel que eu usaria para os dois catetos. Assim, eu vou mais para a área algébrica mesmo. Então, eu comento quem é o Teorema de Pitágoras, o que ele diz exatamente, falo que, a partir dali, é possível fazer algumas relações e encontrar lados que a gente não conhecia. Nesse caso, eu começo dando um exemplo. Então eu posso pegar um triângulo, até parecido com 3, 4 e 5, só que sendo o dobro, por exemplo, 6, 8 e x , e pergunto quem vai ser aquele lado x , usando o Teorema de Pitágoras. Pego alguns exemplos, assim, e faço no quadro negro, geralmente antes, para nós discutirmos sobre isso. Geralmente, eu utilizo alguns exemplos com uma incógnita sendo a hipotenusa e outros exemplos com a incógnita sendo um cateto.

P4 comenta que, após introduzir a ideia de TP como uma relação entre áreas de quadrados de lados equivalentes aos lados do triângulo retângulo, com o auxílio do experimento do vídeo no *YouTube*, imediatamente, passa a abordar o TP como uma relação

entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo, outro significado geométrico parcial do TP.

Durante a discussão, os professores comentam sobre a necessidade ou não dos alunos saberem resolver equações do segundo grau, com a fórmula de *Báskara*, para poderem entender o Teorema de Pitágoras. Em um determinado momento, a professora pesquisadora, então, pergunta particularmente a P1 se ele faz alguma conexão entre o TP e as equações do segundo grau, conforme segue:

PI: E tu, P1? Tu já trabalhas as equações e o Pitágoras?

P1: Não. Eu trabalho primeiramente o Pitágoras. Primeiro a parte geométrica, eu trabalho além do triângulo 3, 4 e 5... eu faço eles relacionarem também com outros valores. Mas, assim, empiricamente. Não dar já para eles irem resolvendo. Digamos que eu peço para eles, eu faço para eles um desafio. Que tipo de triângulo vocês formariam com outros valores? Que medidas ficariam? Eu ainda estou na parte geométrica. Que como eu trabalho com recorte, cola, para eles olharem mais visualmente, eu trabalho também outras medidas. Depois, eu começo a trabalhar a parte com valores com incógnita, mas, nesse caso, eu não chego a trabalhar, por exemplo, já diretamente com a equação do segundo grau. Eu só faço com que eles raciocinem, que número é aquele valor. E, então, depois desse conteúdo, eu começo a equação do segundo grau. Eu dou toda a parte da equação do segundo grau. Mas, como a colega falou, na verdade, naquele momento, a gente ainda não diz: "isso aqui é uma equação do segundo grau" e a gente vai resolver equação do segundo grau. Mas, apenas para encontrar aquele valor. Então, eles não sabem que estão resolvendo já uma equação do segundo grau. Mas, eles estão resolvendo desafios, aquele valor algébrico que eles estão raciocinando. Eles não estão usando fórmulas e não sabem que, por exemplo, um número ao quadrado eu vou usar duas raízes. Eles não sabem ainda.

P1 explica que, normalmente com os seus alunos, trabalha bem o significado do TP como uma relação entre áreas (significado geométrico parcial 1). Depois, então, ele trabalha a ideia do TP como relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo, buscando identificar o tamanho de um dos lados do triângulo sendo conhecidos os outros dois, da mesma forma que a professora P4. Trata-se de um significado que também está relacionado ao significado geométrico do TP, um significado geométrico parcial 2. No entanto, diferente da professora P4, P1 não relaciona esse significado do TP com a resolução de equações do segundo grau.

Na continuação da discussão o professor P1 dissertou mais sobre trabalhar a ideia do TP como uma relação entre os tamanhos dos lados do triângulo retângulo:

P1: Nós podemos trazer, também, outras estratégias que utilizam esse conceito. Porque, na verdade, o Teorema de Pitágoras pode ser usado, por exemplo, como a menor distância de... tem uma situação onde se tenha que locomover de um lugar ao outro e a menor distância seria pela hipotenusa. Nesse caso, se dá o Teorema de Pitágoras.

Nesse comentário P1 assume, implicitamente, uma conexão interessante entre o significado parcial 2 do TP com a noção de distância. Neste caso, pode-se dizer que há uma reflexão sobre o uso implícito do indicador “para um ou mais significados parciais há uma amostra representativa de problemas”.

Ao averiguar como o TP é abordado em livros didáticos e nos currículos nacional e dos centros de ensino onde trabalham os professores, na etapa de *estudo do currículo e metas*, em um determinado momento, P2 comenta que em alguns livros didáticos, após trabalhar a ideia do TP como uma relação entre áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, se trabalha a ideia de ternas de números:

P2: É, na verdade eu estava vendo que, geralmente, nos livros que eu tenho aqui ele mostra a representação geométrica e depois eles fazem aqueles testes para o aluno identificar se vale a relação do Teorema de Pitágoras. Ele dá três lados e tu que tens de dizer se a soma dos dois ao quadrado dá o lado maior. Mas, nesse caso, faz algebricamente, não do jeito geométrico, como o professor P1 estava comentando. Eles propõem isso. Dar três lados e o aluno tem que calcular e depois aplicar a fórmula propriamente dita.

Trata-se do significado aritmético-algébrico do TP, isto é, uma outra forma de representar o TP. Essa ideia também se identifica em outros comentários dos professores, conforme segue:

P2: Eu estava olhando... não sei se cabe a gente pensar em alguns exercícios no sentido de dar três valores e tentar entender, tentar ver, se os alunos, se eles conseguem analisar se aqueles três valores satisfazem o Teorema.

P2: Ok. P4, tu achas que se a gente botar um exercício de reconhecimento com dois lados com números decimais eles conseguem fazer?

P4: Acho que sim. Acho que temos que colocar.

P1: Mas aí eu venho perguntar o seguinte: será que não seria interessante também eles identificarem a hipotenusa e os catetos? Por que ali só pede a recíproca do Teorema de Pitágoras, mas não pede os valores da hipotenusa e catetos, né?

Ainda averiguando e discutindo como os livros didáticos apresentam o TP, P2 comenta que os livros apresentam exercícios e problemas de aplicações do TP:

P2: É, depois tem exercícios e aplicações.

PI: Aplicações de Teorema de Pitágoras clássicos do tipo "calcular a altura da escada dado a sua sombra..." problemas assim?

P2: Tem até um aqui que fala sobre o centro de dois círculos, dá os raios e, então, se tem que calcular a medida x , que é a medida de um determinado lado de um triângulo retângulo formado a partir das distâncias com os raios e o centro.

PI: Mesmo nos problemas, na aplicação do Teorema de Pitágoras, sempre é para encontrar um dos lados do triângulo retângulo, pelo que eu entendo.

P2: Isso. Aqui nesses livros, que eu estou olhando, pelo menos sim. Eu não sei também como a professora P4 e o professor P1 trabalham isso.

Nesse trecho da discussão, pode-se inferir que os livros didáticos, por meio das atividades e problemas que propõe, não apresentam uma amostra representativa de problemas sobre o TP que trabalhem os significados parciais da complexidade matemática que se quer ensinar, apenas se realizam comentários que tratam de problemas com a ideia de encontrar um dos lados do triângulo retângulo .

Uma vez que os professores decidem começar a aula trabalhando a ideia do significado parcial do TP como relação entre áreas de quadrados de mesmo lado do triângulo retângulo, mais adiante na discussão, P4 questiona sobre se será feita a mesma ideia para outro caso particular de triângulo retângulo:

P4: E esse outro exemplo eu faço o quadriculado?

P2: Eu particularmente acho que não. Acho que tu poderias usar essa explicação que tu deu agora: "bom, se a gente tem um triângulo com seus lados sendo 6, 8 e 10, se a gente sabe que a área do seis mais a área do 8 é igual a área do 10, do quadrado de lado 10, vamos fazer a conta." E, então, tu podes fazer a conta. E, então, funcionou? Se funcionou, legal.

P2 sugere que não se trabalhe outro exemplo de que imediatamente mude de se trabalhar a ideia do TP como relação entre áreas de quadrados para o TP como uma relação aritmética, significado aritmético-algébrico do TP. O que P2 não percebe é que, com isso, provoca uma ruptura didática e não procura fazer uma conexão entre os dois significados geométricos parciais do TP.

Além da discussão sobre os significados relacionados ao TP, durante a etapa de *reflexão da aula*, identificou-se um comentário realizado por P5 que destaca a importância de se considerar os diferentes significados parciais relacionados à noção de área:

P5: Uma coisa que me incomodou e isso é chatice minha, tá? [...] Aquela parte que tu falaste que fazer a área era contar os quadradinhos. Isso me incomodou um pouco. Porque o conceito de área é bem maior do que isso, entendeu? Quando contou os quadradinhos tu poderias ter feito referência àquilo como que, nesse caso, a gente ia contar os quadradinhos, entendeu?

Além disso, nesta etapa da fase do LS, identificou-se apenas um comentário mais como evidência do uso implícito do componente IE4, evidência relacionada como indicador "para um significado parcial, mostra representativa de problemas":

P2: A gente chegou, na verdade, à conclusão de que seria interessante trazer pelo menos um exemplo de número irracional para que os alunos não pensem que funciona só para naturais. Porque, a gente estava usando os números naturais na parte da área e a gente pensou que talvez seria interessante eles entenderem ao menos que existia [...] que a raiz de 2 era uma diagonal de um [...] que era a hipotenusa de um triângulo retângulo para o caso dos catetos um e que valia o Teorema de Pitágoras também.

Se conclui que a reflexão dos professores realizada nas etapas da LS analisadas apresenta comentários ou diálogos que podem ser considerados evidências do uso implícito da maioria dos indicadores do componente *representatividade* (IE4) do critério de adequação epistêmica, por esse motivo se atribui um nível 3 a esse componente.

Adequação Cognitiva

Conforme evidenciado na subseção 4.3 da metodologia, a análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores de três componentes da Adequação Cognitiva (ver Figura 49).

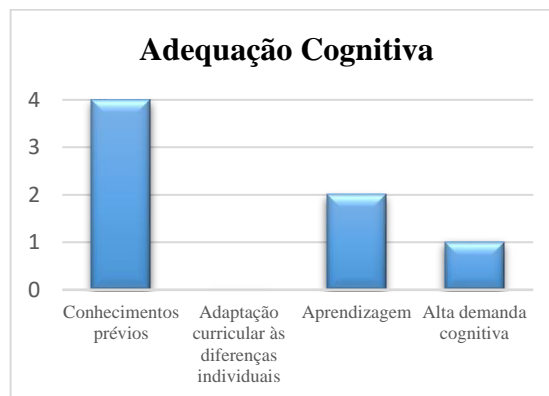


Figura 49. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Cognitiva.
Fonte: elaboração própria.

As evidências indicam um nível 4 para o componente IC1, um nível 0 de adequação cognitiva em relação ao componente IC2, um nível 2 para o componente IC3 e nível 1 para o componente IC4.

Adequação de Interação

A análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores de três dos componentes da adequação de interação. As evidências indicam um nível 4 para o componente II1, um nível 0 de adequação de interação em relação ao componente II2, e um nível 1 para o componente II3 e 2 para II4 (Figura 50).

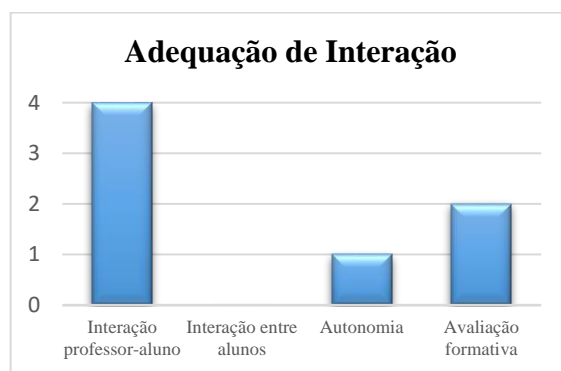


Figura 50. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação de Interação.
Fonte: elaboração própria.

Tanto nas etapas *estudo do currículo e metas, planejamento da aula, e reflexão da aula*, observa-se comentários do grupo de professores sobre a importância de como seria realizada a interação entre o docente que iria realizar a aula e os alunos participantes, no momento da aula. Tal evidência pode ser vista nos seguintes trechos da discussão onde os professores consideram fazer a *interação professor-aluno* da aula através dos comentários do *chat* que disponibiliza o *YouTube* em uma *live*:

P3: E a interação deles pode ser pelos comentários também.

P2: Pelos comentários?

PI: Pelos comentários no *Youtube*?

Todos: [concordam]

P3: Só que a gente não vai ter a troca com eles, não é mesmo?

P4: Eu vou tentar na hora sempre pedir para eles: coloquem aí [referindo-se ao espaço do *chat* no *YouTube*] qual é o valor que vocês acham que é?

Ou, ainda, nesse questionamento que faz P1 ao professor que mais tarde realizaria a aula:

P1: Depois que eles identificarem, então, que dá para ser formado os quadrados e o retângulo ali, eu acho que seria interessante um diálogo com os alunos para eles entenderem. Como é que tu vais fazer?

Também se observam evidências que podem ser associadas aos indicadores do componente *interação professor-alunos*, em este caso particular a relação é com o indicador "é facilitada a inclusão dos alunos na dinâmica da aula e não a exclusão":

P2: Porque, na verdade, eu estava pensando assim: tu vais saber mais ou menos o número de pessoas que vão estar, que vão assistir, e então tu podes enfatizar que é importante que eles realmente participem. Vamos supor que, quando tu perguntares "todo mundo construiu o triângulo ou quadrado?", então eles respondem no comentário "sim", então a gente teve todos os comentários. Então, para que eles realmente participem e não simplesmente estão porque são obrigados a isso.

Neste outro trecho da discussão, identifica-se a preocupação que P4, professora que iria mais tarde dar a aula, demonstra sobre como apresentar a proposta aos alunos, comentário relacionado ao indicador "o professor faz uma apresentação adequada do tema":

P4: Eu estou um pouco preocupada. Depois vocês podem me ajudar em como eu vou solicitar aos alunos? Eu acho que para a gente a ideia do que a gente quer está muito clara, mas "solicitar que os alunos façam a construção em papel" [referindo-se a maneira como está escrito no documento] a gente sabe qual construção é, mas eu estou muito na dúvida em como explicar isso para eles.

PI: Eu acho que P4 está tentando dizer é que seria importante a gente anotar exatamente qual vai ser a ordem dela, o que ela vai dizer, quais vão ser as palavras dela para explicar a atividade, como que ela vai falar. Ela está querendo saber com que palavras, como que ela vai colocar. É isso, não é P4?

Neste outro trecho da discussão, identifica-se o componente "se usam diversos recursos retóricos e argumentativos para implicar e captar a atenção dos alunos":

P4: Eu quis dizer se eu espero ali na *live*, assim: "então pessoal vocês chegaram a alguma conclusão?"

P3: Legal!

Na etapa da *reflexão da aula*, verificam-se algumas ponderações esgrimidas pelos professores que, também, são indicativos do uso implícito de alguns indicadores do componente III. Os seguintes comentários são evidências da importância dada pelos professores a se "os conflitos de significados dos alunos são reconhecidos e resolvidos (os

silêncios dos alunos, suas expressões faciais, suas perguntas são interpretadas corretamente, um jogo apropriado de perguntas e respostas é feito, etc.)", indicador do componente *interação professor-alunos* (III) do critério de adequação interacional:

P4: Eu percebi que nesse momento eles não compreenderam a montagem do quebra-cabeça. Eu tive que repetir depois disso, de novo. Tive que falar sobre os tamanhos, que seria o próximo trecho, porque eles não estavam retornando a montagem.

P4: Uma coisa que eu senti um pouco de falta - como eu sou principiante e é a primeira aula que eu dou assim pelo *YouTube* - na sala de aula, eu olho para o rostinho deles e eu sei se eles estão entendendo. É só olhar para eles. Como eu já conheço... [...] pelo menos desde o ano passado eu tenho aula com a grande maioria ali. Às vezes, eles falam que tão entendendo e tu olha no olho deles e vê que não estão entendendo de fato. Então, eu tento recapitular. Agora, aqui, a distância, eu senti mais dificuldade porque eu não sabia se era a demora ali do *delay* ou se eles realmente não estavam entendendo. Então, eu fiquei um tempão esperando a resposta. Depois de um tempão sem resposta, eu supus que realmente estava faltando alguma informação. E, na sala de aula, essa troca é bem mais rápida, não é?

Além disso, também se observa um comentário relacionado ao indicador "vários recursos retóricos e argumentativos são usados para envolver e capturar a atenção dos alunos", conforme evidencia:

P1: [...] eu vi que eles, conforme tu davas a aula, eles te respondiam no momento que tu perguntavas. Eles estavam participando.

Destacam-se, também, comentários sobre o indicador "a inclusão dos alunos na dinâmica da aula e não a exclusão é facilitada", conforme indícios:

P1: [...] eles têm uma confiança em ti porque eles pediam assim: professora, depois tu poderias explicar assim novamente para mim individualmente. Eles têm uma liberdade de falar contigo assim, não é?

P1: Mesmo que não tenham participado todos, eles estavam assistindo. Numa aula, a gente não consegue com que todos os alunos consigam interagir conosco em sala de aula. Então a quantidade que interagiu contigo eu acho que foi suficiente

A análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente *interação professor-aluno* (III) da adequação de interação. Além disso, são trechos do discurso que apresentam muitos detalhes, profundidade e coerência. Por esse motivo, se atribui um nível 4 a este componente.

Sobre o componente *interação entre alunos* (II2), durante a análise realizada, não se identificou nenhum comentário, ao longo de toda a discussão, que se referia a considerar ou promover a interação entre os discentes. Desta forma, se concede um nível 0 para este componente da adequação de interação.

Quanto ao componente *autonomia* (II3), a análise revelou que, de certa maneira, os professores planejaram uma aula que "contempla momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade do estudo", conforme seguintes evidências:

P3: E teria que ser um padrão, porque como vai ser "live", ela não vai conseguir também conferir de cada um, de cada aluno, de repente um padrão para eles irem seguindo.

P4: É uma coisa que, na verdade, eu também fiquei um pouco uma dúvida, sabe? Porque no plano de aula ali tá a sugestão da atividade, daí a construção, assistir o vídeo e tal, parece que [...] por um segundo eu fiquei um pouco na dúvida se realmente era para eu enviar antes.

P3: A gente tinha comentado de mandar antes para eles já terem isso pronto na hora da aula.

S: Sim, eu acho mais fácil também.

P4: Não ficou claro. Até, também, por causa do material construído por alguns que estava bem ruizinho, não tinha como encaixar o material deles. [...] Então, talvez, a questão de eles produzirem é o que tá dificultando, essa parte é que o eles não...

Quanto ao componente *autonomia* (II3), a análise revelou que, de forma esporádica, os professores refletem que planejaram uma aula que "contempla momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade do estudo". Por essa razão, se atribui um nível 1 para o componente II3 da adequação de interação.

Com relação ao componente *avaliação formativa* (II4), identificaram-se alguns trechos dos diálogos dos professores que são evidências do uso implícito do indicador "observação sistemática do progresso cognitivo dos estudantes", conforme evidências identificadas na etapa de planejamento da aula:

P4: Olha só, o que nós vamos cobrar desse entendimento? O que que nós vamos pedir?

P3: Para a verificação, não é?

Também foram identificados trechos dos diálogos dos professores na etapa de *reflexão da aula*, conforme segue:

P1: Eu acho assim que o importante foi a participação deles durante a aula. Porque daí a gente viu que eles iam compreendendo, eles iam dizendo "ah professora não entendi, não entendi". Aí tinha sempre uma resposta ali e eles tentavam uma resposta e não copiavam um do outro.

Na reflexão dos professores, encontram-se trechos do discurso que evidenciam uso implícito de algum indicador do II4. Por essa razão, se atribui um nível 2 para este componente da adequação de interação.

Adequação de Meios

A análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores de todos os componentes da adequação de meios (ver Figura 51).

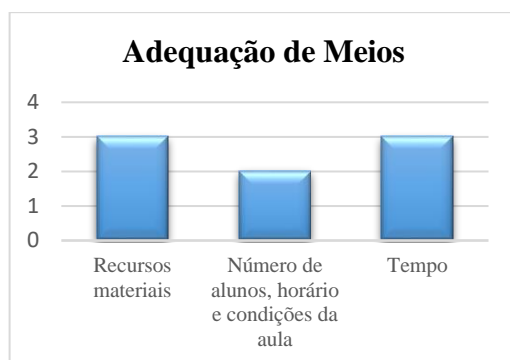


Figura 51. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação de Meios
Fonte: elaboração própria.

Tanto na etapa de *planejamento da aula*, quanto na de *reflexão da aula*, destacam-se trechos da discussão dos professores que podem ser considerados evidências do uso implícito do componente *recursos materiais* (IM1). Destacam-se, por exemplo, as perguntas que P4 faz ainda no princípio da primeira sessão virtual do curso:

P4: Eu quero perguntar o que pode ser considerado nesta aula? Por exemplo, nós podemos considerar projetor? Uso de projetor ou não? Vai ser só quadro?

O questionamento de P4 evidencia a preocupação sobre quais serão os materiais que os professores utilizarão para realizarem a aula. Em um determinado momento da discussão, P2 sugere fazer o uso de malhas quadriculadas para representar as áreas dos quadrados de lados equivalentes ao tamanho dos lados do triângulo retângulo 3, 4 e 5:

P2: Mas, se para essa representação geométrica, usando esse triângulo pitagórico, nós usarmos uma malha quadriculada, não fica fácil de representar? Inicialmente? Porque nós podemos fazer, talvez, uma introdução com a área, com várias malhas quadriculadas, para depois chegar no 3, 4, 5, talvez. Como uma ideia inicial, não é?

Nesse comentário de P2, pode-se inferir que ele sugere o uso de material manipulativo, especificamente uso de malha quadriculada, como recurso material que permite introduzir uma boa situação adaptada ao significado pretendido.

Ademais dessas evidências, destacam-se outras partes dos diálogos dos professores relacionados ao indicador "utilização de materiais manipulativos e informáticos que permitam apresentar boas situações, linguagens, procedimentos, argumentos adaptados ao significado pretendido", conforme segue:

P1: Professora P4, por acaso eles têm acesso ao *GeoGebra*? Eles já trabalharam com o *GeoGebra*, por exemplo?

P4: Ainda não. O que eu pensei é, talvez, um vídeo construindo, sabe? Na malha mesmo. Mas a gente só demonstraria, a gente construiria, mostrando para eles. Até porque a raiz de dois seria a diagonal, não é?

P1: Até tu podes fazer isso e, para melhorar, de repente a gente constrói esse arquivo no *GeoGebra*. É possível transformar o arquivo do *GeoGebra* em gif, vídeo ou figura? Se eu não me engano dá para fazer isso.

P4: Como é que eu faço para parar a *live* e trazer outra coisa para cá? Teria que se apropriar de tecnologias.

P2: Eu acho que a gente não tem tempo hábil para isso. Mas, eu acho que o lance do papel e caneta é bem viável, resolve. Por que eles também...

P1: E tu tens um quadro, como o P2 tem ali na sala dele, ou tu vais fazer no papel mesmo?

P4: Eu acho que eu vou ter que fazer no papel, não tenho quadro. Eu posso tentar conseguir um, mas a princípio eu faria num papel.

P1: E se tu pegares e usar a régua e o compasso? Pegar, por exemplo, construir os dois quadrados de lado 1, formar o triângulo retângulo e usar o compasso e mostrar para eles o tamanho daquela diagonal, lá na reta numérica. Que tu achas?

P2: P4, tu consegues fazer a *live* pelo computador e tu usar o teu celular e tu assistir a tua própria *live* pelo celular? E, nesse caso, tu consegues ver como que tu estás posicionando as coisas na câmara do computador. Porque no teu celular tu vais conseguir ver. Tu vais conseguir ver como vai estar a imagem, como vai estar o som...

P4: Então a gente pode, sim, mostrar o vídeo. Ah, outra coisa, por falar em vídeo, eu vou sair de um assunto e acabar indo para outro. Outra coisa que eu morri olhando, só que foi antes de eu descobrir tudo isso, também, então, agora talvez a gente consiga mexer, foi o vídeo histórico. Eu olhei, olhei, olhei, olhei, e não me encantei por nenhum. Eu não sei se vocês acharam algum legal?

P1: Desculpa eu cortar o assunto, mas, P4, tu achas que é legal essa parte aqui?

P4: Eu adorei. Eu acho que depois de que a gente fizesse, que eles me mandassem, eu podia mostrar esse videozinho. O que vocês acham?

P1: Boa, boa. Então a gente só anota - não sei se tu consegues fazer isso - anotar os minutos que ele dá...

P4: Na verdade eu vou ter que baixar o vídeo e retirar os minutos, cortar já, e aí sim, já deixar para quando eu apertar ali ele vai mostrar esse videozinho.

P4: Eu acho que esse vídeo que a gente pegou foi excelente, porque logo depois disso teve uma enxurrada de comentários: "agora sim eu entendi", "agora ficou claro". Esse vídeo é muito interativo, tu enxergas de fato que o 25 é a soma do 16 com o 9. Tu consegues visualizar isso muito bem, não é?

Com relação ao indicador “as definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos concretos e visualizações”, identificou-se uma evidência esgrimida por P1 na etapa de *reflexão da aula*:

P1: Foi legal só que, como eu vi que ela dominou os recursos, botou o mapa junto no vídeo assim, eu achei até que poderia ter explorado um pouquinho mais, eu não sabia desses recursos. Daí eu achei bem legal e eu vi que os alunos, conforme vão interagindo com os vídeos, eles vão gostando. Eu achei interessante aquilo ali. Eu na minha aula, por exemplo, melhoraria um pouco mais e deixaria um pouco mais da parte de mapas, aquilo que, um pouco daquilo que ela fez ali, eu colocaria um pouquinho mais, mas eu achei bem interessante o que P4 conseguiu fazer, assim, interligar e a aula com o recurso eu acho esse foi bem de grande valia.

A análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente IM1 da *adequação de meios*. Por esse motivo, se atribui um nível 3 a este componente.

Na reflexão dos professores, encontram-se trechos do discurso que evidenciam uso implícito de algum indicador do componente *número de alunos, horários e condições da aula* (IM2). Por exemplo, o diálogo que segue:

P1: Entendi. Mas, a nossa aula está programada para...

PI: Programada para que, P1?

P1: Programada para um determinado período? Por exemplo, das quatro horas às seis horas? Ou pode ser livre assim, tipo eles podem acessar qualquer momento?

P4: Mas aí, eu não sei se eu entendi bem, seriam dois, duas aulas? Ou...

P2: Não, eu acho que a gente pode fazer em uma só ou inferior ou enfim... Ou é muita coisa também, né?

P2: Não sei, mas se for à tarde eu acho que é melhor.

P4: Eu acho também. Vou dizer isso pelos meus irmãos. Eu digo isso pelos meus irmãos. Eles estão acordando tarde.

P2: É eu também estou acordando bem tarde.

P3: Ah! Eu queria tanto acordar tarde!

PI: Sim, os adolescentes, em geral, já estão se acostumando a dormir mais de manhã. Se eles não têm horário fixo de aula é mais natural eles acordarem tarde. Então, de repente, como não é uma atividade obrigatória pode ser que a gente não tenha quórum se for 7:00 ou 8:00 da manhã. Realmente, boa observação, P2. A gente vai ter que fazer de tarde, certo?

P2: Que dia para eles é melhor. Porque, bom, se o aluno não quer, se a maioria não quiser algum dia, eles não vão assistir, mesmo a gente dizendo. Então eu acho que se eles sugerirem qual fica melhor para eles.

Não se identificaram evidências de comentários dos professores relacionados a se “o número e a distribuição dos alunos permitem que o ensino pretendido seja realizado” e se “a sala de aula e a distribuição dos alunos são adequadas para o desenvolvimento do processo instrucional pretendido”, indicadores do componente IM2. Nesse sentido, atribuiu-se um nível 2 para esse componente da adequação de meios.

Por outro lado, a análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente *tempo* (IM3) da adequação de meios. Por esse motivo, se atribui um nível 3 a este componente. A análise revelou as seguintes evidências relacionadas com o indicador “adequação dos significados pretendidos/implementados ao tempo disponível (presencial e não presencial)”:

P1: Bom, essa aula, PI, ela tem que ser em quanto tempo?

PI: Boa pergunta. P4, de quanto tempo tem que ser aula?

P4: Geralmente eu tenho dois períodos, que seriam dois períodos de 50 minutos. A gente não precisa ocupar todo esse tempo.

P3: Quanto tempo a gente tem para essa aula, essa primeira aula? Tem tempo determinado?

P1: P4?

P2: Acho que a gente não colocou lá em cima.

P2: A gente comentou que não pode ser muito, mas a gente não fixou.

P3: Porque, pensando na escola, a gente tem a questão dos períodos, não é? Então no plano de aula a gente também tem que prever o tempo para isso. Se vai ser para uma aula... teria que ser para dois períodos, então, não é? Porque tem explicação, tem a interação, tem os exercícios. Não sei se a gente vai conseguir encaixar tudo isso em dois períodos. Porque, dá uma hora e meia, mais ou menos. Eu não sei se é de 45 minutos.

P4: É de 50 minutos lá na minha escola.

P3: Também temos que pensar na questão do tempo.

P3: É, a gente tem que pensar que tem a questão da correção e das dúvidas, né? Tudo isso em uma hora e meia.

P3: Sim, por isso que eu pensei na questão do tempo da gente até verificar quanto tempo eles levam para fazer, não sei, se isso faz parte.

P5: Para ser a primeira aula que vocês estavam falando sobre Pitágoras, eu acho que ficou um monte de informação. Então, já tinha sido difícil para entender a primeira parte, já sair resolvendo equações eu acho que isso atrapalhou um pouco. [...] Mas eu acho que pelo acúmulo de informações, e eu acho que nenhum de nós se fosse dar essa aula a gente faria uma aula tão extensa, com tanta informação junta numa única aula.

P1: A gente tinha planejado um tempo e eu acho que no finalzinho tu chegou a aumentar um pouquinho a tua velocidade, tu não esperaste muito eles perguntaram, não sei se tu notaste isso.

P4: Eu fiz isso de propósito porque senão eu iria chegar em duas horas de aula. Porque eu acho que a gente não planejou que esse *delay* seria tão grande...

P6: Pensando na continuidade da aula, com certeza, a próxima coisa a ser feita é trabalhar com números assim, mas pensando na [inaudível] ... Eu só falei que eu achei que foi muita informação. Quando chega nessa parte os alunos já estão cansados.

P1: Na ideia inicial da aula a gente tinha pensado em duas aulas, não é P4? Uma com uma parte mais básica e a outra a gente traria os números irracionais. Eu acho que a gente tá vendo que é necessário repartir a aula mesmo.

Também se destacaram algumas evidências relacionadas ao indicador “investimento de tempo no conteúdo mais importante ou central do assunto”, conforme segue:

P3: Mostrar que dá certo do [inaudível] e aí fecha e depois num outro momento entrar com a diagonal. Porque, daqui a pouco, pode ser que seja muita informação para eles, nesse primeiro momento.

P4: Eu só estou com um pouquinho de receio. Eu não sei se esses exercícios não vão ser demais, sabe, para uma primeira aula. Tipo muito pesado.

P6: Eu não sei se eu traria exemplos de medidas irracionais para essa aula. Porque o que acontece [...] A P4 acabou trazendo outro conteúdo para essa aula e eu acho que, nesse momento, a aula acaba ficando muito pesada para eles.

P8: Eu acho que o que a P6 quis dizer foi mais em relação a este momento de ser uma aula inicial que eles a recém vão estar se apropriando desse conceito de já empilhar os números irracionais junto.

Já em relação ao indicador “investimento de tempo nos conteúdos que apresentam mais dificuldade” não se observou evidências.

Adequação Afetiva

A análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores dos três componentes da adequação afetiva (ver Figura 52).

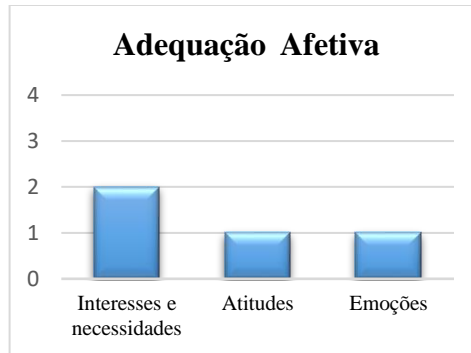


Figura 52. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Afetiva
Fonte: elaboração própria.

Quanto ao componente *interesses e necessidades* (IA1), revelaram-se evidências associadas a ideia de “propor situações que permitem avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional”, indicador do componente IA1.

A análise revelou a seguinte evidência associadas a ideia de “propor situações que permitem avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional”, indicador do componente IA1:

P3: E vai ter alguma abordagem da parte histórica do Pitágoras nesse plano de aula? Ou não, vai direto para demonstração e para os cálculos?

P1: É, nós não tínhamos pensado nisso na aula passada.

PI: É, não tínhamos falado sobre isso.

P3: Dar uma introduzida, assim, um contexto, por exemplo, de onde veio... como é que a gente vai... para que serve e tal. Eles sentem um pouco falta disso. De saber para quê, onde eu vou usar, ou de onde veio. Não sei se a gente vai fazer isso também, dentro da proposta...

Já no que se refere a “seleção de tarefas que sejam interessantes para os alunos”, outro indicador do componente IA1, destacam-se as seguintes evidências:

P3: Ah, verdade. Vídeos engraçados, coisas assim que chamassem a atenção deles ...

P5: Bom, eu achei bem interessante também. Eu não nunca trabalhei com o nono ano, assim oficialmente com o nono ano, mas eu achei uma boa tática trabalhar com fazer um apanhado histórico antes, é bem interessante, eu acho que ficou bem legal. Toda essa parte mística do Teorema de Pitágoras acho que chama a atenção deles. Vamos pensar, nono ano, “aborrescência” total, e essa parte mística, de viajar e tal, isso aí é totalmente na idade deles, então acho que foi legal, ficou bem legal.

P1: Por ser uma aula mais dinâmica, já dá para ver que atrai mais eles.

Em geral, a análise revelou alguns trechos que são evidências que podem ser consideradas uso implícito dos indicadores do componente IA1 da adequação afetiva. Por esse motivo, se atribui um nível 2 a este componente.

Com relação ao componente *atitudes* (IA2), encontraram-se evidências na fala dos professores no que diz respeito a “promoção da implicação nas atividades, perseverança, responsabilidade”, um dos indicadores do componente “atitudes”, conforme segue:

P3: E daqui a pouco, como eles tem que fazer/construir em papel quadriculado, tem que olhar vídeo... daqui a pouco começa a dificultar demais e eles podem desistir, não é? "Não vou fazer então nem vou para a aula". Digamos assim, se tu deres uma introduzida "ah eu vou preparar vocês para o que vai ter na próxima aula" então eles podem botar empecilho para não participar.

P2: A gente comentou de não fazer duas aulas porque a gente estava com medo que eles não participassem da segunda. Lembram disso? Que tinha essa questão de se eles participassem da primeira, mas se vamos deixar a segunda para outro dia, eles já não participam mais. Então, a gente estava com esse medo também.

Por outro lado, não foram identificados comentários dos professores acerca de “a argumentação é favorecida em situações de igualdade, o argumento é valorizado em si mesmo e não por quem o diz”, outro indicador do componente IA2 da adequação afetiva. Por esse motivo se atribui um nível 1 a este componente.

Já, para o componente *emoções* (IA3), no que concerne ao indicador “promoção da autoestima, evitando rejeição, fobia ou medo da matemática” destacou-se um comentário esgrimido por P3 quando argumenta que, porque os alunos não tem o conhecimento necessário sobre os números irracionais, apresentar um número desse conjunto numérico poderia gerar rejeição ou medo por parte dos alunos frente ao significado pretendido:

P3: Porque, às vezes, eles olham uma raiz e eles já travam. Eles nem esperam saber para quê vai... aonde tu vais chegar com a raiz. Eles olham para a raiz e dizem: "Ah não professora! Tem raiz!".

Eles já deram uma travada. Então eu acho que teria que haver uma aula mais profunda para entrar nessa parte da diagonal e da raiz.

Além disso, não há mais ponderações que os professores fazem durante as etapas de reflexão analisadas com relação ao componente IA3. Por essa razão, se atribui um nível 1 para este componente da adequação afetiva.

Adequação Ecológica

A análise da reflexão do grupo de professores revelou que há evidências de uso implícito dos indicadores dos quatro componentes da adequação ecológica (ver Figura 53).



Figura 53. Nível de uso implícito dos componentes da Adequação Ecológica.
Fonte: elaboração própria.

Quanto ao componente *adaptação ao currículo* (IEC1), após definirem quem e com que grupo de alunos seria aplicada a aula de TP (um grupo de estudantes de nono ano de P4), os professores, então começam a discutir como o TP se apresenta no currículo:

P2: Eu tenho aqueles livros de suplemento para professor, sabem? E ele fala quais são as habilidades que são desenvolvidas a partir do conteúdo. E tem um aqui que é o Teorema de Pitágoras e que ele desenvolve duas habilidades. Eu não sei se vocês querem que eu leia para vocês?

PI: Sim, por favor.

P2: Que uma é Ensino Fundamental EF09MA13 que é "demonstrar relações métricas no triângulo retângulo entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando inclusive a semelhança de triângulos" e a outra é EF09MA14 que é "resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes". São essas duas habilidades, que no caso esse livro, diz que o Teorema de Pitágoras trabalha.

A adequação ecológica considera o componente IEC1 em seu indicador "os conteúdos, sua implementação e avaliação são correspondentes as diretrizes curriculares". Ademais, não há mais ponderações que os professores fazem durante as etapas de reflexão analisadas com

relação à “os conteúdos, sua aplicação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares”, indicador do componente *adaptação ao currículo*. Por essa razão, se atribui um nível 1 para este componente da adequação ecológica.

Quanto às *conexões intra e interdisciplinares* (IEC2), o professor P1, ao falar de sua experiência em ensinar o TP, comenta que faz uma relação entre o TP e a representação geométrica dos números irracionais, ou seja, realiza uma conexão intra disciplinar, especificamente relacionada ao indicador "os conteúdos se relacionam com outros conteúdos matemáticos", faz uma conexão entre os diferentes conteúdos matemáticos contemplados no currículo. P4 comenta sobre a relação entre o TP e a resolução de equações do segundo grau, ou seja, fala da conexão intra matemática que se pode fazer ao propor problemas que contemplem os dois conceitos matemáticos. Pode-se inferir que, implicitamente, a professora está falando que "os conteúdos estão relacionados com outros conteúdos matemáticos (conexão entre os diferentes conteúdos matemáticos contemplados no currículo)", indicador do componente *conexões intra e interdisciplinares*. A seguir, na sequência da discussão, P1 questiona se, para trabalhar a ideia do TP como uma relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo, P4 utiliza a resolução de equações do segundo grau, conforme segue:

P1: Essa é a pergunta: Tu já vais usando a equação do segundo grau?

P4: Sim.

PI: Para resolver algebricamente tu queres dizer? Quando tu chegas... porque tu tens o triângulo... o exemplo que a professora P4 deu foi ter no lugar da hipotenusa x , e 6 e 8 nos catetos, certo?

P4: Isso.

PI: Nesse caso, vai dar uma equação que vai ser x ao quadrado igual a 6 ao quadrado mais 8 ao quadrado. Há necessidade de usar equação do segundo grau? Foi isso que tu falaste, P1? Porque, nesse caso, tem um x ao quadrado. E já foi trabalhado isso, P4? Porque, por exemplo, vocês costumam colocar exemplos que tenham na hipotenusa $x + 1$?

P4: Depois eu coloco. Depois que eu trabalhei a equação do segundo grau completa. Antes não. Depois quando der... porque, geralmente, esses conteúdos estão juntos, estão próximos, na linha do tempo, digamos assim. Então, depois de dar Pitágoras, eu vou dar Báskara, resumindo, e, então, depois eu dou uma questão que engloba tudo isso. Eles adoram.

A continuação, P1 comenta sobre outra conexão intra matemática, o TP e os produtos notáveis:

P1: Não. Eu só vou trabalhar esse $x + 1$ no momento que [inaudível] conhecimento formado deles para que eles consigam resolver, por exemplo, uma equação do segundo grau. Ou, não precisa resolver, mas formar uma equação do segundo grau. Nesse caso, por exemplo, eu já posso trabalhar o caso $x + 1$ antes de saber resolver, mas usando um produto notável. Retomar com eles o produto notável, mas fazer as igualdades e fazer com que eles encontrem a equação do segundo grau e não resolver ainda a equação.

No trecho seguinte, se identifica um comentário implícito que P4 faz sobre a conexão interdisciplinar entre o TP e outras disciplinas do currículo, em particular na disciplina de física. Pode-se concluir que esse comentário implícito está relacionado com o indicador "os conteúdos se relacionam com conteúdo de outras disciplinas" do componente IEC2, conforme segue:

P4: Ainda não. Mas, se eu demorar muito para dar o Teorema de Pitágoras, a professora de ciências vai acabar dando, porque ela precisa em física, em força...

P2: Ah sim!

PI: Uma aplicação do Teorema, não é mesmo?

P4: Exato.

PI: Então, a importância também de nós ensinarmos para isso, para depois eles fazerem as conexões com as outras áreas, não é mesmo?

A análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente IEC2 da adequação ecológica. Além disso, são trechos do discurso que apresentam muitos detalhes, profundidade e coerência. Por esse motivo, se atribui um nível 4 a este componente.

Para o componente *utilidade sócio laboral* (IEC3), destacam-se algumas evidências que conectam com a ideia de “o conteúdo é útil para colocação laboral”, indicador do componente *utilidade sócio laboral*, conforme segue:

P1: Porque eu acho melhor deixar aqueles que estão e fazer um outro item, só deixando um pouco contextualizado, aqueles por exemplo exercícios de escada, digamos. O que que tu achas?

PI: E se a gente pensasse em reformular a maneira como está escrito esse problema?

P4: Pode ser.

PI: De forma que ficasse uma linguagem mais acessível para eles.

P1: E de que forma tu achas que eles identificariam, P4?

P4: Eu não sei. Vamos pensar.

Além disso, não se identificou outras colocações que os professores fazem, durante as etapas da LS analisadas, com relação à *utilidade sócio laboral*. Por essa razão, se atribui um nível 1 para este componente da adequação ecológica.

Quanto ao componente *inovação didática* (IEC4), no que diz respeito a “inovação baseada na pesquisa e prática reflexiva (introdução de novos conteúdos, recursos tecnológicos, formas de avaliação, organização da sala de aula, etc.)”, indicador do componente IEC4 se destaca, por exemplo, o relato sobre a necessidade de apropriação das tecnologias para poder fazer o que está proposto em uma aula virtual, conforme seguintes evidências:

P4: Eu fiquei com um pouco de dúvida na hora - de novo da tecnologia, assim - eu acho que eu vou até ter que treinar para ver se vai ser possível, porque eu estava pensando...

P1: Tu tens régua e compasso aí?

P4: Eu tenho. Mas, assim, como eu vou mostrar na câmera, sabe? Como que eu vou mostrar? Entendeu?

P2: Mas, P4, eu acho que até a gente pode - eu pensando agora como receita de bolo, assim, quando tu vês num programa - e se tu já deixares os passos prontos? Tu explicar e mostrar ele pronto?

Além do mais, identificou-se comentários sobre os desafios de se trabalhar com aulas a distância, conforme segue:

P4: Olha, se a minha turma - eu falei para vocês que eu criei um login para eles no *Khan Academy* - e se eles fossem uma turma que “super” participasse, assim, a distância, eu acho que daria, porque, então, eu passaria essa semana exercícios, assim, de radiação e tal. E eu estava “super” animada na semana passada e tal quanto a isso, achando que eles iriam fazer as atividades, mas eu entro lá 2 ou 3 fizeram algumas coisas. E, por mais que eu tente talvez dar esta semana, possivelmente, eles não estão tendo tanto interesse, sabe?

P4: Então, eu não eu acho que eu fiz uma configuração um pouco errada. Mas eu tenho aqui o link que eu fiz agora para vocês para mostrar que eu consigo sim mostrar a tela. É bem chatinho. Eu apanhei durante essa semana para aprender a fazer tudo isso. Não nego.

P4: Agora eu consigo fazer o download do vídeo daí eu consigo fazer, mostrar isso. E outra coisa que é bem legal, eu gravei ali no vídeo, a minha ideia era ter gravado um pouquinho antes e mandar para vocês ali às 9:00 para vocês assistirem. Porque o meu grande problema era o seguinte: eu tô com ele aqui, que era o que estava me incomodando, a ideia da gente fazer e mostrar para eles estava perfeita, só que como que eu ia fazer isso usando a câmera que eu tenho? Eu quero dizer o seguinte: ia ficar assim, deixa eu ver tá travando aqui, ia ficar difícil de eu mostrar. Estão entendendo? Eu consegui. Caiu. Pronto, acabou minha aula. Eu estava com muita dificuldade de pensar em como que a gente iria fazer isso. Eu até relatei isso na aula passada. Como que eu iria

fazer? Aí eu pensei em usar o celular. Mas o celular também tem o lado bom e o lado ruim. Porque eu ia conseguir mostrar ele aqui, mas depois, para me posicionar de novo, iria ter todo um transtorno, eu estava tanto... eu não... eu não consigo... essa noite eu quase não consegui dormir de assustada de como eu iria fazer. Eu estou um pouco, estou um pouco nervosa, eu sou um pouco ansiosa. Aí eu consegui descobrir um outro aplicativo que eu consigo usar o meu celular para transmitir nesse aplicativo que eu baixei que é o OBS, que o P2 tinha falado. Então, eu saio da câmera aqui do celular, do computador, eu pego o celular e aí eu consigo mostrar aqui no meu caderno que é o que tá aqui na minha mesa, tudo direitinho e não vai cair, não vai despencar. Agora eu consegui ver uma luz no fim do túnel.

A análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito do componente IEC4 do critério de adequação ecológica. Além disso, são trechos do discurso que apresentam muitos detalhes, profundidade e coerência. Por esse motivo, se atribui um nível 4 a este componente.

Discussão e considerações sobre os resultados relacionados ao papel dos CAD na experiência de LS

Este trabalho buscou investigar o nível de uso implícito dos CAD, presentes na reflexão de um grupo de professores de matemática, quando planejam, implementam e redesenham uma aula para ensinar o TP em uma experiência de LS. Como primeiro resultado, encontra-se que, na reflexão dos participantes aparecem trechos do discurso nos quais utilizam implicitamente alguns indicadores e componentes dos CAD. Esse resultado é coincidente com outras investigações que utilizaram a ferramenta CAD para analisar discursos de professores e futuros professores em diferentes contextos e diferentes países (Breda, 2020; Garcés, Font e Morales-Maure, 2021, etc.).

Outro resultado importante é que o grupo de professores, ao realizar sua reflexão nas etapas do LS (*estudo do currículo e metas, planejamento da aula e reflexão da aula*), apresenta diferentes níveis de uso de cada CAD e, em particular, de cada componente de um mesmo critério. Para o critério epistêmico, as reflexões realizadas no grupo de professores, inclinam-se para o fomento de atividades ricas em processos matemáticos (componente IE3) e que, de alguma forma, representem a complexidade do TP (componente IE4). Este resultado pode ser explicado pelo fato de que há uma aceitação na comunidade de Educação Matemática

brasileira, materializada nas bases curriculares, de que é importante incorporar, na instrução matemática, os processos de resolução de problemas, de argumentação, de modelagem matemática, entre outros e que, além disso, deve-se trabalhar com os alunos da educação básica diferentes linguagens e representações (Ministério da Educação do Brasil, 2018). Por outro lado, existe escassa informação e literatura sobre analisar os erros matemáticos e processos de instrução ambíguos que cometem os professores ao ensinar um objeto matemático (Sánchez, Font e Breda, 2021).

Para o critério cognitivo, observa-se que há um grande poder argumentativo do grupo de professores relacionado a se os alunos possuem ou não os conhecimentos prévios necessários para aprender o TP (componente IC1). Este resultado pode ser explicado por três fatores. O primeiro é que os resultados das pesquisas do campo da Psicologia da Educação apresentam uma grande aceitação, por parte do professorado, de que é importante verificar os conhecimentos dos alunos para saber se o que se vai ensinar está a uma distância razoável do que os alunos já sabem (zona de desenvolvimento proximal), característica amplamente defendida pela corrente do construtivismo, em particular, do construtivismo social (Gunduz e Hursen, 2015; Maximin, 2010; Mishra, 2015). A segunda é a de que existe um conhecimento gerado na prática de alguns dos professores participantes do grupo, de que, os alunos nem sempre apresentam os conhecimentos prévios (geometria, números irracionais, etc.), para poder seguir adiante na aprendizagem de um novo conteúdo, neste caso, do TP. Já, a terceira razão está relacionada ao conhecimento do contexto real onde trabalha a professora que implementou a aula (P4), uma vez que ela conhece os alunos e o nível de conhecimento deles em relação aos conceitos trabalhados nas aulas de matemática. Estes aspectos diferem das reflexões relacionadas aos componentes IC2, IC3 e IC4. Por exemplo, se houvesse no grupo de alunos, no qual foi implementada a aula, algum estudante com alguma necessidade de atenção especial, seja ela física ou cognitiva, é bastante provável que a reflexão sobre a adaptação curricular às diferenças individuais (componente IC2) teria um maior nível de reflexão.

Com relação ao critério de interação, existe muita reflexão do grupo de professores relacionada aos processos de interação entre o professor e o aluno. Este fato pode ser devido a que houve uma preocupação de como seria implementada a aula, uma vez que, por conta da

pandemia do Covid-19, as aulas passaram a ser virtuais. Nesse sentido, a discussão sobre os processos de gestão da aula ficou centralizada em como o professor poderia acercar-se aos alunos (escolha da plataforma adequada, vídeos didáticos adequados), e resolver os conflitos de significado (dificuldades) que poderiam surgir durante implementação da aula.

Para o critério de meios, a reflexão que prepondera é a em relação aos recursos materiais e ao uso do tempo, aspectos amplamente influenciados pela mudança da dinâmica da aula, de presencial a virtual (aspecto contextual). Quanto à adequação ecológica, sobressai a reflexão em torno às conexões intra e interdisciplinares (EC2), uma vez que há uma tendência, amplamente aceita na área, de que saber matemática implica saber aplicá-la a contextos extra matemáticos. Também houve uma alta reflexão relacionada à inovação didática, uma vez que a aula se realiza em um contexto de virtualidade. Já, para o critério afetivo, observa-se que há um nível baixo de reflexão em relação os três componentes que conformam este critério. Uma explicação possível para esse resultado é a de que apenas um dos professores participantes do grupo do LS (P4) foi quem implementou a aula e, neste caso, era o único que tinha um conhecimento mais profundo sobre os alunos. O pouco conhecimento dos outros participantes do LS sobre os alunos da turma é um aspecto que influencia, diretamente, levar em consideração, na reflexão conjunta, as necessidades, emoções e atitudes dos alunos.

Estes resultados levam a concluir que o nível de uso dos CAD na reflexão dos professores se relaciona, prioritariamente, a aspectos contextuais (conhecimento do contexto real no qual a aula sobre o TP foi implementada) e aos aspectos consensuais assumidos na comunidade educativa ou impostos pelas normativas curriculares ou do centro educativo. Em alguns casos, as reflexões inclinadas a um componente ou outro são definidas pelo grau de aceitação gerado pelos próprios professores participantes do LS, uma vez que existem algumas tendências e alguns princípios plenamente aceitos na Educação Matemática que indicam quais características e aspectos temos que levar em consideração quando se realiza um processo de ensino e aprendizagem da matemática (De Guzmán, 2007; NCTM, 2000).

É importante ressaltar que este resultado está em processo de avaliação para ser publicado em um capítulo de livro, cuja referência é:

- ✓ Hummes, V., Breda, A. & Font, V. (em avaliação). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de *Lesson Study*. En. A. Richit, J. P. da Ponte, E. S. Gómez (Eds), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores*, Livraria da Física, São Paulo, Brasil.

5.4 Desenvolvimento da reflexão em um curso que combina o LS e os CAD

Por fim, para analisar de que forma o ciclo formativo implementado desenvolve a reflexão dos participantes, nesta seção se apresenta o nível de desenvolvimento da reflexão dos participantes nas três fases do curso implementado. É importante ressaltar que, para esse resultado, tomou-se como material as análises das fases 2 e 3 do curso e comparou-se com os resultados da fase 1 (referentes ao objetivo específico 3). Também se utilizou como material de análise a entrevista realizada com um dos professores participantes, as respostas dos participantes relacionadas ao questionário final de avaliação do curso e o redesenho da aula. Além disso, realizou-se uma triangulação das análises realizadas pela doutoranda e seus diretores de tese (explicado na seção 4.4 desta tese).

Adequação Epistêmica

Após os participantes estudarem os CAD (fase 2 do curso), na fase três, cada professor ficou responsável por fazer uma nova análise da aula sobre o ensino do Teorema de Pitágoras aplicada com o grupo de alunos do Ensino Fundamental, pelo prisma de uma das dimensões dos CAD. Assumindo-se que o CAD epistêmico apresenta uma certa complexidade que dificulta, muitas vezes, a apropriação do seu entendimento, dois professores, P1 e P2, ficaram responsáveis por fazerem a análise da aula por esse viés. Após as análises de P1 e P2, foi realizado uma discussão com todo grupo e uma intervenção dos especialistas dos CAD, com o objetivo de refinar a reflexão previamente realizada.

Desta forma, na décima segunda sessão do curso, P1 e P2 apresentaram suas valorações com relação à adequação epistêmica e organizaram suas análises pelos componentes: *Erros* (IE1), *Ambiguidades* (IE2), *Riqueza de Processos* (IE3) e *Representatividade da complexidade*

do objeto matemático que se quer ensinar (IE4). Na sequência, explica-se a escala de valoração dos diferentes componentes da adequação epistêmica.

Aplicação da escala de valoração do componente IE1 do Critério de Adequação Epistêmica

Na fase 2 do curso, o processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *erros* (IE1) foi baseado nos resultados publicados em Sánchez, Breda, Font y Sala (2021). Ou seja, explicou-se que os erros matemáticos apresentam determinadas características: podem ser cometidos pelo professor ou validado por ele; podem ocorrer por distração ou falta de conhecimento matemático; podem ser erros corrigidos, ao momento, pelo próprio professor ou pelos alunos; podem ser erros matemáticos de definição, procedimento, erro no enunciado de um problema ou tarefa, erro de representação ou erro de argumentação.

Ao realizarem a análise quanto ao componente IE1, P1 comentou que havia identificado alguns erros na aula implementada. Os comentários foram os seguintes:

P1: O primeiro erro que eu identifiquei foi na construção feita onde não aparece o ângulo reto de 90° . Apenas é feito verbalmente. Então, na construção, não aparece o ângulo de 90° , o ângulo reto. Então aqui seria um erro de “mostração”. Mais ou menos isso. Porque ela [professora] apenas fala verbalmente.

P1: Outro foi a questão de ela falar em catetos a e b, por exemplo, verbalmente, mas não colocar na figura. E, depois, ela faz a parte algébrica. Inclusive aqui eu vi que não aparece nenhum exercício, por exemplo, vértice de um polígono. E, ali, eu acho que pode até ter alguma incoerência, se a gente colocar, por exemplo, o vértice desse triângulo aqui e colocar o a e b. Então, de repente, os alunos podem se confundir. Então, eu coloquei, também, como um erro.

P1: Um outro erro que ela fala é a questão de chamar o menor ângulo, um ângulo menor que 90° , de pedacinho, é um erro por metáfora, onde ela poderia ter explicado melhor qual o valor daquele ângulo.

Após a realização destas valorações, P1 explicou que os erros destacados por P1, não se tratavam de um erro de tipo matemático, mas sim de uma má opção didática, que poderia, sim, levar o aluno a apresentar dificuldades de compreensão ou um entendimento ambíguo, por exemplo, da noção de ângulo. Segundo Sánchez, Breda, Font e Sala (2021), uma má opção didática é uma prática que se realiza nas aulas que não favorece ou mesmo dificulta o cumprimento dos objetivos propostos no processo de ensino e aprendizagem (por exemplo, a escolha de atividades que não são bem adaptadas ao grupo de alunos que se está trabalhando),

ou a falta de aplicação de outras práticas que poderiam ser consideradas adequadas nesse processo (por exemplo, a omissão da definição de um conteúdo fundamental da unidade didática ou ausência de uso de material concreto).

Nesse sentido, P1 explicou que o que os comentários realizados por P1 não se tratavam de um erro matemático e, sim, de uma forma de expressão verbal que pode gerar, no estudante, um entendimento ambíguo sobre a noção de ângulo. Os comentários que seguem, mostram que P1 e P2 apontam erros cometidos por P4 no processo de instrução realizado, mas que são erros matemáticos ocasionados por uma distração. O primeiro comentário relaciona-se a um erro de procedimento e o segundo a um erro de representação.

P1: Bom, o outro, foi um erro de elaboração do slide, que ela mesmo corrigiu depois. E, aqui, nós temos um erro de procedimento.

P2: Ao olhar a aula de P4 de novo, eu percebi dois erros. O primeiro aos vinte nove minutos e quarenta. Quando ela explicou a montagem do quebra-cabeça ela se confundiu e falou que os quadrados eram triângulos. Isso, de acordo com o arquivo que a gente recebeu sobre a idoneidade epistêmica, é um erro cometido pelo professor por confusão. Ela se confundiu, talvez não tenha percebido, mas depois todas as outras vezes ela falou como quadrado normal. Bom, e no último exemplo em que ela deu, ela mesmo percebeu que digitou os números errados na hora de fazer a formulação da conta, mas ela consertou na hora.

Além dos comentários anteriores, foi possível identificar que P1 e P2 identificaram dois erros de definição matemática cometidos por P4 durante o processo de instrução.

P1: Um outro erro, daí eu não sei, até eu gostaria de uma opinião depois, quando ela fala ali, por exemplo, "o quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma desse quadrado com outro quadrado", e eu coloquei como erro, porque, na verdade, por exemplo, o Teorema ele diz assim "a área do quadrado, cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lado cada um dos catetos", eu acho, então, essa frase "o quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma desse quadrado com o outro quadrado" eu acho que pode gerar erros aqui, né?

P1: E, depois, ela fala sobre a divisão, na verdade sobre a representação dos números racionais, ela coloca ali "os racionais eles são formados através de uma razão, uma divisão", mas não diz em que conjunto está essa divisão, aí o que faltou foi definir, por exemplo, definir... a divisão é de que números? São inteiros, como é que é? Então, eu coloquei que ela deveria ter colocado "número racional é todo número que pode ser representado por uma fração de dois números inteiros sendo o denominador não nulo". Então conciliar essa questão aqui, essa falta.

Além dos erros apontados por P1 e P2, nenhum dos demais professores participantes destacou que havia identificado algum outro erro matemático na aula. Para concluir a análise pela perspectiva desse componente do CAD epistêmico, PI destacou que, além dos dois erros matemáticos identificados na análise de P1, os especialistas em CAD verificaram mais outros três erros matemáticos presentes na aula, conforme segue: a) Houve um erro quando a professora pediu para que os alunos fizessem uma equação com os números 25, 9 e 16. PI destacou, ainda, que, nesse caso, a professora confundiu a ideia de igualdade com a de equação, e que isso pode ser considerado um erro matemático; b) Outro erro matemático cometido foi o de representação de uma relação entre números usando símbolo de igual para algo que era diferente. A professora compensou o erro com o discurso, porém o registro foi incorreto; c) Por último, PI salientou que P4 também cometeu um erro ao dizer que um quadrado tem dois lados iguais em lugar de quatro lados iguais. Esse erro a própria professora assumiu no momento da reflexão da aula. Conforme Figura 54 apresentada aos participantes do curso:




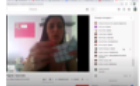
COMENTÁRIO	ANÁLISE ESPECIALISTAS
 <p>Divisão de que números? Não definiu se são inteiros.</p>	Erro matemático.
<p>Esqueceu de apresentar o slide. E não mostrou uma reta numérica para mostrar a localização do n° irracional. (apresentou uma régua e não utilizou)</p> 	Má opção didática.
 <p>Os Catetos A e B não foram explicitados na figura apenas verbalmente.</p>	Má opção didática.
 <p>A aluna Adriani perguntou: Cada quadrado tem quantos Quadrados? A pergunta não foi respondida.</p>	Erro de distração.

Figura 54. Comentários dos participantes sobre os erros e análise dos especialistas
Fonte: elaboração própria.

A reflexão sobre os erros apontados pelos participantes e pela própria professora que implementou a aula fica evidenciado no comentário que P4 exclamou no momento da entrevista, logo de finalizar o curso de formação.

P4: Raiva [...] eu fiquei feliz em alguns momentos [...] raiva, muitas vezes, até de mim mesma: "poxa por que que eu falei isso? Que coisa! Por que que eu não pensei antes de falar? Por que eu não elaborei melhor?"

No comentário realizado por P4 fica explícito uma preocupação da professora em pensar melhor na linguagem ou na elaboração dos conceitos a serem explicados ao ensinar o Teorema de Pitágoras aos seus alunos. Em outras palavras, há uma reflexão explícita com relação à necessidade de melhorar o processo de instrução, sem cometer erros de tipo matemático.

Na primeira fase do curso, onde os professores desenvolveram ciclos de LS, sem conhecerem os CAD para pautar sua reflexão, identificou-se que, em relação às práticas que são consideradas incorretas desde a perspectiva do conteúdo matemático, a única professora que fez um comentário foi P4 e, desta forma, atribuiu-se 1 ao nível de uso implícito do componente IE1.

Na segunda reflexão da aula, onde os professores usam os CAD explicitamente como ferramenta de análise, os professores destacaram muitos aspectos relacionados aos erros e, pode-se afirmar que, há uma reflexão mais ampla dessa ideia. Por exemplo, os professores puderam identificar que alguns erros cometidos pela professora foram erros de definição, representação e procedimento. Contudo, em alguns comentários os participantes confundiram a ideia de erro matemático com a de má opção didática. Além disso, não especificaram que alguns erros matemáticos cometidos pela professora foram cometidos por distração. Nesse sentido se fez necessária uma nova intervenção da pesquisadora para explicar a análise dos especialistas e evidenciar, por exemplo, as diferenças entre erro matemático e má opção didática. Uma vez que foram identificados trechos do discurso dos professores que explicitam corretamente os erros que cometeu a professora, atribui-se um nível 3 para o uso explícito e correto do componente IE1 do CAD epistêmico e não um 4, pois há momentos em que os participantes confundiram a ideia de erro matemático com a de má opção didática.

Aplicação da escala de valoração do componente IE2 do Critério de Adequação Epistêmico

Na fase 2 do curso, o processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *ambiguidades* (IE2) esteve direcionado a mostrar que, no processo de ensino de um determinado objeto matemático, o professor pode realizar comentários ou processos de comunicação não-verbal (Farsani, Breda e Sala, 2020; Farsani, et al., 2021) que podem levar

o aluno a obter uma compreensão ambígua do conceito que se que ensinar. Seria um “quase erro matemático”, mas não chega a ser classificado como erro. Os participantes foram instruídos que a causa das ambiguidades podem decorrer: a) pelo uso de materiais manipulativos; b) pelo uso de metáforas, analogias e gestos; c) pelo uso de programas de computador dinâmicos; d) outros.

Quanto às *ambiguidades* (IE2) cometidas na implementação da aula, P2 comentou que não havia identificado nenhuma na aula analisada. Já, os comentários que aparecem na sequencia evidenciam a reflexão da aula realizado por P1 quanto às *ambiguidades* cometidas por P4 (professor que implementa aula sobre o TP com os estudantes do Ensino Fundamental) durante o processo de instrução sobre o TP:

P1: De novo a questão do quadrado do enunciado do Teorema, que ela falou "o quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma desse quadrado com o outro quadrado" pode, então, gerar ambiguidade aqui.

P1: E o ângulo menor que 90° é apresentado com um pedacinho, daí aqui também eu acho que pode inserir essa ambiguidade.

P1: Aqui, por exemplo, quando ela fala em triângulo que não é retângulo, ela dá um exemplo e ela não dá um exemplo geométrico. Então, aqui também pode causar ambiguidade. Não sabe como é que pode ser esse triângulo, por exemplo.

P1: A questão do pentagrama, ela mostra, por exemplo, o pentagrama, mas pode ser que alunos não saibam o que é um pentagrama. Aí aqui eu coloquei, por exemplo, que propriedades o pentagrama possui? Então, ali, ela poderia até usar a definição, por exemplo, que a soma daqueles ângulos vai dar 180° . Ela poderia utilizar depois na construção do triângulo retângulo.

P1: Outra parte da ambiguidade onde ela fala sobre o Teorema e ela não explica o que é um Teorema. Bom, então, o aluno também tem que entender, por exemplo, que um Teorema é uma proposição que pode ser demonstrado por meio de um processo lógico. Então, também há uma necessidade de representar uma demonstração.

Após a explanação das análises de P1, P1 apresentou a análise de especialistas dos CAD em relação às ambiguidades destacadas por P1 e, nesse sentido, apenas duas delas (a segunda e a última) foram destacadas como ambiguidades, mas as outras duas não, pois tratavam-se de questões didáticas e não quase erros matemáticos (ambiguidades), ver Figura 55.

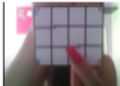
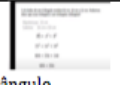
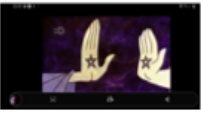
COMENTÁRIO	ANÁLISE ESPECIALISTAS
<p>Ângulo menor que 90° é colocado como "pedacinho".</p> 	<p>É uma ambiguidade. Metáfora do pedaço. Qualquer pedaço do triângulo poderia ser um ângulo.</p>
<p>Se não é triângulo retângulo, como são seus ângulos? Para que não ocorra ambiguidade é necessário a construção desse triângulo.</p> 	<p>Pode criar confusão nos alunos, mas não é um "quase" erro do professor. Simboliza mal, mas fala bem. O problema pior é a igualdade.</p>
 <p>O que é um Pentagrama? Que propriedades Possui? Colocar ao menos uma característica, um exemplo.</p>	<p>É uma questão didática. Seria melhor fazer isso didaticamente, mas não há um quase erro.</p>
<p>Fala de Teorema, mas não explica o que são teoremas: "proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico." "Necessidade também de apresentar uma demonstração"</p>	<p>É quase um erro. Se pode considerar como uma ambiguidade. Toma como demonstração uma mostração.</p>

Figura 55. Comentários dos participantes sobre as ambiguidades e análise dos especialistas

Fonte: elaboração própria.

Ao observar as análises realizadas por P1 e P2, PI destacou que haviam outras quatro ambiguidades presentes na aula que não haviam sido identificadas pelos professores que fizeram a análise pela perspectiva do CAD epistêmico: uso de metáfora sobre a relação de parentesco para denominar o triângulo retângulo ao invés de explicar como um caso particular de triângulo; uso de metáfora ao perguntar "quem é a hipotenusa?" (personificação da hipotenusa como um ser vivo); uso de metáfora de orientação ou localização (a hipotenusa está em "frente"); e uso de discurso no qual confundiu o ângulo reto com a sua representação -ao apresentar a imagem do triângulo retângulo fez desaparecer a ideia de ângulo deixando somente a ideia de representação-, explicando que o ângulo não é a região do plano e sim uma "esquina" ou símbolo.

Por outro lado, quando P4 foi entrevistada sobre as reflexões que os colegas fizeram com relação à análise da aula implementada por ela e as sugestões que eles propuseram para o redesenho, comenta que é muito difícil utilizar uma linguagem "mais formal" com os alunos e que é difícil, por exemplo, fugir da metáfora de orientação ou localização para explicar a noção de ângulo oposto.

P4: Eu lembro que tinha várias que eu não [...] que eu não estava de acordo. Uma que veio agora foi [...] uma das únicas que me veio foi a utilização de alguns termos, né, que [...] que alguns termos que era [...] foi pedido para que no redesenho fosse usada as palavras mais formais. Só que eu acredito, mas, né... que na realidade onde eu estou os alunos não conhecem esses termos. Claro,

seria apresentado, mas eu lembro nitidamente nos últimos dois anos anteriores eu falando de hipotenusas como sendo o cateto oposto ao ângulo de 90° e eles faziam uma cara de que "como assim?" Porque eles não entendem o oposto, eles não entendem o oposto, por mais que tu explicasses "o oposto oh". Eu estou [...] eu falava... eu lembro de mim falando assim na sala de aula: "eu estou oposta ao fulaninho, estamos de frente um para o outro" e, mesmo assim, quando tu voltavas para a matemática era muito difícil deles fazerem a ligação da palavra oposto com o triângulo ali. Então, eu sinto muita dificuldade em [...] e que fazer [...] fazer com que eles entendam de verdade esses termos mais formais [...] então, ah eu sinto que se falasse para os meus alunos, por mais que não esteja tão [...] que abra uma brecha para a dualidade, eu sinto que eles entendem mais, apesar de abrir uma brecha. Essa brecha a gente pode consertar, a gente pode mostrar para eles, porque os termos formais para eles são muito difíceis.

No comentário acima, é evidente que P4 reconhece que utiliza metáforas para explicar a noção de ângulo oposto. Contudo, mesmo reconhecendo o uso, ela considera importante manter esse tipo de explicação, uma vez que, contrastando com questões cognitivas (de aprendizagem dos alunos), ela considera mais importante manter o uso de metáforas (utiliza o termo dualidade) do que explicar a noção de ângulo oposto a partir de uma definição formal.

Comparando este resultado com o uso implícito do componente *ambiguidade* (IE2) na primeira fase do curso, observa-se que na fase 1 do curso (fase em que os professores ainda não haviam estudado o CAD epistêmico), em nenhum momento das reflexões realizadas pelos professores se encontraram comentários realizados referentes às definições que não estão corretamente enunciadas ou sobre se uso de gestos ou material manipulativo pode levar o aluno a uma espécie de confusão ou entendimento ambíguo, desta forma, foi atribuído 0 ao nível de uso implícito do componente IE2. Na segunda análise, referente a fase 3 do curso, evidenciou-se que os CAD melhoraram a reflexão dos professores em relação ao componente IE2 do CAD epistêmico, inclusive, a própria professora que implementou a aula reconhece que realiza explicações que podem levar o aluno a ambiguidades. Em geral, na reflexão dos professores aparece poucos comentários relacionados às ambiguidades realizadas pela professora durante a implementação da aula, nesse sentido, foi necessário a intervenção dos especialistas em CAD na identificação das várias ambiguidades cometidas na aula analisada que não haviam sido observadas pelos participantes. Ao triangular a análise da doutoranda com a dos diretores da tese, atribui-se um nível 2 para o uso explícito e correto do componente IE2 do CAD epistêmico.

Aplicação da escala de valoração do componente IE3 do Critério de Adequação Epistêmico

A *riqueza de processos* (componente IE3) foi ensinado aos participantes na fase 2 do curso. Para isso, foi trabalhado com os professores tarefas matemáticas nas que eles pudessem desenvolver e refletir sobre os seguintes processos: Comunicação (o aluno deve entender textos matemáticos); Manipulação/Experimentação/Exploração/Tentativa e Erro; Formulação/Enunciação/Formulação de Conjecturas; Contextualização; Argumentação/Justificação/Demonstração/Explicação; Comunicação (o aluno deve produzir textos matemáticos que devem ser validados pelos demais)/Institucionalização. Além disso, foi comentado com os professores a possibilidade de trabalhar megaprocessos matemáticos, como a resolução de problemas e a modelagem matemática. Logo da instrução, os participantes já tinham a base para refletir sobre a aula do TP através do viés do componente IE3.

No que diz respeito ao componente *riqueza de processos* (IE3), P1 e P2 comentaram o que segue:

P1: Bom, a riqueza de processos, a conexão com outras áreas de conhecimento ali, a parte interdisciplinar, uso de imagens, também. A contextualização, trouxe o vídeo contextualizando. A riqueza de processos na questão do vídeo que complementou as definições e melhoraram e explicação. O material concreto construído. O uso da câmera do celular é um ótimo recurso.

P2: E aí, quando a gente fala de riqueza de processos, eu anotei todos os processos que a gente teve ao longo da aula. Então o primeiro processo foi a explicação interativa sobre a história de Pitágoras, com auxílio do mapa, dos vídeos e das imagens. O segundo a gente teve a revisão do conceito de área. O terceiro teve a construção do triângulo retângulo a partir do recorte de um retângulo 3 por 4 e a explicação do ângulo reto. No quarto a gente teve a identificação dos catetos e a hipotenusa. O quinto a montagem do quebra cabeça. O sexto que foi a relação das áreas dos quadrados dos lados 3, 4 e 5, que, para mim foi o processo para os alunos que eu julguei mais complexo, que surgiram bastante dúvidas entre os alunos. O sétimo foi a formalização do Teorema de Pitágoras. Então, o oitavo ela entrou com exemplos do Teorema, e aí eu meio que classifiquei como subprocessos. Porque, dentro dos exemplos, ela teve que retomar a explicação da raiz quadrada para concluir o primeiro. Ela teve que explicar sobre a raiz quadrada para concluir o primeiro exemplo, depois ela teve que revisar e identificar os lados do triângulo retângulo e a formalização do Teorema de Pitágoras a partir das dúvidas dos alunos. Então, eu meio que considerei que a gente

teve dois subprocessos dentro de um processo maior, no meio da aula. O nono processo foi a revisão dos números racionais e irracionais a partir da construção do número raiz de 2. E o último que foi a aplicação do Teorema de Pitágoras, que foi a parte mais rapidinha ali, porque estava já acabando o tempo da aula. Então, ao todo, para mim, foram dez processos e, sim, é muito processo. Eu acredito que a aula foi rica em processos. Aí eu coloquei algumas coisas que eu julguei como um processo que aconteceram dentro da aula, mas que não foi uma coisa, como eu posso dizer, não teve um momento específico, assim, que foi o processo de construção de conhecimento dos alunos. A relação entre a professora e os alunos, que eu também considero um processo, para que a aula seja dissolvida de maneira satisfatória. E, um outro processo que foi construído ao longo da aula foi a estratégia de explicação que a professora foi desenvolvendo, para tentar responder as dúvidas dos alunos. Principalmente, quando foi questionado a relação entre as áreas dos quadrados, que ela estava com a representação geométrica formada e aí, depois, transformou aquilo lá numa equação. E foi uma estratégia que ela criou e isso para mim foi um processo de construção que eu considero muito rico dentro da aula. E eu acho que a aula foi bem rica em processos.

No primeiro comentário sobre o componente *riqueza de processos* (IE3), observa-se que P1 e P2 reconhecem diferentes processos. Por exemplo, processo de comunicação, processo de significação, processo de contextualização, processo de particularização, etc. Contudo, nota-se que os professores não distinguem entre a noção de processo e procedimento matemático (por exemplo, a construção do número raiz quadrada de dois) e, por outro lado, tampouco distinguem a noção de processo matemático e processo didático (por exemplo, considerar a relação estabelecida entre a professora e os alunos como um processo matemático). Embora a não distinção entre a diferença entre processo e procedimento matemático não se considere um aspecto relevante para assumir que haja o uso incorreto da noção de processo matemático, tampouco se considera que a confusão entre processo matemático e processo didático seja uma evidencia suficiente de que a noção de processo matemático não é compreendida em sua totalidade. A razão disso é porque a noção de processo matemático é uma noção bastante ambígua e que pode dar margem para diferentes interpretações. Por isso, neste momento a valoração do uso explícito e correto do componente IE3 seria 2.

Após a análise realizada por P1 e P2, houve uma discussão coletiva sobre a *riqueza de processos* contemplados na aula, PI apresentou a análise da aula feita por especialistas nos

CAD, e mostrou os processos que foram contemplados na aula implementada e os que deveriam ser melhorados ou incorporados no seu redesenho. Conforme Figura 56:

PROCESSOS	DESCRIÇÃO	EVIDÊNCIA	Valoração
Exploração	Realizam-se provas de tentativa e erro, há manipulação de objetos, etc.	✓ Ao dividir um retângulo pela diagonal. ✓ Ao encaixar os quadrados nos lados do triângulo retângulo.	
Formulação de conjecturas	Como resultado da exploração, observam-se regularidades e formula-se alguma conjectura.	✓ Há um processo de fomentar conjectura quando a professora pergunta que relação há entre os números 25, 16 e 9.	
Argumentação/Validação	Há justificativas, razões e mostra-se uma conjectura.	✓ A professora realiza um processo de argumentação ao explicar a propriedade/definição do triângulo recortado (recortando um retângulo pela diagonal, obtêm-se dois triângulos retângulos) ✓ Comprova-se o TP para o caso do triângulo de lados 3, 4 e 5.	
Institucionalização	A noção/conjectura é dada por válida.	✓ Institucionaliza o teorema de Pitágoras quando a partir de mostrar que a área do quadrado formado na hipotenusa é igual a soma das áreas formadas nos catetos e considera o resultado válido para qualquer triângulo retângulo. Esta validação repete-se ao final da aula.	
Algoritmização	Aplicar o TP em problemas de valor falante de uma maneira semiautomática.	✓ Atividades 1a, 1b e 1c são mais exercícios do que problemas. Trata-se de calcular um dos lados (ou hipotenusa, ou cateto, com números inteiros ou irracionais) aplicando o TP.	
Contextualização	Relacionar uma noção matemática com uma situação extra matemática.	✓ Atividades 2 e 3. Trata-se, outra vez, de exercícios como os das atividades 1a, 1b e 1c, mas com um enunciado contextualizado.	
Modelagem	Processo de obtenção de um modelo matemático a partir de um problema ou fenômeno do mundo real.	✓ As atividades 2 e 3 não chegam a ser consideradas problemas de modelagem.	
Resolução de problemas	Resolução de problemas que não são exercícios.	✓ A pesar de que se resolvem as atividades 1a, 1b, 1c, 2, 3, 4 e 5, não pode considerar-se que foi trabalhado um processo de resolução de problemas.	
Conexões	Relacionar diferentes significados parciais, proposições, etc.	✓ No se estabelece uma conexão entre o significado geométrico <<relação de áreas>> com o significado <<relação entre os comprimentos dos lados do triângulo>> e tampouco se estabelece uma conexão entre el TP e seu inverso.	

Figura 56. Quadro apresentado por PI que mostra o nível de uso dos processos matemáticos usados na aula sobre o TP

Fonte: elaboração própria.

A partir dessa discussão o coletivo de professores entrou em um consenso, de que, para melhorar a riqueza de processos dever-se-ia aumentar a importância de conectar o TP com os números irracionais (conexão intra-matemática), trabalhar melhor o processo de exploração e experimentação (aplicar mais casos particulares de medidas do triângulo retângulo e não somente com os de medida de lado 3, 4 y 5) e melhorar o processo de formulação de conjecturas (relação entre as ternas pitagóricas). É importante observar que há uma evolução na reflexão dos professores, uma vez que passam de um discurso um pouco confuso e ambíguo sobre o entendimento de alguns processos e acabam explicitando, de forma clara e correta, os processos matemáticos que devem ser melhorados em um futuro redesenho. Neste momento, a valoração do uso explícito e correto do componente IE3 é de 3.

Por fim, a última etapa de reflexão foi a discussão que realizaram os professores para desenhar ou selecionar as tarefas que propuseram para o redesenho da aula. Em este redesenho, pode-se observar os processos de experimentação e estabelecimento de conjecturas, mas não o de conexão entre o TP e os números irracionais. Contudo, observa-se que os participantes

contemplaram no redesenho outros processos matemáticos bastante relevantes, tais como: a) argumentação (fazer a demonstração geométrica do TP); b) conexão (entender a conexão entre os significados de áreas de quadrados construídas sobre os lados de um triângulo retângulo e o significado de relação entre comprimentos de seus lados; entender o TP como significado aritmético-algébrico através das ternas pitagóricas); c) resolução de problemas (resolver problemas contextualizados com os significados do TP trabalhados previamente).

Comparando este resultado com o uso implícito do componente *riqueza de processos* na primeira fase do curso, observa-se que na fase 1 do curso (fase em que os professores ainda não haviam estudado o CAD epistêmico), foram realizados diversos comentários considerados evidências do uso implícito deste componente, nesse sentido, foi atribuído nível 3. Na segunda análise, referente a fase 3 do curso, evidenciou-se que os CAD melhoraram a reflexão dos professores em relação ao componente IE3 do CAD epistêmico. Por exemplo, fase 1 do curso, os professores não tinham claro a diferença entre demonstração e verificação experimental do TP, agora, na fase 3 distinguem entre demonstração e verificação e se propõem a fazer a demonstração do TP com os alunos. Um aspecto importante a ressaltar como evidência desta melhora é o de que os professores contemplaram, no redesenho, a demonstração do TP (processo de argumentação). Opina-se que este processo é um dos processos mais relevantes, uma vez que a demonstração do TP é uma das poucas demonstrações que podem ser trabalhadas no nível da Educação Básica.

O fato de que nesta etapa do redesenho se utilize uma terminologia precisa sobre os processos matemáticos a serem trabalhados e que os professores assumam fazer a demonstração do TP é o que leva a considerar que a valoração do uso explícito e correto do componente IE3 é 4.

Aplicação da escala de valoração do componente IE4 do Critério de Adequação Epistêmico

A noção da *representatividade da complexidade do objeto matemático que se quer ensinar* (componente IE4) foi ensinada aos participantes na fase 2 do curso. Para isso, foi trabalhada a complexidade do coeficiente angular da função Afim e a complexidade do Teorema de Tales. Para ensinar a complexidade desses dois objetos matemáticos, mostrou-se

aos participantes os diferentes significados do coeficiente angular e as distintas representações que podem ser feitas dentro de cada significado, além de apresentar uma amostra representativa de problemas para trabalhar os diferentes significados. A ideia pensada ao ensinar a complexidade desses objetos na fase 2, foi a de que os participantes pudessem analisar se na aula implementada foram trabalhados os diferentes significados do TP. Nesse sentido, os participantes já teriam a base para refletir sobre a aula do TP através do viés do componente IE4.

Ao analisar a aula implementada, P1 e P2 realizaram os seguintes comentários sobre o componente IE4:

P1: Então, por exemplo, ela apresentou conteúdos vistos pelos alunos. Por exemplo, a importância de retomar o conteúdo já dado. Então, por exemplo, ali mostra uma imagem dela dizendo "vocês lembram o que é um ângulo?", daí ela retoma os conteúdos.

P1: Outra questão da representatividade do que ensinar, ela mostrou muito bem a questão das figuras, construídas de várias formas e, inclusive, mostrando a todo momento na hora que pediam explicação. Acho que ela apresentou muito bem o que ela estava ensinando.

P1: Bom, quanto aos problemas, então, houve, tipo, problemas de identificação com a hipotenusa, com variáveis. Também a identificação dos catetos, o valor da hipotenusa. Aplicação do Teorema de Pitágoras para reconhecimento do triângulo retângulo. E o uso de diferentes modos de expressão, por exemplo, a parte simbólica do triângulo ali onde é a hipotenusa, os catetos. A parte algébrica e a parte verbal. Então ela utilizou muito bem essa questão de representatividade.

P2: E aí, quando a gente tem a representatividade da noção matemática que se quer ensinar, eu coloquei que é importante salientar que as representações das figuras geométricas foram bem construídas pela professora. Tanto os quadrados de lados 3, 4 e 5, quanto o retângulo de lados 3 por 4 e os triângulos retângulos. Porque a gente viu em alguns vídeos de explicação da idoneidade epistêmica o professor desenhando um triângulo, mas que de fato ele não era um triângulo. E esse problema a gente não teve durante a aula, as representações das figuras foram bem-feitas. Bom, então, a representação geométrica do Teorema de Pitágoras foi muito bem construída pela professora, que explicou com calma e paciência, e, para mim, é importante levar em consideração que essa construção geométrica ela só foi possível devido às explicações prévias sobre a área, o triângulo retângulo e suas características. Assim, como o uso do próprio papel quadriculado. Consequentemente a representação algébrica do Teorema de Pitágoras tornou-se mais fácil, quando a explanação da representação geométrica foi finalizada e entendida pelos alunos. A gente também viu uma questão de representação com recursos tecnológicos, acho que tinha alguma coisa no arquivo que falava sobre mostrar vídeos, fotos, também, para elucidar a representação. E aí, aos 50

minutos da aula, P4 mostrou aquele vídeo para finalizar a formalização do Teorema de Pitágoras. E, pelo o que eu vi nos comentários dos alunos, quando ela mostrou aquele vídeo, ficou bem mais fácil também. E os recursos tecnológicos foram fundamentais para que as representações dos triângulos retângulos fossem boas e corretas, ou seja, tipo as construções foram muito boas e a tecnologia ajudou.

Nos comentários acima, é possível observar que P1 e P2 não realizaram reflexões explícitas sobre se “os significados parciais (definições, propriedades, procedimentos, etc.) são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática que deve ser ensinada contemplada no currículo”, primeiro indicador do componente IE4. Uma possível explicação para esta ausência de reflexão sobre a complexidade do TP presente no currículo é a de que, na fase 1 do curso, quando os participantes selecionaram o tema TP e realizaram a etapa 1 da *Lesson Study* (estudo do currículo e metas), eles já haviam realizado várias reflexões sobre os significados do TP, que poderiam ser trabalhados na aula, contemplados no currículo e nos livros didáticos. Em particular, na fase 1 do curso eles já haviam assumido a importância de trabalhar o significado geométrico do TP (estabelecimento da relação entre as áreas dos quadrados formados nos lados do triângulo retângulo), argumentando que esse significado está fortemente institucionalizado no material didático. Os detalhes desta análise podem ser observados na seção 5.3.

Também, não se observam comentários relacionados ao indicador “os significados parciais (definições, propriedades, procedimentos, etc.) são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática a ser ensinada”, uma vez que nem P1 e nem P2 explicitam em suas reflexões a falta de trabalhar o significado aritmético-algébrico do TP além do geométrico.

Por outro lado, é possível observar que P1 realiza um comentário explícito sobre a realização de diferentes tipos de tarefas (problemas) aplicados pela professora dentro de um dos significados geométricos. Por exemplo, quando P1 comenta que houve uma variabilidade nas tarefas que solicitavam o cálculo das longitudes de um triângulo retângulo (cateto, hipotenusa, etc.). Em outras palavras, há um comentário explícito sobre o indicador “para um ou mais significados parciais, há uma amostra representativa de problemas”. Também foi notório os diversos comentários realizados por P1 e P2 quanto ao indicador “para um ou mais significados parciais, há um uso de diferentes modos de expressão (verbal, gráfico, simbólico,

etc.) e tratamentos e conversões entre os mesmos”, contudo, todos os exemplos citados por P1 e P2, se relacionam aos diferentes modos de representação do significado geométrico do TP. Em resumo, os professores não refletiram explicitamente sobre os diferentes significados do TP que deveriam ter sido trabalhados na aula e as reflexões realizadas por eles se inclinaram, sobretudo, às diferentes formas de representação realizadas sobre o significado geométrico.

Em um dado momento, PI solicitou aos professores participantes que elaborassem, cada um, duas atividades que tratassem de dois significados parciais do TP. Quando P1 e P2 foram analisar a aula pela perspectiva do CAD epistêmico, também fizeram a análise dessas atividades, conforme seguintes evidências:

P2: Eu analisei também as atividades que os professores mandaram pra gente. Nos casos que eu recebi, basicamente eu analisei a representação, que era o sentido. Mas, uma coisa que me chamou a atenção foi que a atividade que P3 mandou, que falava sobre ajudar a professora a achar a distância entre o quadro e o celular em cima da mesa, eu botei: "na segunda questão (porque foi a segunda questão que ela enviou) é mencionado um celular em cima da mesa que serviria de referência para calcular a distância entre ele e o quadro. Contudo, ao analisar a imagem que deve ter sido colocada na questão, para visualização, não aparece nenhum celular na mesa, ou seja, não tem nenhum celular na mesa para a gente usar como referência.". Então, diante disso, eu considero que esse fato foi um erro que pode ser enquadrado no "erro ao propor um problema". Então, na hora de propor o problema, a imagem que foi colocada na questão não tem nenhum celular e isso é um erro de construção de um problema, eu acredito. E as duas aplicações do Teorema de Pitágoras são representações de distância. Foi o que eu identifiquei. A P5, ela mesmo, quando ela enviou a questão, ela falou que a questão, a primeira questão, representa o Teorema como distância e a segunda do ponto de vista geométrico. P4 fez uma coisa diferente. Falou sobre a representação física do Teorema de Pitágoras e, também, como a apropriação do mesmo como meio para a descoberta do valor de alguma incógnita. Utiliza o Teorema de Pitágoras para achar o valor do x e, depois, usando em uma outra questão. A P6 usou a primeira como ponto de vista geométrico e a segunda para trabalhar as questões de escala, que eu achei bem legal. E P1 trouxe vários sentidos para trabalhar o Teorema de Pitágoras. Das duas questões propostas, eu identifiquei a questão de geometria espacial e, também, trabalhar com otimização.

A análise das atividades propostas pelos professores, de acordo com P2, revelou que eles enviaram atividades que tratavam de alguns significados parciais do TP, mas P2 não realizou uma reflexão sobre quais seriam todos os significados do TP que poderiam ser trabalhados para o nível dos alunos da aula.

Já P1, em relação às atividades enviadas pelos colegas comentou o que segue:

P1: Bom, sobre o trabalho dos colegas eu não fiz tanto uma análise tão por dentro que nem P2 fez. Eu apenas penso, até quero salientar aqui, que no redesenho da aula acredito que seja de extrema importância esse tipo de problemas. Que é aplicação na física, os produtos notáveis - teve um colega que apresentou só os produtos notáveis-, outro produto notável com o perímetro, distância entre dois pontos, problema de distância, então, tem três tipos de problema de distância. É um problema de propriedades do triângulo retângulo e também cálculo do diâmetro como hipotenusa. Então, são vários contextos do Teorema de Pitágoras. E o que eu trouxe aqui sobre o volume.

Da mesma forma que P2, em sua análise das atividades enviadas pelos professores, P1 não mencionou quais significados parciais do TP compreendem a complexidade desse objeto matemático. Dada a reflexão realizada por P1 e P2 sobre a aula implementada e sobre os problemas propostos pelos outros participantes, acorda-se que nesse momento da análise há um nível 2 do uso explícito e correto do componente IE4.

Com a intenção de fomentar a melhora do entendimento dos participantes sobre a complexidade do Teorema de Pitágoras, uma vez que consideramos que este Teorema pode ser melhor explorado e trabalhado em sala de aula, dada sua importância e aplicabilidade no campo da matemática, PI, em um primeiro momento, apresentou a representatividade do TP presente na aula, identificada pelos especialistas: mostra representativa de procedimentos para calcular área dos quadrados: medida direta com a ideia de contagem dos quadrados de uma unidade (poderia contar de formas diferentes) e medida indireta usando a ideia de lado x lado; contempla dois significados geométricos parciais (como uma relação de áreas de quadrados e relação entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo); mostra variada de representações: usa diferentes representações do triângulo retângulo; pouca representatividade na variedade de problemas (todos são para calcular um dos lados (comprimento) do triângulo). Ou seja, a análise dos especialistas indica que não há nenhum problema que esteja relacionado com cálculo de áreas e que há pouca variedade de resultados nas atividades propostas (dentro do mesmo significado), por exemplo, atividades nas quais aparecem números naturais e números irracionais.

Em um segundo momento, PI apresentou a complexidade do TP. Em particular, trabalhou a complexidade do TP no campo da matemática; no currículo escolar e a trabalhada na aula implementada por P4 (detalhada na subseção 5.2.3 desta tese) e, também, apresentou

exemplos de problemas nos quais podem ser trabalhados diferentes significados e problemas nos quais se podem explorar mais de um significado parcial e a conexão entre eles. Foi possível observar que, a partir desse momento, os professores entenderam um pouco melhor quais significados parciais do TP deveriam ser considerados para um redesenho da aula.

Logo desta segunda instrução realizada por PI, no momento de uma discussão coletiva realizada entre a pesquisadora e o grupo, foi acordado que, para ensinar, em um redesenho, uma amostra mais representativa do TP para o nível de alunos que foi implementada a aula era necessário realizar: a demonstração do Teorema de Pitágoras (ou verificação experimental com mais casos); aplicação do TP por problemas por relação de áreas; explicar o TP por cálculo de comprimentos e atividades de aplicação relacionada a este significado e, em seguida, trabalhar atividades que conecte os dois significados (áreas e comprimento). Explicar a volta do Teorema e realizar exercícios de aplicação sobre a recíproca do TP; incorporar o significado aritmético- algébrico (mediante as ternas pitagóricas) até chegar às representações dos números irracionais.

A tomada de decisão sobre o que incorporar no redesenho para melhorar a representatividade da complexidade do TP permite concluir que houve uma melhora na reflexão dos professores quanto a ao componente IE4. Em particular, é possível observar que as tarefas incorporadas no redesenho (anexo 2) contemplam, de alguma forma uma melhora desse componente, uma vez que se relacionam, sobretudo a trabalhar o significado aritmético- algébrico, os significados geométricos (comprimento e área) e a conexão entre eles e, ainda, atividades de mudança de representação dentro de um mesmo significado. Contudo, é importante ressaltar que, na tentativa de criar um problema para conectar os dois significados geométricos do TP (comprimento e área), os professores não conseguiram elaborar um problema que conectasse esses dois significados de maneira correta. Uma explicação plausível é a de que, ou os professores não estão acostumado a praticar o “*problem posing*”, ou seja, criar problemas, ou, essa dificuldade está relacionada diretamente com a operacionalização do componente IE4, uma vez que é um componente difícil de compreender e de trabalhar.

Esta dificuldade apresentada pelos professores em refletir, compreender e operacionalizar o componente IE4 concorda com resultados internacionais de que os

professores têm dificuldades para interpretar aspectos epistêmicos das tarefas e identificar seu potencial educacional (Stahnke, Schueler e Roesken-Winter, 2016)

A reflexão dos professores realizada na fase 1 do curso analisada, apresentou comentários ou diálogos que podem ser considerados evidências do uso implícito da maioria dos indicadores do componente IE4 do CAD epistêmico, principalmente o relacionado à complexidade do TP contemplada no currículo e nos livros didáticos. Por isso, atribuiu-se 3 ao nível de uso implícito desse componente. Já na terceira fase do curso, ao fazerem uso do CAD para pautar suas reflexões, mesmo que os professores não tenham, em sua totalidade, operacionalizado o componente IE4 de forma correta, apresentaram reflexões amplas e pautadas, evidenciadas na discussão e reflexão coletiva e visualizadas nas atividades propostas no redesenho. Por essa razão, atribuiu-se um nível 3 para o uso explícito e correto do componente IE4 do CAD epistêmico.

Conclusão geral sobre a melhora da reflexão dos professores com relação ao Critério de Adequação Epistêmico

A análise realizada aponta que, os professores, ao refletirem sobre a adequação epistêmica da aula, apresentam algumas confusões no entendimento de todos os componentes contemplados por este critério. Uma explicação para este fato é a de que os próprios componentes, por sua natureza, nos levam a compreensões ambíguas. Há uma linha tênue entre o que é uma ambiguidade, uma má opção didática e um erro matemático. Também é muito fácil confundir processo didático com processo matemático, já que dentro de um processo didático, pode-se trabalhar diferentes processos matemáticos. Também é muito difícil compreender a noção de complexidade de um objeto matemático e criar problemas para contemplá-la. Esta dificuldade em compreender a adequação epistêmica foi expressada pela maioria dos participantes no questionário de avaliação final do curso:

P7: Epistêmica me pareceu a mais complexa. Estudaria novamente para buscar atingir esse critério.

P1: [...] o epistêmico, me deixou um pouco com dúvidas no início, mas consegui compreender após eu fazer a análise e ser corrigido. As dúvidas surgiram pela complexidade do critério. Diferenciar erro didático de erro matemático.

P3: No epistêmico na primeira parte, mas ao longo da discussão com professor e colegas foi esclarecido

P2: Inicialmente, epistêmico e Cognitivo foram os mais difíceis de compreender. Contudo, mediante explicações e discussões, tudo foi esclarecido.

P4: Estou em processo. Muitas vezes me vejo refletindo e tentando compreender certos aspectos dos CID. Mas acho que o epistêmico envolve muitos conceitos que ainda preciso aprender.

Mesmo apresentando dificuldades de compreensão sobre a adequação epistêmica, há uma diferença considerável na reflexão dos professores quanto ao CAD epistêmico, antes de o terem estudado (fase 1 do curso) e depois de o terem estudado (fase 3 do curso). (Figuras 57 e 58).

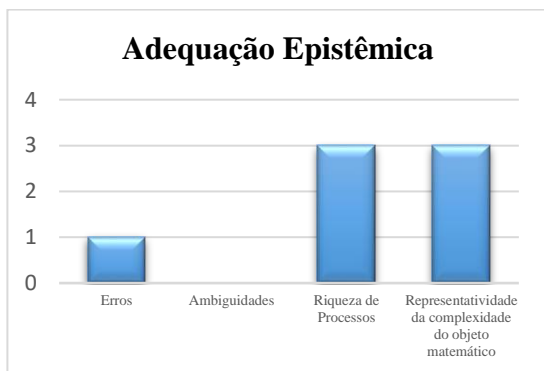


Figura 57. Nível de uso implícito do CAD Epistêmico (fase 1 do curso)
Fonte: elaboração própria.

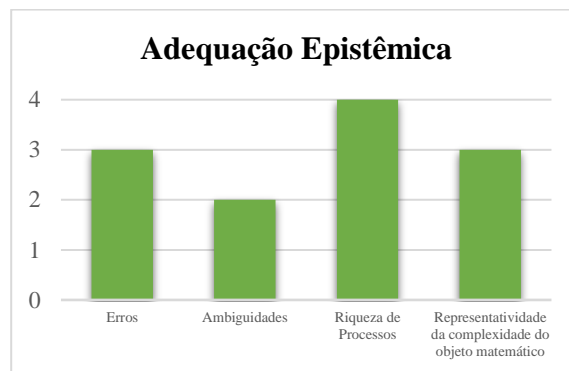


Figura 58. Nível de uso explícito e correto do CAD Epistêmico (fase 3 do curso)
Fonte: elaboração própria.

Os gráficos acima mostram que os *erros* (IE1) e as *ambiguidades* (IE2) tiveram uma melhora considerável na reflexão dos professores nas diferentes fases e que a *riqueza de processos* (IE3) e a *representatividade da complexidade da noção que se quer ensinar* (IE4) foram amplamente contempladas na reflexão que direcionou o redesenho da aula.

Adequação Cognitiva

Conforme evidenciado na subseção 4.4 da metodologia, se observa uma melhora considerável na reflexão que os professores realizam da aula do TP, utilizando de forma explícita e correta os componentes da adequação cognitiva (ver Figuras 59 e 60).

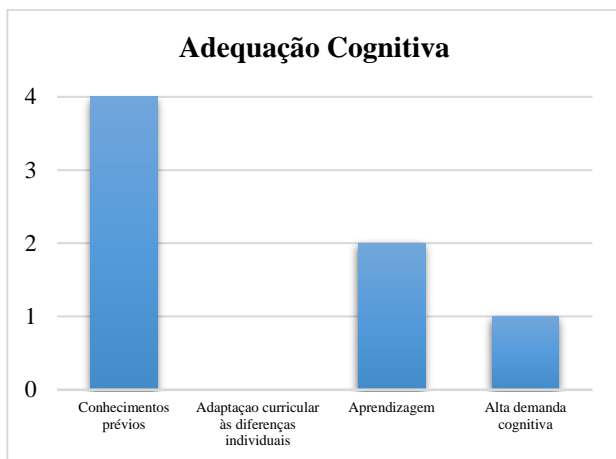


Figura 59. Nível de uso implícito do CAD Cognitivo (fase 1 do curso)
Fonte: elaboração própria.

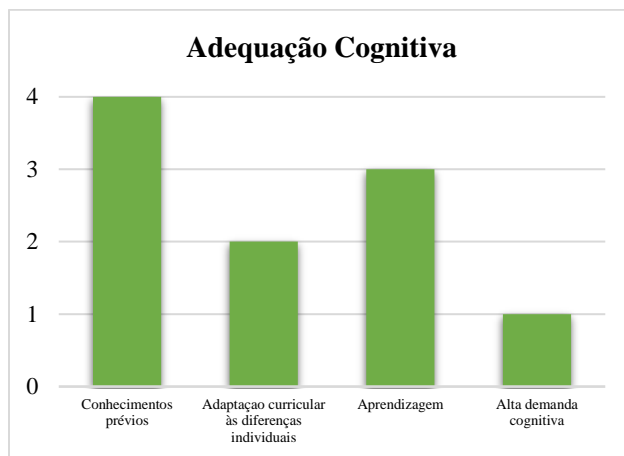


Figura 60. Nível de uso explícito e correto do CAD Cognitivo (fase 3 do curso)
Fonte: elaboração própria.

As evidências e as conclusões apresentadas na seção 4.4 mostram que, na fase 3 do curso, os participantes apresentam um nível de uso explícito de IC1 igual a 4 (se mantém idêntico ao da fase 1); IC2 igual a 2 (aumenta duas unidades em relação ao uso deste componente na fase 1 do curso); IC3 igual a 3 (aumenta uma unidade em relação à fase 1); IC4 igual a 1 (se mantém idêntico ao da fase 1 do curso).

Adequação de Interação

A professora que havia ficado responsável por fazer uma análise individual da aula com o CAD de interação foi P6. Nessa perspectiva, P6 apresentou sua análise a partir de cada um dos componentes do CAD de interação: *interação professor-alunos* (II1), *interação entre os alunos* (II2), *autonomia* (II3) e *avaliação formativa* (II4).

Aplicação da escala de valoração do componente III do Critério de Adequação de Interação

Na fase 2 do curso, no processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *interação professor-alunos* (II1), explicou-se, em primeiro lugar, que o professor, no papel de emissor, tem que ser minimamente claro, em segundo lugar, explicou-se que o professor deve aproveitar a interação para resolver as dificuldades dos alunos e, em terceiro lugar, que essa explicação não deve ocorrer de uma forma autoritária, nem repreensiva, e sim de forma respeitosa com os alunos. Explicou-se, também, que pode ser que o professor

seja respeitoso, mas pode ser que ele termine fazendo com que os alunos não prestem a atenção no que se está trabalhando. E por último, explicou-se que se deve incluir os alunos na dinâmica das aulas para não haver a exclusão.

No que se refere ao indicador "o professor faz uma apresentação adequada do tema (apresentação clara e bem organizada, enfatiza os conceitos chaves do tema, etc.)" do componente *interação professor-alunos* (III) do CAD de interação, em sua reflexão, apresentada na sessão 13 na fase 3 do curso, P6 comentou o que segue:

P6: Eu coloquei que sim, eu acredito que sim, porque P4 usou diversos recursos. Eu acho que o fato dela ter usado a história no início da aula fez com que os alunos se aproximassem um pouco mais do tema. E, aí, ela traz o vídeo falando da distância, que mostra o mapa. Eu achei bem interessante. Acho que isso ajuda bastante, fica clara a visualização. O vídeo sobre o Teorema ajuda muito a esclarecer as dúvidas que os alunos tinham. E todos os materiais impressos que P4 fez, que ela elaborou antes da aula faz com que os alunos consigam compreender bem. Consigam compreender esses aspectos que P4 estava apontando. Claro que depois da apresentação de PI [refere-se a análise da aula feita por especialistas] eu já comecei a repensar algumas coisas, mas tudo bem.

Nos comentários realizados, nota-se que P6 faz uma reflexão inicial muito positiva e relativamente superficial (por exemplo, considera que P4 fez uma apresentação clara dos conceitos-chave do tema e não comenta, por exemplo, a confusão que existe na aula implementada entre o TP e o seu recíproco), embora mais tarde ele mesmo reconheça que, depois de PI ter feito uma reflexão mais detalhada sobre o tema, talvez não fizesse uma avaliação tão positiva.

Já em relação ao indicador "os conflitos de significado dos alunos são reconhecidos e resolvidos (se interpretam corretamente os silêncios dos alunos, suas expressões faciais, suas perguntas, se faz um jogo de perguntas e respostas adequado, etc.)" do componente *interação professor-alunos* (III), em sua análise, P6 observou o que segue:

P6: As expressões faciais não tinham como P4 interpretar e o silêncio, muitas vezes, também ficava difícil. Porque, aí, a gente precisa que os alunos interajam e nem sempre eles estão dispostos a fazer isso. Por isso, que eu coloquei que, na medida do possível, eu acredito que P4, muitas vezes, ela parou a aula e esperava... parava e esperava para que os alunos pudessem responder, porque tinha o *delay*, então, ela parava, esperava. Constantemente, ela ficava perguntando, fazia perguntas e, novamente, esperava. Bom, aí, algumas situações que me chamaram a atenção, foi quando ela foi

falar a definição do triângulo retângulo. O professor fala que é um triângulo... ela pergunta para os alunos que triângulo é aquele, aí o professor fala "é um triângulo retângulo", mas ela percebe que nenhum dos alunos responde, só o professor responde. Por isso que ela retoma todo o conceito de triângulo retângulo para os alunos e eu achei isso bem interessante. Ali, tem, também, uma outra situação que a aluna Adriane não compreende o que é um retângulo, aí, P4 para - ela já estava seguindo a aula - ela volta e retoma, tira a dúvida da aluna. E lá depois, no segundo vídeo, ela faz uma pausa para falar sobre as questões que eu achei bem interessante, sobre as questões que surgiram no *chat*. E, outra coisa que eu achei bem interessante foi que constantemente P4 estava de olho nos comentários dos alunos [no *chat*]. Então, por mais que em algum momento tenha passado despercebido, ela ficava constantemente tentando interpretar cada interação que acontecia no *chat*, porque era o único meio que ela poderia ver isso.

A reflexão de P6 sobre este indicador, além de fazer uma avaliação muito positiva da gestão da interação de P4, é bastante detalhada, mas não entra em considerações sobre a mudança que representa a gestão da interação em uma sala de aula virtual em relação à gestão da interação em uma aula presencial.

Depois, P6 disse que, no que diz respeito ao indicador "se busca chegar a consensos com base no melhor argumento" do componente *interação professor-alunos* (III), em sua análise da aula identificou o que segue:

P6: Aqui eu destaco a atividade sobre a hipotenusa. Logo depois que P4 fala sobre o triângulo retângulo, ela faz atividades sobre a hipotenusa. E, aí, eu acho que, talvez, na própria pergunta de P4 perguntava já dando a resposta. Por exemplo, "qual é o maior lado?", "o maior lado é a hipotenusa.". Ela ficava constantemente falando isso, então, eu acho que isso não precisava ter acontecido. Ela poderia simplesmente ter perguntado e deixar com que os alunos chegassem nessa conclusão. Não sei se vocês lembram, mas eram atividades em que somente tinham os valores dos lados do triângulo retângulo. Outra coisa, aqui eu destaco uma situação em que aparece a relação da área dos quadrados. A Kauani fala: "porque vai ficar dois vinte e cinco". E, aí, P4 fala assim: "dois vinte cinco?". E deixa no ar isso aí. Aí um outro colega, depois, ele responde que: "a Kauani está falando de dois vinte e cinco, porque a soma do nove com o dezesseis também vai dar vinte e cinco". E, aí, ela retoma porque acredita que a Kauani estava correta e que, sim, o argumento, então, dela... Ela deixa no ar, mas espera outros alunos argumentarem. Eu achei isso interessante. E outro momento, que eu achei interessante, é que ela utiliza o erro como um recurso. Ela substitui por quatro... ela está fazendo uma atividade para verificar qual que tem que ser o valor da hipotenusa quando a soma dos catetos dá sessenta e quatro - eu acho que isso - e, aí, ela verifica porque é uma aluna fala que deveria ser quatro, aí ela fala: "vamos substituir o quatro e verificar se o quatro ao

quadrado vai dar sessenta e quatro". E, aí, ela de novo, espera que os alunos cheguem, argumentem em relação a isso.

A reflexão de P6 em relação a este indicador é um pouco mais crítica com a gestão de P4, visto que, na primeira parte de seu comentário, ele destaca que P4 usa um estilo de interação do tipo pergunta-resposta, ou seja, a professora pergunta e ela mesma responde e considera que talvez a professora pudesse ter usado um padrão do tipo pergunta-responde-avalia, ou seja, a professora pergunta, deixa o aluno responder e então avalia a resposta do aluno. Na segunda parte, ele faz avaliações positivas sobre a gestão do P4. Por outro lado, deve-se notar que P6 não comenta que, talvez, este indicador não seja muito aplicável à classe visto que, na aula implementada, não foi dada ênfase ao processo de argumentação, mesmo sabendo que o TP é um dos poucos conteúdos que permitem promover a argumentação na Educação Básica.

Por fim, em relação ao indicador "se facilita a inclusão dos alunos durante a dinâmica da sala de aula ao invés da exclusão" do componente *interação professor-alunos (III)*, P6 comentou o que segue:

P6: Eu acredito, apesar de não estarmos numa sala de aula, que ela facilitou sim, porque constantemente ela estava fazendo perguntas, ela não corria, ela falava pausadamente, quando ela perguntava alguma coisa. Na maioria das vezes, com exceção da atividade essa em que aparece da hipotenusa, que eu destaquei anteriormente, ela esperava os alunos responderem e outra coisa que eu achei muito interessante, eu não destaquei um momento específico, mas em vários momentos ela elogia a participação deles, o que é muito bom. E, também, lá no início da aula, ela espera e vai dando "oi" para todo mundo que vai entrando na live. Então, sim, eu acho que isso facilita a inclusão, porque os alunos se sentem importantes. E, também, a valorização da resposta errada. Por mais que a menina - não lembro se foi uma menina - não tenha acertado, ela valorizou e fez com que os alunos chegassem à conclusão de que não estava correto.

A reflexão de P6 sobre este indicador, além de fazer uma avaliação muito positiva da gestão da interação do P4, é muito detalhada.

A análise realizada na fase 1 do curso revelou muitas evidências (trechos do discurso que apresentam muitos detalhes, profundidade e coerência) que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente *interação professor-aluno (III)* do CAD de interação e, por essa razão, foi atribuído um nível 4 a esse componente. Na análise da reflexão dos professores na terceira fase do curso, com os CAD explícitos, ocorreu o mesmo

e, por isso, atribui-se um nível 4 de uso explícito e correto do componente II1 do CAD de interação. Deve-se notar especialmente que, embora na reflexão inicial de P6 a confusão que existe na aula implementada entre o TP e seu recíproco não seja comentada, este foi um dos aspectos do CAD de interação que os professores se propuseram a melhorar no o redesenho da aula.

Aplicação da escala de valoração do componente II2 do Critério de Adequação de Interação

Na fase 2 do curso, quando se ensinou o componente *interação entre alunos* (II2) foi enfatizado que o professor deve estimular a participação e a colaboração entre os alunos e sugerir atividades que estimulem e interação entre eles. Além disso, comentou-se que se deve favorecer a que os alunos incluam uns aos outros e não se excluam.

No que concerne ao indicador "o diálogo e a comunicação entre os estudantes é favorecido", do componente *interação entre os alunos* (II2), em sua análise da aula, apresentada na fase 3 do curso, P6 apresentou o que segue:

P6: Eu acho que, pelo fato de a aula ter sido online, esse critério se torna mais difícil de acontecer. Mas, aconteceu. Teve um momento [...] teve mais de um momento que eles interagiram entre eles. Só que a interação no outro momento que eu peguei não era em relação a aula e, sim, deles irem percebendo que eles se reconhecem lá, dando um "oi, ah o fulano tá aqui". E a outra é em relação à questão que eu já apresentei antes: "porque vai ficar dois vinte cinco?". Aí um menino responde para P4 o que a menina estava pensando.

A reflexão de P6 sobre este indicador, além de fazer uma avaliação muito positiva da gestão da interação de P4, é bastante detalhada e, ao contrário do que aconteceu ao refletir sobre a interação professor-aluno, agora ele comenta a mudança representada pelo gerenciamento da interação entre os alunos em uma sala de aula virtual em relação ao gerenciamento dessa interação em uma sala de aula presencial.

Já em relação ao indicador "a inclusão em grupo, evitando a exclusão, é favorecida" do componente *interação entre os alunos* (II2), P6 comentou o que segue:

P6: Eu acredito que, de forma geral, o ambiente se tornou inclusivo, principalmente pela preocupação de P4 em apresentar cada detalhe minuciosamente. Porém, novamente, como a aula foi uma aula online, isso se torna muito difícil, mais difícil ainda.

Nesta ocasião, P6 volta a fazer uma análise detalhada e, também, valoriza positivamente o gerenciamento da interação de P4.

Na reflexão dos professores, com base na análise apresentada por P6, observa-se que há trechos do discurso que mostram o uso explícito e correto dos dois indicadores do componente *interação entre os alunos* (II2) do CAD de interação. Nesse sentido, a avaliação, segundo a escala do quadro 5, é pelo menos 3. Além disso, fica evidente que os professores participantes entendem e utilizam os dois indicadores do componente II2 e, também, sabem identificar as interações ocorridas na aula implementada analisada e como melhor promovê-las em um redesenho. Como resultado de uma nova triangulação entre o que acaba de ser comentado e a avaliação inicialmente feita conclui-se que a avaliação da reflexão do grupo de professores no componente II2 é 4.

Por outro lado, a análise da reflexão dos professores, na primeira fase do curso, revelou que, ao longo de toda a discussão, não se identificou nenhum comentário, que se referia a considerar ou promover a interação entre os discentes e, por isso, se concedeu um nível 0 para o componente II2 do CAD de interação naquele momento. Já na análise da reflexão realizada na terceira fase do curso, considera-se que houve uma melhora significativa em relação ao componente II2.

Aplicação da escala de valoração do componente II3 do Critério de Adequação de Interação

Durante a fase 2 do curso, em relação ao componente *autonomia* (II3) do CAD de interação, explicou-se que este componente tem a ver com promover a autonomia dos estudantes, promover atividades de exploração, formulação e validação que permitam que os alunos assumam a responsabilidade pelo estudo.

Com relação ao indicador "momentos nos quais os estudantes assumem a responsabilidade do estudo (exploração, formulação e validação) são contemplados" do componente *autonomia* (II3), na fase 3 do curso, P6 apontou o que segue:

P6: Lá no início, quando P4 apresenta o triângulo retângulo, ela logo destaca que a hipotenusa é o maior lado. Nesse momento, como ela pediu para os alunos construírem os triângulos e os quadrados, eu acho que ela poderia ter deixado isso para os alunos verificarem. Ela não precisaria ter falado sobre isso, para eles chegarem a conclusão e, depois... porque depois lá no exercício, ela ficou repetindo constantemente - acho que eram uns três exercícios sobre a medida dos lados dos

catetos - ela ficou repetindo, constantemente, na pergunta que a hipotenusa é o maior lado, enfim. Eu acho que ela poderia ter deixado isso para eles verificarem, através das construções deles. E, eu acho que algo que favoreceu a autonomia deles foi quando eles tiveram que construir os quadrados na malha e, no momento de montar, de encaixar os quadrados, ao triângulo retângulo.

A partir do que comentou P6 em relação a este componente, pode-se afirmar que a professora fez uma crítica de forma a uma ação que poderia ter promovido mais autonomia aos estudantes durante a aula. Além disso, destacou que os alunos tiveram que ter autonomia para organizar o material manipulativo. Embora P6 relacione a autonomia, sobretudo, à atividade de tipo exploratória realizada pelos alunos, não destaca que o TP permite a promoção da autonomia dos alunos ao permitir, para além da exploração e formulação de conjecturas, a validação de conjecturas (o que não acontece na classe implementada).

A análise da reflexão dos professores na fase 1 do curso revelou, de forma esporádica, que eles refletiram que planejaram uma aula que "contempla momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade do estudo". Por essa razão, foi indicado um nível 1 para o componente II3 do CAD de interação. Já na terceira fase do curso, considera-se que houve uma melhora na reflexão dos professores em relação ao componente II3, e, nessa perspectiva, atribui-se um nível 3 para o uso explícito e correto do componente II3 do CAD de interação.

Aplicação da escala de valoração do componente II4 do Critério de Adequação de Interação

Em relação ao componente *avaliação formativa* (II4), na fase 2 do curso, explicou-se aos professores participantes que este componente tem a ver com a observação do progresso cognitivo dos estudantes. Nesse sentido, enfatizou-se que, se fazemos uma atividade rica em processos podemos observar sistematicamente a evolução e aprendizagem dos estudantes. Nesse caso, não é necessário fazer apenas uma avaliação ao final da unidade didática desenvolvida, e sim uma avaliação sistemática do progresso dos estudantes ao largo do processo de instrução.

Na fase 3 do curso, sobre o indicador "observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos" do componente *avaliação formativa* (II4), P6 disse o seguinte:

P6: Claro que eu acho que isso, também, aconteceu na medida em que foi possível. Um exemplo disso, é quando ela solicita para que os alunos enviem as imagens das suas construções na malha quadriculada, depois deles terem montado. E, de novo, no momento que ela pausa para falar sobre

as questões que surgiram no *chat*. E outra coisa que eu esqueci de botar aqui, que foi o questionário final. Que é o que ela poderia observar também em relação ao progresso cognitivo dos alunos.

No que se refere ao componente *avaliação formativa* (II4), P6 destacou que considerava que existe um processo interativo que permitiu que existisse avaliação formativa (entrega de fotos com material produzido pelos alunos, atividades e perguntas para serem respondidas no *chat* do *YouTube*, formulário final). Além disso, no redesenho da aula os professores estabelecem critérios de avaliação para cada uma das atividades propostas. Desta forma, atribui-se um nível 4 para o uso explícito e correto do componente II4 do CAD de interação.

Na reflexão dos professores na primeira fase do curso, encontram-se trechos do discurso que evidenciam uso implícito de algum indicador do II4. Por essa razão, naquele momento, foi atribuído um nível 2 para este componente.

Conclusão geral sobre a melhora da reflexão dos professores com relação ao Critério de Adequação de Interação

As evidências apresentadas mostram que, na fase 3 do curso, os participantes apresentam um nível de uso explícito de II1 igual a 4 (se mantém idêntico ao da fase 1); II2 igual a 4 (aumenta quatro unidades em relação ao uso deste componente na fase 1 do curso); II3 igual a 3 (aumenta duas unidades em relação à fase 1); II4 igual a 4 (aumenta duas unidades em relação à fase 1). (Figuras 61 e 62).

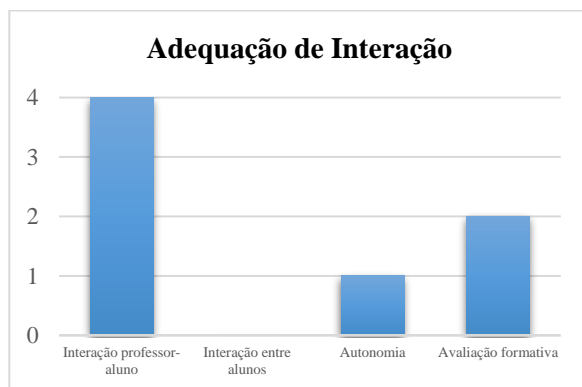


Figura 61. Nível de uso implícito do CAD de Interação (fase 1 do curso)
Fonte: elaboração própria.

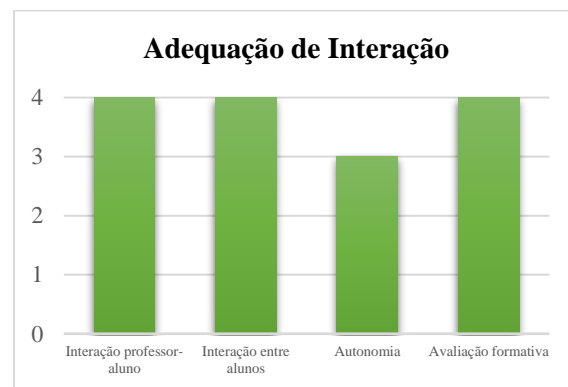


Figura 62. Nível de uso explícito e correto do CAD de Interação (fase 3 do curso)
Fonte: elaboração própria.

Adequação de Meios

A análise individual da aula do TP no Ensino Fundamental, pela ótica do CAD de meios foi realizada pela professora P3, que, na décima segunda sessão do curso, apresentou o resultado da sua reflexão aos demais professores pelos componentes: *recursos materiais* (IM1), *número de alunos, horário e condições da aula* (IM2) e *tempo* (IM3).

Aplicação da escala de valoração do componente IM1 do Critério de Adequação de Meios

Na segunda fase do curso, foi explicado aos participantes que o componente *recursos materiais* (IM1) do CAD de meios, tem a ver com os recursos utilizados que auxiliam a ensinar uma matemática mais adequada e, também, a proporcionar a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, destacou-se também que, quando falamos especificamente de materiais e não apenas da ideia geral recursos, podemos destacar dois tipos de materiais no processo de ensino da matemática: 1) os materiais manipulativos e 2) os recursos tecnológicos, particularmente as TIC que consistem em Tecnologias da Informação e Comunicação, assim como quaisquer formas de transmissão de informações e mediação entre os processos informacionais e comunicativos. Por fim, explicou-se para que servem os materiais: para criar problemas; para fazer argumentações; para fazer representações; como modelo que concreta definições, propriedades, etc.

No que concerne aos indicadores "uso de materiais manipulativos e informáticos que permitem introduzir boas situações, linguagens, procedimentos, argumentações adaptadas ao significado pretendido" e "as definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações, modelos concretos e visualizações" do componente *recursos materiais* (IM1), na fase 3 do curso, P3 comentou o que segue:

P3: Por ser uma aula "live" no YouTube, teve o uso direto da informática através do computador e internet como recursos tecnológicos. Uso de vídeos explicativos e complementares foram inseridos na aula e podem ser vistos em vários momentos. Então, eu separei o tempo de cada momento. O tempo de cada fala de P4 e as telas. Bem no comecinho da aula, aos dois minutos e cinquenta, P4 falou "vou colocar aqui então o "videozinho" para vocês", que foi o primeiro vídeo que mostra a origem do Pitágoras, apresentando a história e o contexto para apresentar o Teorema. Eu botei aqui

algumas telas só para representar esses vídeos. Depois outro, no tempo 50:17 do vídeo da aula, ela mostrou outro vídeo e falou assim: "vou mostrar um vídeo para vocês sobre tudo isso que eu estava falando". Que era sobre o conceito do Teorema de Pitágoras depois de toda a demonstração de P4, para finalizar a parte do Teorema.

P3: Depois, também, a gente teve o uso de fotos para a verificação das atividades feitas pelos alunos. No tempo 30:36, P4 disse: "vocês vão tirar uma foto e me enviar no WhatsApp", que era para a verificação das atividades. Também vi o uso de material concreto, que já estava combinado com os alunos, que era parte do papel quadriculado, que eles confeccionaram antes da aula. Também o uso de régua e tesoura na confecção dos triângulos retângulos, a partir do papel quadriculado. Daí tem a fala de P4 aos 14:10 [tempo do vídeo aula] que P4 disse: "traçar uma linha diagonal e recortar". Então ali foi a parte que eu percebi, que eu analisei a parte dos "recursos".

Uma vez que P3 terminou sua exposição, PI destacou que P3, em sua análise, apresentou o que identificou como uso de cada um dos componentes do CAD de meios, no entanto, salientou que seria importante que todo o grupo fizesse uma avaliação, classificando como adequado, ou não, cada um dos componentes destacados. A seguir, destacam-se os comentários dos professores com relação ao componente recursos materiais do CAD de meios

P3: Os vídeos eu acho que ajudaram bastante os alunos. A questão, também, de já ter preparado antes o material, isso ajudou muito a não precisar ficar na aula montando aquele papel quadriculado. A questão das fotos também eu achei bem legal P4 pedir para eles mandarem as fotos do que eles estavam fazendo para poder acompanhar. Porque, às vezes, a gente acha que alguma coisa é simples para eles fazerem, mas às vezes eles não entendem. Tem até um pedacinho ali da aula que tem um aluno que não consegue entender o que tem que fazer quando P4 fala que tem que montar um quebra-cabeça. Então, eu achei isso bem interessante. Acho que a parte de recursos poderia manter para a próxima aula nessa linha.

P6: Eu concordo muito com o que a colega falou. Eu estava assistindo a aula de novo e eu parei para pensar: nossa! Eu achei muito incrível a forma como P4 se organizou. E como os materiais de P4 já estavam todos prontos e isso facilitou muito a aula e o entendimento dos alunos. Eu acho que tem que manter sim. Talvez o que eu não manteria ou fizesse diferente, e aí eu não sei como, foi porque teve problema lá com os alunos que desenharam os quadradinhos errados. E aí acabou gerando confusão. Então eu não sei como e aí eu jogo para os meus colegas, talvez melhorar este aspecto para que não acontecesse, que esse problema não se repetisse novamente. O problema é que não dá para solicitar para eles que eles usem a malha quadriculada, porque a gente não tem certeza se eles têm esse material em casa. Então, eu não sei, assim, eu acho que é só isso. De resto está tudo ótimo.

P4: Eu, pensando assim se a gente fosse fazer outra aula hoje eu acho que - tô viajando aqui com a tua pergunta - acho que eu iria pedir para a minha escola imprimir [o material], porque a minha escola está entregando o material impresso para os alunos. Eu iria pedir para cada aluno ir lá buscar o seu. Não sei se [...] porque aí resolveria o problema do desenho deles. Porque aí a escola imprime uma folha e cada um vai lá e busca a sua folha.

P6: Claro que a construção, pensando que a construção também é um processo rico, mas, para essa aula, ela acabou gerando confusão. Uma confusão que talvez pudesse ter sido evitada. Eu acho que é somente esse ponto.

P4: Concordo plenamente. A construção com certeza é um processo muito rico, mas a distância gera muitas ambiguidades e eles talvez não compreendam exatamente o que era para ser feito. A não ser que talvez fizéssemos um vídeo explicando passo a passo, não sei.

P1: Acho que ela usou adequadamente. Eu não tiraria nada, apenas colocaria algumas referências bibliográficas ou os sites de onde a gente tirou [a informação] para eles terem acesso. Eu acho que se eles quisessem, por exemplo, assistir de novo, estaria no *YouTube* ali, mas poderiam assistir algumas coisas a mais da bibliografia de onde a gente tirou. Eu acho que isso, mas me chamou a atenção na hora de eu rever.

Na reflexão dos professores, observa-se que há trechos do discurso que mostram o uso explícito e correto dos dois indicadores do componente *recursos materiais* (IM1) do CAD de meios. Nesse sentido, a avaliação, segundo a escala do quadro 5, é pelo menos 3.

Para finalmente decidir que nível atinge a reflexão dos professores na terceira fase do curso, as avaliações feitas separadamente pela doutoranda e pelos dois orientadores de tese são trianguladas e discutidas. Esta triangulação também leva em consideração o detalhe, a profundidade e a coerência das reflexões dos participantes. Desta forma, fica evidente que os professores participantes entendem e utilizam os dois indicadores do componente IM1 e, também, sabem identificar os recursos materiais utilizados na aula implementada analisada e quais devem ser melhorados em um redesenho. Além disso, no redesenho da aula explicam qual material e qual recurso tecnológico devem ser usados nos diferentes momentos da aula e nas diferentes atividades (ver anexo 2). Também realizam comentários no questionário final de avaliação do curso que os recursos materiais são de suma importância para que não ocorram erros e confusões no entendimento de conceitos. Um participante, ao responder qual critério considerava mais importante para o ensino de um conceito responde:

P6: de Meios, pois os recursos corretos são fundamentais para que não ocorram confusões.

Como resultado de uma nova triangulação entre o que acaba de ser comentado e a avaliação inicialmente feita, conclui-se que a avaliação da reflexão do grupo de professores no componente IM1 é 4.

A análise da primeira fase do curso revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito da maioria dos indicadores do componente IM1 do CAD de meios. Contudo, naquele momento, os professores participantes não fizeram uma discussão ampla e aprofundada de quais recursos materiais deveriam ser trabalhados e como isso seria, de fato, realizado na aula, por esse motivo, se atribuiu um nível 3 a este componente naquele momento.

Por sua vez, na reflexão com os CAD, na terceira fase do curso, os professores melhoraram esse aspecto, nessa perspectiva, atribui-se um nível 4 para o uso explícito e correto do componente IM1 do CAD de meios.

Aplicação da escala de valoração do componente IM2 do Critério de Adequação de Meios

Durante a fase 2 do curso, quando tratou-se do componente *número de alunos, horário e condições da aula* (IM2) do CAD de meios, explicou-se que este componente refere-se a se o número e a distribuição de estudantes possibilitam a realização do ensino pretendido; se o horário da aula é adequado, dado que o horário afeta a conduta dos alunos; e se as condições da sala de aula (ar condicionado, quadro negro, projetor, internet, ruídos externos, a sala de aula, a distribuição dos alunos, etc.) são adequadas para o desenvolvimento do processo instrucional pretendido.

Com relação aos indicadores "o número e a distribuição de alunos permite realizar a prática do ensino pretendida" e "o horário do curso é apropriado" do componente *número de alunos, horário e condições da aula* (IM2) do CAD de meios, em sua análise, apresentada na fase 3 do curso, P3 identificou os seguintes aspectos:

P3: Eu fiz uma descrição que, por ser uma aula online, a distribuição dos alunos ficou aparente através do *chat*, pela interação e o número, em torno de 10 alunos, foi suficiente para avaliar a compreensão e acompanhar cada etapa. Já as condições de internet estavam de acordo com o esperado, sem travamentos e conexão estável. O horário, como já questionado anteriormente com os alunos, foi adequado para a participação do maior número possível de alunos. A gente também já tinha combinado com eles, enfim, acertado com eles o melhor horário.

P3: Depois, na interação dos alunos através do *chat*, no tempo 14:30 [do vídeo gravação da aula], P4 falou "que figura vai gerar? Conta para mim aí no *chat*". Então, P4 ficava aguardando no *chat* a resposta deles. Depois teve também, vários momentos, mas outro que eu destaquei foi aos 25:42h, que P4 estava demonstrando, já tinha demonstrado o Teorema, e estava aplicando o que eles tinham compreendido, ela falou assim: "então o ângulo de noventa graus está aqui", ali onde ela mostrou, "muito bom, Bruno". Dessa interação de P4 que o Bruno já tinha respondido uma questão que ela tinha dado antes.

A seguir, na continuação do curso, identificou-se os seguintes comentários dos demais professores com relação ao componente IM2 do CAD de meios:

P3: Eu pude avaliar ali nas evidências, que nem a gente comentou, P4 teve bastante alunos participando. Até para a época [refere-se a pandemia], para o modelo de aula, teve um bom número de alunos e eles conseguiram participar bem. Também, o horário, que eles já tinham combinado antes com P4 - acho que P4 fez essa pesquisa com os alunos para ver o que ficava melhor - então acho que isso ajudou bastante para ter o maior número possível de alunos. E a questão das condições, enfim, por ser online, a questão da internet também. Mas, pelo que eu pude observar, foi bem, assim, não teve problemas de cair, enfim. Mas, eu acho que foi bem, foi bem adequado. Um horário no meio da tarde, pessoal já tá bem acordado, já tá conseguindo eu pensar bem participar bem, então eu acho que foi bem interessante.

P4: Um comentário também, só para fazer uma comparação, na semana retrasada a gente fez uma chamada pelo *Google Meet* dos professores com os alunos dos nonos anos. Então, foram duas turmas e tinham mais professores do que alunos. Porque eles não aderiram, não participaram, não acessaram. Então, de certa maneira, assim, eu estava pensando sobre isso, se hoje eu faria no *YouTube* ou se faria no *Meet*. Se fosse hoje, né? Porque naquela época a quando foi feita, foi a primeira coisa que a escola chamou os alunos para participar. A escola, até então, estava fechada, em quarentena e, no máximo, "ah vai ter um site". Pronto, era o que havia. Então, foi super arriscado, porque a gente não sabia se iria ter ou não iria ter. E o *Meet* que a gente está tentando chamar os alunos nessas últimas duas semanas não tá tendo retorno. Então, eu fico pensando, assim, o que será que aconteceu ali. Será que eu ameacei muito os alunos que eles tinham que acessar de fato? O que aconteceu? Apesar de nem todos terem o retorno ali no *chat*, pois tinham vários que estavam assistindo, mas não estavam respondendo. E, outra coisa que era ruim, no *YouTube* tem um *delay* muito grande. Mas, por outro lado, era uma ferramenta que eles já conheciam.

P2: Eu acho que a questão de eles não precisarem falar, ajudou muito. Eles precisavam escrever, mas eles não precisavam falar. E daí tem todo esse estigma: "eu estou longe dos meus colegas, mas se eu falar alguma coisa, vai que eles tirem um print da tela e me zoem depois", "vai que eu faço

uma careta e eles...". Então, tem todas essas questões que vão ser levadas em consideração. Eu acho que sim, o YouTube foi uma ótima ferramenta para a gente usar.

P7: Eu também tenho um comentário. Eu fiquei bem surpresa, P4, porque eu achei que iria ter menos participação na tua aula do que na de P5. E foi o contrário, na minha percepção. Então, eu fiquei, assim, foi uma surpresa positiva ver que eles estavam ali mais soltos, enfim, até do que numa aula que eles já estavam mais acostumados, por exemplo, que já tá acontecendo há mais tempo. Então eu achei bem acertada a plataforma, assim. Deu certo.

P7: Para o contexto que a gente está, eu acho que valeu a tentativa.

P4: E para o contexto que eles vivem, né? Porque é um bairro da periferia.

Na análise da reflexão dos professores na primeira fase do curso, foi indicado um nível 2 de uso implícito dos indicadores do componente IM2 do CAD de meios. Por outro lado, na análise da reflexão na terceira fase do curso identificaram-se comentários muito detalhados e coerentes do discurso que mostram o uso explícito e correto da maioria dos indicadores do componente IM2 do CAD de meios. Por essa razão, atribui-se um nível 4 de uso desse componente.

Aplicação da escala de valoração do componente IM3 do Critério de Adequação de Meios

Durante a fase 2 do curso, em relação ao componente *tempo* (IM3) do CAD de meios, explicou-se que o problema não é tanto a falta de tempo, mas como usamos o tempo que temos em aula. E que, nesse sentido, deveríamos usar o tempo que temos para as coisas importantes. Explicou-se, também, que, para o caso particular do TP, seria importante pensar que aspectos, particularmente, dever-se-ia dedicar tempo. Nesse sentido, comentou-se que, já que o TP é um dos poucos Teoremas que poderia ser demonstrado na Educação Básica, seria importante fazer um esforço para demonstrá-lo.

No que tange os indicadores "adequação aos significados pretendidos", "investimento de tempo nos conteúdos mais importantes ou centrais ao tema proposto" e "investimento de tempo nos conteúdos de maior dificuldade" do componente *tempo* (IM3) do CAD de meios, na fase 3 do curso, P3 comentou:

P3: Eu vi que o tempo foi muito bem aproveitado para a contextualização histórica. Também para a exploração dos conhecimentos prévios para introduzir o tempo da aula, porque P4 usou bastante tempo para isso. No tempo 8:30, P4 diz: "quero relembrar o conceito de área", que é quando P4 estava mostrando, no início da aula, o tamanho dos quadradinhos, enfim, como ela ia conseguir

chegar no conceito para eles. Depois, aos 17:04, P4 diz: "ângulo reto a gente estudou no ano passado um pouquinho sobre, não sei se vocês lembram". E aí ela começa a mostrar ali e dá as definições do ângulo reto, como está na figura que ela chegou a marcar no papel quadriculado dela. Depois, outra evidência foi na introdução do conteúdo que ela teve, fez a verificação do entendimento deles por telas, no tempo 26:10, ela disse assim: "e nesse outro triângulo? Quem é a hipotenusa? Estou esperando aqui vocês responderem no *chat*". Aí aqui na tela também apresenta o *chat* do lado do pessoal (os alunos) respondendo ali e acompanhando a aula e entendendo, enfim, quem era a hipotenusa e esse conceito da questão dos lados [do triângulo retângulo]. Depois, aí também outra evidência que eu vi que foi proposto dentro do formulário para a verificação do entendimento dos alunos nos pós aula. Ela não usou o tempo da aula para eles preencherem o formulário para eles depois fazerem com calma e mandarem para ela. Aí ela disse: "e para testar o conhecimento de vocês na aula de hoje eu vou enviar um formulário para vocês, são algumas perguntinhas e me devolvam.". Para ela poder verificar esse entendimento deles.

Com relação ao componente IM3 do CAD de meios, os demais professores participantes comentaram o que segue:

P8: Eu achei, ontem e hoje, revendo de novo, assim, a aula, eu achei que ficou muita coisa. Até para escrever a nosso critério, ficou muitos estímulos. É bom, mas ao mesmo tempo, também, eu acho que poderia pensar numa aula, assim, mais focada, não ser tão ampla, porque eu acho que ficou muito longa. Até para analisar foi difícil assim. Então eu fiquei pensando que talvez refinar essa proposta dos objetivos da aula, porque eu achei bastante coisa, mesmo tendo recursos bem adequados eu não sei assim no final o que ficou para os alunos assim.

P1: Mas tu não achaste que esses recursos que ela utilizou facilitou o entendimento do conceito inicial?

P8: A primeira parte do vídeo eu achei que sim, que o material está descrevendo bem tudo aquilo que P4 fez, eu que está ok, só que eu não sei, assim, olhando tudo parece que ficou muita coisa, sabe? Depois de toda aquela dificuldade com a parte de equações e tal, eu não sei, eu achei que ficou confuso para eles. Eu achei o material bom, mas eu não sei se não ficou muita coisa, poderia ter sido três aulas isso, sabe?

P2: Na primeira análise, a gente já tinha comentado que talvez tivesse ficado muita coisa. Até porque P4 começou a correr no final [da aula] para não ficar tão extenso, né?

P6: Eu acho que eu já tinha comentado isso na outra vez, eu acho que a parte ali onde ela começa a falar dos números irracionais, eu acho que essa parte não deveria... na minha opinião, eu acho que essa parte tem que cair fora, porque se não é mais um conceito para os alunos...

P4: Deixaríamos para outra aula, não é P6?

P6: Isso!

P4: Para outro momento. Concordo!

P6: Outro momento, não ali.

P5: Assim como a gente discutiu da outra vez, a aula ficou boa, P4 usou todos os recursos que tinha "na mão" e usou muito bem usados. Só que, como era só uma aula, eu acho que P4 colocou muito conteúdo. Então, se fosse uma sequência didática, se fosse mais devagar... até dá para ver no vídeo [da aula] nos comentários dos meninos [alunos] que no início eles participam muito, o tempo inteiro vão comentando, mas no final eles mesmos vão ficando cansados e a participação diminui. Então, se fosse uma sequência didática de duas ou três aulas, sei lá, o tempo que precisar, porque às vezes não depende somente da gente, depende deles também, ficaria muito legal. Os números irracionais eu deixaria se fosse uma sequência didática. Uma aula só eu tiraria um monte de coisas.

P2: Eu concordo com a Graciela, ela conseguiu organizar os meus pensamentos, no que eu estava pensando. Concordo com ela.

P7: Eu acho bem importante essa parte de contextualização histórica. Eu acho que é uma forma de conquistar os alunos, assim, tu situar um pouquinho o processo, enfim. Só talvez, como eu lembro que vocês até comentaram que acabou que P4 acho que fez sozinha essa parte, não é? Talvez reescrever esse momento da parte histórica para ficar um pouco mais enxuto, talvez ajude a aproveitar melhor o tempo. Eu acho importante manter, mas só talvez reescrever o pensar talvez uma linha do tempo ou alguma coisa mais esquemática, assim, porque às vezes na oralidade a gente se perde um pouco. Eu pelo menos, porque falo muito.

PI: Tu achas que o tempo que foi colocado, então, para a contextualização histórica não foi adequado? Foi muito grande? Deveria ser menor?

P8: É, não sei se menor, mas talvez mais objetivo ou até refletir, às vezes a gente quer enfim... o contexto histórico às vezes não nos ajuda a entender, então será que precisa perder tanto tempo com isso? Não sei. Pensar por que a gente vai falar da história do Teorema ou da história do Pitágoras, enfim. [...] Eu acho importante eu só estou dizendo é que não é uma contagem de história então talvez se a gente souber melhor o que a gente quer contar disso, de forma mais objetiva, talvez fique mais interessante para o tempo, não é? Pensando no tempo.

P2: Eu acho que é uma contextualização e isso eu acho extremamente interessante, sabe? Porque tem alunos que realmente precisam dessa parte.

P5: E outra coisa. Eu acho que foi muito bom o vídeo, foi muito bom toda a história que ela contou foi atraente para os alunos, eu acho, no nível da linguagem deles, só que eu acho que faltou uma reflexão em cima disso. Porque se não fica só como "enchendo linguiça", entendeu? E não estou falando que P4 fez isso, não me interprete mal, mas faltou uma reflexão em cima dessa história que ela contou, entendeu? Mas, não tiraria nada. Claro que, de repente, organizar, escrever as coisas, mas ficou legal.

P1: Eu acho que só a fala de P4 podia ser um pouco mais objetiva.

P8: Para mim pareceu duas coisas diferentes, tá? Eu entendi que P6 tinha falado da parte dos números irracionais do final, de ter um... enfim, que quando P4 constrói um triângulo com os catetos unitários, que P4 chega na raiz de dois e comenta sobre os números irracionais, para mim, tinha sido essa parte que P6 tinha falado e P7 falou do vídeo. Não sei se eu entendi errado ou se P7 estava falando.

P6: Sim, eu falei dessa parte, mas P8 acredita, também, que se deva utilizar o tempo da parte histórica.

P8: É só porque eu tinha pensado na importância, assim, de se trabalhar aquela parte dos números irracionais e para que eles entendam também que nem todos os triângulos vão resultar em números naturais, que eles entendam que algumas vezes vai, enfim, vai ter uma medida irracional, mas que não precisa ser tão aprofundado, assim. A gente pode manter, até para, enfim [...] mas, não se aprofundar tanto na especificidade dos números irracionais e sim nas medidas e no cálculo que o Teorema pede.

P4: Mas, tu achas que precisa ser nesta aula?

P6: É, essa é a questão.

P8: Pois é, mas aí a gente vai fazer a aula toda só com os números naturais?

P4: Nos cursos que estão tendo, assim, no *YouTube*, para auxiliar os professores sobre as aulas remotas, sempre se diz que o tempo de aula tem que ser mais curto do que seria na sala de aula. Tem que ser bem objetivo e tentar ser curto, porque a gente não consegue prender tanto a atenção do aluno, assim, a distância, então acho bem interessante a gente tentar pensar em talvez diminuir, dividir, não sei, enxugar o tempo dessa aula. Só queria comentar que eu estava mega nervosa, viu? Era minha primeira vez em tudo ali. Nem tudo o que foi feito eu queria ou foi o que eu tinha pensado, né?

Na primeira fase do curso, foi indicado um nível 3 de uso implícito dos indicadores do componente IM3 do CAD de meios. Após estudarem os CAD, observa-se que os comentários, observados na segunda análise, são muito mais detalhados e coerentes e mostram o uso explícito e correto da maioria dos indicadores do componente IM2 do CAD de meios. Por essa razão, atribui-se um nível 4 de uso desse componente na terceira fase do curso.

Conclusão geral sobre a melhora da reflexão dos professores com relação ao Critério de Adequação de Meios

A análise da reflexão de professores realizada na fase três do curso, especialmente nas sessões de reflexão com os CAD (12 e 13), revelou que as evidências indicam um nível 4 de adequação de meios em relação a todos os seus componentes.

Houve uma melhora significativa no desenvolvimento da reflexão na terceira fase do curso, com os CAD explícito, pois todos os componentes aumentaram o seu nível de adequação de meios. Os componentes IM1 e IM3 foram de 3 para 4 e o componente IM2 foi de 2 para 4, conforme os gráficos que seguem (Figuras 63 e 64).

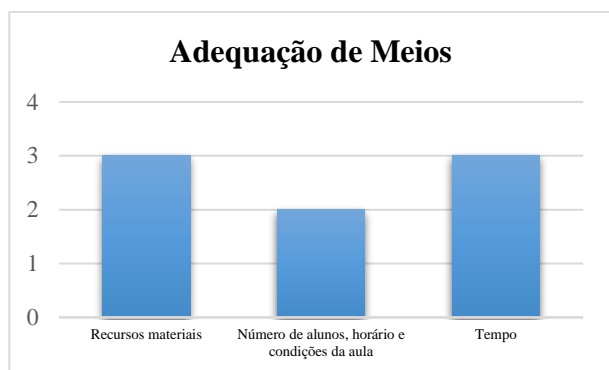


Figura 63. Nível de uso implícito do CAD de Meios (fase 1 do curso)
 Figura. Fonte: elaboração própria.

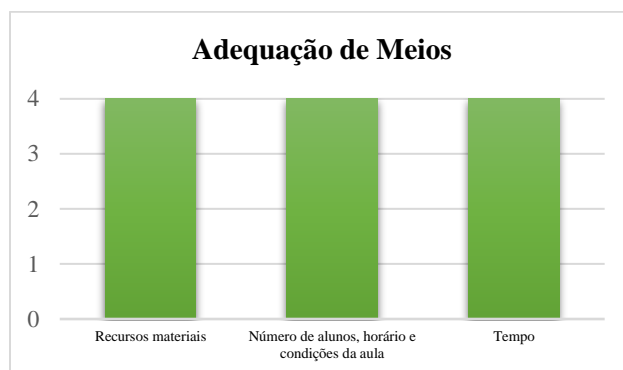


Figura 64. Nível de uso explícito e correto do CAD de Meios (fase 3 do curso)
 Figura. Fonte: elaboração própria.

Adequação Afetiva

Após os participantes estudarem os CAD (fase 2 do curso), na fase três, P5 ficou responsável por fazer uma nova análise da aula sobre o ensino do Teorema de Pitágoras aplicada com o grupo de alunos do Ensino Fundamental, pelo prisma da dimensão afetiva. Após as análises de P5, foi realizado uma discussão com todo grupo e uma intervenção dos especialistas, com o objetivo de refinar a reflexão previamente realizada.

Desta forma, P5 apresentou suas valorações com relação à adequação afetiva e organizou suas análises pelos componentes: *interesses e necessidades* (IA1), *atitudes* (IA2) e *emoções* (IA3).

Aplicação da escala de valoração do componente IA1 do Critério de Adequação Afetiva

Na fase 2 do curso, no processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *interesses e necessidades* (IA1) foi comentado sobre: a) a utilidade da matemática (se pode interessar ou não ao aluno); b) conexão com a cognitiva (se as tarefas

estão a uma distância razoável do que os alunos podem desenvolver ou aprender); c) tipos de tarefas desafiadoras (se pode ou não interessar os alunos) e d) exemplos de pesquisas estatísticas na escola como forma de motivação (os alunos investigam na escola).

Com relação ao indicador "apresenta uma seleção de tarefas interessantes para os alunos" do componente *interesses e necessidades* (IA1), P5 comentou o que segue:

P5: Uma coisa positiva eu coloquei que foi a utilização de desenho animado para ilustrar a vida de Pitágoras. [...] Depois, outra coisa que ela usou, que eu considereei positiva, que chamou o interesse dos alunos, foi ela se referir ao, quando foi montar o triângulo com os quadrados do lado para tentar demonstrar geometricamente o Teorema, ela se referiu a montar um quebra-cabeça e isso eu achei interessante também, gostei da frase, porque remete a uma brincadeira, principalmente de criança, da faixa etária dos alunos que a gente estava vendo. Uma coisa que eu achei não tão positiva, e eu já tinha falado da outra vez na minha reflexão foi a extensão da aula, que atrapalhou a participação dos alunos. [...] A extensão da aula atrapalhou um pouco, e isso a gente já tinha comentado mais de uma vez, não vou me estender, que no início teve muita participação dos alunos 5, 6, 7, 8 participavam, todo mundo respondia ao mesmo tempo e, depois, isso aí foi diminuindo o que eu acho que atrapalhou um pouco pelo interesse também e porque atrapalha a compreensão.

Com relação a este indicador, PI ao apresentar sua valoração especializada deste componente considera que as atividades poderiam ser motivadoras pela dinâmica da aula (autonomia, uso do *chat*). Já, com relação ao indicador "propõe situações que permitem avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional", P5 disse o seguinte:

P5: Isso eu não achei nos exercícios da P4. Ela apresentou duas atividades que são da vida real, digamos entre aspas, que são impossíveis de aplicar. [...] Ela colocou um exercício com uma figura que mostra um edifício que tem 15 metros de altura e uma escada colocada a 8 metros da sua base ligada ao topo do edifício, "o comprimento dessa escada é?". Se a gente fizer as contas, vai dar uma escada de 17 metros, totalmente impossível de carregar, impossível de usar. Então, a ideia de usar a vida real, sim, mas é um exercício totalmente impossível de fazer. Eu gostei do tipo de exercício que levou ao uso do Pitágoras para a vida real, mas me incomodou um pouco, e pode ser que seja chatice minha, é uma escada de 17 metros e eu acho meio impossível da gente encontrar.

Tendo em vista que, na reflexão da professora, há trechos do discurso que evidenciam o uso explícito e correto dos dois indicadores do componente que está sendo analisado (IA1 neste caso), a avaliação, segundo a escala do quadro 5, pelo menos é um 3. Em particular, uma evidencia de uso correto do indicador "propõe situações que permitem avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional" é quando P5 analisa se os problemas

contextualizados que são apresentados permitem ver a utilidade da matemática no mundo real ou não.

Após P5 apresentar sua análise com relação a este indicador, na discussão do grande grupo, houve uma concordância que as situações realmente não mostravam a utilidade do TP. Em outras palavras, a atividade implementada era mais bem um pretexto do que precisamente um contexto real do TP. Apesar disso, quando os professores fizeram o redesenho, se bem incorporaram tarefas contextualizadas, no fundo não conseguiram desenhar um problema autêntico que realmente tratasse da utilidade do TP na vida cotidiana e laboral.

A seguir no curso, quando os professores discutem sobre o redesenho da aula, os participantes não apenas refletem critério por critério, mas também refletem em vários critérios ao mesmo tempo. Nestes momentos, os professores discutem sobre a importância de, no redesenho da aula, propor atividades que permitam que os alunos percebam a utilidade do TP na vida cotidiana e profissional, aspecto que, além de estar relacionado com o componente IA1 do CAD afetivo, está conectado com a ideia de o TP ser útil para a inserção social e laboral, indicador do componente IEC3 do CAD ecológico.

A análise da reflexão dos professores indica que eles sabem identificar se a aula implementada analisada apresenta atividades interessantes e necessárias para os alunos e quais aspectos relacionados a isso devem ser melhorados em um redesenho da aula. Como resultado de uma nova triangulação entre o que acaba de ser comentado e a avaliação inicialmente feita, com base na reflexão de P5 que era um 3, conclui-se que a avaliação da reflexão de todo o grupo, no componente IA1, atinge um nível 4.

Por fim, é feita uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a esse componente (IA1) na fase 1 do curso (ver seção anterior) e o obtido na fase 3 do curso. A análise da reflexão na primeira fase do curso revelou que os professores fizeram uso implícito dos indicadores do componente IA1 do CAD afetivo e atribui-se um nível 2 a este componente. Na fase 3, o que antes estava implícito, propor tarefas interessantes e necessárias aos estudantes, agora é tratado explicitamente e analisado com mais detalhes.

Aplicação da escala de valoração do componente IA2 do Critério de Adequação Afetiva

Na fase 2 do curso, no processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *atitudes* (IA2) foi discutido sobre: Como promover a implicação dos estudantes na realização das atividades; como promover a responsabilidade ou perseverança e como evitar a fobia/medo em relação à matemática.

No que diz respeito ao indicador "promove a implicação nas atividades, a perseverança, a responsabilidade, etc." do componente *atitudes* (IA2), P5 comentou o que segue:

P5: Achei bem positivo da P4 que ela ficou perguntando, em várias ocasiões, se os alunos estavam fazendo as atividades e ela cobrava as respostas dos alunos. Ela ficou esperando a resposta deles. Ela respondeu às perguntas de todos os alunos. Teve uma frase que ela falou, assim, que me incomodou um pouquinho. Ela falou que iria ter um controle maior de como fazer o tema de casa. Acho meio difícil a gente controlar como eles vão fazer o tema de casa, inclusive quando a gente está em aula. Imagina agora. A gente nem consegue ver o caderno. Porque, às vezes, nessa altura da vida escolar o professor ainda olha o caderno, controla se ele fez o tema ou não. Controlar como eles vão fazer é meio complicado, mas de repente é só uma frase que saiu na hora e não foi nada pensado, assim, sabe? Aquelas coisas que a gente faz espontaneamente.

No comentário que realiza P5, na primeira parte destaca que P4 faz inúmeros comentários motivando os alunos para se implicarem, persistirem e realizarem as atividades; por outra parte, observa-se a maturidade docente e profundidade argumentativa de P5, uma vez que põe em questão se o controle do trabalho realizado em casa realmente serve para promover a implicação e responsabilidade dos alunos, especialmente em um contexto de aula virtual provocada por um confinamento. De fato, neste comentário que apresenta P5 fica evidente que os CAD, seus componentes e indicadores apresentam um certo grau de ambiguidade quando são operacionalizados ou aplicados.

Já em relação ao indicador "favorece a argumentação em um contexto de igualdades", ou seja, o argumento é avaliado em si mesmo e não por quem o disse, P5 comentou o que segue:

P5: Isso também eu considerei que P4 teve vários momentos positivos. Ela fez vários elogios aos alunos o tempo inteiro, em várias situações ao longo da aula. Ela tomou o cuidado de falar o nome do aluno, porque isso aí eu acho bem importante, que eles se sintam identificados. Ela nomeou eles na hora de [...] quando eles estavam respondendo, se eles estavam certos ou errados, ela falou o nome. Quando eles estavam fazendo perguntas, ela falou o nome. Isso aí eu acho importante, dada

a situação que a gente tem em sala de aula, onde a gente faria coisas diferentes. Mas, de acordo com a aula que a gente pode fazer, achei muito bom. Quando ela notou que alguns alunos não estavam entendendo pelo silêncio, que alguns colegas já comentaram, ela buscou outras novas formas de explicar a mesma coisa e ela pensou, inclusive ela fez isso aí uma vez, hoje eu não saberia o nome. Ela tentou buscar o possível erro do aluno e mostrar onde é que ele tinha errado. Então, ela pensou, ela se colocou no lugar do aluno, e tentou pensar como ele pensa para tentar entender os possíveis erros que eles poderiam cometer em casa, já que a gente não pode estar perto. Isso aí eu achei muito positivo, gostei muito, P4.

No comentário acima, observa-se como P5 valora positivamente que a professora trata os alunos de maneira individual, chamando-os pelo nome, como forma de motivar e felicitar os alunos presentes. Na reflexão individual da aula apresentada por P5, evidencia-se que ela utiliza de maneira explícita e correta os dois indicadores do componente IA2 do CAD afetivo.

Mais tarde no curso, quando os professores discutem que aspectos considerar para o redesenho da aula, em relação ao componente IA2, os professores decidem manter o tratamento individual (personalizado) e a dinâmica de considerar as respostas apresentadas pelos alunos, realizada por P4 na aula, usando as respostas erradas para corrigi-los e as respostas corretas para felicitá-los. Contudo, não há um aprofundamento na reflexão dos professores com relação a se a professora propicia um ambiente de argumentação em um contexto de igualdades, entre outros aspectos, pois na aula implementada não aparece o processo de argumentação realizado pelos alunos. Nesse sentido, atribui-se um nível 3 para a reflexão do componente IA2 realizada.

Por fim, realiza-se uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente (IA2) na fase 1 do curso (ver seção anterior) e o obtido na fase três do curso. Na fase 1, observou-se muito poucas evidências de apenas um dos indicadores do componente IA2 da adequação afetiva e, por esse motivo, atribui-se um nível 1 a este componente. Já na fase 3 do curso, conclui-se que houve uma melhora na reflexão e o que antes estava implícito, agora é tratado explicitamente e analisado com mais detalhes desde a perspectiva dos dois indicadores do componente IA2 do CAD afetivo.

Aplicação da escala de valoração do componente IA3 do Critério de Adequação Afetiva

Na fase 2 do curso, no processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *attitudes* (IA3) foi discutido sobre: se haviam identificado algum caso de aluno que apresenta baixa autoestima ou fobia em relação à matemática e se sim, como foi gerenciada essa questão; o que lhes fez optar/decidir ser professor de matemática. Também se realizou uma discussão sobre a diferença entre emoção e afetividade.

No que concerne o indicador "promove-se a autoestima, evitando o rechaço, fobia ou medo da matemática" do componente "emoções" (IA3), identificou-se o que segue:

P5: Eu coloquei como uma coisa muito positiva, também, que P4 cumprimentou todo mundo, todos os alunos, quando eles iam entrando na *live* e quando eles respondiam. Isso eu já falei agora há pouco, mas achei que é uma coisa muito positiva. Os alunos, às vezes, mandavam coraçõezinhos, carinhas e ela respondia e, mesmo assim, falando o nome deles. Isso eu achei uma coisa muito positiva, muito legal. Eu gosto disso também. Eu não consigo fazer, porque a minha aula é diferente, o aplicativo é diferente. Achei que P4 foi muito detalhista no sentido de cuidadosa, carinhosa, ao explicar para aquela menina, Adrielly acho que era o nome dela, eu não me lembro agora, que a soma dos catetos não resulta na hipotenusa que ela colocou que seis mais quatro eram dez. Era Adrielly, né P4? [...] Mas, eu achei muito cuidadoso da tua parte isso de voltar, porque ela não tinha entendido, e tentar explicar de novo, porque não era só somar que dava dez. Uma coisa que me incomodou um pouquinho é que tu falou assim: "a partir de agora vocês podem falar que conhecem o Teorema de Pitágoras". Sim, eles conhecem? Não sei. Tu sabes que eles ficaram com dúvidas, tu sabes que eles vão enfrentar dificuldades ao longo do ano, por razões óbvias. Vocês conhecem o Teorema? Eu não sei se eu poderia falar por eles, entendeu? Que eles conhecem o Teorema de Pitágoras. Ok, eu falei, mas adolescente, provavelmente no outro dia nem lembra o que almoçou, entendeu? Então, eu não sei se eu consigo afirmar que eu sei o que eles sabem fazer, tá? Pode ser que seja chatice minha.

O comentário acima nos leva ao entendimento de que P5 realiza uma gestão da aula muito inclusiva, muito convidativa. Por exemplo, em nenhum momento promove a fobia ou medo em relação à matemática. Sobre este aspecto, os outros professores participantes do curso, em suas reflexões posteriores, estão de acordo.

Já em relação ao indicador "as qualidades da estética e precisão da matemática são destacadas" do componente IA3, evidenciou-se o que segue:

P5: Eu coloquei como uma coisa positiva que P4 foi muito cuidadosa ao se referir à existência do Teorema mesmo antes de Pitágoras, porque isso aí é uma coisa que fica fixada. Tinha gente que já trabalhava com isso, acho que tu foste cuidadosa nisso, nesses detalhes. Foi muito detalhista na

hora de fazer as figuras, tu mostraste para eles todas as vezes. Teve uma hora que tu abriste o triângulo e tinha um nome colado ali de hipotenusa e de catetos e eu achei um detalhe interessante, que ajuda o aluno a entender do que tu estavas falando. Uma coisa que eu achei menos positiva foi no minuto 41, tu falas assim - depois tu assistes, tá P4, se tu quiseres: "reparem que tem alguma coisa acontecendo". E eu fiquei pensando, eu com quatorze anos, com a cabeça viajando, olhando para três números, eu não iria reparar que nos números acontecem nada, entendeu? Provavelmente, é um vocabulário nosso, de professor mesmo, porque a gente tem um domínio da matemática um pouco maior, que a gente consegue ver fácil que o dezesseis mais nove dá vinte cinco. Mas, tu falares para um adolescente "repara que alguma coisa tá acontecendo", para mim não está acontecendo nada. Mas, eu entendi a lógica da tua pergunta, questionar, obrigar eles a pensarem e essa ideia foi boa. De repente, a forma de provocar eles não me pareceram tão boa. Quando tu usaste a raiz quadrada de sessenta e quatro, a primeira vez que foi explicado raiz de sessenta e quatro, tu foi explicando, explicando [...] Tu explicaste, explicou, explicou tudo, chegou no x ao quadrado é igual a sessenta e quatro e tu sempre, na tua explicação, tu sempre falaste como "que número ao quadrado dá sessenta e quatro", tu nunca usou a palavra raiz quadrada. Daqui a pouco, aparece lá a raiz de sessenta e quatro, me pareceu que pode ter gerado algum tipo de confusão, tá? Até porque eles não têm grande domínio, nessa altura da vida, com raiz, potência, operações contrárias, etc. [...] pode ter gerado algum tipo de confusão, de repente na hora da fala.

P5: Acho que é a última coisa que eu iria falar, tu falaste assim "a gente consegue traçar um irracional", e acho que isso aí foi o que eu achei mais grave, assim, depois o resto são coisas que eu não considero tão graves. Na verdade, o que a gente está traçando é uma representação de um irracional, porque tu nunca vais conseguir desenhar um segmento de um valor irracional, por todas as discussões que a gente teve na aula passada de número irracional e tu falas mesmo na aula que o número é infinito. [...] Tu falas, coloca o número lá. Imagina, eu pensando na questão do aluno. Eu me coloquei na posição do aluno, tentar desenhar um segmento com toda essa medida. Me pareceu um pouco assustadora. A gente consegue fazer uma representação da raiz de dois, ok, mas não consegue traçar um segmento de um número irracional. Pela mesma razão que a gente discutiu na semana passada, um número infinito.

Na reflexão da aula, apresentada por P5, evidencia-se o uso explícito e correto do componente *emoções* (IA3) do CAD afetivo. Por exemplo, P5 também destacou muitos momentos da aula onde P4 pecou em relação a precisão da matemática nos conceitos tratados em aula. Nesse sentido, na reflexão apresentada por P5, encontram-se trechos do discurso muito detalhados e coerentes que mostram o uso explícito e correto da maioria dos indicadores do componente IA3 do CAD afetivo, aspectos que foram corroborados com outros

participantes. Por essa razão, atribui-se um nível 4 de avaliação para o uso do componente em questão.

Por último, realiza-se uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente (IA3), na fase 1 do curso (ver seção anterior), e o obtido na fase três. Na fase 1, a análise revelou escassas evidências que podem ser consideradas uso implícito do componente IA3 do CAD afetivo e, por isso, atribuiu-se um nível 1 a este componente. Já, na fase 3 do curso, há uma melhora significativa na reflexão. O que antes estava implícito em relação às emoções, agora é tratado explicitamente e é analisado com muito detalhe e coerência.

Conclusão geral sobre a melhora da reflexão dos professores com relação ao Critério de Adequação Afetivo

A análise da reflexão de professores realizada na fase três do curso revelou que as evidências indicam um nível 4 de adequação afetiva em relação aos componentes IA1 e IA3 e um nível 3 para o componente IA2. Nessa perspectiva, houve uma melhora significativa no desenvolvimento da reflexão na terceira fase do curso, com os CAD explícitos, pois todos os componentes aumentaram o seu nível de adequação afetiva. O componente IA1 foi de 2 para 4, o IA2 de 1 para 3 e o IA3 de 1 para 4 (ver Figuras 65 e 66).

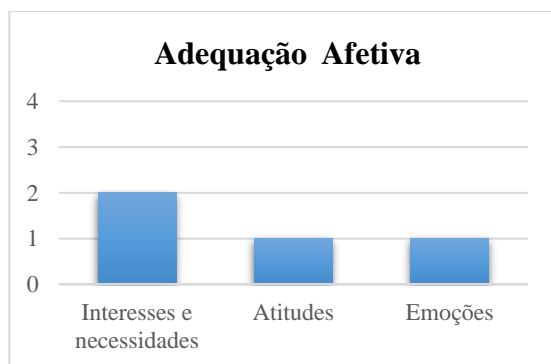


Figura 65. Nível de uso implícito do CAD Afetivo (fase 1 do curso)
Fonte: elaboração própria.

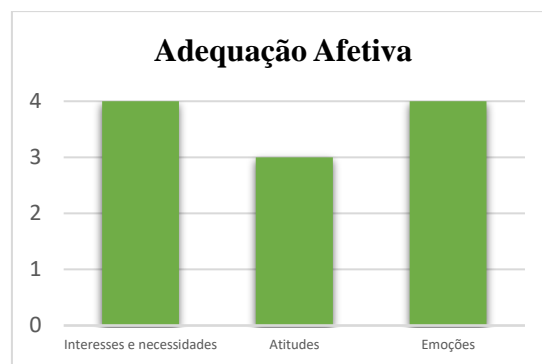


Figura 66. Nível de uso explícito e correto do CAD Afetivo (fase 3 do curso)
Fonte: elaboração própria.

Adequação Ecológica

A professora que ficou responsável por fazer uma análise individual da aula sob a ótica do CAD ecológico foi P4. Assim, sua apresentação, também, foi organizada por componentes e indicadores do CAD em questão.

Aplicação da escala de valoração do componente IEC1 do Critério de Adequação Ecológico

Na fase 2 do curso, no processo de instrução realizado com os participantes relacionado ao componente *adaptação ao currículo* (IEC1) foi discutido sobre se o conteúdo, sua implementação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares. Para isso, realizou-se com os participantes uma discussão sobre: currículo oficial (nacional, regional, municipal); currículo do centro (da escola, do departamento); currículo oculto; currículo implementado; e a importância de seguir o currículo, mas, ao mesmo tempo, estar aberto às inovações didáticas (mudanças, adaptações, etc.).

No que concerne este componente, P4 na fase 3, começou sua exposição falando que, para realizar a análise da aula, P4 buscou referências na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) -documento normativo para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a educação básica no Brasil-. Nesse documento, P4 identificou que o Teorema de Pitágoras pertence a unidade temática "geometria", da matemática do nono ano, e destacou a habilidade "demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos", relacionada a esse objeto do conhecimento. Com base no que diz esse referencial curricular, P4 comentou o que segue:

P4: Eu acho que faltou, na nossa aula, porque não se enquadra tanto, a parte de demonstração. Porque a gente estudou o caso [particular] 3, 4 e 5. Isso, de fato, não é demonstrar para todos. A gente utilizou apenas um caso. E, até em outras aulas, PI mostrou para nós outras demonstrações e tal, e tinha uma que estava usando essa figura aqui com cartolinas e tal. Então, talvez se a gente fizesse isso seria uma demonstração de fato. E, também, outra parte que não se adequa tanto aqui, na nossa aula, é a semelhança de triângulo. Não que nós tenhamos que adequar, só estou comentando que, na nossa aula, a gente não chegou nessa parte. O resto aqui da parte da BNCC é mais Teorema de Tales, outras questões.

Logo após P4 apresentou, também, como o Teorema de Pitágoras aparece no referencial curricular do município onde sua escola estava localizada. P4 também explicou que esse referencial havia sido elaborado por alguns professores da rede municipal de ensino e que o TP estava referenciado exatamente da mesma maneira que na BNCC, com a diferença que,

na segunda habilidade, havia-se acrescentado a palavra "interpretar", além de "resolver e elaborar problemas de aplicação do TP. A seguir, P4 comentou o que segue:

P4: Eu queria fazer uma metáfora falando que a nossa função é uma função sobrejetora, porque a minha aula não atingiu totalmente o currículo. Teve partes aqui que a gente não atingiu, mas a gente faz uma correspondência com as diretrizes curriculares. Não totalmente, mas a gente atinge boa parte aqui das questões que foram faladas.

Nessa reflexão de P4, observa-se o uso explícito e correto do indicador "os conteúdos, sua implementação e avaliação fazem correspondência com as diretrizes curriculares" do componente "adaptação ao currículo" do CAD ecológico. Em particular, destaca-se que na sua reflexão há um aprofundamento sobre a aula implementada estar adaptada ao currículo, visto que não se limita a dizer que o TP está contemplado no currículo, e sim reconhece que as orientações curriculares não foram seguidas integralmente, já que não foi realizada uma demonstração do TP.

Tendo em vista que, na reflexão de P4, há trechos do discurso que evidenciam o uso explícito e correto da maioria dos indicadores do componente do critério de adequação didática que está sendo analisado (IEC1, neste caso, que tem apenas um indicador), a avaliação, segundo a escala do quadro 5, é pelo menos 3.

Depois de P4 apresentar sua análise da aula, pelo viés do CAD ecológico, PI perguntou se os professores teriam algo a acrescentar em relação à avaliação da aula apresentada por P4. A partir desse questionamento, surgiram as seguintes reflexões em relação ao componente IEC1 do critério de adequação ecológica:

P3: Acredito, assim, que, pelo tempo que a gente teve de aula, claro que não iríamos conseguir atingir todos os objetivos da BNCC. Para isso, a gente iria precisar organizar a aula para, em cada aula, incluir um item a mais. Mas achei bem boa a avaliação dela. Está bem dentro do que a gente viu e conversou.

Nessas discussões e em outras semelhantes, fica evidente que os professores participantes entendem e utilizam o indicador do componente IEC1 e, também, sabem identificar o TP de acordo com as diretrizes curriculares. Como resultado de uma nova triangulação entre o que acaba de ser comentado e a avaliação inicialmente feita, com base na reflexão de P4, conclui-se que a avaliação da reflexão de todo o grupo, no componente IEC1 é 4.

Por fim, é feita uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente (IEC1) na fase 1 do curso (ver seção anterior) e o obtido na fase três do curso. Na fase 1 observou-se que os participantes fizeram poucas reflexões sobre se “os conteúdos, sua aplicação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares”. Por esse motivo, o nível 1 de uso implícito foi atribuído. Na fase 3, percebe-se uma melhora na reflexão e o que antes estava implícito, a adaptação do que se pretende ensinar ao currículo, agora é tratado de forma explícita e é analisado corretamente e de maneira mais detalhada.

Aplicação da escala de valoração do componente IEC2 do Critério de Adequação Ecológico

Na fase 2 do curso, trabalhou-se com os professores o componente conexões intra e interdisciplinares (IEC2). Para tal, realizou-se um debate sobre se os conteúdos trabalhados estão relacionados a outros conteúdos matemáticos ou com alguns conteúdos de outras disciplinas. Discutiu-se sobre o que poderíamos entender por conexões; como poderíamos realizar conexões intra matemáticas e interdisciplinares ao se trabalhar o Teorema de Pitágoras; os diferentes discursos sobre as conexões intra matemáticas e apresentou-se exemplos atividades de modelagem matemática que podem gerar conexões intra matemáticas ou extra matemáticas.

Na fase 3, observa-se a reflexão realizada por P4 sobre este componente:

P4: A gente utilizou o conceito de ângulo, principalmente, o ângulo reto. Lembrando que não foi só o ângulo reto. Tem um momento que eu pego o retângulo e coloco o triângulo em cima e falo que o “angulozinho” era um pedacinho do ângulo reto, então era menor. O conceito, também, de triângulo, o tipo de triângulo. Nesse caso aqui que tocou no triângulo retângulo. Eu coloquei, aqui, em roxo, a soma de ângulos, porque eu acho que a gente não trabalhou isso, mas poderia ser trabalhado se eu fizesse a demonstração daquela figura. [...] Essa demonstração utiliza bastante isso. A nomenclatura do triângulo: cateto e hipotenusa. A gente utilizou a área, conceito de retângulo, ângulos internos e a área também do retângulo. E quadrado, aqui, coloquei duas definições que foram utilizadas, tanto a algébrica, que é elevada na segunda potência, elevar ao quadrado, e polígono. E, isso, teve várias vezes que eu me preocupei muito durante a aula, porque eu falava de quadrado e, em alguns momentos, eu queria falar e levar na segunda potência e há momentos que eu queria falar do polígono quadrado. Então, muitas vezes, houveram confusões ali nessa palavra.

P4: Utilizamos a equação também para resolver o Teorema de Pitágoras, aplicando no triângulo, e também foi utilizado o conceito de números irracionais. Aqui no quadro eu coloquei também algumas coisas que me veio na mente e são conexões com o Teorema de Pitágoras que eles ainda não tiveram. Mas, vão ter. A trigonometria, logo depois, esse ano ainda, no nono ano, a gente vê trigonometria. A altura de um triângulo qualquer pode ser vista utilizando o Teorema de Pitágoras, principalmente, quando a gente for generalizar a área do triângulo equilátero. Porque, a altura pode ser vista através do Teorema de Pitágoras, não necessariamente, mas pode servir. O diagonal de quadriláteros, em geral, quadrado, retângulo, e a distância entre dois pontos também é o Teorema de Pitágoras e, isso, me leva a pensar, também, a importância de eles entenderem bem o conceito do Teorema de Pitágoras, porque depois vai ser visto novamente, principalmente, no ensino médio.

Nesta reflexão infere-se que a ideia de conexão que P4 está tratando é basicamente a de relacionar o TP com outros conceitos, em particular com os conhecimentos prévios necessários para a compreensão deste Teorema, não se trata da ideia de conexão entre significados ensinada no curso. Na continuação da exposição de sua análise pela perspectiva do componente IEC2 do CAD ecológico, P4 apresentou algumas reflexões com relação às conexões interdisciplinares com o Teorema de Pitágoras, conforme segue:

P4: Como já foi dito nas outras aulas, a gente fez uma conexão com a história, a geografia, a filosofia... E eu coloquei música, que coloquei um asterisco, para eu lembrar que música faz parte da BNCC, como um conteúdo que a escola deve abordar. E eu coloquei em roxo ciências, porque nós não abordamos na nossa aula, mas isso pode ser abordado em aulas posteriores e eles vão ver em ciências, na parte ali de força. Então, tem bastante conexão. A parte aqui da filosofia eu também tinha colocado um asterisco, porque, na verdade, a gente só tangenciou a filosofia, só comentou, só passou, não comentamos muito.

Nas reflexões de P4 observa-se o uso explícito e correto do indicador "os conteúdos estão relacionados com outros conteúdos matemáticos (conexões da matemática avançada com a matemática do currículo e conexão entre os diferentes conteúdos matemáticos contemplados no currículo) ou com alguns conteúdos de outras disciplinas (contexto extra matemático ou com alguns conteúdos de outras disciplinas do currículo educacional) do componente IEC2 do critério de adequação ecológico.

Considerando que, na reflexão de P4, há evidências do discurso que evidenciam o uso explícito e correto da maioria dos indicadores do componente IEC2, a avaliação, segundo a escala do quadro 5, é pelo menos 3.

A seguir no curso, PI apresentou a análise da aula realizada por especialistas em CAD e destacou que uma conexão intra matemática que não havia sido feita na aula era a conexão entre a recíproca do TP e o Teorema (demonstração). Nesse sentido, quando discutiram sobre que aspectos considerar para o redesenho da aula, o grupo de professores decidiu explicar a volta do TP e realizar exercícios de aplicação sobre a recíproca do TP introduzindo as ternas pitagóricas (significado parcial 3, aritmético-algébrico).

Destaca-se que as reflexões feitas na fase três do curso sobre a complexidade do TP e os seus diferentes significados foram tidas em consideração pelo grupo de professores no redesenho da aula implementada. Em particular, nos objetivos do redesenho, foi proposto explicitamente fazer conexões intra matemáticas entre diferentes significados do TP e também conexões extra matemáticas:

Objetivos específicos:

- a. Trabalhar os Conceitos Prévios necessários para entender a nova aprendizagem: área de quadrados; classificação de triângulos quanto aos ângulos; propriedades do triângulo retângulo; raiz quadrada; operações com irracionais, potenciação e resolução de equações.
- b. Fazer uma contextualização sobre o TP na história;
- c. Entender o TP como uma relação entre as áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo;
- d. Fazer a demonstração geométrica do TP;
- e. Entender o TP como uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo;
- f. Entender a conexão entre os significados de áreas de quadrados construídas sobre os lados de um triângulo retângulo e o significado de relação entre comprimentos de seus lados;
- g. Entender o TP como significado aritmético-algébrico através das ternas pitagóricas;
- h. Utilizar o Teorema de Pitágoras para reconhecer que um triângulo é retângulo;
- i. Resolver problemas contextualizados com os significados do TP trabalhados.

Nessas reflexões, realizadas na terceira fase do curso, evidencia-se que os professores participantes entendem e utilizam o indicador do componente IEC2 e, também, sabem identificar, na aula implementada analisada, com quais outros conteúdos matemáticos ou com quais conteúdos de outras disciplinas o TP está relacionado e quais devem ser melhor trabalhados em um redesenho. Como resultado de uma nova triangulação, conclui-se que a avaliação da reflexão de todo o grupo no componente IEC2 do critério de adequação ecológica é 4. Por último, é feita uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente

(IEC2) na fase 1 do curso (ver seção anterior) e o obtido na fase três do curso. Na fase 1 observou-se que os participantes fizeram muitas reflexões sobre as conexões intra e extra matemáticas do TP. Além disso, eram trechos do discurso que apresentavam muitos detalhes, profundidade e coerência. Por esse motivo, atribui-se um nível 4 a este componente. Na fase 3, ao invés de se falar em uma melhora na reflexão, o que deve ser destacado é que o que antes estava implícito, as conexões, agora é tratado explicitamente e são analisados com mais detalhes.

Aplicação da escala de valoração do componente IEC3 do Critério de Adequação Ecológico

Na fase 2 do curso para trabalhar o componente *utilidade sócio laboral* (IEC3), realizou-se uma conversa com os professores participantes sobre: se a noção de laboral tem a ver com entender as coisas do mundo e preparar para o trabalho e se a noção de social deve considerar aspectos sociais e, também, culturais.

No que concerne ao componente *utilidade sócio laboral* (IEC3), em sua análise individual, P4 explicou que o "laboral" tinha relação com "entender as coisas do mundo e preparar para o trabalho". A seguir, P4 utilizou como exemplo o problema de modelagem matemática desenvolvido na aula do LS no Ensino Médio, destacando que se tratava de um caso particular que utiliza o TP para resolver um problema de engenharia. Outro exemplo da utilidade do TP na vida social e laboral apresentado por P4, foi o de um vídeo que mostra a necessidade de se conhecer o TP para resolver um problema de força. Com esses exemplos, P4 quis ressaltar a importância de apresentar aos alunos a utilidade do TP.

Na reflexão exposta por P4 evidencia-se o uso correto e explícito de "os conteúdos são úteis para a inserção sócio laboral", único indicador do componente IEC3 do CAD ecológico. Por essa razão, atribui-se 3 ao nível de avaliação desse componente.

A seguir no curso, PI ressaltou que, especialmente, no que referia-se ao componente "utilidade sócio laboral", P4 havia apresentado exemplos da utilização do TP em situações do vida social e laboral, mas especificamente, em relação à aula analisada, PI perguntou aos professores participantes se eles consideravam que, na aula desenvolvida por eles, as atividades realizadas contemplavam a utilidade sócio laboral. Na sequência da sessão, os professores fizeram algumas reflexões a esse respeito, conforme segue:

P3: Eu acho que a gente tenta, mas nem sempre consegue ir aplicar.

PI: Mas, especificamente nessa aula, as atividades que foram feitas?

P7: Eu acho que não.

PI: Tu achas que não?

P7: Até porque não teve... eu não registrei nada com aplicação, assim, mais contextualizada, né?

Até acho...

P6: Teve uma atividade de prédio, não? Tinha um prédio que tinha que calcular...

P3: Sim, no formulário que ela mandou tinha umas questões.

PI: Mas, eu acho que laborar acho que não. Ali eu acho que não chega ser.

PI: Não, mas é de contexto, né? Tinham duas questões de contexto, né? Pelo menos o... não é o contexto dos alunos. De repente poderia aproximar esses enunciados para um contexto mais próximo para os alunos, né?

PI: [concorda]

Mais tarde no curso, PI apresentou a análise da aula realizada por especialistas pelo viés do CAD ecológico. Depois disso, os professores fizeram novas reflexões em relação a se "os conteúdos são úteis para a inserção sócio laboral" e decidiram, para um redesenho da aula, fazer os alunos verem o uso do TP no cotidiano (utilização do TP por profissionais como pedreiros e carpinteiros). Além disso, surgiu a ideia de conectar o TP com sua história mostrando, como exemplo, a construção das pirâmides do Egito. Ademais, os professores decidiram apresentar mais problemas que envolvam a realidade dos alunos e também sugerir que os alunos elaborem problemas e tarefas relacionadas com o seu contexto (ver anexo 2).

Nessas reflexões, ficou evidente que os professores participantes entenderam e utilizaram o indicador do componente IEC3 e, também, sabem identificar de que maneira demonstrar a utilidade social e laboral do TP para seus alunos. Nesse sentido, como resultado de uma nova triangulação entre o que acaba de ser comentado e a avaliação inicialmente feita, conclui-se que a avaliação da reflexão de todo o grupo, no componente IEC3 é 4.

Feito isso, realiza-se uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente (IEC3), na fase 1 do curso (ver seção anterior), e o obtido na fase três. Na fase 1 observou-se que os participantes fizeram muito poucas colocações sobre a ideia de "o conteúdo é útil para colocação laboral", indicador do componente IEC3. Por essa razão, atribui-se um nível 1 para este componente do CAD ecológico. Por outro lado, na fase 3 do curso, os professores fizeram muito mais reflexões sobre a utilidade sócio laboral e além de serem

tratadas de modo explícita agora, são analisados com muitos detalhes, profundidade e coerência.

Aplicação da escala de valoração do componente IEC4 do Critério de Adequação Ecológico

Para explicar o componente Inovação didática (IEC4), dialogou-se com os participantes que a ideia de inovação é baseada em pesquisa e prática reflexiva e que, de alguma forma, a inovação didática seria uma espécie de contraposição em relação ao currículo. Em particular, que a ideia da inovação didática está relacionada com a ideia da abertura às mudanças, algo diferente do que se faz habitualmente (por exemplo, a mudança do plano didático no contexto do Covid-19).

No que diz respeito a este componente, P4, na fase 3 do curso, apresentou uma reflexão conforme o que segue:

P4: A aula foi no *YouTube*, devido ao distanciamento social, e nunca tinha sido realizado nada a distância lá na minha escola. Bem pelo contrário, inclusive eu já recebi muitas críticas de outros professores. [...] A gente tomou o cuidado para a aula ser no *YouTube* por causa da questão [inaudível] e todo mundo sabe lidar com isso e, também, pela questão ali da internet 3g, 4g. Alguns permitirem a visualização [inaudível] cuidado para maior inclusão possível dos alunos. Então, uma plataforma que eles já conhecessem, a questão do uso de dados, que eu já comentei. A gente utilizou também vídeos que é uma coisa que eu, particularmente, não consigo utilizar na minha sala de aula, afinal de contas, eu não tenho projetor, não tenho nada que eu possa levar. [...] Então ali é a utilização de vídeos, que eu na minha sala eu não consigo utilizar, afinal de contas, eu não tenho projetor só para mim, é um projetor por uma escola que tem... deixa eu pensar... [contando] 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 [...] tem cerca de 35 turmas para um ou dois projetores, quando estão os dois disponíveis. E, outra coisa que nós utilizamos de inovação foi o Google Formulário, que eles tinham utilizado muito pouco. [...] Então, foi outra inovação que nós passamos a utilizar. Além disso, o *WhatsApp* porque os alunos me enviaram vídeos e outras coisas foram combinadas através do *WhatsApp*. Enviei o link do vídeo pelo *WhatsApp*, eles me mandaram as fotos pelo *WhatsApp*, o horário que seria possível da aula também foi tudo por lá. Então, a gente teve uma certa inovação didática, obrigada, de certa maneira, e que, talvez, numa sala de aula, não pudesse ter sido tão tecnológico assim. E então eu coloquei que tivemos também uma inovação.

Além da reflexão individual pela perspectiva do componente IEC4 do CAD ecológico apresentada por P4, os demais professores participantes comentaram que as "inovações

didáticas" utilizadas para a realização e desenvolvimento da aula deveriam ser mantidas no redesenho da aula.

Nessa perspectiva, considera-se que os professores participantes fizeram muitas reflexões detalhadas e coerentes que mostram o uso explícito e correto do indicador "inovação baseada na pesquisa e prática reflexiva (introdução de novos conteúdos, recursos tecnológicos, formas de avaliação, organização da sala de aula, etc.)" do componente do CAD que está sendo analisado e, desta forma, atribui-se um nível 4 do componente IEC4.

Por último, uma triangulação entre o nível de avaliação atribuído a este componente (IEC4), na fase 1 do curso (ver seção anterior), e o obtido na fase três foi realizado. Na fase 1, a análise revelou muitas evidências que podem ser consideradas uso implícito do componente IEC4 do critério de adequação ecológica. Além disso, eram trechos do discurso que apresentavam muitos detalhes, profundidade e coerência e, por isso, atribui-se um nível 4 a este componente. Na fase 3 do curso, no lugar de falar sobre uma melhoria na reflexão, o que deve ser notado é que o que antes estava implícito, a inovação didática, agora é tratado explicitamente e é analisado com mais detalhes.

Conclusão geral sobre a melhora da reflexão dos professores com relação ao Critério de Adequação Ecológico

A análise da reflexão de professores realizada na fase três do curso, revelou que as evidências indicam um nível 4 de adequação ecológica para todos os seus componentes (IEC1, IEC2, IEC3, IEC4). Nessa perspectiva, houve uma melhora significativa no desenvolvimento da reflexão na terceira fase do curso, com os CAD explícitos, pois todos os componentes aumentaram o seu nível de adequação ecológica. Os componentes IEC1 e IEC3 foram de 1 para 4 e os componentes IEC2 e IEC4 mantiveram o mesmo nível em 4 (Figuras 67 e 68).

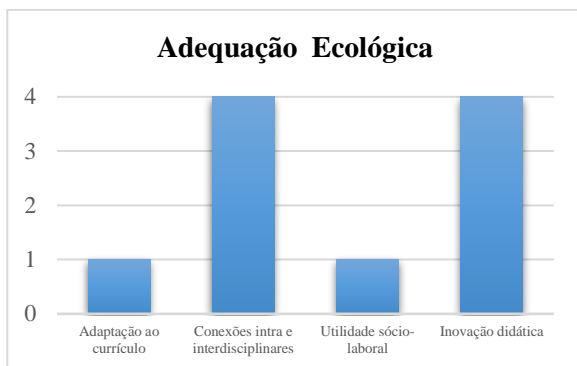


Figura 67. Nível de uso implícito do CAD Ecológico (fase 1 do curso)
Fonte: elaboração própria.

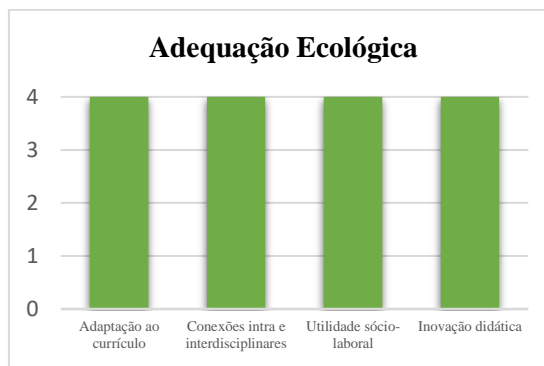


Figura 68. Nível de uso explícito e correto do CAD Ecológico (fase 3 do curso)
Fonte: elaboração própria.

Discussão e considerações sobre os resultados relacionados a de que forma o ciclo formativo implementado desenvolve reflexão nos professores participantes

As análises realizadas para alcançar o objetivo específico 4 desta tese apontam a forma que o ciclo formativo implementado desenvolve a reflexão nos professores participantes. Uma primeira consideração sobre este resultado é a de que os professores, ao participarem do curso formativo, apresentaram uma melhora na reflexão sobre o ensino do Teorema de Pitágoras nas diferentes fases do curso, evidenciando um melhor e mais profundo uso dos CAD na fase 3 (ferramenta utilizada pelos participantes para melhorar a reflexão), como pode-se observar no Quadro 9.

Quadro 9. Quadro que compara o nível de uso dos componentes dos CAD nas fases 1 e 3 do curso

CAD	Componentes	Nível de uso dos CAD	
		Fase 1	Fase 3
Epistêmico	Erros (IE1)	1	3
	Ambiguidades (IE2)	0	2
	Riqueza de processos (IE3)	3	4
	Representatividade da complexidade (IE4)	3	3
Cognitivo	Conhecimentos prévios (IC1)	4	4
	Adaptação curricular às diferenças individuais (IC2)	0	2
	Aprendizagem (IC3)	2	3
	Alta demanda cognitiva (IC4)	1	1
De Interação	Interação professor-aluno (II1)	4	4
	Interação entre alunos (II2)	0	4
	Autonomia (II3)	1	3
	Avaliação formativa (II4)	2	4
De Meios	Recursos materiais (IM1)	3	4
	Número de alunos, horário e condições da aula (IM2)	2	4

	Tempo (IM3)	3	4
Afetivo	Interesses e necessidades (IA1)	2	4
	Atitudes (IA2)	1	3
	Emoções (IA3)	1	4
	Adaptação curricular (IEC1)	1	4
Ecológico	Conexões intra e interdisciplinares (IEC2)	4	4
	Utilidade socio laboral (IEC3)	1	4
	Inovação didática (IEC4)	4	4

Fonte: elaboração própria.

Ao observar o quadro acima, é possível notar que na primeira fase do curso, os professores, em suas reflexões usam de forma implícita alguns dos componentes e indicadores dos CAD. Embora alguns componentes não tenham sido usados na fase 1, os que foram usados, não tiveram o mesmo peso na reflexão dos professores. A pergunta que se gera a partir disso é: porque alguns componentes são ignorados e outros são bastante utilizados?

Uma resposta para essa pergunta com relação à ausência de reflexão dos professores sobre os erros e as ambiguidades na primeira fase do curso, pode ser explicada pelo fato de que se dá por assumido que os professores não cometem erros e ambiguidades em aula, uma vez que a matemática é uma ciência que apresenta uma linguagem precisa e exata. Há um consenso assumido de que os professores não podem cometer erros de tipo matemático e nem ambiguidades ao explicar determinado objeto matemático.

Para outros componentes como a adaptação curricular às diferenças individuais, a resposta é um pouco diferente e se deve: 1) ao o fato de que os CAD, seus componentes e indicadores são produtos de um consenso na comunidade educativa, sobretudo, os explicitados nos diferentes currículos e nos cursos de formação de professores, congressos, etc.; 2) o grau de acordo que apresentam os professores com relação a estes consensos, uma vez que os professores não participam da mesma maneira e nem na mesma intensidade na geração de estes consensos. Por exemplo, parece evidente que a importância de retomar os conhecimentos prévios está bastante assumida pelo grupo de professores e está bastante presente nesta primeira fase de reflexão. Por outro lado, a interação entre alunos e a adaptação curricular às diferenças individuais não são tidas em conta na reflexão dos professores nesta primeira fase do curso, mas foram tidas em conta na terceira fase sem serem questionadas. Em outras palavras, pode-se dizer que alguns destes consensos são plenamente assumidos e outros, simplesmente, não são questionados.

Ao observar a segunda coluna (nível de uso dos CAD da reflexão dos professores na fase 3 do curso), nota-se uma melhora na reflexão em todos os componentes dos CAD. Este resultado, aponta que a resposta à pergunta: *A reflexão sobre a prática deve ser orientada?* É que sim. Esta primeira pergunta direciona a uma segunda pergunta: se a reflexão deve ser orientada, com qual ferramenta ela deve ser guiada? Os resultados que aqui se apresentam também permitem responder a esta segunda pergunta, já que mostram que a utilização dos CAD pode servir como ferramentas úteis para orientar a reflexão dos professores.

Se está adiante de um resultado que coincide com outras investigações que destacaram: (1) que dar aos professores a oportunidade de refletir sobre sua prática não é suficiente, (2) que os professores precisam de ferramentas para direcionar sua atenção para aspectos relacionados aos processos de instrução e (3) que essas ferramentas podem ser ensinadas como parte da formação de professores (e.g., Giménez, Font e Vanegas, 2013; Nilssen, 2010; Rubio, 2012; Seckel, 2016; Sun e van Es, 2015; Turner, 2012;).

Com relação ao ensino dos CAD, pode-se afirmar que estes podem ser ensinados e também aprendidos pelos participantes, tal como se evidencia nas avaliações da fase três do curso (quarta coluna do quadro 9), resultado que coincide com outras experiências realizadas no âmbito da formação inicial e continuada de professores (Esqué e Breda, 2021; Giacomone, Godino e Beltrán-Pellicer, 2018; Godino, Giacomone, Font e Pino- Fan, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya e Bustamante, 2019; Seckel e Font, 2020). Contudo, o que se observa é que este ensino e a aprendizagem dos CAD por parte dos professores apresentam diferentes níveis de aprendizagem. Por exemplo, há alguns componentes que resultam mais difíceis de entender e de operacionalizar de forma correta no redesenho, como o caso da representatividade da complexidade do objeto matemático a ser ensinado, bem como, a adaptação curricular às diferenças individuais. Esta dificuldade, apresentada pelos professores em refletir, compreender e operacionalizar sobre a representatividade da complexidade do objeto matemático a ser ensinado concorda com resultados internacionais de que os professores têm dificuldades para interpretar aspectos epistêmicos das tarefas e identificar seu potencial educacional (Stahnke, Schueler e Roesken-Winter, 2016). Com relação à adaptação curricular às diferenças individuais, o primeiro que há que ressaltar é que se trata de um aspecto muito importante e crucial na etapa do ensino obrigatório da maioria

dos países, inclusive do Brasil. Ou seja, existe um consenso, não discutido, que os alunos do ensino básico tem o direito que se tenha em conta a sua diversidade. Por outro lado, o professorado não dispõe das ferramentas adequadas para conseguir atingir a esta diversidade. Entre outras razões, esse fato se deve porque há havido poucas investigações sobre este tema (por exemplo, Font, 2011).

Por outro lado, outros componentes parecem terem sido mais fácil de compreender, uma vez que foram ensinados na fase dois do curso e melhor discutidos na reflexão e visualizados de forma correta no redesenho da aula na fase 3. Como exemplo paradigmático temos os conhecimentos prévios. O fato de usarem a pauta dos CAD para refletir sobre os conhecimentos prévios os levou a realizar uma reflexão mais detalhada sobre quais devem ser os conhecimentos prévios que devem possuir os alunos para estudar, por exemplo, o Teorema de Pitágoras e, nesse sentido, de forma consciente e detalhada, propuseram tarefas no redesenho que incluíam alguns conceitos necessários para ensinar o TP que não estavam presentes na reflexão realizada sobre este componente na fase 1.

Com relação ao ensino dos CAD seus componentes e indicadores, há que ressaltar dois aspectos. O primeiro é que ao serem um consenso, são facilmente assumidos pelos professores nos seus processos de ensino. Contudo, o fato de serem um consenso, implica que são ambíguos (por exemplo o que quer dizer riqueza de processos? O que significa aprendizagem? O que se pode entender por motivação? etc.) e, para seu ensino, é necessário que estes componentes sejam matizados no desenvolvimento do próprio curso formativo e, para isso, um curso baseado no ensino dos CAD exige um maior dispêndio de tempo para que estes critérios sejam mais refinados e melhor operacionalizados. Este aspecto foi amplamente comentado pelos professores participantes (ver seção 5.2.3 desta tese). O segundo aspecto tem a ver com a opção de ensinar os CAD com objetos matemáticos diferentes dos relacionados ao TP, uma vez que o objetivo era que os professores transferissem o conhecimento aprendido com os outros exemplos ao Teorema de Pitágoras. Ao observar que os participantes apresentaram dificuldades em realizar reflexões sobre alguns componentes, em particular, aos da adequação epistêmica, a pergunta que se faz é: será que não seria mais viável ensinar os CAD, seus componentes e indicadores utilizando diretamente exemplos do objeto matemático que se está trabalhando (neste caso, usar todos os exemplos relacionados com o TP)?

No próximo capítulo, apresentam-se as conclusões, limitações e perspectivas futuras desta pesquisa.

Capítulo 6. Conclusões

Neste capítulo, na primeira seção, apresentam-se as principais conclusões a que se chegaram, uma vez finalizadas a investigação e divulgação realizada. Já, na segunda seção, descrevem-se as limitações e perspectivas futuras deste estudo.

6.1 Conclusões relacionadas a cada objetivo específico

As principais conclusões relacionadas a cada objetivo específico proposto nesta pesquisa são apresentadas a seguir.

6.1.1 Conclusões sobre o objetivo específico 1

O primeiro objetivo que se havia proposto nesta pesquisa era:

O1) Realizar um estudo teórico sobre o LS e os CAD, procurando: i) compreender como cada um propõe o desenvolvimento de uma reflexão sobre a prática na formação de professores e ii) complementaridades e diferenças entre as duas abordagens.

Para conseguir este objetivo específico, analisou-se, primeiro, como cada uma das abordagens propõem o desenvolvimento da reflexão sobre a prática (própria ou alheia) na formação de professores, para depois, encontrar diferenças e complementariedades entre ambos enfoques.

Um resultado sobre as experiências que utilizam os CAD é que, nos momentos iniciais anteriores à introdução deste construto, os participantes são convidados a refletir (sem uma orientação previamente dada) sobre um episódio de sala de aula implementado por outro professor, etc. Em outras palavras, os dispositivos formativos para ensinar o CAD começam com um primeiro momento de reflexão não pautada. Nele, observa-se que os participantes formulam e utilizam implicitamente alguns indicadores e componentes do CAD antes que o referido construto lhes seja ensinado. Este fato é tomado como ponto de partida para iniciar o ensino dos CAD como conteúdo a ser explicitado para organizar a reflexão do professor sobre sua própria prática. Trata-se de um tipo de ciclo de formação que, ao invés de apresentar o CAD como princípios já elaborados, cria espaços para sua geração a partir do consenso no grupo. Posteriormente, os CAD são utilizados para refletir sobre a implementação das

sequências didáticas a fim de propor replanejamentos que tenham, *a priori*, mais adequação didática.

Nas experiências de ensino dos CAD, observou-se que: a) o momento inicial de reflexão é curta; b) os participantes não realizam um planejamento conjunto de uma sequência de atividades, nem realizam um aprofundamento, grupo, diálogo e reflexão crítica desse planejamento; c) A utilização dos CAD como diretriz para organizar a reflexão sobre a sequência de tarefas implementada ocorre com certa defasagem em relação ao ensino e aprendizagem desse construto.

Na metodologia LS, de certa maneira, pôde-se considerar que as etapas de reflexão são bastante amplas e que está orientada à melhora do processo de ensino e aprendizagem da matemática, por tanto, é de se esperar que nas etapas: de *estudo do currículo e estabelecimento de metas*; de *planejamento*; de *observação*; e na de *reflexão* e, posterior, *redesenho* orientado à melhora, os participantes usem de maneira implícita muitos dos indicadores e componentes dos CAD para fazer valorações positivas de alguns aspectos da experiência realizada.

Um resultado relevante, no âmbito teórico relacionado às etapas do LS, a partir do exercício de identificar quais CAD estão presentes nas etapas de um ciclo de LS, encontrou-se que a maioria dos CAD são contemplados em um ciclo completo de LS. Em particular, os CAD ecológico e cognitivo são evidenciados na etapa de *seleção do tema e estudo do currículo*; os CAD epistêmico, de meios, cognitivo e de interação estão relacionados à etapa de *planejamento* da aula; os CAD cognitivo, epistêmico e afetivo estão presentes na etapa de *implementação e observação* e os CAD cognitivo e de meios estão presentes na etapa de *reflexão* da observação. Contudo é importante salientar que, embora muitos critérios tenham sido contemplados, nem todos os componentes foram considerados nas etapas de um ciclo de LS.

Os resultados apresentados suportam que, para desenvolver (e investigar) a reflexão sobre a prática na formação de professores de matemática, um dispositivo de formação adequado pode ser aquele que combina a utilização do LS e do CAD como instrumento metodológico de organização do professor sobre a reflexão sobre a prática, visto que esse uso combinado pode produzir uma sinergia relevante para o desenvolvimento da sua reflexão. Por um lado, as experiências de LS permitem uma etapa inicial mais ampla de reflexão sobre o

planejamento da sequência didática e um trabalho colaborativo ao longo da experiência, o que permite o surgimento de alguns indicadores e componentes do CAD. De outra forma, o ensino e o uso do CAD permitem que os professores tenham um padrão de reflexão mais completo para organizar a reflexão em grupo.

6.1.2 Conclusões sobre o objetivo específico 2

O estudo teórico e revisão da literatura realizados no O1 permitiu concluir que, para desenvolver (e pesquisar) a reflexão sobre a prática na formação de professores de matemática, um dispositivo de formação adequado pode ser aquele que combina a utilização do LS e do CAD. Em particular, as experiências de LS permitem um momento inicial mais amplo de reflexão sobre o planejamento da sequência didática e um trabalho colaborativo ao longo da experiência, o que permite o surgimento de alguns indicadores e componentes do CAD. O segundo objetivo que se havia proposto nesta pesquisa era:

Desenhar e aplicar um ciclo de formação para professores de matemática em exercício com base no LS e nos CAD, cujo objetivo é que os participantes desenhem, implementem, valorem e redesenhem sequências de tarefas para os seus alunos do ensino básico.

Trata-se de um objetivo específico que permite concretizar e operacionalizar a conclusão do objetivo específico 1.

Para conseguir este objetivo específico O2, foi realizado, inicialmente um estudo piloto que objetivava verificar as possibilidades e limitações de implementar um curso formativo que abordasse os enfoques LS e CAD. Além disso, o que se buscava era mostrar como nas etapas de um LS aparecem, implicitamente, nas reflexões dos participantes, alguns dos componentes e indicadores dos CAD. O estudo corrobora com o que se havia inferido da revisão da literatura com relação ao uso implícito dos CAD nas experiências de LS: há o uso implícito de alguns indicadores e componentes dos CAD na reflexão feitas pelos participantes. Em outras palavras, os CAD funcionam implicitamente como regularidades no discurso dos professores, sem ter sido ensinado o uso desta ferramenta para guiar suas reflexões.

Este resultado, juntamente com outros, é uma evidencia que as reflexões do corpo docente, quando são valorativas e orientadas para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem, são organizadas, implicitamente, por meio de alguns indicadores dos

componentes do CAD. A partir dos resultados do estudo piloto, observamos a viabilidade de ofertar um curso de formação voltado para o desenvolvimento da reflexão docente. Nesse sentido, realizamos o desenho e a implementação de um curso de formação que combina o uso da metodologia LS com CAD como ferramenta para organizar a reflexão sobre a prática.

Embora tivesse sido realizado um desenho prévio do curso, é importante salientar que a implementação do mesmo não seguiu, estritamente, a pauta referente ao desenho. Alguns fatores foram geradores de mudanças consideráveis: a) alteração na modalidade do curso (presencial para virtual); b) número de professores participantes (efetivamente participaram 8 professores de matemática em exercício); c) cronograma e atividades desenvolvidas no curso (ajustes no desenho do curso por falta de tempo de implementá-lo em sua totalidade). Já, a implementação do curso deu-se em três fases (fase 1, fase 2 e fase 3), mais uma fase anterior à fase 1 (fase 0). Na fase 0 do curso, que coincide com a sessão 1, realizou-se a apresentação e estrutura do curso e explicou-se o que é o LS aos participantes. A fase 1 do curso foi composta pelas sessões 2, 3, 4, 5 e 6 e correspondeu ao desenvolvimento de dois ciclos completos de LS. A fase 2 do curso (sessões 7, 8, 9 e 10), ensinou-se os CAD aos participantes. Por fim, na fase 3 do curso (sessões 11, 12, 13, 14, 15 e uma sessão extra), os professores fizeram uso dos CAD para fazer uma nova reflexão sobre a aula do Teorema de Pitágoras implementada no Ensino Fundamental, e um redesenho da aula a partir do que se observou com o uso dos CAD, este último como ferramenta que pautou a reflexão dos professores.

Uma primeira conclusão relacionada à implementação do curso é o de que os professores participantes consideram que participar de um curso que combina o LS e os CAD desenvolveu neles algumas competências docentes, principalmente a competência reflexiva, tanto para desenhar uma aula, quanto para valorá-la. Uma segunda conclusão é a de que os professores assumem haverem desenvolvido alguns sentimentos e emoções ao trabalhar de forma cooperativa e grupal (aspecto contemplado na abordagem LS). Uma terceira conclusão, referente à implementação do curso de formação, é a de que o tempo total do curso realizado de forma virtual, de 40 horas, não permitiu uma nova implementação da aula redesenhada com os CAD e, conseqüentemente, sua análise. Outra conclusão é a de que algumas sessões do curso foram realizadas muito rapidamente. Nesse sentido, para uma próxima edição, sugere-

se aumentar o tempo de um curso de 40 horas para 60 horas ou mais. Por último, destaca-se que, apesar de a implementação do curso ter ocorrido no meio de uma pandemia, tanto os pesquisadores que o implementaram, quanto os participantes, puderam adaptar-se e realizar o curso adequadamente por meio das plataformas virtuais de comunicação.

6.1.3 Conclusões sobre o objetivo específico 3

O terceiro objetivo que se havia proposto nesta pesquisa era:

Investigar o papel dos CAD numa experiência de LS, antes que esta ferramenta tenha sido ensinada aos participantes como um guia para organizar a sua reflexão, no contexto de um dispositivo de formação desenhado para combinar as duas metodologias. Tratava-se de aprofundar a pesquisa iniciada no O1 (teoricamente e como resultado da revisão da literatura) e aquela realizada no estudo piloto (descrito no O2) e, agora, no curso de LS desenhado e implementado.

Este objetivo buscou investigar o nível de uso implícito dos CAD, presentes na reflexão de um grupo dos professores participantes quando planejam, implementam e redesenham uma aula para ensinar o Teorema de Pitágoras (TP) em uma experiência de LS.

Para atingir esse objetivo, primeiramente, analisou-se as reflexões dos professores realizadas durante a fase 1 do curso implementado (fase de desenvolvimento do LS), onde os participantes, divididos em dois grupos, desenharam, implementaram e analisaram duas aulas sobre o TP. Para isso, as sessões 2, 3, 4, 5 e 6 do curso foram transcritas e trechos do discurso dos professores (comentários que justificavam as decisões para planejar e analisar a aula implementada) foram selecionados. Isto é, durante as sessões que correspondem as etapas de *estudo do currículo e metas, planejamento da aula e reflexão da aula*, dos dois LS desenvolvidos (aula do TP no Ensino Fundamental e aula do TP no Ensino Médio), selecionou-se parágrafos da reflexão dos professores que poderiam ser considerados evidências do uso implícito de alguns dos indicadores e componentes dos diferentes CAD.

Feito isso, categorizou-se essas considerações como evidência do uso implícito de alguns dos componentes e indicadores dos CAD. E, por fim, para analisar o grau de utilização implícita de componentes ou indicadores dos CAD na reflexão dos professores, foi

estabelecido um nível de escala discreto (de 0 a 4), que foi atribuído após triangulação com dois especialistas em AOS (os diretores desta tese de doutorado).

Como primeiro resultado, encontra-se que, na reflexão dos participantes aparecem trechos do discurso nos quais utilizam implicitamente alguns indicadores e componentes dos CAD. Em particular, observa-se que as reflexões dos participantes se organizam implicitamente através de alguns indicadores das componentes dos critérios de adequação didática e, também, que a valoração positiva destes indicadores, em alguns casos, assenta-se no pressuposto implícito de que existem certas tendências no ensino da matemática que nos dizem como deve ser um ensino da matemática de qualidade.

Este é um resultado que está em linha com os obtidos em outras investigações que se interessaram pelo papel dos CAD na reflexão dos professores ou futuros professores em cursos de formação, realizados em diferentes países, em que não foram ensinados o uso desta ferramenta (Breda, 2020; Morales-López e Font, 2017; Font, Pino-Fan e Breda, 2017, entre outras), resultado que, também, coincide com o estudo piloto realizado. Uma das razões pelas quais os CAD funcionam como regularidades no discurso dos professores, sem ter sido ensinado o uso desta ferramenta para guiar sua reflexão, é que os CAD refletem o consenso sobre o que é considerado bom para o ensino de matemática, amplamente assumido na comunidade de educadores. Além disso, é plausível o uso implícito que os professores fazem desta ferramenta, dado que em seus processos formativos se tornam sujeitos partícipes de estes consensos (Breda, Font e Pino-Fan, 2018). Outro resultado importante é que o grupo de professores, ao realizar sua reflexão nas etapas do LS, apresenta diferentes níveis de uso de cada CAD e, em particular, de cada componente de um mesmo critério. Estes resultados levam a concluir que o nível de uso dos CAD na reflexão dos professores se relaciona, prioritariamente, a aspectos contextuais (conhecimento do contexto real no qual a aula sobre o TP foi implementada) e aos aspectos consensuais assumidos na comunidade educativa ou impostos pelas normativas curriculares ou do centro educativo. Em alguns casos, as reflexões inclinadas a um componente ou outro são definidas pelo grau de aceitação gerado pelos próprios professores participantes do LS, uma vez que existem algumas tendências e alguns princípios plenamente aceitos na Educação Matemática que indicam quais características e

aspectos temos que levar em consideração quando realizamos um processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Conclui-se que, o LS favoreceu a organização e a coleta de dados, permitindo identificar os CAD implícitos no discurso dos professores em todas as etapas do LS analisadas. Na análise efetuada, evidencia-se que, numa aula de LS, surge um consenso implícito entre o professor que desenvolve a aula e os demais professores participantes sobre aspectos valorizados positivamente, os quais podem ser reinterpretados em termos de indicadores e componentes dos CAD. Em particular, uma das vantagens de se trabalhar com a dinâmica do LS é que alguns aspectos que não estão presentes na reflexão do próprio professor podem estar presentes na reflexão dos outros professores que participam do processo de ensino e aprendizagem. Ou seja, o enfoque LS passa a ser uma espécie de estratégia profissional docente que favorece que alguns dos indicadores e componentes do CAD surjam como consenso na reflexão do grupo de professores.

6.1.4 Conclusões sobre o objetivo específico 4

O quarto objetivo específico que se havia proposto nesta pesquisa era:

Analisar de que forma o ciclo de formação implementado desenvolve a reflexão nos professores de matemática participantes.

As análises realizadas para alcançar o objetivo específico 4 desta tese apontam a forma que o ciclo formativo implementado desenvolveu a reflexão nos professores participantes. Uma primeira consideração sobre este resultado é a de que os professores, ao participarem do curso formativo, apresentaram uma melhora na reflexão sobre o ensino do Teorema de Pitágoras nas diferentes fases do curso, evidenciando um melhor e mais profundo uso dos CAD na fase 3.

Ao observar os resultados da reflexão na fase 3 do curso, pode-se notar uma melhora na reflexão em todos os componentes dos CAD. Este resultado aponta que a reflexão sobre a prática deve ser orientada e, mais que isso, pode ser guiada com o auxílio dos CAD, já que os resultados mostram que a utilização dos CAD pode servir como ferramentas úteis para orientar a reflexão dos professores.

Com relação ao ensino dos CAD, pode-se afirmar que estes podem ser ensinados e também aprendido pelos participantes como se evidencia nas avaliações da fase três do curso, resultado que coincide com outras experiências realizadas no âmbito da formação inicial e continuada de professores. Contudo, o que se observa é que este ensino e a aprendizagem dos CAD por parte dos professores apresentam diferentes níveis de aprendizagem. Por exemplo, há alguns componentes que resultam mais difíceis de entender e de operacionalizar de forma correta no redesenho, como o caso da representatividade da complexidade do objeto matemático a ser ensinado, bem como, a adaptação curricular às diferenças individuais. Por outro lado, outros componentes parecem terem sido mais fácil de compreender, uma vez que foram ensinados na fase dois do curso e melhor discutidos na reflexão e visualizados de forma correta no redesenho da aula na fase 3.

Com relação ao ensino dos CAD seus componentes e indicadores, ressaltam-se dois aspectos. O primeiro é o de que ao serem produto de um consenso, são facilmente assumidos pelos professores nos seus processos de ensino. Contudo, o fato de serem um consenso, implica que são ambíguos (por exemplo, o que quer dizer riqueza de processos? O que significa aprendizagem? O que se pode entender por motivação? etc.) e, para seu ensino, é necessário que estes componentes sejam matizados no desenvolvimento do próprio curso formativo e, para isso, um curso baseado no ensino dos CAD exige um maior dispêndio de tempo para que estes critérios sejam mais refinados e melhor operacionalizados. O segundo aspecto tem a ver com a opção de ensinar os CAD com objetos matemáticos diferentes dos relacionados ao TP, uma vez que o objetivo era que os professores transferissem o conhecimento aprendido com os outros exemplos ao Teorema de Pitágoras, concluindo que é, provavelmente, mais viável ensinar os CAD, seus componentes e indicadores utilizando, diretamente, exemplos relacionados ao objeto matemático que se está trabalhando.

6.2 Limitações e perspectivas futuras da pesquisa

A partir das conclusões apresentadas, entendemos que o estudo apresenta limitações e perspectivas de trabalho futuro. Uma delas é a de que o curso foi aplicado em um contexto particular (professores de matemática que tiveram sua formação e praticam o exercício da docência na Educação Básica no Brasil). Nesse sentido, os resultados são contextuais e, acima

de tudo, indissociáveis, por um lado, da motivação dos participantes e, por outro, também muito relevante, da gestão (principalmente a relacionada à interação) da pesquisadora que implementou o curso (também altamente motivada para realizar esta pesquisa). Portanto, implementar o curso em outro contexto e com outros participantes (por exemplo, professores em formação inicial ou de outra realidade educativa, poderia apresentar resultados diferentes), é um aspecto a ser considerado como linha futura deste trabalho.

Outra limitação com relação a este estudo é a de que o curso foi realizado na modalidade virtual e este é um dos fatores, explanado pelos próprios participantes, de que faltou tempo para que eles pudessem se apropriar melhor dos CAD e discutir mais sobre o redesenho da aula sobre o ensino do TP. Uma possibilidade de linha futura é aplicar o curso na modalidade presencial.

Uma terceira limitação do estudo está relacionada com o tipo de análise que foi realizada para pesquisar de que forma um curso formativo que combina a LS e os CAD desenvolve a reflexão docente. A análise de tipo qualitativo, buscou atribuir níveis de uso dos CAD na reflexão dos professores nas diferentes fases do curso. Uma possível linha futura para este estudo é a de realizar uma análise a partir da noção de argumentação prática. Ou seja, buscar identificar os argumentos realizados pelos professores participantes (e o jogo entre eles) para verificar as tomadas de decisão acordadas e, efetivamente, verificar quais delas se observam explicitamente no redesenho da aula previamente desenhada e implementada em um contexto de *Lesson Study*.

Uma quarta e última limitação desta pesquisa é a de que os resultados encontrados não aportam informação, com exceção do desenvolvimento da reflexão docente, sobre outros tipos de competências e conhecimentos didático-matemáticos adquiridos durante o processo formativo do curso implementado. Nesse sentido, uma linha futura de pesquisa é analisar, com o apoio das diferentes ferramentas da Abordagem Ontosssemiótica, quais os conhecimentos e competências didático-matemáticas foram, efetivamente, desenvolvidas pelos professores participantes.

Publicaciones derivadas de la tesis

Algunos resultados de la tesis fueron publicados en periódicos, capítulos de libro y actas de congresos, en lo que sigue:

Periódicos

Breda, A., Hummes, V. B., Silva, R. S., y Sánchez, A. (2021). The Role of the Phase of Teaching and Observation in the Lesson Study Methodology. *Bolema*, 35(69), 263-288. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>

Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J., & Font, V. (2020). Criterios de idoneidad didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Praxis & Saber*, 11(26), e10667. <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667>

Hummes, V. B., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. (2020). Didactical Suitability Criteria in Videos of Lesson Study. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 3, 257-268.

Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2020). Concordâncias e complementaridades entre o Lesson Study e a Idoneidade Didática para O desenvolvimento da prática reflexiva na formação de professores. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(2), 796-806.

Hummes, V. B., Font, V., Breda, A., (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers, *Acta Scientiae*, 21(1), 64-82. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>.

Hummes, V. B. (2019). Theory and practice of lesson study in mathematics: An international perspective. [Review]. *Redimat*, 8(2), 339-340. <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.4789>

Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2019). desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica en un ciclo formativo que combina el uso de los criterios de idoneidad

didáctica y la metodología de estudios de clases. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 531 - 538.

Capítulo de libro

Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2021). El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el *Lesson Study* y los criterios de idoneidad didáctica. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu, y W. F. Castro (Eds.). *Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina* (en prensa).

Hummes, V., Breda, A. & Font, V. (em avaliação). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de *Lesson Study*. En. A. Richit, J. P. da Ponte, E. S. Gómez (Eds), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores*, Livraria da Física, São Paulo, Brasil

Actas de Congresos

Hummes, V., Breda, A., Font, V., Silva, R. S. (en prensa). *Lesson Study* e idoneidad didáctica en la reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de Lesson Study* (p. 402-409). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

Silva, R. A., Führ, L., Henrique, V. R. C., Hummes, V. (en prensa). Reflexão sobre uma aula de Teorema de Pitágoras em um ciclo de *Lesson Study*: um olhar desde os critérios de idoneidade didática mediacional, ecológico e epistêmico. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de Lesson Study* (p. 340-348). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

Agache, G. E. T., Brandt, N., Linde, I. C., Hummes, V. (en prensa). Análise e reflexão desde o olhar dos critérios de idoneidade didática interacional, cognitivo e afetivo de uma aula de Teorema de Pitágoras em um ciclo *de Lesson Study*. In Regina da Silva Pina Neves, R. & Fiorentini, D. (Org.). *Atas do Seminário Internacional de Lesson Study* (p. 302-309). Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo: Vitória, Espírito Santo.

Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. (2020). Desenho de um curso de formação que combina o uso do Lesson Study e da idoneidade didática para o desenvolvimento da competência reflexiva de professores de matemática (p. 190-195). In: *Actas del 5 Encuentro Internacional de Educación Matemática (EIEM)*, Universidad del Atlántico: Barranquilla, Colombia.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.

Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. In: *Actas del 7th International Congress of Educational Sciences and Development*, (p. 233-233). Asociación Española de Psicología Conductual (AEPC), Granada.

Referencias

- Araújo, W. R. (2018). *Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de Lesson Study*. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/332979>>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da metodologia japonesa de *Lesson Study* nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. En *Anais do XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão*. São Paulo, Brasil: SBPN.
- Bezerra, R. C. (2017). *Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study*. Tese de doutorado. Unesp, Presidente Prudente, Brasil. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/151292>>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- Bikner-Ahsbabs, A., y Prediger, S. (2010). Networking of theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In *Theories of mathematics education* (pp. 483-506). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA journal of mathematics, science and technology education*, 14(6), 2301-2315.
- Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*[Paths to the inner world of mathematical modelling: cognitive analyses of modelling processes in mathematics lessons]. Wiesbaden, Germany: Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9784-8>
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham, Switzerland: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, 34(66), 69-88.
- Breda, A., Bolondi, G., y de Abreu Silva, R. (2021). Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática: um estudo metanalítico das teses produzidas no Brasil. *Revemop*, 3, e202117. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202117>

- Breda, A., Farsani, D., y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *INTERMATHS*, 1(1), 3-19. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v1i1.7400>
- Breda, A., Font, V., y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2), 1-41.
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Hummes, V. B., Silva, R. S., y Sánchez, A. (2021). The Role of the Phase of Teaching and Observation in the Lesson Study Methodology. *Bolema*, 35(69), 263-288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918.
- Breda, A., Pochulu, M., Sánchez, A., y Font, V. (2021). Simulation of Teacher Interventions in a Training Course of Mathematics Teacher Educators. *Mathematics*, 9, 3228. <https://doi.org/10.3390/math9243228>
- Breda, A., y Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103.
- Brockbank, A., y McGill, I. (2002). *Aprendizaje reflexivo en la educación superior*. Madrid: Morata.
- Burghes, D. N. y Robinson, D. (2010). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning*. Reading, Reino Unido: CfBT Education Trust.
- Carrijo Neto, L. A. (2013). *A pesquisa de aula (lesson study) no aperfeiçoamento da aprendizagem em matemática no 6º ano segundo o currículo do estado de São Paulo*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4458>>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13.

- Coelho, F. G., de Oliveira, A. T., y Vianna, C. S. (2014). A metodologia da *Lesson Study* na formação de professores: uma experiência com licenciandos de Matemática. *VIDYA*, 34(2), 1-12.
- CPEIP [Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile]. (2012, 24 de enero). *Estudio de Clases – Geometría* [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8>.
- D'Amore, B., y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 191-218.
- Da Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Da Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., y Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática*, 1(1), 7-24.
- Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, 14(2), 86-91.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 43, 19-58.
- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23-49.
- Dudley, P. (Ed.). (2014). *Lesson study: Professional learning for our time*. Routledge.
- Esqué, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38-54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Farsani, D., Breda, A., Sala, G. (2020). ¿Cómo los gestos de los maestros afectan a la atención visual de las estudiantes durante el discurso matemático? *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 9(3), 220-242. Doi: 10.17583/redimat.2020.5185
- Farsani, D., Radmehr, F., Alizadeh, M., Zakariya, Y. F. (2021). Unpacking the black-box of students' visual attention in Mathematics and English classrooms: Empirical evidence using mini-video recording gadgets. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(3), 773-781.

- Felix, T. F. (2010). Pesquisando a melhoria de aulas de matemática segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study). Dissertação de mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4412>>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, EE. UU.: Erlbaum.
- Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, en M. Marín Rodríguez, G. García, L. Blanco, M. Medina (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (165-194). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.
- Font, V., Breda, A., Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 10(2), p. 1-23. Doi:10.3895/rbect.v10n2.5981
- Font, V., Breda, A., y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 255-264). Zaragoza: SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Font, V., Pino-Fan, L., y Breda, A. (2017). Regularidades en la reflexión del profesor de matemáticas. *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 159-166). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- Font, V., y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas*. (pp. 9-55). Barcelona, España: Graó.
- Foucault, M. (1998). *Microfísica do poder*. 7. ed. Rio de Janeiro: edições Graal.

- Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae*, 23(3), 1-33. Doi: 10.17648/acta.scientiae.6389
- Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011>
- Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22 (pp. 581-590). Oxford: ICMI studies.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. *Universidad de Granada*. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf
- Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37- 42.
- Godino, J. D., Burgos, M., y Gea, M. M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-28.
- Godino, J. D., Contreras, Á., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 26(76), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 117-150.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y De Castro Hernández, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.

- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Onto-Semiotic Approach to Mathematics Teacher's Knowledge and Competences. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., de la Fuente, Á. C., & Giacomone, M. B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de investigación en educación matemática*, (10), 91-110.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Giacomone, M. B., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos: análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.
- Godino, J.D., Beltrán-Pellicer, P. y Burgos, M. (2020). Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5 (2) 51-66.
- Gunduz, N., Hursen, C. (2015). Constructivism in Teaching and Learning; Content Analysis Evaluation. *Procedia - Social And Behavioral Sciences*, 191 (The Proceedings of 6th World Conference on educational Sciences), 526-533.
- Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (Eds). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Hervas, G. (2022). The international popularization of Lesson Study: early studies and their relevance in later literature. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 33, 38-54.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Huang, R., Takahashi, A., y da Ponte, J. P. (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics*. New York, EE.UU.: Springer.
- Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.

- Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J., Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Revista Praxis & Saber: Maestría en Educación*, 11(26), e10667.
- Hurd, J., & Lewis, C. (2011). *Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction*. EUA: Heinemann Educational Books.
- Isoda, M., Arcavi, A., y Lorca, A. M. (2007). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso/Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Kaiber, C. T., Lemos, A. V., & Pino-Fan, L. R. (2017). Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. *Perspectivas da Educação Matemática*, 10(23), 531-552.
- Leguizamón-Romero, J. F. (2017). Patrones de interacción comunicativa del profesor universitario de matemáticas. Un estudio de caso. *Praxis & Saber*, 8(16), 57-82.
- Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources: LLC.
- Lewis, C., & Perry, R. (2017). Lesson study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. *Journal for research in mathematics education*, 48(3), 261-299.
- Lim-Ratnam, C. (2013). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(3), 304-306. Doi: <https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2013-0025>.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de investigación en educación matemática*, (2), 53-70. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.18>
- Lorca, A. M. (2007). El estudio de clases japonés en perspectiva. In: *Actas del XIII Jornadas Nacionales De Educación Matemática* (pp. 1-7). Viña del Mar: Sociedad Chilena de Educación Matemática.
- Malet, O., Giacomone, B., y Repetto, A. M. (2021). La Idoneidad Didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, 3, e202110-e202110.
- Mallart, A., Font, V., y Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, 38(152), 14-30.

- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Maxim, G. W. (2010). *Dynamic Social Studies for Constructivist Classrooms*. Boston: Pearson Education, Inc.
- McSweeney, K., y Gardner, J. (2018). Lesson Study Matters in Ireland. In *Rural Environment. Education. Personality (REEP 2018)* (Vol. 11, pp. 304-313). Latvia University of Life Sciences and Technologies.
- Ministério da Educação do Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018. Disponible en < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>> Acceso en 20 octubre de 2021.
- Mishra, R. K. (2015). Teaching–Learning in a constructivist social science classroom. *Journal of Educational Sciences & Psychology*, 5(2), p. 15–22.
- Morales-López, Y., y Araya-Román, D. (2020). Helping Preservice Teachers to Reflect. *Acta Scientiae*, 22(1), 88–111. <http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5641>
- Morales-López, Y., y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, 19(1), 122-137.
- Morales-Maure, L., Durán-González, R. E., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista Inclusiones*, 6(2), 142-162.
- Moreira, C. B., Gusmão, T. C. R. S., y Font, V. (2018). Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. *Bolema*, 32(60), 231-254.
- Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. C. Hart, A. S. Alston, A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in Mathematics Education* (pp. 1-12). New York: Springer.
- Murata, A., y Takahashi, A. (2002). Vehicle to connect theory, research, and practice: How teacher thinking changes in district-level Lesson Study in Japan. En D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1879-1888). Athens, EE. UU.: IGPME.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nicolás, J. A., y Frápolli, M. J. (Eds.). (1997). *Teorías de la verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos.
- Nilssen, V. (2010). Encouraging the habit of seeing in student teaching. *Teaching and Teacher Education*, 26(3), 591-598. doi:10.1016/j.tate.2009.09.005
- Oliveras, M. L., y Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 8(2), 432-449.
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar: Invitación al viaje*. Barcelona: Graó.
- Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, 11(2), 97-124.
- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime*, 19(1), 71-98.
- Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales* [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. Repositorio institucional – Universitat de Barcelona.
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2020). Secondary School Mathematics Teachers? Professional Learning in a Lesson Study. *Revista Acta Scientiae*, 22(2), 2-27.
- Richit, A., da Ponte, J. P., & Tomasi, A. P. (2021). Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(2), em0637. <https://doi.org/10.29333/iejme/10904>

- Richit, A., da Ponte, J., & Tomkelski, M. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54-81. <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3961>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-27. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071>
- Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. Repositorio institucional – Universitat de Barcelona
- Sánchez, A., Breda, A., Font, V., y Sala, G. (2021). ¿Qué errores detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten? *Revista CIDUI*, 5, 1-13.
- Sánchez, A.; Font, V.; Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Math. Educ. Res. J.* **2021**, 13, 31–51.
- Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.
- Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. Repositorio institucional – Universitat de Barcelona.
- Seckel, M. J., y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 12(25), 127-144.
- Simon, M. (2000). Research on mathematics teacher development: The teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh, *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Stahnke, R; Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 48(1), 1-27.
- Sun, J., & van Es, E. A. (2015). An exploratory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers' classroom practice. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 201-214. doi:10.1177/0022487115574103

- Takahashi, A., y McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, 48(4), 513-526.
- Turner, F. (2012). Using the knowledge quartet to develop mathematics content knowledge: The role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education*, 14(3), 253-271. doi:10.1080/14794802.2012.734972
- Utamura, G. (2015). *Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no quinto ano*. Tesis de maestrado. Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.
- Utamura, G. Z., de Souza Borelli, S., y Curi, E. (2020). Lesson Study (Estudo de Aula) em diferentes países: uso, etapas, potencialidades e desafios. *Educação Matemática Debate*, 4, e202007.
- Vergel, R., Godino, J. D., Font, V. et al. (2021). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach on the school algebra nature and learning. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi-org.sire.ub.edu/10.1007/s13394-021-00400-y>
- Wang-Iverson, P., y Yoshida, M. (Eds.) (2005). *Building our understanding of Lesson Study*. Philadelphia, EE. UU.: Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Font, V. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. In *Colloque International Didactiques: quelles références épistémologiques*. Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation (AFIRSE): Bordeaux, France
- Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States: current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(2), 140-152

Anexos

Os anexos correspondem a: a) Anexo 1, proposta da aula de pesquisa no Ensino Fundamental; b) Anexo 2, redesenho da aula de pesquisa no Ensino Fundamental, c) Anexo 3, transcrição da entrevista com P4; d) Anexo 4, questionário final aplicado aos professores participantes do curso; e) Anexo 5, termo de aceitação assinado pelos participantes do curso piloto; f) Anexo 6, termo de aceitação assinado pelos professores participantes da pesquisa.

Anexo 1. Proposta da aula de pesquisa no Ensino Fundamental

Proposta de aula (research lesson)
Ensino fundamental

Objetivo geral da aula: Introduzir o conceito do Teorema de Pitágoras

Objetivos específicos da aula:

- Revisar o conceito de área de um quadrado;
- Identificar as características de um triângulo retângulo;
- Reconhecer a diagonal de um retângulo como sendo a hipotenusa do triângulo retângulo;
- Identificar a hipotenusa e catetos;
- Utilizar o Teorema de Pitágoras para reconhecer que um triângulo é retângulo;
- Calcular o valor de um dos lados do triângulo retângulo dados outros dois;
- Resolução de problemas aplicando o Teorema de Pitágoras.

Data da aula: 24/04/2020 (sexta-feira)

Horário: das 15:00 às 16:30

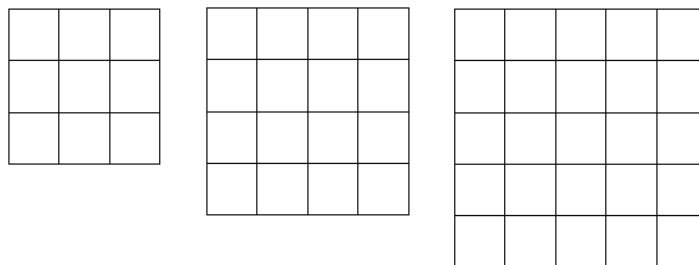
Público alvo: 9º ano de uma escola municipal da cidade de Canoas - RS

Faixa etária dos alunos: 14 e 15 anos

Recurso para *feedback* dos alunos: *Google* Formulários

Pré Aula

Antes da aula, a professora P4 solicitará aos alunos que construam uma folha quadriculada e recortem um quadrado de lado 3, um quadrado de lado 4, um quadrado de lado 5 e um retângulo com dimensões 3 e 4.



- 1) Construção de papel quadriculado na folha de caderno;
- 2) Construção dos quadrados com lados 3, 4 e 5;
- 3) Construção do retângulo de base 4 e altura 3;
- 4) Recortar os quadrados e o retângulo.

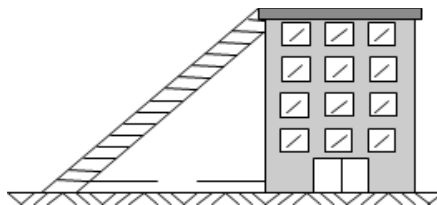
Aula

- 1) Contextualizar a História do Teorema de Pitágoras.
- 2) Relembrar o conceito de área, usando os quadrados já confeccionados;

- 3) Recortar na diagonal do retângulo, formando dois triângulos de de lados 3, 4 e 5 ;
- 4) Relembrar as propriedades do triângulo retângulo, comparando com as propriedades do retângulo (os ângulos formados); caso os alunos comparem o triângulo formado com outros triângulos, como isósceles, explicar as diferenças.
- 5) Trabalhar a questão do reconhecimento e identificação da hipotenusa e dos catetos (tanto geometricamente, quanto algebricamente)
- 6) Solicitar que os alunos façam a construção de um quebra-cabeça com os quadrados de lados respectivos aos lados do triângulo construído a partir do retângulo e enviem uma foto para a professora via WhatsApp;
- 7) Explicação do professor do conceito e fórmula do Teorema de Pitágoras utilizando outros exemplos; (usar outros números, outros valores de lados de triângulos retângulos; usar o caso do triângulo de catetos 1 e hipotenusa raiz de 2.)
 - a) triângulo de catetos 6 e x e hipotenusa 10.
 - b) triângulo de catetos 5 e 12 e hipotenusa x
 - c) triângulo de catetos iguais a 1 e hipotenusa x .
- 8) Resolução de exemplos para prática dos exercícios de compreensão.

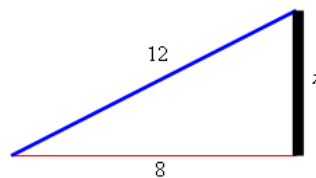
Exemplo 1:

A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de?



Exemplo 2:

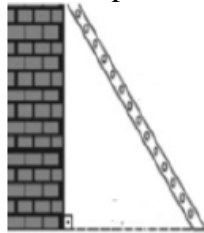
Uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros. Determine a altura do muro aproximadamente



- 9) Exercícios no formulário *google forms*.

Exercícios:

- 1) Em cada item, estão indicadas as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo. Desenhe os triângulos de cada item. Utilizando o Teorema de Pitágoras, verifique quais deles são triângulos retângulos.
 - a) 4, 7 e 8
 - b) 12, 16 e 20
 - c) 12, 5 e 13
- 2) Determine a medida das hipotenusas dos triângulos retângulos cujos catetos medem:
 - a) 9 m e 12 m
 - b) 1 cm e 3 cm
 - c) 1cm e 2 cm
- 3) Responda às seguintes perguntas:
 - a) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados medem 30 m e 40 m?
 - b) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo o lado mede 10 m?
- 4) Uma escada tem 17 m de comprimento e está apoiada no topo (em cima) de um muro de 15 m altura. Qual a distância entre o pé da escada e o muro?



Apoio curricular: BNCC Link de acesso à BNCC
<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>

- a) (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- b) (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Anexo 2. Redesenho da aula de pesquisa no Ensino Fundamental

Proposta de redesenho de uma unidade didática para o ensino do Teorema de Pitágoras (TP) no ensino fundamental

a) Quadro com o resumo das sugestões para o redesenho da aula sobre o TP

MEDIACIONAL		ECOLÓGICA		EPISTÊMICO	
Materiais utilizados Duas câmeras Horário da aula Número de alunos Tempo Contextualização histórica Tempo Conhecimentos Prévios	Papel quadriculado YouTube ou Meet Participação externa Tempo da aula Tempo justificação do Teorema de Pitágoras Ruídos externos	Inovações didáticas (Google Forms, YouTube)	TP no cotidiano TP na história Contemplar currículo Conectar TP e recíproco Problemas com a realidade dos alunos Alunos elaboram problemas	Controlar erros e ambiguidades Conexão TP e recíproco Demonstração TP? Verificações experimentais do TP? Representatividade nos problemas Conexão dentro do significado geométrico (área e comprimento) Melhorar a riqueza de processos Significado aritmético-algébrico? Representações dos números irracionais?	
INTERACIONAL		AFETIVO		COGNITIVO	
Autonomia estudantes Interação chat/whats	Conexão TP com seu recíproco Conexão TP áreas e comprimento Resolver conflitos significado Interação alunos chat/grupos Identificar pouco autônomos Avaliação formativa Controlar autonomia mat. prévio	Tratamento individual (personalizado) Dinâmica de considerar as respostas apresentadas Gestão da aula Aula dinâmica inclusiva	Utilidade social e laboral	Conhecimento Prévios Trabalhados Dinâmica aula (chat/fotos instrumentos avaliação)	C.P operações/equações Materiais alunos Atividades diversidade Instrução papel quadriculado Letras utilizadas Atividades formulário

b) Quadro sugestão de organização da Unidade Didática para um redesenho

	Conhecimentos prévios	Contexto Histórico	Teorema Pitágoras			Volta do Teorema de Pitágoras	Aplicação do Teorema de Pitágoras	Avaliação Formativa
			SP 1	SP 2	S P3			
Bloco 1	X	X					X (A. Inicial)	
Bloco 2			X	X		X	X (A. Contínua)	
Bloco 3					X	X	X (A. Contínua)	
Bloco 4						X	X (A. Final)	

Legendas:

- SP 1: Significado geométrico - relação entre áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.
- SP 2: Significado geométrico - relação entre comprimentos dos lados do triângulo retângulo.
- SP 3: Significado aritmético-algébrico - ternas pitagóricas; ternas de números.

Unidade Didática sobre o Teorema De Pitágoras

Professores: P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8.

Público alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Faixa etária dos alunos: 14 e 15 anos

Objetivo geral:

Introduzir o conceito do Teorema de Pitágoras

Objetivos específicos:

- a. Trabalhar os Conceitos Prévios necessários para entender a nova aprendizagem: área de quadrados; classificação de triângulos quanto aos ângulos; propriedades do triângulo retângulo; raiz quadrada; operações com irracionais, potenciação e resolução de equações.
- b. Fazer uma contextualização sobre o TP na história;
- c. Entender o TP como uma relação entre as áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo;
- d. Fazer a demonstração geométrica do TP;
- e. Entender o TP como uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo;
- f. Entender a conexão entre os significados de áreas de quadrados construídas sobre os lados de um triângulo retângulo e o significado de relação entre comprimentos de seus lados;
- g. Entender o TP como significado aritmético-algébrico através das ternas pitagóricas;
- h. Utilizar o Teorema de Pitágoras para reconhecer que um triângulo é retângulo;
- i. Resolver problemas contextualizados com os significados do TP trabalhados.

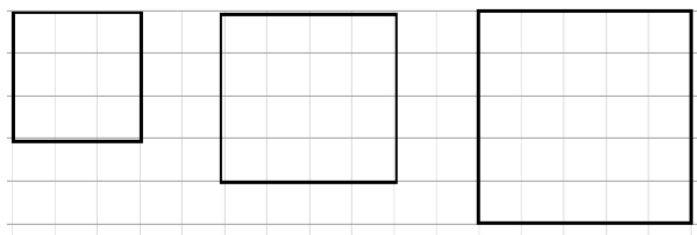
Bloco 1 - contextualização histórica e conhecimentos prévios

Conhecimentos prévios (2 períodos de 45-50min)

Elaborar uma sequência de atividades para avaliar e estudar/retomar os conhecimentos prévios dos alunos (mantendo o que foi realizado na aula da P4 e incorporando o que foi discutido na reflexão da aula):

Área de quadrados;

- Atividade prévia de recorte de quadrados e cálculo de suas áreas;
- Construir em aula com os alunos uma folha quadriculada com 1 cm x 1 cm;
- Orientar que façam o desenho conforme material abaixo;
- Quadrados de lado 3, lado 4 e lado 5.



- Relembrar o conceito de área, usando os quadrados já confeccionados;
- Com os quadrados desenhados, orientar que nomeiem os lados com letras (lado 3- a, lado 4- b, lado 5- c) e façam algebricamente o cálculo da área. Depois devem repetir a atividade de desenhar quadrados na folha quadriculada (tamanho livre) e calcular a área de acordo com o tamanho do lado que cada aluno recortou.
- Questionar quais ângulos encontraram nos quadrados e qual a relação com a soma dos ângulos internos.

Classificação de triângulos quanto aos ângulos;

- Breve retomada de classificação de ângulos de acordo com o tamanho: (Agudo menor que 90° , Reto 90° abordando a questão da perpendicularidade, Obtuso maior que 90° e o Raso 180°).
- Usando os mesmos quadrados da atividade anterior, indicar um recorte na diagonal (questionando o conceito de diagonal e explicar) do quadrado, formando dois triângulos de lados 3, 4 e 5;
- Relembrar as propriedades do triângulo retângulo, comparando com as propriedades do retângulo (os ângulos formados);
- *-É um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° (voltando ao ângulo raso e demonstrando por que o triângulo tem 180° e que é a metade do valor da soma dos ângulos internos do quadrado que é 360°), então os outros dois ângulos medirão 90° .*
- Orientar que encontrem o ângulo reto em cada um dos triângulos recortados, nomeando os ângulos, os vértices e os lados, assim retomando os elementos de um triângulo. Caso os alunos comparem o triângulo formado com outros triângulos, como isósceles, explicar as diferenças.
- Trabalhar a questão do reconhecimento e identificação da hipotenusa e dos catetos:
- Ainda usando os triângulos recortados e renomeados, introduzir a nomenclatura começando pela localização do ângulo reto para indicar o lado oposto como hipotenusa, e os outros dois lados como catetos (sempre usando a linguagem matemática para indicar lados, vértices e ângulos).

Raiz quadrada;

- Retomada da relação inversa da radiciação e potenciação, mostrando exemplos vinculados os quadrados confeccionados no início da aula:

- Área do quadrado de lado 3 = $3 \times 3 = 9$ que é equivalente a 3 elevado ao quadrado (relacionar o motivo de nomear o expoente 2 como quadrado) e mostrar a operação inversa como raiz quadrada de 9 sendo 3.
- Sugestão de outros exemplos: $\sqrt{36} = 6$, pois $6^2 = 36$; $\sqrt{121} = 11$, pois $11^2 = 121$
- Questionar os alunos sobre um quadrado de 144 m^2 de área, qual seria o seu lado? Aguardar a resposta e concluir.

Operações com irracionais e potências;

- Os Números Irracionais são números decimais, infinitos e não-periódicos e não podem ser representados por meio de frações irredutíveis. Sugerir que usem a calculadora para verificar alguns números irracionais como 7,10, etc.
- Assim retomará as operações com números irracionais: $x^2 = 5$ logo, $x = \sqrt{5}$; $a^2 = 3^2 + 1^2$ logo, $a^2 = 10$ $a = \sqrt{10}$

Resolução de equações;

- Resolver uma equação de primeiro grau é descobrir o valor desconhecido que é a incógnita que torna a igualdade verdadeira. Assim temos que isolar os elementos desconhecidos em um dos lados da igualdade e os valores constantes do outro lado. Para isso devemos lembrar de trocar para operação inversa sempre que trocar o lado da igualdade.
- Exemplos:
- I) $x - 3 = 9$
 $x = 9 + 3$
 $x = 12$
- II) $x^2 = 64$
 $x = \sqrt{64}$ (operação inversa da potência = radiciação)
 $x = 8$

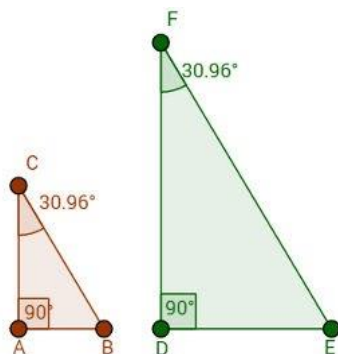
Expressão numérica

- 6.1. Discuta com alunos valores que tornem a igualdade verdadeira:
 $___ + ___ = 10$
- 6.2. Discuta com alunos valores que tornem essa outra igualdade verdadeira:
 $(___)^2 + ___ = 10$

Discutir que essas expressões numéricas relacionam os dois lados da igualdade.

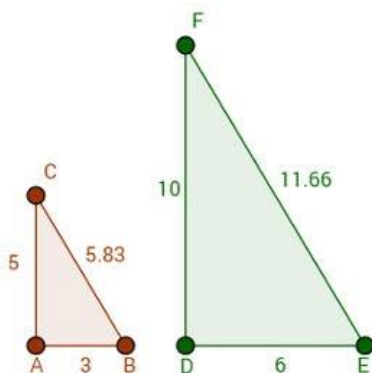
Semelhança de triângulos

- Caso Ângulo Ângulo (AA): *Dois triângulos são semelhantes se possuírem dois ângulos correspondentes congruentes.* Não é necessário verificar o terceiro ângulo e nenhuma proporcionalidade entre os lados. Basta que dois ângulos sejam congruentes e os dois triângulos já podem ser declarados semelhantes, como no exemplo a seguir:



Por quê? (soma dos ângulos internos do triângulo).

- Caso Lado Lado Lado (LLL): *Se dois triângulos possuem três lados proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.* Portanto, não é necessário verificar os ângulos.

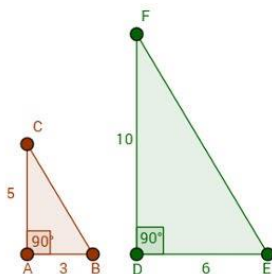


Na imagem acima, observe que as razões entre lados correspondentes têm o mesmo resultado:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Então, pelo segundo caso de semelhança, esses triângulos são semelhantes.

- Caso Lado Ângulo Lado (LAL): *Dois triângulos que possuem dois lados proporcionais e o ângulo entre eles congruente são semelhantes.* Observe este caso de semelhança no exemplo:

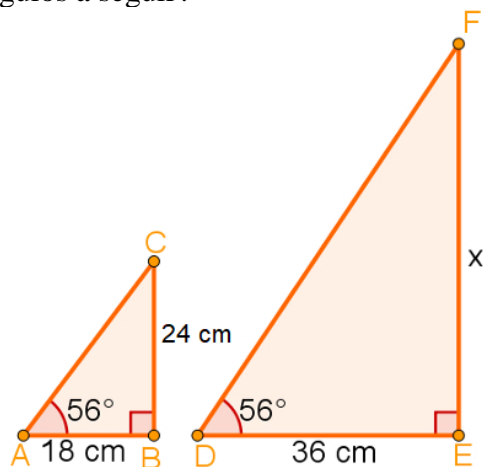


Nesse exemplo, o ângulo de 90 graus fica entre os lados proporcionais. Configurando assim o caso LAL.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

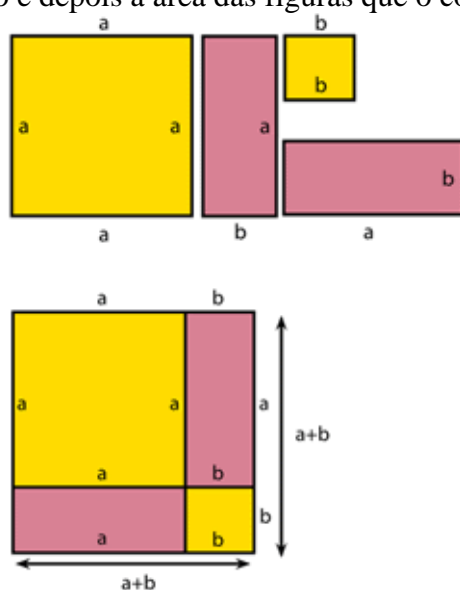
Exemplo

Qual o valor de x nos triângulos a seguir?




- Produtos notáveis (demonstração)

Calcule a área do quadrado e depois a área das figuras que o compõem.



Para saber a área do quadrado, basta elevar ao expoente 2 a medida dos lados do quadrado, ou seja $(a + b)^2$. No caso das figuras que o formam, as áreas dos quadrados (amarelos) obedecem ao mesmo procedimento e são respectivamente a^2 e b^2 . Para saber a área dos dois retângulos (cor de rosa e que têm o mesmo tamanho), é preciso efetuar a multiplicação da base pela altura e multiplicar por dois, ou seja, 2 vezes a vezes b . Sendo assim, é possível concluir que $(a + b)^2$ equivale e pode ser representado por $a^2 + 2ab + b^2$.

Por fim podemos desenvolvê-lo algebricamente para determinarmos a sua igualdade. Observe que a base está elevada ao quadrado, então devemos repetir duas vezes a base em um produto, aplicando em seguida à propriedade distributiva.

$(a + b)^2 =$
$(a + b)(a + b) =$
 $(a + b)(a + b) =$
$a^2 + ab + ab + b^2 =$

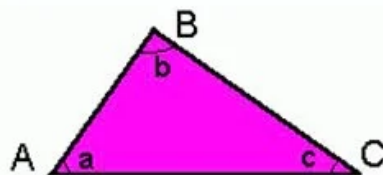
Devemos agora agrupar os termos semelhantes, ou seja, os que possuem mesma parte literal.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

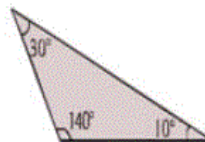
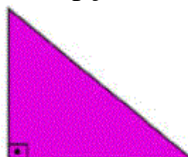
Se possível, elaborar uma avaliação inicial diagnóstica. (Um professor pode identificar os conhecimentos prévios dos alunos de duas maneiras, ou ele já conhece bem seus alunos e já tem esses conhecimentos avaliados por atividades/tarefas realizadas anteriormente, ou ele deve fazer uma avaliação diagnóstica, uma atividade de sondagem)

- Avaliação Diagnóstica Inicial

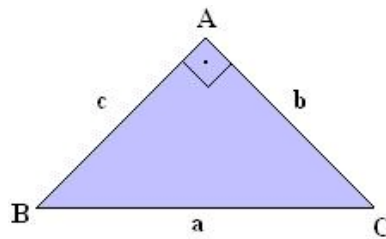
- Se um cercado de horta quadrado tem 36 m², qual é o tamanho de cada lado?
- Identifique no triângulo abaixo os elementos em destaque:



- Indique o triângulo retângulo nas opções abaixo e justifique sua resposta:



- Determine a medida dos ângulos de um triângulo retângulo com dois ângulos agudos iguais.
- Identifique a HIPOTENUSA e os CATETOS no triângulo retângulo abaixo:



f) Resolva a equação: $n^2 = 8^2 + 2^2$

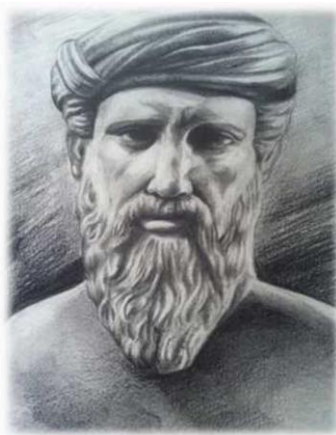
g) Seja $x^2 + y^2 = 60$. Qual é o valor positivo de $x + y$, sabendo que $x \cdot y = 20$?
(Dica: desenvolva $(x+y)^2$)

h) Margarida viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior um pouco apagadas, conforme mostra a figura a seguir. Qual número foi apagado?



- Contextualização Histórica do TP (tempo igual ao da aula da P4)

Inicia-se a contextualização relatando alguns aspectos da vida de Pitágoras. Ao longo deste texto (falado pelo professor) seriam apresentadas algumas imagens ilustrativas, com o único intuito de ajudar na compreensão da fala e manter cativa a atenção dos alunos.

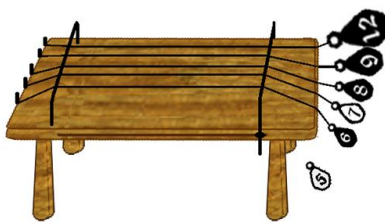


Pitágoras de Samos (580 a.c. - 500 a.c.) é considerado fundador da Escola de Crotona. Esta escola era um centro de estudos localizado numa colônia grega na Itália. Pitágoras era influenciado por Anaximandro (conhecido

como filósofo-cientista) e Ferécidas (conhecido como filósofo-feiticeiro), em suas viagens ao Egito, interessou-se pelo estudo da Matemática, principalmente Aritmética e Geometria, e acreditava que o maior bem do homem era a sabedoria. Ele adquiriu conhecimentos além dos matemáticos e foi o primeiro homem a se autodenominar filósofo-matemático. Ele acreditava que, quanto mais o ser humano conseguisse relacionar o cotidiano com a Matemática, mas ele era sábio e, conseqüentemente, era um bom entendedor do mundo, pois os números possuem formas que conseguem explicar tudo o que está ao redor do homem. Ele acreditava que tudo era número e que a Matemática consegue explicar tudo sozinha. Pitágoras tentava explicar o mundo por meio da harmonia, da proporção, das propriedades dos números, da beleza e das simplicidades.

Pitágoras estudou muito sobre Música, iniciando pela descoberta entre os intervalos musicais e os quocientes dos primeiros números inteiros, ao passar por uma oficina e ver um homem batendo em uma bigorna com dois martelos, notando que cada um emitia um som diferente. Inicialmente, ele acreditava que a variação dos tons originava da força que o homem colocava ao bater o martelo na bigorna, mas, ao trocar os martelos de mão, as bigornas emitiam os mesmos sons.

Pitágoras constatou que o peso das bigornas alterava o tom de cada uma delas: a primeira pesava doze, a segunda nove, a terceira oito e a quarta seis, de uma unidade de peso desconhecida. A partir disso, surgiu o monocórdio, uma caixa de madeira com apenas uma corda que, quando pressionada e tocada em determinados pontos, produzia sons de alturas diferentes. Diante disso, os pitagóricos constataram que a altura de uma nota musical dependia do comprimento da corda que a produz.



Bloco 2 - verificação experimental e demonstração do TP

- Verificação experimental com mais casos e demonstração do Teorema de Pitágoras (TP).
- Aplicação do TP por problemas significado de relação de áreas de quadrados (Significado Parcial 1).
- Explicar o TP por cálculo de comprimentos e atividades de aplicação relacionada a este significado (Significado Parcial 2).
- Logo, trabalhar atividades que conectem os dois significados (áreas e comprimento, S1 e S2).
- Apresentar o material completo da aula, como se poderia gestionar a aula, e fazer “previsões” das respostas dos alunos, possíveis dúvidas deles, etc.
- Instrumentos de avaliação, detalhe sobre o material utilizado.
- Atividades de aplicação com a finalidade de fazer uma avaliação contínua.

Material prévio:

1) Serão disponibilizadas folhas quadriculadas para que os alunos recortem quadrados de lados conforme segue:

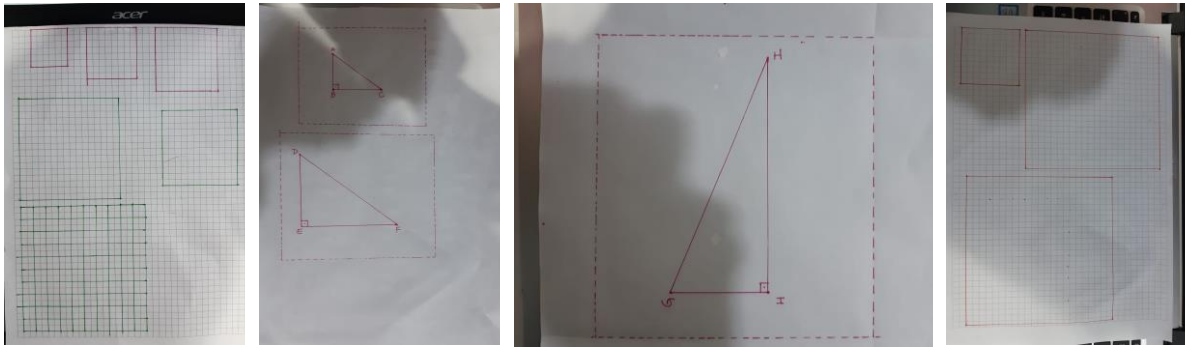
- Lado 3
- Lado 4
- 2 quadrados de Lado 5
- Lado 6
- Lado 8
- Lado 10
- Lado 12
- Lado 13

Material disponível em:

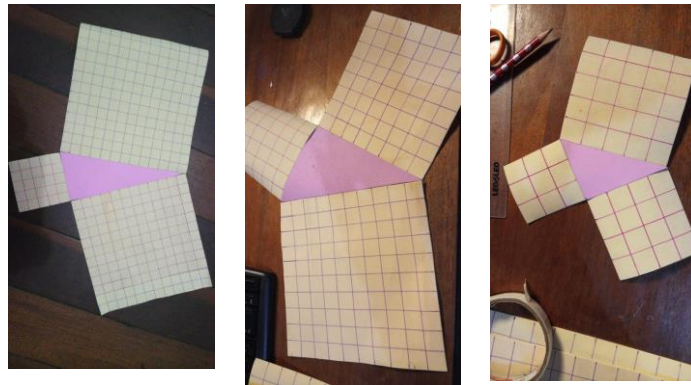
- https://drive.google.com/file/d/1wV4_WPCuNbXYq7W5P9DnZP4tYM18yl4i/view?usp=sharing
- https://drive.google.com/file/d/1VtvJzNFEy9mDDn-A_70jEuZhTVqYW2p5/view?usp=sharing
- https://drive.google.com/file/d/1vP7-9r_diJA4wU71zZYX5idLdyCzdXgx/view?usp=sharing

2) Serão disponibilizados os triângulos retângulos correspondentes aos lados dos quadrados acima mencionados. Serão indicadas linhas pontilhadas nas quais os alunos deverão recortar. Estes triângulos não terão malha quadriculada, assim como os tamanhos dos lados não serão indicados.

- Triângulo ABC de lados 3, 4 e 5;
- Triângulo DEF de lados 6, 8 e 10;
- Triângulo GHI de lados 5, 12 e 13.
- Material disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1PEsCQd9G0vmMoUn8Fka4lnpmNkNHLdV7/view?usp=sharing>
- Observação 1: Os materiais serão enviados virtualmente para o aluno poder imprimir antes da aula. Além disso, também estarão impressos e disponíveis na escola para os alunos que não tenham a opção de imprimir em casa. (material em anexo)
- Observação 2: Tamanho da unidade do quadrado da folha quadriculada conforme material impresso, cujos exemplos estão disponíveis nas figuras abaixo.



- Observação 3: O professor pode utilizar o mesmo material que foi fornecido ao aluno ou construí-lo em folhas de EVA, conforme fotos:



Passos da atividade de verificação experimental do TP:

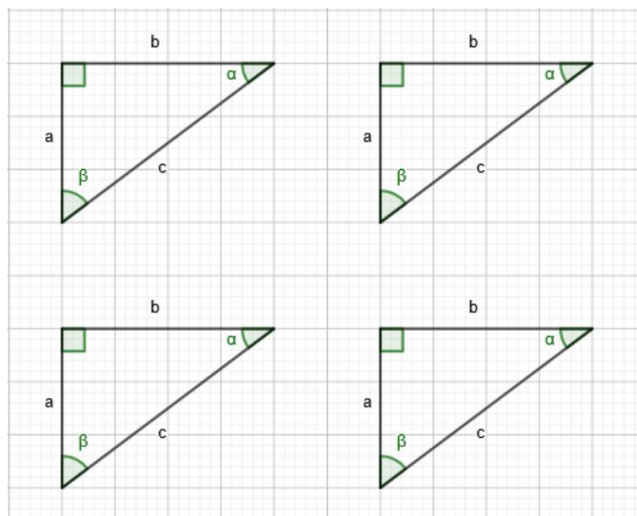
- Solicitar que os alunos façam a construção de três quebra-cabeças com os quadrados de lados respectivos aos dos triângulos retângulos disponibilizados e enviem uma foto para o professor (Ex: *WhatsApp*, *Google Meet*, mostrar pela tela na vídeo chamada, etc.).
- Questionar aos alunos a relação entre os quadrados e suas áreas;
- Pergunta 1) Quais quadrados encaixaram em quais triângulos?
- Pergunta 2) Quais critérios você utilizou para fazer esses encaixes?
- Pergunta 3) Calcule a área de cada quadrado (triângulo ABC).
- Pergunta 4) Existe alguma relação entre as áreas dos quadrados do triângulo ABC? Se sim, qual? (Fomentar interação entre os alunos).
- Relação: A soma das áreas dos quadrados referentes aos catetos é igual a área do quadrado referente à hipotenusa.
- Pergunta 5) A relação existente no triângulo ABC é a mesma nos triângulos DEF e GHI?

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO	NÍVEL 1 (satisfatório)	NÍVEL 2 (notável)	NÍVEL 3 (excelente)
Encaixar os quadrados nos lados correspondentes dos triângulos retângulos (instrumento para avaliação: envio de fotos)	Conseguir encaixar os quadrados corretos em um dos triângulos	Conseguir encaixar os quadrados corretos em dois triângulos diferentes	Conseguir encaixar os quadrados correspondentes nos três triângulos.
Estabelece relação entre as áreas dos quadrados e os lados dos triângulos retângulos (instrumento de avaliação: fala dos alunos através do <i>chat</i> , ou pela própria fala dos alunos, respostas ao formulário).	Percebe que existe uma relação entre as áreas dos quadrados e os lados do triângulo	Verifica que a soma das áreas dos quadrados menores é a mesma área do quadrado maior.	Relaciona o tamanho das áreas dos quadrados com os lados dos triângulos, chegando assim ao Teorema de Pitágoras.

Fazer um formulário (instrumento) para ser preenchido aos poucos pelos estudantes durante a atividade (o *meet* permite isso). Ou registro no caderno e envio de fotos para cada pergunta que o professor fizer.

- Apresentação da demonstração:

No bloco 2 vamos disponibilizar as folhas impressas para o recorte dos triângulos abaixo:



Após recorte será feita a demonstração da seguinte forma:

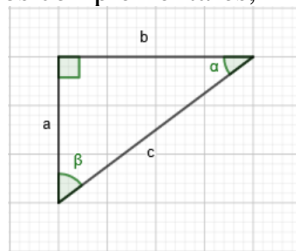
Explicação de que um Teorema é uma “proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico”, nesse sentido, precisamos de um argumento lógico que

comprove que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro e para isso faremos uma das demonstrações do Teorema (explicar que existem muitas outras).

Teorema: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Triângulo de catetos a e b e hipotenusa c é retângulo $a^2+b^2=c^2$

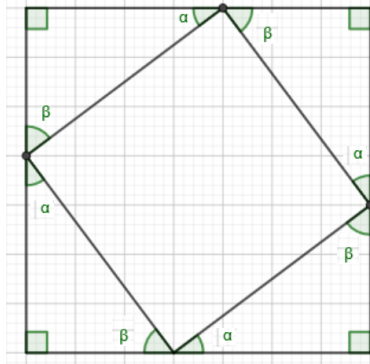
- Demonstração:

Seja o triângulo retângulo qualquer de lados a , b e c . (O mesmo que foi recortado) sendo a e b os catetos e c a medida da hipotenusa. (Lembrar que alfa e beta são ângulos complementares, $\alpha+\beta=90^\circ$)



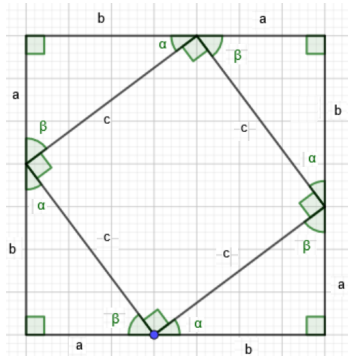
Pedir aos alunos que realoquem os triângulos da seguinte forma:

Encaixar os dois catetos a e b de forma que os 4 triângulos iguais formem um quadrado. (Pedir aos alunos que mandem foto ao professor após sua construção).



Pedir aos alunos que digam se podemos realmente afirmar que a figura formada no centro é um quadrado.

Como $\alpha+\beta=90^\circ$ e, chegaremos à conclusão de que a figura geométrica no interior é um quadrado pois possui todos os ângulos de medida 90° e a medida de seus lados como a hipotenusa c como mostra a figura abaixo:



E segue os seguintes dados (devem ser feito com a participação dos alunos):

O comprimento do lado do quadrado maior é $a+b$.

A área deste quadrado é $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A área de cada triângulo é $\frac{1}{2}ab$.

A área do quadrado de lado c é c^2

Como a área do quadrado maior é igual a área dos 4 triângulos mais a área do quadrado de lado c temos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Subtraindo $2ab$ de ambos lados temos

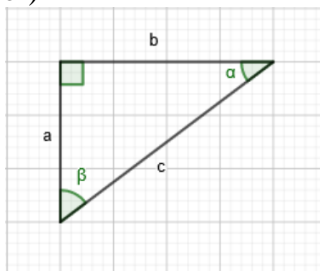
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Logo provamos que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro.

Mostramos que um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c é retângulo $a^2 + b^2 = c^2$

Após a demonstração será pedido que os alunos verifiquem se a relação entre as áreas feita para provar o Teorema é válida para o triângulo com valores $a=3$, $b=4$ e $c=5$.

(Enviar os cálculos para o professor)



CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO	NÍVEL 1 (satisfatório)	NÍVEL 2 (notável)	NÍVEL 3 (excelente)
Encaixar os catetos a e b dos triângulos de forma e concluir que a figura formada pelos triângulos e o quadrado de lado c no centro.	Conseguiu encaixar os triângulos, mas não concluiu que a figura formada entre eles é um quadrado.	Conseguiu encaixar os triângulos, mas faltou informações para a figura ser um quadrado. (apresentar apenas os mesmos lados e não informar que todos os ângulos do quadrado são de 90°).	Conseguiu encaixar os triângulos, mostrou que a figura formada é um quadrado mostrando que seus lados são iguais e seus ângulos são de 90°.
Consegue relacionar a demonstração com a do caso genérico com medidas 3,4 e 5.	Conseguiu calcular as áreas, mas não as relacionou.	Conseguiu calcular, mas faltou alguma informação na relação.	Conseguiu calcular e relacionar as áreas.

- Atividade de significado geométrico relação entre áreas do quadrado

O Museu de Artes do Rio Grande do Sul (MARGS) está com exposição aberta para visitação e compra. Logo no primeiro ambiente de exposição, encontram-se três pinturas dispostas no chão. Um visitante interessou-se por elas, mas para decidir qual comprar, ele precisa saber a área de cada pintura que possuem o formato quadrado, pois quer comprar a maior de todas. A soma das áreas desses três quadrados, cujos lados formam um triângulo retângulo, é 32 m². Encontre as possíveis medidas das áreas das três pinturas e defina qual tamanho ele irá comprar.

Solução:

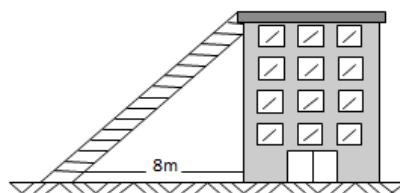
<p>Passo 1: Equacionar as informações da questão:</p> <p>Equação 1: A soma das áreas dos quadrados é igual a 32: $A^2 + B^2 + C^2 = 32$</p> <p>Equação 2: Usar o conceito do Teorema de Pitágoras: $A^2 = B^2 + C^2 \gg A^2 - B^2 - C^2 = 0$</p> <p>Passo 2: Sistema não-linear com as duas equações:</p> <p>$A^2 + B^2 + C^2 = 32$ (Equação 1)</p> <p>$A^2 - B^2 - C^2 = 0$ (Equação 2)</p> <p>Passo 3: Somar a Equação 1 com Equação 2:</p> $2A^2 = 32$ $A^2 = 16$ $A = 4$	<p>Passo 4: Neste momento, espera-se que o aluno perceba que a maior área é 16m².</p> <p>Logo, temos que $16 = B^2 + C^2$</p> <p>Passo 5: As medidas das áreas dos outros dois quadrados podem variar, pois a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa. Portanto, teremos oito soluções para esta questão:</p> <p>Solução 1: $16 = 15 + 1$</p> <p>Solução 2: $16 = 14 + 2$</p> <p>Solução 3: $16 = 13 + 3$</p> <p>Solução 4: $16 = 12 + 4$</p> <p>Solução 5: $16 = 11 + 5$</p> <p>Solução 6: $16 = 10 + 6$</p> <p>Solução 7: $16 = 9 + 7$</p> <p>Solução 8: $16 = 8 + 8$</p>
---	---

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO	NÍVEL 1 (satisfatório)	NÍVEL 2 (notável)	NÍVEL 3 (excelente)
Interpreta o problema de forma adequada.	Fez a interpretação do problema de forma correta, como também estabeleceu a relação correta $A^2+B^2+C^2=32$	Fez a interpretação do problema de forma correta, como também estabeleceu a relação correta $A^2+B^2+C^2=32$	Fez a interpretação do problema de forma correta, como também estabeleceu a relação correta $A^2+B^2+C^2=32$
Compreende a relação das áreas, descrita pelo Teorema de Pitágoras e encontra o valor da área correspondente ao quadrado formado pela hipotenusa.	Fez o uso correto do Teorema de Pitágoras e concluiu que $A^2= B^2 + C^2$. Encontrando a solução para a área do quadrado formado pela hipotenusa.	Fez o uso correto do Teorema de Pitágoras e concluiu que $A^2= B^2 + C^2$. Encontrando a solução para a área do quadrado formado pela hipotenusa.	Fez o uso correto do Teorema de Pitágoras e concluiu que $A^2= B^2 + C^2$. Encontrando a solução para a área do quadrado formado pela hipotenusa
Encontra a medida da área dos três quadrados e compreende que um dos lados do triângulo deverá ter medida irracional.		Conseguiu encontrar a área dos três quadrados e concluiu que o maior deles é 16 m^2 , e que corresponde ao quadrado formado pelo lado da hipotenusa.	Conseguiu encontrar a área dos três quadrados e concluiu que o maior deles é 16 m^2 , e que corresponde ao quadrado formado pelo lado da hipotenusa.
Compreende que existe um único valor para a área do quadrado formado pelo lado da hipotenusa e que existe mais de uma possibilidade para o valor das áreas dos quadrados formados pelos catetos.			Compreendeu que a área do maior quadrado não irá ser alterada, mas que existem diferentes valores que poderão compor as áreas dos quadrados correspondentes aos lados dos catetos.

- Atividade de significado geométrico ideia de comprimento dos lados

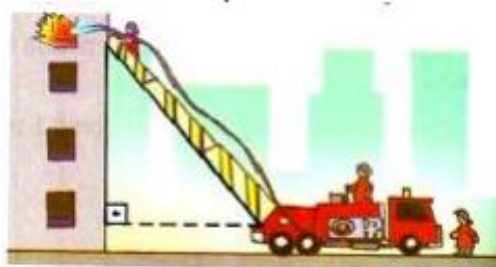
Exemplo 1:

Para consertar o telhado, foi apoiada uma escada ao topo do prédio. Sabendo que prédio tem 12 metros de altura e que a base da escada está colocada a 8 metros do edifício, calcule o comprimento dessa escada.



Exemplo 2:

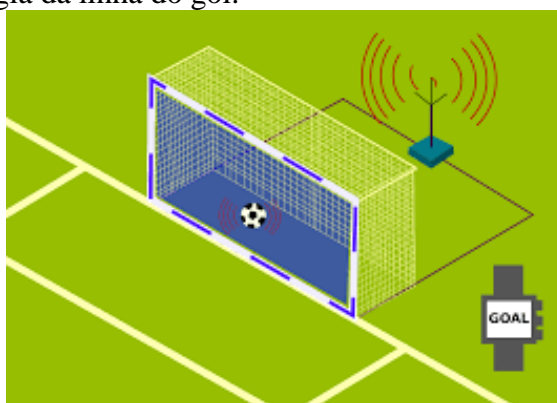
Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada de 15 metros para atingir a janela do apartamento em chamas. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 9 m do edifício. Qual é a altura do apartamento em relação ao chão?



Exemplo 3: Atividade que conecta os dois significados geométricos

Goal-Line Technology ou, em português, Tecnologia da Linha de Gol é o nome dado à tecnologia usada em estádios de futebol para saber se uma bola ultrapassou ou não a linha de fundo entre os postes da baliza. Essa tecnologia é baseada em câmeras instaladas dentro da baliza, que enviam imagens que provam que a bola entrou. Considere as seguintes imagens abaixo:

i) Aplicação da tecnologia da linha do gol.



ii) Baliza com as medidas indicadas.



Considerando que, na imagem ii, a distância entre as traves laterais é de 7,5m, e que a tecnologia da linha do gol foi utilizada em uma partida disputada com essa baliza, determine a área do retângulo formado durante essa aplicação.

Bloco 3 - recíproca do TP

Para mostrarmos a recíproca que se vale num triângulo, a relação entre as medidas $a^2+b^2=c^2$ o triângulo é retângulo. Vamos mostrar alguns contraexemplos em que $a^2+b^2\neq c^2$.

Explicar a volta do TP e realizar exercícios de aplicação sobre a recíproca do TP introduzindo as ternas pitagóricas (Significado Parcial 3, aritmético-algébrico). Apresentar o material completo da aula, como se poderia gestionar a aula, e fazer “previsões” das respostas dos alunos, possíveis dúvidas deles, etc. Instrumentos de avaliação, detalhe sobre o material utilizado. Atividades de aplicação com a finalidade de fazer uma avaliação contínua.

Exemplo de Exercício:

As ternas numéricas (a, b, c) constituídas por três números inteiros que cumprem a propriedade $a^2 = b^2 + c^2$ se denominam ternas pitagóricas.

(10, 8, 6) é uma terna pitagórica?

Que relações há entre as ternas (5, 4, 3) e (15, 12, 9)?

Comprove se (26, 24, 10) e (13, 12 e 5) são ternas pitagóricas.

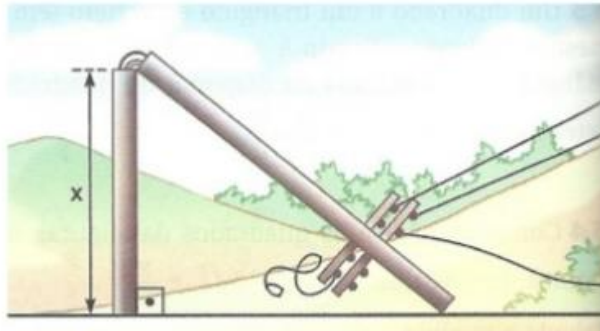
Bloco 4 - aplicação e instrumento final de avaliação

Problemas de aplicação e problemas contextualizados e instrumento de avaliação final (material e as atividades).

- O Museu de Artes do Rio Grande do Sul (MARGS) está com exposição aberta para visitação e compra. Logo no primeiro ambiente de exposição, encontram-se três pinturas dispostas no chão. Um visitante interessou-se por elas, mas para decidir qual comprar, ele precisa saber a área de cada pintura que possuem o formato quadrado, pois quer comprar a maior de todas. A soma das áreas desses três quadrados, cujos

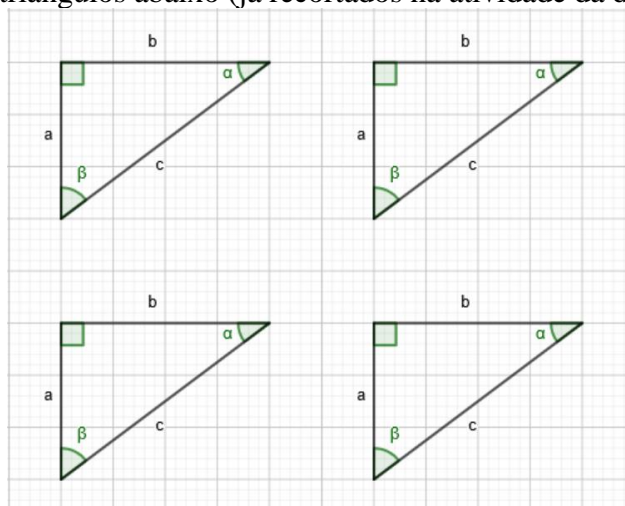
lados são números inteiros positivos e formam um triângulo retângulo, é 50 m^2 . Encontre as medidas das áreas das três pinturas e defina qual tamanho ele irá comprar.

- Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em um ponto a uma distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da parte que ficou em pé. Sabendo que o poste é perpendicular ao solo, calcule as medidas destas duas partes do poste.

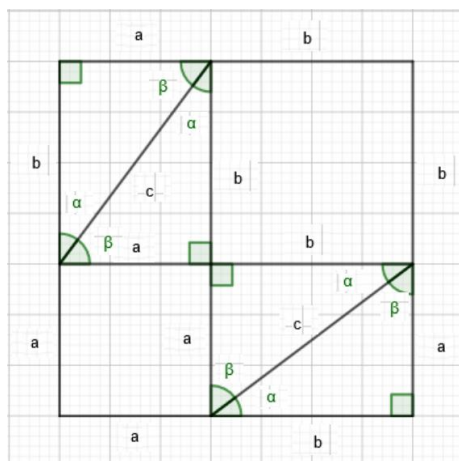


Atividade elaborada a partir da demonstração do Teorema de Pitágoras. (Para o formulário final)

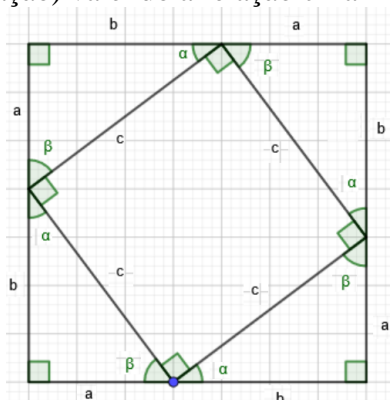
- Utilizando os triângulos abaixo (já recortados na atividade da demonstração)



- Agrupe da seguinte forma:



- Mostre que a área dos quadrados de lado a e b é a mesma do quadrado de lado c (mostrada na demonstração) valendo a relação $c^2 = a^2 + b^2$

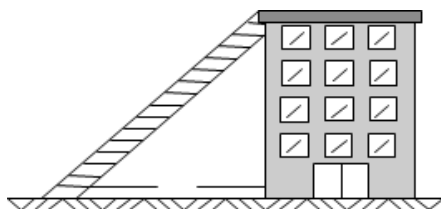


Atividades da primeira Aula para o caso de quererem aproveitar:

- Introdução do conceito a partir da representação geométrica utilizando o triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5.
- Explicação do professor do conceito e fórmula do Teorema de Pitágoras utilizando outros exemplos; (usar outros números, outros valores de lados de triângulos retângulos; usar o caso do triângulo de catetos 1 e hipotenusa raiz de 2.)
- triângulo de catetos 6 e x e hipotenusa 10.
- triângulo de catetos iguais a 1 e hipotenusa x .
- Resolução de exemplos para prática dos exercícios de compreensão.

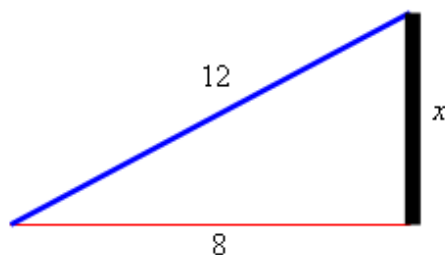
Exemplo 1:

A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de?



Exemplo 2:

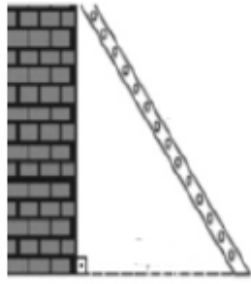
Uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros. Determine a altura do muro aproximadamente



- Exercícios no formulário *google forms*.

Exercícios:

- Em cada item, estão indicadas as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo. Desenhe os triângulos de cada item. Utilizando o Teorema de Pitágoras, verifique quais deles são triângulos retângulos.
 - 4, 7 e 8
 - 12, 16 e 20
 - 12, 5 e 13
- Determine a medida das hipotenusas dos triângulos retângulos cujos catetos medem:
 - 9 m e 12 m
 - 1 cm e 3 cm
 - 1cm e 2 cm
- Respostas às seguintes perguntas:
 - Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados medem 30 m e 40 m?
 - Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo o lado mede 10 m?
- Uma escada tem 17 m de comprimento e está apoiada no topo (em cima) de um muro de 15 m altura. Qual a distância entre o pé da escada e o muro?



Anexo 3. Transcrição da entrevista com P4

Entrevistadora: professora pesquisadora (PI)

Entrevistada: P4 - professora que implementou a aula do LS no Ensino Fundamental

PI (0:02): Tá gravando! Então, a gente vai fazer uma entrevista com a professora P4, que foi professora do *Lesson Study* do Ensino Fundamental, que depois acabou sendo a aula que também foi reestruturada com os Critérios de Idoneidade Didática na pesquisa. E a gente combinou de fazer uma conversa hoje, então, para saber algumas coisinhas específicas dela como professora da aula. Então, a primeira coisa que eu queria te perguntar, P4, é: quais foram as principais diferenças na tua conduta como professora entre uma aula que foi numa *live* do *YouTube* e uma aula presencial tua? Principais diferenças...

P4 (0:47): Bah! Eu tentei... então, o meu maior cuidado era com quais palavras que eu ia usar, porque eu queria pensar no que eu queria falar, e isso me deixou muito nervosa e, inclusive, me atrapalhou, de certa maneira, o nervosismo, né?! Porque eu fiquei pensando que aquilo poderia, estaria lá gravado, e a qualquer momento poderia ser utilizado contra mim [risos], e foi utilizado, de fato, no curso [risos]. Mas, não no mau sentido, né?, mas eu fiquei muito nervosa com essa situação de quais palavras que eu deveria utilizar, para ser uma aula mais formal, porque com os meus alunos eu sou muito brincalhona, eles brincam e deboçam o tempo inteiro na aula e eu uso isso para trazer... atrair eles para minha aula. E, naquele momento, eu tinha que ser mais uma professora mais séria, né? mais formal.

PI [1:55]: Tu te sentiu, então, afetada na tua... na tua conduta, assim, natural, espontânea, na tua espontaneidade como professora, e como pessoa, também, porque tu estava tendo... porque tua aula estava sendo observada, e não só observada, mas também gravada, né?, e poderia depois... e foi que a gente fez, né?, a gente reviu a aula várias vezes através da gravação e está eternizada a aula, né?, vai ser, pode ser revista várias vezes, né?. Sim, super se entende que tem um engessamento aí da postura da gente, não fica tão natural, né?

P4 (2:32): Pois é, depois parando para pensar, assim, eu fiquei pensando que qualquer um naquela situação também ia tomar cuidado, também ia ficar nervoso, mas quando é com a gente, Meu Deus! os nervos ficam à flor da pele, né? mas, é uma coisa natural.

PI (2:52): Então tu consideras que essa foi a principal diferença na tua conduta, assim, não foi tão espontânea, tu tiveste que pensar mais no que tu ias falar, e controlar o que tu ias falar, para não ficar feio, digamos assim, né?

P4 (3:03): Exatamente.

PI (3:04): Tu ficaste te observando e te avaliando. Tá! E quais as principais diferenças na preparação dos materiais e dos recursos que tu utilizaste na tua aula, na aula virtual, e a aula que tu fazes presencial?

P4 (3:17): Nossa! Totalmente diferente. Nem... quase que não dá para comparar. Porque na minha aula presencial... se fosse a mesma aula ali de... da gente montar o material concreto, eu montaria com eles em aula, eu não ia ter toda essa preparação, né, do material concreto, da questão do computador, de pensar na internet, de é... foi muita... muita... muitos outros recursos que foram utilizados. Se eu fosse para sala de aula, eu só iria... eu pensaria como eu iria fazer e iria, eu levaria eu [risos] e o material que a gente iria utilizar estaria lá... peguem uma folha, uma caneta, uma régua, uma tesoura... não seria nada de especial, né?, como foi. A gente teve que pensar em muita... como que seria filmado, que era minha maior preocupação, como que eu ia alterar as câmeras, então, teve todo um estudo para que seja feito... fosse feito daquela maneira, né? E uma coisa, também, que eu acho que é interessante levar em consideração é que eu nunca tinha feito nada virtual, foi tudo uma primeira vez junto assim. Aprendi muito, né? aprendi muito... falei..., eu já falei isso anteriormente. Mas... pode falar!

PI (4:48): Tu dizes, em termos da... do aprender muito... tu dizes também em termos dessa questão da aula ser virtual? Para além das questões... da coisas que tu aprendeu no curso, isso de fazer uma aula virtual, que era a primeira vez, também, que tu estavas fazendo uma aula virtual ao vivo, né?, com teus alunos ao vivo, né?, tu diz nesse sentido, também, que tu aprendeu muito?

P4 (5:07): Também.

PI (5:08): Sim, eu lembro que tu teve que buscar muito na semana anterior, ou nas duas semanas anteriores, como é que tu faria, como é que tu gravaria, como é que tu teria a câmara... aí tu usou duas câmeras, né?, a câmara do computador e a câmara do celular, e alternou isso, né?, então tu te apropriou dessa ferramenta do *YouTube*, né?, para... como fazer isso e a preparação dos materiais todos, né?, e até da internet que tu teve que te deslocar, sair em plena quarentena, para a casa da tua mãe porque ficou sem internet ou porque a internet estava ruim, né?, porque onde tu mora a internet é ruim, né?, então, são várias coisas que atrapalham.

P4 (5:45): É, e olha só agora eu já sei o que é "taxa de upload". Antes eu já não sabia o que que era, aí estudei sobre isso para poder fazer com que a aula rodasse bem, que os alunos visualizassem e não trancasse, né? a *live*.

PI (6:05): E que sentimentos e emoções tu vivenciou ao ter a tua aula observada? Que é que tu sentiste? Que que tu...

P4 (6:12): Todos! [risos]

PI (6:14): [risos] fala aí!

P4 (6:15): Raiva... eu fiquei feliz em alguns momentos... raiva, muitas vezes, até de mim mesma: "poxa por que que eu falei isso? Que coisa! Por que que eu não pensei antes de falar? Por que eu não elaborei melhor?"

PI (6:30): No momento da aula tu já fez a autocrítica?

P4 (6:32): Na aula... na hora... Eu falava e já pensava: "por que que eu falei isso?". E...

PI (6:40): E isso tu não fazes normalmente na aula presencial? Não é tão... Tu não és tão autocrítica?

P4 (6:45): Não. Não sou tão autocrítica. E, na aula presencial, se eu falar alguma coisa que eu pense "bah, eu poderia ter falado de uma maneira melhor", eu refaço. Pronto, resolvido. Ali na hora a pressão me afetou de uma maneira que eu não sabia como consertar, enfim, não sabia como refazer a frase, eu só ficava pensando "meu deus, por que que eu falei isso?". Mas, me afetou um pouco assim, eu já tinha dito, né, a questão do nervosismo e, eu gostei dessa palavra que tu utilizaste, da autocrítica. Eu sou uma pessoa autocrítica. Depois, mais tarde, eu pensei assim, "mas, antes de fazer o ótimo, eu tenho que começar pelo bom e depois a gente vai melhorando. Mas, na hora, me machucou...

PI (7:43): É que claro...

P4 (7:44): Me machucou. Mas...

PI (7:46): Às vezes a gente coloca expectativa muito alta, né? E era uma primeira aula virtual tua, né? Tu colocaste a expectativa lá em cima também. Claro, também porque tinha muita gente te observando, te avaliando, era uma aula gravada, né? Tudo isso que a gente já falou...

P4 (7:59): Tudo junto.

PI (8:01): E que outro sentimento, além da raiva, tu experimentaste?

P4 (8:07): Eu fiquei feliz!

PI (8:08): Da frustração, digamos... não sei bem se seria raiva, acho que seria mais frustração, não sei...

P4 (8:13): É, frustração, frustração é melhor. Mas, eu fiquei muito feliz com os meus alunos terem acessado, da participação deles... eu fiquei orgulhosa deles também. Fiquei orgulhosa de mim também, depois, mais tarde. Na hora lá, não, mas mais tarde eu fiquei orgulhosa e eu fiquei feliz, também, em ter conseguido, porque teve vários momentos que eu achei que eu não ia conseguir, "bah, como que eu vou conseguir trocar as câmeras?". Tá, descobri, depois, mais tarde. E "como que eu vou fazer uma *live*?". Aí eu fui lá, eu já tinha feito, já sabia mais ou menos como fazer, mas aí eu percebi que a taxa não estava boa. Enfim, aos poucos, depois de ver o trabalho, "fiz, alguma coisa saiu", eu fiquei feliz. Eu fiquei feliz de ter dado certo no

fim. Deixa-me pensar mais... teve vários sentimentos... foi uma montanha russa aqui [aponta para seu próprio peito] de sentimentos. Eu não sou muito boa com as palavras.

PI (9:20): Não! Não te preocupa... Tu é muito, muito autocrítica. [risos]

P4 (9:28): Sou. Sou muito, eu sei. Até foi bom, assim, dá um tempo para mim também respirar, porque quando a gente estava lá ainda eu ainda estava me criticando, me criticando, me criticando e se tu me desses mais tempos eu ia me criticar mais ainda. E teve muita coisa que eu pensei e ainda não falei.

PI (9:51): Tu dizes no curso?

P4 (9:53): Aham! [afirma com a cabeça]

PI (9:55): Quando a gente estava analisando a aula, e refletindo, e replanejando a aula, e redesenhado?

P4 (10:00): [sinaliza que concorda]

PI (10:01): Ah tá! Então tu ainda ficaste...

P4 (10:04): Mas isso é bom para mim, sabe? O curso foi muito bom para mim trabalhar isso. Para eu trabalhar isso, na verdade. Porque é uma coisa que se deve trabalhar, né?

PI (10:17): A crítica? Receber a crítica?

P4 (10:19): A crítica, em si, consigo mesmo. Ok, eu sou, eu sou muito crítica e aí? Vamos fazer alguma coisa, né? Vamos trabalhar isso! Vamos aprender a como lidar com isso. Ou aprender a lidar com a frustração, de não ter dado... não ter saído, às vezes, como eu imaginava. Eu falei muito isso, né?, que na cabeça estava uma coisa e na prática era outra, às vezes.

PI (10:48): Sim... sim... mas aí tu avalia no total assim, fazendo uma avaliação ampla, tu avalia positivamente esses sentimentos que tu teve, porque foram sentimentos novos, coisas novas?

P4 (11:04): Com certeza!

PI (11:06): Essa experiência te possibilitou uma coisa nova, um aprendizado novo, então?

P4 (11:11): Muita coisa nova!

PI (11:13): Tu não estás habituada a ser criticada... e tanto a tua autocrítica, né? tu refletir sobre a tua postura, né? como professora e também ter outros especialistas, professores da

mesma área ou especialistas, falando e avaliando, né? E como é que tu lidaste com os sentimentos negativos que tu sentiste quando os colegas, quando nós, né? te avaliamos ou te criticamos assim? Tanto positivamente, quanto negativamente... Bom, eu tô falando de sentimento negativo, quando tu foste criticada negativamente ou a tua aula foi criticada negativamente? Porque a gente estava criticando também não só a tua postura, mas também aula, né?

P4 (11:55): Sim. Então, algumas críticas eu concordei completamente, né? Outras não. Mas, o que foi difícil para mim foi lidar com algumas críticas assim oh... que eles falaram assim: "a P4 não devia ter feito isso", mas poxa foi tu mesmo que falou para fazer dessa maneira. Isso me machucou, porque não fui eu que fiz, fomos nós, não... Claro que teve coisas que fui eu. E teve momentos que fui eu que levei a minha interpretação para aquela aula, do jeito que eu queria fazer, né? Mas, àquela aula não teria sido nossa, não teria sido minha, se fosse... se não fosse... pera aí que eu vou reformular... aquela aula... se eu tivesse feito a aula, ela não teria sido daquela maneira. Ela foi daquela maneira porque nós construímos em conjunto e aí algumas pessoas criticaram: "a P4 não devia ter feito tal coisa", mas não fui eu, e isso me machucou na hora que falaram. Não fui eu. Teve algumas coisas que falaram que fui eu, mas tinham coisas que não tinha sido eu que eu pensava assim: "mas eu não teria feito isso". Eu fiz porque nós decidimos fazer, né? Era um trabalho em conjunto. Teve muitas coisas que, se eu fosse escolher, eu não teria feito daquela maneira, mas eu fiz porque no plano de aula a gente tinha decidido fazer daquela forma e aí a palavra: "a P4 não devia ter feito", "a P4", me machucava.

PI (13:42): Tu achas que deveria ter sido dito, então, "nós não devíamos ter seguido por este caminho"? Porque a aula era em conjunto, né? Era um grupo de professores que planejou uma aula durante vários dias, várias horas, né? se pensou nessa aula e aí depois na hora de criticar tu sentiste como uma crítica a ti...

P4 (14:05): Pessoal!

PI (14:07): Pessoal, como se tu tivesses preparado aula sozinha...

P4 (14:09): Sozinha, é. Eu, eu... me machucou isso um pouco. Mas, depois, parando para refletir, se eu tivesse no outro lado, eu também talvez teria dito a mesma coisa, "Ah PI, tu podias ter feito de tal maneira." Mas, é que como eu estava naquela posição ali, só tomando bomba, bomba, de todos os lados, e eu pensava, "mas eu não teria feito assim". Então, o jeito que eu recebi naquele momento, talvez tenha me machucado um pouquinho. Depois, eu parei, refleti, percebi... até porque não era só o meu grupo, era o outro grupo, do ensino médio, também, estava falando. E eles nem sabiam que eu não teria feito daquela maneira, eles não participaram da... do planejamento.

PI (14:57): Como eles não participaram do planejamento, né?... eles entraram só depois na parte da reflexão, né? Claro, eles não acompanharam todo o processo.

P4 (15:05): Então é óbvio que eles falaram "a P4 podia ter feito diferente". Tudo bem, né? Mas, pra mim, quando eu recebi aquilo, parecia... parecia que era eu o problema.

PI (15:20): [faz sinal de que concorda]. Sim, porque na verdade a gente estava falando de uma aula e não da tua conduta, que aliás todo mundo falou e concordou que foi excelente, né? Tu lidaste super bem com todas as dificuldades. Teve muitas... que foram muitas dificuldades, né? E no primeiro planejamento a gente não tinha, eu não tinha dado uma pauta para vocês, o que é que vocês tinham que seguir para fazer. Vocês foram fazendo a partir daquilo que vocês tinham de conhecimentos como professores de matemática, né? Claro, na segunda... no segundo planejamento a gente já tinha uma pauta, que eram os critérios, né? O que é que a gente tinha que... que critérios a gente deveria utilizar para fazer a aula, né? Mas antes não, ficou bem solto. Então, claro, para muita coisa... muita crítica que foi feita usando o teu nome, não deveria... deveria ter que ter esse cuidado, né? Até meu, como pesquisadora, chamar a atenção que a crítica era para aula, né?

P4 (16:20): Mas, também, a gente aprende a lidar, sabe? com o tempo... eu falei isso no fim... eu já estava aprendendo um pouco mais a lidar. No começo machuca, um pouquinho, principalmente essa questão ali de "a P4 ", "a P4 ", "a P4 ", mas, depois, o que tu consegues alcançar, o que tu consegues refletir e pensar vale a pena.

PI (16:52): Porque a gente também não é acostumada a fazer esse tipo de reflexão e criticar a aula do outro, né? Isso nunca se faz. Nenhuma formação nossa, né? Tanto na graduação, depois no mestrado, também, não tem isso, não tem essa... esse exercício, né? Isso é, especificamente, assim da *Lesson Study*, né? Fazer isso, essa reflexão conjunta da aula de um professor, né? Tá... E como foi levar para tua turma de alunos uma aula que foi preparada por um grupo de professores e não apenas por ti?

P4 (17:27): No começo um pouco difícil, porque, como eu falei anteriormente, teriam algumas coisas que eu não teria feito daquela maneira. Mas, no fim foi bom. Porque tu sair da tua zona de conforto e perceber que também dá certo se tu fizeres de outras maneiras. Inclusive, às vezes, dá mais certo se tu saíres daquela maneira que tu sempre fazes e mudar um pouquinho. Me retirou totalmente da zona de conforto eu já estava não "é assim", "é assim", "é assim"... e me movimentar dessa maneira fez com que a aula... acontecessem coisas... outras coisas que não aconteceriam se fosse a minha aula, somente, se fosse daquela maneira que eu sempre estava acostumada a fazer, que já sabia qual seriam as respostas, basicamente. Foi muito produtivo, foi muito bom.

PI (18:33): E quais os aspectos positivos e negativos em ter outros professores e especialistas da área observando e avaliando a tua aula? Quais os aspectos positivos e os negativos nessa... nesse fato... [inaudível]

P4 (18:44): Os positivos é o que eles podem acrescentar depois, né? O que eles podem mostrar, acrescentar, bem, mesmo... o que eles podem acrescentar na aula, posteriormente. E os negativos é tu se sentires avaliada, se sentir muito intimidada. Eu sou autocrítica, como já falei,

me... fiquei um pouco nervosa e a questão também da aula estar gravada me deixou mais nervosa ainda, ansiosa. Na noite anterior eu não dormi. Já porque eu já sabia que isso ia acontecer, que eu ia ficar nervosa.

PI (19:35): Tu já te conheces?

P4 (19:37): Me conheço.

PI (19:37): Tu sabias que ia ser... é, sim... E quais os aspectos da abordagem do *Lesson Study* tu gostarias, ou considera importante e viável, também, incorporar na tua prática letiva?

P4 (19:57): Boa pergunta! Eu... eu junto com a professora de matemática da escola, agora este ano, até devido a pandemia, a gente tem conversado muito mais, e aí agora eu te pergunto: será que é só por causa da pandemia? Será que o curso não contribuiu para que eu e ela tenhamos nos aproximado e conversado cada vez mais em como fazer certas aulas, em como ter abordagem e até onde que a gente deve ir com conteúdo? Mesmo que a gente não dá aula para os mesmos anos, a gente só tem o sexto ano em comum. O oitavo só eu dou, o nono ano só eu dou, ela não dá aula para essas turmas. Mas, mesmo assim, a gente tem conversado muito mais que a gente conversava antes. Não... quase que não se compara. Hoje a gente é muito mais amiga na... como professoras e tem conversado muito mais. E eu acredito que sim, eu abrir uma porta de possibilidade para que haja mais diálogo sobre como ensinar, porque antes era "eu vou ensinar do meu jeito". E eu não percebia isso, sabe? Não percebia. Não tinha percebido isso. "É não eu acho que assim é melhor e pronto. E estar aberta a novas oportunidades, abre novas oportunidades. Nossa! [risos] Estar aberta abre novas, sim, muitas possibilidades e que tu acha inclusive, às vezes, tu tem um preconceito que aquilo "ah não vai dar certo por causa disso, disso, disso" e que, às vezes, na prática traz essas hipóteses, às vezes, acontecem, mas tu traz muito mais benefícios do que tu estava pensando que essas hipóteses iriam prejudicar muito mais. Às vezes não prejudicam tanto e tu tem tanto benefício que vale a pena.

PI (22:00): Muito bom!

P4 (22:01): Então, a primeira coisa que eu diria é que eu estou mais aberta. Estou mais aberta, tanto à críticas e aprender novas maneiras de escutar: "ah o professor faz daquele jeito"... eu vou tentar colocar um pouquinho daquilo ali, também, no meu plano de aula, vamos ver como é que vai ficar.

PI (22:21): Muito bom! E tem alguma característica do *Lesson Study*, ou quais se tem mais de uma, né? que tu consideras assim que tá muito distante ou impossível de ser adaptado ao teu contexto como professora de matemática?

P4 (22:35): É difícil, mas não é impossível. Eu acho que a gente poderia fazer a *Lesson Study*, mesmo na escola pública. Eu acredito que poderia sim. Porque, antes de eu entrar no município era outro prefeito e existiam outras movimentações, eles tinham reuniões por área, os professores... Nós temos um dia de planeamento. Que que é isso? É um dia que tu ficas em

casa, tu não precisas estar na escola. O meu planeamento pode ser feito em casa, é um dia na semana. E, antes de eu entrar no município, eu sei que os professores de matemática tinham a preferência de ser na sexta-feira o planeamento, para que na sexta-feira houvessem reuniões. Uma baita de uma oportunidade, que eu não pude participar, porque quando eu entrei mudou a gestão, e isso não aconteceu mais, este movimento. Mas, nas sextas-feiras eu sei que ele se encontrava e haviam formações de matemática.

PI (23:43): Tinha um planeamento coletivo, então, da área de matemática, dentro da escola ou do município?

P4 (23:50): Era do município.

PI (23:52): Do município. E agora essa... nessa nova gestão a ideia é: cada um faz o seu planeamento individual? Não... não planeja coletivamente... não... não faz essa troca?

P4 (24:03): Não.

PI (24:04): Não tem esse momento de troca a não ser que tu tenhas a iniciativa de procurar. Como tu falou que agora tu conversas mais com a tua colega que é professora de matemática na mesma escola, né?

P4 (24:13): Exatamente. A minha escola ela tem a questão de estar aberto... muito aberta a interdisciplinaridade. Mas, como só tem uma professora de matemática, essa professora... eu... eu trabalho 40 horas na escola, eu trabalho de manhã e de tarde, essa outra professora que eu tenho "trocado figurinhas", como a gente diz, ela estuda... ela dá aula na escola de manhã, só.

PI (24:42): Ela trabalha no turno da manhã?

P4 (24:42): Então, eu tenho... é... eu tenho pouco para trocar, eu não tenho uma pessoa para chegar, estar sempre trocando. A gente... sem falar que também tem o dia de planeamento, então, se a gente tem dias diferentes, a gente se vê... dos cinco dias a gente só se vê 3... 3 manhãs... claro que dá para ser feito, mas quando tu tem outros professores, vários professores para que sejam feito a troca, quanto mais professores mais rica vai ser essa troca, né, eu tenho uma colega que eu troco um pouco, agora que estou aberta [risos].

PI (25:23): Muito bom! Isso já é uma grande diferença, né? Já é um grande começo, assim, né, para uma mudança, digamos assim, né...

P4 (25:31): É verdade.

PI (25:32): E teve vários aspectos que tu consideraste positivo, né? Pra tua formação, enfim...

P4 (25:38): Mas, voltando ao assunto, hoje a dificuldade seria essa, tu conseguir reunir os professores de matemática. No município, a maioria das escolas tem 1 ou 2 professores. Às

vezes, tu és professor sozinho de matemática, tu dás aula para toda... para toda a escola, porque não é uma escola tão grande. Tu vais trocar com quem? É muito interessante ter essa troca, mostrar o que... o que é possível ser feito, porque, às vezes, a gente não tem uma ideia, às vezes, falta criatividade, às vezes tu acha que não é possível mesmo. Então, quando alguém vem e mostra que é possível, sim, isso abre uma porta, então eu acho que era muito importante que houvesse trocas e eu fico imaginando, assim... criatividade da minha cabeça... uma aula que pudesse ser feita em conjunto com os professores nesse encontro e depois a gente pudesse voltar e falar: "bah! fizemos dessa maneira, qual foi o lado bom? qual foi o lado ruim?" Não tanto no *Lesson Study*, porque eu não sei se seria tão impossível todos os professores visualizarem a aula daquele professor. Mas, cada um adaptar um pouquinho uma aula feita em conjunto, né? e cada um trazer: "ah na minha aula aconteceu tal coisa", "na minha teve tal situação" e, mesmo assim, agora eu estou parando para pensar, que seria possível, sim, era apenas gravar, colocar no *YouTube* e todos nós analisarmos... agora, parando para pensar... ou seja, eu acho que é possível fazer, desde que haja boa vontade da prefeitura, no meu caso, né, da escola e dos professores que estão... que estão... estão trabalhando nas escolas. Eu creio que é possível, sim.

PI (27:36): Seria um modelo possível, né? Desde que, claro, houvesse a colaboração de todos os órgãos envolvidos, né, especialmente a instituição, né, a gente trabalha assim... de repente fazer um grupo de, sei lá, professores do 9º ano e vocês planejam coletivamente todo o nono ano, não sei, em grupo... pega o número de professores e dias e faz um planejamento para o nono ano, né... ou nono e oitavo, né... faz esse tipo de planejamento.

P4 (28:02): Até porque o planejamento que nós fizemos ficou muito evoluído comparado com o planejamento inicial, né... é teve... foi acrescido de muita... muita... muito... muitos recursos, né, vamos dizer assim. E isso só foi possível porque todo mundo estava lá, em conjunto. Então, eu creio que se a gente tivesse essa possibilidade aí, as aulas de... eu trabalho no município de Canoas, então, de Canoas inteira... seria... teria esse lucro... está me faltando a palavra...

PI (28:45): Este benefício...

P4 (28:47): Benefício! Perfeito!

PI (28:50): De repente aí seria um caminho para evoluir mesmo no ensino de matemática, né?

P4 (28:54): E do município inteiro! Isso é muito... eu acho muito interessante de se pensar.

PI (29:00): Padaria pensar numa proposta para o município, né... de fazer isso. E em relação aos Critérios de Idoneidade Didática quais os aspectos tu consideraste positivos e quais tu consideraste negativos ao utilizar eles para analisar e redesenhar a aula?

P4 (29:24): Difícil a pergunta [risos]. Deixa eu pensar.

PI (29:32): Tá! Tu lembras dos Critérios de Idoneidade Didática, né?

P4 (29:34): Sim [sinaliza também positivamente com a cabeça].

PI (29:35): São seis facetas, né... o epistêmico, o cognitivo, o de meios, o internacional, o ecológico e... Qual que eu não falei? [risos]... Até eu, viu? Até eu... [inaudível]... passou tanto tempo... o epistêmico, o cognitivo, o de meios, o ecológico, o internacional e o afetivo.

P4 (30:06): Afetivo.

PI (30:07): Isso! E o que que tu... que que tu achaste? Né? O que que tu considerou, assim, de positivo e negativo? Falando de uma forma geral, assim, de utilizar esse recurso, essa ferramenta, para analisar a aula e para redesenhar a aula?

P4 (30:24): Eu adorei os critérios! Porque, realmente, está implícito, ali, tudo que a gente pensa durante uma aula, sabe? Todo... tudo aquilo que tu tens que levar em consideração, o que a gente pensa. Tá implícito. Inclusive coisas que a gente leva em consideração e não pensa, né? Não para... não dá um nome para isso. Então, pela primeira vez, eu vi um nome sendo dado e colocado na minha frente... "Bah! Então isso aqui a gente leva em consideração para avaliar uma aula.". Eu nunca tinha visto. Eu achei muito interessante, muito legal. Durante a avaliação, eu achei, também, muito interessante, porque a gente não tinha dado um nome a isso, mas, de certa maneira, a gente tinha pensado um pouco em cada critério na hora que a gente estava fazendo o plano de aula. Tanto que a gente pode utilizar eles para avaliar, né? Porque eles estavam lá presentes de alguma maneira. Alguns mais, outros menos, mas estavam lá. Então, esses critérios de idoneidade com certeza eu vou levar para minha vida. Eu achei muito interessante. Nunca tinha sido apresentado dessa maneira para mim. E, inclusive, acho que tem que ser apresentado durante o a licenciatura.

PI (31:58): Sim, tem uma pauta, né, tanto para planejar a aula, quanto depois para avaliar aula, né?

P4 (32:05): Exatamente!

PI (32:06): Seja uma aula que tu fazes, individualmente, também, tu podes fazer, mas, também, para esse planejamento coletivo, que nos dá uma direção, né? Direciona, né? Ele faz, assim, um fio condutor, né, por onde a gente tem que ir...

P4 (32:18): Exato! E tu ter eles listado, ali, na tua frente, tu consegue visualizar: "ah eu acho que esse aqui não está bem elaborado, então eu vou colocar... vou pensar o que eu posso fazer para melhorar esse critério"... porque, às vezes, a gente não pensa em tudo, né? Então, quando está ali na tua frente tu consegue tu mesmo, até fazer uma autoavaliação,

PI (32:45): Tá... e que críticas, né, a partir dos critérios, utilizando os critérios, foram feitas outras críticas, né, aí mais detalhadas sobre a aula, né... Quais assim tu lembra que tu tá ou não de acordo? Que tu estavas ou, de repente, fala as que tu não estava de acordo e que tu... e o que que tu gostarias de fazer a esse respeito?

P4 (33:10): Eu lembro que tinha várias que eu não... que eu não estava de acordo. Uma... uma que veio agora foi... uma das únicas que... que me veio foi a utilização de alguns termos, né, que... que alguns termos que era... foi pedido para que no redesenho fosse usada as palavras mais formais. Só que eu acredito, mas, né... que na realidade onde eu estou os alunos não conhecem esses termos. Claro, seria apresentado, mas eu lembro nitidamente nos últimos dois anos anteriores eu falando de hipotenusas como sendo o cateto oposto ao ângulo de 90° e eles faziam uma cara de que "como assim?" Porque eles não entendem o oposto, eles não entendem o oposto, por mais que tu explicasses "o oposto oh". Eu estou... eu falava... eu lembro de mim falando assim na sala de aula: "eu estou oposta ao fulaninho, estamos de frente um para o outro" e, mesmo assim, quando tu voltavas para a matemática era muito difícil deles fazerem a ligação da palavra oposto com o triângulo ali. Então, eu sinto muita dificuldade em... e que fazer... fazer com que eles entendam de verdade esses termos mais formais... então, ah eu sinto que se falasse para os meus alunos, por mais que não esteja tão... que abra uma brecha para a dualidade, eu sinto que eles entendem mais, apesar de abrir uma brecha. Essa brecha a gente pode consertar, a gente pode mostrar para eles, porque os termos formais para eles são muito difícil.

PI (35:09): Na verdade tu quer dizer... desculpa te... com dualidade tu quer dizer ambiguidade, né?

P4 (35:12): Ambiguidade. Exatamente. Mas ah... é porque... talvez, talvez, não tenho certeza, seja também pelo local onde eu estou, né? Pelo... pela escola tão periférica... quando tu começa a... eu lembro também das críticas dos alunos que eles, como eu já falei durante o curso, eles gostam muito de mim, o nono ano é muito meu amigo, então eles reclamam para mim de outros professores: "aí eu entendo nada do que o professor fala"... porque o professor é muito formal...

PI (35:49): Tem uma linguagem que não se acerca da realidade deles, né? Que é essa realidade... que são alunos de periferia, de vulnerabilidade social, né? Que a gente...

P4 (36:00): Exatamente.

PI (36:01): Que tem essa diferença linguística, né? digamos assim.

P4 (36:06): E tu sentes isso quando tu está lá, quando tu está.... tem alguns que tu não entendes o que que a pessoa está falando, porque é muito diferente... é muito diferente e, então, eu quando eu entrei na escola foi uma das primeiras coisas que eu mudei, baixar o nível, assim, de exigência da formalidade, porque eles não... é muito difícil... isso afasta a gente. Só isso que eu lembro agora, nesse momento, assim, que eu sei que... que... que é bom a formalidade, eu não tô dizendo que é ruim, mas eu senti que... senti que afastava muito a minha aula dos alunos e me afastou um pouco deles, então eu baixei essa formalidade um pouco para que eu conseguisse me aproximar deles.

PI (36:58): Perfeito! E tem algum comentário mais que tu gostarias de fazer? As perguntas que eu tinha, era mais ou menos isso que eu tinha pensado, assim, a gente registrou. Mas, se tu tens algum comentário de alguma coisa que eu te lembre que tu querias falar e não tivestes a oportunidade...

P4 (37:19): Eu não lembro agora. Mas, eu só tenho elogios. Só tenho elogios. O curso me fez... me fez outra pessoa, com certeza. Está... não só a questão da matemática... como eu tinha dito antes, a questão da crítica, de aprender a lidar com a crítica, me fez parar para pensar em como absorver as coisas e isso não é algo da licenciatura em matemática, né? é para a vida. Eu posso estar limpando... limpando... eu iria falar pintando... pintando uma parede e receber críticas e aí como que tu vais lidar com essas críticas? Então, isso é algo muito novo para mim. Porque lá na escola eu só recebo elogio. A gente não abre a boca para criticar. A gente só abre a boca para dar elogio. Então, uma crítica construtiva, que vai te trazer uma melhora, é muito bom. Apesar de na hora doer um pouquinho, é muito bom. E tu tem que aprender a lidar com isso para a vida. Então, me mudou. O curso mudou a minha vida, eu diria. Porque, mesmo que eu deixe de ser professora de matemática... deixe... mesmo que com o tempo eu comece a fazer outra coisa...

PI (38:36): Não deixa, por favor! [risos]

P4 (38:40): Mesmo que eu comece a fazer outra coisa, aprender a lidar com isso é muito importante... é muito importante. E, agora mesmo que eu não deixe de ser professora de matemática, no meu relacionamento com o meu marido vem e me der uma crítica. Então, isso mudou minha vida, com certeza. E os critérios de idoneidade... com certeza foi muito construtivo o curso... foi muito construtivo. A única crítica que eu tenho para fazer é "foi pouco tempo". A gente precisava de mais tempo, aprender mais.

PI (39:11): [risos] Sim, quem sabe fazer um grupo de *Lesson Study* com os critérios, né? a longo prazo, né? Não sei. Eu talvez vez tenha um plano, assim, para mais... Agora, para a tese era isso que eu precisava (né?), assim para ter dados para analisar (né?), para fazer um trabalho de tese (né?). Mas, depois sim, como plano assim para seguir eu acho que é muito promissor esse curso, né? Também para gente... a gente aprendeu muito com esse curso.

P4 (39:37): Como formador de professor, né?

PI (39:40): Exato! O curso foi maravilhoso. O grupo foi maravilhoso. Só tenho a te agradecer, P4, por tu ter te colocado sempre super disponível, colocou muito... empenhou muito tempo, muita disposição (né?), que se percebeu, tanto na tua aula, quanto nas discussões em tudo, né? Eu só tenho a te agradecer muito, muito, muito, por tudo ter dado certo, e também, por tua colaboração.

P4 (40:05): Eu também, já agradei... só tenho a agradecer. Obrigado por ter me escolhido lá no início do curso, e abriu muitas portas na minha vida e, com certeza, mudou a minha vida... eu sou uma antes do curso, outra depois do curso. Obrigada!

PI (40:25): Nossa! Eu fico super feliz com isso.

P4 (40:29): E continue na questão da formação de professores. Continue mudando a vida de outros professores por aí!

PI (40:36): É... é também o que a gente espera, né? Porque, também, só assim para a gente mudar também a educação (né?) do Brasil, principalmente. Porque precisa melhorar muito, né? Muito, muito, muito... eu acho que a gente precisa...

P4 (40:45): Principalmente na matemática.

PI (40:47): É! Exato! Tá bom... a gente tá em contato... qualquer coisa que tu precisares, me escreve, me pergunta, tu tens essa liberdade, essa abertura, tá? E a gente vai mantendo esse contato, vou te informando dos próximos passos assim dá... das publicações, também, né? ... que a gente vai analisar agora... e qualquer coisa que precisar, chama.

P4 (41:13): Igualmente... qualquer coisa, me chama.

PI (41:15): Muito obrigado, P4!

P4 (41:17): Eu que agradeço.

PI (41:19): Fica bem aí!

P4 (41:20): Tu também!

PI (41:21): Um beijão!

P4 (41:22): Beijo, beijo!

PI (41:23): Tchau!

Anexo 4. Questionário final aplicado aos professores participantes do curso

Instrumento de avaliação do curso de extensão:
Lesson Study (LS) e *Crterios de Idoneidad Didáctica (CID)*: uma formação continuada para professores que ensinam matemática

1. Dados de identificação

- a. Nome completo:
- b. Data de nascimento:
- c. Nome da mãe:
- d. CPF:
- e. RG:
- f. Endereço completo:
- g. e-mail:

2. Experiência docente e formação acadêmica

- a. Formação acadêmica:
- b. Tempo e local de experiência docente:

3. Em relação a cursos de formação de professores na modalidade a distância

- a) Você já havia participado de um curso de formação ou capacitação docente na modalidade a distância? Quais?
- b) Quais aspectos você considerou positivos ao realizar o curso na modalidade a distância?
- c) Quais aspectos você considerou negativos ao realizar o curso na modalidade a distância?
- d) Você considera que o material disponibilizado no curso foi adequado para a aprendizagem esperada?
- e) Você considera que a dinâmica de trabalho realizada no curso foi eficaz para o desenvolvimento e a realização das atividades solicitadas?
- f) Quais sugestões você propõe para melhorar o desenvolvimento do curso nesta modalidade?

4. Você possui experiência teórica e/ou prática relacionada à análise e reflexão sobre a própria prática docente ou sobre a prática docente alheia? Quais?

5. Em relação a metodologia *Lesson Study (LS)*

- a) Você conhecia algo relacionado a essa metodologia antes do curso?
- b) Quais aspectos da *Lesson Study* você considera positivos para o trabalho docente?
- c) Quais aspectos da *Lesson Study* você considera negativos para o trabalho docente?
- d) Você acredita que a *Lesson Study* pode ser adaptada ao contexto de professores brasileiros? Por quê?
- e) Quais os efeitos de um trabalho baseado na LS para o ensino e aprendizagem da matemática? E para a formação de professores?

6. Em relação aos Critérios de Idoneidade Didática (CID)

- a) Você conhecia algo relacionado aos CID antes do curso?
- b) Quais critérios você considera serem os mais importantes para analisar e valorar uma aula de matemática? Por quê?
- c) Dentre os seis critérios de idoneidade didática estudados (epistêmico, cognitivo, de meios, interacional, afetivo e ecológico), seus componentes e indicadores, você conseguiu obter uma compreensão total de todos eles? Existe algum critério componente ou indicador que gerou uma certa dificuldade de compreensão? Quais e por quê?
- d) Você considera que os critérios, componentes e indicadores estudados contemplam todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática? Caso considere que sim, explique o porquê. Caso contrário, qual critério, componente ou indicador você acrescentaria ou retiraria?

7. Competências docentes desenvolvidas durante e através do curso

- a) Competência matemática:
Você considera que o trabalho desenvolvido no curso foi relevante para melhorar o conhecimento matemático relacionado ao Teorema de Pitágoras ou a algum outro tema matemático? Justifique
- b) Competência em Análise e Intervenção Didática:
Você acredita que o curso lhe ajudou a elaborar e analisar a aula implementada e propor propostas/estratégias de aperfeiçoamento para a mesma? Como?

8. Considerando que o curso contemplava o planejamento e análise de uma aula de forma cooperativa/grupal. Quais sensações/sentimentos/emoções você sentiu ao realizar o curso?

Anexo 5. Termo de aceitação assinado pelos participantes do curso piloto.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, declaro, por meio deste termo, que concordo em participar da pesquisa de doutorado intitulada “**Estudos de Aula e os Critérios de Idoneidade Didática: Desenvolvimento da Competência em Análise e Intervenção Didática de Professores de Matemática em Exercício**”, desenvolvida pela pesquisadora Prof. Ma. Viviane Beatriz Hummes, na Universidade de Barcelona. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Prof. Dr. Vicenç Font Moll e pela Profa. Dra. Adriana Breda, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através dos e-mails vfont@ub.edu e adriana.breda@gmail.com.

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é analisar como se desenvolve a competência em análise e intervenção didática em professores de matemática em exercício que participam de um ciclo formativo baseado nos Critérios de Idoneidade Didática e nos Estudos de Aula (*Lesson Study*).

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (tese de doutorado, artigos científicos, seminários etc.), identificadas apenas pelas iniciais de meu nome.

A minha colaboração se dará por meio da participação em um ciclo formativo, baseado nos Estudos de Aula e nos Critérios de Idoneidade Didática, que visa o desenho, a implementação, a avaliação e o redesenho de uma sequência didática. No caso de fotos, vídeos e gravações de voz, obtidos durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como tese de doutorado, artigos científicos, seminários, etc.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado, poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone (51) 99916-3236 ou e-mail vivihummes@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que poderei me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de _____ de _____.

Assinatura

do

Participante:

Assinatura

da

Pesquisadora:

Anexo 6. Termo de aceitação assinado pelos professores participantes da pesquisa.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, aluno(a) do curso de extensão da UFRGS "*Lesson Study* e Critérios de Idoneidade Didática: uma formação continuada para professores que ensinam matemática", declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa de doutorado intitulada "*Uso combinado del Estudio de Clases y de la Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas*", desenvolvida pela pesquisadora Profa. Ma. Viviane Beatriz Hummes, da Universitat de Barcelona. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Prof. Dr. Vicenç Font Moll e pela Profa. Dra. Adriana Breda, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através dos e-mails vfont@ub.edu e adriana.breda@gmail.com.

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é analisar como se desenvolve a competência em análise e intervenção didática em professores de matemática em exercício que participam de um ciclo formativo baseado nos Critérios de Idoneidade Didática e nos Estudos de Aula (*Lesson Study*).

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (tese de doutorado, artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de meu nome e por um codinome.

Minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em aula/encontro/palestra, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e filmagens, obtidas durante minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como tese de doutorado, artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, o participante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre um a formação dos professores participantes, ou seja, espera-se que ocasione um aprimoramento na formação destes docentes e, por consequência, uma melhora nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

Minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado, poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone (51) 99796-1905 ou e-mail vivihummes@gmail.com.

Fui ainda informado(a) ainda de que poderei me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de março de 2020.

Assinatura do(a) participante:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do orientador da pesquisa: