

## Capítulo 9

# Cálculo de la SNR para un sistema 2D-LDA

### 9.1. Introducción

En el capítulo anterior, hemos podido presentar las formulaciones necesarias para estimar la SNR de un sistema LDA clásico de una dimensión, en particular para la técnica diferencial Doppler. En el caso de que tengamos un sistema LDA para la detección de dos componentes de velocidad, como es el caso que nos interesa y que hemos denominado sistema 2D-LDA, su resultado será aproximadamente igual al de un sistema de una dimensión, con alguna diferencia a destacar.

Primero de todo se presenta, igual que se hizo en el Capítulo 8 y de una manera análoga, el esquema de nuestro sistema 2D-LDA. Asimismo el cálculo de la potencia de señal y de ruido a la salida de un fotodetector (señal *burst*), y de las señales asociadas como la señal Pedestal y Doppler.

Posteriormente, y a partir de los resultados anteriores, se calculará la relación señal a ruido para el sistema 2D-LDA ( $SNR_{2D}$ ), y la expresaremos en función de las formulaciones basadas en la teoría de *Lorenz-Mie*.

Para finalizar presentamos también el cálculo de los vectores de propagación y polarización, en función de la disposición particular de los haces del sistema a estudio, para cada uno de ellos.

### 9.2. Esquema 2D-LDA

La estrategia utilizada en esta tesis en el desarrollo de un sistema LDA para la detección de dos componentes de la velocidad de un partícula mediante la técnica diferencial

Doppler, ha sido iluminar la zona de medida con tres haces de luz en una disposición geométrica determinada. De esta manera, podremos detectar dos vectores de velocidad, además del signo de cada una de ellas, mediante la utilización de moduladores acusto-ópticos en dos de los haces, con únicamente una fuente de luz coherente de HeNe (@632,8nm) y un conjunto de divisores de haz, espejos y lentes.

La disposición geométrica elegida presentada en la figura 9.1, no es nada mas que la configuración habitual y básica de un sistema clásico LDA de una dimensión, presentada en la figura 8.1, con la inclusión de un tercer haz. Así, se producirá en la zona de medida o dispersión, tres batidos o interferencias, donde cada una de ellas producirá en la misma señal *burst*, tres señales Doppler superpuestas al pedestal de la señal.

Las frecuencias de batido serán proporcionales a tres vectores de velocidad de la partícula que atraviesa la zona de medida en un plano, y espectralmente separables por el subsistema electrónico o por el subsistema de adquisición y estimación espectral. Una de ellas se descarta por ser información redundante, la de menor frecuencia, y las otras dos las podemos caracterizar y tratar separadamente. A pesar de esto, vamos a presentar el cálculo de la SNR en el caso más genérico, para los tres batidos, ya que no va a implicar más complejidad en el cálculo, y sí un punto de vista más general.

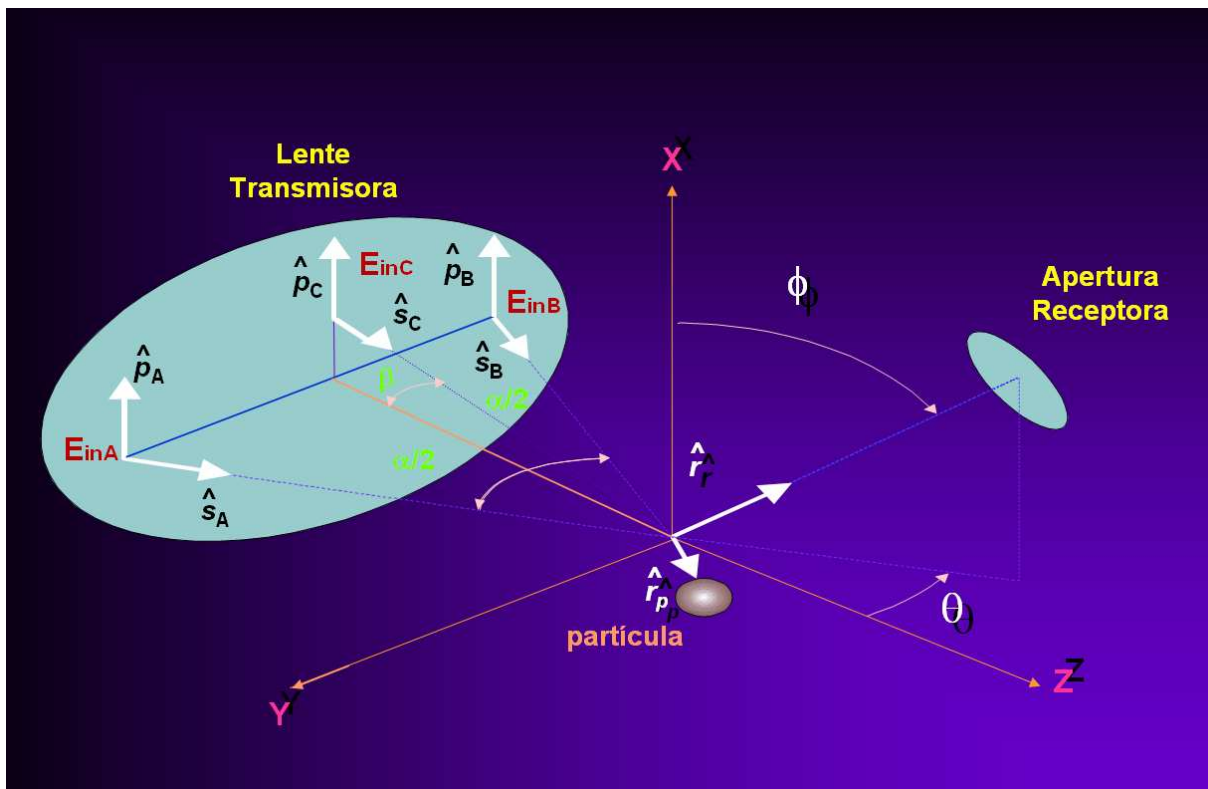


Figura 9.1 Geometría Sistema 2D-LDA

Para calcular la SNR a la salida del módulo fotodetector de un sistema 2D-LDA, para cada una de las dos componentes de velocidad, en el caso de la técnica diferencial Doppler, el modelo geométrico está formado por tres haces de luz (subíndices A, B y C para cada uno de ellos), polarizados linealmente con direcciones arbitrarias  $\hat{p}_A$ ,  $\hat{p}_B$ ,  $\hat{p}_C$  y direcciones de propagación  $\hat{s}_A$ ,  $\hat{s}_B$ ,  $\hat{s}_C$ , focalizados en un punto por una lente transmisora. El ángulo entre los haces A y B, en el sistema de coordenadas de la figura 9.1 centrado en el punto focal de la lente transmisora, es  $\alpha$ , mientras que el ángulo que forma el vector de propagación del haz C,  $\hat{s}_C$ , y el eje Z es  $\beta$ , y los puntos en la apertura receptora se definen a partir de un sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . La energía dispersada será recibida por una apertura receptora, localizada en una de las dos direcciones preferentemente utilizadas para los sistemas LDA, en  $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$  por retrodispersión (RD) y  $\theta = 180^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ , recepción en dispersión hacia delante (DHD).

El análisis realizado para obtener la SNR del sistema, para cada una de las dos componentes de velocidad, parte de las mismas consideraciones y restricciones en el modelo que se aplican para un sistema LDA de una dimensión del apartado 8.2, con el único añadido de que ahora tenemos tres haces de luz en vez de dos.

### 9.3. Intensidad dispersada por un sistema 2D-LDA

En un sistema 2D-LDA, tres haces de luz con un determinado campo eléctrico  $E_{inA}$ ,  $E_{inB}$  y  $E_{inC}$  o intensidad  $I_{inA}$ ,  $I_{inB}$  y  $I_{inC}$ , inciden sobre la partícula que atraviesa el punto de medida del fluido. El campo total dispersado por la partícula es la suma de los campos dispersados

$$E_{d2D} = E_{dA} + E_{dB} + E_{dC} \quad (9.1)$$

y expresando el campo eléctrico en función de la intensidad total dispersada, donde  $\epsilon_o$  es la permitividad dieléctrica en el vacío,  $\mu_o$  la permeabilidad magnética en el vacío y  $n_m$  el índice de refracción del fluido es

$$I_{d2D} = n_m \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} |E_{d2D}|^2 \quad (9.2)$$

La intensidad dispersada  $I_{d2D}$ , en un punto de la apertura receptora definida en el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  de la figura 9.1, en función de las intensidades incidentes y dispersadas por cada haz  $I_{inA}$ ,  $I_{inB}$ ,  $I_{inC}$  y  $I_{dA}$ ,  $I_{dB}$  y  $I_{dC}$  respectivamente, de la longitud de onda del láser en el fluido  $\lambda$ , del número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  y del

parámetro de dispersión para cada haz,  $\sigma_A(\theta, \phi)$ ,  $\sigma_B(\theta, \phi)$  y  $\sigma_C(\theta, \phi)$  (obtenidos a partir de la teoría de dispersión *Lorenz-Mie*), se puede expresar como

$$I_{d_{2D}}(r, \theta, \phi) = I_{dDC_{2D}} + I_{dAC_{2D}}(t) \quad (9.3)$$

donde la componente continua de la señal dispersada  $I_{dDC_{2D}}$  será igual a la suma de las intensidades dispersadas por cada haz

$$I_{dDC_{2D}} = I_{dA} + I_{dB} + I_{dC} \quad (9.4)$$

$$I_{dA} = I_{inA} |\sigma_A(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{k^2 r^2} \quad (9.5)$$

$$I_{dB} = I_{inB} |\sigma_B(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{k^2 r^2} \quad (9.6)$$

$$I_{dC} = I_{inC} |\sigma_C(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{k^2 r^2} \quad (9.7)$$

y la componente alterna  $I_{dAC_{2D}}(t)$ , que estará formada por tres términos, debidos a las tres interferencias que se producen entre los tres haces: batido entre A y B,  $I_{dAC_{A-B}}(t)$ , batido entre A y C,  $I_{dAC_{A-C}}(t)$  y batido entre B y C,  $I_{dAC_{B-C}}(t)$

$$I_{dAC_{2D}}(t) = \frac{1}{k^2 r^2} \left( I_{dAC_{A-B}}(t) + I_{dAC_{A-C}}(t) + I_{dAC_{B-C}}(t) \right) \quad (9.8)$$

- Batido entre A y B:  $I_{dAC_{A-B}}(t) \implies$  Frecuencia de la mezcla  $f_{dop_{A-B}}$

$$I_{dAC_{A-B}}(t) = 2\sqrt{I_{inA}I_{inB}} \cdot \Re \left\{ \sigma_A(\theta, \phi) \cdot \sigma_B^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dop_{A-B}}t)} \right\} \quad (9.9)$$

- Batido entre A y C:  $I_{dAC_{A-C}}(t) \implies$  Frecuencia de la mezcla  $f_{dop_{A-C}}$

$$I_{dAC_{A-C}}(t) = 2\sqrt{I_{inA}I_{inC}} \cdot \Re \left\{ \sigma_A(\theta, \phi) \cdot \sigma_C^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dop_{A-C}}t)} \right\} \quad (9.10)$$

- Batido entre B y C:  $I_{dAC_{B-C}}(t) \implies$  Frecuencia de la mezcla  $f_{dop_{B-C}}$

$$I_{dAC_{B-C}}(t) = 2\sqrt{I_{inB}I_{inC}} \cdot \Re \left\{ \sigma_B(\theta, \phi) \cdot \sigma_C^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dop_{B-C}}t)} \right\} \quad (9.11)$$

substituyendo las ecuaciones (9.9), (9.10) y (9.11) en (9.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{dAC_{2D}}(t) &= \frac{2}{k^2 r^2} \left( \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot \Re \left\{ \sigma_A(\theta, \phi) \cdot \sigma_B^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dopA-B} t)} \right\} + \right. \\
&+ \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot \Re \left\{ \sigma_A(\theta, \phi) \cdot \sigma_C^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dopA-C} t)} \right\} + \\
&\left. + \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot \Re \left\{ \sigma_B(\theta, \phi) \cdot \sigma_C^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dopB-C} t)} \right\} \right) \quad (9.12)
\end{aligned}$$

donde esas tres variaciones armónicas a las frecuencias  $f_{dopA-B}$ ,  $f_{dopA-C}$  y  $f_{dopB-C}$ , dependerán de las frecuencias Doppler de cada uno de los haces dispersados,  $f_{dopA}$ ,  $f_{dopB}$  y  $f_{dopC}$ , debido al movimiento de la partícula por la zona de dispersión, con las siguientes relaciones

$$f_{dopA-B} = f_{dopA} - f_{dopB} \quad (9.13)$$

$$f_{dopA-C} = f_{dopA} - f_{dopC} \quad (9.14)$$

$$f_{dopB-C} = f_{dopB} - f_{dopC} \quad (9.15)$$

Una manera más cómoda de expresar matemáticamente los fenómenos de batido entre señales, es la de utilizar formas sinusoidales en la componente alterna de la intensidad dispersada. De esta forma la ecuación (9.12) la podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
I_{dAC_{2D}}(t) &= \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopA-B} t - \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)) + \\
&+ \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopA-C} t - \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)) + \\
&+ \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopB-C} t - \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)) \quad (9.16)
\end{aligned}$$

Así, una vez obtenidas la componente alterna y continua de la intensidad, substituyendo las ecuaciones (9.4) (9.5) (9.6) (9.7) (9.16) en (9.3), obtenemos la intensidad total dispersada  $I_d(r, \theta, \phi)$  por una partícula en un punto del espacio

$$\begin{aligned}
I_{d_{2D}}(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{k^2 r^2} \left[ |I_{inA}| |\sigma_A(\theta, \phi)|^2 + |I_{inB}| |\sigma_B(\theta, \phi)|^2 + |I_{inC}| |\sigma_C(\theta, \phi)|^2 + \right. \\
&+ \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopA-B} t - \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)) + \\
&+ \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopA-C} t - \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)) + \\
&\left. + \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dopB-C} t - \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)) \right] \quad (9.17)
\end{aligned}$$

donde de la misma manera que para un sistema LDA de una dimensión se ha definido una

componente Doppler local y Fase Doppler local a la amplitud y desfase de la componente sinusoidal de la parte alterna de la intensidad dispersada respectivamente, y a dos señales Pedestal a los dos términos de la parte continua, vistas en la ecuación (8.10), para una sistema 2D-LDA se define análogamente tres componentes o amplitudes de señal Doppler, las fases de las señales Doppler, y tres señales Pedestal para cada punto del detector de la intensidad dispersada de la ecuación (B.22), definidos de la siguiente manera

**Componentes Doppler local:**

$D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)$  : Componente Doppler local de la mezcla entre los haces A y B.

$D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)$  : Componente Doppler local de la mezcla entre los haces A y C.

$D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)$  : Componente Doppler local de la mezcla entre los haces B y C.

**Fase Doppler local:**

$\psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)$  : Fase de la componente Doppler local de la mezcla entre los haces A y B.

$\psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)$  : Fase de la componente Doppler local de la mezcla entre los haces A y C.

$\psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)$  : Fase de la componente Doppler local de la mezcla entre los haces B y C.

**Componentes Pedestal local:**

$P_A(\theta, \phi)$  : Componente Pedestal local del haz A.

$P_B(\theta, \phi)$  : Componente Pedestal local del haz B.

$P_C(\theta, \phi)$  : Componente Pedestal local del haz C.

donde la relación de las tres componentes de Pedestal local con las propiedades de dispersión de la teoría de *Lorenz-Mie* es

$$P_A(\theta, \phi) = | \sigma_A(\theta, \phi) |^2 \quad (9.18)$$

$$P_B(\theta, \phi) = | \sigma_B(\theta, \phi) |^2 \quad (9.19)$$

$$P_C(\theta, \phi) = | \sigma_C(\theta, \phi) |^2 \quad (9.20)$$

Substituyendo finalmente las ecuaciones (9.18), (9.20) y (9.20) en la ecuación (B.22), obtenemos la expresión de la intensidad dispersada en función de las componentes Pedestal, Doppler y Fase local

$$\begin{aligned}
I_{d_{2D}}(r, \theta, \phi) = & \frac{1}{k^2 r^2} \left[ I_{inA} P_A(\theta, \phi) + I_{inB} P_B(\theta, \phi) + I_{inC} P_C(\theta, \phi) + \right. \\
& + \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dop_{A-B}} t - \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)) + \\
& + \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dop_{A-C}} t - \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)) + \\
& \left. + \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dop_{B-C}} t - \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)) \right] \quad (9.21)
\end{aligned}$$

#### 9.4. Flujo de luz dispersada

Una vez obtenida la intensidad en cada punto del detector, el valor de la potencia total o flujo de luz  $Pw_{d_{2D}}$ , recibida por una apertura de un cierto tamaño y forma, definida por su ángulo sólido de recepción  $\Omega$ , con el sistema de referencia centrado en la partícula, aplicando la ecuación (8.13) en (9.21), tenemos

$$\begin{aligned}
Pw_{d_{2D}} = & \frac{1}{k^2} \left[ \left( I_{inA} \bar{P}_A + I_{inB} \bar{P}_B + I_{inC} \bar{P}_C \right) + \right. \\
& + \left( \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-B}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{A-B}} t - \bar{\psi}_{2D_{A-B}}) \right) \left. \right] + \\
& + \left( \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-C}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{A-C}} t - \bar{\psi}_{2D_{A-C}}) \right) \left. \right] + \\
& + \left( \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot \bar{D}_{2D_{B-C}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{B-C}} t - \bar{\psi}_{2D_{B-C}}) \right) \left. \right] \quad (9.22)
\end{aligned}$$

donde  $\bar{P}_A$ ,  $\bar{P}_B$  y  $\bar{P}_C$ , son las señales Pedestal total de cada uno de los tres haces,

$$\bar{P}_A = \int_{\Omega} |\sigma_A(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (9.23)$$

$$\bar{P}_B = \int_{\Omega} |\sigma_B(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (9.24)$$

$$\bar{P}_C = \int_{\Omega} |\sigma_C(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (9.25)$$

$\bar{D}_{2D_{A-B}}$ ,  $\bar{D}_{2D_{A-C}}$  y  $\bar{D}_{2D_{B-C}}$  las señales Doppler total y  $\bar{\psi}_{2D_{A-B}}$ ,  $\bar{\psi}_{2D_{A-C}}$  y  $\bar{\psi}_{2D_{B-C}}$  la Fase total de las señales Doppler de las tres interferencias, definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \overline{D}_{2D_{A-B}} &= \left[ \left( \int_{\Omega} D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{\Omega} D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_{2D_{A-C}} &= \left[ \left( \int_{\Omega} D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{\Omega} D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_{2D_{B-C}} &= \left[ \left( \int_{\Omega} D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{\Omega} D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.28)$$

$$\overline{\psi}_{2D_{A-B}} = \arctan \left[ \frac{\int_{\Omega} D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) d\Omega}{\int_{\Omega} D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) d\Omega} \right] \quad (9.29)$$

$$\overline{\psi}_{2D_{A-C}} = \arctan \left[ \frac{\int_{\Omega} D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) d\Omega}{\int_{\Omega} D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) d\Omega} \right] \quad (9.30)$$

$$\overline{\psi}_{2D_{B-C}} = \arctan \left[ \frac{\int_{\Omega} D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \sin \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) d\Omega}{\int_{\Omega} D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cos \psi_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) d\Omega} \right] \quad (9.31)$$

A la vista de los resultados obtenidos para un sistema 2D-LDA de la intensidad dispersada y de la potencia recibida por un detector, frente a los de un sistema LDA de una dimensión, vemos claramente que los resultados son los mismos, con el añadido de que en el caso de un sistema de dos dimensiones, en la señal de salida o *burst* aparecen tres señales pedestales y tres señales Doppler, debido a la interferencia de tres haces láser y no de dos, como es el caso de una dimensión.



## 9.5. Potencia de ruido

A la salida de un fotodetector, debido a la entrada de una cierta potencia de luz, denominada señal *burst*, producida por un sistema 2D-LDA, obtendremos no sólo señal útil sino además un cierto nivel de ruido producido por diferentes procesos.

En el capítulo 8 vimos detalladamente los principales y diferentes tipos de señales ruidosas que aparecen a la salida de un módulo transductor luz-corriente (PIN, APD o Fotomultiplicador) [Adr78], y consideramos de todos los tipos de ruido, que de tipo shot o cuántico era el más importante y el único considerado en el cálculo del nivel de ruido a la salida de un sistema LDA de una dimensión, por las razones esgrimidas y justificadas en el apartado 8.5

Para el caso del sistema 2D-LDA de tres haces, se aplican las mismas consideraciones a nivel de ruido, aunque los resultados son diferentes, ya que en este caso, las señales que aparecen a la entrada del fotodetector son tres pedestales y tres señales Doppler. Esto hará que los resultados sean sensiblemente diferentes, no por tener más señales interferencia o de batido, sino por tener tres señales Pedestal,  $\bar{P}_A$  para el haz A,  $\bar{P}_B$  para el haz B y  $\bar{P}_C$  para el haz C.

A la salida de un fotodetector de eficiencia cuántica  $\eta_q$  y un ancho de banda  $BW$ , donde incide una potencia de señal *burst*  $Pw_{d_{2D}}$  sobre una apertura receptora, que focaliza toda la energía sobre el área activa del fotodetector, obtendremos un nivel de corriente  $i_{2D}(t)$ , que será la suma de la corriente asociada a la señal Doppler  $i_{D_{2D}}(t)$ , a la señal Pedestal  $i_{p_{2D}}(t)$  y a la señal de ruido  $\tilde{i}_n(t)$ , considerando solo ruido de tipo shot.

$$i_{2D}(t) = i_{D_{2D}}(t) + i_{p_{2D}}(t) + \tilde{i}_n(t) \quad (9.32)$$

En este caso, las corrientes asociadas a las componentes Doppler y Pedestal, estarán formadas por tres términos cada una de ellas, y sus valores serán, substituyendo la ecuación (9.22) en (8.22), que nos relaciona potencia incidente de luz con la fotocorriente a la salida de un detector, respectivamente

$$i_{P2D}(t) = \frac{\eta_q q_e}{h\nu_o k^2} \langle I_{inA} \bar{P}_A + I_{inB} \bar{P}_B + I_{inC} \bar{P}_C \rangle \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned}
i_{D_{2D}}(t) &= \frac{\eta_q q_e}{h\nu_o k^2} \left[ \left( \sqrt{I_{inA} I_{inB}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-B}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{A-B}} t - \bar{\psi}_{2D_{A-B}}) \right) + \right. \\
&+ \left( \sqrt{I_{inA} I_{inC}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-C}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{A-C}} t - \bar{\psi}_{2D_{A-C}}) \right) + \\
&+ \left. \left( \sqrt{I_{inB} I_{inC}} \cdot \bar{D}_{2D_{B-C}} \cdot \cos(2\pi f_{dop_{B-C}} t - \bar{\psi}_{2D_{B-C}}) \right) \right] \quad (9.34)
\end{aligned}$$

Por lo que se refiere a la potencia de ruido shot total a la salida del fotodetector, substituyendo las ecuaciones (8.21) y (8.22) en (9.22), se obtiene

$$\langle i_n^2(t) \rangle = \frac{2q_e^2 BW \eta_q}{h\nu_o k^2} [\langle I_{inA} \rangle \bar{P}_A + \langle I_{inB} \rangle \bar{P}_B + \langle I_{inC} \rangle \bar{P}_C] \quad (9.35)$$

donde  $\langle I_{inA} \rangle$ ,  $\langle I_{inB} \rangle$  y  $\langle I_{inC} \rangle$  son los valores medios de las intensidades incidentes de los haces A, B y C respectivamente en el punto de medida,  $q_e$  es la carga del electrón,  $h$  la constante de Planch, y  $\nu_o$  la frecuencia de la luz incidente en el vacío.

## 9.6. SNR en un sistema 2D-LDA

Una vez obtenidas las expresiones que nos van a permitir cuantificar la señal útil a la salida de un fotodetector y del ruido asociado, ya estamos en disposición de calcular la  $SNR_{2D}$  de un sistema 2D-LDA (señal *burst*). La relación señal a ruido de un sistema 2D-LDA se define como el cuadrado del valor medio de la señal útil respecto al valor cuadrático medio de la señal de ruido  $\langle i_n^2(t) \rangle$ , de la misma manera que la definimos en la ecuación (8.27) para el caso de una dimensión.

En este caso particular de un sistema formado por tres haces, no existe solo una señal útil, es decir sólo una componente Doppler que dependa de un único batido entre haces. Realmente es un sistema que genera a su salida una señal eléctrica, que hemos denominado señal *burst*, formada por tres señales útiles, que serán portadoras de la información de tres vectores de la velocidad de una partícula en un determinado plano. Esos tres vectores de velocidad del movimiento de la partícula, van a depender de las frecuencias de batido generadas por las interferencias entre los tres haces,  $A - B$ ,  $A - C$  y  $B - C$ . Así lo mas conveniente será definir una SNR para cada una de las componentes de velocidad de manera independiente.

La SNR para cada una de las tres componentes Doppler de cada interferencia, suponiendo ruido de tipo shot provocado por la potencia dispersada por la partícula, especificados en el apartado 8.5, será

$$SNR_{2D_{A-B}} = \frac{\langle i_{D_{2D_{A-B}}}^2(t) \rangle}{\langle i_n^2(t) \rangle} \quad (9.36)$$

$$SNR_{2D_{A-C}} = \frac{\langle i_{D_{2D_{A-C}}}^2(t) \rangle}{\langle i_n^2(t) \rangle} \quad (9.37)$$

$$SNR_{2D_{B-C}} = \frac{\langle i_{D_{2D_{B-C}}}^2(t) \rangle}{\langle i_n^2(t) \rangle} \quad (9.38)$$

Calculando el valor cuadrático medio de las corrientes asociadas a las señales Doppler, de las ecuaciones (9.34), obtenemos

$$\langle i_{D_{2D_{A-B}}}^2(t) \rangle = \left[ \frac{\eta_q q_e}{4h\nu_o k^2} \right]^2 \langle I_{inA} I_{inB} \rangle \overline{D}_{2D_{A-B}}^2 \quad (9.39)$$

$$\langle i_{D_{2D_{A-C}}}^2(t) \rangle = \left[ \frac{\eta_q q_e}{4h\nu_o k^2} \right]^2 \langle I_{inA} I_{inC} \rangle \overline{D}_{2D_{A-C}}^2 \quad (9.40)$$

$$\langle i_{D_{2D_{B-C}}}^2(t) \rangle = \left[ \frac{\eta_q q_e}{4h\nu_o k^2} \right]^2 \langle I_{inB} I_{inC} \rangle \overline{D}_{2D_{B-C}}^2 \quad (9.41)$$

Imponemos la condición de la técnica diferencial Doppler sobre las intensidades de los tres haces incidentes sobre la partícula, las cuales han de ser iguales ( $I_{in} = I_{inA} = I_{inB} = I_{inC}$ ) y definimos la señal pedestal total  $\overline{P}_{2D}$  como la suma de los pedestales asociados a cada uno de los haces incidentes A, B y C

$$\overline{P}_{2D} = \overline{P}_A + \overline{P}_B + \overline{P}_C \quad (9.42)$$

Substituyendo las ecuaciones (9.39), (9.40), (9.41) y (9.35) en (9.36), (9.37) y (9.38), y considerando que los valores medios de las intensidades incidentes de cada uno de los haces de luz, se consideran en el caso que la partícula dispersora esté en el centro de la interferencia gaussiana, y por tanto sus intensidades serán máximas, la SNR de un sistema 2D-LDA, para cada una de las tres componentes son

$$SNR_{2D_{A-B}} = \frac{I_{in} \eta_q}{4h\nu_o B W k^2} \frac{\overline{D}_{2D_{A-B}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.43)$$

$$SNR_{2D_{A-C}} = \frac{I_{in} \eta_q}{4h\nu_o B W k^2} \frac{\overline{D}_{2D_{A-C}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.44)$$

$$SNR_{2D_{B-C}} = \frac{I_{in}\eta_q}{4h\nu_o BW k^2} \frac{\overline{D}_{2D_{B-C}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.45)$$

También, podemos definir la SNR *reducida* de un sistema 2D-LDA, para cada una de las tres componentes, como la relación

$$SNR_{r_{2D_{A-B}}} = \frac{\overline{D}_{2D_{A-B}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.46)$$

$$SNR_{r_{2D_{A-C}}} = \frac{\overline{D}_{2D_{A-C}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.47)$$

$$SNR_{r_{2D_{B-C}}} = \frac{\overline{D}_{2D_{B-C}}^2}{\overline{P}_{2D}} \quad (9.48)$$

De la misma manera, podemos definir una SNR local reducida, como aquella SNR reducida en cada punto del detector, definida respecto a las coordenadas  $(\theta, \phi)$

$$SNR_{r_{local_{2D_{A-B}}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{A-B}}^2(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.49)$$

$$SNR_{r_{local_{2D_{A-C}}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{A-C}}^2(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.50)$$

$$SNR_{r_{local_{2D_{B-C}}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{B-C}}^2(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.51)$$

con

$$P_{2D}(\theta, \phi) = P_A(\theta, \phi) + P_B(\theta, \phi) + P_C(\theta, \phi) \quad (9.52)$$

y en función de los coeficientes de dispersión de la teoría de *Lorenz-Mie* obtenemos

$$P_{2D}(\theta, \phi) = |\sigma_A(\theta, \phi)|^2 + |\sigma_B(\theta, \phi)|^2 + |\sigma_C(\theta, \phi)|^2 \quad (9.53)$$

El estudio de la SNR se ha calculado para un caso general de un sistema de tres haces incidentes, y sin tener en cuenta que dos de los haces están desplazados en frecuencia respecto a la frecuencia portadora del laser, de las tres señales útiles, que serán las tres componentes Doppler de la fotocorriente, debido a las tres interferencias o batidos que aparecen a la salida detector, ya hemos visto anteriormente que la velocidad o batido de una de ellas, no nos aporta nueva información y, consecuentemente será discriminada

por el subsistema electrónico mediante la utilización de circuitos de filtrado. Así pues nos quedamos con sólo dos señales Doppler o batidos, descartando una de ellas.

## 9.7. Visibilidad

Podemos extrapolar el concepto de la visibilidad de un sistema LDA de una dimensión. En el caso del sistema de tres haces, podremos definir tres visibilidades para cada una de las tres interferencias.

Primero definimos la Visibilidad local en cada punto de la apertura,  $V_{2D}(\theta, \phi)$  como

$$V_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.54)$$

$$V_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.55)$$

$$V_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) = \frac{D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi)}{P_{2D}(\theta, \phi)} \quad (9.56)$$

y la Visibilidad total  $\bar{V}_{2D}$  a la salida del fotodetector, en función de la señal Pedestal Doppler y Pedestal total

$$\bar{V}_{2D_{A-B}} = \frac{\bar{D}_{2D_{A-B}}}{\bar{P}_{2D}} \quad (9.57)$$

$$\bar{V}_{2D_{A-C}} = \frac{\bar{D}_{2D_{A-C}}}{\bar{P}_{2D}} \quad (9.58)$$

$$\bar{V}_{2D_{B-C}} = \frac{\bar{D}_{2D_{B-C}}}{\bar{P}_{2D}} \quad (9.59)$$

la SNR reducida local la podremos expresar en función de la Visibilidad local, y será

$$SNR_{rlocal_{2D_{A-B}}}(\theta, \phi) = V_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \cdot D_{2D_{A-B}}(\theta, \phi) \quad (9.60)$$

$$SNR_{rlocal_{2D_{A-C}}}(\theta, \phi) = V_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \cdot D_{2D_{A-C}}(\theta, \phi) \quad (9.61)$$

$$SNR_{rlocal_{2D_{B-C}}}(\theta, \phi) = V_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \cdot D_{2D_{B-C}}(\theta, \phi) \quad (9.62)$$

y la SNR reducida total en función de la Visibilidad total resulta

$$SNR_{r_{2D_{A-B}}} = \bar{V}_{2D_{A-B}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-B}} \quad (9.63)$$

$$SNR_{r_{2D_{A-C}}} = \bar{V}_{2D_{A-C}} \cdot \bar{D}_{2D_{A-C}} \quad (9.64)$$

$$SNR_{r_{2D_{B-C}}} = \bar{V}_{2D_{B-C}} \cdot \bar{D}_{2D_{B-C}} \quad (9.65)$$

### 9.8. Diferencias entre las formulaciones de un sistema LDA y 2D-LDA utilizando la teoría de Lorenz-Mie

En el apartado 8.8 hemos presentado todas las formulaciones, para una determinada configuración geométrica de un sistema LDA de una dimensión, adaptadas a las ecuaciones y sistema de coordenadas definidos por la teoría de dispersión de *Lorenz-Mie*, que nos permiten obtener las señales Doppler, Pedestal y Fases locales, integradas y reducidas, y por tanto la SNR como parámetro de calidad de un sistema detector de la velocidad de partículas en el seno de un fluido.

Ahora, el problema no es tan diferente para un sistema 2D-LDA. Fijémonos que, en este caso, hemos definido para cada uno de los batidos entre los haces A, B y C, y de forma independiente, las amplitudes locales en cada punto de una apertura receptora colocada en un determinado punto del espacio, y sus niveles integrados o totales a la salida de un fotodetector de las señales Pedestal y Doppler.

Debido a que a la salida del módulo fotoreceptor, dispondremos de un subsistema electrónico que realizará mediante filtrado o técnicas de procesamiento de señal, vamos a tratar la señal como si fuesen tres sistemas LDA de una dimensión independientes, pero con una diferencia importante. Si nos fijamos en las expresiones, vemos claramente que la única diferencia entre cada una de las expresiones de cada una de las mezclas, es que la señal Pedestal, para un sistema 2D-LDA, estará formada por la suma de los tres pedestales asociados a cada uno de los haces dispersados.

Por tanto, si queremos calcular la SNR para el caso de un sistema de tres haces, lo trataremos como si fuesen tres problemas independientes, donde en cada uno de ellos sólo consideraremos el batido entre dos haces y el tercero lo omitiremos a nivel de batido, con la única diferencia que la señal Pedestal, si que tendremos que considerarla (sistema 2D-LDA + Filtrado).

La consecuencia final de tener un tercer haz, que no producirá interferencia a los otros dos, es que el nivel de ruido que va a aparecer a la salida de un detector, se

**Cuadro 9.1** Comparación entre las formulaciones necesarias para el cálculo de la SNR de un sistema LDA, frente a un sistema 2D-LDA.

| SISTEMA<br>LDA DE UNA DIMENSIÓN              | SISTEMA<br>2D-LDA  | SISTEMA<br>2D-LDA + FILTRADO   |
|--|--|--|
| 2 Haces (A,B)                                | 3 Haces (A,B,C)  | 2 Haces (A,B)+ Haz C   |
| 1 Señal Doppler<br>$\bar{D}_{A-B}$           | 3 Señales Doppler<br>$\bar{D}_{A-B}, \bar{D}_{A-C}, \bar{D}_{B-C}$ | 1 Señal Doppler<br>$\bar{D}_{A-B}$ ó $\bar{D}_{A-C}$ ó $\bar{D}_{B-C}$ |
| 2 Señales Pedestal<br>$\bar{P}_A, \bar{P}_B$ | 3 Señales Pedestal<br>$\bar{P}_A, \bar{P}_B, \bar{P}_C$            | 3 Señales Pedestal<br>$\bar{P}_A, \bar{P}_B, \bar{P}_C$                |

incrementará y, por tanto, la SNR de un sistema 2D-LDA + Filtrado, va ha ser menor que para un sistema LDA clásico de una dimensión.

A partir de las ecuaciones (8.32), (8.33) y (8.39), podemos expresar la señal Pedestal local, en función de las coordenadas de la teoría de *Lorenz-Mie* ( $\theta_h, \phi_h$ )

$$\begin{aligned}
 P_{2D}(\theta, \phi) = & |A(\theta_A)|^2 \sin^2(\phi_A) + |B(\theta_A)|^2 \cos^2(\phi_A) \\
 & + |A(\theta_B)|^2 \sin^2(\phi_B) + |B(\theta_B)|^2 \cos^2(\phi_B) \\
 & + |A(\theta_C)|^2 \sin^2(\phi_C) + |B(\theta_C)|^2 \cos^2(\phi_C)
 \end{aligned} \tag{9.66}$$

donde  $A(\theta_A), B(\theta_A), A(\theta_B), B(\theta_B), A(\theta_C)$  y  $B(\theta_C)$  son los coeficientes complejos de dispersión de los haces A, B y C respectivamente.

### 9.9. Método de cálculo para una geometría particular

Los pasos necesarios para una geometría determinada, capaces de estimar la SNR de un sistema 2D-LDA, mediante la implementación de un conjunto de programas, que nos permitan calcular para cada uno de los batidos generados por la interferencia de tres haces láser, de subíndices A, B y C, las expresiones de la señal Doppler local  $D_{2D}(\theta, \phi)$ , la fase Doppler local  $\psi_{2D}(\theta, \phi)$  y las señales Pedestal de cada uno de los tres haces  $P_A(\theta, \phi), P_B(\theta, \phi)$  y  $P_C(\theta, \phi)$ , en función de las coordenadas de la teoría de dispersión *Lorenz-Mie* [AE76] (Cap. 7), y definidas en la figura 7.1, basadas en las formulaciones

de un sistema LDA de una dimensión, se pueden resumir de la forma siguiente:

1. Configuración geométrica del sistema 2D-LDA.
  - $\Rightarrow \hat{s}_A$  y  $\hat{p}_A$ : Vector de propagación y polarización del haz A.
  - $\Rightarrow \hat{s}_B$  y  $\hat{p}_B$ : Vector de propagación y polarización del haz B.
  - $\Rightarrow \hat{s}_C$  y  $\hat{p}_C$ : Vector de propagación y polarización del haz C.
2. Características físicas, haces de luz, apertura receptora y fotodetector.
  - $\Rightarrow$  Potencia y frecuencia de los tres haces.
  - $\Rightarrow$  Posición, tamaño y forma de la apertura receptora.
  - $\Rightarrow$  Características fotoeléctricas del detector óptico.
3. Tipo de fluido y partículas de sembrado.
  - $\Rightarrow$  Índice de refracción del fluido.
  - $\Rightarrow$  Índice de refracción y tamaño de las partículas dispersoras.
4. Elección del batido A-B, A-C ó B-C.
5. Aplicar formulaciones de un sistema LDA de una dimensión para el batido elegido.
  - $\Rightarrow P_{2D}(\theta, \phi)$ : Componente Pedestal local (ecuación (9.66))
  - $\Rightarrow D_{2D}(\theta, \phi)$ : Componente Doppler local del batido (ecuación (8.46))
  - $\Rightarrow \psi_{2D}(\theta, \phi)$ : Fase de la componente Doppler local (ecuación (8.51))
  - $\Rightarrow \bar{D}_{2D}$ : Señal Doppler total (ecuación (8.17))
  - $\Rightarrow \bar{P}_{2D}$ : Señal Pedestal total (ecuación (9.42))
  - $\Rightarrow \bar{\Psi}_{2D}$ : Fase de la señal Doppler total (ecuación (8.18))
  - $\Rightarrow SNR_{2D}$  (ecuación (8.29))

## 9.10. Configuración geométrica del sistema 2D-LDA

Hemos visto claramente, que aparte de las características físicas del sistema, potencias y frecuencias de los haces, tamaños, formas y localizaciones de las aperturas transmisoras y receptoras es necesario, el conocimiento de los vectores de propagación y polarización para cada uno de los tres haces incidentes, y sus vectores unitarios asociados. Estos vectores van a depender de la disposición geométrica de los tres haces cuando



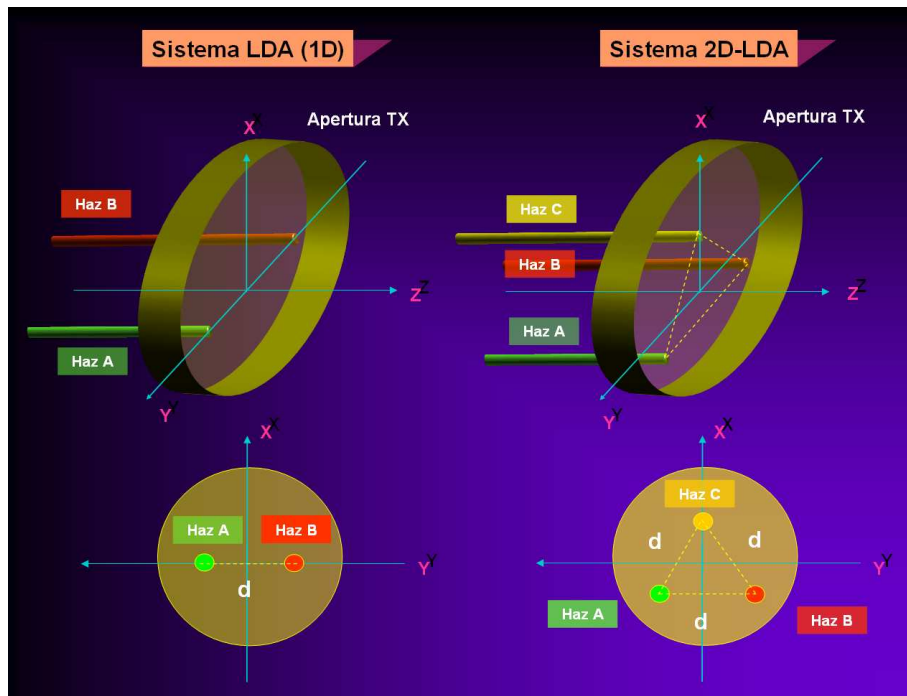


Figura 9.2 Localización de los haces para una sistema LDA de una dimensión y de un sistema 2D-LDA

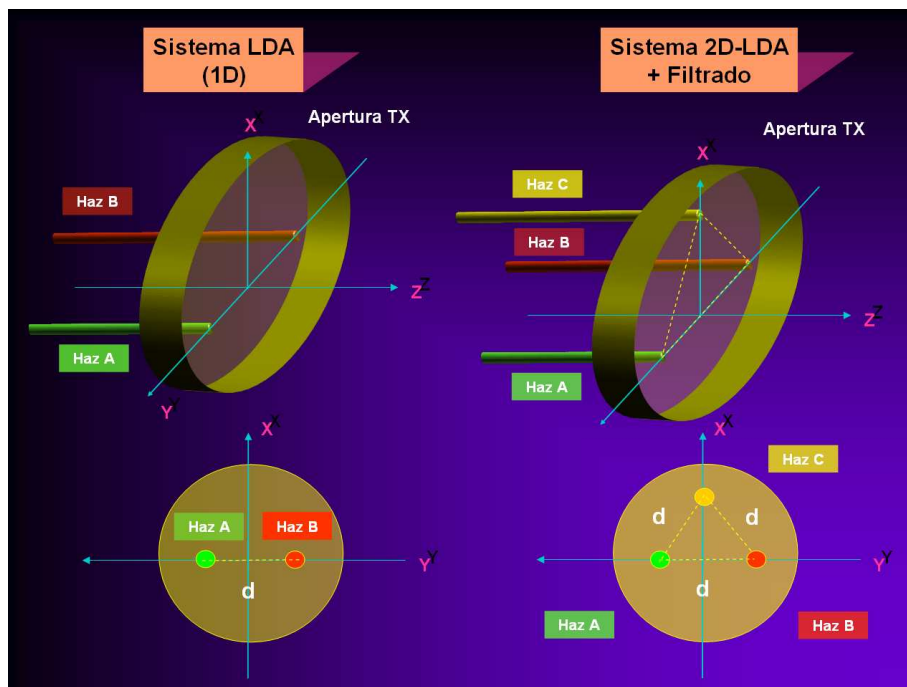


Figura 9.3 Localización de los haces para una sistema LDA de una dimensión y de un sistema 2D-LDA+Filtrado para el batido entre los haces A-B

inciden sobre la partícula. En el caso de un sistema LDA de una dimensión (haces A y B), los vectores no son demasiado complicados, debido a que los haces incidentes están sobre uno de los ejes del sistema de coordenadas  $y$ , además, el plano que forman coincide con el eje  $Z$ , y por tanto en el caso que el detector esté colocado en una de las dos direcciones más utilizadas, como son la de retrodispesión ( $RD$ ) y la de recepción hacia delante ( $RHD$ ), estarán sobre ese eje y consecuentemente sus expresiones serán mucho más tratables.

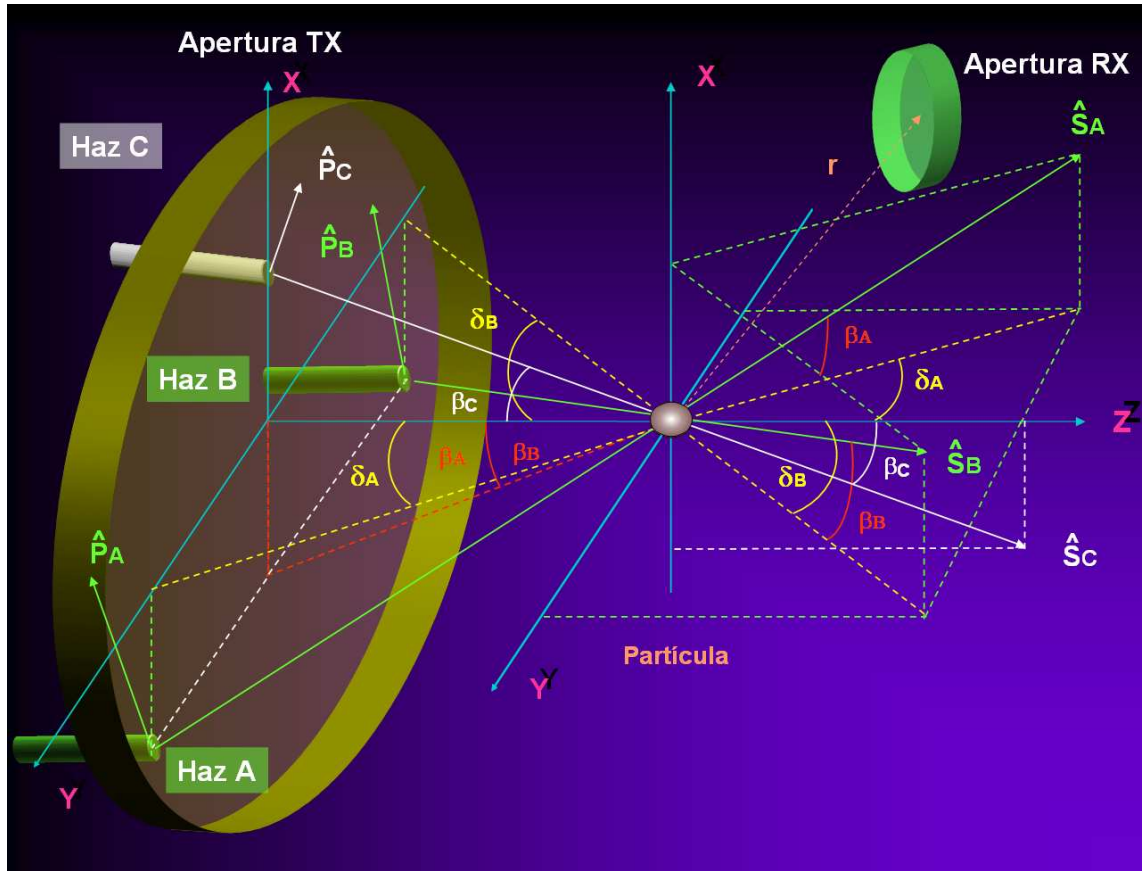
Para el caso de un sistema 2D-LDA, en principio esto no ocurre. Fijémonos que en la configuración geométrica del sistema de tres haces las direcciones  $RD$  y  $RHD$  no coinciden con el plano que forman los haces, ya que dos de ellos (haz A y B) no están sobre uno de los ejes, mientras que sólo uno de ellos si lo estará (haz C), dando lugar a unas expresiones más complicadas (figura 9.2).

Como el estudio se realizará para cada uno de los batidos independientemente de los otros dos (sistema 2D-LDA + Filtrado), podemos adoptar una solución más sencilla que será la de utilizar la misma configuración geométrica que un sistema LDA de una dimensión y añadir un tercer haz. Así de esta manera, todos los haces los tendremos incidiendo sobre los dos ejes cartesianos de la apertura, y la dirección de recepción (tanto  $RD$  como  $RHD$ ) estará en el plano que forman los haces que generarán el batido (A-B), visto en la figura 9.3.

Vamos a presentar las dos opciones, con las expresiones de todos los vectores unitarios necesarios para cada una de las dos geometrías, donde bajo ciertas consideraciones serán equivalentes. En los dos casos, tres haces de luz inciden, considerados como ondas planas polarizados linealmente, y se focalizan mediante una lente transmisora localizada en el plano  $XY$ , separados una distancia  $d$ , formando un cierto ángulo y con vectores de propagación  $\hat{s}_A$ ,  $\hat{s}_B$  y  $\hat{s}_C$  y vectores de polarización  $\hat{p}_A$ ,  $\hat{p}_B$  y  $\hat{p}_C$ .

### 9.10.1. Cálculo de los vectores unitarios para la geometría del sistema 2D-LDA

Los vectores de propagación y polarización unitario, en función de las coordenadas cartesianas  $(x,y,z)$  y de los ángulos  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ , definidos entre el eje  $Z$  y la proyección de los vectores de propagación en el plano horizontal ó  $YZ$  de los haces A y B, y de los ángulos  $\beta_A$ ,  $\beta_B$  y  $\beta_C$  definidos entre el eje  $Z$  y la proyección de los vectores de propagación en el plano vertical ó  $XZ$  de los haces A, B y C respectivamente, son



**Figura 9.4** Geometría de un sistema 2D-LDA y definición de los vectores de propagación

$$\hat{s}_A = [\sin(\beta_A), -\cos(\beta_A) \sin(\delta_A), \cos(\beta_A) \cos(\delta_A)] \quad (9.67)$$

$$\hat{s}_B = [\sin(\beta_B), \cos(\beta_B) \sin(\delta_B), \cos(\beta_B) \cos(\delta_B)] \quad (9.68)$$

$$\hat{s}_C = [-\sin(\beta_C), 0, \cos(\beta_C)] \quad (9.69)$$

$$\hat{p}_A = [\cos(\beta_A), \sin(\beta_A) \sin(\delta_A), -\sin(\beta_A) \cos(\delta_A)] \quad (9.70)$$

$$\hat{p}_B = [\cos(\beta_B), -\sin(\beta_B) \sin(\delta_B), -\sin(\beta_B) \cos(\delta_B)] \quad (9.71)$$

$$\hat{p}_C = [\cos(\beta_C), 0, \sin(\beta_C)] \quad (9.72)$$

A partir de los datos anteriores, podemos calcular los ángulos  $\theta_A$ ,  $\phi_A$  y  $\theta_B$ ,  $\phi_B$ , y los vectores unitarios  $\hat{e}_{\theta_A}$ ,  $\hat{e}_{\phi_A}$  y  $\hat{e}_{\theta_B}$ ,  $\hat{e}_{\phi_B}$  substituyendo las ecuaciones (9.67), (9.68), (9.70) y (9.71) en (8.58), (8.44), (8.43) y (8.41).

✠ Relación ángulos haz A:  $(\theta_A, \phi_A) \implies$

$$\cos(\theta_A) = \frac{x \sin(\beta_A) - y \cos(\beta_A) \sin(\delta_A) + z \cos(\beta_A) \cos(\delta_A)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.73)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta_A) = & \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left[ [z \cos(\beta_A) \sin(\delta_A) + y \cos(\beta_A) \cos(\delta_A)]^2 + \right. \\ & \left. + [x \cos(\beta_A) \cos(\delta_A) - z \sin(\beta_A)]^2 + [y \sin(\beta_A) + x \cos(\beta_A) \sin(\delta_A)]^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.74)$$

$$\cos(\phi_A) = \frac{x \cos(\beta_A) + y \sin(\beta_A) \sin(\delta_A) - z \sin(\beta_A) \cos(\delta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.75)$$

✠ Relación ángulos haz B:  $(\theta_B, \phi_B) \implies$

$$\cos(\theta_B) = \frac{x \sin(\beta_B) + y \cos(\beta_B) \sin(\delta_B) + z \cos(\beta_B) \cos(\delta_B)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.76)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta_B) = & \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left[ [z \cos(\beta_B) \sin(\delta_B) - y \cos(\beta_B) \cos(\delta_B)]^2 + \right. \\ & \left. + [x \cos(\beta_B) \cos(\delta_B) - z \sin(\beta_B)]^2 + [y \sin(\beta_B) - x \cos(\beta_B) \sin(\delta_B)]^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$\cos(\phi_B) = \frac{x \cos(\beta_B) - y \sin(\beta_B) \sin(\delta_B) - z \sin(\beta_B) \cos(\delta_B)}{\sin(\theta_B) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.78)$$

✠ Relación vectores unitarios haz A:  $(\hat{e}_{\theta_A}, \hat{e}_{\phi_A}) \implies$

$$\hat{e}_{\theta_A} = [\hat{e}_{\theta_{Ax}}, \hat{e}_{\theta_{Az}}, \hat{e}_{\theta_{Az}}] \quad (9.79)$$

$$\hat{e}_{\theta_{Ax}} = \frac{xz \cos(\beta_A) \cos(\delta_A) - z^2 \sin(\beta_A) - y^2 \sin(\beta_A) - xy \cos(\beta_A) \sin(\delta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.80)$$

$$\hat{e}_{\theta_{Ay}} = \frac{xy \sin(\beta_A) + x^2 \cos(\beta_A) \sin(\delta_A) + z^2 \cos(\beta_A) \sin(\beta_A) + zy \cos(\beta_A) \cos(\delta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.81)$$

$$\hat{e}_{\theta_{Az}} = \frac{-zy \cos(\beta_A) \sin(\delta_A) - y^2 \cos(\beta_A) \cos(\delta_A) - x^2 \cos(\beta_A) \cos(\delta_A) + zx \sin(\beta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.82)$$

$$\hat{e}_{\phi_A} = [\hat{e}_{\phi_{Ax}}, \hat{e}_{\phi_{Az}}, \hat{e}_{\phi_{Az}}] \quad (9.83)$$

$$\hat{e}_{\phi_{Ax}} = \frac{-z \cos(\beta_A) \sin(\delta_A) - y \cos(\beta_A) \cos(\delta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.84)$$

$$\hat{e}_{\phi_{Ay}} = \frac{x \cos(\beta_A) \cos(\delta_A) - z \sin(\beta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.85)$$

$$\hat{e}_{\phi_{Az}} = \frac{y \sin(\beta_A) + x \cos(\beta_A) \sin(\delta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.86)$$

✧ Relación vectores unitarios haz B:  $(\hat{e}_{\theta_B}, \hat{e}_{\phi_B}) \implies$

$$\hat{e}_{\theta_B} = [\hat{e}_{\theta_{Bx}}, \hat{e}_{\theta_{Bz}}, \hat{e}_{\theta_{Bz}}] \quad (9.87)$$

$$\hat{e}_{\theta_{Bx}} = \frac{xz \cos(\beta_B) \cos(\delta_B) - z^2 \sin(\beta_B) - y^2 \sin(\beta_B) + xy \cos(\beta_B) \sin(\delta_B)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.88)$$

$$\hat{e}_{\theta_{By}} = \frac{xy \sin(\beta_B) - x^2 \cos(\beta_B) \sin(\delta_B) + z^2 \cos(\beta_B) \sin(\beta_B) + zy \cos(\beta_B) \cos(\delta_B)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.89)$$

$$\hat{e}_{\theta_{Bz}} = \frac{-zy \cos(\beta_B) \sin(\delta_B) - y^2 \cos(\beta_B) \cos(\delta_B) - x^2 \cos(\beta_B) \cos(\delta_B) + zx \sin(\beta_A)}{\sin(\theta_A) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.90)$$

$$\hat{e}_{\phi_B} = [\hat{e}_{\phi_{Bx}}, \hat{e}_{\phi_{By}}, \hat{e}_{\phi_{Bz}}] \quad (9.91)$$

$$\hat{e}_{\phi_{Bx}} = \frac{z \cos(\beta_B) \sin(\delta_B) - y \cos(\beta_B) \cos(\delta_B)}{\sin(\theta_B) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.92)$$

$$\hat{e}_{\phi_{By}} = \frac{x \cos(\beta_B) \cos(\delta_B) - z \sin(\beta_B)}{\sin(\theta_B) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.93)$$

$$\hat{e}_{\phi_{Bz}} = \frac{y \sin(\beta_B) - x \cos(\beta_B) \sin(\delta_B)}{\sin(\theta_B) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.94)$$

### 9.10.2. Cálculo de los vectores unitarios para la geometría del sistema 2D-LDA+Filtrado

En este caso, definimos un sistema de referencia igual que en un sistema LDA de una dimensión respecto a los haces  $A$  y  $B$  localizados en el eje  $Y$  de la figura 8.5, para que el eje  $Z$  coincida con las direcciones  $RD$  y  $RHD$ , y por tanto ese será el único batido que tendremos que tener en cuenta, ya que, como hemos visto, los dos restantes serán discriminados mediante filtrado.

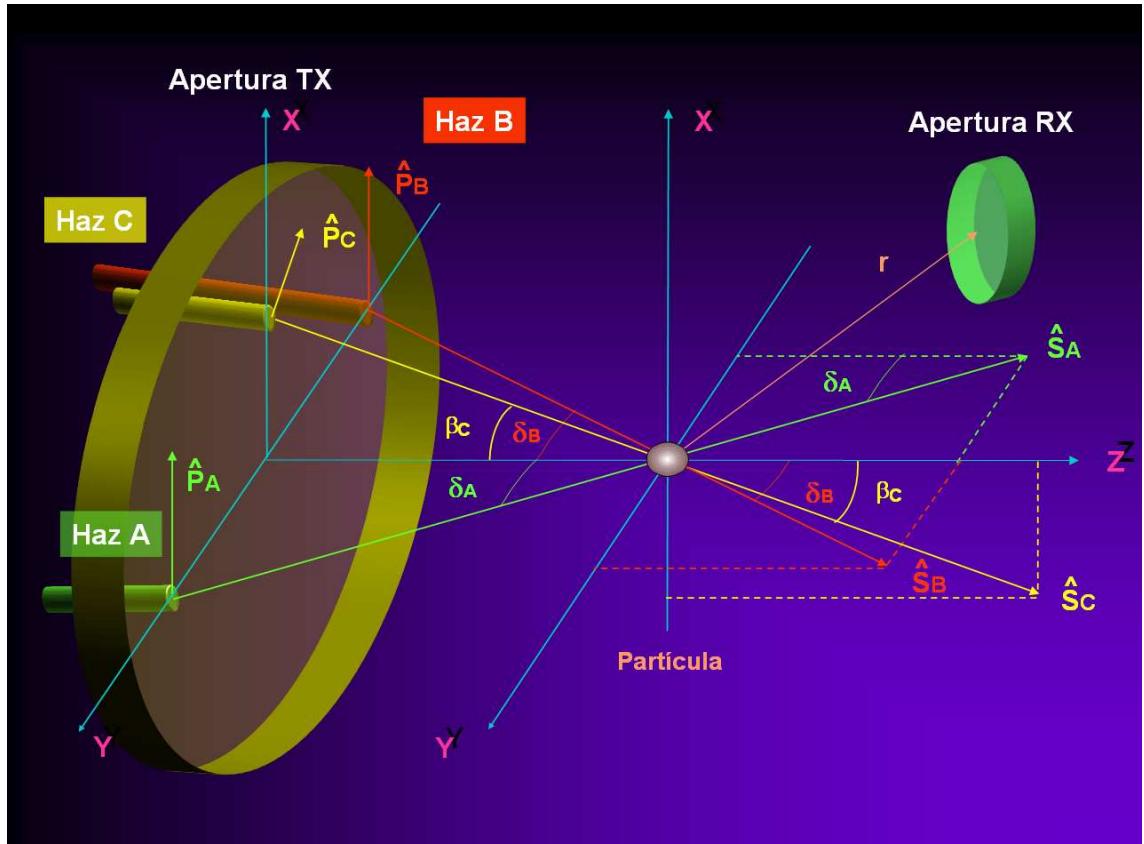
Por lo que respecta al haz  $C$ , localizado sobre el eje  $X$ , y que forma un ángulo  $\beta_C$  respecto el eje  $Z$ , no afectará en el cálculo de la señal Doppler y por tanto sólo necesitaremos conocer su nivel de Pedestal, sin necesidad de calcular  $\hat{e}_{\phi_C}$  y  $\hat{e}_{\theta_B}$ .

Los vectores de propagación y polarización unitarios, en función de las coordenadas cartesianas  $(x,y,z)$ , de los tres haces  $A$ ,  $B$  y  $C$  son

$$\hat{s}_A = [ 0, -\sin(\delta_A), \cos(\delta_A) ] \quad (9.95)$$

$$\hat{s}_B = [ 0, \sin(\delta_B), \cos(\delta_B) ] \quad (9.96)$$

$$\hat{s}_C = [ -\sin(\beta_C), 0, \cos(\beta_C) ] \quad (9.97)$$



**Figura 9.5** Geometría de un sistema 2D-LDA+Filtrado y definición de los vectores de propagación

$$\hat{p}_A = [ 1, 0, 0 ] \tag{9.98}$$

$$\hat{p}_B = [ 1, 0, 0 ] \tag{9.99}$$

$$\hat{p}_C = [ \cos(\beta_C), 0, \sin(\beta_C) ] \tag{9.100}$$

Como las formulaciones son las mismas que en el sistema LDA de una dimensión para los haces *A* y *B*, no hace falta calcularlas otra vez, presentamos solo los ángulos del haz *C*

✠ Relación ángulos haz *A*:  $(\theta_A, \phi_A) \implies$  Ecuaciones (8.58)-(8.60).

✠ Relación ángulos haz *B*:  $(\theta_B, \phi_B) \implies$  Ecuaciones (8.61)-(8.63).

✠ Relación ángulos haz *C*:  $(\theta_C, \phi_C) \implies$

$$\cos(\theta_3) = \frac{-x \sin(\beta_3) + z \cos(\beta_3)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.101)$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{[[y \cos(\beta_3)]^2 + [x \cos(\beta_3) + z \sin(\beta_3)]^2 + [y \sin(\beta_3)]^2]^{1/2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.102)$$

$$\cos(\phi_3) = \frac{x \cos(\beta_3) + z \sin(\beta_3)}{\sin(\theta_3) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.103)$$

✠ Relación vectores unitarios haz A:  $(\hat{e}_{\theta_A}, \hat{e}_{\phi_A}) \implies$  Ecuaciones (8.64)-(8.71).

✠ Relación vectores unitarios haz B:  $(\hat{e}_{\theta_B}, \hat{e}_{\phi_B}) \implies$  Ecuaciones (8.72)-(8.79).