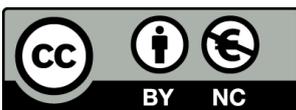


LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: TRANSICIÓN
ENTRE LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y
SECUNDARIA

César Augusto Trelles Zambrano



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.ca>

Aquesta obra està subjecta a una llicència Creative Commons Reconeixement-NoComercial

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial licence



TESIS DOCTORAL

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA:
TRANSICIÓN ENTRE LA EDUCACIÓN
PRIMARIA Y SECUNDARIA

CÉSAR AUGUSTO TRELLES ZAMBRANO

2022



LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: TRANSICIÓN ENTRE LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA © 2022 by César Augusto Trelles Zambrano is licensed under [Attribution-NonCommercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



TESIS DOCTORAL

**LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA:
TRANSICIÓN ENTRE LA EDUCACIÓN PRIMARIA
Y SECUNDARIA**

CÉSAR AUGUSTO TRELLES ZAMBRANO

2022

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Dirigida por:

Dr. Àngel Alsina Pastells

Tutor:

Dr. Àngel Alsina Pastells

Memoria presentada para optar al título de doctor por la Universidad de
Girona



Dr. Àngel Alsina Pastells, profesor Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Girona.

Declara:

Que la tesis titulada “LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: TRANSICIÓN ENTRE LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA”, presentada por César Augusto Trelles Zambrano para obtener el grado de Doctor en Educación por la Universidad de Girona ha sido realizada bajo mi supervisión.

Para todos los efectos, firmo este documento.

Dr. Àngel Alsina Pastells

Girona, 2022

Reconocimiento:

Esta investigación fue financiada por el estado ecuatoriano y la Universidad de Girona, a través de la beca SENESCYT-UdG Nro. AR6C-000086. Se reconoce también a la Universidad de Cuenca (Ecuador) por la licencia otorgada para poder llevar a cabo la investigación de forma presencial en Girona.

*A Xime,
David y Dome
quienes son
mi profunda inspiración.*

*No hay enseñanza sin investigación,
ni investigación sin enseñanza.*

Paulo Freire

AGRADECIMIENTOS

A Àngel, mi director de tesis, gracias por aceptar desde el principio dirigir esta investigación, sin duda este trabajo no sería lo que es sin tu invaluable asesoría. De manera especial gracias por todas las enseñanzas brindadas en el recorrido de esta extraordinaria experiencia, por guiar este trabajo con esa calidad humana y gran profesionalismo.

A mi esposa Ximena, a mis hijos David y Doménica gracias de todo corazón, esta tesis no hubiese sido posible sin su apoyo. Gracias por involucrarse en esta maravillosa experiencia desde el primer momento, gracias Xime por confiar en mí y aceptar este reto, aun cuando era un tanto incierto por todo lo que ello implicaba. David y Dome infinitas gracias porque a pesar de su corta edad siempre comprendieron que la finalización exitosa del presente trabajo implicaba grandes esfuerzos y en muchas ocasiones sacrificar tiempo en familia, gracias por todo su apoyo sin pedir nada a cambio.

A mi familia en Ecuador, a mis padres por todo su apoyo, de manera especial a mi madre, por ser mi primera maestra y enseñarme desde pequeño que en la vida todo se consigue con esfuerzo, a mi tía Elvia por siempre confiar en mí y brindarme palabras de aliento. Gracias también a mi abue Esthela, a mi hermana, a todos mis tíos, a mis suegros, a mis cuñados, a mis primas y sobrinas, gracias por todas sus palabras que aún desde la distancia siempre fueron reconfortantes.

A la Secretaria de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (Ecuador) y a la Universidad de Cuenca (Ecuador) por brindar todas las facilidades para llevar a cabo la presente investigación.

A Àngels Coma, secretaria del Departamento de Didácticas Específicas de la Universidad de Girona, recuerdo claramente todas sus palabras de bienvenida, es muy difícil tomar la decisión de cambiar de lugar de residencia con toda la familia; sin embargo, cuando encuentras apoyo desde el principio, todo se vuelve más fácil, por ello gracias Àngels por hacernos sentir como en casa desde el primer momento.

A María Pallisera por haber dirigido de forma excelente el programa de Doctorado en Educación durante estos años, gracias por animarnos y por estar siempre presta para cualquier requerimiento o solicitud; en definitiva, gracias por estar siempre pendiente de todos los doctorandos.

A todos los integrantes del GRECA (Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental), de manera especial a los compañeros de la línea de investigación en Educación Matemática por siempre compartir sus conocimientos.

A Germán, gracias por ser ese amigo que siempre está pendiente y presto a ayudar en cualquier momento o situación.

A los estudiantes que participaron en las diferentes fases de la investigación, a sus maestras y sus instituciones educativas por confiar en nuestro trabajo.

A todos los amigos que hice en España, gracias por toda esa acogida y esos maravillosos momentos que quedan grabados en la memoria.

LISTA DE PUBLICACIONES

Esta tesis es presentada como un compendio de cinco artículos.

Artículo 1:

Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.

Índices de calidad de la revista: La revista Unión está indizada actualmente en Dialnet y Latindex.

Artículo 2:

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *Innova Research Journal*, 7(2), 97-116. <https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>

Índices de calidad de la revista: La revista Innova Research Journal está indizada actualmente en Dialnet, LatinREV, REDIB y Latindex Catálogo (37 de 38 características cumplidas).

Artículo 3:

Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(102), 43-59.

Índices de calidad de la revista: La revista Epsilon está indizada actualmente en Dialnet, DICE, Latindex y Carhus plus +

Artículo 4:

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, AÁ (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>

Índices de calidad de la revista: La revista Enseñanza de las Ciencias está indizada en Web of Science (SSCI), Scopus, Dialnet, FECYT, etc. Revista con factor de impacto

(2021): 1.217 de acuerdo al Journal Citation Reports y CiteScore (2021): 1.8 de acuerdo a Scopus.

Artículo 5:

Alsina, Á., Salgado, M., Toalongo, X. y Trelles, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática - Ridema*, 5(1), 1-21. <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/34513>

Índices de calidad de la revista: La revista RIDEMA está indizada actualmente en DOAJ, Latindex Catálogo, REDIB, etc.

ABREVIATURAS

BGU:	Bachillerato General Unificado
CCSSM:	Common Core State Standards for Mathematics
CEDIA:	Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y la Academia
CM:	Creación de un modelo
COMAP:	Consortium for Mathematics and Its Applications
EGB:	Educación General Básica
ESO:	Educación Secundaria Obligatoria
ICTMA:	International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications
MC:	Modelos Concretos
MEA:	Modeling Eliciting Activities
MGV:	Modelos Gráficos y/o visuales
MINEDUC:	Ministerio de Educación (Ecuador)
MM:	Modelización Matemática
MPE:	Modelo previamente establecido
NCTM:	National Council of Teachers of Mathematics
OCDE:	Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos
PM:	Problemas de Modelización
PRM:	Proceso de reflexión de la Modelización
SIAM:	Society for Industrial and Applied Mathematics

LISTA DE FIGURAS

ARTÍCULO 2

Figura 1. Una vía de transformación de un problema matemático a uno de modelización	57
Figura 2. Ejercicio de reconocimiento	60
Figura 3. Ejercicio algorítmico y de repetición	61
Figura 4. Problema de traducción simple o compleja	61
Figura 5. Problema de procesos	62
Figura 6. Problema de Modelización matemática	62
Figura 7. Ejercicio de reconocimiento	63
Figura 8. Ejercicio algorítmico y de repetición	64
Figura 9. Problemas sobre situaciones reales	64

ARTÍCULO 3

Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007)	77
Figura 2. Noticia sobre la caída de las ventas de coches	80
Figura 3. Preguntas guía	81
Figura 4. Actividad de modelización matemática sobre coches	82
Figura 5. Noticia sobre las tarifas eléctricas	83
Figura 6. Preguntas guía sobre los impuestos a la electricidad	84
Figura 7. Actividad de modelización sobre tarifas de energía eléctrica	85
Figura 8. Página de inicio de Desmos	86
Figura 9. Página para crear actividades en Desmos	86
Figura 10. Generación de código de actividad en Desmos	87
Figura 11. Página de ingreso de alumno con su código	87
Figura 12. Pantalla de trabajo de toda la clase	88

ARTÍCULO 4

Figura 1. Gráfico de número de casos confirmado por A6	100
Figura 2. Representación gráfica de los datos elaborada por A5	100
Figura 3. Número de contagios por mes, calculado por A4	101
Figura 4. Número de defunciones por mes, calculado por A4	101

Figura 5. Fragmento de la tabla elaborada por A5	102
Figura 6. Representación gráfica de los nuevos casos y defunciones diarias elaborada por A5	102
Figura 7. Porcentaje de disminución por semana y cálculo de media aritmética por A5..	103
Figura 8. Predicción de número de defunciones por semana calculado por A5	103
Figura 9. Predicción de incrementos de casos diarios al día 30 de junio elaborado por A7 .	104
Figura 10. Predicción de casos totales hasta el 30 de junio elaborada por A7	104

ARTÍCULO 5

Figura 1. Ejemplo de recuento usando los propios niños	120
Figura 2. Ejemplo de recuento usando dibujos	121
Figura 3. Tabla de recuento correspondiente a diez lanzamientos de un dado	121
Figura 4. Tabla de frecuencias correspondiente a diez lanzamientos de un dado	122
Figura 5. Representación de los datos en la pizarra	126
Figura 6. Registros diversos de la distribución de datos en la tabla	127
Figura 7. Tabla de recuento concreta, con los propios niños	129
Figura 8. Marcando su peso individualmente	129
Figura 9. Representando datos con policubos	130
Figura 10. Tabla de recuento y tránsito a la tabla de frecuencias	131
Figura 11. Tabla de recuento y tabla de frecuencias dobles	131

LISTA DE TABLAS

ARTÍCULO 1

Tabla 1. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de número y operaciones (NCTM, 2003)	32
Tabla 2. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de álgebra (NCTM, 2003)	32
Tabla 3. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de geometría (NCTM, 2003)	33
Tabla 4. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de estadística y probabilidad (NCTM, 2003)	33
Tabla 5. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el Kindergarten, Primer y Segundo grado	35
Tabla 6. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el tercer, cuarto y quinto grado	36
Tabla 7. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el sexto y séptimo grado	37
Tabla 8. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el octavo grado	37
Tabla 9. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el High School	38
Tabla 10. La modelización matemática en el subnivel de EGB Elemental (MinEduc, 2016)	42
Tabla 11. La modelización matemática en el subnivel de EGB Superior (MinEduc, 2016)	43
Tabla 12. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano vigente de Bachillerato (MinEduc, 2016)	44
Tabla 13. La modelización matemática en el currículo español vigente de Educación Primaria (Real Decreto 126/2014)	46
Tabla 14. La modelización matemática en el currículo español vigente de ESO y Bachillerato (Real Decreto 1105/2014)	48

ARTÍCULO 2

Tabla 1. Resultados del análisis de los tipos de problemas de los textos de los años 2016-2019 de EGB Superior (12-15 años) de Ecuador 63

Tabla 2. Resultados del análisis de los tipos de problemas de los textos de los años 2020-2022 de EGB Superior (12-15 años) de Ecuador 65

ARTÍCULO 4

Tabla 1. Comparativa de valores reales y pronosticados 105

Tabla 2. Trabajo de los alumnos organizado por categorías 107

INDICE

AGRADECIMIENTOS	i
LISTA DE PUBLICACIONES	iv
ABREVIATURAS	vii
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABLAS	xii
ABSTRACT	1
RESUMEN	3
RESUM	6
1. INTRODUCCIÓN	9
2. OBJETIVOS:	22
2.1. Objetivo general:	22
2.2. Objetivos específicos:	22
3. METODOLOGÍA	24
4. ARTÍCULOS	28
4.1. Artículo 1:	28
4.2. Artículo 2:	52
4.3. Artículo 3:	74
4.4. Artículo 4:	92
4.5. Artículo 5:	115
5. DISCUSIÓN	138
5.1. Tratamiento de la modelización matemática en los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos	138
5.2. Presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de los libros de texto ecuatorianos	140
5.3. La modelización matemática a través de las Actividades generadoras de modelos (MEA'S por sus siglas en inglés)	144
5.4. Una actividad de modelización matemática en Educación Primaria con datos auténticos	145
5.5. Recomendaciones al profesorado acerca de la representación de datos estadísticos y su correspondiente implicación para el desarrollo de procesos de modelización matemática	149
6. CONCLUSIONES	153
6.1. Limitaciones del estudio y perspectivas de trabajo futuro	157

7. REFERENCIAS	161
8. APENDICES.....	175
8.1. Apéndice A.....	175
8.2. Apéndice B.....	180

ABSTRACT

In recent years, mathematical modelling in education research has achieved significant notoriety, as evidenced by the production of literature on the subject by mathematics education' prestigious international organizations, such as the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Additionally, some organizations such as the International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) are specifically focalized to its study from different facets. As a result, several countries have now decided to incorporate mathematical modelling into their respective curricula.

However, there is still a lack of studies that, on the one hand, allow us to identify the strengths and weaknesses of the curricular documents and thus contribute to their permanent improvement and, on the other hand, to better understand the work of students when they are faced with working with mathematical modelling activities. We consider that this is a latent need, especially at the primary and secondary education levels.

From this point of view, this thesis provides, firstly, an analysis of the curricula of Ecuador, Spain and the United States, detecting some strengths in them, as well as the main weaknesses (Article 1). It is concluded that, although modelling is explicitly present in different curricula, there is an important level of disarticulation, both between the different curricular blocks, as well as between the different years of study.

In Article 2, considering that textbooks are an important resource in the teaching and learning processes, a study is provided that identifies the presence of mathematical modelling in them. In this respect, it is concluded that, in Ecuador, there is a serious

contradiction between what is stated in the curriculum and what is proposed to students for their learning process through the textbooks, because the presence of mathematical modelling in them is practically null.

In Article 3, some mathematical modelling activities are proposed, mainly from the theoretical approach of Modeling-Eliciting Activities (MEA), with the purpose of providing teachers with resources and guidelines that lead to a greater integration of modelling processes in the classroom.

In Article 4, with the purpose of understanding the modelling processes carried out by students, specifically in statistics education, a mathematical modelling activity was designed and implemented with Primary Education students using authentic data from Covid-19, It was concluded that through these activities, students are able to work on topics that are not usually present in the curricula, such as confidence intervals, range, identification of outliers and random numbers. The processes of transnumeration and mathematization were reflected, with evidence that students using more complex techniques produce more effective models. The results have also allowed us to recommend the use of these activities in curricular enrichment programmes aimed at students with an affinity for mathematics.

Finally, due to the importance of introducing mathematical modelling in Early Childhood Education, we present the implementation of an activity with pre-school children, specifically in the field of statistics (Article 5). We consider that these activities helps the students to work in more complex modelling processes in the future and, additionally, provide inputs that allow us to provide guidance to teachers to work on these topics.

RESUMEN

La modelización matemática en el ámbito educativo en los últimos años ha alcanzado importante notoriedad, muestra de ello es la producción de literatura referente al tema por parte de prestigiosas organizaciones internacionales en el campo de la educación matemática, como por ejemplo el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); así como la consolidación de organizaciones como la International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) dedicada específicamente a su estudio desde diferentes facetas. Esto hace que, en la actualidad varios países hayan decidido incorporarla en sus respectivos currículos.

Sin embargo, aún hacen falta estudios que permitan, por un lado, identificar las fortalezas y debilidades que tienen los documentos curriculares y de esta manera contribuir a una mejora permanente de los mismos y, por otro, comprender de mejor manera el trabajo de los estudiantes cuando se enfrentan a trabajar con actividades de modelización matemática. Consideramos que esto es una necesidad latente sobre todo en los niveles de Educación Primaria y Secundaria.

Desde esta perspectiva, esta tesis proporciona, en primer lugar un análisis de los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos detectando algunas fortalezas en los mismos, así como las principales debilidades (Artículo 1). En este análisis se concluye que, si bien la modelización está presente de manera explícita en cada uno de los currículos, existe un nivel importante de desarticulación, tanto entre los diferentes bloques curriculares, así como entre los diferentes años de estudio. Adicionalmente, en el Artículo 2, considerando que los libros de texto son un importante recurso en el proceso de enseñanza aprendizaje, se aporta un estudio que identifica la presencia de la modelización

matemática en los mismos. Al respecto se concluye que, al menos en el caso de Ecuador, existe una grave contradicción entre lo que se manifiesta en el currículo y lo que se propone a los estudiantes para su proceso de aprendizaje a través de los libros de texto, esto debido a que la presencia de la modelización matemática en los mismos es prácticamente nula.

En el Artículo 3 se proponen algunas actividades de modelización matemática, fundamentalmente desde el enfoque teórico de las Modeling-Eliciting-Activities (MEA), con el propósito de brindar al profesorado recursos y orientaciones que conlleven a una mayor integración de los procesos de modelización en las aulas. Asimismo, en el Artículo 4 con el propósito de comprender los procesos de modelización realizados por los estudiantes, de manera específica en el ámbito de la estadística, se diseñó e implementó una actividad de modelización matemática con estudiantes de Educación Primaria a partir de datos auténticos de la Covid-19, se concluye que a través de estas actividades, los estudiantes son capaces de trabajar en temas que habitualmente no están presentes en los planes de estudio, tales como intervalos de confianza, rango, identificación de valores atípicos y números aleatorios. Los procesos de transnumeración y matematización se vieron reflejados, obteniendo evidencia que los alumnos que utilizan técnicas más complejas producen modelos más eficaces. Los resultados obtenidos nos han permitido también recomendar la utilización de estas actividades en programas de enriquecimiento curricular dirigidos a estudiantes que presentan afinidad hacia las matemáticas.

Finalmente, debido a la importancia de la introducción de la modelización matemática en edades tempranas, se presenta la implementación de una actividad con niños de educación infantil, concretamente en el ámbito de la estadística (Artículo 5). Consideramos que estas actividades preparan a los estudiantes para trabajar a futuro en

procesos de modelización más complejos y a su vez aportan insumos que permiten brindar orientaciones al profesorado para trabajar estos temas.

RESUM

En els darrers anys, la modelització matemàtica en l'àmbit de la recerca educativa ha assolit una notorietat important, mostra d'això és la producció de literatura referent al tema per part de prestigioses organitzacions internacionals d'educació matemàtica, com per exemple el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); així com la consolidació d'organitzacions com la International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) dedicada específicament al seu estudi des de diferents facetes. Això fa que, actualment, diversos països hagin decidit incorporar la modelització matemàtica en els seus respectius currículums.

Tot i així, encara calen estudis que, d'una banda, permetin identificar les fortaleeses i febleses que tenen els documents curriculars i d'aquesta manera contribuir a una millora permanent dels mateixos i, d'altra banda, comprendre millor el treball dels estudiants quan s'enfronten a treballar amb activitats de modelització matemàtica. Considerem que això és una necessitat latent sobretot en els nivells d'educació primària i secundària.

Des d'aquesta perspectiva, aquesta tesi proporciona, en primer lloc, una anàlisi dels currículums d'Equador, Espanya i els Estats Units, detectant-hi algunes fortaleeses, així com les debilitats principals (Article 1). En aquest estudi es conclou que, si bé la modelització és present de manera explícita en cadascun dels currículums, hi ha un nivell important de desarticulació, tant entre els diferents blocs curriculars, com entre els diferents anys d'estudi.

En l'Article 2, considerant que els llibres de text són un recurs important en el procés d'ensenyament i aprenentatge, es porta a terme un estudi que identifica la presència

de la modelització matemàtica. Es conclou que, almenys en el cas de l'Equador, hi ha una greu contradicció entre allò que es manifesta en el currículum i allò que es proposa als estudiants per al seu procés d'aprenentatge a través dels llibres de text, a causa de que la presència de la modelització matemàtica en aquests és pràcticament nul·la.

En l'Article 3 es proposen algunes activitats de modelització matemàtica, fonamentalment des de l'enfocament teòric de les *Modeling-Eliciting-Activities* (MEA), amb el propòsit d'oferir al professorat recursos i orientacions que comportin una integració més gran dels processos de modelització a les aules. En l'Article 4, amb el propòsit de comprendre els processos de modelització realitzats pels estudiants, de manera específica en l'àmbit de l'estadística, es dissenya i implementa una activitat de modelització matemàtica amb estudiants d'Educació Primària a partir de dades autèntiques de la Covid-19. Es conclou que, a través d'aquestes activitats, els estudiants són capaços de treballar en temes que habitualment no són presents en els plans d'estudi, com ara intervals de confiança, rang, identificació de valors atípics i números aleatoris. Els processos de transnumeració i matematització es veuen reflectits, obtenint evidència que els alumnes que utilitzen tècniques més complexes produeixen models més eficaços. Els resultats obtinguts també han permès recomanar la utilització d'aquestes activitats en programes d'enriquiment curricular adreçats a estudiants que presenten afinitat cap a les matemàtiques.

Finalment, a causa de la importància de la introducció de la modelització matemàtica en edats primerenques, es presenta la implementació d'una activitat amb nens i nenes d'educació infantil, concretament en l'àmbit de l'estadística (Article 5). S'assumeix que aquestes activitats, per una banda, preparen els estudiants per treballar en el futur

processos de modelització més complexos i, per l'altra, aporten informacions que permeten oferir orientacions al professorat per treballar aquests temes.

1. INTRODUCCIÓN

La presente tesis se presenta en formato de compendio de publicaciones, la misma está constituida por cinco artículos cuyo eje principal es la modelización matemática. Al hablar de ella, podemos decir que actualmente no existe todavía unidad de criterio en la comunidad científica para definirla. Sin embargo, diversos autores brindan importantes aportes a menudo complementarios, como por ejemplo Alsina, C. et al. (2007), exponen que la modelización matemática se refiere al proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático, lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. Borromeo (2010) y Blum (2015) coinciden en afirmar que puede ser entendida simplícidamente como un proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. Por otro lado, Bliss y Libertini (2019) y Blum y Borromeo (2009) consideran que se trata de un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas, esta última es la conceptualización que orienta el desarrollo de esta tesis.

Por otra parte, existen también diversas perspectivas de modelización matemática. Kaiser y Sririman (2006) las clasifican en cinco grupos: 1) la perspectiva realista, cuyo objetivo principal tiene un enfoque pragmático utilitario hacia la resolución de problemas del mundo real; 2) la perspectiva contextual, que se centra en los objetivos psicológicos, otorgando mucha importancia a la resolución de problemas de palabras; 3) la perspectiva educacional, que es la perspectiva en la que nos situamos, y que persigue objetivos pedagógicos y disciplinares tanto en la estructuración de los procesos de

aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos; 4) la perspectiva sociocrítica, que busca la comprensión crítica del mundo circundante y finalmente la perspectiva epistemológica que se centra en los desarrollos teóricos del proceso de modelado y, 5) la perspectiva cognitiva, que tiene las características más bien de una metaperspectiva, ya que se centra en objetivos de investigación a través del análisis y comprensión de los procesos cognitivos que ocurren durante el modelado, así como en objetivos psicológicos mediante la promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso como imágenes físicas, enfatizando a la modelización como un proceso mental tanto de abstracción como de generalización.

Otro aspecto importante es el entendimiento de la modelización matemática como un proceso no lineal. En este sentido, algunos autores (Carreira et al., 2010; Geiger, 2011; Gimnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011; Kaiser, 1995; entre otros) consideran que esta puede ser entendida a través de ciclos de modelización.

Por lo expuesto, podemos decir también que, si bien la modelización matemática ha ocupado un importante lugar en la agenda investigativa internacional, aún es necesario contribuir con estudios que, por un lado, profundicen más en cómo esta es abordada tanto en los currículos, identificando las respectivas fortalezas y debilidades, como en uno de los recursos utilizados por el profesorado como son los libros de texto y, por otro lado, que analicen la producción de los estudiantes de los primeros niveles escolares al enfrentarse a actividades de modelización matemática.

Una mejor comprensión de estos aspectos -considerados como algunos de los elementos clave del proceso educativo: currículo, recursos y producción de los

estudiantes- desde la mirada de la modelización matemática, sin duda, proporciona una oportunidad para facilitar la transición de los estudiantes hacia la etapa de Educación Secundaria en lo concerniente a procesos de modelización. Desde esta perspectiva el objetivo de esta tesis doctoral es precisamente analizar el estado actual de la presencia de la modelización matemática en Educación Primaria y su correspondiente transición a la Educación Secundaria. Estudiar esta transición es particularmente importante por las siguientes razones: primero, porque el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática debe responder a una secuencia y articulación adecuada, incrementando paulatinamente los niveles de dificultad y garantizando que este trabajo sea continuo a lo largo de todos los niveles educativos, después porque a través de la modelización matemática es posible conectar los diferentes conocimientos matemáticos con situaciones del entorno y de la vida cotidiana de los estudiantes.

Consecuentemente, las preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta con esta tesis son: ¿De qué manera está presente la modelización matemática en los currículos de las primeras etapas? y ¿Cuál es la producción de los estudiantes de estas primeras etapas al enfrentarse a actividades de modelización matemática con datos auténticos?

Es pertinente indicar que el tema central de la presente tesis es la modelización matemática, concretamente enfocada en temas de estadística y probabilidad, esto debido a que los diferentes contenidos que se abordan en este bloque de estudio son más propicios para ser trabajados con datos reales, siendo esta una de las principales características de la modelización.

Como se dijo en principio, esta tesis se presenta en formato de compendio de publicaciones. A continuación, se describen brevemente cada una de ellas, así como su correspondiente interrelación.

En los últimos años la modelización matemática ha cobrado considerable protagonismo en el currículo de matemáticas de diferentes países, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega esta, tanto en aplicaciones de la vida real como dentro de la propia educación matemática. Para Blomhøj (2008), la modelización matemática junto con la introducción de la tecnología de la información es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas. En este contexto, el primer artículo denominado **“Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo”** realiza un estudio del nivel de importancia y del tratamiento que se da a la modelización matemática en los currículos de algunos países, como por ejemplo: Ecuador, España y Estados Unidos centrándose en los dirigidos a estudiantes de 3 a 18 años de edad.

Además, se analizan los lineamientos que establecen varias organizaciones con influencia a nivel internacional en Educación Matemática, como por ejemplo: *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), así como cierta literatura generada desde la *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA) constituida como un grupo de estudio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

El análisis de los documentos mencionados constituye un aspecto de suma importancia, pues permite identificar de forma clara el tratamiento que se otorga a la

modelización matemática en los diferentes currículos. Sobre todo, contribuye a identificar fortalezas y debilidades que presentan cada uno de los documentos analizados, siendo una de las principales fortalezas la incorporación en algunos casos de la modelización matemática en edades tempranas; así como una de las principales debilidades, la falta de articulación del tratamiento que se da a la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles educativos y también entre los diferentes estándares de contenido, dominios o bloques, según como esté organizada la asignatura.

Sin embargo, si bien es importante la presencia de la modelización matemática de forma explícita en los currículos, conviene también analizar qué tratamiento se da a la misma en los libros de texto, esto debido a que diversos estudios como los de Fernández y Caballero (2017); Parcerisa (1996); entre otros, dan cuenta que los libros de texto están entre los recursos más utilizados por el profesorado y por tanto su influencia en la práctica escolar es decisiva. En este sentido, el Artículo 2: **“La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos”** permite tener una visión clara acerca de la correspondencia existente entre los lineamientos curriculares formalmente emitidos por los organismos que rigen el sistema educativo y los recursos que son utilizados frecuentemente por el profesorado.

El estudio se centra en los libros de texto ecuatorianos fundamentalmente por dos razones:

En primer lugar, debido a que el sistema educativo ecuatoriano está conformado mayoritariamente (76,8%) por instituciones educativas públicas, 4% por instituciones fiscomisionales -instituciones que reciben recursos del estado, pero que también se autofinancian, principalmente con aportes de los padres de familia-, 0,7% por

instituciones municipales y 18,5% por instituciones privadas (Ministerio de Educación del Ecuador [MinEduc], 2021). Esta información resulta relevante ya que las instituciones educativas públicas utilizan obligatoriamente un único libro de texto, que es entregado a los estudiantes de forma gratuita por el estado ecuatoriano; sin embargo, este libro en ocasiones es también utilizado por las instituciones educativas fiscomisionales y municipales, incluso en algunos casos lo utilizan las instituciones educativas privadas. Por lo expuesto, resulta entonces importante analizar los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación ya que es el recurso que llega a la mayor parte de la población estudiantil.

La segunda razón se debe a que, el estado ecuatoriano ha implementado varios cambios en el sistema educativo en los últimos años, desde la aprobación de una nueva Ley de educación en el año 2011, con sus correspondientes actualizaciones -la última fue en el año 2021-, hasta la implementación de nuevos lineamientos curriculares sintetizados en el documento denominado “Currículo de los niveles de Educación Obligatoria” que rige a partir del año 2016.

Además, el estudio se centra en las tareas de estadística y probabilidad, debido a que diversos organismos y autores proponen la enseñanza de este bloque curricular a través de actividades contextualizadas (Alsina A., et al., 2021; Batanero y Díaz, 2011; Cobb y Moore, 1997; GAISE, 2016), hecho que está en correspondencia con una de las principales características de las actividades de modelización matemática.

Con estos antecedentes, un total de 497 actividades propuestas a los estudiantes a través de los libros de texto fueron analizadas y codificadas, lo que permite cuantificar la presencia de la modelización matemática en estos recursos didácticos.

Considerando las principales limitaciones que presentan los documentos curriculares que fueron analizados, resulta importante ofrecer al profesorado orientaciones metodológicas que contribuyan en su formación en lo que a modelización se refiere. En este contexto el Artículo 3: **“La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: Una propuesta para el aula de secundaria”** pretende contribuir con ideas que faciliten la implementación de actividades de modelización matemática en sus clases. Si bien la propuesta está inicialmente dirigida al aula de secundaria, es pertinente indicar que la misma es adaptable a cualquier nivel educativo.

En esta publicación se hace énfasis en la modelización matemática entendida desde una perspectiva educacional, ya que se valora la importancia de esta como estrategia didáctica. Para Kaiser y Sriraman (2006) la perspectiva educacional persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos. Se menciona también que existe un consenso en la literatura de que la modelización matemática es un proceso no lineal; sin embargo, son varios los autores autores (Carreira, Amado y Lecoq, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Kaiser, 1995) entre otros, que han realizado planteamientos de que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos, siendo uno de los más reconocidos en la literatura el de Blum y Leiß (2007).

Además, se explican en detalle los planteamientos de las *Model-Eliciting Activities* (MEA), como propuesta de cómo llevar a las aulas la modelización matemática, se enfatiza en los principios fundamentales que debe contener una actividad de modelización elaborada desde este enfoque, los mismos que son: 1) construcción, 2) realidad, 3) autoevaluación, 4) de documentación, 5) prototipo efectivo y 6)

generalización. Con estos antecedentes, se plantean ejemplos concretos de actividades que permiten trabajar varios contenidos matemáticos, de manera especial contenidos relacionados con el bloque de estadística y probabilidad, por lo ya expuesto anteriormente. Al final de este documento también se dan algunas recomendaciones de recursos tecnológicos que pueden ser utilizados por el profesorado en su práctica docente.

Por otro lado, si bien es importante analizar el tratamiento que se da a la modelización matemática en los diferentes documentos curriculares, así como el planteamiento de propuestas que permitan al profesorado proponer a sus estudiantes actividades de modelización, es importante también tener una mirada de cómo los estudiantes trabajan con estas actividades, es por ello que a partir del diseño de un estudio de caso múltiple (Gundermann-Kröll, 2013; McMillan y Schumacher, 2005; Yin, 2018), se creó una actividad de modelización sustentada en los planteamientos teóricos de Lesh y Doerr (2003) y Lesh et al. (2000) acerca de las *Model-Eliciting Activities* (MEA), las mismas que deben cumplir con los principios fundamentales mencionados en líneas anteriores.

Con el propósito de seguir una secuencia en el desarrollo de la investigación, se decidió que la actividad de modelización propicie el trabajo de contenidos de estadística y probabilidad, asumiendo los planteamientos de Makar y Rubin (2009) y Watson y English (2015) en el sentido de entender la modelización con datos como un proceso que involucra un razonamiento estadístico integral que se basa en contextos, preguntas y conceptos matemáticos y estadísticos. El diseño y la implementación de esta actividad dieron lugar al Artículo 4 denominado: **“Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19”**.

Uno de los aspectos a destacar es la realización de la actividad con datos auténticos, lo que permite cumplir adecuadamente con una de las más importantes características de las actividades de modelización matemática, concretamente la actividad consistió en proponer al alumnado que realice una predicción del número de contagios y defunciones que existirán en Cataluña (España) a fecha de 30 de junio de 2020, como consecuencia de la COVID-19 a partir de datos reales suministrados en forma de tabla y tomados de la página web del Instituto de Estadística de Cataluña (2020), con corte a fecha de 3 de junio de 2020.

Además, es importante mencionar que se decidió implementar esta actividad con estudiantes de Educación Primaria de España y no de Ecuador, principalmente por dos razones: 1) porque al inicio de la pandemia ocasionada por la COVID-19 el estado español en comparación con el estado ecuatoriano llevó un mejor control y en consecuencia un registro más detallado del número de contagios y defunciones, lo que permitía acceder a datos más confiables y, 2) por la facilidad de acceso a la institución educativa en la que se implementó la actividad.

Los resultados derivados de la implementación de esta actividad permiten tener una mejor comprensión del trabajo que desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de modelización matemática, así como también de los aspectos a ser considerados por el profesorado al momento de implementarlas.

Adicionalmente, considerando que la presente tesis se ha centrado en la modelización matemática y de manera específica en actividades de modelización enfocadas en temas concernientes a estadística y probabilidad, es necesario aportar con estudios que aporten evidencia acerca de cómo abordar estas temáticas en edades

tempranas, lo cual sin duda se constituye en un primer acercamiento de los estudiantes para trabajar estos temas, de esta manera se consigue fomentar el pensamiento matemático y estadístico, facilitando de esta forma el trabajo futuro en actividades de modelización matemática. Lo expuesto conllevó a la publicación del Artículo 5 del compendio, denominado: **“Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos”**, el cual consta de dos partes que se exponen a continuación.

En la primera parte se proporcionan varias recomendaciones al profesorado de Educación Infantil, poniendo especial atención en las fases previas a la representación gráfica de datos que incluye la definición de categorías y la elaboración de tablas estadísticas de recuento como fases preliminares a la elaboración de tablas de frecuencia. Se destaca también la necesidad de desarrollar la alfabetización estadística desde los primeros niveles escolares y para ello se advierte de la importancia de fomentar en el alumnado la experimentación en los procesos de recogida y organización de datos, explorando de manera profunda la naturaleza de los mismos.

El artículo se centra en las tablas estadísticas, por su importante papel en la organización y presentación de los datos ya que, de acuerdo con Díaz-Levicoy et al. (2020) y Vásquez et al. (2021), favorecen una visualización rápida de patrones de variabilidad y tendencia, la argumentación e incluso la toma de decisiones, aprendizajes que sin duda benefician al alumnado para su posterior trabajo en actividades de modelización matemática.

En la segunda parte del artículo se presentan los resultados obtenidos con estudiantes de 5 años al aplicar la actividad “Registramos nuestro peso”. A partir de los

cuatro niveles de comprensión de tablas estadísticas: 1) leer los datos, 2) leer dentro de los datos, 3) leer más allá de los datos, y 4) leer detrás de los datos, establecidos por Díaz-Levicoy et al. (2018), se concluye que el alumnado se ubica en los dos primeros niveles mencionados, y en algunos casos en el inicio del tercer nivel.

Anteriormente se dijo que, uno de los aspectos clave de la modelización matemática es representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real, realizando un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas. En este sentido, este último artículo es de suma importancia, ya que a través de las correspondientes recomendaciones al profesorado y de la realización de una actividad dirigida a la construcción de tablas estadísticas con datos reales, se evidencia que un trabajo adecuado de estos temas en edades tempranas, sienta bases adecuadas para que los estudiantes en los siguientes niveles educativos puedan más fácilmente, utilizar por ejemplo procesos de transnumeración, los cuales favorecen los procesos de modelización matemática.

Finalmente, la realización de esta tesis ha permitido desarrollar importantes competencias investigativas, lo que conlleva a participar en el XVI Concurso nacional de proyectos de investigación convocado por la Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y la Academia (CEDIA), evento que invita a investigadores de las distintas áreas del conocimiento a presentar propuestas de proyectos de investigación con el propósito de ser financiados por la Corporación.

Todas las propuestas presentadas pasan por una rigurosa evaluación, mediante un proceso de revisión anónimo por parte de tres expertos nacionales y extranjeros en la respectiva área de conocimiento, las bases de la convocatoria indican que se seleccionarán

tan solo al 5% del total de propuestas presentadas, siempre que estas cumplan con una puntuación de al menos el 90%.

Es grato informar que conjuntamente con la Universidad de Cuenca (Ecuador), la Universidad Central del Ecuador, la Universidad del Azuay (Ecuador) y la Universidad de Girona (España) se presentó una propuesta de proyecto de investigación denominada: “Caracterización de los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de educación primaria”, constituyéndose en un producto adicional de de la tesis, esta propuesta fue evaluada favorablemente y seleccionada para recibir financiamiento, se informa que en esta convocatoria existieron 89 propuestas presentadas. El mencionado proyecto actualmente se encuentra en fase de ejecución, siendo el autor de esta tesis el investigador principal y el Dr. Àngel Alsina integrante del equipo de investigación. Este proyecto pretende profundizar más en los conocimientos acerca de los procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes de educación primaria, y de esta manera incidir en la política pública de Ecuador para que se tomen decisiones acertadas en lo que a Educación Matemática se refiere.

2. OBJETIVOS:

2.1. Objetivo general:

- Analizar el estado actual de la presencia de la modelización matemática en Educación Primaria y la transición a la Educación Secundaria.

2.2. Objetivos específicos:

1. Identificar el tratamiento que se da a la modelización matemática en los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos.
2. Determinar el nivel de presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de los libros de texto ecuatorianos en el nivel de Educación General Básica Superior.
3. Diseñar actividades de modelización matemática a ser utilizadas por el profesorado de Educación Primaria y Secundaria.
4. Categorizar la producción de los estudiantes al trabajar con actividades de modelización matemática.
5. Elaborar recomendaciones didácticas que sienten las primeras bases para el trabajo de actividades de modelización en el ámbito de la estadística.

3. METODOLOGÍA

La metodología que orienta el trabajo de esta tesis se basa en el paradigma pragmático, el mismo que de acuerdo a Creswell y Garret (2008) es un enfoque filosófico que sostiene que el centro de la investigación está en las respectivas preguntas de investigación y por lo tanto se pueden utilizar diferentes métodos para responderlas. En consecuencia, se ha optado por un enfoque metodológico mixto, concretamente un método cualitativo mixto, en el cual de acuerdo a Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) tiene mayor presencia el enfoque cualitativo frente al cuantitativo.

En este sentido, para cumplir con el objetivo que guarda relación con el tratamiento que se da a la modelización matemática en los currículos se adoptó un enfoque cualitativo, concretamente se ha utilizado la técnica de análisis de textos. Dentro de la gran variedad de enfoques posibles de análisis de textos (Vallés, 1997) hemos optado por el análisis interpretacional en el sentido de Tesch (1990) puesto que nuestro interés es la comprensión del sentido del texto, a partir del cual pretendemos identificar y categorizar los elementos y explorar sus conexiones, de esta manera se establecieron cinco categorías que permitieron identificar la progresividad y articulación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles educativos en los países que formaron parte del estudio.

Para cumplir con el objetivo que guarda relación con el análisis de los libros de texto, se ha elegido un enfoque metodológico cuantitativo, con un alcance descriptivo. En este sentido, coincidimos con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) para quienes los estudios descriptivos “miden o recolectan datos y reportan información sobre diversos conceptos, variables, aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o problema a investigar” (p. 108). La técnica utilizada fue el análisis de contenido cuantitativo, entendida como una técnica para estudiar la comunicación de una forma objetiva y

sistemática que permite cuantificar los contenidos en categorías (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018).

A continuación, se codificó los datos y se estableció un sistema de categorías, el cual se construyó en función del objeto de estudio y del respectivo marco teórico utilizado. Luego, con la finalidad de dotar de confiabilidad a la investigación, se desglosó cada categoría y se construyó lo que Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) denominan: hoja o registro de codificación. Antes de codificar cada una de las unidades de análisis se realizaron pruebas piloto, lo que permitió afinar la redacción de las correspondientes hojas o registros de codificación, contribuyendo a la condición de que las categorías sean significativas, exhaustivas y mutuamente excluyentes.

Además, se determinó la confiabilidad individual de los codificadores, para después realizar el cálculo de la confiabilidad intercodificadores de acuerdo al método de parejas, llegando a obtener datos aceptables de confiabilidad según lo planteado por Hernández-Sampieri y Mendoza (2018).

En lo referente al objetivo relacionado con el diseño de actividades de modelización matemática, se utilizó un enfoque metodológico cualitativo, concretamente se utilizó la técnica de revisión documental, esto permitió identificar las principales propuestas teóricas para llevar la modelización matemática a las aulas, en consecuencia, se eligió el planteamiento teórico de Lesh y Doerr (2003) y Lesh et al. (2000) acerca de las *Model-Eliciting Activities* (MEA), en base a estos principios teóricos se diseñaron los ejemplos de actividades que pueden ser utilizadas por el profesorado.

Para alcanzar el objetivo referente a la categorización de la producción de los estudiantes al enfrentarse a actividades de modelización matemática, se utilizó un enfoque

metodológico cualitativo a través del diseño de un estudio de caso múltiple (Gundermann-Kröll, 2013; McMillan y Schumacher, 2005; Yin, 2018), el cual permitió describir y analizar las producciones y modelos generados por los estudiantes participantes. Esto posibilitó explorar más de una unidad de análisis, proporcionando las bases para la generalización (Rule y John, 2015). Es importante indicar que, de acuerdo con estos autores indagar más de un caso aporta criterios de validez interna, externa y confiabilidad a los datos. Se utilizó la técnica de análisis de contenido (López-Noguero, 2002), con el propósito de identificar, clasificar y finalmente categorizar todos los datos presentes en los modelos elaborados por los alumnos, llevando a cabo varios ciclos de análisis inductivo en la identificación inicial de patrones y categorías de respuestas.

Finalmente, para alcanzar el objetivo relacionado con la elaboración de recomendaciones didácticas, se utilizó también un enfoque metodológico cualitativo, primero, a través de una revisión documental se identificó los niveles de comprensión para tablas y gráficos estadísticos propuestos en la literatura; para después, a partir de un análisis de contenido de la producción de los estudiantes al realizar una actividad de construcción de tablas y gráficos estadísticos obtener conclusiones que permitan elaborar recomendaciones didácticas que sienten las primeras bases para trabajar actividades de modelización en el ámbito de la estadística.

4. ARTÍCULOS

4.1. Artículo 1:

Trelles-Zambrano, C. y Alsina, À. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.

Índices de calidad de la revista: La revista Unión está indizada actualmente en Dialnet y Latindex.

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo

César Trelles Zambrano, Ángel Alsina Pastells

Fecha de recepción: 23/05/2017
Fecha de aceptación: 24/09/2017

<p>Resumen</p>	<p>En este artículo se argumenta la importancia que ha ido adquiriendo la modelización matemática en las últimas décadas y se revisa el tratamiento curricular que se da a este conocimiento desde las principales organizaciones internacionales –NCTM e ICTMA- que trabajan en educación matemática y en particular en el tema de modelización, así como los documentos curriculares de Estados Unidos, Ecuador y España con el objetivo de identificar la incorporación de este tema en los planes de estudio oficiales de estos países. Los resultados muestran que a pesar de que la modelización está presente en diferentes medidas en los documentos curriculares desde edades cada vez más tempranas, todavía falta una mejor articulación de este componente en los diferentes niveles educativos, así como mejores orientaciones curriculares que permitan llevar el proceso a la práctica. Palabras clave: Modelización matemática, modelo, resolución de problemas, currículo, etapas educativas.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This paper argues the importance of mathematical modeling in the last decades and reviews the curricular treatment in the main international organizations on mathematics education - NCTM and ICTMA - as well as the mathematics curricula of the United States, Ecuador and Spain to analyze how mathematical modeling is treated. The results show that although modeling is present in curricular documents from earlier ages, there is still a lack of better articulation in the different educational levels, as well as better curricular orientations that allow the process to be put into practice. Keywords: Mathematical modeling, model, problem solving, curriculum, educational stages.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo discute a importância que foi adquirindo a modelagem matemática nas últimas décadas e se revisa o tratamento curricular que se dá a esse conhecimento desde as principais organizações internacionais-NCTM e ICTMA-que trabalham em educação matemática e em particular no tema da modelagem, assim como os documentos curriculares dos Estados Unidos, Equador e Espanha, com o objetivo de identificar a incorporação desse tema nos planos de estudos oficiais desses países. Os resultados mostram que, embora a modelagem esteja presente em diferentes destaques em documentos curriculares para idades cada vez menores, ainda falta uma melhor articulação dessa componente nos diferentes níveis de ensino, assim como melhores diretrizes curriculares que permitam levar o processo à prática. Palavras-chave: Modelagem matemática, modelo, resolução de problemas, currículo, estágios educacionais.</p>

1. Introducción

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática ha cobrado considerable protagonismo en el currículo de matemáticas de diferentes países, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, negocios, ciencias sociales, estudio climático, diseño avanzado, etc.) como dentro de la propia educación matemática. Esta mayor consideración ha dado lugar a que cada vez sea más común la modelización matemática tanto en los documentos curriculares como en el lenguaje empleado por el profesorado. Para Blomhøj (2008) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas. Pero ¿qué se entiende por modelización matemática? Si bien el objetivo de este artículo no es profundizar en la conceptualización de este tema, en términos muy generales podemos decir que es un proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007), lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. En este sentido, varios autores proponen un conjunto de pasos con el objetivo de ejecutar el mencionado proceso en las aulas, denominado ciclo de modelización. Por ejemplo, Blum y Leiß (2007) plantean que un ciclo de modelización consta de los siguientes pasos: 1) construcción, 2) simplificación/estructuración, 3) matematización, 4) trabajo matemático, 5) Interpretación, 6) validación y 7) exposición. Además, es importante indicar que en la literatura existen muchas otras definiciones, pero la mayoría recogen aspectos y características comunes a las anteriormente mencionadas.

Por otro lado, los continuos avances que se dan en la investigación en lo referente a este tema dan cuenta de que a pesar de que la implementación de la modelización matemática en las aulas puede presentar algunas dificultades, los beneficios que ofrecen a los estudiantes pueden resultar muy interesantes. Blum y Borromeo (2009) manifiestan que a través de la modelización, los estudiantes pueden comprender mejor los contextos en los cuales se desenvuelven; se apoya el aprendizaje de las matemáticas y se promueve el desarrollo de algunas competencias, actitudes y visiones adecuadas hacia esta disciplina.

Con estos antecedentes, los aspectos centrales que se exponen en este artículo pretenden evidenciar el nivel de importancia y el tratamiento que se le da a la modelización en las principales organizaciones que trabajan en educación matemática a nivel mundial, en concreto se analizan los lineamientos que establece el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y los Estándares Estatales Comunes de Matemáticas (CCSSM) de Estados Unidos, así como cierta literatura generada desde la Comunidad Internacional de Profesores de Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA) constituida como un grupo de estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI). Finalmente se analiza cómo se ha incorporado la modelización matemática en el currículo educativo de Ecuador y España en los niveles educativos desde los 3 a los 18 años.

El criterio que se ha utilizado para la revisión ha sido la búsqueda del término “modelización matemática” o términos asociados como “modelo”, “modelos” o “modelación”. Para realizar este análisis, se ha usado la técnica de análisis de documentos. Los documentos analizados son documentos oficiales de los distintos organismos mencionados y de las respectivas administraciones públicas. Dentro de la

gran variedad de enfoques posibles de análisis de textos (Vallés, 1997), hemos optado por el análisis interpretacional en el sentido de Tesch (1990), puesto que nuestro interés es la comprensión del sentido del texto, a partir del cual pretendemos identificar y categorizar los elementos y explorar sus conexiones. Con el propósito de analizar la progresividad y articulación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos se han establecido y codificado cinco categorías de análisis:

1. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos concretos (MC).
2. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos gráficos y/o visuales (MGV)
3. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de un modelo previamente establecido (MPE)
4. Estándares, contenidos o destrezas que plantean la creación de un modelo (CM)
5. Estándares, contenidos o destrezas que explícitamente involucran un proceso de reflexión en la implementación de la modelización (PRM)

Se espera que los tópicos tratados permitan generar análisis y reflexión tanto en los profesores de matemáticas como en la comunidad de investigadores, pues al ser un tema relativamente nuevo en el currículo se considera que existe todavía mucho por hacer tanto en investigación como en la práctica docente, siendo importante para avanzar en este objetivo, poder identificar algunas fortalezas y debilidades presentes en la actualidad.

2. La modelización matemática en el NCTM

El NCTM, como organización profesional con influencia internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, trata de orientar la mejora de la educación matemática para que todos los estudiantes puedan entender y ser capaces de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. En este sentido, desde la publicación de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991) y *Assessment Standards for School Mathematics* (1995), el NCTM ha ido incorporando conocimientos importantes para satisfacer esta necesidad.

La modelización matemática, como se ha argumentado en la introducción es, sin duda, uno de estos conocimientos, por lo que se ha procurado que progresivamente haya sido más visible en las orientaciones curriculares del NCTM. En *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), por ejemplo, ya se asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares a partir de la etapa 5-8 (11-14 años) hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar, describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el término “modelo” ha ido evolucionando y ampliándose en los distintos documentos mencionados hasta que en *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), se presenta como una noción con diversos significados: a) para referirse a los materiales físicos con los que trabajan los alumnos (modelos manipulativos); b) para sugerir ejemplificación o simulación, como por ejemplo cuando se modeliza el proceso de resolución de un problema; y c) como, aproximadamente, sinónimo de representación. Desde esta visión,

un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos:

Desde prekindergarten hasta el nivel 2 (3-8 años), los alumnos pueden modelizar cómo distribuir 24 galletas entre 8 niños, utilizando teselas o bloques lógicos, de diferentes maneras. En la etapa 3-5 (9-11 años), empiezan a usar representaciones para modelizar los fenómenos del mundo que les rodea y les ayuda a reconocer patrones cuantitativos. En los niveles medios, cuando modelizan y resuelven problemas del mundo real y del matemático, aprenden a usar variables para representar incógnitas y emplear ecuaciones, tablas y gráficas para representar y analizar relaciones. Los alumnos de Secundaria crean e interpretan modelos de fenómenos referentes a una amplia gama de contextos, incluyendo los entornos físico y social, para identificar los elementos esenciales del contexto y diseñar representaciones que capten las relaciones matemáticas que existen entre estos elementos. (NCTM, 2003, p. 75).

Como puede apreciarse, el rango de edad a partir del que los alumnos deberían empezar a usar representaciones para modelizar fenómenos de diferente naturaleza baja hasta los 3 años y, a la vez, se intenta reforzar la idea que la modelización matemática debería aumentar en los diferentes niveles educativos. Las tablas 1 a 4 muestran la presencia de la modelización matemática en los últimos estándares para la educación matemática publicados hasta el momento (en todos los casos, se han omitido de las tablas las columnas de los niveles en los que no parecían términos asociados a la modelización matemática).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5
Utilizar diversos modelos para desarrollar las primeras nociones sobre el valor posicional y el sistema decimal de numeración (p. 400). MC Relacionar los nombres de los números y los numerales, con las cantidades que representan, utilizando varios modelos físicos y representaciones diversas (p. 400). MC	Utilizar modelos, referencias y formas equivalentes para juzgar el tamaño de una fracción (p. 400). MC Utilizar modelos visuales, referencias y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales de uso común (p. 400). MG

Tabla 1. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de números y operaciones (NCTM, 2003).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5	Etapa 6-8	Etapa 9-12
Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos (p. 401). MC, MG	Modelizar situaciones problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones (p. 402). MC, MG	Modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones (p. 403). MG	Identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estas relaciones. MPE Usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones provenientes de varios contextos. CM Extraer conclusiones razonables de una situación, una vez modelizada (p. 403). PRM

Tabla 2. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de álgebra (NCTM, 2003).

Etapa 3-5
Usar modelos geométricos para resolver problemas de otras áreas de las matemáticas, tales como los números y la medida (p. 404). MGV

Tabla 3. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de geometría (NCTM, 2003).

Etapa 3-5	Etapa 6-8
Identificar tendencias en datos bidimensionales, y hallar funciones que los modelicen, o los transformen para que puedan modelizarse (p. 409). MPE	Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área (p. 410). MPE

Tabla 4. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de estadística y probabilidad (NCTM, 2003).

El análisis de las tablas 1 a 4 muestra que, tal como sugieren Hirsch y McDuffie (2016), en términos generales se ha prestado una escasa atención a la modelización matemática en los documentos del NCTM de 1989 y de 2000. A pesar de que, de acuerdo con las categorías planteadas en nuestro análisis, las diferentes expectativas relacionadas con modelización evidencian una progresividad gradual de la misma, se observa una falta de articulación debido a que la modelización no aparece en todos los niveles, no se observa una mayor presencia en función del nivel, -- a pesar de que ésta es la intención-- ; y no se considera la modelización en todos los estándares de contenido, ya que por ejemplo se omiten estos conocimientos para el caso del estándar de contenido de medida. Para procurar subsanar esta situación, el NCTM ha publicado posteriormente otros documentos en los que se han ido concretando algunos recursos y estrategias didácticas para impulsar, entre otros aspectos, la modelización matemática en los diferentes niveles. La colección *Navigations*, por ejemplo, está compuesta por 35 manuales para las diferentes etapas educativas, desde Prekindergarten hasta el grado 12 (3-18 años), que se han ido publicando a lo largo de la primera década del S. XXI. Estos manuales se centran en los cinco estándares de contenido matemático (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad) y en los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y conexiones. Cada libro incluye, además, un CD-ROM suplementario que ofrece actividades electrónicas interactivas para usar con los estudiantes, archivos PDF imprimibles de todas las páginas de actividades, artículos de revistas de NCTM y *applets* interactivos.

De la misma manera, la colección *Essential Understandings*, compuesta también por 35 manuales publicados a partir de 2010, aborda temas ampliamente reconocidos como desafíos para los maestros y para los estudiantes mediante la exploración, el desarrollo y la reflexión sobre las ideas y conexiones que permiten a los profesores responder a las preguntas de los estudiantes, corregir sus conceptos erróneos y escalar su progreso al siguiente nivel. Cada libro de esta serie desarrolla conceptos básicos que se identifican como las "grandes ideas" y las "comprensiones esenciales" relacionadas que desbloquean estos temas. Si bien no hay ningún manual específico de esta serie sobre modelización matemática, se trata mediante ejemplos en manuales dedicados al pensamiento algebraico; expresiones, ecuaciones y funciones; números; razones, proporciones y razonamiento proporcional; geometría y medición; estadística; o el razonamiento matemático.

Recientemente se ha publicado el libro *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (NCTM, 2016), que incluye 25 capítulos agrupados en siete secciones: 1) comprensión de modelos y modelización; 2) uso de modelos para representar matemáticas; 3) enseñanza y aprendizaje sobre modelización matemática; 4) la modelización matemática como vehículo para el aprendizaje STEM; 5) diseño de tareas orientadas a la modelización y planes de estudios; 6) evaluación de la modelización matemática; y 7) apoyo al aprendizaje de los maestros sobre la modelización matemática. En los distintos capítulos de este libro se incluyen reflexiones sobre el significado y la práctica de la modelización, estudios de casos, observaciones que provienen de la investigación y estrategias para su implementación en el aula y en la formación del profesorado de todos los niveles. En muchos casos, estas aportaciones se apoyan en los planteamientos descritos en el documento CCSSM (2010), por lo que en el próximo subapartado se hace una descripción de este conjunto de planteamientos.

3. La modelización matemática en el CCSSM

El documento CCSSM (2010) que ha sido adoptado por más de 40 de los 50 estados de los Estados Unidos de América tiene como propósito fundamental unificar criterios respecto a lo que los estudiantes necesitan saber y ser capaces de hacer en matemáticas a lo largo de los diferentes grados educativos desde *Kindergarten* hasta el grado 12 (5 a 18 años). En relación a la modelización matemática, desde una perspectiva genérica se considera como “el uso de la matemática o de la estadística para realizar una descripción (i.e., modelo) de una situación real del mundo y deducir información adicional acerca de la situación mediante cálculos y análisis matemáticos o estadísticos” (Common Core Standards Writing Team, 2013, p. 5).

Los CCSSM están divididos en estándares para la práctica matemática y en estándares para el contenido matemático, en lo que respecta a los primeros, el modelado con matemáticas es uno de los estándares explícitos para todos los grados educativos, en él se manifiesta:

Los estudiantes matemáticamente competentes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas de la vida cotidiana (...) ellos interpretan rutinariamente sus resultados matemáticos en el contexto de la situación y reflexionan sobre si los resultados tienen sentido, posiblemente mejorando el modelo si no ha cumplido su propósito. (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGACBP y CCSSO], 2010, p. 7).

El uso estratégico de herramientas apropiadas es otro de los estándares para la práctica matemática en donde se plantea tanto el uso de modelos concretos para la resolución de problemas matemáticos, así como el uso de la tecnología para visualizar los resultados al momento de realizar modelos matemáticos.

Por su parte los estándares para el contenido matemático están organizados por dominio y de acuerdo al grado educativo. A continuación, se presenta la información por grados educativos concerniente a la modelización matemática y de acuerdo a los dominios en la que se presenta.

En el *Kindergarten*, los dominios son: cantidades y números cardinales; operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; medición y datos; y geometría. En los grados primero y segundo los dominios son los mismos a excepción de cantidades y números cardinales.

Nivel	Estándares por dominio	
	Número y operaciones en base 10	Geometría
Kindergarten (5 años)		Realizan modelos con figuras geométricas que existen en el mundo a través de la construcción de figuras con diferentes materiales (por ejemplo, palitos y bolas de arcilla o plastilina) y dibujan figuras geométricas. (p. 12) MC, MG
Primer grado (6 años)	<p>Suman hasta el 100, incluyendo el sumar un número de dos dígitos y un número de un dígito, así como el sumar un número de dos dígitos y un múltiplo de 10, utilizan modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito, y explican el razonamiento aplicado. Entienden que, al sumar números de dos dígitos, se suman decenas con decenas, unidades con unidades; y a veces es necesario el componer una decena. (p. 16). MC, MG</p> <p>Restan múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 (con diferencias positivas o de cero), utilizando modelos concretos o dibujos, y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento utilizado. (p. 16). MC, MG</p>	
Segundo grado (7 años)	<p>Suman y restan hasta 1000, usando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito. Comprenden que al sumar o restar números de tres dígitos, se suman o restan centenas y centenas, decenas y decenas, unidades y unidades; y a veces es necesario componer y descomponer las decenas o las centenas (p. 19). MC, MG</p>	

Tabla 5. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el Kindergarten, Primer y Segundo grado.

En los grados tercero cuarto y quinto los dominios son: operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; números y operaciones – fracciones; medición y datos; y geometría.

Nivel	Estándares por dominios		
	Números y operaciones en base diez	Número y operaciones - Fracciones	Medición y datos
Tercer grado (8 años)		<p>Reconocen y generan fracciones equivalentes simples. Explican por qué las fracciones son equivalentes, por ejemplo, al utilizar un modelo visual de fracciones. (p. 24). MGV</p> <p>Comparan dos fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador al razonar sobre su tamaño. Reconocen que las comparaciones son válidas solamente cuando las dos fracciones hacen referencia al mismo entero. Anotan los resultados de las comparaciones con los símbolos $>$, $=$ o $<$, y justifican las conclusiones, por ejemplo, usando un modelo visual de fracciones. (p. 24). MGV</p>	<p>Utilizan fichas cuadradas para demostrar concretamente que el área de un rectángulo cuyas longitudes laterales son números enteros a y $b + c$, es la suma de $a \cdot b$ y $a \cdot c$. Utilizan modelos de área para representar la propiedad distributiva en el razonamiento matemático. (p. 25). MC</p>
Cuarto grado (9 años)	<p>Multiplican y dividen un número entero de hasta cuatro dígitos por un número entero de un dígito, y multiplican dos números de dos dígitos. Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares, y/o modelos de área. (p. 30). MGV</p>	<p>A través de la utilización de modelos visuales:</p> <p>Explican equivalencia de fracciones, comparan dos fracciones con numeradores y denominadores distintos, descomponen de varias maneras una fracción en una suma de fracciones con el mismo denominador, resuelven problemas verbales sobre sumas y restas de fracciones, entienden que un múltiplo de a/b es un múltiplo de $1/b$, resuelven problemas verbales relacionados con la multiplicación de una fracción por un entero, comparan dos decimales hasta las centésimas al razonar sobre su tamaño (p. 30). MGV</p>	
Quinto grado (10 años)	<p>Hallan números enteros como cocientes de números enteros con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de dos dígitos. Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área. (p.35). MGV</p> <p>Suman, restan, multiplican y dividen decimales hasta las centésimas utilizando modelos concretos. (p. 35). MC</p>	<p>A través de la utilización de modelos visuales:</p> <p>Resuelven problemas verbales de suma y resta de fracciones que se refieran a un entero, incluyendo casos de denominadores distintos; resuelven problemas verbales relacionados a la división de números enteros que resulten en fracciones o números mixtos; Interpretan el producto $(a/b) \cdot q$ como tantas partes a de la repartición de q en partes iguales de b; resuelven problemas del mundo real relacionados a la multiplicación de fracciones y números mixtos; Interpretan la división de una fracción unitaria entre un número entero distinto al cero, y calculan sus cocientes; Interpretan la división de un número entero entre una fracción unitaria y calculan sus cocientes; Resuelven problemas del mundo real relacionados a la división de fracciones unitarias entre números enteros distintos al cero y la división de números enteros entre fracciones unitarias. (p. 36; p. 37). MGV</p>	

Tabla 6. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el tercer, cuarto y quinto grado.

En sexto y séptimo grado, los dominios son: razones y relaciones proporcionales; el sistema numérico; expresiones y ecuaciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	Estándares por dominios		
	Sistema numérico	Geometría	Estadísticas y probabilidad
Sexto grado (11 años)	Interpretan y calculan cocientes de fracciones, y resuelven problemas verbales relacionados a la división de fracciones entre fracciones, utilizando modelos visuales de fracciones y ecuaciones para representar el problema. En general, $(a/b) \div (c/d) = ad/bc$. (p. 42). MGV	Representan figuras tridimensionales utilizando modelos planos compuestos de rectángulos y triángulos, y utilizan los modelos planos para hallar el área total de estas figuras. Aplican estas técnicas al contexto de la resolución de problemas matemáticos y del mundo real. (p. 45). MC.	
Séptimo grado (12 años)			Investigan los procesos estocásticos y desarrollan, utilizan y evalúan modelos de probabilidad. (p. 50). MPE Desarrollan un modelo de probabilidad y lo utilizan para hallar la probabilidad de eventos. Comparan probabilidades a partir de un modelo de frecuencias observadas; si la coincidencia no es buena, explican las posibles causas de dicha discrepancia. (p. 51). CM, PRM Desarrollan un modelo de probabilidad uniforme al asignar la misma probabilidad a todos los resultados, y utilizan el modelo para determinar las probabilidades de eventos. Por ejemplo, si un estudiante es seleccionado al azar en una clase, hallan la probabilidad de que Juana sea seleccionada y la probabilidad de que una de mujer sea seleccionada. (p. 51). CM Desarrollan un modelo de probabilidad (el cual puede no ser uniforme) al observar frecuencias en datos generados a partir de un evento fortuito. (p. 51). CM

Tabla 7. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el sexto y séptimo grado.

En el octavo grado, los dominios son: sistema numérico; expresiones y ecuaciones; funciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	Estándares por dominios		
	Funciones	Geometría	Estadísticas y probabilidad
Octavo grado (13 años)	Construyen una función para representar una relación lineal entre dos cantidades. Determinan la tasa de cambio y el valor inicial de la función a partir de una descripción de una relación o a partir de dos valores (x, y) , incluyendo leerlas en una tabla o en una	Entienden la congruencia y semejanza utilizando modelos físicos, transparencias, o programas de geometría. (p. 55). MGV	Saben que líneas rectas se utilizan ampliamente para modelar relaciones entre dos variables cuantitativas. Para diagramas de dispersión que sugieren una asociación lineal, ajustan informalmente una línea recta, y evalúan informalmente el ajuste del modelo juzgando la cercanía de los puntos de datos a la línea. (p. 56). MPE

	<p>gráfica. Interpretan la tasa de cambio y el valor inicial de una función lineal en términos de la situación que modela, y en términos de su gráfica o de una tabla de valores. (p. 55). CM</p>		<p>Usan una ecuación de un modelo lineal para resolver problemas en el contexto de datos bivariados de medición, interpretando la curva y la intercepción. Por ejemplo, en un modelo lineal para un experimento de biología, interpretan que una pendiente de 1.5 cm/h significa que una hora adicional de luz solar cada día está asociada con un 1.5 cm adicionales en la altura de una planta madura. (p. 56). MPE, PRM</p>
--	---	--	--

Tabla 8. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el octavo grado.

Finalmente, en el caso de *High School* (14-18 años) los estándares están organizados en seis categorías conceptuales: número y cantidad; álgebra; funciones; modelización; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Los estándares relacionados con la modelización matemática en cada categoría conceptual se presentan en la tabla 6, a excepción de la propia categoría de modelización que se analizará por separado.

Estándares por dominio	
Número y cantidades	<p>Define cantidades apropiadas para el propósito de un modelado descriptivo (p. 60). MPE Representa y modela con cantidades vectoriales (p. 61). CM</p>
Álgebra	<p>Representa restricciones por ecuaciones o inecuaciones o sistemas de ecuaciones o inecuaciones e interpreta las soluciones como viables o no en un contexto de modelado. Por ejemplo representa desigualdades que describen restricciones nutricionales y de costos en combinaciones de diferentes alimentos (p. 65). CM</p>
Funciones	<p>En una función que modela una relación entre dos cantidades, interpreta las características claves de los gráficos y las tablas en términos de las cantidades, y dibuja gráficos que muestran las características claves dada una descripción verbal de la relación. Las características claves incluyen: intercepciones; intervalos donde la función es creciente, decreciente, positiva o negativa; máximos y mínimos relativos; simetrías; comportamiento final; y periodicidad (p. 69). MG, V, CM Construye una función que modela una relación entre dos cantidades (p. 70). CM Combina tipos de funciones estándar utilizando operaciones aritméticas. Por ejemplo, construye una función que modela la temperatura de un cuerpo de enfriamiento agregando una función constante a una exponencial en descomposición y relaciona estas funciones con el modelo (p. 70). CM Escribe secuencias aritméticas y geométricas tanto recursivamente como con una fórmula explícita, las utiliza para modelar situaciones y traduce entre las dos formas (p. 70). CM. Distingue entre situaciones que pueden modelarse con funciones lineales y con funciones exponenciales (p. 70). MPE Para los modelos exponenciales, expresa como logaritmo la solución de $ab^{ct} = d$ donde a, c y d son números y la base b es 2, 10 o e; Evalúa el logaritmo utilizando la tecnología (p. 71). MPE Interpreta expresiones para funciones en términos de la situación que modelan (p. 71). MPE Elige funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud y frecuencia especificadas (p. 71). MPE Utiliza funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que surgen en contextos de modelado. Evalúa las soluciones utilizando la tecnología y las interpreta en términos del contexto (p.71). MPE, PRM</p>

Geometría	<p>Usa formas geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (por ejemplo, modelar un tronco de árbol o el torso humano como un cilindro) (p. 78). MGV</p> <p>Aplica conceptos de densidad basados en área y volumen en situaciones de modelado (por ejemplo, número de personas por milla cuadrada, BTUs por pie cúbico). (p. 78). CM</p>
Estadística y probabilidad	<p>Ajusta una función a los datos; utiliza funciones adaptadas a los datos para resolver problemas en el contexto. utiliza funciones dadas o elige una función sugerida por el contexto. Enfatiza los modelos lineales, cuadráticos y exponenciales (p. 81). MPE, CM</p> <p>Interpreta la pendiente (tasa de cambio) y la intercepción (término constante) de un modelo lineal en el contexto de los datos (p. 81). MPE</p> <p>Decide si un modelo especificado es coherente con los resultados de un determinado proceso generador de datos, por ejemplo, utilizando simulación. Por ejemplo, un modelo dice que una monedagiratoria cae hacia arriba con probabilidad 0.5. ¿Un resultado de 5 colas en una fila le hará cuestionar el modelo? (p. 81). PRM</p> <p>Utiliza los datos de una encuesta por muestreo para estimar una media o proporción de la población; Desarrollar un margen de error mediante el uso de modelos de simulación para el muestreo aleatorio (p. 82). MPE</p> <p>Encuentre la probabilidad condicional de A dado B como la fracción de los resultados de B que también pertenecen a A, e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p> <p>Aplica la regla de suma $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$, e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p> <p>Aplicar la Regla de Multiplicación general en un modelo de probabilidad uniforme, $P(A \text{ y } B) = P(A) P(B A) = P(B) P(A B)$ e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p>

Tabla 9. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en High School.

El análisis minucioso de las tablas 5 a 9 muestra que la modelización matemática tiene más presencia que en los planteamientos del NCTM, se evidencia también que al igual que en estos últimos existe una progresión gradual de la implementación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos a pesar de que a nuestro criterio aún es escasa la presencia de estándares que involucren un proceso de reflexión en la implementación de la modelización, más aún cuando el documento de CCSSM es claro al manifestar que ésta debe ser entendida como un proceso y no como una colección de temas aislados.

El ciclo de modelado básico implica: (1) identificar variables y seleccionar aquellas que representan características esenciales, (2) formular un modelo mediante la creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas que describan las relaciones entre las variables, (3) analizar las variables (4) interpretar los resultados de las matemáticas en términos de la situación original, (5) validar las conclusiones comparándolas con la situación, y luego de ser posible mejorar el modelo y (6) informar sobre las conclusiones y el razonamiento detrás de ellas. (NGACBP y CCSSO, 2010, p. 72).

Sin embargo, a pesar de que en los niveles superiores la modelización matemática toma mayor protagonismo, se puede evidenciar que no existe un tratamiento transversal de la misma, pues en los diferentes niveles educativos existen dominios que no poseen estándares relacionados con un proceso de modelización.

4. La modelización matemática en el ICTMA

ICTMA fue creada desde el año 1983 con el objetivo de fomentar la investigación y la enseñanza de la modelización matemática y sus aplicaciones en los diferentes niveles

educativos a nivel internacional, desde primaria hasta la educación universitaria. Un aspecto a destacar de esta comunidad es que reúne tanto a educadores como a profesionales de la modelización matemática a nivel científico, hecho que se convierte en una fortaleza ya que el diálogo entre matemáticos y educadores matemáticos es una necesidad cada vez más latente.

Varios son los tópicos que se han tratado en las diferentes conferencias del ICTMA que son celebradas cada dos años. Sin embargo, un aspecto clave de las últimas reuniones ha sido a nuestro juicio la generación de importante literatura en torno a la construcción de una teoría que permita unificar criterios que permitan llevar la modelización matemática a las aulas. Al momento se han podido establecer parámetros generales como:

(...) una teoría global para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática, en el sentido de un sistema de puntos de vista vinculados que cubran todos los niveles didácticos, es decir: los objetivos de aprendizaje, las razones fundamentales para alcanzar estos objetivos en los diferentes niveles de los sistemas educativos, ideas probadas sobre cómo apoyar a los profesores en la implementación de objetivos de aprendizaje y los reconocidos retos y dilemas didácticos relacionados con diferentes formas de organizar la enseñanza, análisis teóricos y empíricos de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelización e ideas sobre diferentes formas de evaluar el aprendizaje de los estudiantes en las actividades de modelado y los obstáculos relacionados. (Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006, p. 82).

Por otra parte, la actividad investigativa mediante la implementación de varias actividades de modelización en las aulas ha permitido plantear varias perspectivas. Kaiser y Sriraman (2006) las clasifican en:

- Perspectiva realista, cuyo objetivo principal tiene un enfoque pragmático utilitario hacia la resolución de problemas del mundo real.
- Perspectiva contextual: se centra en los objetivos psicológicos, otorgando mucha importancia a la resolución de problemas de palabras.
- Perspectiva educacional: persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.
- Perspectiva socio crítica: busca la comprensión crítica del mundo circundante.
- Perspectiva epistemológica: se centra en los desarrollos teóricos del proceso de modelado.
- Perspectiva cognitiva: tiene las características más bien de una meta perspectiva y se centra en objetivos de investigación a través del análisis y comprensión de los procesos cognitivos que ocurren durante el modelado, así como en objetivos psicológicos mediante la promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso como imágenes físicas, enfatizando a la modelización como un proceso mental tanto de abstracción como de generalización.

Sin embargo, para (Blomhøj, 2008) las perspectivas no son mutuamente excluyentes y todas tienen características distintivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática.

Blum & Borromeo (2009) bajo la perspectiva cognitiva, recomiendan el siguiente esquema para un proceso de modelización a ser trabajado por los estudiantes: 1) Entendimiento de la tarea, para ello plantean que es necesario leer el texto con precisión

e imaginar la situación claramente, 2) Establecer un modelo, para lo cual se buscarán los datos necesarios así como las relaciones matemáticas, 3) Usar procedimientos matemáticos adecuados y llegar a un resultado, 4) Explicar el resultado y en caso de ser necesario regresar al paso 1.

5. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano

El nivel de Educación General Básica (EGB) en Ecuador está dividido en cuatro subniveles: preparatoria (5 años de edad), básica elemental (6-8 años de edad), básica media (9-11 años de edad) y básica superior dirigida a estudiantes de 12-14 años de edad (Decreto 1241/2012). En el currículo vigente, a partir del subnivel Elemental y hasta el Bachillerato inclusive, la asignatura de matemáticas está organizada en tres grandes bloques: 1) álgebra y funciones; 2) geometría y medida; y 3) estadística y probabilidad (Ministerio de Educación del Ecuador [MinEduc], 2016).

El tratamiento metodológico que se da a la matemática en los primeros subniveles posee un carácter lúdico, poniendo especial énfasis en el manejo de material concreto como recurso didáctico que facilite alcanzar los aprendizajes en los estudiantes, mientras que a partir del subnivel medio se otorga un tratamiento más abstracto, teniendo siempre presente la resolución de problemas de la vida real como elemento orientador en todos los subniveles.

En el nivel de Educación General Básica, en especial en los subniveles de preparatoria y elemental la enseñanza del área está ligada a las actividades lúdicas que fomentan la creatividad, la socialización, la comunicación, la observación, el descubrimiento de regularidades, la investigación y la solución de problemas cotidianos; el aprendizaje es intuitivo, visual y, en especial, se concreta a través de la manipulación de objetos para obtener las propiedades matemáticas deseadas e introducir a su vez nuevos conceptos. A partir del subnivel medio y superior de EGB se van complejizando de forma sistemática los contenidos y procesos matemáticos, los estudiantes utilizan definiciones, teoremas y demostraciones lo que conlleva al desarrollo de un pensamiento reflexivo y lógico que les permite resolver problemas de la vida real. (MinEduc, 2016, p. 218).

Si bien el término “modelización matemática” aparece poco de forma explícita a lo largo de todo el currículo de EGB, términos asociados como “modelo”, “modelos funcionales” y “modelos matemáticos” son utilizados con más frecuencia, por ejemplo, el primer objetivo general de la asignatura establece que, al terminar la escolarización obligatoria, los estudiantes serán capaces de:

Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de *modelos funcionales*, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto. (MinEduc, 2016, p. 228).

A continuación, se presenta el tratamiento que se da a la modelización matemática en cada subnivel educativo de EGB y en el nivel educativo de Bachillerato, considerando que cada uno contempla los siguientes componentes: objetivos, destrezas con criterios de desempeño por bloque curricular, criterios de evaluación, orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, e indicadores de evaluación.

5.1. Subnivel de EGB Preparatoria

A diferencia de los demás subniveles, en preparatoria no se trabajan los tres grandes bloques debido a que se trabaja con un ámbito de desarrollo y aprendizaje denominado relaciones lógico-matemáticas. En ninguno de los componentes de este subnivel se evidencia un tratamiento de la modelización matemática.

5.2. Subnivel de EGB Elemental

El objetivo de este subnivel relacionado con la modelización matemática es:

“Utilizar objetos del entorno para formar conjuntos, establecer gráficamente la correspondencia entre sus elementos y desarrollar la comprensión de modelos matemáticos” (MinEduc, 2016, p. 509).

En la tabla 10 se muestran los demás componentes del subnivel asociados a la modelización matemática (cabe señalar que no se indican criterios e indicadores de evaluación, por lo que se han omitido de la tabla 10).

Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios
Reconocer y diferenciar los elementos y propiedades de cilindros, esferas, conos, cubos, pirámides de base cuadrada y prismas rectangulares en objetos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV	El aprendizaje del estudiante se evidencia cuando este nombra las características de los objetos de su entorno y los relaciona con lo aprendido. Además, cuando es capaz de crear un modelo geométrico físico con diversos materiales, tomando en cuenta las características de los cuerpos y figuras geométricas; y de explicar el procedimiento realizado y los resultados del mismo. También clasifica los cuerpos y figuras geométricas en diferentes escenarios recreados, de acuerdo a sus características y/o propiedades (p. 519).
Identificar formas cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares en cuerpos geométricos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV	

Tabla 10. La modelización matemática en el subnivel de EGB Elemental (MinEduc, 2016)

5.3. Subnivel de EGB Media

De los objetivos de este subnivel, el único que guarda relación directa con la modelización matemática es:

“Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas y la generación de sucesiones con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, como estrategias para solucionar problemas del entorno, justificar resultados, comprender modelos matemáticos y desarrollar el pensamiento lógico-matemático (MinEduc, 2016, p. 709).

A pesar de que uno de los objetivos de este subnivel menciona la comprensión de modelos matemáticos, los demás componentes de este subnivel omiten este tema.

5.4. Subnivel de EGB Superior

De los diferentes objetivos que existen en este subnivel educativo, ninguno hace alusión específica a la modelización matemática. En tanto que los componentes de este subnivel que sí tratan este tema se presentan en la tabla 11 (como puede apreciarse en la tabla, no aparecen términos asociados a la modelización en las orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, por lo que dicha columna se ha omitido).

Destrezas con criterios de desempeño	Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
<p>Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas (p. 883). CM</p> <p>Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas (p. 883). MPE</p> <p>Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 884). CM. PRM</p>	<p>Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología (p. 892)</p>	<p>Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema (p. 893).</p> <p>Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia ($n=1, 2, 3$), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares (p. 893).</p>

Tabla 11. La modelización matemática en el subnivel de EGB Superior (MinEduc, 2016)

5.5. Nivel de Bachillerato

En el caso del Bachillerato existen dos posibilidades: a) Ciencias y b) Técnico, sin embargo, la asignatura de matemáticas forma parte de un tronco común, lo que hace que todos los estudiantes reciban la misma formación matemática independientemente de la alternativa que elijan. Es importante indicar que en el caso del Bachillerato en Ciencias existe un número de horas a discreción de las diferentes instituciones educativas, que en función de los intereses de los estudiantes pueden ser destinadas a fortalecer o ampliar la formación matemática u otras áreas de conocimiento.

En la introducción del currículo matemático de Bachillerato se manifiesta explícitamente la importancia que deben tomar los procesos relacionados con la modelización matemática. “En el bachillerato, los contenidos matemáticos tienen un carácter más formal, se enfatizan las aplicaciones y la solución de problemas mediante la elaboración de modelos” (MinEduc, 2016, p. 1250).

Por su parte, los objetivos del bachillerato son los mismos que los objetivos generales del área y sólo el primero de ellos que fue ya citado en líneas anteriores pone de relieve aspectos relacionados con la modelización matemática.

Sin embargo, en el bachillerato toma un poco más de protagonismo la modelización matemática, conforme podemos apreciar en la tabla 12.

Destrezas con criterios de desempeño	Criterios de evaluación	Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios	Indicadores de evaluación
<p>Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, con el empleo de la modelización con funciones reales (función afin a trozos, función potencia entera negativa con $n=-1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afin), cuadráticas, derivadas de funciones cuadráticas, polinomiales, racionales, trigonométricas, exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos (p. 1255; p. 1256; p. 1257; p. 1260). MPE, CM, PRM</p> <p>Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1263). CM, PRM</p>	<p>Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>	<p>Se quiere comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geoméricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones (p. 1272).</p>	<p>Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC (p. 1272). Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado ≤ 4 y racionales de grado ≤ 3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados (p. 1272). Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados (p. 1272). Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1279).</p>

Tabla 12. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano vigente de Bachillerato (MinEduc, 2016)

A diferencia del currículo matemático de EGB se puede apreciar que en el Bachillerato los procesos relacionados con la modelización matemática tienen una mejor articulación y presentan una organización más sistemática.

En términos generales observamos que si bien en el currículo ecuatoriano también se evidencia un progreso gradual de la modelización, el hecho de que ésta no esté

presente en todos los subniveles ocasiona problemas de desarticulación similares a los discutidos en líneas anteriores.

6. La modelización matemática en el currículo español

En el currículo básico de Educación Primaria (6-12 años) vigente en España, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco grandes bloques en todos los niveles, desde 1º hasta 6º: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números; 3) medida; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad. Cada bloque, a su vez, está subdividido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término “modelización matemática” no aparece en ninguna ocasión en el currículo de matemáticas, mientras que otras nociones aparecen únicamente para definir las matemáticas como:

(...) un conjunto de ideas y formas que nos permiten analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, para obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas y actuar, preguntarnos, *obtener modelos* e identificar relaciones y estructuras, de modo que conlleven no sólo utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

A pesar de la escasez de referencias explícitas a la modelización matemática cabe señalar que, por su carácter transversal, en la presentación de la asignatura de matemáticas de Educación Primaria se exponen ya las primeras directrices curriculares vinculadas a la modelización, al hacer referencia al aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas en contextos reales:

El trabajo en esta área en la Educación Primaria estará basado en la experiencia; los contenidos de aprendizaje parten de lo cercano, y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas. Las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados” (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

Como puede apreciarse, se alude a aspectos como la planificación del proceso de resolución y el uso de estrategias y procedimientos diversos, sin hacer, pero mención directa a la modelización. Aun así, considerando la definición de modelización matemática que se asume en este artículo, en la tabla 13 se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje sobre resolución de problemas que los autores hemos asociado a la modelización matemática.

	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	<p>Planificación del proceso de resolución de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Análisis y comprensión del enunciado. <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc. Resultados obtenidos.</p> <p>Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales (p. 19388).</p>	<ul style="list-style-type: none"> · Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. · Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. · Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones. · Profundizar en problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc. · Realizar y presentar informes sencillos sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación. · Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas (p. 19388) 	<p>1.1. Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad.</p> <p>2.1 Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).</p> <p>2.2 Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.</p> <p>2.3. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, buscando otras formas de resolución, etc.</p> <p>2.4 Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia.</p> <p>2.5. Identifica e interpreta datos y mensajes de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (facturas, folletos publicitarios, rebajas...).</p> <p>3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales.</p> <p>3.2. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen.</p> <p>4.1. Profundiza en problemas una vez resueltos, analizando la coherencia de la solución y buscando otras formas de resolverlos.</p> <p>4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc.</p> <p>5.1. Elabora informes sobre el proceso de investigación realizado, exponiendo las fases del mismo, valorando los resultados y las conclusiones obtenidas (p. 19388).</p>
Bloque 2. Números; Bloque 3. Medida; Bloque 4. Geometría; Bloque 5. Estadística y probabilidad	<p>Resolución de problemas de la vida cotidiana (p. 19390).</p> <p>Resolución de problemas de medida (p. 19392)</p> <p>(En los bloques 4 y 5 la resolución de problemas no aparece como contenido)</p>	<p>Al final de cada bloque se expone el mismo criterio de evaluación:</p> <p>Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas (p. 19390; p. 19392; p. 19393).</p>	<p>Al final de cada bloque se exponen los mismos estándares de aprendizaje evaluables:</p> <p>Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.</p> <p>Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo (p. 19390; p. 19392; p. 19393).</p>

Tabla 13. La modelización matemática en el currículo español vigente de Educación Primaria (Real Decreto 126/2014)

Como se observa en la tabla 13, en el currículo de Educación Primaria no aparecen contenidos sobre la modelización matemática – motivo por el cual no se han categorizado los contenidos, y este proceso matemático se vincula a la resolución de problemas en contextos reales, tal como se ha indicado. Concretamente, se enfatizan los procesos de razonamiento y estrategias de resolución, junto con la descripción y análisis de situaciones de cambio para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, que -sin mencionarlo- son algunas de las principales finalidades de la modelización matemática.

En el currículo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y más concretamente en el primer ciclo (12-14 años), las matemáticas se trabajan en ambos cursos en la asignatura troncal “Matemáticas”. En el segundo ciclo, en cambio (14-16 años), se puede elegir entre las asignaturas “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” o “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas”. En todos los niveles, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) geometría; 4) funciones; y 5) estadística y probabilidad.

En Bachillerato, existen diversas posibilidades en función de la modalidad: a) Ciencias (“Matemáticas” I y II); b) Humanidades y Ciencias Sociales (para el itinerario de ciencias sociales, “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” I y II); c) Artes (sin matemáticas). En la asignatura de “Matemáticas” hay cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) análisis; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad; mientras que en la asignatura “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” no se incluye el bloque de geometría.

Como en el caso de Educación Primaria, en todos los niveles de ESO y Bachillerato, cada bloque está subdividido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término “modelización matemática” aparece en la introducción del currículo de matemáticas tanto de ESO como de Bachillerato para referirse a las finalidades de las matemáticas:

Las matemáticas adquieren un papel relevante como herramienta adecuada para adquirir y consolidar el conocimiento, desarrollan la capacidad de reflexionar y razonar acerca de los fenómenos sociales y proporcionan instrumentos adecuados para la representación, *modelización* y contraste de las hipótesis planteadas acerca de su comportamiento. (Real Decreto 1105/2014, p. 381; p. 399).

A diferencia del currículo de matemáticas de Educación Primaria, en el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” del currículo de ESO y Bachillerato, que como se ha indicado se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático, se hace mención explícita a la matematización y *modelización*, junto a la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. Al tratarse de un bloque transversal, los contenidos, criterios y estándares referentes a la modelización aparecen de forma idéntica en todos los niveles:

Bloque	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419) MPE, CM, PRM	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419).	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 400; p. 404; p. 409; p. 415; p. 420).

Tabla 14. La modelización matemática en el currículo español vigente de ESO y Bachillerato (Real Decreto 1105/2014)

A partir de los datos analizados, se concluye que en el currículo español de matemáticas de ESO y Bachillerato la modelización matemática se considera un proceso matemático para trabajar los diferentes bloques de contenido a través de la resolución de problemas en contextos tanto reales como matemáticos.

A partir del análisis de los criterios de evaluación de la última tabla se puede inferir que los contenidos trabajados en el currículo español de ESO y Bachillerato relacionados con la modelización matemática están relacionados directamente con la utilización de modelos previamente establecidos, la construcción de modelos y el uso de un proceso de reflexión en la implementación de la modelización.

7. Consideraciones Finales

La revisión de los diferentes documentos mencionados en este artículo pone de manifiesto la presencia, aunque en diferentes medidas, de la modelización matemática en los currículos de los niveles educativos de primaria, secundaria y bachillerato o su equivalente en Estados Unidos, Ecuador y España. En términos generales, a pesar de que la modelización matemática es un proceso que debería incrementarse en mayor medida conforme los estudiantes avanzan en los diferentes niveles educativos, observamos que al menos en ciertos documentos curriculares no ocurre:

- Un aspecto común a todos los documentos curriculares analizados es la implementación gradual de los procesos de modelización, en donde los modelos concretos y los modelos gráficos visuales son utilizados predominantemente en los primeros niveles escolares (3 a 11 años). Las utilizaciones de modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal son utilizados con más frecuencia en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años) y la creación de modelos con su respectivo análisis, interpretación y juzgamiento del proceso de modelización es casi único en los últimos niveles educativos estudiados (15-18 años). Si bien el proceso de reflexión toma mayor importancia en los últimos niveles educativos es importante que se comience a desarrollar la criticidad y procesos de reflexión en los estudiantes desde las primeras edades.
- En Estados Unidos se puede notar como una fortaleza que los estándares emitidos desde el NCTM propongan trabajar la modelización matemática desde tempranas edades, sin embargo, en los niveles superiores los estándares para trabajar la modelización no están explícitos. La ventaja es que el NCTM cada vez viene realizando mayores esfuerzos por generar literatura que permita llevar las

modelizaciones matemáticas a las aulas

- Por su parte los CCSSM permiten observar una mayor incorporación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles, no obstante, se puede notar un cierto nivel de desarticulación, ya que existen algunos dominios en algunos niveles educativos en los cuales no se trabaja la modelización matemática.
- En el caso ecuatoriano de manera similar se nota una desarticulación en el tratamiento de la modelización matemática, pues en ocasiones dentro de un mismo grado educativo se trabaja la modelización matemática, pero solo en ciertos componentes curriculares.
- En España, a pesar de que en Educación Primaria se otorga mucha importancia a la resolución de problemas, es un inconveniente que la modelización matemática no esté incorporada de forma explícita en el currículo oficial. Esta situación mejoró mucho en la Educación Secundaria y Bachillerato, donde se puede notar un tratamiento importante a lo largo de los diferentes bloques de estudio.

Finalmente consideramos que la modelización matemática debe ser entendida como un elemento transversal que atraviese tanto los diferentes dominios o bloques matemáticos así como los diferentes niveles educativos y por tanto debe estar explícita en las diferentes partes del currículo matemático, empero pensamos que no basta simplemente con enunciarla de manera formal, es importante también orientar al profesorado sobre cómo ponerla en práctica en el aula de clases y para ello las iniciativas surgidas desde diferentes organismos internacionales como el NCTM o el ICTMA son un gran aporte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C., García, L.M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA* 54, 51-53.
- Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research (Vol. 1–13). Recuperado de: <http://tsg.icme11.org/document/get/811>
- Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1era ed., pp. 222–231). Chichester: Horwood.
- Common Core Standards Writing Team (2013). *Progressions for the Common Core Standards in Mathematics (draft) High School, Modeling*. Tucson, Ariz: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.
- Ecuador. Decreto Ejecutivo 1241/2012, de 25 de julio, por el que se establece el Reglamento General a la ley Orgánica de Educación Intercultural.
- España. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Hirsch, C., & McDuffie, A. (2016). *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. (National Council of Teachers of Mathematics, Ed.) (1era ed.). Reston.
- Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 82–85.

- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302–310.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria*. Recuperado de: <http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Curriculov2.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assesment Standards for school Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington D.C. Publicado en castellano: *Estándares Estatales Comunes de Matemáticas*, San Diego, San Diego County Office of Education (2012).
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools*. Nueva York: The Falmer Press.
- Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.

Autores: César Trelles Zambrano: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Cuenca (Ecuador). Estudiante de Doctorado en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas tanto en la formación del profesorado como en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria y bachillerato. cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec

Alsina, Ángel: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. angel.alsina@udg.edu

4.2. Artículo 2:

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, A. (2022). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *Innova Research Journal*, 7(2), 97-116. <https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>

Índices de calidad de la revista: La revista *Innova Research Journal* está indizada actualmente en Dialnet, LatinREV, REDIB y Latindex Catálogo (37 de 38 características cumplidas).



La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos

The presence of mathematical modelling in statistics and probability tasks in Ecuadorian textbooks

César Trelles-Zambrano
Universidad de Cuenca, Cuenca, Ecuador
cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec
 <https://orcid.org/0000-0002-4096-8353>

Ximena Patricia Toalongo-Guamba
Universitat de Girona, Girona, España
ximena.toalongo@udg.edu
 <https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>

Ángel Alsina-Pastells
Universitat de Girona, Girona, España
angel.alsina@udg.edu
 <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Recepción: 04/03/2022 | Aceptación: 01/05/2022 | Publicación: 10/05/2022

Cómo citar (APA, séptima edición): Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X.P., y Alsina-Pastells, A. (2022). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *INNOVA Research Journal*, 7(2), 97-116.
<https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>

Resumen

En la actualidad la modelización matemática dentro de la investigación en ambientes educativos ha adquirido notable presencia, por ello, muchos países han decidido incorporarla tanto en sus documentos curriculares como en su práctica de enseñanza; Ecuador no es la excepción y en su última propuesta curricular la incorpora explícitamente. Los libros de texto forman parte de los recursos más utilizados por el profesorado, por tanto, el objetivo de esta investigación es determinar la presencia de la modelización matemática en el bloque de estadística y probabilidad mediante un

estudio comparativo de los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación en los años 2016-2019 frente a los libros utilizados actualmente y entregados al estudiantado desde el año 2020. La metodología utilizada responde a un enfoque cuantitativo, con un alcance descriptivo, 497 actividades fueron analizadas mediante un análisis de contenido. Los resultados muestran la poca presencia de la modelización matemática, si bien los libros actuales presentan en conjunto problemas más contextualizados, las actividades de modelización matemática han desaparecido completamente; se concluye que es necesaria una reformulación urgente de los libros de texto en lo que a estadística y probabilidad se refiere, en la que se incorpore en mayor medida actividades de modelización. Los hallazgos sirven para que el estado ecuatoriano y los autores de libros de texto tomen decisiones acerca de cómo mantener una posición coherente entre lo manifestado en los lineamientos curriculares y lo que se propone al estudiantado en su proceso de enseñanza aprendizaje a través de los libros de texto.

Palabras claves: modelización matemática; libros de texto; estadística y probabilidad; contexto; clasificación de problemas matemáticos.

Abstract

At present, mathematical modelling in research in educational environments has acquired a notable presence, which is, why many countries have decided to incorporate it both in their curricular documents and in their teaching practice; Ecuador is no exception and its latest curricular proposal explicitly incorporates it. Textbooks form part of the resources most used by teachers, therefore, the objective of this research is to determine the presence of mathematical modelling in the statistics and probability block through a comparative study of the textbooks delivered by the Ministry of Education in the years 2016-2019 compared to the books currently used and delivered to students from the year 2020. The methodology used responds to a quantitative approach, with a descriptive scope, 497 activities were analysed through a content analysis. The results show the scarce presence of mathematical modelling, although the current textbooks present more contextualised problems, the mathematical modelling activities have completely disappeared; it is concluded that an urgent reformulation of the textbooks is necessary in terms of statistics and probability, in which modelling activities are incorporated to a greater extent. The findings are useful for the Ecuadorian state and textbook authors to make decisions about how to maintain a coherent position between what is stated in the curricular guidelines and what is proposed to students in their teaching and learning process through textbooks.

Keywords: mathematical modelling; textbooks; statistics and probability; context; classification of mathematical problems.

Introducción

Actualmente la investigación respecto al cómo la modelización puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha cobrado gran protagonismo (Trelles y Alsina, 2017). En este sentido, son varias las investigaciones en los últimos años que abordan el uso de la modelización matemática en entornos educativos, por ejemplo: Lu y Kaiser (2022), Montero y Vargas (2022), Trelles et al. (En prensa), Daher (2021), Ferrando y Albarracín (2021), Toalongo et al. (2021), Barquero y Jessen (2020), Florensa et al. (2020), Jung et al. (2019), Vargas et al. (2018), Barquero et al. (2018). Este hecho ha repercutido de manera directa en el diseño curricular de varios países, pues, cada vez son más los países como Alemania, Colombia, Chile, Ecuador, España, Estados Unidos, Perú, Singapur, Suecia, entre otros, que han incorporado explícitamente

la modelización matemática en los planes de estudio de los diferentes niveles. Frejd (2011) por ejemplo, manifiesta que en Suecia se enfatiza el papel de los modelos matemáticos en el currículo nacional de secundaria. Por su parte, para Blomhøj (2009) en los últimos años la modelización matemática y el uso de las tecnologías de la información y comunicación son dos de los aspectos más presentes en los planes de estudio de muchos países.

Con base en esta innovación curricular, en este estudio se pretende indagar acerca de cómo se plantea la enseñanza de la modelización en los libros de texto de Ecuador. Este propósito responde a dos cuestiones: por un lado, Ecuador ha enfrentado varios cambios en el aspecto político, económico y social en los últimos años, consecuentemente, el sistema educativo no ha sido ajeno a estos cambios ya que desde el año 2016 se expide el nuevo Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria.

El documento curricular manifiesta que es “imprescindible tener en cuenta la necesidad de contextualizar los aprendizajes a través de la consideración de la vida cotidiana y de los recursos del medio cercano como un instrumento para relacionar la experiencia de los estudiantes con los aprendizajes escolares” (Ministerio de Educación del Ecuador [MinEduc], 2016a, p. 13).

Para el área de matemáticas específicamente, el Ministerio plantea algunos procesos matemáticos para tener en cuenta, por ejemplo:

Resolución de problemas que impliquen exploración de posibles soluciones, modelización de la realidad, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas. La resolución de problemas no es solo uno de los fines de la enseñanza de la Matemática, sino, el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener las oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo. Representación, que se refiere al uso de recursos verbales [...] para aplicar la matemática a problemas de la vida real mediante la modelización, y para utilizar los nuevos recursos de las tecnologías de la información y la comunicación en el quehacer matemático (MinEduc, 2016a, p. 221).

Por otro lado, el análisis se focaliza en los libros de texto, ya que se trata de uno de los recursos didácticos más utilizados por el profesorado, por lo que, su influencia en la práctica escolar es decisiva (Fernández y Caballero, 2017; Parcerisa, 1996). Al respecto, Johansson (2005) presenta cinco consecuencias de la utilización de los libros de texto como fuente primaria en el proceso enseñanza-aprendizaje: 1) El profesorado suele presentar los temas matemáticos de los libros de texto en sus clases; 2) El profesorado no suele presentar los temas matemáticos que no están incluidos en los libros de texto; 3) El posicionamiento didáctico de los libros de texto influyen en las estrategias de enseñanza del profesorado; 4) La secuencia de las instrucciones dadas por el profesorado suele tener similitudes con el libro de texto; y 5) Los libros de texto son la principal fuente para planificar la presentación del contenido matemático según los profesores. Para Reys et al. (2004), el libro de texto es la fuente principal de cómo y qué van a enseñar los profesores y en definitiva qué van a aprender los estudiantes. Además, si partimos de la premisa de que los libros de texto deben ser coherentes con los lineamientos curriculares, y que en el caso ecuatoriano el sistema educativo público utiliza en cada año un único libro de texto, resulta entonces importante determinar en qué medida está presente la modelización matemática en los mismos.

Considerando estos antecedentes, el estudio se centra en el subnivel de Educación General Básica Superior (EGB) (12-15 años), en adelante EGB Superior, y en las actividades correspondientes al bloque de estadística y probabilidad, debido a que, diversos organismos y autores proponen su enseñanza a través de actividades contextualizadas (Alsina, et al., 2021; Batanero y Díaz, 2011; Cobb y Moore, 1997; GAISE, 2016; Trelles et al., 2019). Así, pues, el objetivo de esta investigación es determinar el nivel de presencia de la modelización matemática en las actividades del bloque de estadística y probabilidad, a través de un estudio comparativo de los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación en los años 2016-2019 frente a los libros utilizados actualmente y entregados al estudiantado desde el año 2020, con el propósito de dotar de insumos a la política pública en aras de una mejora permanente de los libros de texto. La pregunta de investigación a la que se pretende dar respuesta mediante este estudio es: ¿qué presencia tiene la modelización matemática en las actividades de estadística y probabilidad propuestas en los libros de texto ecuatorianos de EGB Superior?

Marco teórico

En la literatura no existe todavía un único criterio para conceptualizar la modelización matemática, pues, son varios los autores que aportan definiciones al respecto, (por ejemplo: Blumet al., 2007; García et al., 2006; Jablonka y Gellert, 2007), por ello, es muy importante elegir desde qué mirada se concibe la misma. Esta investigación asume la modelización matemática desde un enfoque educacional, entendiendo la importancia de ésta como estrategia didáctica. Coincidimos con Kaiser y Sriraman (2006) para quienes la perspectiva educacional se centra en objetivos de carácter pedagógico y disciplinar, ya sea, en la introducción y desarrollo de conceptos matemáticos como en la estructuración de los procesos de aprendizaje.

Son varios los planteamientos existentes para describir la modelización matemática; en este sentido, coincidimos con algunos autores que realizan interesantes aportes, por ejemplo: para Aymerich y Albarracín (2022) “la modelización matemática es un proceso de resolución de problemas contextualizados en las que se elabora un modelo matemático para describir el fenómeno real estudiado” (p. 4). COMAP y SIAM (2019) expresan que “la modelización es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real” (p. 8). Por su parte, Blum y Borromeo (2009) la definen como el proceso de traducción en ambas direcciones entre el mundo real y las matemáticas. Trigueros Gaisman (2006, p. 1210), expresa:

Cuando hablamos de modelación en la enseñanza nos referimos a proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en cuestión en términos matemáticos y mediante la revisión, la reflexión, la aplicación de sus conocimientos y la comunicación de sus resultados con la idea de que se acerquen a los procesos que se llevan a cabo en la actividad científica.

Características de las actividades de modelización matemática

Una actividad de modelización matemática debe obligar a los estudiantes a tomar posesión de algunas de las decisiones a lo largo del camino (COMAP y SIAM, 2019). Las actividades de modelización facilitan a los estudiantes definir, descubrir y manifestar sus ideas y conceptos, generalmente en pequeños grupos de trabajo, además, estimulan la construcción de modelos que propician la explicación de problemas de la vida cotidiana, donde la información no necesariamente se encuentra matematizada o de forma explícita, y cuya solución no se reduce a la simple aplicación de algoritmos (Lesh y Yoon, 2004). Otra de las características de este tipo de actividades es que deben dar pie a los estudiantes a pensar en situaciones, en las que la solución formulada sirva además para resolver otras situaciones similares (Lesh y Doerr, 2003). Por lo general, en este tipo de actividades no existe una respuesta única y en muchos de los casos las soluciones son aproximadas. Algunos autores plantean que en algunos casos es posible transformar un problema estrictamente matemático en un problema de modelización, como se indica en la siguiente figura.

Figura 1

Una vía de transformación de un problema matemático a uno de modelización



Fuente: COMAP y SIAM (2019, p. 12)

Clasificación de problemas presentes en los libros de texto

Como se dijo en principio, el objetivo de esta investigación es determinar el nivel de presencia de la modelización matemática en el bloque de estadística y probabilidad, a través de un estudio comparativo de los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación en los años 2016-2019 frente a los libros utilizados actualmente y entregados al estudiantado desde el año 2020. En este sentido, para la clasificación de los tipos de problemas, se tomó como base el trabajo de Blanco (1993) quien establece ocho tipologías de actividades en relación con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas:

- 1) Ejercicios de reconocimiento: pretenden resolver, reconocer o recordar factores específicos, una definición, un concepto, un teorema, etc., por ejemplo: si x es positivo, y w es negativo ¿ x/w es positivo?
- 2) Ejercicios algorítmicos o de repetición: son resueltos con un procedimiento algorítmico, generalmente un algoritmo numérico, un ejemplo de estos ejercicios puede ser el cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.
- 3) Problemas de traducción simple o compleja: implican una traducción del lenguaje común al lenguaje matemático, en los enunciados de estos problemas aparece toda la información necesaria para resolverlos y frecuentemente de forma implícita se indica la

estrategia a seguir; a un ejemplo de estos problemas puede ser: la edad de una madre es el doble de la de su hija, si entre las dos suman 60 años ¿cuál es la edad de cada una? En actividades de estadística, pueden conllevar a relacionar diferentes tablas con sus respectivos gráficos.

- 4) Problemas de procesos: a diferencia de los anteriores la forma de cálculo no se presenta claramente delimitada, pues permiten conjeturar diferentes vías de solución; un ejemplo de estos problemas puede ser: ¿de cuántas maneras puedo ordenar seis libros en un estante?
- 5) Problemas sobre situaciones reales: son problemas lo más cercanos posibles a la realidad, donde se necesita el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos para su resolución. Por ejemplo: determinar el porcentaje de estudiantes del aula que les gusta el fútbol.
- 6) Problemas de investigación matemática: utilizan contenidos estrictamente matemáticos cuyos enunciados en ocasiones no presentan ninguna estrategia para representarlos, son usuales expresiones como: “probar que...”; “demostrar que...”; “encontrar todos los...”; ejemplo: demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
- 7) Problemas de puzzles: pretenden mostrar las matemáticas desde un enfoque recreativo y obligan a los estudiantes a ser flexibles en la forma de abordar un problema, ejemplo: dividir un triángulo obtusángulo en triángulos acutángulos, y
- 8) Historias matemáticas: son relatos, novelas, cuentos, etc. que demandan de los estudiantes esfuerzos que impliquen conceptos matemáticos. Por ejemplo: la historia del tablero de ajedrez y los granos de trigo.

Por su parte Díaz y Poblete (2001) clasifican los problemas en rutinarios y no rutinarios, los rutinarios a su vez, de acuerdo al contexto, se clasifican en:

- 1) de contexto real: trabajan con datos reales, en algunos casos son los propios estudiantes quienes obtienen los datos, ejemplo: calcular el porcentaje de estudiantes de la clase que utilizan transporte escolar para llegar a la escuela.
- 2) problema de contexto realista: son problemas que son susceptibles de producirse realmente. Simulan la realidad o al menos una parte de esta, ejemplo: una máquina funcionando 8 horas al día produce 1000 artículos. ¿Cuántos artículos producirá en 10 días funcionando 12 horas diarias?
- 3) problemas de contexto fantasista: son producto de la imaginación y no tienen ningún sustento en la realidad, ejemplo: un habitante del planeta Pandora ha visitado la Tierra, para sobrevivir necesita ingerir semanalmente una cantidad de calorías equivalente al doble de su estatura, si en dos meses consumió 6000 calorías ¿cuántas calorías necesita consumir en un año? y,
- 4) problemas de contexto puramente matemático: se refieren única y exclusivamente a objetos matemáticos, es decir, figuras geométricas, números, relaciones y operaciones aritméticas, etc., ejemplo: si la razón entre los radios de dos círculos es de 2 a 1, ¿qué razón guardan sus áreas?

Los no rutinarios, son aquellos en los cuales el estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento o rutina previamente establecida para encontrarla, ejemplo: plantear dos situaciones de la vida diaria que sean inversamente proporcionales y determinar en cada caso la constante de proporcionalidad.

El trabajo previo de estos autores conjuntamente con la identificación de las diferentes características que deben cumplir las actividades de modelización matemática conllevó a establecer nuevas categorías: 1) ejercicios de reconocimiento, 2) ejercicios algorítmicos y de repetición, 3) problemas de traducción simple o compleja, 4) problemas de procesos, 5) problemas sobre situaciones reales, 6) investigación matemática, 7) problemas de puzzles, 8) historias matemáticas y 9) problemas de modelización matemática. Somos plenamente conscientes que algunos investigadores plantean que el trabajo matemático en sí mismo es una actividad de modelización y por lo tanto existen actividades que están dotadas de un contexto intra-matemático. Sin embargo, es importante indicar que desde el posicionamiento teórico de esta investigación el contexto hace referencia a situaciones extra-matemáticas que permitan acercar a los estudiantes al aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Metodología

La presente investigación tiene un enfoque metodológico cuantitativo con un alcance descriptivo, en este sentido, coincidimos con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) para quienes los estudios descriptivos “miden o recolectan datos y reportan información sobre diversos conceptos, variables, aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o problema a investigar” (p. 108). La técnica utilizada es el análisis de contenido cuantitativo, entendida como una técnica para estudiar la comunicación de una forma objetiva y sistemática, que permite cuantificar los contenidos en categorías (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018).

Resulta operativo analizar las actividades que se presentan en los libros de texto para buscar respuesta a ¿qué presencia tiene la modelización matemática en las actividades de estadística y probabilidad propuestas en los libros de texto ecuatorianos de EGB Superior? Consideramos que un estudio descriptivo junto con el marco teórico utilizado brinda información sobre el nivel de presencia de la modelización matemática en los mismos.

Procedimiento

La muestra seleccionada consiste en los libros de texto oficiales entregados por el Ministerio de Educación del Ecuador a todos los estudiantes del sistema educativo público, correspondientes a los años de 8°, 9° y 10° de Educación General Básica Superior (12-15 años) en sus respectivas ediciones 2016-2019 y 2020-2022. Para mantener concordancia con el objetivo de la investigación, en todos los casos se analizó exclusivamente el bloque de estadística y probabilidad. Además, consecuentemente con el marco teórico presentado anteriormente se definieron las unidades de análisis, es decir cada uno de los problemas planteados en los libros de texto en el bloque de estadística y probabilidad. Asimismo, con el propósito de operacionalizar la variable de estudio: presencia de la modelización matemática en las actividades de los libros de texto, se definió el sistema de categorías, las cuales coinciden con lo expuesto en el marco teórico, es decir, fueron nueve las categorías empleadas que permitieron clasificar cada una de las actividades planteadas en los textos.

Con la finalidad de dotar de confiabilidad a la investigación, se desglosó cada categoría y se construyó lo que Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) denominan: hoja o registro de

codificación. Antes de codificar cada una de las unidades de análisis se realizó una prueba piloto en 20 actividades correspondientes al bloque de álgebra y funciones de octavo año de EGB Superior desarrollada por separado por los codificadores -autores del estudio-, este pilotaje permitió afinar la redacción de la hoja o registro de codificación, contribuyendo a la condición de que las categorías sean significativas, exhaustivas y mutuamente excluyentes, esto permitió obtener la versión final del registro de codificación (Apéndice 1).

Seguidamente se determinó la confiabilidad individual de los codificadores, obteniéndose los siguientes resultados, codificador 1: 0.95; codificador 2: 0.89; codificador 3: 0.89; a continuación se realizó el cálculo de la confiabilidad intercodificadores de acuerdo al método de parejas, llegando a obtener una confiabilidad total de 0.90; dato que es aceptable, ya que según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), no se debe tolerar una confiabilidad menor a 0.85 y en lo posible se debe procurar conseguir una confiabilidad mayor a 0.89

Un total de 497 actividades fueron analizadas y codificadas, concretamente 352 actividades correspondientes a los libros de texto de los años 2016-2019 y 145 actividades correspondientes a los libros de texto de los años 2020-2022. Los resultados del análisis fueron cuantificados y procesados mediante el software Microsoft Excel 2019, lo que permite presentar los resultados sintetizados.

Resultados y Discusión

Antes de presentar los resultados generales por año educativo presentamos algunos ejemplos de diferentes tipos de actividades presentes en los libros de texto (2016-2019), la clasificación se ha realizado de acuerdo con lo expuesto en líneas anteriores.

Figura 2

Ejercicio de reconocimiento

Ejercitación

3 Halla la mediana y la moda de cada conjunto de datos.

- a. 5 9 8 13 4 0
- b. 6 6 3 3 2 2
- c. 0 1 2 3 4
- d. 9 9 5 3 6 6 6 6 1 1 0 0
- e. 24 32 28 40 33 45 28 34 33
- f. 50 50 50 30 60 10 80

Fuente: MinEduc (2016b, p. 209)

Figura 3

Ejercicio algorítmico y de repetición

7 Completa cada tabla de frecuencias.

a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1		
2	5	7
3	3	
4		14

Fuente: MinEduc (2016b, p. 194)

Figura 4

Problema de traducción simple o compleja

Comunicación

3 Relaciona cada tabla con la representación gráfica que le corresponde.

a.

1	12
2	24
3	48
4	6
5	3

Tabla 6

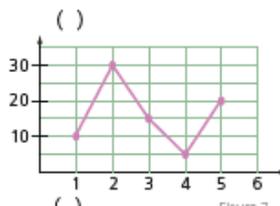


Figura 7

b.

1	10
2	30
3	15
4	5
5	20

Tabla 7

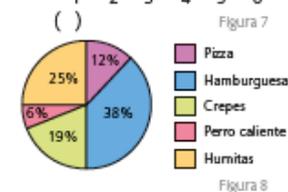


Figura 8

c.

Pizza	12
Hamburguesa	24
Crepes	48
Perro caliente	6
Humitas	3

Tabla 8

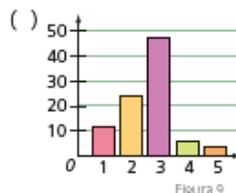


Figura 9

d.

Pizza	10
Hamburguesa	30
Crepes	15
Perro caliente	5
Humitas	20

Tabla 9

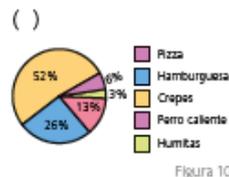


Figura 10

Fuente: MinEduc (2016b, p. 202)

Figura 5

Problema de procesos

- 5 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los siguientes sucesos:
- A: "Sacar una copa".
 - B: "Sacar un rey".
 - C: "Sacar una carta menor que 5".
- Determina estos sucesos:
- a. $A \cup B, A \cup C$ y $B \cup C$
 - b. $A \cap B, A \cap C$ y $B \cap C$
 - c. $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

Fuente: MinEduc (2016c, p. 245.)

Seguidamente, se presenta un ejemplo de una actividad de modelización matemática propuesta en el libro de texto de octavo año.

Figura 6

Problema de Modelización matemática

Actitud hacia el riesgo

La ley general establece que a un mayor riesgo corresponde un mayor rendimiento y viceversa. De allí que podamos diferenciar en el humano tres actitudes frente al riesgo:

- **Búsqueda o deseo por el riesgo**, en donde ubicamos al individuo que busca el riesgo porque le da satisfacción. Esta persona, al enfrentarse a posibilidades de inversión selecciona la de mayor riesgo, a pesar, incluso, de que en el abanico de inversiones presenten igual rendimiento. Los buscadores de riesgo no tienen grandes expectativas sobre los rendimientos sino sobre el placer o satisfacción que dicho riesgo le produce. En esta categoría podemos encontrar al típico jugador que busca ganar a toda costa sin que importe la gran probabilidad que tiene de perder.
- **Aversión hacia el riesgo**, en donde ubicamos al inversionista común que, frente a la inversión en igualdad de condiciones, tenderá a seleccionar la que tenga menor riesgo. Esta situación implica que a medida que el riesgo de la inversión aumenta, su satisfacción tiende a disminuir; es decir, que como el riesgo no le produce gran satisfacción requiere muy altos rendimientos para poder asumir pequeñas cantidades adicionales de él.
- **Indiferencia al riesgo**, donde ubicamos al individuo que no siente aversión ni tendencia hacia el riesgo, ya que su grado de satisfacción es proporcional a los rendimientos que produzca la inversión. Por esto se puede decir que, aun cuando sí le interesa el riesgo, su grado de compensación está en equilibrio.

Merchan, Vianca (2007). Evaluación Ex Post de un Portafolio de Inversiones en Acciones de Noviembre de 2007 a Septiembre de 2011. Recuperado de: http://www.inosanchez.com/files/mda/fpen/1_05_el_riesgo_en_la_inversion_w.pdf

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué diferencias encuentras entre la primer y la tercer actitud frente al riesgo?

Argumenta

2. ¿Por qué crees que las personas obtienen satisfacción al tomar riesgos?
3. ¿Existe alguna manera de minimizar los riesgos al invertir en un proyecto? Explica.

Propón

4. Supón que has decidido crear tu propio negocio. ¿Qué información debes tener en cuenta para que este sea rentable?

Fuente: MinEduc (2016b, p. 191.)

Al analizar las diferentes actividades planteadas en los libros de texto se encontraron los siguientes resultados:

Tabla 1

Resultados del análisis de los tipos de problemas de los textos de los años 2016-2019 de EGB Superior (12-15 años) de Ecuador

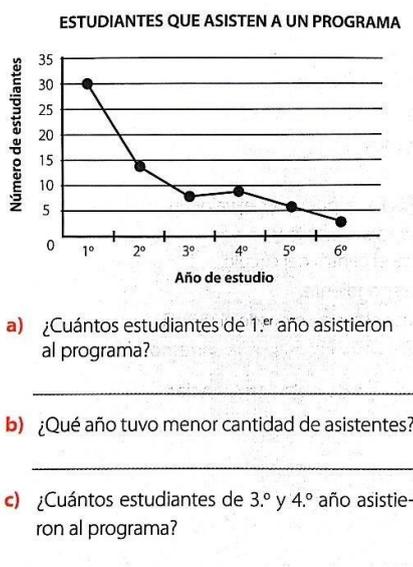
Tipos de problemas	Octavo		Noveno		Décimo	
	N	%	N	%	N	%
Ejercicios de reconocimiento	26	21,14	21	18,10	8	7,09
Ejercicios algorítmicos y de repetición	59	47,97	54	46,55	77	68,14
Problemas de traducción simple o compleja	5	4,07	0	0,00	1	0,88
Problemas de procesos	9	7,32	14	12,07	4	3,54
Problemas sobre situaciones reales	19	15,45	19	16,38	20	17,71
Problemas de investigación matemática	1	0,81	5	4,31	1	0,88
Problemas de puzzles	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Historias matemáticas	0	0,00	0	0,00	1	0,88
Problemas de modelización matemática	4	3,24	3	2,59	1	0,88
Total	123	100	116	100	113	100

Fuente: Elaboración propia

Asimismo, antes de presentar los resultados concernientes a los libros de texto (2020-2022), presentamos también ejemplos de actividades presentes en estos libros:

Figura 7

Ejercicio de reconocimiento



Fuente: Ministerio de Educación del Ecuador (2020a, p.116)

Figura 8

Ejercicio algorítmico y de repetición

4. **Completa** la tabla de frecuencias.

Lista	Número de votos (fi)	Frecuencia relativa fi	Frecuencia absoluta acumulada Fi	Frecuencia relativa acumulada Hi
A	200			
B	350			
C	400			
D	550			
Total	1 500			

Fuente: Ministerio de Educación del Ecuador (2020a, p.117)

Figura 9

Problemas sobre situaciones reales

5. **Analicen** el siguiente estudio estadístico, luego **respondan**. Se requiere realizar un estudio de la estatura de los 50 estudiantes de primero de bachillerato. Para ello, se dividió a la clase en dos grupos: hombres y mujeres. La información recogida fue la siguiente:

Estatura de hombres (m)				
1,75	1,60	1,71	1,72	1,68
1,65	1,67	1,73	1,8	1,73
1,74	1,75	1,69	1,7	1,72
1,65	1,63	1,75	1,78	1,74
1,68	1,72	1,76	1,76	1,8

Estatura de mujeres (m)				
1,56	1,60	1,54	1,55	1,62
1,56	1,62	1,65	1,68	1,7
1,62	1,68	1,64	1,58	1,56
1,52	1,56	1,59	1,6	1,64
1,63	1,65	1,68	1,64	1,58

- Determinen** el rango de cada grupo de datos.
- Ordenen** los datos en cinco intervalos, **determinen** la amplitud.
- Ordenen** la información en tablas de frecuencia.
- ¿Cuál es el tercer cuartil para cada tabla de frecuencias?

Fuente: Ministerio de Educación del Ecuador (2021d, p. 37)

Los resultados del análisis de las actividades presentes en estos libros de texto (2020-2022), se presentan a continuación:

Tabla 2

Resultados del análisis de los tipos de problemas de los textos de los años 2020-2022 de EGB Superior (12-15 años) de Ecuador

Tipos de problemas	Octavo		Noveno		Décimo	
	N	%	N	%	N	%
Ejercicios de reconocimiento	24	38,71	16	39,02	17	40,48
Ejercicios algorítmicos y de repetición	12	19,35	17	41,47	17	40,48
Problemas de traducción simple o compleja	2	3,23	1	2,44	1	2,37
Problemas de procesos	8	12,90	1	2,44	0	0,00
Problemas sobre situaciones reales	16	25,81	6	14,63	7	16,67
Problemas de investigación matemática	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de puzzles	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Historias matemáticas	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de modelización matemática	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Total	62	100,00	41	100,00	42	100,00

Fuente: Elaboración propia

De la información anterior se puede ver notablemente la reducción de actividades propuestas en los libros de texto (2020-2022) en el bloque de estadística y probabilidad, concretamente 145, frente a las 352 que se encontraban en los libros anteriores, este hecho se da a modo de conjetura por la priorización de contenidos que estableció el Ministerio de Educación debido a la pandemia ocasionada por la Covid-19.

La búsqueda del término modelo, modelación o modelización en el bloque de estadística y probabilidad de cada uno de los libros de texto arrojó los siguientes resultados: en los libros de octavo, noveno y décimo de EGB Superior correspondientes a los años 2016-2019, aparece dos, cuatro y tres veces el término modelación, respectivamente. En el caso de los libros correspondientes a los años 2020-2022, en el libro de octavo de EGB Superior no aparece ninguno de los términos mencionados, en los libros de noveno y décimo de EGB Superior aparece tan solo dos veces el término modelación en cada uno de ellos. Estos resultados muestran la poca presencia explícita del término en los diferentes libros de texto, este aspecto tiene una repercusión directa, ya que, si no aparece explícitamente el término, difícilmente las actividades planteadas a los estudiantes cumplirán con las diferentes características de las actividades de modelización, mencionadas en apartados anteriores.

Estos resultados coinciden con otros estudios realizados a nivel internacional, incluso en diferentes niveles educativos, por ejemplo, Valencia y Valenzuela (2017) al analizar libros de texto de educación superior, encontraron que en los libros de texto que presentan actividades de modelización matemática, éstas constituyen tan solo el 2%. También concluyen que:

La educación matemática debe ir más allá e incluir ejercicios de nivel intermedio y avanzado que logren reforzar el tema mediante aplicaciones y soluciones para el mundo real, que sean de interés para los estudiantes y favorezcan el desarrollo de habilidades de orden superior. Los PM son prácticos, motivan al alumno, facilitan la comprensión de conceptos y le demuestran la clase de situaciones que las matemáticas ayudan a resolver. No obstante, su presencia en los libros de texto analizados no resulta suficiente (p. 73).

Asimismo, Cabassut y Wagner (2011) en su estudio encontraron que la modelización matemática se describía sólo implícitamente en las tareas de los libros de texto de primaria en Francia y Alemania. Según estos autores, aún existen pocas investigaciones que se centren en los libros de texto, con un enfoque explícito para analizar cómo se interpreta y explica la modelización matemática en los mismos. También, Frejd (2013) y Zwaneveld (2017) encontraron que en Suecia y Holanda respectivamente los libros de texto no dan un tratamiento adecuado a la modelización matemática. Según Ikeda (2007) la falta de libros de texto de matemáticas adecuados es un obstáculo común para la enseñanza de la modelización matemática en educación secundaria.

Por otra parte, los resultados corroboran lo encontrado por Trelles y Alsina (2017) para quienes aun cuando la modelización matemática está presente en diferente medida en los documentos curriculares e incluso en edades cada vez más tempranas, es necesario desarrollar una adecuada articulación de este componente en los diferentes niveles educativos.

Conclusiones

A pesar de los esfuerzos de la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática y de manera particular de quienes se centran en la línea de modelización matemática por llevar a cabo diferentes propuestas para que la misma sea utilizada cotidianamente en las aulas, al parecer todavía existe mucho por hacer, al menos en las actividades presentes en el bloque de estadística y probabilidad de los libros de texto ecuatorianos de EGB Superior.

Si bien, algo se ha ganado con el hecho de que se incorpore la modelización matemática de forma explícita en los documentos curriculares; es importante tener presente lo manifestado por Trelles y Alsina (2017), para quienes no basta con que la modelización matemática esté presente en estos documentos, sino que debe ir acompañada de acciones que permitan al profesorado ponerla en práctica en las aulas. Al respecto, los resultados de este estudio demuestran que existe una contradicción referente a lo que se plantea en los documentos curriculares y al tratamiento que se da a la modelización matemática en los libros de texto.

Considerando que los libros de texto constituyen un recurso didáctico muy utilizado por el profesorado ecuatoriano, es preocupante ver que las actividades de modelización matemática en

los libros (2016-2019) no llegan ni siquiera al 5%, agravándose aún más la situación en los libros (2020-2022) en donde las actividades de modelización han desaparecido totalmente.

Estos hallazgos coinciden con lo encontrado por otros investigadores en otros países, por ejemplo, Frejd (2013) encontró que la modelización matemática al ser una de las siete habilidades del currículo nacional de Suecia no es tratada como una noción central en los libros de texto suecos, aún más, concluye que ninguno de los libros de texto que formaron parte de su investigación contribuye realmente al cumplimiento del currículo sueco en lo referente a modelización matemática.

Zwaneveld et al. (2017) al realizar un estudio con libros holandeses, concluyen que la modelización matemática es incipiente en estos libros, a pesar de que esta se menciona de manera formal en el plan de estudios. Por su parte Krutikhina et al. (2018) manifiestan que un número insignificante de problemas aplicados en los libros de texto escolares no da la posibilidad de aprender los elementos de modelización que son muy útiles para resolver problemas reales.

Preocupa además que aún se utiliza en los libros de texto ejercicios rutinarios con ausencia completa de un proceso de contextualización, los mismos que carecen completamente de sentido para el estudiante. Si bien, los problemas contextualizados se han incrementado en conjunto en los libros 2020-2022, consideramos que esto no es aún suficiente, más aún cuando observamos la ausencia de actividades de modelización en estos últimos años.

Los autores de los libros de texto podrían plantear actividades en donde los alumnos deban reunir sus propios datos estadísticos con el objetivo de tomar decisiones, un ejemplo en un contexto medioambiental sería que los alumnos desarrollarán un modelo matemático que les permita discutir y decidir que tanto puede beneficiar a su ciudad la renovación gradual de los automóviles a gasolina por automóviles híbridos o eléctricos. Otro ejemplo sería que los alumnos investiguen y recolecten datos estadísticos auténticos para generar un modelo que le permita decidir cuál es la mejor alternativa calidad-precio si alguien necesita renovar su teléfono celular, etc. Estas actividades pueden desarrollar debates críticos en el aula sobre la utilidad de los modelos matemáticos para la toma de decisiones y cuáles son los principales elementos que se deben considerar al momento de elaborar un modelo. Además, recomendamos comenzar cada unidad del libro de texto con una auténtica actividad de modelización matemática, que despierte en los estudiantes el interés por desarrollarla. Coincidimos con Trelles et al. (2017) en señalar que la enseñanza de la matemática debe ser tratada con un nuevo enfoque, que deje de lado la simple repetición de procesos y algoritmos mecánicos, que en ocasiones pueden incluso ser descontextualizados y sin significado para los estudiantes, sino que más bien sea entendida como un proceso reflexivo que propicie en ellos un razonamiento lógico y crítico.

Una de las limitaciones del estudio es el hecho de no abordar el tratamiento que se da a la modelización matemática en los demás bloques curriculares como Álgebra y funciones y Geometría y medida, quedando este aspecto como una línea de trabajo abierta para futuras investigaciones.

Finalmente, hacemos un llamado a los autores de los libros de texto y al Ministerio de Educación para que se mantenga una coherencia entre lo planteado en los lineamientos curriculares y en lo que en realidad se oferta a los estudiantes a través de los libros de texto.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, A., Salgado, M., Toalongo, X. y Trelles, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática - Ridema*, 5(1), 1-21.
<https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/34513>
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18.
<https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Barquero, B. y Jessen, B. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(17), 98- 113.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*(50), 31-43.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.
- Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon* (23), 1-10.
<https://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf>
- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1-17). Roskilde University.
https://rucforsk.ruc.dk/ws/portalfiles/portal/3820977/IMFUFA_461.pdf#page=6
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
https://www.researchgate.net/publication/279478754_Mathematical_Modelling_Can_It_Be-Taught-And-Learnt
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and applications in mathematics education. *The 14th ICMI study*. Springer.
- Cabassut, R. y Wagner, A. (2011). Modelling at primary school through a french-german comparison of curricula and textbooks. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling* (pp. 559-568). Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_54
- COMAP y SIAM. (2019). *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education* (2a. ed.). (S. Garfunkel y M. Montgomery, Eds.)
<https://www.siam.org/Publications/Reports/Detail/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-mathematical-modeling-education>
- Coob, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823. <https://doi.org/10.2307/2975286>

- Daher, W. (2021). Middle school students' Motivation in solving modelling activities with technology. *EURASIA*, 17(9), 1-13. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>
- Díaz, M. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*(45), 33-41. http://sinewton.es/revista_numeros/045/
- Fernández, M. y Caballero, P. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: Fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1), 201-217. <https://doi.org/10.6018/reifop/20.1.229641>
- Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>
- Florensa, I., García, F. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de casos en distintos niveles educativos. *Avances de investigación en Educación Matemática*(17), 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Frejd, P. (2011). Mathematical modelling in upper secondary school in Sweden: an exploratory study. [Licentiate thesis. Linköping University]. <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:403178/COVER01.pdf>
- Frejd, P. (2013). An analysis of mathematical modelling in Swedish textbooks in upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(3), 59-93. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/18_3_059096_frejd.pdf
- GAISE College Report ASA Revision Committee. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education college report 2016*. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GaiseCollege_Full.pdf
- García, F., Gascón, J., Higuera, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 226-246. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F02652807.pdf>
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. México: McGraw-Hill.
- Ikeda, T. (2007). Possibilities for, and obstacles to teaching and applications and modeling in lower secondary levels. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 457-462). Springer.
- Jablonka, E. y Gellert, U. (2007). Mathematisation - demathematisation. En U. Gellert y E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: social, philosophical and educational ramifications* (pp. 1-18).
- Johansson, M. (2005). The mathematics textbook. From artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10(3-4), 43-64. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/10_34_043064_johansson.pdf
- Jung, H., Stehr, E. y He, J. (2019). Mathematical modeling oportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science and Mathematics*, 119(6), 353-365. <https://doi.org/10.1111/ssm.12359>
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302-310. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652813>
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. SAGE Publications.

- Krutikhina, M., Vlasova, V., Galushkin, A. y Pavlushin, A. (2018). Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), 1305-1315. <https://doi.org/10.29333/ejmste/83561>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Yoon, C. (2004). *What is distinctive in (Our Views about) Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving Learning and Teaching?* (H. Henn y W. Blum, Eds.) Springer.
- Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling works as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM Mathematics Education*, 54(1), 67-81. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016a). *Currículo de los niveles de Educación Obligatoria*. <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/Curriculo1.pdf>
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016b). *Matemática 8° grado. Texto del estudiante*. Editorial SMEcuadeciones.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016c). *Matemática 9° grado. Texto del estudiante*. Editorial SMEcuadeciones.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2020a). *Matemática 8 EGB - Subnivel Superior. Texto del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2020b). *Texto integrado 9 EGB - Subnivel Superior*. Editorial Don Bosco.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021a). *Texto Integrado 8 EGB - Subnivel Superior*. Universidad Andina Simón Bolívar.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021b). *Matemática 9 EGB - Subnivel Superior. Libro del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021c). *Matemática 10 EGB - Subnivel Superior. Texto del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021d). *Texto integrado 10 EGB - Subnivel Superior*. Universidad Andina Simón Bolívar.
- Montero, L. y Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares: cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona. <http://hdl.handle.net/11162/65448>
- Reys, B. J., Reys, R. R. y Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66. <https://bit.ly/39DuVQ8>
- Toalongo, X., Alsina, A., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>

- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, A. (En prensa). Una actividad de modelización matemática en educación primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Trelles, C. y Alsina, À. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/405>
- Trelles, C., Bravo, F. y Barraqueta, J. (2017). ¿Cómo Evaluar los Aprendizajes en Matemáticas? *INNOVA Research Journal*, 2(6), 35-51. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Trelles, C., Toalongo, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática* (102), 43-59. https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon102_4.pdf
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2323259>
- Valencia, A. y Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática*, 29(3), 51-78. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/02REM29-3.pdf>
- Vargas, V., Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Zwaneveld, B., Perrenet, J., Overveld van, K., & Borghuis, T. (2017). Mathematical modelling in dutch textbooks: is it genuine mathematical modelling? En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (503-514). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_42

Apéndice 1. Registro de codificación

Código	Características de la categoría	Número de actividad,página y nivel, de acuerdo con el libro de texto (octavo, noveno odécimo de EGB Superior)
(1) Ejercicios de reconocimiento	Enunciados que buscan únicamente recordar factores específicos como definiciones, conceptos o teoremas. Generalmente poseen un contexto únicamente intra-matemático.	
(2) Ejercicios algorítmicos y de repetición	Para su resolución se requiere únicamente un procedimiento algorítmico, la respuesta en muchas ocasiones es única y generalmente no poseen un contexto extra-matemático.	
(3) Problemas de traducción simple o compleja	Enunciados que brindan toda la información necesaria para resolverlos, requieren que se traduzca el enunciado generalmente del lenguaje común al lenguaje matemático, sin restringir la posibilidad de traducción en la dirección contraria. Pueden conllevar a relacionar diferentes tablas con sus respectivos gráficos.	
(4) Problemas de procesos	La forma de cálculo no está claramente delimitada, generalmente conllevan a una solución única y pueden o no poseer un contexto extra-matemático.	
(5) Problemas sobre situaciones reales	Enunciados que poseen un contexto extra-matemático y hacen uso de datos reales, generalmente poseen una solución única.	
(6) Investigación matemática	Enunciados que poseen un contexto estrictamente intra-matemático, son usuales las expresiones: probar que, demostrar que, etc.	
(7) Problemas de puzzles	Enunciados que poseen un enfoque lúdico y su contexto es generalmente intra-matemático.	
(8) Historias matemáticas	Enunciados como cuentos, historias, novelas, leyendas, etc., que presentan conceptos matemáticos.	
(9) Problemas de modelización matemática	Enunciados con contexto extra-matemático, que no presentan el total de los datos de forma explícita, son problemas abiertos, que obligana los estudiantes a realizar suposiciones y que permiten varias soluciones.	

4.3. Artículo 3:

Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(102), 43-59.

Índices de calidad de la revista: La revista Epsilon está indizada actualmente en Dialnet, DICE, Latindex y Carhus plus +

La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria

César Trelles-Zambrano

Universidad de Cuenca, Ecuador

Ximena Toalongo

Universidad de Girona, España

Ángel Alsina

Universidad de Girona, España

Neli Gonzáles

Universidad de Cuenca, Ecuador

Resumen: La modelización matemática como herramienta didáctica está cada vez más presente en los documentos curriculares de diferentes países, frente a ello surge la necesidad de dotar al profesorado de los conocimientos necesarios para poder llevarla a las aulas. Si bien son varias las propuestas y enfoques para poder ponerla en práctica, en este trabajo abordamos las actividades que generan modelos, también conocidas como Actividades Reveladoras de Pensamiento (Model-Eliciting Activities o MEAs, por sus siglas en inglés), presentando los aspectos más importantes que consideramos que el profesorado de Educación Secundaria debe conocer acerca de las mismas, así como algunos ejemplos para facilitar su aplicación, con el propósito de contribuir al desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

Palabras clave: Modelización matemática, Actividades Reveladoras de Pensamiento, práctica matemática, desarrollo profesional, Educación Secundaria.

The Mathematical Modelling through Model- Eliciting Activities: A proposal for the secondary classroom

Abstract: Mathematical modeling as a didactic tool is increasingly present in curricular documents from different countries, as opposed to the need to provide teachers with the necessary knowledge to be able to take it to the classroom. While there are several proposals and approaches to put it into practice, in this work we address the MEAs presenting the most important aspects that we consider that Secondary Education teachers should know about them, as well as some practical examples that can be applied, with the purpose of contributing to the professional development of mathematics teachers.

Keywords: Mathematical Modeling, Model-Eliciting Activities, Mathematical Practice, Professional Development, Secondary Education.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática en los planes de estudio de diferentes países ha cobrado especial protagonismo, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como dentro de la propia educación matemática (Trelles-Zambrano y Alsina, 2017). Para Kaiser, Blomøj y Sriraman (2006) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas.

En este sentido, reconocidas organizaciones a nivel mundial establecen en sus documentos, ya sea de forma explícita o implícita, la importancia que merece la modelización matemática en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Así, por ejemplo, para la Organization for Economic Cooperation and Development (OECD, 2017) la competencia matemática como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se considera que ello ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Además, una de las siete capacidades fundamentales de acuerdo al planteamiento de la OCDE tiene que ver con la matematización, en la que se indica que la competencia matemática implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática, lo que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo, o a su vez interpretar o evaluar un resultado o modelo matemático en relación con el problema original.

Por su parte el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) en *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar, describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el NCTM en sus diferentes documentos ha tenido siempre presente la importancia de la modelización matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje, asumiendo que un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Sin embargo, a pesar de lo dicho anteriormente, consideramos que aún falta por desarrollar y/o divulgar propuestas concretas de cómo el profesorado puede utilizar la modelización matemática como una herramienta didáctica que contribuya al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En este sentido, el presente trabajo pretende ser un aporte que permita llevar los planteamientos de la modelización matemática a las aulas.

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Hasta el momento no existe en la literatura un criterio unificado para definir la modelización matemática y su epistemología, por lo que es imprescindible elegir desde qué mirada se estudia este proceso. En nuestro caso reconocemos la modelización matemática desde una perspectiva

educacional ya que valoramos la importancia de la misma como estrategia didáctica. Para Kaiser y Sriraman (2006) la perspectiva educacional persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.

Si bien no existe una manera única para describir la modelización matemática, algunos autores realizan algunos aportes interesantes. La modelización matemática es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009). Hablar de modelización matemática en la enseñanza significa proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el fenómeno en cuestión mediante revisión, reflexión, aplicación y comunicación de resultados (Trigueros-Gaisman, 2006).

EL CICLO DE MODELIZACIÓN

Existe un consenso en la literatura de que la modelización matemática es un proceso no lineal, consecuentemente, varios son los autores (Carreira, Amado y Lecoq, 2011; Girnaty Eichler, 2011; Kaiser, 1995) entre otros, que han realizado planteamientos de que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos. Si bien las diferentes propuestas tienen características similares, en este trabajo asumimos el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) (figura 1).

Este planteamiento indica que a partir de la situación ocurrida en el mundo real (a) se trabaja para comprender el problema (1), este hecho genera un modelo conceptual en el pensamiento de los estudiantes. Simplificar y estructurar (2) hace referencia a identificar variables y/o condiciones que

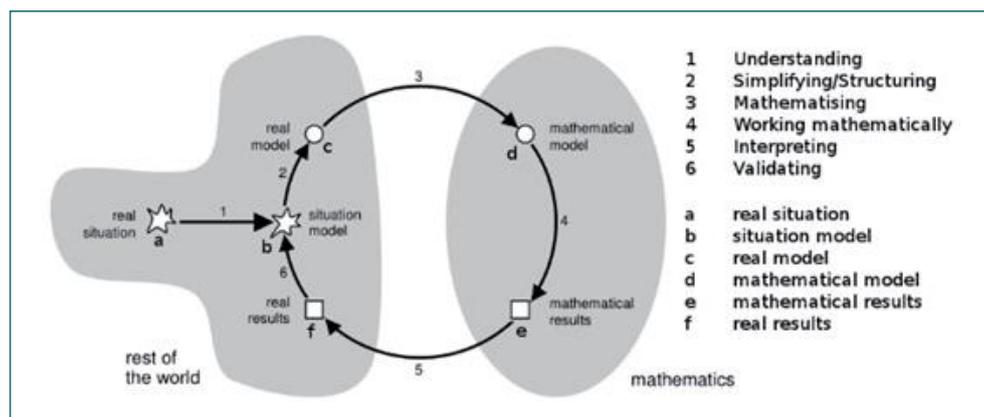


Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007).

conlleven a un modelo real (c). A través de la matematización (3) se llega al modelo matemático (d) el cual es una expresión en matemáticas formales de las relaciones existentes entre las variables, sin perder de vista las condiciones del problema. Luego se realiza un trabajo matemático (4) hasta conseguir resultados matemáticos (e) que luego serán interpretados (5) en términos de resultados reales (f) para seguidamente validarlos (6) comparándolos con el modelo conceptual (b).

Es importante resaltar que este proceso es no lineal y que en la práctica los estudiantes pueden ir de un punto a otro del esquema sin necesidad de seguir un orden establecido, precisamente ese camino de ida y vuelta les permitirá ir afinando el modelo buscado. Finalmente es importante que los estudiantes socialicen el modelo con sus compañeros, re-cojan las observaciones pertinentes y realicen los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar el modelo.

ACTIVIDADES QUE GENERAN MODELOS

Si bien son diferentes las propuestas para llevar a cabo los procesos de modelización matemática en las aulas (Albarracín, 2017; Ferrando y Navarro, 2015; Gallart, García- Raffi, Ferrando, 2019; Sierra-Galdón et al., 2011; Sol y Rosich, 2011) entre otros, consideramos importante explotar las bondades que presentan las actividades que propician modelos, también llamadas Actividades Reveladoras del Pensamiento, conocidas en la literatura como (MEAs) por sus siglas en inglés.

¿QUÉ SON LAS MODELING-ELICITING ACTIVITIES?

Las MEAs son actividades no tradicionales que, partiendo de una situación real, plantean problemas abiertos, desafiando a los estudiantes a construir un modelo con el objetivo de solucionar el problema (Lesh y Doerr, 2003; Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000).

Se emplean fundamentalmente con dos objetivos: 1) preparar el terreno necesario antes de la introducción de nuevos conceptos, y/o 2) fomentar en los estudiantes un aprendizaje más profundo que conlleve a transferir ese aprendizaje a otros contextos reales.

Estas actividades, desarrolladas fundamentalmente por Lesh y su equipo, tienen las siguientes características principales: se trabajan en grupos pequeños de estudiantes, de tres a cuatro como máximo, y pueden durar entre dos o tres sesiones de clase; en muchos de los casos se solicita a los estudiantes que mediante una carta brinden asesoría a una persona para resolver el problema en cuestión. En esta carta deben indicar como han llegado a la solución, porque es útil su planteamiento y cómo este podría servir incluso en otros contextos.

La puesta en marcha de la actividad consta de tres fases diferenciadas:

1. Realización de una lectura y contestación de preguntas guías: se sugiere que esta parte sea individual y que, preferentemente, se realice de forma previa a la clase (por ejemplo, en casa o bien en sesiones dedicadas a trabajo individual).
2. Socialización de las respuestas a la lectura en cada grupo de trabajo: el objetivo es que cada alumno escuche el planteamiento de sus compañeros y pueda considerar aspectos que a lo mejor no consideró en sus respuestas iniciales (duración aproximada 15 min). Luego se entrega la actividad en sí, y la función del maestro en esta parte es interactuar con cada grupo y observar detenidamente los procesos de pensamiento de los alumnos, ofreciendo ayudas solamente cuando sea necesario pero sin dar soluciones al problema.
3. Puesta en común de las soluciones de cada grupo: el maestro puede elegir al azar un miembro del grupo para que exponga la solución a la que han llegado. Después de haber escuchado las soluciones de sus compañeros, cada grupo puede re-finir sus modelos si así lo desean considerando aspectos que a lo mejor no fueron considerados previamente.

Un aspecto muy importante a considerar es que al tratarse de un problema abierto, este tipo de actividades no contienen respuestas únicas y por lo tanto todas las respuestas son válidas, simplemente algunas serán más eficientes que otras. La esencia de la actividad no es en sí la respuesta, lo más importante de todo es el proceso para llegar a la recomendación que se da al usuario mediante la carta. Se otorga también mucha importancia a la argumentación acerca de la validez del modelo.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS MEAs

Los seis principios fundamentales que deben cumplir este tipo de actividades (Lesh et al., 2000) son:

- Principio de construcción: Los problemas deben estar diseñados de tal forma que permitan la creación

de un modelo que utilice elementos, las relaciones y operaciones entre estos elementos, las reglas y patrones que rijan estas relaciones, los alumnos deben cuantificar, identificar patrones, hacer predicciones, etc.

- Principio de realidad: Los problemas deben ser pertinentes y relevantes para los estudiantes, preferentemente con datos reales o ligeramente modificados, se recomienda utilizar una lectura preparatoria con preguntas que acerquen a los alumnos al tema.
- Principio de autoevaluación: Conforme trabajan en la solución, los alumnos deben poder autoevaluarse determinando la utilidad de sus soluciones. El enunciado del problema debe indicar claramente ciertos criterios que permitan evaluar el grado de utilidad de una solución.
- Principio de documentación: Los alumnos deben poder documentar sus procesos de pensamiento dentro de su solución, los productos que generen deben mostrar objetos estadísticos o construcciones que fueron realizadas, así como las relaciones entre estos objetos y estas construcciones.
- Principio del prototipo efectivo: Se trata de que el modelo producido sea lo más simple posible pero matemáticamente significativo.
- Principio de generalización: Busca que las soluciones creadas por los estudiantes se puedan generalizar o al menos adaptarse fácilmente a otras situaciones o contextos.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES GENERADORAS DE MODELOS

Se presentan dos ejemplos de actividades que pueden ser directamente aplicadas en el aula. Para su diseño se han tenido en cuenta que se trate de situaciones que despierten el interés de los estudiantes, y despierte la necesidad de encontrar una respuesta.

Situación 1: Venta de coches

La figura 2 muestra la lectura introductoria para la primera actividad.

En la figura 3 se presentan las preguntas que permiten controlar la comprensión de la lectura anterior.

Y en la figura 4 se presenta el enunciado de la actividad de modelización.

Situación 2: las tarifas eléctricas

La figura 5, 6 y 7 muestran la lectura introductoria, las preguntas de comprensión y la segunda actividad de modelización respectivamente.

LAS VENTAS DE COCHES BAJAN EN TODO EL MUNDO POR PRIMERA VEZ EN 9 AÑOS

El pasado año fue convulso para la industria automovilística, lo que ocasionó una caída en las ventas. Sin embargo, aumentó la demanda de coches eléctricos.



Tensiones comerciales entre las grandes economías mundiales, cambios en la futura normativa de comercialización y circulación de vehículos en algunos países, nuevas maneras de entender la movilidad... 2018 ha marcado un “cambio en la tendencia de ventas de la industria automovilística en el mundo: por primera vez en 9 años, las matriculaciones de coches nuevos descendieron”.

En total, en 2018 se matricularon en el mundo 86 millones de unidades de turismos y vehículos comerciales ligeros, lo que se traduce en una caída del 0,5% en comparación con los datos de 2007, según Jato Dynamics, proveedor de información para el análisis de tendencias en el mercado automovilístico.

Los grandes mercados, los que menos coches venden

Las grandes economías mundiales han sido las que han reflejado las mayores caídas de ventas de coches. Así, China, el país en el que se comercializan más automóviles de todo el mundo, contabilizó 28,08 millones de turismos y vehículos comerciales ligeros vendidos; esta espectacular cifra, sin embargo, es un 2,8% inferior a la registrada en 2017.

Por su parte, Estados Unidos alcanzó los 20,86 millones de unidades de coches vendidos, un 0,2% menos que en 2017; Europa, 22,7 millones de unidades, Oriente Medio y África, un 1,1% menos; 10,6 millones de unidades en Asia-Pacífico, un 3,3% más; 5,1 millones de unidades en Japón, un 0,6% más; 4,3 millones de unidades en Sudamérica, un 7% más; y 1,7 millones de unidades en Corea del Sur, un 1,4% más.

Por fabricantes, Toyota, Volkswagen y Ford son los que ocupan los tres primeros puestos en número de vehículos vendidos en todo el mundo con 8,09; 6,7 y 5,3 millones de unidades comercializadas.”

Los vehículos eléctricos despegan en ventas

Jato Dynamics también ha destacado en su informe el espectacular avance en las ventas de coches eléctricos. En total en 2018 se matricularon 1,26 millones de unidades, un 74% más que en 2017. Estos excepcionales resultados se deben a tres factores: la alta demanda de vehículos eléctricos en China, la llegada del Tesla Model S a los mercados y la crisis de los motores Diesel en los mercados europeos.

Los países donde más se comercializaron coches eléctricos en 2018 fueron China (769.000 unidades), EE. UU. (209.000 unidades), Noruega (46.000 unidades), Alemania (35.000 unidades) y Francia (35.000 unidades). Tesla fue la marca más vendida a nivel mundial seguida de BAIC, BYD, Nissan y Zoyte. Y los modelos más demandados, el Tesla Model 3, BAIC EC, Nissan Leaf, Baojun E200 y Tesla Model S.

Fuente: <https://www.autopista.es/noticias-motor/articulo/ventas-coches-bajan-todo-mundo-primera-vez-9-años>

Figura 2. Noticia sobre la caída de las ventas de coches

VENTAS DE COCHES: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

2. ¿De qué forma ha impactado la utilización del coche en el día a día?

3. Al hablar de coches, ¿Qué marcas conoces?, ¿Tienes coche?, ¿Qué tipo y marca de coche tienes?

4. En caso de no tener coche, ¿Qué marca comprarías y por qué?

Figura 3. Preguntas guía

COMPRA DE COCHE: EL CASO DE MARC

Marc es un abogado que inició su carrera a partir de los 25 años y después de años de experiencia logró consolidarse en este ámbito laboral. Se casó y juntamente con su esposa compraron un piso a través del Banco. Los fines de semana viajan continuamente con su esposa a diferentes lugares de la zona y comparten diversas aficiones como los deportes de aventura y la playa. Pasado un tiempo deciden que van a tener hijos y su sorpresa es que tendrán gemelos. Ante esta situación, tendrán que comprar un coche que se adapte a su realidad.

Marc sabe que su hipoteca con el Banco es por 30 años, y que al pensar en un coche deberá analizarlo con cautela porque su esposa estará en paro por algún tiempo y sólo él aportará con la nómina en casa. Por ello ha buscado información en internet y ha elaborado la tabla que se muestra abajo, con las principales características que debería tener el coche en beneficio de él y su familia. El problema es que no sabe cómo hacerlo y pide vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de compra. Por otro lado, necesita que en esta carta generéis una estrategia que le permita añadir otros coches y de esta manera generalizar la idea que le permita optar por la mejor opción sin importar el número de coches que se añadan a la lista.

Desde ya Marc agradece vuestra ayuda, estará gustoso de leer y escuchar la explicación que podáis brindarle. Éxitos en vuestro trabajo.

Modelo	Consumo	Tipo de Combustible	Potencia	Maletero	Plazas	Precio
MazdaCX-5	5,0-7,1 L/100km	Gasolina	150-194CV	506-919 L	5	27270
Mitsubishi ASX	4,6-5,8 L/100km	Diésel	114-150CV	442-1219L	5	21700
Mercedes Clase A	3,9-7,3 L/100km	Gasolina	109-381CV	341-1210L	5	26525
Toyota Aygo	4,1-4,2 L/100km	Gasolina	72-72CV	168-198L	4	13190
Smart ForFour	0,0-4,3 L/100km	Eléctrico	71-90CV	185-975L	4	13325
Volkswagen Golf (215)	0,0-7,2 L/100km	Eléctrico/ Híbrido	102-310CV	272-1620L	5	20405

Fuente: Datos obtenidos de <https://www.autobild.es/coches>

Figura 4. Actividad de modelización matemática sobre coches.

EL IMPUESTO A LA GENERACIÓN ELÉCTRICA VUELVE Y LA FACTURA PO-DRÍA SUBIR 1 EURO

El Gobierno de España ha puesto fin a una de las medidas adoptadas para paliar el impacto del precio de la luz y es más que previsible que se produzca un repunte en el recibo, de en torno al 2 o 3 %.



La suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica del 7 %, una de las medidas adoptadas por el Gobierno de España para paliar el impacto del alza del precio de la luz en los consumidores, finaliza este lunes. La ministra para la Transición Ecológica, Teresa Ribera, ha estimado que el fin de la suspensión temporal podría suponer un alza de entre “dos o tres puntos porcentuales”, lo que representará un encarecimiento en el recibo de la luz de “entre 0,5 y 1 euro por familia”.

El Gobierno español, en su real decreto-ley 15/2018, de 5 de octubre del año pasado, de medidas urgentes para la transición energética y la protección de los consumidores, exoneraba del impuesto sobre el valor de la producción de la energía eléctrica a la electricidad producida e incorporada al sistema eléctrico durante el último trimestre de 2018 y el primero de 2019.

Con esta norma el Ejecutivo español daba respuesta al fuerte repunte en agosto del precio de la electricidad, que en septiembre se disparó a máximos anuales.

En el mercado mayorista de la electricidad, donde las empresas casan sus ofertas, el precio medio mensual en septiembre fue de 71,27 euros el megavatio hora (MWh), con un máximo diario de 75,93 euros/MWh alcanzado el 19 de septiembre.

El encarecimiento del precio de los derechos de emisión del dióxido de carbono (CO₂) y del gas natural y el carbón en los mercados internacionales fueron los principales causantes de la subida.

El Gobierno quiere en el futuro acabar totalmente con el impuesto a la generación eléctrica dentro de una reforma fiscal de la energía que ha estado preparando, descartando prorrogar su suspensión temporal en medio de una coyuntura preelectoral como la actual.

Fuente: <https://www.eitb.eus/es/noticias/economia/detalle/6306394/subida-electricidad-repunte-factura-luz-abril-2019/>

Figura 5. Noticia sobre las tarifas eléctricas.

IMPUESTOS A LA ELECTRICIDAD: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

2. ¿Qué creéis que sucederá una vez termine la suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica?

3. ¿Consideráis que las empresas y/o comercializadoras pueden realizar cualquier tipo de ofertas de energía sin importar el impacto que puedan generar en España?

4. ¿Por qué sería importante que se acabe de forma total con el impuesto a la generación eléctrica?, ¿Sería positivo o negativo este impacto en el presupuesto familiar, por qué?

Figura 6. Preguntas guía sobre los impuestos a la electricidad

¿QUÉ NOS CONVIENE?: EL CASO DE EMMA Y NEREA

Emma es una chica de 19 años que entrará a la universidad y como está lejos de su pueblo tendrá que mudarse a la ciudad donde funciona. Ella trabaja como dependienta en una tienda deropa de su pueblo y ha pedido traslado para una de las sucursales que la tienda tiene en la ciudad. Durante los últimos 5 meses ha ahorrado un poco de dinero, pero está preocupada de que este dinero no sea suficiente para su nueva vida.

Ha conversado con una amiga y ésta le ha contado que tiene una prima que estudia en la ciudad y que ahora mismo tiene una habitación disponible en el piso que alquila para que pueda vivir junto con ella y así compartir gastos. A Emma le parece una idea perfecta y contacta con ella para concretar el trato.

Han pasado ya 6 meses de que Emma comparte piso con Nerea, en este tiempo se ha dado cuenta que el precio de la electricidad es alto y que sus ahorros y su nómina le van muy justos. El piso es de 50m², cuenta con servicios básicos, tiene buena ventilación y está bien distribuido, tienen los electrodomésticos necesarios y no pasan mucho tiempo en el piso por razones de estudios y trabajo.

Emma ha conversado con Nerea y otros amigos para averiguar sobre las tarifas de luz y de esta forma no pagar demasiado, han buscado información en internet sobre compañías eléctricas (comercializadoras), para ello han elaborado una tabla con algunas características de luz. El problema es que no saben cómo elegir la mejor y piden vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de tarifa y empresa. Por otro lado, necesitan que en esta carta generéis una estrategia que les permitan añadir otras empresas y de esta manera generalizar la idea que les permita optar por la mejor opción sin importar el número de empresas que se añadan a la lista.

Desde ya Emma y Nerea agradecen vuestra ayuda, estarán gustosas de leer y escuchar la explicación que podáis brindaros. Éxitos en vuestro trabajo.

Empresa	Mercado	Tarifa	Precio energía	Precio potencia	Permanencia	Discriminación horaria
Endesa	Libre	One Luz	0.1255€/kWh	3.429€/ KW	Sí	Sí
Lucera	Libre	Mismo Precio 24h-2.0A	0.12700€/kWh- 0.1042€/KW/ Día	3.16€/kW	No	No
Iberdrola	Libre	Estable-2.0DHA	0.1443€/kWh- 0.1233€/kW/ día	3.50€/kW	No	Sí
EDP	Libre	Fórmula Luz-2.0A	0.1474€/kWh- 0.1152€/kW/ día	3.50€/kW	Sí	Sí
Holaluz	Libre	Tarifa sin sorpresas	0.1330€/kWh	3.170€/kW	No	Sí

Fuente: Datos obtenidos de <https://tarifaluzhora.es/comparador/tarifas-electricas>.

Figura 7. Actividad de modelización sobre tarifas de energía eléctrica.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Como elemento adicional, y considerando que al plantear este tipo de actividades en las aulas, en algunas ocasiones los modelos generados implican el uso de funciones, se propone usar el *software* Desmos, que entre sus principales ventajas destacan que es gratuito y además permite la posibilidad de observar en pantalla el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos según sea el caso. Es importante mencionar que el software permite trabajar además varios contenidos matemáticos como: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, cónicas, entre otros.

Como primer paso se debe crear una cuenta en la página <https://teacher.desmos.com/> tal como se aprecia en la figura 8.

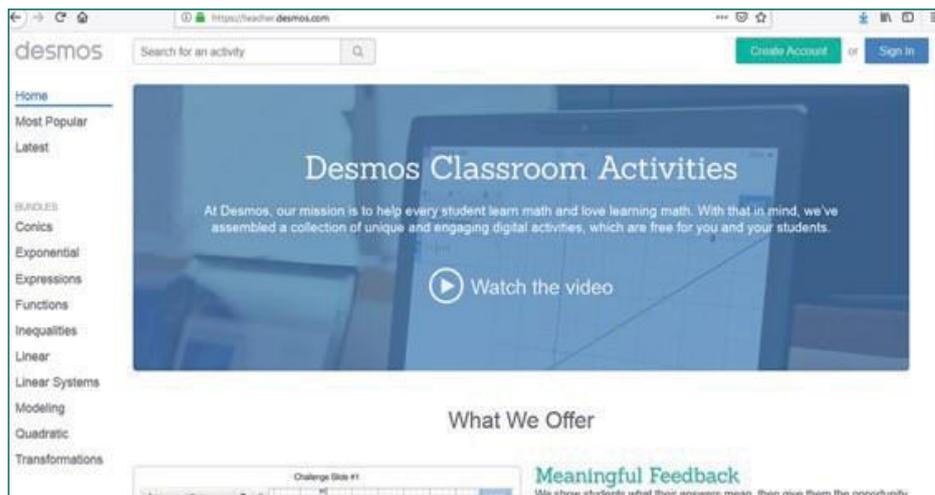


Figura 8. Página de inicio de Desmos.

Luego se puede crear una actividad dando clic primero en el botón *custom* y luego en el botón *New Activity*, tal como se presenta en la figura 9.



Figura 9. Página para crear actividades en desmos.

Después de agregar un título y de ingresar en las diferentes pantallas las instrucciones para los estudiantes, tenemos la posibilidad de generar un código de actividad, tal como se aprecia en la figura 10.



Figura 10. Generación de código de actividad en desmos.

El código generado les indicamos a nuestros estudiantes, los mismos que tienen que ingresarlo, (figura 11) accediendo a la página <https://student.desmos.com/>

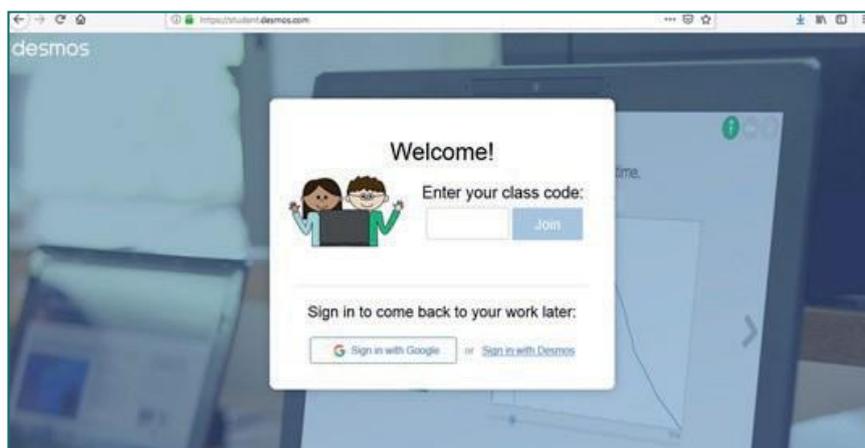


Figura 11. Página de ingreso del alumno con su código.

Y luego de seguir las instrucciones que nosotros ingresamos anteriormente, nos da la posibilidad de observar en una sola pantalla el trabajo de todos los estudiantes, tal como se ilustra en la figura 12. En esta pantalla, si se desea, existe la posibilidad como profesores de elegir la función anónima para que no se vea el nombre de cada estudiante, permitiéndonos de esta forma realizar tranquilamente una retroalimentación oportuna sobre el trabajo de cada uno y dándonos la posibilidad de aprender de los errores cometidos por cualquier alumno, así como de resaltar los aspectos

interesantes que se presenten, todo esto sin necesidad de que el grupo sepa a quien exactamente pertenece el trabajo.”

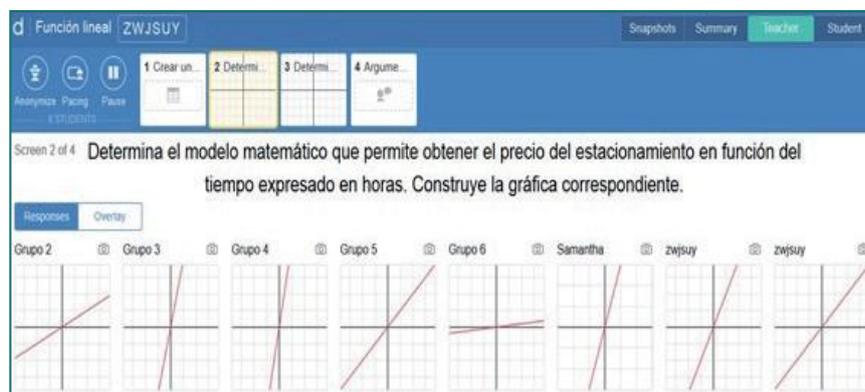


Figura 12. Pantalla de trabajo de toda la clase.

Es importante señalar que aquí se han presentado simplemente algunas de las funciones básicas del programa que podrían ser utilizadas en el proceso de modelización, sin embargo es preciso indicar que el programa tiene muchas funcionalidades que se pueden aprender más a fondo conforme se lo vaya utilizando, y brinda la posibilidad de acceder también a un repositorio de actividades ya creadas y a su vez alimentarlo con las que sean de nuestra propia autoría.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que algunos de los principales beneficios del trabajo sistemático de la modelización matemática es que permite acceder a conocimientos matemáticos que tienen un papel cada vez más importante tanto en múltiples aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como también dentro de la propia educación matemática, como por ejemplo formular, empleare interpretar las matemáticas en distintos contextos, usando de forma cada vez más eficaz el razonamiento matemático y conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.

A pesar de la importancia de la modelización, diversos estudios previos han puesto de manifiesto que una parte considerable del profesorado tiene conocimientos escasos sobre cómo fomentar este proceso matemático en los alumnos de 12 a 16 años. Así, pues, con el propósito de favorecer el desarrollo profesional del profesorado, se ha descrito y ejemplificado un recurso didáctico para trabajar la modelización matemática en el aula de Educación Secundaria Obligatoria: las Actividades Reveladoras de Pensamiento (*Modeling-Eliciting Activities* o *MEAs*, por sus siglas en inglés), que se fundamentan en los siguientes seis principios: de construcción, de realidad, de autoevaluación, de documentación, de prototipo efectivo y de generalización. La incorporación sistemática de estas actividades, con el apoyo de *software* educativos como por ejemplo el Desmos, que permite observar el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos de trabajo, puede contribuir a que progresivamente los alumnos usen representaciones que les permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. Recuperado el 10 de marzo de 2019 de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/7707/8120>
- Bliss, K., y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7–21). Philadelphia.
- Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620/1087>
- Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Edits.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1ra. ed., págs. 222-231). Chichester.
- Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 199-210). New York: Springer.
- Ferrando-Palomares, I., y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3681/4171>
- Gallart, C., García-Raffi, L., y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71- 86. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/10955/11035>
- Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 75-84). New York: Springer.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und. En G. Graumann, et al. (Edits.), *Materialien für einen realitätsbezogenen* (págs. 64-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kaiser, G., Blomøj, M., y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85.
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh, y H. M. Doerr (Edits.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 3-34). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly, y R. Lesh (Edits.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (págs. 591-645). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Organization for Economic Cooperation and Development. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*. Paris: OECD. doi:<http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., Garcia-Raffi, L. M., y Gómez Urgellés, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado

- el 20 de marzo de 2019, de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf
- Sol, M., Giménez, J., y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3100/3196>
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://www.comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/article/view/732/732>
- Trelles-Zambrano, C., y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (51), 140-163. Recuperado el 2 de marzo de 2109, de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/07.pdf>.

4.4. Artículo 4:

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, A. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>

Índices de calidad de la revista: La revista Enseñanza de las Ciencias está indizada en Web of Science (SSCI), Scopus, Dialnet, FECYT, etc. Revista con factor de impacto (2021): 1.217 de acuerdo al Journal Citation Reports y CiteScore (2021): 1.8 de acuerdo a Scopus.

Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19



A Mathematical Modeling Activity in Elementary School with Authentic Data about COVID-19

César Trelles

Universidad de Cuenca, Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, Ciudadela Universitaria, 010710, Cuenca (Ecuador).
cesar.trellez@ucuenca.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-4096-8353>

Ximena Toalongo, Ángel Alsina

Universitat de Girona, Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental, Plaça Sant Domènec, 9 - 17004, Girona (España)
ximena.toalongo@udg.edu, angel.alsina@udg.edu
<https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>, <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

RESUMEN • El objetivo de este estudio es analizar una tarea de modelización matemática desarrollada por alumnos de sexto curso de educación primaria (11-12 años) a partir de una actividad reveladora del pensamiento con datos estadísticos reales de la COVID-19, implementada en línea durante el período de confinamiento en España. A partir de un estudio de caso múltiple, se analizan los productos finales generados por los alumnos. Los resultados muestran que, si bien no todo el alumnado logra desarrollar un modelo, los que sí lo hacen son capaces de emplear conceptos intuitivos de estadística y probabilidad que están fuera del plan regular de estudios. Se concluye que estas actividades desarrollan las capacidades matemáticas, pero requieren conocimiento pedagógico para incorporarlas frecuentemente y con éxito a la práctica docente.

PALABRAS CLAVE: Modelización matemática; Actividades relevadoras del pensamiento; Educación primaria; Educación estadística; Transnumeración.

ABSTRACT • The aim of this study is to analyze a mathematical modeling task developed by students in the sixth grade of primary education (11-12 years old) based on a model-eliciting activity with real statistical data about COVID-19, which was implemented online during the period of confinement in Spain. Based on a multiple case study, the final products generated by the students are analyzed. The results show that, although not all students are able to develop a model, those who do are able to use intuitive concepts of statistics and probability that are outside the regular curriculum. It is concluded that these activities develop mathematical skills but require pedagogical knowledge to incorporate them frequently and successfully into teaching practice.

KEYWORDS: Mathematical modeling; Model-eliciting activities; Primary education; Statistical education; Transnumeration.

Recepción: noviembre 2020 • Aceptación: septiembre 2021 • Publicación: junio 2022

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 193-213.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>

INTRODUCCIÓN

La presencia cada vez más notable de la modelización matemática en los diferentes planes de estudio a nivel internacional se debe a la importancia que actualmente se da a la conexión entre los conocimientos matemáticos y las situaciones de la vida real. Sin embargo, a pesar de existir cada vez más literatura que permite indagar y conocer el proceso de modelización matemática (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009; Wess y Greefrath, 2019), también es cierto que los currículos vigentes en muchos países no ofrecen orientaciones claras que permitan al profesorado la implementación de la modelización matemática en el aula y la forma en que debe evaluarse (Trelles y Alsina, 2017). Por otro lado, algunos estudios como los de Blum y Leiß (2006) y Ng (2013) revelan que tanto la formación del profesorado como sus creencias pueden convertirse en un obstáculo para desarrollar actividades de modelización con sus alumnos.

Si bien algunos documentos curriculares (NCTM, 2000; National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010) plantean el uso de la modelización desde las primeras edades, tanto la investigación que aporta evidencias de cómo se desarrollan los procesos de modelización en estas etapas como las propuestas que permitan implementarla son todavía limitadas, a pesar de que la construcción de saberes, sobre todo en las primeras edades, se fundamenta en lo concreto, partiendo del entorno del alumnado y su realidad. En efecto, la mayor parte de las investigaciones y propuestas están focalizadas en educación superior, bachillerato e incluso educación secundaria, como, por ejemplo: Barquero et al. (2014), Hernandez-Martínez y Vos (2018), Sol et al. (2011) y Trelles et al. (2019), por citar algunos.

En este contexto, es necesario diseñar estudios que contribuyan a la literatura con evidencias de cómo se desarrollan los procesos de modelización en las primeras edades, en la línea ya iniciada por autores como Albarracín y Gorgorió (2020), English (2006, 2010, 2014), English y Watson (2018) y Ruiz-Higueras et al. (2013), entre otros; lo que contribuye de esta forma no solo a la comunidad científica, sino también al profesorado de estos niveles educativos. Desde este prisma, el objetivo de este estudio es analizar una actividad de modelización matemática diseñada y aplicada en el contexto de confinamiento ocasionado por la COVID-19. La actividad fue creada con datos reales a partir del planteamiento de las Model-eliciting Activities MEAs (Lesh y Doerr, 2003; Lesh et al., 2000) y propuesta a un grupo de alumnos de 11-12 años de educación primaria, quienes como resultado final debían realizar una predicción del número de contagios y defunciones a causa de la COVID-19 en Cataluña (España).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Educación en tiempos de la COVID-19

A raíz del estado de alarma decretado el 14 de marzo de 2020 en España, la educación fue uno de los sectores más afectados, ya que las instituciones educativas debieron cerrar sus puertas para evitar la propagación de la COVID-19. Según Cifuentes-Faura (2020), la inasistencia del alumnado a las escuelas debido al cierre temporal a causa de la COVID-19 tendrá un impacto en el derecho a una educación igual e incluyente para todos, lo que aumentará las desigualdades en los resultados educativos y producirá una brecha especialmente en las aptitudes matemáticas y de alfabetización entre el alumnado de niveles socioeconómicos diferentes.

Por su parte, el Banco Mundial (2020) manifiesta que la calidad educativa se verá afectada y disminuirá notablemente durante este período de confinamiento. En este contexto, consideramos imperante garantizar el derecho a la educación a todo el alumnado, aun cuando en algunos casos las

condiciones sean adversas, pues según el Instituto Nacional de Estadística (INE, 2019) en el 19,1 % de las viviendas no existe ordenador, *netbook* o *tablet*. Además, EU Kids Online (2018) indica que el 8 % de los niños no disponen de acceso a internet desde sus hogares. Este escenario pone de manifiesto las grandes dificultades que tienen que atravesar algunos alumnos para integrarse en un sistema educativo virtual. Por lo expuesto, las políticas educativas que se tomen deben considerar estas realidades y generar propuestas alternativas para garantizar que la educación llegue a todo el alumnado. Por su parte, la Unesco (2020) indica que el personal docente debe propender a que el material que se presente en línea sea atractivo, que las indicaciones sean sencillas y que los tiempos de realización no sean ajustados, así como generar actividades que motiven la participación y cuyas temáticas estén vinculadas a los intereses del alumnado mediante planteamientos de problemas que le permitan establecer relaciones y aplicarlos a situaciones reales.

La modelización matemática y su presencia en los primeros niveles escolares

Actualmente, no existe unicidad de criterio en la comunidad científica para definir la modelización matemática. Sin embargo, diversos autores proporcionan importantes aportes, a menudo complementarios; para Alsina et al. (2007), la modelización matemática se refiere al proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático, lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. Borromeo (2010) y Blum (2015) manifiestan que puede ser entendida simplificada como un proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. La modelización matemática es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009).

Cuando la modelización se realiza a partir de datos estadísticos existen algunas propuestas teóricas que permiten analizar estos procesos. En este estudio asumimos los planteamientos de Makar y Rubin (2009) y Watson y English (2015) en el sentido de entender la modelización con datos como un proceso que involucra un razonamiento estadístico integral que se basa en contextos, preguntas y conceptos matemáticos y estadísticos. Además, los modelos producidos deben estar respaldados por la evidencia y abiertos al pensamiento inferencial informal, el cual debe incluir el reconocimiento de la incertidumbre en las creaciones y aplicaciones de modelos que surgen de la variación debida al azar.

English y Watson (2018) proponen considerar cuatro aspectos centrales: 1) interacciones entre las matemáticas y la estadística a través de la modelización con datos, basándose en la matematización horizontal y vertical, y en la transnumeración, entendiéndose esta última como el papel específico que juega el contexto a lo largo de una investigación estadística, en la que se buscan diferentes enfoques para encontrar y transmitir significado en los datos; 2) interpretar y reinterpretar contextos y preguntas problemáticas, entendiéndose que los datos son números dentro de un contexto y que este contexto a su vez proporciona significado a los datos; 3) interpretar, organizar y operar con datos en la construcción de modelos: se trata de que el alumnado identifique y priorice variables, reconozca características estadísticas y aplique operaciones matemáticas y estadísticas; y 4) hacer inferencias informales: es importante que el alumnado se involucre en la inferencia informal como un aspecto fundamental de la alfabetización estadística.

En lo que se refiere a investigaciones que aporten evidencia científica acerca de los procesos de modelización en las primeras edades, los estudios de English (2006, 2010, 2014) sugieren que el aprendizaje de la matemática basado en procesos de modelización requiere que los niños generen y desarrollen sus propias ideas y procesos matemáticos, formando sistemas de relaciones generalizables y reutilizables. Los resultados muestran cómo los niños pueden desarrollar de forma independiente

construcciones y procesos a través de la resolución significativa de problemas. Además, concluyen que los procesos de modelización matemática constituyen grandes oportunidades para la construcción de saberes en los alumnos y que estos aprendizajes incluso van más allá de lo que estipulan los planes de estudio.

En esta línea, English y Watters (2005) realizaron un estudio longitudinal a lo largo de tres años con niños de 8 años que les permitió afirmar que los problemas de modelización fomentan y revelan el pensamiento matemático de los niños.

English y Watson (2018), en su trabajo con alumnado de sexto curso de primaria, sugieren que la modelización matemática facilita la interpretación, organización y operación de datos a través de inferencias informales. Sus resultados evidencian que no solo se generan modelos para resolver una situación, sino que a su vez se reconocen las limitaciones que genera la creación del modelo y su aplicación. Además, manifiestan que en educación primaria por lo general no se da la oportunidad al alumnado de vincular su aprendizaje matemático con problemas que involucran datos complejos.

Chan (2010), en un estudio con alumnos de sexto de primaria, encontró que los modelos desarrollados por los alumnos revelan las formas en que organizan las cantidades y variables, y a su vez inciden en su capacidad de interpretar, analizar, explicar, formular hipótesis, conjeturar, comparar y justificar.

Albarracín y Gorgorió (2020) trabajaron con alumnos de sexto curso de educación primaria en un proyecto orientado a generar impacto social, el mismo que fue diseñado a partir de las necesidades de los niños de la escuela y bajo los enfoques teóricos de la modelización matemática; estos autores indican que el alumnado, para enfrentarse a este tipo de actividades, tiene que hacer uso de varios contenidos y habilidades matemáticas, y también enfatizan la importancia de la capacitación del profesorado para gestionar estas actividades.

Por lo expuesto, podemos señalar que la literatura existente hasta el momento sugiere que las actividades de modelización constituyen una gran oportunidad para que los alumnos alcancen aprendizajes que van incluso más allá de lo contemplado en los planes de estudio.

Actividades reveladoras del pensamiento –*model-eliciting activities*– o MEA, por sus siglas en inglés

Como se ha indicado, no existe unicidad de criterio en la comunidad científica para definir la modelización matemática; consecuentemente, existen diversas propuestas para implementarla en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como las de Albarracín (2017), Ferrando y Navarro (2015), Gallart et al. (2019), Sol et al. (2011) y Trelles et al. (2019), entre otras. En este artículo asumimos el planteamiento de las *model-eliciting activities* (MEA), propuesto inicialmente por Lesh y Doerr (2003) y Lesh et al. (2000). Estas actividades tienen la principal característica de ser lo suficientemente abiertas, desafiando al alumnado a generar un modelo con el objetivo de resolver un problema concreto. Las MEA se basan en seis principios fundamentales: 1) construcción, 2) realidad, 3) autoevaluación, 4) de documentación, 5) prototipo efectivo y 6) generalización (Lesh et al., 2000).

Además de cumplir con estos principios, estas actividades generalmente poseen las siguientes características: se trabajan en grupos reducidos de máximo cuatro alumnos, pueden durar entre dos o tres sesiones de clase, y habitualmente se solicita al alumnado que mediante una carta ofrezcan asesoría a una o varias personas que están interesadas en la solución del problema, en la que deben explicitar los procesos utilizados para llegar a la solución y argumentar por qué la consideran útil, además de explicar cómo esta puede ser empleada en otros contextos.

Otra característica de estas actividades es que, al tratarse de problemas abiertos, no admiten una respuesta única. Lo más importante no es la respuesta, sino el proceso utilizado para obtenerla; por tanto, no existen respuestas incorrectas, sino simplemente algunas más eficaces que otras, en función

de las suposiciones planteadas por el alumnado y de sus razonamientos. Considerando estos antecedentes, nuestro objetivo consiste en describir y analizar los modelos generados por un grupo de siete alumnos (11-12 años) a partir de los datos proporcionados a través de una actividad de modelización matemática diseñada y aplicada en el contexto de confinamiento ocasionado por la COVID-19.

METODOLOGÍA

Se ha diseñado un estudio de caso múltiple (Gundermann-Kröll, 2013; McMillan y Schumacher, 2005; Yin, 2018) para describir y analizar los modelos generados por un grupo de alumnos de 11-12 años, lo que nos permite explorar más de una unidad de análisis proporcionando las bases para la generalización (Rule y John, 2015); de acuerdo con estos autores, indagar más de un caso aporta criterios de validez interna, externa y confiabilidad a los datos.

Participantes

La actividad de modelización matemática fue planteada a los dos grupos de sexto año de educación primaria de una escuela pública de la ciudad de Girona (España) a la cual asiste alumnado mayoritariamente perteneciente a un nivel socioeconómico medio; en total, 48 alumnos recibieron la actividad. Sin embargo, solo siete alumnos la desarrollaron completamente: tres niños (2 de 11 años y 1 de 12 años) y cuatro niñas (una de 11 años y tres de 12 años). Dos alumnos y una alumna tienen un rendimiento académico sobresaliente en la asignatura de Matemáticas; los cuatro alumnos restantes presentan un rendimiento académico notable. Además, tres de los alumnos sobresalen con frecuencia en el manejo de recursos informáticos y tienen facilidad para el manejo de las principales herramientas de Microsoft Office. Los alumnos no tenían experiencia previa en la realización de actividades de modelización matemática, debido en gran parte a que el currículo no contempla explícitamente la formulación de este tipo de actividades.

Diseño e implementación de la actividad

La actividad fue diseñada por el equipo investigador bajo el posicionamiento teórico de las actividades reveladoras del pensamiento (MEA). La actividad consiste en proponer al alumnado que realice una predicción del número de contagios y defunciones que existirán en Cataluña (España) a fecha de 30 de junio de 2020, como consecuencia de la COVID-19 a partir de datos reales, suministrados en forma de tabla y tomados de la página web del Instituto de Estadística de Cataluña (2020), con corte a fecha de 3 de junio. A pesar de la presencia de datos no disponibles en la tabla, intencionalmente se consideró mantenerlos (véase material complementario¹), con el propósito de que el alumnado tomara decisiones acerca de con qué datos trabajar.

Los alumnos, mediante una carta de media página de extensión mínima, y sin extensión máxima, debían explicar con detalle cómo obtienen el pronóstico. Se les pedía, particularmente, que justificaran todas las suposiciones y cálculos realizados, y se les indicó explícitamente que podían utilizar todos los conocimientos aprendidos en clase, así como diagramas, gráficos estadísticos, etc. Además, debían reflexionar y comunicar si el procedimiento propuesto es aplicable a otras poblaciones.

La literatura recomienda que las actividades de modelización deben ser desarrolladas por pequeños grupos de alumnos. Sin embargo, se propuso la actividad de forma individual, ya que, por motivo del

1. <https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/20529>

confinamiento, el sistema educativo pasó a una modalidad virtual. Si bien consideramos que esta situación no constituye un total impedimento para el trabajo grupal, es importante mencionar que, en esta circunstancia, en la que el alumnado tuvo que adaptarse abruptamente a la nueva modalidad, se decidió que lo más conveniente era llevarla a cabo individualmente.

La actividad fue entregada a los alumnos en fecha de 5 de junio de 2020, mediante la plataforma Google Classroom con la que trabaja la escuela, donde se indicaba que disponían de siete días para cumplirla. Durante la actividad, las maestras indicaron a los alumnos que podían realizar todas las consultas que necesitasen para desarrollarla y así entregar la carta como producto final, e insistieron en la importancia de realizar la actividad de forma autónoma.

Cumpliendo con las indicaciones de la actividad, los siete alumnos realizaron al menos una consulta a las maestras, cuatro de ellos realizaron varias preguntas durante el proceso. Las preguntas estuvieron enfocadas en los siguientes aspectos: obligación o no de utilizar todos los datos de la tabla A1, la existencia de algún método específico para realizar la actividad, la posibilidad de utilizar programas como Microsoft Excel, cómo acceder a datos de otras poblaciones, qué significa «Dato no disponible» en la tabla A1.

Las maestras, al recibir las preguntas inmediatamente, las enviaban al equipo investigador, que aportaba respuestas orientativas. Las respuestas estuvieron centradas en aclarar términos para una mejor comprensión de la actividad y hacer hincapié en que el uso de cualquier procedimiento o recurso es considerado válido siempre que cuente con la respectiva argumentación. El principal medio de comunicación utilizado entre las maestras y el alumnado fue el correo electrónico y la plataforma Google Classroom, mientras que entre las maestras y el equipo investigador fue el correo electrónico y el teléfono móvil. Es importante indicar que tanto el alumnado como las maestras no tenían experiencia previa en el desarrollo de este tipo de actividades.

Análisis de datos

La actividad planteada pretendía propiciar en los alumnos procesos de modelización matemática a partir de la situación propuesta. La carta que constituía el producto final de la actividad tenía por objetivo recabar los procesos desarrollados por el alumnado; por tanto, los datos que se analizan provienen de esta fuente.

Como se ha indicado, la actividad fue planteada a 48 alumnos, pero tan solo 7 la desarrollaron completamente y llegaron a entregar la carta. De los 41 alumnos restantes, 23 contestaron únicamente las preguntas introductorias, las cuales no han sido consideradas, ya que no forman parte medular del estudio, pues tenían la única intención de ofrecer una pequeña introducción al problema, y 18 alumnos no contestaron ni siquiera este apartado. La poca participación del alumnado, aunque en su totalidad contaba con los recursos tecnológicos necesarios para las clases en línea, puede estar influenciada, a modo de conjetura, por la falta de experiencia en el desarrollo de este tipo de actividades y/o el incumplimiento de tareas como consecuencia del confinamiento. No obstante, las siete cartas recopiladas contienen elementos interesantes que merecieron un análisis.

Los datos han sido estudiados mediante un análisis de contenido (López-Noguero, 2002), realizado por separado por los autores, con el propósito de identificar, clasificar y categorizar todos los datos registrados en el modelo elaborado por los alumnos. Se ha aplicado un análisis inductivo en la identificación inicial de patrones y categorías de respuestas, concretamente se realizaron varios ciclos de análisis a cada una de las cartas. A partir de este análisis, y en correspondencia con la fundamentación teórica, se obtuvieron las siguientes categorías: a) Interpretación de datos: esta categoría responde a cómo los alumnos interpretan los datos que les fueron proporcionados en forma de tabla, si los interpretan como datos acumulados y si consideran el contexto para interpretarlos; b)

Organización y operación de datos: esta categoría expone el cómo y mediante qué recursos los alumnos representan los datos, así como los procesos matemáticos que utilizan para trabajar con ellos, y c) Inferencias informales: esta categoría explica las reflexiones que realizan los alumnos acerca de la validez del modelo en otras poblaciones. Hubo un acuerdo del 90 % entre los codificadores en los aspectos mencionados. Cuando surgieron diferencias se llegó a un consenso mediante un nuevo análisis. Los alumnos participantes han sido codificados como A1, A2, A3, ..., A7.

RESULTADOS

La actividad fue implementada en catalán; sin embargo, para una mejor comprensión del artículo, los datos aquí presentados han sido traducidos al español.

Interpretación de datos realizada por el alumnado

Los datos proporcionados al alumnado en forma de tabla (véase material complementario) estaban organizados en cuatro columnas, si bien algunos datos no estaban disponibles; este es un primer conflicto al que debieron enfrentarse, pues debían interpretar el contexto en el que se presentaban y decidir qué datos trabajar.

Para la predicción de contagios, todos los alumnos utilizan únicamente los casos confirmados, omitiendo las demás columnas sin justificar su decisión, a excepción de A7 que manifiesta: «Únicamente he trabajado con los casos confirmados ya que son reales».

Seis alumnos interpretan los casos confirmados como datos acumulados; solamente A1 interpreta que cada uno de estos datos representa el número de nuevos contagios en su fecha correspondiente: «los casos van aumentando día tras día llegando a casi 2 000 000 en mayo». Esta visión sugiere que A1 interpreta los datos sin considerar el contexto, pues no contrasta su razonamiento con lo que sucede en la realidad.

A3 interpreta los datos como un histórico que cumple ciertas características: «el intervalo de datos, en este caso diario, es completo, homogéneo y coherente, esto hace que la previsión se pueda hacer mejor y tenga un resultado más preciso y fiable».

A4 considera que los datos del mes de febrero son incompletos –en comparación con los otros meses, en febrero se dispone de datos solo a partir de la última semana– y no son útiles para generar un modelo:

En primer lugar, haremos una tabla de 4x4 donde inicialmente pondremos los contagiados del día 1 y del 30/31 de marzo, abril y mayo, (febrero no ya que los datos proporcionados no son completos) para saber cuántos contagiados ha habido realmente en cada mes por individual.

Seis alumnos representan los datos mediante gráficos para tener una mejor comprensión de estos, lo que demuestra claramente un proceso de transnumeración (Chick, 2004); por ejemplo, A6 manifiesta:

...en relación con los casos confirmados, se mantienen por debajo de las 10.000 personas hasta finales de marzo con un crecimiento suave tal y como se puede ver en el gráfico 1. A partir de la última semana de marzo se inicia un crecimiento de los casos, y en solo seis días se duplican los contagios de todo el mes de abril hasta aproximadamente el 11 de mayo, y a partir de entonces los casos se suavizan con un crecimiento moderado hasta inicios de junio, cuando ya no disponemos de más datos.

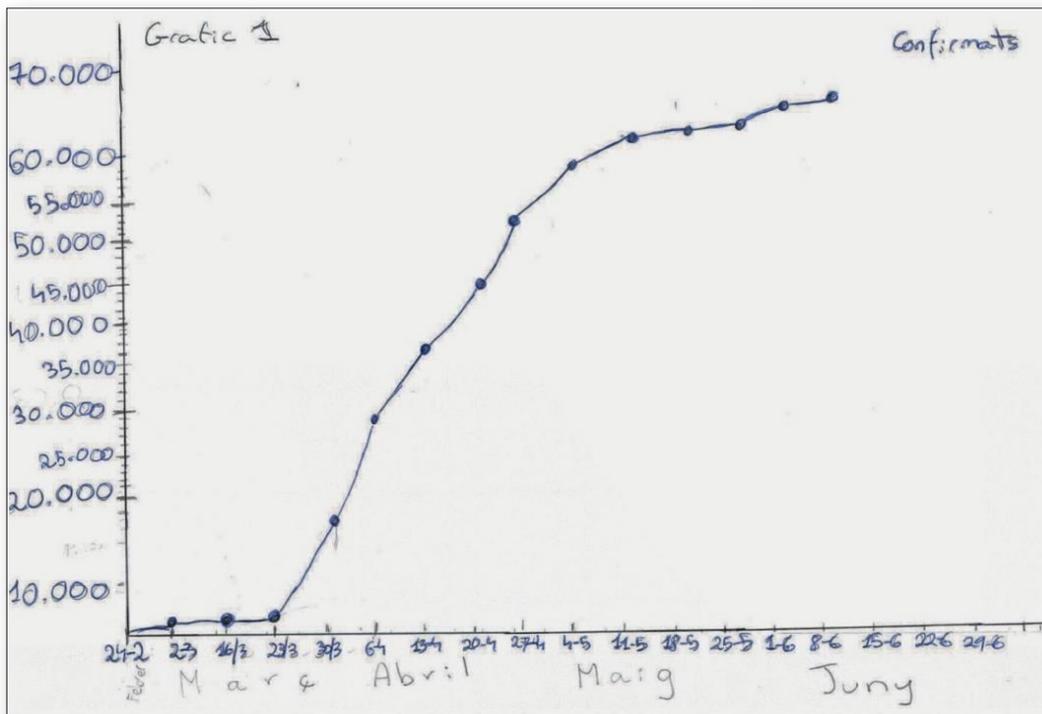


Fig. 1. Gráfico de número de casos confirmados por A6.

Por su parte, A5 indica: «he hecho unos gráficos generales para ver cómo iban las defunciones y los casos confirmados».

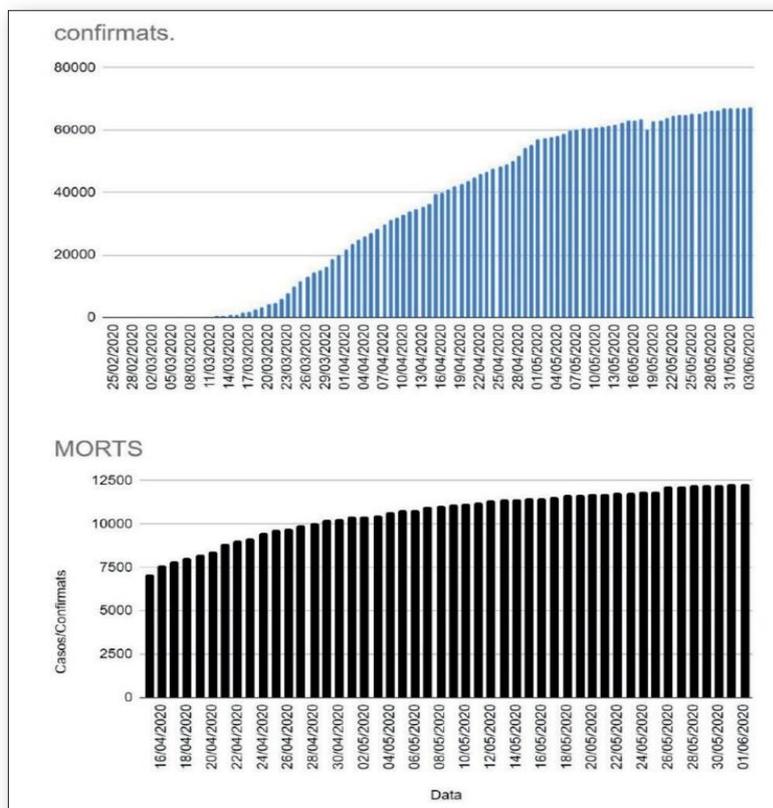


Fig. 2. Representación gráfica de los datos elaborada por A5.

Organización y operación de datos desarrollada por el alumnado

A4, A5 y A7 crean nuevas columnas. A4 crea una en la que registra el número de contagios por mes, exceptuando febrero; para ello resta el número de contagios del último día con los del primero de cada mes.

MESOS	DIA 1	DIA 30	TOTAL
Maig	57.093	67.060	9.967
Abril	21.804	55137	33.333
Març	14	19.991	19.977

Fig. 3. Número de contagios por mes, calculado por A4.

Después divide el valor del mes de abril entre el mes de mayo. Como existe un decrecimiento de contagios de abril a mayo, supone que el decrecimiento continuará hacia el mes de junio y utiliza el cociente anteriormente calculado para hallar el número solicitado de contagios.

... tendremos que dividir la cifra total de los últimos 2 meses, es decir, abril y mayo ($33333 \div 9967$) para saber cuánto ha disminuido el número de casos (3,34). Por lo tanto, y dado que está previsto que el número de contagios y muertes se reduzca, tendremos que dividir finalmente 9967 (el total de contagiados de sólo el mes de mayo) entre 3,34 (el decimal que indica la bajada de casos) para saber «máxima» y aproximadamente el número total previsto de contagios a junio del 2020 ($9967 \div 3,34 = 2984$).

Utiliza el mismo procedimiento para determinar el número de defunciones; si bien es consciente de que los datos del mes de abril son incompletos, su procedimiento demuestra que este aspecto no es relevante para realizar la predicción.

MESOS	DIA 1/ 15	DIA 30	TOTAL
Maig	10.401	12.280	1.879
Abril	7.097	10.311	3.214

$$(3.214 \div 1.879 = 1'7) (1.879 \div 1,7 = \mathbf{1.105})$$

Fig. 4. Número de defunciones por mes, calculado por A4.

Es importante indicar que los valores obtenidos por A4 tanto de contagios como de defunciones corresponden únicamente al mes de junio.

A5 y A7 crean dos nuevas columnas para registrar el número de nuevos casos diarios confirmados y el aumento de muertes diarias; a manera de ejemplo, se presenta un fragmento de la tabla creada por A5.

Data	Casos				Defuncions de casos confirmats o sospitosos	Augment de morts diaris
	Confirmats	nous confirmats diaris	Possibles	Total		
03/06/2020	67461	228	Dada no disponible	Dada no disponible	12333	10
02/06/2020	67233	150	Dada no disponible	Dada no disponible	12323	34
01/06/2020	67083	23	Dada no disponible	Dada no disponible	12289	9
31/05/2020	67060	156	Dada no disponible	Dada no disponible	12280	11

Fig. 5. Fragmento de la tabla elaborada por A5

A5, con los valores de nuevos casos por día, genera dos nuevos gráficos.

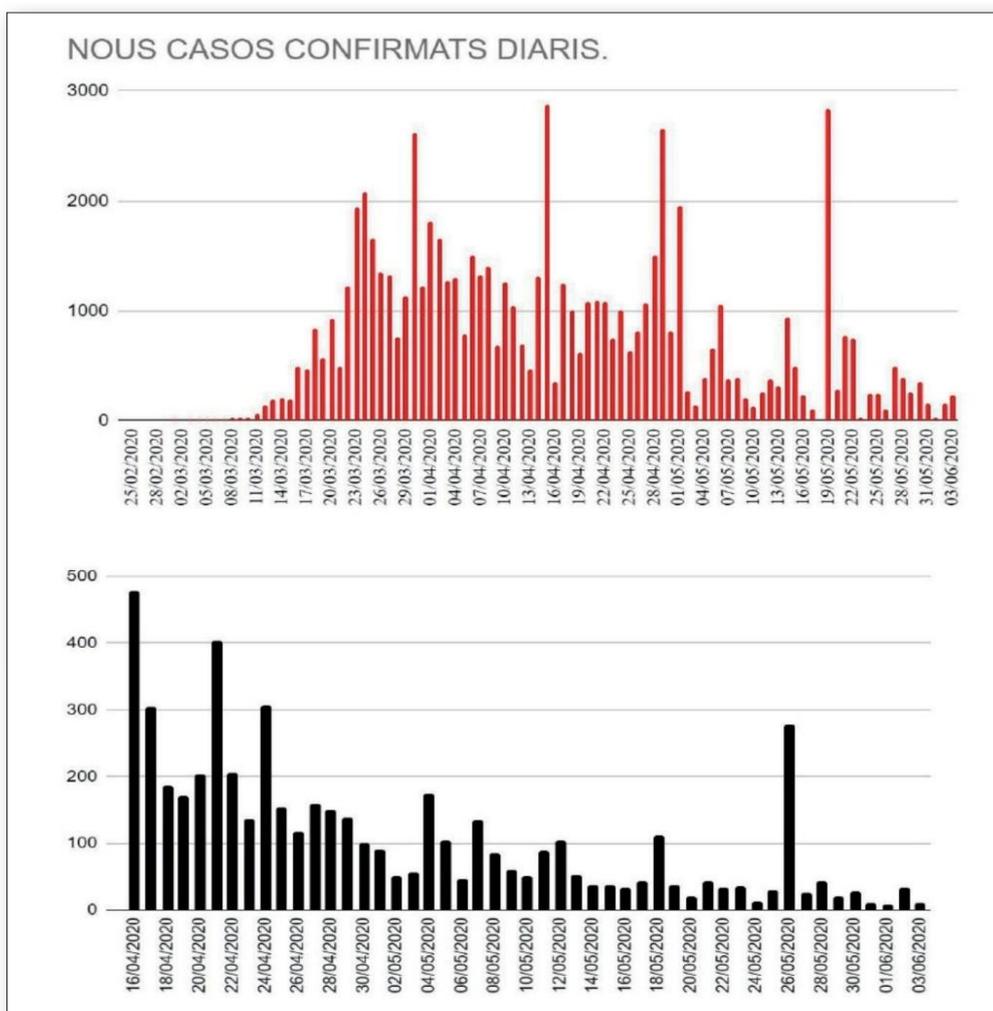


Fig. 6. Representación gráfica de los nuevos casos y defunciones diarias elaborada por A5.

Mediante los gráficos obtiene conclusiones y toma decisiones:

He observado que hay una tendencia de bajada pero que es irregular. Para clarificar más los datos he hecho una agrupación de siete en siete días. También he observado que el dato de defunciones del 26 de mayo y los datos de nuevos confirmados de los días 18 y 19 de mayo son muy extraños probablemente debido a cambio de criterios a la hora de contar. Por lo tanto, he decidido prescindir de estos datos.

Después calcula el porcentaje de disminución de defunciones por semana y calcula su media aritmética.

	Augment de morts semanals	Percentatge de disminució
28/5-3/6	153	76,50%
20/5-27/5 (*)	200	56,82%
13/5-19/5	352	62,19%
6/5-12/5	566	79,49%
29/4-5/5	712	57,98%
22/4-28/4	1228	
	mitjana dels percentatges.	66,60%

* No he tingut en compte les dades del dia 26/5

Fig. 7. Porcentaje de disminución por semana y cálculo de media aritmética por A5.

Luego, utiliza la media aritmética de los porcentajes para calcular los datos de las siguientes semanas.

	Predicció setmanal
setmana 4	30
setmana 3	45
setmana 2	68
setmana 1	102

Fig. 8. Predicción de número de defunciones por semana calculado por A5.

Finalmente, el valor correspondiente a la semana cuatro los divide entre 7, y predice que para el día 30 de junio habrá entre 4 o 5 nuevas defunciones. El mismo procedimiento lo utiliza para predecir el número de nuevos contagios e indica que habría 94 o 95 a fecha de 30 de junio. Es preciso indicar que A5 no predice los números totales; los valores que da corresponden al número de contagios y defunciones que existirían del 29 al 30 de junio.

A7, por su parte, después de obtener el número de nuevos contagios y defunciones por día, identifica un patrón, y a partir de este desarrolla sus cálculos.

Lo que he hecho ha sido que he seguido como una especie de patrón que se nota un poco en los últimos días que van subiendo los casos entre 23 y 499 casos por día, pues he ido sumando los últimos casos actuales entre 23 y 499 (por ejemplo, 67.461 más 233) y he ido sumando al azar los números entre 23 y 499 porque es el patrón que más se nota porque no hay un patrón muy exacto pues no siempre sumo el mismo número y con este proceso es posible que el 30 de junio habrá 70.862 casos confirmados.

A7 ve más allá de los datos e identifica un patrón, lo que demuestra un importante pensamiento transnumerativo. Para Estrella y Olfos (2015), en la acción de pasar de los datos a una transformación y luego a una tabulación, se esperaría que los alumnos con pensamiento transnumerativo, por tanto, más complejo, notasen patrones al observar la nueva representación de los datos o al momento de interpretarlos.

Además, realiza un gráfico en donde indica el número de nuevos casos que se registran por día y la predicción hasta el 30 de junio.

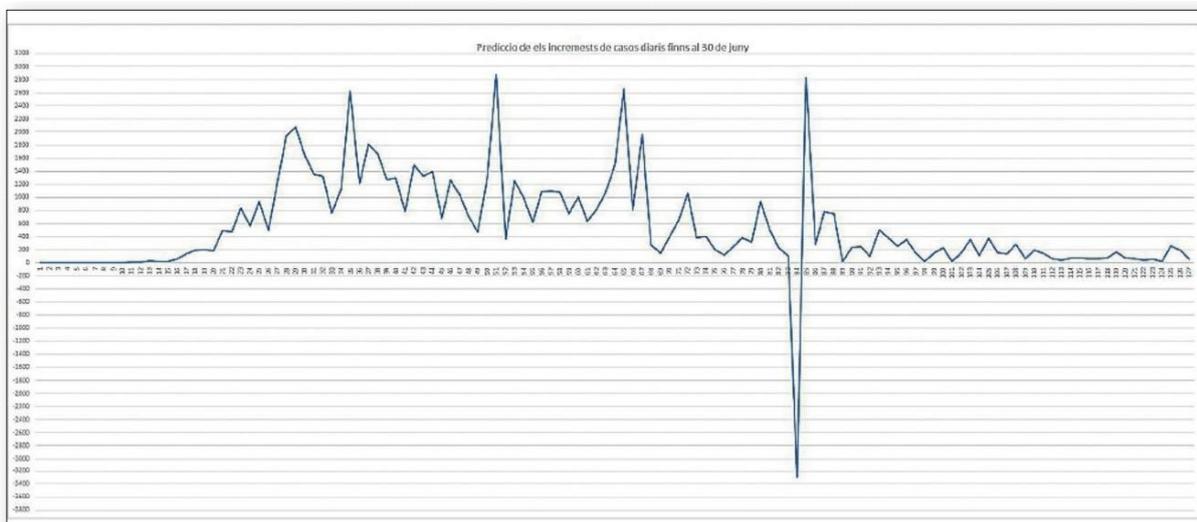


Fig. 9. Predicción de incrementos de casos diarios al día 30 de junio elaborado por A7.

Y otro con el número de casos totales y su predicción hasta el 30 de junio.

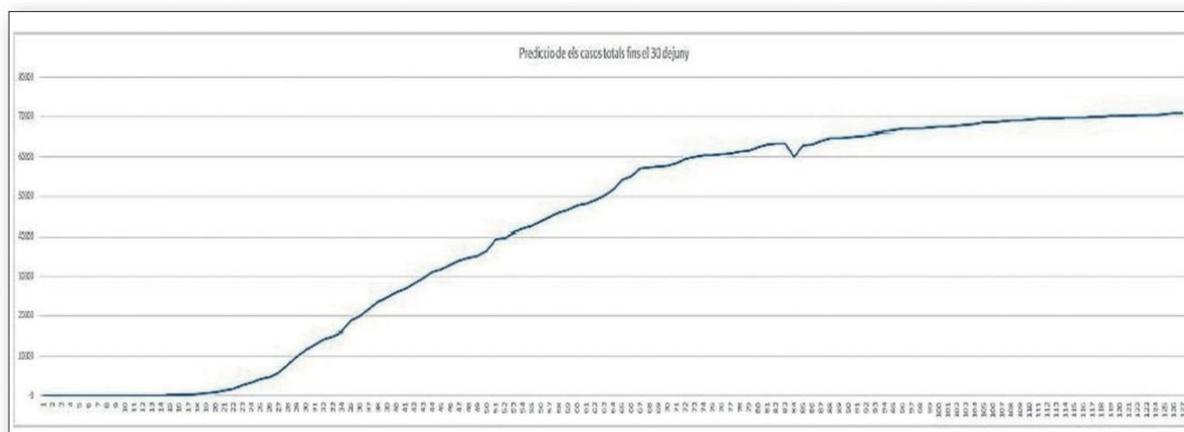


Fig. 10. Predicción de casos totales hasta el 30 de junio elaborada por A7.

El alumno hace la siguiente aclaración acerca de sus gráficos: «Nota: Los números del eje horizontal corresponden a las fechas hasta el 30 de junio y también solo he trabajado con los casos confirmados puesto que son reales».

Asimismo, efectúa el mismo procedimiento para el caso de las defunciones y predice que para el 30 de junio el número de defunciones será de 12.841.

A3 se limita a utilizar la función previsión de Microsoft Excel, la cual permite predecir valores futuros en función de datos históricos; con ello determina que el número de contagios será de 72.453 personas y el número de defunciones, de 13.564.

A1, A2 y A6, después de graficar los datos, no realizan ninguna operación. Sin embargo, A1 indica «... a finales de junio la cifra de defunciones y posibles casos rondará las 13 500 personas, ya que según la tabla podemos ver que las cifras ya no evolucionan tan rápido». A2 pronostica que a finales del mes de junio el número de contagios será entre 100 y 150. No predice las defunciones. A6 no da valores y simplemente afirma que el virus desaparecerá: «En conclusión el 30 de junio nos acercaríamos a la desaparición del virus si se han mantenido las medidas mínimas de prevención».

Algunos elementos importantes que hay que considerar a partir de lo expuesto son: A4 en su modelo utiliza métodos de diferencias y conceptos de proporcionalidad; se observa que informalmente calcula un coeficiente de proporcionalidad. Además, toma decisiones de exclusión de datos para calcular las predicciones.

A5, a partir de los gráficos, identifica de manera informal valores atípicos y toma la decisión de eliminarlos porque considera que afectarán a sus resultados finales. Va incluso más allá y establece como conjetura que estos valores se deben a cambios de criterios a la hora de contar.

A7 emplea el concepto de rango –determina el valor de 23 como mínimo y 499 como máximo– de manera informal. Después suma al azar valores comprendidos entre 23 y 499, lo que evidencia la utilización de conceptos informales de estadística y probabilidad, específicamente intervalos de confianza y números aleatorios. Presenta los resultados de su predicción mediante gráficos. Utiliza el mismo procedimiento para el caso de defunciones.

Considerando que los alumnos responden a lo solicitado en diferentes formatos, hemos unificado sus respuestas, de tal manera que indiquen el número total de casos a fecha de 30 de junio, con el propósito de tener una mejor visión de estas. Este proceso lo hemos realizado únicamente para quienes justifican sus procedimientos. Además, ya que en la fecha en la que se redacta este artículo se puede disponer de los datos reales proporcionados por el Instituto de Estadística de Cataluña (2020), hemos comparado las predicciones del alumnado con estos datos, indicando el margen de error cometido en los diferentes modelos. Esta comparativa evidencia que los alumnos que desarrollan un modelo y lo justifican se acercan significativamente a los valores reales, presentando un mínimo margen de error, lo que demuestra el gran nivel de razonamiento matemático y estadístico que los alumnos ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades.

Tabla 1.
Comparativa de valores reales y pronosticados

<i>Modelo</i>	<i>Número de contagios reales</i>	<i>Predicción del número de contagios</i>	<i>% error</i>	<i>Número de defunciones reales</i>	<i>Predicción del número de defunciones</i>	<i>% error</i>
A3	71.799	72.453	0,91	12.576	13.564	7,86
A4	71.799	70.044	2,44	12.576	13.385	6,43
A5	71.799	70.826	1,36	12.576	12.525	0,4
A7	71.799	70.862	1,31	12.576	12.841	2,1

Inferencias informales desarrolladas por el alumnado

La actividad solicita al alumnado reflexionar sobre la validez del modelo en otras poblaciones; este aspecto requiere de la elaboración de inferencias informales por parte del alumnado. A manera de ejemplo, A3 manifiesta:

Este método es aplicable a otras zonas siempre y cuando se disponga de un histórico de datos registrados. La extrapolación de resultados a otras comunidades autónomas o países solo es adecuada hacerla para aquellas zonas donde la incidencia de la COVID-19 haya sido similar (Comunidad de Madrid, País Vasco, etc.).

A4 indica:

Como la estrategia no es compleja y España está avanzando prácticamente a un solo ritmo entre sus comunidades, opino que puede ser algo que puede servir para todo el país, por otro lado, puede ser difícil de llevar a otros países ya que estos no llevan el mismo ritmo que España.

A7 señala:

Por ejemplo, este método no se puede utilizar en Groenlandia ya que tiene muy pocos contagiados y no hay casos diarios, lo cual hace que no sea posible ver un patrón, en cambio en Estados Unidos si se puede utilizar este método ya que tiene muchos casos diarios y se puede ver un patrón.

Las anteriores reflexiones evidencian cómo los alumnos consideran que sus modelos pueden ser aplicados para realizar predicciones en otras poblaciones, siempre y cuando existan ciertas condiciones similares a las de Cataluña. Lo que sugiere que entienden los datos como números dentro de un contexto (English y Watson, 2018; Franklin et al., 2007; Langrall et al., 2011; Moore, 1990), aspecto de gran importancia en el proceso de modelización con datos y en el desarrollo de la competencia estadística del alumnado.

Otro elemento importante es la consideración de aspectos extramatemáticos y cómo estos pueden influir en los resultados. Muchas de las reflexiones mencionan que aspectos como el uso de mascarilla, el respeto de las medidas de distanciamiento social, el incremento de la movilidad, etc., influirán en el comportamiento del virus.

Finalmente, los modelos del alumnado, incluso aquellos que no justifican sus procesos, denotan la conciencia de un elemento de incertidumbre en sus predicciones. Además, se nota el uso de un lenguaje probabilístico y no determinista, y algunos no dan un único valor sino un rango de valores. Por ejemplo, A1 indica: «... la cifra de defunciones y posibles casos rondará las 13 500 personas...»; A2 señala: «... he podido deducir que hacia finales del mes de junio habrá unos 100-150 contagios en Cataluña...»; A5 manifiesta: «... creo que habrá entre 94 y 95 nuevos positivos», y A7 indica: «... es posible que el 30 de junio habrá 70 862 casos confirmados».

A modo de resumen, la tabla 2 presenta los resultados de cada uno de los siete alumnos participantes en el estudio.

Tabla 2.
Trabajo de los alumnos organizado por categorías

<i>Categorías</i>	<i>Alumnos</i>						
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
<i>Interpretación de datos</i>							
Interpreta cada dato de casos confirmados como una frecuencia absoluta no acumulada	X						
Interpreta casos confirmados como datos acumulados		x	x	x	x	x	x
Compara los datos entre meses	X		x	x	x	x	x
Representa datos mediante gráficos para tener una mejor interpretación de estos (transnumeración)	X	x			x	x	x
<i>Organización y operación de datos</i>							
Introduce nuevas variables y crea columnas adicionales en la tabla que se les entregó				x	x		x
Calcula porcentajes y media aritmética					x		
Observa más allá de los datos, demuestra pensamiento trans- numerativo a través de la identificación de patrones					x	x	x
Decide incluir o excluir datos en las operaciones de acuerdo con las características de estos (ejemplos: valores atípicos, datos completos de un determinado mes)			x	x	x		x
Utiliza de manera informal conceptos de estadística y probabilidad (rango, intervalos de confianza, números aleatorios, valores atípicos)					x		x
Utiliza métodos de diferencias y/o conceptos de proporcionalidad				x	x		x
Utiliza funciones especializadas de Microsoft Excel			x				
Realiza suposiciones a partir de sus conocimientos extramatemáticos	X	x	x	x	x	x	x
Agrupar datos en intervalos de tiempo para facilitar las operaciones				x	x		x
Expresa la respuesta final no como un único valor, sino como un rango de valores		x			x		
<i>Inferencias informales</i>							
Establece como condición necesaria para la aplicación de su modelo en otras poblaciones que las condiciones de estas sean similares			x	x			x
Considera aspectos extramatemáticos en el momento de plantear inferencias			x	x		x	x
Utiliza un lenguaje probabilístico y no determinista	X	x		x	x		x

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente estudio se ha presentado el análisis de los modelos generados por el alumnado a partir de una actividad de modelización matemática diseñada a partir de los principios teóricos de las MEA (Lesh et al., 2000), e implementada en el contexto de la COVID-19.

En la actualidad, el desarrollo tecnológico está conduciendo a cambios fundamentales en los tipos y niveles de comprensión y habilidades matemáticas que se necesitan para tener éxito más allá de la escuela, sobre todo cuando asistimos a una sociedad dominada por los datos, en donde es cada vez más necesaria la competencia del alumnado para interpretarlos. Sin embargo, ante esta realidad, parece haber pocos cambios en la naturaleza de los problemas que los niños y las niñas continúan encontrando en el plan de estudios de matemáticas (Lesh y Zawojewski, 2007; Trelles y Alsina, 2017). En este sentido, coincidimos con English (2010) en que los poderosos procesos matemáticos que se necesitan para resolver los problemas actuales y del futuro, como construir, describir, explicar, predecir y representar, junto con cuantificar, coordinar, organizar y transformar datos no están suficientemente presentes en los problemas tradicionalmente entregados al alumnado.

Por esta razón, es cada vez más necesario ofrecer problemas contextualizados, potencialmente significativos y que verdaderamente desafíen los procesos de pensamiento. En esta dirección, consideramos que las actividades planteadas al alumnado bajo el enfoque teórico de la modelización matemática, desarrollada con datos auténticos, contribuyen a cubrir esta necesidad, y a mostrar al alumnado la utilidad de las matemáticas en la sociedad, sobre todo en el nivel de educación primaria, en donde la implementación de la modelización matemática es aún escasa.

Los resultados de nuestro estudio muestran que los siete alumnos participantes comprenden el problema y formulan sus propias estrategias de solución; además, cuatro de ellos utilizan tecnología para representar los datos. En algunos casos emplean –aunque informalmente– conceptos de estadística y probabilidad que habitualmente no están presentes en el plan de estudios de estos niveles, como identificación de valores atípicos, rango, intervalos de confianza y números aleatorios. Se evidencia, por tanto, que, de alguna forma, el trabajo con datos reales promueve que algunos alumnos sean capaces de utilizarlos.

Los procesos de transnumeración y matematización (Groth, 2015) se vieron reflejados, pues la mayoría del alumnado participante –cinco de siete– emplea técnicas transnumerativas (Chick, 2004) para interpretar mejor los datos, así como procesos de matematización, siendo los alumnos que utilizan técnicas más complejas los que generan modelos que permiten aproximarse de mejor manera a lo que ocurre en la realidad y, por tanto, a modelos más eficaces.

Las inferencias informales, aunque en diferentes niveles, estuvieron presentes en la mayoría de los modelos, y la capacidad del alumnado para realizarlas debería ser aprovechada por el profesorado a través del diseño de actividades que fortalezcan estos procesos. Es de vital importancia que el alumnado más joven se involucre en la inferencia informal, aun cuando este aspecto sea desatendido en el plan de estudios (Makar, 2016).

Los modelos elaborados muestran que todos los alumnos participantes son capaces de relacionar aspectos extramatemáticos y cómo estos pueden incidir en los datos; de esta forma son capaces de elaborar conjeturas y suposiciones a partir de datos reales. En este sentido, la actividad de modelización reveló los conocimientos matemáticos y extramatemáticos utilizados por el alumnado para su solución.

Otro elemento importante que hay que considerar es la eficacia de los modelos generados, a pesar de que tanto el alumnado como el profesorado no tenían experiencia previa en actividades de este tipo. Sin embargo, la gestión de la actividad por parte de las maestras con la orientación del equipo investigador fue un aspecto clave para la comprensión adecuada de la actividad por parte de los participantes. Este tipo de actividades permite al alumnado observar la verdadera utilidad de las matemáticas y cómo estas nos sirven para comprender fenómenos, predecirlos y tomar decisiones. En este sentido, coincidimos con el planteamiento de Mercado-Sánchez (2020, p. 9), para quien la modelización matemática es «una estrategia del razonamiento para traducir, interpretar de forma compacta y cuantitativa, el comportamiento de nuestro universo, de la naturaleza, de la sociedad, de la economía y un interminable etcétera».

Asimismo, al realizar una correspondencia de los modelos obtenidos con el perfil académico de los participantes, se observó que los modelos más eficaces fueron generados por el alumnado que tiene un rendimiento académico sobresaliente en la asignatura. Si bien el estudio no perseguía este objetivo, a partir de este hallazgo planteamos la posibilidad de que actividades de este tipo, además de ser propuestas a todo el alumnado, formen parte de programas específicos de enriquecimiento curricular dirigidos al alumnado que tiene afinidad por las matemáticas. Por consiguiente, esta perspectiva puede ser tratada en futuros estudios.

La principal limitación del estudio ha sido la escasa participación del alumnado al que se entregó en un principio la actividad, así como la ausencia del trabajo en grupo; a pesar de ello, encontramos procesos interesantes de modelización entre el alumnado que la desarrolló. Otra limitación surgida es el no poder acceder a los razonamientos del alumnado que no quedan registrados en el papel pero que tienen mucha importancia, elemento que debe considerarse para futuros estudios. Por último, durante todo el desarrollo de la actividad se insistió a los alumnos en el trabajo autónomo, y si bien manifestaron que cumplieron con esta premisa y la constante realización de preguntas en el proceso daba indicios de ello, las propias condiciones no permitían tener un control exhaustivo de este aspecto.

Finalmente, coincidimos con Gallart, Ferrando et al. (2015) y Gallart, García-Raffi et al. (2019) en que las actividades de modelización constituyen actividades enriquecedoras para el alumnado, pero no se debe descuidar que para obtener los resultados óptimos el profesorado debe formarse continuamente e incorporar frecuentemente este tipo de actividades en su práctica docente. En futuros estudios, será necesario seguir analizando la implementación de actividades de modelización en los primeros niveles escolares, poniendo también especial atención en el papel que juega el profesorado para implementar y gestionar estas actividades, lo que posibilitará detectar posibles lagunas de conocimiento pedagógico, para, a partir de ellas, ofrecer orientaciones que permitan mejorar este tipo de prácticas, ya sea en formato presencial o en línea.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue apoyado por la beca SENESCYT-UdG Nro. AR6C-000086. Agradecemos al alumnado participante, a las maestras de sexto año de educación primaria de la Escuela Marta Mata de Girona (España) y a su equipo directivo por permitir la implementación de la actividad

REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135.
<https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2020). Mathematical modeling projects oriented towards social impacts as generators of learning opportunities: a case study. *Mathematics*, 8(20), 1-20.
<https://doi.org/10.3390/math8112034>
- Alsina, C., García-Raffi, L., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA* (54), 51-53.
- Banco Mundial (mayo de 2020). *Bancomundial.org*. Obtenido de Covid-19: Impacto en la educación y respuestas de política pública: <https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/33696/148198SP.pdf?sequence=6&isAllowed=y>

- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del aplicacionismo en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). COMAP, Inc.
- Blum, W. (2015). *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?* Proceeding of the 21th International Congress on Mathematical Education (pp. 73-96). Nueva York: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Horwood Publishing.
<https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31(1), 99-118.
<https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Chan, C. (2010). Tracing primary 6 students model development within the mathematical modeling process. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 40-57.
- Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research* (pp. 207-214). MERGA.
- Cifuentes-Faura, J. (2020). Consecuencias en los niños del cierre de escuelas por Covid-19: El papel del Gobierno, profesores y padres. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, 9(3), 1-12.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. Springer.
<https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford, *Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 287-300). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_25
- English, L. D. (2014). Promoting statistical literacy through data modelling in the early school years. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 441-458). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_23
- English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50, 103-115.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y>
- English, L. D. y Watters, J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58-79. <https://doi.org/10.1007/bf03217401>

- Estrella, S. y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. Conferencia Interamericana de Educación Matemática (pp. 1-7). México.
- EU Kids Online. (2018). Los niños y niñas de la brecha digital en España. Madrid: Unicef.
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. <https://doi.org/10.4995/msel.2015.3681>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. American Statistical Association.
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números*, 88, 93-103.
- Gallart, C., García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. <https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>
- Groth, R. (2015). Research commentary: Working at the boundaries of mathematics education and statistics education communities of practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 4-16. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0004>
- Gundermann-Kröll, H. (2013). El método de los estudios de caso. En M. L. Tarrés (Ed.), *Observar, escuchar y comprender sobre la tradición cualitativa en la Investigación* (pp. 231-264). El Colegio de México-FLACSO.
- Hernandez-Martínez, P. y Vos, P. (2018). «Why do I have to learn this?» A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245-257. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>
- Instituto de Estadística de Cataluña (24 de febrero de 2020). <https://www.idescat.cat/indicadors/?id=anuals&n=13300&lang=es> Visitada el 3-06-2020.
- Instituto Nacional de Estadística. (2019). Encuesta sobre equipamiento y uso de tecnologías de información y comunicación en los hogares. Instituto Nacional de Estadística. https://www.ine.es/prensa/tich_2019.pdf
- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. y Jansem, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 47-67. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). CT: IAP.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum Associates.
- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Makar, K. (2016). Developing young children's emergent inferential practices in statistics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 1-24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107820>

- Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson Educación S. A.
- Mercado-Sánchez, G. (2020). Las matemáticas en los tiempos del coronavirus. *Educación Matemática*, 32(1), 7-10.
<https://doi.org/10.24844/EM3201.01>
- Moore, D. (1990). Uncertainly. En L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). National Academy Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices: Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*.
- Ng, K. (2013). Initial perspectives of teacher professional development on mathematical modeling in Singapore: A framework. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Connecting to Research and Practice*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modeling (pp. 427-436). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_36
- Ruiz-Higueras, L., García, F. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118.
<https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>
- Rule, P. y John, V. (2015). A Necessary Dialogue: Theory in Case Study Research. *International Journal of Qualitative Methods*, 14(4), 1-11.
<https://doi.org/10.1177/1609406915611575>
- Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343.
<https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100>
- Trelles, C. y Alsina, À. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.
- Trelles, C., Toalongo, X., Alsina, À. y Gonzales, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, (102), 43-59.
- Unesco (2020). *Enseñar en tiempos de COVID-19. Una guía teórico-práctica para docentes*. París: Unesco.
- Watson, J. y English, L. D. (2015). Introducing the practice of statistics: Are we environmentally friendly? *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 585-613.
<https://doi.org/10.1007/s13394-015-0153-z>
- Wess, R. y Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling - supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht University. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409039/document>
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: design and methods*. SAGE Publications, Inc.

A Mathematical Modeling Activity in Elementary School with Authentic Data about COVID-19

César Trelles

Universidad de Cuenca, Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, Ciudadela Universitaria, 010710, Cuenca (Ecuador).

cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-4096-8353>

Ximena Toalongo, Ángel Alsina

Universitat de Girona, Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental, Plaça Sant Domènec, 9 - 17004, Girona (Espanya)

ximena.toalongo@udg.edu, angel.alsina@udg.edu

<https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>, <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

The aim of this study is to analyze a mathematical modeling task developed by sixth grade students of primary education (11-12 years old). The task is based on a model-eliciting activity (MEA), designed by the research team and implemented online during the period of confinement in Spain. Model-eliciting activities are characterized by being non-traditional activities that, starting from a real situation, pose an open problem, challenging students to build a model to solve it. In this sense, using real statistical data from Catalonia on COVID-19, students had to predict how many infections and deaths there would be in a city on a given date.

Based on a multiple case study, the data have been studied based on a content analysis, carried out separately by the authors, in order to identify, classify and categorize what was recorded in the models produced by students. An inductive analysis has been applied in the initial identification of patterns and categories of responses; specifically, several cycles of analysis were carried out on the proposed models. According to this, and in correspondence with the theoretical foundation, the following categories were identified: a) data interpretation, b) data organization and operation and c) informal inferences. The degree of agreement among the coders was 90 % and, where differences arose, they were reconciled through further analysis.

The results show: 1) although not all students develop a model, those who manage to develop one use intuitive concepts of statistics and probability that go beyond the regular curriculum, such as: identification of outliers, range, confidence intervals, and random numbers; 2) students who propose a model understand data as numbers within a context, as well as considering extra-mathematical aspects and how they can have an impact on their approaches; and 3) the models generated also show that students are aware of the uncertainty in their predictions, even showing the use of non-deterministic language. Additionally, most students who generated a model used transnumerative techniques to better interpret the data, together with mathematization processes. Thus, students who used more complex techniques generated models that allow them to better approach what happens in reality, and therefore more efficient models. Informal inferences, although at different levels, were present in most models, therefore we consider that the students' ability to make them should be considered by teachers through the design of activities that strengthen these processes. Consequently, we consider that this type of activities allows students to observe the true usefulness of mathematics and how it helps us to understand phenomena, predict them and make decisions.

4.5. Artículo 5:

Alsina, Á., Salgado, M., Toalongo, X. y Trelles, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática - Ridema*, 5(1), 1-21.

<https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/34513>

Índices de calidad de la revista: La revista RIDEMA está indizada actualmente en DOAJ, Latindex Catálogo, REDIB, etc.



Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos

Statistics in Early Childhood Education: recommendations prior to data representation

Ángel Alsina¹

Universidad de Girona

María Salgado²

Universidad de Santiago de Compostela

Ximena Toalongo-Guamba³

Universidad de Girona

César Trelles-Zambrano⁴

Universidad de Cuenca, Universidad de Girona

Resumen

En la primera parte de este artículo se presentan diversas recomendaciones para el profesorado de Educación Infantil acerca de las fases previas a la representación gráfica de los datos: la recogida y organización de datos a través de tablas estadísticas de recuento y de frecuencias. Se indican las características principales tanto de contenido como estéticas y, adicionalmente, se describen diversos tipos de tablas. En la segunda parte, se presenta la experiencia “Registramos nuestro peso” y se analizan los niveles de comprensión de las tablas de recuento y de frecuencias de 39 alumnos españoles de 5 años. Los resultados muestran evidencias principalmente del nivel 1 (leer los datos) y del nivel 2 (leer dentro de los datos), junto con algunas anomalías y errores en la construcción de las tablas. Se concluye que las recomendaciones proporcionadas y los resultados obtenidos contribuyen a comprender mejor que debería hacer el profesorado de matemáticas de infantil antes de representar los datos y, indefinitiva, son un apoyo para su desarrollo profesional.

Palabras-clave: Enseñanza de la estadística; Tablas de recuento; Tablas de frecuencias; Desarrollo profesional del profesorado; Educación Infantil.

Abstract

The first part of this article presents several recommendations for Early Childhood Education teachers about the stages prior to the graphical representation of data: the collection and organisation of data through tally and frequency tables. The main characteristics of both content and aesthetics are indicated and, additionally, various types of statistical tables are described. In the second part, the experience "Let's record our weight" is presented and the levels of comprehension of tally and frequency tables of 39 Spanish 5-year-old children are analysed. The results show evidence mainly of level 1 (reading the data) and level 2 (reading within the data),

¹ Doctor UAB. Catedrático de Didáctica de las Matemáticas UdG, Girona, España. Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona, España. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>. E-mail: angel.alsina@udg.edu.

² Doctora USC. Profesora Asociada de Didáctica de las Matemáticas USC, Santiago de Compostela, España. Xosé María Suárez Núñez, s/n, 15782 Santiago de Compostela, España. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0309-241X>. E-mail: maria.salgadosomoza@hotmail.com.

³ Estudiante de Doctorado UdG. Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona, España. <https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>. E-mail: ximena.toalongo@udg.edu.

⁴ Estudiante de Doctorado UdG. Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona, España. <https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>. E-mail: cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec.

together with some anomalies and errors in the construction of the tables. It is concluded that the recommendations provided and the results obtained contribute to a better understanding of what early childhood mathematics teachers should do before representing data and, consequently, are a support for their professional development.

Keywords: Teaching statistics; Tally tables; Frequency tables; Teacher professional development; Early childhood education.

Introducción

En los primeros niveles escolares, se tiende a asociar la estadística a la representación gráfica de datos, de manera que las prácticas más habituales consisten en plantear una situación que permita recoger datos -habitualmente de naturaleza cualitativa- y plantear la confección de un gráfico que puede ser concreto, con material, o bien pictórico, con el apoyo de signos (cruces, etc.). Esta práctica está muy instaurada en infantil desde hace muchos años, de manera que DiSessa *et al.* (1991) o Batanero (2001), entre otros, ya advirtieron de la escasa atención a los procesos previos de recogida, clasificación y organización de datos, que incluye tanto la definición de categorías (valores de la variable objeto de estudio) como la elaboración de tablas estadísticas de recuento y el tránsito hacia las tablas de frecuencias mediante la transnumeración, que permite pasar de un modo de representación habitualmente más concreto o pictórico a otra más abstracta para promover la comprensión (PFANNKUCH; WILD, 2004; WILD; PFANNKUCH, 1999).

La omisión de estas fases preliminares en el ciclo de investigación estadística tiene importantes repercusiones, que describen muy detalladamente Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Aguilar (en prensa), como por ejemplo la dificultad por colocar ciertos datos ambiguos que son difíciles de ubicar en una determinada categoría.

En diversos estudios, pues, se subraya que, para iniciar el desarrollo de la alfabetización estadística desde los primeros niveles escolares, es necesario que el alumnado experimente de primera mano los procesos de recogida y organización de datos, explorando profundamente su naturaleza (ALSINA, 2012, 2017a, 2018, 2021, en prensa; ALSINA *et al.*, 2020; ALSINA *et al.*, 2021; DEL MAS, 2004; RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa). En este escenario, es imprescindible prestar atención, como se ha mencionado, a la definición de las categorías y a la comprensión de las tablas estadísticas de recuento y de frecuencias, asumiendo que la comprensión incluye la confección y la interpretación de dichas tablas.

En este artículo nos centramos en las tablas estadísticas, por su importante papel en la organización y presentación de los datos ya que, de acuerdo con Díaz-Levicoy *et al.* (2020) y Vásquez, Coronata y Rivas (en prensa), favorecen una visualización rápida de patrones de variabilidad y tendencia, la argumentación e incluso la toma de decisiones. Así, pues, las tablas son un apoyo fundamental para el recuento de datos, durante la recogida y organización. Para realizar dicho recuento, se asume la perspectiva de Hoong, Kin y Pien (2015), que plantean una secuencia vinculada al desarrollo del sentido numérico que denominan CPA: Concreto-Pictórico-Abstracto, que en realidad es una reinterpretación de los modos de representación enactivo, icónico y simbólico de Bruner (1966).

Desde este marco, nos preguntamos ¿cómo confecciona las tablas estadísticas el alumnado de Educación Infantil? ¿Qué nivel de comprensión tienen? En concreto, para responder a estas preguntas, se analiza la comprensión de las tablas estadísticas en el marco de una actividad de medida del peso que realizan dos grupos de alumnos de 5 años, en la que se lleva a cabo un ciclo de investigación estadística.

Las tablas estadísticas: tablas de recuento y tablas de frecuencias

Definición y principales características

Las tablas estadísticas son un tipo de representación estadística que, como se ha indicado, tienen un papel muy relevante en la recogida y organización de datos. Estrella (2014, p. 6) define dichas tablas estadísticas como:

[...] un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas [...], permite presentar los datos correspondientes a una o más variables (características del fenómeno bajo estudio) en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer.

Las tablas estadísticas pueden ser de dos tipos: las tablas de recuento, que se asocian principalmente a las fases concreta y pictórica expresadas por Hoong, Kin y Pien (2015), y las tablas de frecuencia, que se asocian a la fase abstracta. Esta última fase implica el tránsito a los números mediante la transnumeración (PFANNKUCH; WILD, 2004; WILD; PFANNKUCH,

1999), que consiste en obtener nueva información respecto de las características de un conjunto de datos a partir del uso de diferentes representaciones, identificando diferentes aspectos de los mismos datos, con el fin de promover la comprensión de una situación real, es decir, se trata de una forma de obtener una nueva información al cambiar de un sistema de representación a otro (DÍAZ-LEVICOY; BATANERO; ARTEAGA, 2018).

Aunque en la práctica hay bastante variabilidad, Estrella (2014) señala algunos de los elementos que pueden contener las tablas estadísticas: el título, que transmite la idea principal sobre la información representada y su contexto; el cuerpo de datos, que corresponde al bloque rectangular interior compuesto por el grupo de celdas formadas por la intersección de filas y columnas; el encabezado lateral (primera columna), que refleja las categorías de la variable; el encabezado superior, que presenta el nombre del contenido de las columnas, por ejemplo, las frecuencias; y los totales, relativos a las sumas por fila o columna y/o totales. A continuación, se muestran ejemplos para visualizar diversas posibilidades para construir tablas estadísticas en el aula de infantil.

Ejemplos de tablas estadísticas

Las primeras tablas estadísticas que debería elaborar el alumnado de infantil son tablas de recuento concretas en las que se usan los propios niños o bien objetos asociados a ellos como marcas de cuenta (ALSINA; ESCOLA ANNEXA, 2021; RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa). Estas tablas permiten relacionar las “elecciones” de los niños con los elementos que aparecen en el recuento, tal como se muestra en la Figura 1, donde se contabiliza el número de dientes que han caído a cada niño en una clase de cinco años.

Figura 1 - Ejemplo de recuento usando los propios niños



Fuente: Alsina (2017b)

Otra posibilidad es utilizar dibujos y signos diversos (palitos, cruces, etc.) como marcas de recuento (RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa). En este caso, algunas recomendaciones importantes a considerar son las siguientes: 1) no se trata de imponer nunca el tipo de marca, sino que es necesario dar libertad al alumnado para que elijan las que prefieran, en la línea expresada por English (2013); 2) en todos los casos, es muy importante promover que se interprete adecuadamente el significado de dichas marcas mediante la interacción, la negociación y el diálogo con el alumnado; 3) debe permitirse que transiten de unos registros de representación a otros (transnumeración), usando distintos signos por ejemplo, y promover que se comprendan las distintas representaciones tabulares.

En el ejemplo siguiente, por ejemplo, se observa una tabla de recuento en la que se utilizan dibujos, a partir de las variables cualitativas “el tiempo atmosférico” o “el color preferido”, que son variables muy habituales para trabajar la estadística en las aulas de infantil. Los dibujos representan figurativamente el objeto observado o alguna característica reseñable de él (Figura 2).

Figura 2 - Ejemplo de recuento usando dibujos



Fuente: GAMAR

(<http://www2.udg.edu/projectesbiblioteca/GAMAR/Inici/tabid/17145/language/ca-ES/Default.aspx>) y Fernández y Rubirola (2016)

Se pueden utilizar también signos diversos, como cruces, palitos, etc. Estos signos, como se observa en la Figura 3, pueden ser no organizados y organizados.

Figura 3 - Tabla de recuento correspondiente a diez lanzamientos de un dado

Tabla de recuento consignos no organizados			Tabla de recuento consignos organizados, en bloques de dos	
Valor 1	X X	→	Valor 1	X X
Valor 2	///		Valor 2	///
Valor 3			Valor 3	
Valor 4	+ + + +		Valor 4	+ + + +
Valor 5	^		Valor 5	^
Valor 6			Valor 6	

Fuente: Alsina (2021)

Después de la tabla de recuento es necesario transitar a la tabla de frecuencias, que se puede entender como la fase abstracta que culmina el proceso (RODRÍGUEZ- MUÑIZ *et al.*, en prensa). De acuerdo con Díaz-Levicoy *et al.* (2018), representan las frecuencias (obtenidas mediante agrupación o recuento de datos iguales) asociadas a los valores o categorías de las variables (Figura 4).

Figura 4 - Tabla de frecuencias correspondiente a diez lanzamientos de un dado

Tabla de frecuencias	
Valor 1	2
Valor 2	3
Valor 3	0
Valor 4	4
Valor 5	1
Valor 6	0

Fuente: Alsina (2021)

Como se aprecia en los ejemplos anteriores, en la construcción o representación de dichas tablas es importante también el valor estético, como por ejemplo que las filas y las columnas sean proporcionadas, que haya una correspondencia entre cada categoría y los datos o frecuencia absoluta correspondientes, etc.

Niveles de comprensión

Diversos autores señalan que, para iniciar la alfabetización estadística como cimiento de un futuro razonamiento estadístico, es necesario que el alumnado experimente de primera mano los procesos de recogida de datos y de exploración de su naturaleza, usando las tablas estadísticas (DELMAS, 2004; DÍAZ-LEVICOY *et al.*, 2018; RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa). Sin embargo, como se ha indicado anteriormente, a menudo no se dedica el tiempo suficiente a su enseñanza y aprendizaje, olvidando que su correcta lectura y construcción moviliza diferentes objetivos matemáticos (Batanero, 2001). Tal como señalan Díaz-Levicoy *et al.* (2018), diversos autores, conscientes de esta omisión, describen y tratan de caracterizar los diferentes niveles de comprensión para tablas y gráficos estadísticos. Por ejemplo, Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) proponen diferentes niveles para la lectura de gráficos, que se han adaptado en diferentes investigaciones con tablas estadísticas (DÍAZ-LEVICOY; MORALES; LÓPEZ-MARTÍN, 2015; DÍAZ-LEVICOY *et al.*, 2016; entre otros). Con base en estos estudios, Díaz-

Levicoy *et al.* (2018) exponen cuatro niveles de comprensión desde el más elemental al más complejo:

1. Leer los datos: requiere una lectura literal de la información presentada en la tabla, como por ejemplo leer una frecuencia, una categoría o el título general de la misma. No requiere interpretación.
2. Leer dentro de los datos: requiere encontrar un valor por medio de comparaciones u operaciones aritméticas sencillas, además incluye la interpretación de la información contenida en ella, como por ejemplo calcular la cantidad total de estudiantes que participaron en la encuesta, entre otras.
3. Leer más allá de los datos: requiere determinar una información ausente en la tabla por medio de predicciones o estimaciones, como por ejemplo hacer una inferencia estadística (inferir la temperatura máxima a partir de las temperaturas máximas de una ciudad mostradas en la tabla).
4. Leer detrás de los datos: requiere valorar críticamente la manera en que se recogieron los datos, interpretar la crítica que otras personas hacen del mismo o bien cuestionar la calidad de los datos. Supone una reflexión del conocimiento matemático y del contexto. Por ejemplo, analizar si la pregunta utilizada para recoger los datos es la apropiada o no.

Con base en los antecedentes descritos, el objetivo de este estudio consiste en analizar el nivel de comprensión de las tablas estadísticas en el marco de una actividad de medida del peso que realizan dos grupos de alumnos de 5 años, en la que se lleva a cabo un ciclo de investigación estadística.

Descripción de la actividad “Registramos Nuestro Peso”

La actividad se ha llevado a cabo con 39 alumnos de 5 años del Colegio “Sigüeiro” de A Coruña (España): 21 alumnos del grupo A (11 niñas y 10 niños) y 18 alumnos del grupo B (9 niñas y 9 niños), y la maestra del grupo A, que lleva a cabo un método de enseñanza basado en los principios de la Educación Matemática Realista, con una gestión de la enseñanza a través de los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y

representación. La actividad se ha desarrollado durante cuatro días, en sesiones que duran aproximadamente unas 2 horas cada una:

Día 1

- Se indica a los niños que el Departamento de Salud quiere conocer con detalle el peso de cada uno de ellos, para lo cual, con la ayuda de una báscula, la clase (gran grupo) registra el peso de cada uno de ellos -se omiten los decimales, debido a la edad solo se registra el número entero-. Para el registro se entrega a cada niño una tabla con dos columnas, una para el nombre del alumno y otra para el peso. (Es posible también entregar solo la báscula y dejar a que el grupo espontáneamente piense en un procedimiento adecuado para el registro). La tarea de la maestra en esta parte consiste, fundamentalmente, en verificar que las medidas tomadas por los alumnos sean correctas y que su registro sea correcto.
- Seguidamente (en gran grupo) se les pide que piensen ideas para organizar la información registrada de tal forma que el Departamento de Salud pueda interpretarla más fácilmente. El Departamento de Salud necesita saber respuestas a preguntas como ¿Cuántos niños tienen el mayor peso? ¿Cuántos niños tienen el menor peso? ¿Qué pesos es el que más se repite? Las ideas serán registradas por la maestra en la pizarra.
- Luego del consenso se pide que organicen los datos en su hoja individual. Después, en gran grupo, se representan los datos en la pizarra con el objetivo de que los niños comparen su trabajo y lo corrijan de ser necesario.
- En gran grupo se responde la pregunta: ¿Qué conclusiones podemos decir de los datos organizados? Se deja que los niños espontáneamente den respuestas a las preguntas anteriores, es decir: ¿Cuántos niños tienen el mayor peso? ¿Cuántos niños tienen el menor peso? ¿Qué peso es el que más se repite? Si no dan respuesta en un tiempo prudente (3-5 min) se les plantea nuevamente estas preguntas y se registra las respuestas.

Día 2

- En otra sesión se les pregunta ¿cómo creen que será el peso de los niños de la clase conjunta? –es decir, de la otra línea– y registramos todas las respuestas que puedan dar. Las respuestas

deben ser registradas de forma individual y por escrito. La maestra pregunta a su clase: ¿Qué peso es el que tenía más niños? ¿Cuál es el mayor peso? ¿Cuál es el menor peso?

- Luego de las respuestas de los niños, la maestra pregunta: ¿Creéis que si vamos a la clase de al lado el peso que más nos ha salido a nosotros es el peso que tienen más niños? ¿Creéis que algún niño de la clase de al lado pese menos del que pesa menos de nuestra clase? ¿Creéis que algún niño de la clase de al lado pese más del mayor peso de nuestra clase? La maestra debe pedir que se argumenten las respuestas.
- Con la ayuda de la maestra de la otra línea, se pesan a los niños con la misma báscula. Los datos se los registra en forma de lista (Nombre de cada niño y peso, sin orden establecido).

Día 3

- La maestra retoma la conversación de la temática. Entrega a los niños los datos de la clase conjunta y pide que los organicen. A continuación, les dice que se van a contrastar las respuestas que han dado a las preguntas del segundo día: ¿Creéis que si vamos a la clase de al lado el peso que más nos ha salido a nosotros es el peso que tienen más niños? ¿Creéis que algún niño de la clase de al lado pese menos del que pesa menos de nuestra clase? ¿Creéis que algún niño de la clase de al lado pese más del mayor peso de nuestra clase? Adicionalmente, la maestra pregunta: ¿Si hubiera una tercera línea como serían los pesos de los niños?
- Seguidamente, se les plantea la siguiente situación hipotética: el día de mañana se integrará un niño nuevo a la clase ¿Cuál creen que será su peso? Nuevamente se registran todas las respuestas que puedan brindar.

Día 4

- La maestra plantea la siguiente pregunta: con lo que se ha desarrollado previamente, ¿podríamos decir cuál sería el peso de todos los niños que viven en vuestra ciudad y que tengan la misma edad que vosotros?

Comprensión de tablas estadísticas en la actividad “Registramos Nuestro Peso”

Considerando el objetivo de nuestro estudio, el foco del análisis se pone en la construcción e interpretación de las tablas estadísticas, a pesar de que en el desarrollo de la actividad surgen otros aspectos relevantes como la inferencia estadística, etc.

Durante el primer día, surgen las primeras representaciones a partir del momento en el que la maestra pide a los niños que organicen los datos del peso que han recogido en su hoja individual y de que representen los datos en la pizarra, con el objetivo de que comparen su trabajo y lo corrijan de ser necesario.

Figura 5 - Representación de los datos en la pizarra



Fuente: elaboración propia.

Como se observa en la Figura 5, en esta primera representación colectiva se escribe la distribución de datos (nombres de cada alumno y su peso), pero a pesar de que hay una correspondencia entre cada niño y su peso, no se construye propiamente una tabla con líneas que distribuyan las filas y columnas. En este primer momento, son capaces ya de expresar las frecuencias, es decir, el número de alumnos ubicados en cada categoría, pero de nuevo sin construir propiamente una tabla con sus filas y columnas separadas por líneas. A pesar de estas anomalías estéticas en la construcción de las tablas, los niños obtienen algunas conclusiones:

Maestra: *ya tenemos todos los datos de nuestro peso. Cuéntame Naira.*

Naira: *Darío, yo y Eva, pesamos lo mismo.*

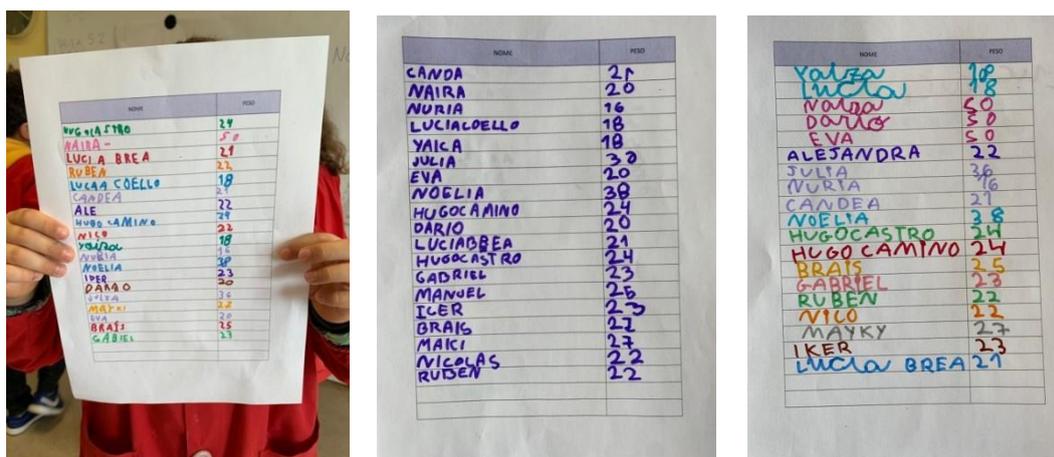
Maestra: *Ah. ¿Y cuánto es lo mismo?*

Naira: *Veinte.*

Maestra: *¿Y cuántos pesáis 20?*
 Naira: 3.
 Candea: *Yo y Luci pesamos lo mismo.*
 Maestra: *¿Y cuánto es lo mismo?*
 Candea: *Un 2 y un 1.*
 Maestra: *¿Y cuánto es 2 y 1? Veintiuno.*
 Maestra: *Tres pesan 20, dos pesan 21. Dime Lucía.*
 (.../...)
 Maestra: *¿Qué más podemos concluir?*
 Hugo C: *El peso más grande es Noelia.*
 Naira: *El número más grande es el 38 y el más pequeño es el 16.*
 Maestra: *¿Por qué?*
 Naira: *Porque no hay otro más pequeño que 16, y no hay ninguno más grande que 38.*
 Maestra: *3 que pesan 20, 2 pesan que 18..... Tenemos 16 datos, hasta 19 que estamos hoy, ¿qué ocurre?*
 Naira: *que solo hay uno*
 Maestra: *Ya esos números que le ocurre, ¿dónde están?*
 Naira: *Entre el pequeño y el grande.*

A continuación, la maestra entrega una tabla para que registren de forma individual los datos de todos, para que el alumnado aprenda como es una tabla y cómo se construye para que puedan hacerla de forma autónoma en futuras ocasiones, aunque en esta ocasión se impida a los niños que construyan sus propias tablas. Ningún alumno sigue el orden recogido en el panel: algunos empiezan por amistades, otros agrupan por peso e incluso utilizan colores (Figura 6).

Figura 6 - Registros diversos de la distribución de datos en la tabla



Fuente: elaboración propia.

Durante el segundo día, se incorporan nuevos datos de niños que no habían venido el día anterior y se obtienen nuevas conclusiones, entre ellas la moda.

Maestra: *Ayer, ¿qué obtuvimos?: estábamos 19, y teníamos que 3 pesaban 20, 2 pesaban 18, 3 pesaban 22, 2 pesaban 21, ... que el más grande pesaba 38 y el más pequeño 16. Pero... ¿eso está bien?*

Nico: *Hay que cambiarlo.*

Maestra: *¿Por qué?*

Nico: *Porque ahora hay 4 que pesan 22.*

Naira: *Ahora Brais pesa 25 y Mariana pesa 25, tenemos 2 que pesan 25.*

Maestra: *¿Lo registramos?*

Maestra: *Observamos el panel, ¿cuál es el peso que más se repite en nuestra clase?*

Nuria: *El 22.*

Maestra: *¿Por qué?*

Naira: *Porque los demás hay algunos 2, algunos 3. Es el único que tiene 4.*

También recogen los datos del aula de 5 años B en un cuadro de doble entrada.

El tercer día se hace un repaso de los datos obtenidos en ambos grupos y se profundiza en la comprensión de los datos obtenidos. Para ello, se invita a hacer tablas de recuento concretas, con el propio alumnado:

Maestra: *En vez de poner el nombre y los números, ¿cómo podemos hacer para ver mejor los resultados?*

Naira: *Poner 22, y nos levantamos.*

Maestra: *Manuel hoy no está, por eso hoy ¿cuántos hay?*

Niños: *Tres.*

Maestra: *Vale, aquí tenemos los que pesan 22, ¿pero para ver todos los resultados cómo podemos hacer?*

Hugo C: *Hacer una foto.*

Maestra: *Vale, pero si le hacemos una foto solo vemos a los que pesan 22, y no ven todos los resultados.*

(.../...)

Naira: *Tres pesan 20*

Maestra: *¿Y dónde ponemos el 20? ¿antes o después que el 22?*

Naira: *Antes.*

Maestra: *¿Quiénes pesan 20?*

Naira: *Darío, Eva y yo.*

Maestra: *¿Lo registráis y os levantáis?*

Figura 7 - Tabla de recuento concreta, con los propios niños.



Fuente: elaboración propia.

En la secuencia de imágenes de la Figura 7 se observa que, primero, escriben las categorías en la pizarra y, a continuación, se clasifican con base en estas categorías. Sin embargo, se produce una anomalía estética en la construcción debida quizás a la falta de espacio: los niños de las categorías más altas “no caben” y tienen que colocarse fuera de la pizarra, sin que hay una correspondencia con su categoría.

A continuación, para dejar constancia de los datos de cada categoría, transitan hacia el conteo en el marco de la transnumeración (marcan individualmente con una X supeso en cada categoría).

Figura 8 - Marcando su peso individualmente



Fuente: elaboración propia.

La maestra, en asamblea, plantea preguntas que inciden en la comprensión de lo que están representando:

Maestra: *Entonces, ¿qué representan las X, que pusimos encima de cada número?*

Hugo C: *Es cuantos hay en cada número.*

Candea: *Es cuánto se repiten en cada fila.*

Maestra: *Entonces, ¿alguien me dice cuántos se repite en el 20?*

Lucía C: *Tres.*

Maestra: *¿Lo registramos?*

Maestra: *¿Y en el 24?, ¿cuántos se repiten?*

Nuria: *2.*

Maestra: *¿Y en el 21?*

Gabriel: *1.*

Maestra: *Lo registramos. ¿Y en el 16?*

Eva: *3.* Julia: *No... 1.*

Maestra: *Contamos...*

Después, para seguir impulsando la comprensión, la maestra propone hacer equipos y representarlo con policubos (Figura 9):

Figura 9 - Representando datos con policubos



Fuente: elaboración propia.

Vemos, como mediante las distintas representaciones, se va profundizando en la comprensión de los datos:

Nico: *La torre más alta es la de 22. Y la más baja la de los 1.*

Candea: *Esta, esta y esta (señalando a las que tienen 1).*

Maestra: *¿Por qué la más alta es la negra?*

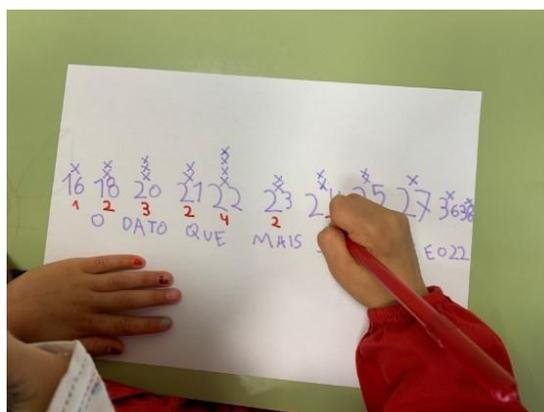
Candea: *Porque tiene más piezas.*

Maestra: *Porque tiene 4 y no le pusisteis 10.*

Candea: *Porque en la clase no hay nadie que mida 10, que pese 10.*
 Maestra: *Fíjate, ¿por qué la torre de 22 tiene 4 minós y no 10?*
 Lucía C: *Porque en clase solo hay 4 que pesan 22.*
 Maestra. *Claro.*

Y, de forma individual, lo recogen en el papel (Figura 10):

Figura 10 - Tabla de recuento y tránsito a la tabla de frecuencias



Fuente: elaboración propia.

El último día se contrastan los datos del grupo A con los del grupo B. Se realizan diversas inferencias estadísticas, y se realiza una tabla de recuento y de frecuencias doble, con los datos de ambos grupos. Finalmente, se interpretan los datos obtenidos (Figura 11).

Figura 11 - Tabla de recuento y tabla de frecuencias doble



Fuente: elaboración propia.

A partir de los niveles de comprensión de tablas estadísticas establecidos por Díaz-Levicoy *et al.* (2018), los datos obtenidos han puesto de manifiesto que la mayoría de acciones del alumnado en el marco de la experiencia descrita, se ubican en el nivel 1 (leer los datos), de manera que son capaces de leer una frecuencia o una categoría, de manera muy hábil. También contabilizan el total de alumnos que forman parte de la distribución de datos, hacen comparaciones entre datos de los dos grupos y las interpretan, lo que les sitúa también en el nivel 2 de comprensión (leer dentro de los datos), aunque no utilizan todavía operaciones aritméticas propiamente.

Aunque no ha sido el objeto de análisis de este estudio, han realizado también inferencias estadísticas, sobre todo en relación al comportamiento de los datos de los alumnos del otro grupo antes de registrarlos, lo que les sitúa en el inicio del nivel 3 (leer más allá de los datos). En cambio, por una razón obvia vinculada a los conocimientos que pueden movilizar, todavía no son capaces de leer detrás de los datos, es decir, no se han encontrado evidencias del nivel 4 de comprensión de las tablas estadísticas, que requiere ya una reflexión del conocimiento matemático y el contexto, como por ejemplo hacer valoraciones críticas sobre la forma de recoger los datos, etc.

Consideraciones Finales

En este artículo, focalizado en la educación estadística en infantil, se han presentado en primer lugar diversas recomendaciones al profesorado de esta etapa educativa acerca de las fases previas a la representación gráfica de los datos, es decir, la recogida y organización de datos a través de tablas estadísticas (de recuento y de frecuencias), ya que diversos autores han advertido la omisión de estas fases previas (BATANERO, 2001; DISESSA *et al.*, 1991; RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa; entre otros). Como se ha indicado, se trata de un aspecto relevante dentro de un ciclo de investigación estadística, ya que permiten visualizar el comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer (Estrella, 2014). Además, evitan errores tanto en la identificación de las categorías como en el recuento.

Considerando esta relevancia, se han indicado sus características principales tanto de contenido como estéticas y, además, se han descrito diversos tipos de tablas estadísticas. Así, se ha hecho mención a las tablas de recuento con los propios niños y con material asociado a ellos, o bien las tablas de recuento con dibujos y con signos diversos, tanto organizados como no organizados, como elementos previos a la tabla de frecuencias (RODRÍGUEZ-MUÑIZ *et al.*, en prensa).

En la segunda parte se ha descrito la experiencia “Registramos nuestro peso” para poder mostrar los niveles de comprensión de las tablas estadísticas (de recuento y de frecuencias) en Educación Infantil. A partir de los niveles de comprensión de tablas estadísticas establecidos por Díaz-Levicoy *et al.* (2018), los datos obtenidos han puesto de manifiesto que la mayoría de acciones del alumnado en la experiencia descrita se ubican en el nivel 1 (leer los datos) y en el nivel 2 (leer dentro de los datos), aunque no utilizan todavía operaciones aritméticas propiamente. También se han identificado algunas anomalías y errores, como por ejemplo la falta de correspondencia entre las categorías y los datos al confeccionar una tabla de recuento concreta, con los propios niños, aunque posiblemente este error concreto es debido a un problema de espacio en la pizarra donde se había colocado las categorías.

En el futuro, serán necesarios nuevos estudios que sigan analizando los niveles de comprensión de las tablas estadísticas del alumnado de Educación Infantil, junto con seguir proporcionando orientaciones al profesorado de esta etapa educativa que les permitan conocer lo que hay que hacer antes de representar los datos y, en definitiva, promover su desarrollo profesional.

Referencias

ALSINA, Á. La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. **Didácticas Específicas**, Madrid, n. 7, p. 4-22, 2012.

ALSINA, Á. Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. **Épsilon, Revista de Educación Matemática**, Sevilla, n. 95, p. 25-48, 2017a.

ALSINA, Á. Investigació Estadística a l'Educació Infantil. Recuperado de: <<https://www.youtube.com/watch?v=t6zaOF9XFGU&t=150s>>. Acceso el: 11 de Junio de 2021, 2017b.

ALSINA, Á. El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En: Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (Ed.), **Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil**, 1 ed. Madrid: Paraninfo, 2018.cap. 5, p. 173-211.

ALSINA, Á. ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. **NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas**, LaLaguna, n. 108, p. 49-74, 2021.

ALSINA, Á. “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. **PNA, Revista de investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, en prensa.

ALSINA, Á.; ESCOLA ANNEXA. Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. **Tangram – Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 4, n. 1, p. 71-98, 2021.

ALSINA, Á.; MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L.; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L.J.; GARCÍA, I., VÁSQUEZ, C.; LÓPEZ, P. Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. Manuscrito presentado para publicación, 2021.

ALSINA, Á.; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L.J.; MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L.; VÁSQUEZ, C. ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. **Épsilon - Revista de Educación Matemática**, Sevilla, n. 104, p. 99-128, 2020.

BATANERO, C. **Didáctica de la estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2001. BRUNER, J.S. **Toward a Theory of Instruction**. Reston: Harvard University Press, 1966.

CURCIO, F. **Developing graph comprehension**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. 1989.

DELMAS, R.C. A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. En: Ben-Zvi , D. y Garfield, J. (Ed.), **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**, 1 ed. Netherlands: Springer, 2004. cap. 4, p. 79-96.

DÍAZ LEVICOY, D.; MORALES, R.; ARTEAGA, P.; LÓPEZ-MARTÍN, M^a M. Conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercer año de Educación Primaria. **Educación Matemática**, México D. F, v. 32, n. 2, p. 247-277, 2020.

DÍAZ-LEVICOY, D.; BATANERO, C.; ARTEAGA, P. Dificultades de los estudiantes chilenos de educación básica en la construcción de diagramas de barra. **Paradigma**, Maracay, n. 2, p. 107-129, 2018.

DÍAZ-LEVICOY, D.; MORALES, R.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1° y 2° año de Educación Primaria. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v. 4, n. 7, p. 10-39, 2015.

DÍAZ-LEVICOY, D.; SEPÚLVEDA, A.; VÁSQUEZ, C.; OPAZO, M. Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. **Educação Matemática Pesquisa**, Sao Paulo, v. 18, n. 3, p. 1099-1115, 2016.

DISESSA, A.A.; HAMMER, D., SHERIN, B.; KOLPAKOWSKI, T. Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. **Journal of Mathematical Behaviour**, Ámsterdam, v. 10, p. 117-160, 1991.

ENGLISH, L.D. Reconceptualizing Statistical Learning in the Early Years. En: English, L. Y Mulligan, J. (Ed.), **Reconceptualizing Early Mathematics Learning**, 1 ed. Netherlands:Springer, 2013. cap. 5, p. 67-82.

ESTRELLA, S. El formato tabular: una revisión de literatura. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, San José, v. 14, n. 2, p. 1-23, 2014.

FERNÁNDEZ, X.; RUBIROLA, D. Estadística y combinatoria para el día a día de la escuela. **Aula de Innovación Educativa**, Barcelona, n. 251, p. 18-22, 2016.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

HOONG, L.Y.; KIN, H.W.; PIEN, C. L. Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 16, n. 1, p. 1-18, 2015.

PFANNKUCH, M.; WILD, C. Towards an understanding of statistical thinking. En: Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (Ed.), **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**, 1 ed. Netherlands: Springer, 2004. cap. 2, p. 17-46.

RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L.J.; MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L.; AGUILAR, Á. El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. **PNA, Revista de investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, en prensa, 2021.

VÁSQUEZ, C.; CORONATA, C.; RIVAS, H. Enseñanza de la estadística y la probabilidad de los 4 a los 8 años: una aproximación desde los procesos matemáticos en libros de texto chilenos. **PNA**,

Revista de investigación en Didáctica de la Matemática, Granada, en prensa, 2021.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). **International Statistical Review**, Boorburg, v. 67, n. 3, p. 223–265, 1999.

HISTÓRICO

Submetido: 11 de junho de 2021.

Aprovado: 09 de outubro de 2021.

Publicado: 30 de outubro de 2021.

5. DISCUSIÓN

Considerando las preguntas de investigación de esta tesis doctoral y sus correspondientes objetivos; a continuación, se discuten los principales resultados obtenidos.

5.1. Tratamiento de la modelización matemática en los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos

El análisis de los currículos de Ecuador y España, así como de varios documentos que orientan los respectivos planes de estudio de Estados Unidos, deja en evidencia la presencia, aunque en diferente medida, de la modelización matemática en los currículos de los niveles educativos de primaria, secundaria y bachillerato o su equivalente en Ecuador y Estados Unidos.

Un aspecto común a todos los documentos curriculares analizados es la implementación gradual de los procesos de modelización, en donde los modelos concretos y los modelos gráficos visuales son utilizados predominantemente en los primeros niveles escolares (3 a 11 años). Las utilidades de modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal son utilizadas con más frecuencia en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años) y la creación de modelos con su respectivo análisis, interpretación y juzgamiento del proceso de modelización es casi único en los últimos niveles educativos estudiados (15-18 años). Si bien el proceso de reflexión toma mayor importancia en los últimos niveles educativos, consideramos importante que se comience a desarrollar la criticidad y procesos de reflexión en los estudiantes desde las primeras edades.

Los hallazgos de esta tesis referente a algunos documentos de Estados Unidos, concretamente los emitidos por el NCTM, coinciden con lo expuesto por Hirsch y

McDuffie (2016) en el sentido de que los documentos de este organismo de los años 1989 y 2000 han prestado escasa atención a la modelización matemática. No obstante, la ventaja es que el NCTM cada vez viene realizando mayores esfuerzos por generar literatura que permita llevar los procesos de modelización matemática al aula.

En el caso de los CCSSM se observa una mayor incorporación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles; no obstante, se puede notar un cierto nivel de desarticulación, ya que existen algunos dominios en algunos niveles educativos en los cuales no se trabaja la modelización matemática. En este sentido, nuestros hallazgos coinciden con lo expresado por Huffman y Mentzer (2021) para quienes los planes de estudio presentan varias limitaciones para incorporar procesos de modelización en las aulas.

En Ecuador, de manera similar se nota una desarticulación en el tratamiento de la modelización matemática, pues en ocasiones se la trabaja dentro de un mismo grado educativo, pero solo en ciertos componentes curriculares. En España, a pesar de que en Educación Primaria se otorga mucha importancia a la resolución de problemas, es un inconveniente que la modelización matemática no esté incorporada de forma explícita en el currículo oficial. Esta situación mejora mucho en la Educación Secundaria y Bachillerato, donde se puede notar un tratamiento importante a lo largo de los diferentes bloques de estudio.

Finalmente, consideramos que la modelización matemática debe ser entendida como un elemento transversal, que atraviese tanto los diferentes dominios o bloques matemáticos, así como los diferentes niveles educativos y por tanto debe estar explícita en las diferentes partes del currículo matemático. Sin embargo, consideramos que no

basta simplemente con enunciarla de manera formal, es importante también orientar al profesorado sobre cómo ponerla en práctica en el aula de clases y para ello las iniciativas surgidas desde diferentes organismos internacionales como el NCTM o el ICTMA son un gran aporte.

5.2. Presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de los libros de texto ecuatorianos

En cuanto al estudio que analiza la presencia de la modelización matemática en las actividades de estadística y probabilidad propuestas en los libros de texto ecuatorianos de EGB Superior, los hallazgos obtenidos muestran, en primer lugar la notable reducción de actividades concernientes a estadística y probabilidad propuestas en los libros de texto utilizados entre los períodos lectivos 2020-2022, concretamente 145, frente a las 352 que se encontraban en los libros utilizados entre los períodos lectivos 2016-2019, esto como consecuencia de la priorización de contenidos que estableció el MinEduc debido a la pandemia ocasionada por la Covid-19.

La búsqueda del término modelo, modelación o modelización en el bloque de estadística y probabilidad de cada uno de los libros de texto arrojó los siguientes resultados: en los libros de octavo, noveno y décimo de EGB Superior correspondientes a los años 2016-2019 aparece dos, cuatro y tres veces el término modelación, respectivamente. En el caso de los libros correspondientes a los años 2020-2022, en el libro de octavo de EGB Superior no aparece ninguno de los términos mencionados, en los libros de noveno y décimo de EGB Superior aparece tan solo dos veces el término modelación en cada uno de ellos. Estos resultados muestran la poca presencia explícita del término en los diferentes libros de texto, este aspecto tiene una repercusión directa,

ya que, si no aparece explícitamente el término, difícilmente las actividades planteadas a los estudiantes cumplirán con las diferentes características que deben tener las actividades de modelización matemática.

Además, considerando que los libros de texto constituyen un recurso didáctico muy utilizado por el profesorado ecuatoriano, es preocupante encontrar que las actividades de modelización matemática en los libros (2016-2019) no llegan ni siquiera al 5%, agravándose aún más la situación en los libros (2020-2022) en donde las actividades de modelización han desaparecido totalmente.

Estos resultados coinciden con otros estudios realizados a nivel internacional, incluso en diferentes niveles educativos, por ejemplo Valencia y Valenzuela (2017) al analizar libros de texto de educación superior, encontraron que en los libros de texto que presentan actividades de modelización matemática, éstas constituyen tan solo el 2%. También concluyen que:

La educación matemática debe ir más allá e incluir ejercicios de nivel intermedio y avanzado que logren reforzar el tema mediante aplicaciones y soluciones para el mundo real, que sean de interés para los estudiantes y favorezcan el desarrollo de habilidades de orden superior. Los PM son prácticos, motivan al alumno, facilitan la comprensión de conceptos y le demuestran la clase de situaciones que las matemáticas ayudan a resolver. No obstante, su presencia en los libros de texto analizados no resulta suficiente (p. 73).

Asimismo, Cabassut y Wagner (2011) en su estudio encontraron que la modelización matemática se describía sólo implícitamente en las tareas de los libros de texto de primaria en Francia y Alemania. Según estos autores, aún existen pocas

investigaciones que se centren en los libros de texto con un enfoque explícito para analizar cómo se interpreta y explica la modelización matemática en los mismos.

Por su parte, Frejd (2013) encontró que la modelización matemática al ser una de las siete habilidades del currículo nacional de Suecia no es tratada como una noción central en los libros de texto suecos, aún más, concluye que ninguno de los libros de texto que formaron parte de su investigación contribuye realmente al cumplimiento del currículo sueco en lo referente a modelización matemática.

Zwaneveld et al. (2017) al realizar un estudio con libros holandeses, concluyen que la modelización matemática es incipiente en estos libros, a pesar de que esta se menciona de manera formal en el plan de estudios. Por su parte Krutikhina et al. (2018) manifiestan que un número insignificante de problemas aplicados en los libros de texto escolares no da la posibilidad de aprender los elementos de modelización que son muy útiles para resolver problemas reales.

Preocupa además que aún se utiliza en los libros de texto ejercicios rutinarios con ausencia completa de un proceso de contextualización, los mismos que carecen completamente de sentido para el estudiante. Si bien, los problemas contextualizados se han incrementado en conjunto en los libros 2020-2022, consideramos que esto no es aún suficiente, más aún cuando observamos la ausencia de actividades de modelización en estos últimos años. Según Ikeda (2007) la falta de libros de texto de matemáticas adecuados es un obstáculo común para la enseñanza de la modelización matemática en educación secundaria.

Por otra parte, los resultados corroboran lo encontrado por Trelles y Alsina (2017) para quienes aun cuando la modelización matemática está presente en diferente medida en los documentos curriculares e incluso en edades cada vez más tempranas, es necesario

desarrollar una adecuada articulación de este componente en los diferentes niveles educativos. Además, si bien algo se ha ganado con el hecho de que se incorpore la modelización matemática de forma explícita en los documentos curriculares, los resultados de este estudio demuestran que existe una contradicción referente a lo que se plantea en los documentos curriculares y al tratamiento que se da a la modelización matemática en los libros de texto. Adicionalmente, es importante tener presente que no basta con que la modelización matemática esté presente en estos documentos, sino que debe ir acompañada de acciones que permitan al profesorado ponerla en práctica en las aulas.

Por lo expuesto, los autores de los libros de texto podrían plantear actividades en donde los alumnos deban reunir sus propios datos estadísticos con el objetivo de tomar decisiones, un ejemplo en un contexto medioambiental sería que los alumnos desarrollarán un modelo matemático que les permita discutir y decidir que tanto puede beneficiar a su ciudad la renovación gradual de los automóviles a gasolina por automóviles híbridos o eléctricos. Otro ejemplo sería que los alumnos investiguen y recolecten datos estadísticos auténticos para generar un modelo que le permita decidir cuál es la mejor alternativa calidad-precio si alguien necesita renovar su teléfono móvil, etc. Estas actividades pueden desarrollar debates críticos en el aula sobre la utilidad de los modelos matemáticos para la toma de decisiones y cuáles son los principales elementos que se deben considerar al momento de elaborar un modelo. Además, recomendamos comenzar cada unidad del libro de texto con una auténtica actividad de modelización matemática que despierte en los estudiantes el interés por desarrollarla.

Coincidimos con Trelles et al. (2017) en señalar que la enseñanza de la matemática debe ser tratada con un nuevo enfoque, que deje de lado la simple repetición

de procesos y algoritmos mecánicos, que en ocasiones pueden incluso ser descontextualizados y sin significado para los estudiantes, sino que más bien sea entendida como un proceso reflexivo que propicie en ellos un razonamiento lógico y crítico.

Una de las limitaciones del estudio es el hecho de no abordar el tratamiento que se da a la modelización matemática en los demás bloques curriculares como Álgebra y funciones y Geometría y medida, quedando este aspecto como una línea de trabajo abierta para futuras investigaciones.

5.3. La modelización matemática a través de las Actividades generadoras de modelos (MEA'S por sus siglas en inglés)

En este apartado, se pone de manifiesto que algunos de los principales beneficios del trabajo sistemático de la modelización matemática es que permite acceder a conocimientos matemáticos que tienen un papel cada vez más importante tanto en múltiples aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como también dentro de la propia educación matemática, como por ejemplo: formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usando de forma cada vez más eficaz el razonamiento matemático y conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.

Sin embargo, a pesar de la importancia de la modelización, varios estudios (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022; Kaiser et al., 2010; Kuntze, 2011; Ng, 2015; Paolucci y Wessels, 2017; Tan y Ang, 2013; entre otros) han puesto de manifiesto que una parte considerable del profesorado y de los profesores en formación tiene conocimientos limitados sobre cómo fomentar este proceso matemático en los alumnos. Así, con el propósito de favorecer el desarrollo profesional del profesorado se ha descrito

y ejemplificado un recurso didáctico para trabajar la modelización matemática en el aula a través de las Actividades Reveladoras de Pensamiento (*Modeling-Eliciting Activities o MEA*, por sus siglas en inglés), que se fundamentan en los siguientes seis principios: de construcción, de realidad, de autoevaluación, de documentación, de prototipo efectivo y de generalización (Lesh et al., 2000).

Además, en consonancia con los objetivos de la presente investigación, los recursos diseñados están enfocados en el bloque de estadística y probabilidad a partir de datos reales. En esta misma línea, estudios recientes como el de Aymerich y Albarracín (2021) también corroboran la necesidad de trabajar la modelización matemática e identificar el rol que esta juega en el aprendizaje de conceptos estadísticos.

Adicionalmente, consideramos que la incorporación sistemática de estas actividades con el apoyo de *software* educativo como Desmos, que permite observar el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos de trabajo, puede contribuir a que progresivamente los alumnos usen representaciones que les permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. De esta manera, en sintonía con los planteamientos de Romo-Vázquez et al. (2019) se pretende contribuir a superar ciertas restricciones institucionales al momento de implementar la modelización matemática en las aulas.

5.4. Una actividad de modelización matemática en Educación

Primaria con datos auténticos

Se ha presentado el análisis de los modelos generados por el alumnado de Educación Primaria a partir de una actividad de modelización matemática diseñada a

partir de los principios teóricos de las MEA (Lesh et al., 2000) e implementada en el contexto de la COVID-19.

En la actualidad, el desarrollo tecnológico está conduciendo a cambios fundamentales en los tipos y niveles de comprensión y habilidades matemáticas que se necesitan para tener éxito más allá de la escuela, sobre todo cuando asistimos a una sociedad dominada por los datos, en donde es cada vez más necesaria la competencia del alumnado para interpretarlos. Sin embargo, ante esta realidad parece haber pocos cambios en la naturaleza de los problemas que los niños y las niñas continúan encontrando en el plan de estudios de matemáticas (Lesh y Zawojewski, 2007; Trelles y Alsina, 2017). En este sentido, coincidimos con English (2010) en que los poderosos procesos matemáticos que se necesitan para resolver los problemas actuales y del futuro como construir, describir, explicar, predecir y representar, junto con cuantificar, coordinar, organizar y transformar datos no están suficientemente presentes en los problemas tradicionalmente entregados al alumnado.

Por esta razón, es cada vez más necesario ofrecer problemas contextualizados, potencialmente significativos y que verdaderamente desafíen los procesos de pensamiento. En esta dirección, consideramos que las actividades planteadas al alumnado bajo el enfoque teórico de la modelización matemática desarrollada con datos auténticos, contribuyen a cubrir esta necesidad y a mostrar al alumnado la utilidad de las matemáticas en la sociedad, sobre todo en el nivel de Educación Primaria en donde la implementación de la modelización matemática es aún escasa.

Los resultados de nuestro estudio muestran que los siete alumnos participantes comprenden el problema y formulan sus propias estrategias de solución; además, cuatro

de ellos utilizan tecnología para representar los datos. En algunos casos emplean –aunque informalmente– conceptos de estadística y probabilidad que habitualmente no están presentes en el plan de estudios de estos niveles, como identificación de valores atípicos, rango, intervalos de confianza y números aleatorios. Por tanto, se evidencia que de alguna forma el trabajo con datos reales promueve que algunos alumnos sean capaces de utilizarlos.

Además, los procesos de transnumeración y matematización (Groth, 2015) se vieron reflejados, pues la mayoría del alumnado participante –cinco de siete– emplea técnicas transnumerativas (Chick, 2004) para interpretar mejor los datos, así como procesos de matematización, siendo los alumnos que utilizan técnicas más complejas los que generan modelos que permiten aproximarse de mejor manera a lo que ocurre en la realidad y por tanto a modelos más eficaces.

Las inferencias informales, aunque en diferentes niveles estuvieron presentes en la mayoría de los modelos, y la capacidad del alumnado para realizarlas debería ser aprovechada por el profesorado a través del diseño de actividades que fortalezcan estos procesos. Es de vital importancia que el alumnado más joven se involucre en la inferencia informal, aun cuando este aspecto sea desatendido en el plan de estudios (Makar, 2016).

Los modelos elaborados muestran que todos los alumnos participantes son capaces de relacionar aspectos extramatemáticos y cómo estos pueden incidir en los datos; de esta forma son capaces de elaborar conjeturas y suposiciones a partir de datos reales. En este sentido, la actividad de modelización reveló los conocimientos matemáticos y extramatemáticos utilizados por el alumnado para su solución.

Otro elemento importante que hay que considerar es la eficacia de los modelos generados a pesar de que tanto el alumnado como el profesorado no tenían experiencia previa en actividades de este tipo. Sin embargo, la gestión de la actividad por parte de las maestras con la respectiva orientación de nuestra parte fue un aspecto clave para la comprensión adecuada de la actividad por parte de los participantes. Este tipo de actividades permite al alumnado observar la verdadera utilidad de las matemáticas y cómo estas nos sirven para comprender fenómenos, predecirlos y tomar decisiones. En este sentido, coincidimos con el planteamiento de Mercado-Sánchez (2020, p. 9), para quien:

La modelización matemática es una estrategia del razonamiento para traducir, interpretar de forma compacta y cuantitativa, el comportamiento de nuestro universo, de la naturaleza, de la sociedad, de la economía y un interminable etcétera.

Asimismo, al realizar una correspondencia de los modelos obtenidos con el perfil académico de los participantes, se observó que los modelos más eficaces fueron generados por el alumnado que tiene un rendimiento académico sobresaliente en la asignatura. Si bien el estudio no perseguía este objetivo, a partir de este hallazgo planteamos la posibilidad de que actividades de este tipo, además de ser propuestas a todo el alumnado, formen parte de programas específicos de enriquecimiento curricular dirigidos al alumnado que tiene afinidad por las matemáticas. Por consiguiente, esta perspectiva puede ser tratada en futuros estudios.

La principal limitación del estudio ha sido la escasa participación del alumnado al que se entregó en un principio la actividad, así como la ausencia del trabajo en grupo; a pesar de ello, encontramos procesos interesantes de modelización entre el alumnado que

la desarrolló. Otra limitación surgida es el no poder acceder a los razonamientos del alumnado que no quedan registrados en el papel pero que tienen mucha importancia, elemento que debe considerarse para futuros estudios. Por último, durante todo el desarrollo de la actividad se insistió a los alumnos en el trabajo autónomo, y si bien manifestaron que cumplieron con esta premisa y la constante realización de preguntas en el proceso daba indicios de ello, las propias condiciones no permitían tener un control exhaustivo de este aspecto.

Asimismo, coincidimos con Gallart, Ferrando et al. (2015) y Gallart, García-Raffi et al. (2019) en que las actividades de modelización constituyen actividades enriquecedoras para el alumnado, pero no se debe descuidar que para obtener los resultados óptimos el profesorado debe formarse continuamente e incorporar frecuentemente este tipo de actividades en su práctica docente. En futuros estudios, será necesario seguir analizando la implementación de actividades de modelización en los primeros niveles escolares, poniendo también especial atención en el papel que juega el profesorado para implementar y gestionar estas actividades, lo que posibilitará detectar posibles lagunas de conocimiento pedagógico, para a partir de ellas ofrecer orientaciones que permitan mejorar este tipo de prácticas ya sea en formato presencial o en línea.

5.5. Recomendaciones al profesorado acerca de la representación de datos estadísticos y su correspondiente implicación para el desarrollo de procesos de modelización matemática

En esta sección, centrada en la educación estadística en infantil se han presentado en primer lugar diversas recomendaciones al profesorado de esta etapa educativa acerca de las fases previas a la representación gráfica de los datos; es decir, la recogida y

organización de datos a través de tablas estadísticas (de recuento y de frecuencias), ya que diversos autores han advertido la omisión de estas fases previas (Batanero, 2001; Disessa et al., 1991; Rodríguez-Muñiz et al., 2021; entre otros). Aspectos relevantes dentro de un ciclo de investigación estadística ya que permiten visualizar el comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer (Estrella, 2014). Además, evitan errores tanto en la identificación de las categorías como en el recuento.

Considerando esta relevancia, se han indicado sus características principales tanto de contenido como estéticas. Además, se han descrito diversos tipos de tablas estadísticas. Así, se ha hecho mención a las tablas de recuento con los propios niños y con material asociado a ellos o bien las tablas de recuento con dibujos y con signos diversos, tanto organizados como no organizados, como elementos previos a la tabla de frecuencias (Rodríguez-Muñiz et al., 2021).

Adicionalmente, se ha descrito la experiencia “Registramos nuestro peso” para poder mostrar los niveles de comprensión de las tablas estadísticas (de recuento y de frecuencias) en Educación Infantil. A partir de los niveles de comprensión de tablas estadísticas establecidos por Díaz-Levicoy et al. (2018), los datos obtenidos han puesto de manifiesto que la mayoría de acciones del alumnado en la experiencia descrita se ubican en el nivel 1 (leer los datos) y en el nivel 2 (leer dentro de los datos), aunque no utilizan todavía operaciones aritméticas propiamente. También se han identificado algunas anomalías y errores, como por ejemplo la falta de correspondencia entre las categorías y los datos al confeccionar una tabla de recuento concreta con los propios niños, aunque posiblemente este error concreto es debido a un problema de espacio en la pizarra donde se había colocado las categorías.

El diseño y desarrollo de actividades que propicien conocimientos estadísticos en tempranas edades es fundamental con miras a trabajar en procesos de modelización matemática, pues son varias las investigaciones (Albarracín, 2017; Albarracín y Gorgorio, 2020; Aymerich y Albarracín, 2021; English, 2006; 2010; 2013; 2014; English y Watson, 2018; English y Watters, 2005; entre otros) que ponen de manifiesto la importancia de estos conocimientos.

Finalmente, es importante indicar que a futuro serán necesarios nuevos estudios que sigan analizando los niveles de comprensión de las tablas estadísticas del alumnado de Educación Infantil, junto con seguir proporcionando orientaciones al profesorado de esta etapa educativa, que le permita conocer lo que hay que hacer antes de representar los datos y en definitiva, promover su desarrollo profesional, así como sentar las bases adecuadas con proyección a trabajar procesos de modelización.

6. CONCLUSIONES

En esta sección presentamos una síntesis global de las conclusiones obtenidas en las diferentes fases de esta tesis. En este sentido, consideramos que el trabajo desarrollado contribuye a tener un conocimiento más profundo acerca del tratamiento que se le da a la modelización matemática en los currículos de los países que han formado parte del estudio, principalmente en lo que se refiere a la transición entre Educación Primaria y Educación Secundaria. Adicionalmente, contribuye a conocer el nivel de presencia de la modelización matemática en los libros de texto que fueron analizados y también a identificar y comprender las características de los modelos elaborados por estudiantes de Educación Primaria al trabajar con actividades de modelización matemática con datos auténticos. Permite también brindar ciertas recomendaciones al profesorado con el propósito de que los estudiantes tengan las bases necesarias y de esta manera puedan trabajar en actividades de modelización matemática en edades cada vez más tempranas.

En concreto y en correspondencia con las preguntas de investigación y los objetivos planteados, concluimos que:

- El análisis de los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos evidencia la presencia de la modelización matemática en los diferentes niveles de estudio de cada uno de los países. En estos documentos, los modelos concretos y los modelos gráficos visuales predominan en los primeros niveles escolares (3 a 11 años), los modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años) y la creación de modelos con su respectivo proceso en los últimos niveles educativos (15 a 18 años).
- En los currículos de Ecuador, España y Estados Unidos existe una notoria desarticulación tanto entre los diferentes bloques o dominios de contenido

matemático, así como en los diferentes años de estudio. En el caso ecuatoriano, por ejemplo, a pesar de que uno de los objetivos del subnivel de Educación Básica Media, equivalente a los últimos niveles de Educación Primaria (9 a 11 años) hace alusión de forma directa a los procesos de modelización matemática, en los demás componentes: destrezas, criterios de evaluación, orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, e indicadores de evaluación, la modelización matemática está ausente.

- Una necesidad urgente en los diferentes currículos analizados es el tratamiento transversal que se debe dar a la modelización matemática; es decir, la misma debe ser abordada de forma gradual a lo largo de los diferentes niveles de estudio y en todos los bloques o dominios de contenido matemático.
- El estudio llevado a cabo en los libros de texto ecuatorianos demuestra que, si bien la modelización matemática está presente en los documentos curriculares, aunque con ciertas fortalezas y debilidades descritas anteriormente, la presencia de esta en los libros de texto es casi nula. Los datos que arroja el análisis de los dos grupos de libros muestra que las actividades de modelización propuestas no constituyen ni el 5% del total de actividades, dejando en evidencia una contradicción entre lo que se enuncia en los documentos curriculares y lo que se plantea en los libros de texto.
- Los hallazgos de nuestra investigación aportan con evidencias que permiten concluir que el alumnado de Educación Primaria, a través de las actividades de modelización matemática puede abordar conceptos matemáticos que habitualmente no están presentes en los planes de estudio, tales como intervalos de confianza, rango, identificación de valores atípicos y números aleatorios.

Asimismo, los procesos de transnumeración y matematización se vieron reflejados en el trabajo de modelización desarrollados por el alumnado participante, siendo los alumnos que utilizan técnicas más complejas los que generan modelos que se aproximan mejor a la realidad y por tanto modelos más eficaces. Adicionalmente, las actividades de modelización matemática ponen en evidencia la capacidad que tiene el alumnado para desarrollar inferencias informales, aunque en diferentes niveles, este aspecto debe ser aprovechado por el profesorado a través del diseño de actividades que fortalezcan estos procesos.

- Los resultados de esta tesis contribuyen a una mejor comprensión de los procesos de modelización matemática en Educación Primaria y su correspondiente transición hacia la Educación Secundaria, consecuentemente promueven a que el profesorado de estas etapas educativas pueda diseñar e implementar con mayor eficacia actividades de modelización matemática.
- El trabajo desarrollado con el alumnado de educación infantil respecto a la construcción de tablas estadísticas pone de manifiesto que los niños leen los datos y leen dentro de los datos, consideramos que actividades de este tipo pueden ser aprovechadas como un trabajo previo al desarrollo de actividades de modelización matemática en estas edades.

Lo indicado en líneas anteriores, nos permite reflexionar acerca de las implicaciones educativas y de investigación que tienen los resultados del presente trabajo. En este sentido, una de las implicaciones educativas es el hecho de contar con un diagnóstico acerca de cómo está presente la modelización matemática en los currículos y recursos utilizados por el profesorado de los países que han sido objeto de estudio, esto se constituye en un primer paso obligatorio con miras a que las respectivas autoridades

educativas y el profesorado potencien las fortalezas detectadas, y a su vez hagan los respectivos esfuerzos para superar las debilidades, como por ejemplo aquellas relacionadas con la desarticulación en los diferentes niveles educativos, o la ausencia de la modelización matemática, tanto en algunos elementos del currículo, como en los diferentes dominios o bloques curriculares, así como en los libros de texto.

Adicional a ello, una importante implicación educativa es contar con evidencia de que la mayoría de actividades planteadas a los estudiantes a través de los libros de texto son memorísticas, repetitivas y en ocasiones poco o nada contextualizadas; esto conlleva a exigir a los autores de los libros de texto a mejorar estos recursos, en donde la implementación de actividades de modelización matemática se convierte en algo necesario y urgente.

Otra de las implicaciones educativas es el contar con mayor evidencia respecto a los beneficios de implementar actividades de modelización matemática con datos auténticos en edades tempranas, de esta manera se puede incidir en el profesorado para que diseñe e implemente actividades de modelización en sus aulas. Además, al brindar orientaciones metodológicas al profesorado se está incidiendo de manera directa en su formación profesional permanente.

En lo concerniente a las implicaciones de investigación, podemos decir que el presente trabajo contribuye fundamentalmente a fortalecer la literatura científica respecto a los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de Educación Primaria en el ámbito de la estadística y la probabilidad. A su vez, abre la posibilidad de futuras investigaciones centradas en los procesos de modelización matemática en edades más tempranas, así como investigaciones que pongan especial atención en el papel que

juega el profesorado de estos niveles educativos al momento de implementar y gestionar estas actividades.

Finalmente, al ser la modelización matemática una importante temática dentro de la investigación en educación matemática, consideramos que los aportes de esta tesis se integran adecuadamente al conocimiento producido al momento por la comunidad científica internacional, en donde la mayor parte de investigaciones se han centrado en Educación Secundaria, Bachillerato y Universidad, siendo la investigación en edades tempranas una necesidad importante.

6.1. Limitaciones del estudio y perspectivas de trabajo futuro

Una de las limitaciones del estudio es el no contar con un análisis de los currículos de más países, lo cual permitiría tener una visión más global del tratamiento que se da a la modelización matemática en estos documentos. Así mismo, otra de las limitaciones es el no haber realizado un estudio con más libros de texto y en los diferentes bloques o dominios de contenido matemático, preferentemente de otros países, esto debido a la gran dificultad de acceder a estos materiales, pues a diferencia de Ecuador, en muchos países no se utiliza un único libro de texto; finalmente una limitación importante es el no haber podido trabajar de forma presencial con los estudiantes en actividades de modelización matemática, esto debido al confinamiento de la población en los momentos del desarrollo de esta tesis.

Sin embargo, estos aspectos a su vez nos permiten visualizar nuevas perspectivas de trabajo a futuro, e identificar varias aristas en las que se puede dar continuidad a la investigación en lo que a modelización matemática se refiere, concretamente durante la transición entre las etapas educativas de primaria y secundaria. Desde este enfoque, cabe

resaltar que se ha dado inicio a este trabajo. Como una de las primeras acciones se ha participado en Ecuador en un concurso nacional de proyectos de investigación convocado por CEDIA. Al respecto, es grato indicar que nuestro proyecto denominado: “Caracterización de los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de educación primaria” y que tiene como principal objetivo: Identificar las principales características de los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de Sexto Año de Educación General Básica de las instituciones participantes, mediante un estudio de casos e investigación basada en diseño, con el propósito de contribuir científicamente a la literatura existente sobre el tema y a la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática en el Ecuador; ha resultado ganador y consecuentemente ha recibido el respectivo financiamiento.

Algunos objetivos específicos del proyecto son: Capacitar a través del equipo investigador al menos al 80% del profesorado de Educación General Básica de las unidades educativas participantes respecto a la Modelización Matemática y su implementación en el aula; implementar las actividades de Modelización Matemática diseñadas en los grupos de sexto año de Educación General Básica mediante trabajo colaborativo entre los profesores de los estudiantes participantes y el equipo investigador, analizar los procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes participantes para identificar sus principales características; contribuir al incremento de la producción científica ecuatoriana en el ámbito de la Educación Matemática y aportar con evidencia científica al Ministerio de Educación y unidades educativas respecto a las ventajas y/o desventajas de la implementación de procesos de modelización matemática dentro de las aulas, con el propósito de que estas evidencias sean utilizadas para el diseño o reformulación del currículo, libros de texto y/o recursos utilizados en el proceso

enseñanza-aprendizaje. Sin duda, esto nos da la posibilidad de profundizar en la comprensión de los procesos de modelización matemática desarrollados por los estudiantes y de esta forma identificar las principales fortalezas y debilidades al implementar la modelización matemática en las aulas.

Otras líneas de trabajo a futuro son: el estudio de la formación inicial y permanente del profesorado en lo que a modelización matemática se refiere, el uso de recursos tecnológicos como apoyo para el desarrollo de procesos de modelización, los aspectos motivacionales por parte del alumnado y profesorado al trabajar en ambientes de modelización matemática, etc.

7. REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. <https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2020). Mathematical modeling projects oriented towards social impacts as generators of learning opportunities: a case study. *Mathematics*, 8(20), 1-20. <https://doi.org/10.3390/math8112034>
- Alsina, Á. (2012). La Estadística y la Probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*(7), 4-22.
- Alsina, Á. (2017a). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 34(95), 25-48.
- Alsina, Á. (2017b). Investigación Estadística a l'Educació Infantil. Recuperado el 11 de junio de 2021, de <https://www.youtube.com/watch?v=t6zaOF9XFGU&t=150s>
- Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En Muñoz-Catalán, M. y Carrillo, J. (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Paraninfo.
- Alsina, Á. (2021). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*(108), 49-74.
- Alsina, Á. (En prensa). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*.
- Alsina, Á. y Escola Annexa. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram - Revista de Educação Matemática*, 4(1), 71-98. <https://doi.org/10.30612/tangram.v4i1.14396>
- Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L., García, I., Vásquez, C. y López, P. (2021). Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. *Manuscrito presentado para publicación*.
- Alsina, Á., Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L. y Vásquez, C. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilidad en contexto? Estrategias recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(104), 99-128.

- Alsina, Á., Salgado, M., Toalongo, X. y Trelles, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática - Ridema*, 5(1), 1-21. <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/34513>
- Alsina, C., García-Raffi, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA*(54), 51-53.
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2021). Modelización matemática en actividades estadísticas: identificando elementos clave del diseño para promover la generación de modelos en el estudio de la variabilidad. *Cuadrante*, 30(2), 179-199. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23686>
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Banco Mundial. (Mayo de 2020). *Bancomundial.org*. Obtenido de Covid-19: Impacto en la educación y respuestas de política pública: <https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/33696/148198SP.pdf?sequence=6&isAllowed=y>
- Barquero, B. y Jessen, B. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(17), 98-113. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del aplicacionismo en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*(50), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.
- Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*(23), 1-10. <https://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf>
- Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). COMAP, Inc.
- Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research-Categorising the TSG21 papers. *ICME 11 International Congress on Mathematics Education* (pp. 1-13). ICME.

- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling - Categorising the TSG21 papers. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1-17). Roskilde University. https://rucforsk.ruc.dk/ws/portalfiles/portal/3820977/IMFUFA_461.pdf#page=6
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *Proceeding of the 21th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58. https://www.researchgate.net/publication/279478754_Mathematical_Modelling_Can_It_Be-Taught_And_Learnt
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and applications in mathematics education. *The 14th ICMI study*. Springer.
- Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Cabassut, R. y Wagner, A. (2011). Modelling at primary school through a french-german comparison of curricula and textbooks. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling* (pp. 559-568). Springer Science+Business Media B.V. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_54
- Carreira, S., Amado, N. y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 199-210). Springer. doi: 10.1007/978-94-007-0910-2_21
- Chan, C. (2010). Tracing primary 6 students model development within the mathematical modeling process. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 40-57.
- Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research* (pp. 207-214). MERGA.

- Cifuentes-Faura, J. (2020). Consecuencias en los Niños del Cierre de Escuelas por Covid-19: El Papel del Gobierno, Profesores y Padres. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, 9(3), 1-12.
- Common Core Standards Writing Team. (2013). *Progressions for the Common Core Standards in Mathematics (draft) High School, Modeling*. Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.
- Consortium for Mathematics and its Applications; Society for Industrial and Applied Mathematics. (2019). *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education* (2a. ed.). En Garfunkel, S. Montgomery, M. (Eds.) <https://www.siam.org/Publications/Reports/Detail/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-mathematical-modeling-education>
- Coob, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823. <https://doi.org/10.2307/2975286>
- Creswell, J. y Garrett, A. L. (2008). The "movement" of mixed methods research and the role of educators. *South African Journal of Education*, 28, 208-333.
- Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Daher, W. (2021). Middle school students' Motivation in solving modelling activities with technology. *EURASIA*, 17(9), 1-13. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>
- Delmas, R. (2004). A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-96). Springer.
- Díaz Levicoy, D., Morales, R., Arteaga, P. y López-Martín, M. (2020). Conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercer año de Educación Primaria. *Educación Matemática*, 32(2), 247-277. <https://doi.org/10.24844/EM3202.10>
- Díaz, M. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*(45), 33-41.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. y Arteaga, P. (2018). Dificultades de los estudiantes chilenos de educación básica en la construcción de diagramas de barra. *Paradigma*, 39(2), 107-129. doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2018.p107-129.id703
- Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1° y 2° año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 4(7), 10-39. <https://doi.org/10.33871/22385800.2015.4.7.10-39>

- Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1099-1115.
- DiSessa, A. A., Hammer, D., Sherin, B. y Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behaviour*, 10(2), 117-160.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. doi: 10.1007/s10649-005-9013-1
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford, *Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 287-300). Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-0561-1_25
- English, L. D. (2013). Reconceptualizing Statistical Learning in the Early Years. En L. English y J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 67-82). Springer. doi:10.1007/978-94-007-6440-8_5
- English, L. D. (2014). Promoting statistical literacy through data modelling in the early school years. En Chernoff, E. y Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 441-458). Springer. doi: 10.1007/978-94-007-7155-0_23
- English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50, 103-115. doi: 10.1007 / s11858-017-0896-y
- English, L. D. y Watters, J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58-79. <https://doi.org/10.1007/bf03217401>
- Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 18-22. doi: 10.15517/AIE.V14I2.14817
- Estrella, S. y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (pp. 1-7).
- EU Kids Online. (2018). *Los niños y niñas de la brecha digital en España*. Madrid: Unicef.
- Fernández, M. y Caballero, P. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: Fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1), 201-217. <https://doi.org/10.6018/reifop/20.1.229641>
- Fernández, X. y Rubirola, D. (2016). Estadística y combinatoria para el día a día de la escuela. *Aula de Innovación Educativa*(251), 18-22.

- Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. <https://doi.org/10.4995/msel.2015.3681>
- Florensa, I., García, F. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de casos en distintos niveles educativos. *Avances de investigación en Educación Matemática*(17), 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. American Statistical Association.
- Frejd, P. (2011). Mathematical modelling in upper secondary school in Sweden: an exploratory study. *Licentiate thesis*. Linköping University. <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:403178/COVER01.pdf>
- Frejd, P. (2013). An analysis of mathematical modelling in Swedish textbooks in upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(3), 59-93. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/18_3_059096_frejd.pdf
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics*, 32(2), 124-158. <http://www.jstor.org/stable/749671>
- GAISE College Report ASA Revision Committee. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education college report 2016*. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GaiseCollege_Full.pdf
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números*, 88, 93-103.
- Gallart, C., García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. <https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>
- García, F., Gascón, J., Higuera, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 226-246. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF02652807.pdf>
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 305-314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31

- Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14* (pp. 75-84). Springer.
- Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling -Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Groth, R. (2015). Research commentary: Working at the boundaries of mathematics education and statistics education communities of practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 4-16. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0004>
- Guerrero-Ortiz, C. y Borromeo Ferri, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA*, 16(4), 309-341. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329>
- Gundermann-Kröll, H. (2013). El método de los estudios de caso. En M. L. Tarrés (Ed.), *Observar, escuchar y comprender sobre la tradición cualitativa en la Investigación* (pp. 231-264). El Colegio de México-FLACSO México.
- Hernandez-Martínez, P. y Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this? A case study on estudents' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245-257.
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. México: McGraw-Hill.
- Hirsch, C. y McDuffie, A. (2016). Preface. En C. Hirsch y A. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. (1a. ed., pp. ix-xi). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hoong, L. Y., Kin, H. W. y Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-18. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16_1/TME16_1.pdf
- Huffman, T., Mentzer, N. (2021). The impact of modeling-eliciting activities on high school student design performance. *International Journal of Technology and Desing Education*, 31, 255-280. <https://doi.org/10.1007/s10798-019-09557-x>
- Ikeda, T. (2007). Possibilities for, and obstacles to teaching and applications and modeling in lower secondary levels. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 457-462). Springer.

- Instituto de Estadística de Cataluña. (24 de Febrero de 2020). *idescat.cat*. <https://www.idescat.cat/indicadors/?id=anuals&n=13300&lang=es> Visitada el 3-06-2020.
- Instituto Nacional de Estadística. (2019). *Encuesta sobre equipamiento y uso de tecnologías de información y comunicación en los hogares*. Instituto Nacional de Estadística. https://www.ine.es/prensa/tich_2019.pdf
- Jablonka, E. y Gellert, U. (2007). Mathematisation - demathematisation. En U. Gellert y E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: social, philosophical and educational ramifications* (pp. 1-18). Sense Publishers.
- Johansson, M. (2005). The mathematics textbook. From artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10(3-4), 43-64. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/10_34_043064_johansson.pdf
- Jung, H., Stehr, E. y He, J. (2019). Mathematical modeling oportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science and Mathematics*, 119(6), 353-365. <https://doi.org/10.1111/ssm.12359>
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht : ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. En G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser y J. Meyer (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 64-84). Verlag Franzbecker.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302-310. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G., Blomøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85. <https://doi.org/10.1007/BF02655882>
- Kaiser, G., Schwarz, B. y Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies, ICTMA 13* (pp.433-444). Springer.
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. SAGE Publications.
- Krutikhina, M., Vlasova, V., Galushkin, A. y Pavlushin, A. (2018). Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), 1305-1315. <https://doi.org/10.29333/ejmste/83561>
- Kuntze, S. (2011). In-service and prospective teachers' views about modelling tasks in the mathematics classroom - results of a quantitative empirical study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling (ICTMA 14)* (pp. 279-288). Springer.

- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. y Jansem, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 47-67. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Yoon, C. (2004). *What is distinctive in (Our Views about) Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving Learning and Teaching?* En Henn, H. y Blum, W. (Eds.) Springer.
- Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). CT: IAP.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum Associates.
- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling works as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM Mathematics Education*, 54(1), 67-81. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>
- Makar, K. (2016). Developing young children's emergent inferential practices in statistics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 1-24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107820>
- Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Pearson Educación, S.A.
- Mercado-Sánchez, G. (2020). Las matemáticas en los tiempos del coronavirus. *Educación Matemática*, 32(1), 7-10. doi: 10.24844/EM3201.01
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016a). *Currículo de los niveles de Educación Obligatoria*. <http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Curriculov2.pdf>
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016b). *Matemática 8° grado. Texto del estudiante*. Editorial SMEcuaediciones.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016c). *Matemática 9° grado. Texto del estudiante*. Editorial SMEcuaediciones.

- Ministerio de Educación del Ecuador. (2020a). *Matemática 8 EGB - Subnivel Superior. Texto del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2020b). *Texto integrado 9 EGB - Subnivel Superior*. Editorial Don Bosco.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021a). *Texto Integrado 8 EGB - Subnivel Superior*. Universidad Andina Simón Bolívar.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021b). *Matemática 9 EGB - Subnivel Superior. Libro del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021c). *Matemática 10 EGB - Subnivel Superior. Texto del Estudiante*. Maya Ediciones Cía. Ltda.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2021d). *Texto integrado 10 EGB - Subnivel Superior*. Universidad Andina Simón Bolívar.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (19 de diciembre de 2021e). *Estadísticas educativas-Datos Abiertos*. <https://educacion.gob.ec/datos-abiertos/>
- Montero, L. y Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Moore, D. (1990). Uncertainly. En L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). National Academy Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Matematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standars for Teaching Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices: Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standars for Mathematics*.
- Ng, K. (2013). Initial perspectives of teacher professioinal development on mathematical modeling in Singapore: A framework. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Connecting to Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 427-436). Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6540-5_36
- Ng. K., Widjaja, W., Chan, C. y Seto C. (2015). Developing teaching competencies through videos for facilitation of mathematical modelling in Singapore primary

- schools. En S. F. Ng (Ed.), *The contributions of video and audio technology towards professional development of mathematics teachers* (pp. 15-38). Springer.
- Organization for Economic Cooperation and Development. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*. OECD. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Órganos Legislativos Nacionales. (25 de Julio de 2012). Ecuador: Decreto Ejecutivo No. 1241 de 2012, Reglamento General a la ley Orgánica de Educación Intercultural. <https://www.refworld.org/docid/54f429ad4.html>
- Paolucci, C. y Wessels, H. (2017). An examination of preservice teachers' capacity to create mathematical modelling problems for children. *Journal of Teacher Education*, 68(3), 330-344.
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares: cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona. <http://hdl.handle.net/11162/65448>
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning* (pp. 17-46). Springer.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, de 3 de enero de 2015. <https://boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37-consolidado.pdf>
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 01 de marzo de 2014. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf>
- Reys, B. J., Reys, R. R. y Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66. https://www.researchgate.net/profile/Oscar-Chavez-3/publication/234571079_Why_Mathematics_Textbooks_Matter/links/571a3d6108ae7f552a472c80/Why-Mathematics-Textbooks-Matter.pdf
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñoz-Rodríguez, L. y Aguilar, Á. (En prensa). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B. y Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 161-183. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Ruiz-Higueras, L., García, F. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación*

Matemática en la Infancia, 2(1), 95-118.
<https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>

- Rule, P. y John, V. (2015). A Necessary Dialogue: Theory in Case Study Research. *International Journal of Qualitative Methods*, 14(4), 1-11. doi: 10.1177/1609406915611575
- Sierra, L., Juan, M. A., Garcia-Raffi, L. M. y Gómez, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. *Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1-20). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.
- Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. <https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100>
- Tan, L. S. y Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling- A case study. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown. (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 405-415). Springer.
- Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools*. The Falmer Press.
- Toalongo, X., Alsina, A., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98. doi:10.3280/CAD2021-001006
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, A. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>
- Trelles, C. y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.
- Trelles, C., Bravo, F. y Barrazueta, J. (2017). ¿Cómo Evaluar los Aprendizajes en Matemáticas? *INNOVA Research Journal*, 2(6), 35-51. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Trelles, C., Toalongo, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(102), 43-59.

- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. <http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v11/n31/pdf/rmie11n31scB02n02es.pdf>
- UNESCO. (2020). *Enseñar en tiempos de COVID-19. Una guía teórico-práctica para docentes*. Paris: UNESCO.
- Valencia, A. y Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática*, 29(3), 51-78. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/02REM29-3.pdf>
- Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Síntesis.
- Vargas, V., Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Vásquez, C., Coronata, C. y Rivas, H. (En prensa). Enseñanza de la estadística y la probabilidad de los 4 a los 8 años: una aproximación desde los procesos matemáticos en libros de texto chilenos. *PNA, Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*.
- Watson, J. y English, L. D. (2015). Introducing the practice of statistics: Are we environmentally friendly? *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 585-613. doi: 10.1007/s13394-015-0153-z
- Wess, R. y Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling - supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409039/document>
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: design and methods*. SAGE Publications, Inc.
- Zwaneveld, B., Perrenet, J., Overveld van, K. y Borghuis, T. (2017). Mathematical modelling in dutch textbooks: is it genuine mathematical modelling? En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 503-514). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_42

8. APENDICES

8.1. Apéndice A

MATERIAL COMPLEMENTARIO. Versión de la actividad en español

LECTURA COMPRENSIVA

China

*¿Qué se sabe del coronavirus de Wuhan?

El nuevo coronavirus SARS-CoV-2, que produce la enfermedad conocida como **Covid-19**, mantiene en vilo al mundo entero. **América Latina** se ha convertido en mayo en el foco principal del brote, que situó en marzo en **Europa** y llevó al continente a cerrar fronteras y a confinar a millones de ciudadanos. La pandemia se originó en China a finales de diciembre, pero el continente americano ha sido la siguiente víctima por la rápida extensión de los contagios en Estados Unidos. Hasta ahora, lamentablemente, han fallecido más de 387.000 personas y se han confirmado **más de seis millones y medio de casos** en todo el mundo.

China, con 4.634 fallecidos y 83.022 personas contagiadas, ha logrado contener al virus casi cuatro meses después del inicio de la crisis y **ya no es el país con mayor número de contagios, un puesto que ostenta Estados Unidos**, el único país del mundo con más de 1,8 millones de casos positivos. Le siguen Brasil, con más de 584.000 contagiados; Rusia, con más de 440.000; y el Reino Unido, con más de 283.000. España tiene el quinto lugar, con más de 240.000 casos, e Italia, el sexto, con más de 234.000. En cuanto a fallecimientos, Estados Unidos también lidera el ranking con más de 107.000 defunciones, Reino Unido supera los 39.000, ya por encima de Italia, que ha registrado más de 33.000; Francia, donde sobrepasan los 29.000; **y España, que suma más de 27.100**.

Se desconoce el origen del brote, cuyos primeros casos se detectaron en diciembre. Se pensaba que el foco estaba en un **mercado de marisco y pescado de la ciudad de Wuhan**, capital de la provincia de Hubei, pero investigadores de la Academia de Ciencia de China lo han descartado. Sí concluyen que el virus **se propagó por este lugar**, pero no tienen claro si mutó en algún animal antes de pasar al ser humano.

¿Qué grado de mortalidad tiene?

Según los últimos datos, **el índice de letalidad del nuevo coronavirus entre los contagiados se sitúa en el 4,5 %**. Sin embargo, los investigadores consideran que aún es demasiado pronto para calcular con precisión su letalidad, en parte debido a que los casos leves no son diagnosticados y no se registran, además de que en ocasiones la enfermedad cursa de manera asintomática. Esto haría que la cifra se redujera significativamente.

¿Cómo se propaga?

El virus se propaga principalmente de persona a persona, sobre todo **mediante gotículas respiratorias que se producen cuando una persona infectada tose o estornuda**. Estas gotitas pueden llegar a la boca o la nariz de las personas que se encuentren cerca y posiblemente entrar a los pulmones al respirar.

Las gotas con el virus también se pueden depositar en diferentes superficies y objetos, que al tocarlos se pueden incorporar a las manos, lo que es potencialmente infeccioso si la persona luego con esa misma mano se toca la boca, la nariz y posiblemente los ojos.

La Organización Mundial de la Salud advierte de que "muchas personas que contraen la enfermedad solo presentan síntomas leves". Esto, dice, "es particularmente cierto en las primeras etapas de la enfermedad" y, "por lo tanto, **es posible contagiarse de alguien que, por ejemplo, solamente tenga una tos leve y no se sienta enfermo**".

Asimismo, una vez superada la enfermedad se inicia la **fase de excreción del virus**, cuya duración media es de 20 días. Un trabajo publicado sugiere que la excreción prolongada indica **que los pacientes todavía pueden ser capaces de propagar la Covid-19 en esta fase**. Además, el coronavirus fue detectable hasta el final en las personas fallecidas.

Por ahora, no existen evidencias de que el nuevo coronavirus se transmita entre mascotas y seres humanos, pero Hong Kong puso en cuarentena a un perro con “débil positivo” el 28 de febrero, un caso que también investiga la OMS.

*Fuente: Extracto de la noticia ¿Qué se sabe del coronavirus de Wuhan?, de fecha 4 de junio de 2020, tomado de: <https://www.rtve.es/noticias/20200604/se-sabe-del-nuevo-coronavirus-china/1996067.shtml>

¿QUÉ SE SABE DEL CORONAVIRUS DE WUHAN?: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN

1. ¿Sobre qué trata la noticia? _____
2. ¿De qué forma ha impactado el Coronavirus en el mundo? _____
3. Al hablar de la Covid-19, ¿qué países son los que tienen los índices más elevados de casos positivos en el mundo? _____
4. ¿De qué manera se propaga la Covid-19? _____

ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN

El presente trabajo es una actividad de modelización matemática, en donde una de las características es trabajar con datos reales (Tabla A1). Sin embargo, la situación descrita (El Caso de Cataluña) es hipotética y persigue únicamente objetivos de enseñanza-aprendizaje.

EL CASO DE CATALUÑA

Los responsables de Sanidad del gobierno catalán, a partir de los datos registrados hasta el momento tanto de los casos de contagio como de las defunciones, quiere conseguir una información sobre cuáles serán los datos para finales de junio sobre la Covid-19. La intención del gobierno autónomo es tener una visión clara del escenario posible y tomar las mejores decisiones tanto para la salud de los ciudadanos como para la reactivación económica con miras al verano. Para cumplir con este objetivo ha solicitado tu ayuda, para ello debes escribir una carta en la que indiques un procedimiento para pronosticar el número de casos contagiados y defunciones a fecha de 30 de junio de 2020, con base en la Tabla A1.

Es necesario que en la carta expliques con detalle cómo obtienes este pronóstico y, sobre todo, que justifiques todas las suposiciones y cálculos realizados para que los responsables de Sanidad puedan decidir si el método propuesto es adecuado (puedes utilizar todo lo aprendido en clase y también diagramas, gráficos estadísticos, etc., o todo lo que consideres importante). Además, debes reflexionar si el procedimiento puede ser útil para otras Comunidades Autónomas o incluso para otros países, e incluir los resultados de esta reflexión en la carta.

Por último, antes de entregar la carta, será necesario que, al menos una vez, solicites ayuda o consejo a tu maestra sobre tu trabajo, para que las dudas o inquietudes que tengas puedan ser aclaradas y puedas presentar tu trabajo. Ánimo y mucho éxito en tus aportes, recuerda que eres capaz de conseguirlo. Desde ya los responsables de Sanidad de la Generalitat de Cataluña te lo agradecen. Hasta pronto.

Tabla A1. Datos de la Covid-19 en Cataluña

Fecha	Casos			Defunciones de casos confirmados o sospechosos
	Confirmados	Posibles	Total	Totales
Junio 2020				
03/06/2020	67461	Dato no disponible	Dato no disponible	12333
02/06/2020	67233	Dato no disponible	Dato no disponible	12323
01/06/2020	67083	Dato no disponible	Dato no disponible	12289
Mayo 2020				
31/05/2020	67060	Dato no disponible	Dato no disponible	12280
30/05/2020	66904	Dato no disponible	Dato no disponible	12269
29/05/2020	66545	Dato no disponible	Dato no disponible	12241
28/05/2020	66288	Dato no disponible	Dato no disponible	12222

27/05/2020	65901	Dato no disponible	Dato no disponible	12180
26/05/2020	65402	Dato no disponible	Dato no disponible	12154
25/05/2020	65303	Dato no disponible	Dato no disponible	11877
24/05/2020	65060	226759	291819	11848
23/05/2020	64818	222599	287417	11835
22/05/2020	64794	221156	285950	11800
21/05/2020	64037	216269	280306	11766
20/05/2020	63259	211049	274308	11723
19/05/2020	62978	206494	269472	11703
18/05/2020	60148	205164	265312	11666
17/05/2020	63441	199173	262614	11554
16/05/2020	63339	197158	260497	11511
15/05/2020	63114	193596	256710	11477
14/05/2020	62615	189666	252281	11440
13/05/2020	61677	185281	246958	11403
12/05/2020	61355	180618	241973	11351
11/05/2020	60976	177265	238241	11248
10/05/2020	60728	174546	235274	11160
09/05/2020	60605	172150	232755	11109
08/05/2020	60404	168640	229044	11050
07/05/2020	60007	164117	224124	10965
06/05/2020	59621	157113	216734	10831
05/05/2020	58559	147784	206343	10785
04/05/2020	57900	141914	199814	10682
03/05/2020	57506	136643	194149	10508
02/05/2020	57363	133822	191185	10452
01/05/2020	57093	130346	187439	10401
Abril 2020				
30/04/2020	55137	120795	175932	10311
29/04/2020	54324	114841	169165	10211
28/04/2020	51672	111107	162779	10073
27/04/2020	50162	105448	155610	9923
26/04/2020	49088	101909	150997	9764
25/04/2020	48273	97922	146195	9646
24/04/2020	47633	92889	140522	9492
23/04/2020	46629	87232	133861	9186
22/04/2020	45875	82523	128398	9050
21/04/2020	44793	77311	122104	8845
20/04/2020	43695	72984	116679	8441
19/04/2020	42610	69837	112447	8237
18/04/2020	41992	67113	109105	8067
17/04/2020	40988	63128	104116	7881
16/04/2020	39736	59159	98895	7576

15/04/2020	39375	55457	94832	7097
14/04/2020	36505	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
13/04/2020	35197	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
12/04/2020	34726	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
11/04/2020	34027	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
10/04/2020	32984	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
09/04/2020	31727	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
08/04/2020	31043	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
07/04/2020	29647	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
06/04/2020	28323	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
05/04/2020	26824	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
04/04/2020	26032	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
03/04/2020	24734	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
02/04/2020	23460	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
01/04/2020	21804	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
Marzo 2020				
31/03/2020	19991	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
30/03/2020	18773	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
29/03/2020	16157	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
28/03/2020	15026	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
27/03/2020	14263	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
26/03/2020	12940	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
25/03/2020	11592	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
24/03/2020	9937	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
23/03/2020	7864	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
22/03/2020	5925	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
21/03/2020	4704	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
20/03/2020	4203	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
19/03/2020	3270	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
18/03/2020	2702	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
17/03/2020	1866	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
16/03/2020	1394	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
15/03/2020	903	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
14/03/2020	715	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
13/03/2020	509	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
12/03/2020	319	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
11/03/2020	184	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
10/03/2020	129	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
09/03/2020	105	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
08/03/2020	82	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
07/03/2020	53	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
06/03/2020	40	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
05/03/2020	32	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible

04/03/2020	27	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
03/03/2020	21	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
02/03/2020	17	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
01/03/2020	14	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
Febrero 2020				
29/02/2020	9	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
28/02/2020	6	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
27/02/2020	3	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
26/02/2020	3	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
25/02/2020	2	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible
24/02/2020	1	Dato no disponible	Dato no disponible	Dato no disponible

Fuente: Idescat, a partir de datos del Departamento de Salud.

8.2. Apéndice B