

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCION AL ESTUDIO Y DESARROLLO DE TECNICAS DE CONTROL APLICADAS A LA LINEALIZACION DE SISTEMAS

Autor: Gabriel Montoro López

Director: Eduard Bertran Albertí

Septiembre de 1996

TESIS DOCTORAL PARA LA OBTENCION DEL TITULO DE
DOCTOR INGENIERO DE TELECOMUNICACION

I.- INTRODUCCION

II.- SISTEMAS NO LINEALES

III.- NORMAS

IV.- OPTIMIZACION DE NORMAS

V.- CONTROL ROBUSTO Y NORMA INFINITA

VI.- LINEALIZACION MEDIANTE NORMA INFINITA

VII.- APLICACIONES

VIII.- CONCLUSIONES

IX.- APENDICES

X.- REFERENCIAS

CONTENIDO

I.- INTRODUCCION.

I.1.- Introducción y estructura de la Tesis... I-1

I.2.- Sistemas no lineales. Linealización... I-5

I.2.1.- Introducción... I-5

I.2.2.- Linealización mediante predistorsión... I-6

I.2.3.- Linealización mediante técnicas de control... I-9

II.- SISTEMAS NO LINEALES.

II.1.- Introducción... II-1

II.2.- Caracterización y modelado... II-3

II.2.1.- Sistemas no lineales sin dinámica... II-3

II.2.1.1.- Polinomios de Taylor... II-3

II.2.1.2.- Polinomios de Legendre... II-4

II.2.1.3.- Polinomios de Hermite... II-7

II.2.1.4.- Series de Fourier... II-8

II.2.2.- Sistemas no lineales con dinámica... II-10

II.2.2.1.- Función descriptiva... II-10

II.2.2.2.- Sistemas bilineales... II-12

II.2.2.3.- Series funcionales de Volterra... II-13

II.2.2.4.- Series funcionales de Wiener (G-funcionales)... II-15

II.3.- Medida de no linealidades... II-16

II.4.- Linealización mediante filtraje inverso de Volterra... II-22

II.5.- Linealización mediante técnicas de control... II-25

II.5.1.- Métodos geométricos... II-25

II.5.1.1.- Linealización entrada-estado... II-27

II.5.1.2.- Linealización entrada-salida... II-30

II.5.2.- Sistemas Adaptativos por Modelo de Referencia (MRAS)... II-32

II.5.3.- Linealización mediante Control Adaptativo por Modelo de Referencia con

Estructura Variable (VS-MRAC)... II-36

III.- NORMAS.

III.1.- Introducción... III-1

III.2.- Normas inducidas en sistemas lineales... III-4

III.3.- Normas inducidas en sistemas no lineales... III-6

III.3.1.- Introducción... III-6

III.3.2.- Normas inducidas y series de Volterra... III-8

III.3.2.1.- Norma de orden 2 temporal... III-9

III.3.2.2.- Norma de orden 2 frecuencial... III-11

III.3.2.3.- Norma de orden 1 de la transformada de Fourier... III-13

III.4.- Criterios de estabilidad entrada-salida... III-14

III.4.1.- Introducción... III-14

III.4.2.- Método de la pequeña ganancia... III-15

III.4.3.- Pasividad... III-16

III.4.4.- Estabilidad absoluta... III-18

III.4.5.- Hiperestabilidad... III-19

IV.- OPTIMIZACION DE NORMAS.

IV.1.- Introducción... IV-1

IV.2.- Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman... IV-4

IV.2.1.-El problema LQR... IV-6

IV.2.2.-El problema LQG... IV-9

IV.3.- Ecuación de Riccati y matriz Hamiltoniana... IV-11

IV.4.- Norma-2... IV-13

IV.4.1.- Definición y cómputo... IV-13

IV.4.2.- Minimización de la norma-2... IV-15

IV.5.- Norma- ∞ ... IV-18

IV.5.1.- Definición y cómputo... IV-18

IV.5.2.- Ganancia L_2 de un sistema lineal... IV-20

IV.5.3.- Atenuación de perturbaciones via realimentación de estado... IV-24

Contenido

IV.5.4.- Atenuación de perturbaciones via realimentación de la salida... *IV-28*

V.- CONTROL ROBUSTO Y NORMA INFINITA.

V.1.- Introducción... *V-1*

V.2.- Control Robusto e incertidumbre... *V-1*

V.3.- Mixed Sensitivity... *V-4*

VI.- LINEALIZACION MEDIANTE NORMA INFINITA.

VI.1.- Introducción. Enunciado del problema... *VI-1*

VI.2.- Atenuación óptima de perturbaciones externas... *VI-5*

VI.3.- Atenuación óptima de perturbaciones internas. Linealización... *VI-10*

VI.3.1.- Cota del término lineal... *VI-12*

VI.3.2.- Cota del término no lineal... *VI-14*

VI.3.3.- Cota del sistema global... *VI-16*

VI.3.3.1.- No linealidad respecto a la entrada... *VI-16*

VI.3.3.2.- No linealidad respecto a la salida... *VI-22*

VII.- APLICACIONES.

VII.1.- Introducción... *VII-1*

VII.2.- Cancelador de ruido externo... *VII-2*

VII.3.- Cancelador de dinámica lineal... *VII-9*

VII.4.- Linealización de un péndulo... *VII-15*

VII.5.- Linealización de una etapa de potencia pasobanda... *VII-23*

VIII.- CONCLUSIONES.

IX.- APENDICES.

Apéndice I: Método directo de estabilidad de Lyapunov... *IX-1*

Apéndice II: Espacios normados.... IX-4

X.- REFERENCIAS.

I.- INTRODUCCION.

I.1.- Introducción y estructura de la Tesis.

Actualmente se puede considerar que la teoría básica de sistemas lineales e invariantes está plenamente desarrollada, en el sentido de que es global (aplicable a cualquier sistema lineal) y dispone de potentes herramientas de diseño y evaluación. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los sistemas no lineales. En éstos, las soluciones que se obtienen suelen ser particulares y sólo aplicables a clases específicas de no linealidades. Además, con la dificultad añadida de que no se dispone de métodos sistemáticos de análisis y diseño, siendo muchos de ellos simples extrapolaciones de los típicos en sistemas lineales, y por ello poco adecuados al problema no lineal.

Consecuencia de todo lo anterior es que en los ámbitos de Procesado de Señal y de Teoría de Control son ampliamente usados tanto los filtros como los controladores lineales, dejándose los diseños basados en estructuras no lineales para aplicaciones específicas. De entre estos cabe destacar el empleo de algoritmos adaptativos, que se basan en leyes de adaptación implícitamente no lineales, aunque su diseño se ha venido haciendo hasta hace poco extrapolando experiencias de diseños lineales y de parámetros constantes.

En aquellos casos en que las soluciones de diseño basadas en la adecuación de métodos lineales no dan buenos resultados, se hace necesario el empleo de técnicas no lineales de modelado y procesado, sea con ajuste adaptativo o no. Generalmente el uso de métodos propiamente no lineales será recomendable cuando se deba trabajar con un sistema que tenga un alto índice de no linealidades. Ante un caso así, una de las alternativas es usar técnicas de linealización y conseguir que un subsistema no lineal se comporte como lineal, con lo que será posible poder aplicar técnicas lineales al sistema global linealizado.

Como ejemplo de algunos de los problemas que supone la presencia de no linealidades en canales de comunicación cabe decir que en transmisiones digitales a alta velocidad una de la mayores causas de que aumente la probabilidad de error es la presencia de no linealidades [Be87]. Hay aplicaciones en comunicaciones en las que se exige a los amplificadores que trabajen cerca de saturación para un mayor rendimiento de potencia, en detrimento de la distorsión que esto va a originar. Este es el caso de los repetidores a bordo de satélites de enlace. Una solución que se aplica es la de predistorsionar la señal a transmitir, de modo que la predistorsión compense a la distorsión.

También es importante la linealización de amplificadores de RF en sistemas de comunicaciones móviles, donde es necesario un alto rendimiento en potencia, lo que hace que se trabaje cerca de saturación. Esto es una limitación para el uso de modulaciones tipo QAM, que son deseables por ser eficientes espectralmente pero son más sensibles al efecto de las no linealidades que otras modulaciones menos eficientes [Ar90].

El método de linealización propuesto en esta Tesis consiste en determinar el tipo de realimentación a aplicar a un sistema no lineal, de modo que, según un cierto criterio de medida, el efecto de las no linealidades se reduzca frente al de las linealidades.

El sistema no lineal se descompondrá en dos bloques, uno lineal y otro no lineal. El bloque lineal será el que caracterizará el funcionamiento deseado, es decir el funcionamiento linealizado, y es por esto que se considera un sistema modelo. Este sistema modelo se le denominará *modelo de referencia*, y será la guía de cual es el funcionamiento deseado. Una de las alternativas para descomponer el sistema no lineal en los dos bloques comentados es haciendo uso del *desarrollo en serie de Volterra* del mismo, de modo que el primer término de la expansión, término lineal, se corresponderá con el modelo de referencia a seguir.

Haciendo uso del modelo matemático del sistema no lineal y del modelo de referencia se obtendrá la caracterización de un sistema error, que modela las diferencias de funcionamiento entre el sistema no lineal y el lineal deseado. De este modo, el objetivo consiste en conseguir que la salida del sistema error sea nula, o en su defecto que sea lo menor posible. Esta reducción del sistema error se plantea como un problema de *atenuación de perturbaciones vía realimentación*, de acuerdo a un criterio óptimo medido con la norma H_{∞} .

Por tanto, se buscará la minimización de la norma H_{∞} de la parte lineal del sistema error, pero vigilando al mismo tiempo la estabilidad del sistema global en lazo cerrado. Para ello el criterio de estabilidad empleado es el de la *pequeña ganancia*.

En síntesis, las bases teóricas que se emplean en el método propuesto en este trabajo están relacionadas con:

- Modelado de sistemas no lineales.
- Criterios de estabilidad basados en normas.
- Optimización de norma H_{∞} .

Además, se comparará este método basado en norma infinita con otro método, que es otra aportación de esta Tesis, basado en los sistemas adaptativos por modelo de referencia denominados VS-MRAC. Este otro método, aplicado como linealizador, da resultados válidos, pero a costa, como es habitual en este tipo de sistemas, de una señal de control a la que se le exige conmutaciones instantáneas, lo cual es un requisito difícil de cumplir y que provoca un excesivo contenido de alta frecuencia en dicha señal. Ambos métodos se compararán en una aplicación.

La división en capítulos de esta Tesis tiene su justificación en el papel que cada uno de ellos representa en el global del trabajo:

El *capítulo I* expone globalmente los antecedentes existentes en trabajos orientados a la linealización de sistemas, tanto desde el enfoque de la predistorsión como el de realimentación.

En el *capítulo II* se presentan los tipos más habituales de modelado de sistemas no lineales, tanto los estáticos como los que consideran la presencia de dinámica. También encontramos en este capítulo las formas en que se determina el grado de no linealidad de un sistema, haciendo uso de medidas de punto de compresión y de punto de intercepción, comunes en sistemas de radiofrecuencia. También, en este capítulo, se desarrolla la teoría de los sistemas VS-MRAC, y se hace una aportación a los mismos en el modo de generar adaptativamente una cota que es necesaria en la implementación de este tipo de sistemas.

Los métodos de linealización mediante filtraje inverso de *Volterra*, los métodos geométricos y los sistemas adaptativos por modelo de referencia también tienen su tratamiento en el *capítulo II*.

Las bases teóricas relativas a normas se desarrollan en los *capítulos III y IV*. En primer lugar se enumeran las definiciones de las normas más habituales y el importantísimo papel que tienen en los criterios de estabilidad.

En el *capítulo IV* se encuentran las bases de la teoría de optimización de normas. Se comienza presentando el método de optimización de Hamilton-Jacobi, que tiene una muy conocida aplicación en resolver los problemas del Regulador Cuadrático Lineal (control LQR) y de su extensión cuando se considera la presencia de ruido gaussiano (control LQG).

La cada vez más empleada optimización de norma 2 y norma ∞ está expuesta también en el *capítulo IV*. Es importante el descubrir que la norma ∞ es adecuada para ser empleada en sistemas que tratan con incertidumbre, es decir que procesan señales desconocidas. De estas señales inciertas se supondrá que están acotadas por alguna norma, por ejemplo acotadas en energía o en potencia. La incertidumbre que aquí se considera es la debida a las no linealidades.

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de optimización de norma infinita está en el Control Robusto, o sea, el diseño de controladores que aseguren estabilidad y buen funcionamiento en sistemas con incertidumbre. En el *capítulo V* se expone el problema conocido como *mixed sensitivity*, que es la base de la Teoría de Control Robusto. Esencialmente, el problema más estudiado en Control Robusto es el de la presencia de incertidumbre debida a dinámica lineal no modelada, aunque existen trabajos relacionados con incertidumbre no lineal, que es el caso que nos interesa. Es por esto que este *capítulo V* hace de enlace con el método de linealización propuesto, que en cierto modo consistirá en un desarrollo de metodologías propias del Control Robusto adaptadas a sistemas con incertidumbre debida a dinámica no lineal.

Una vez introducidas las bases, en el *capítulo VI* se desarrolla propiamente el método propuesto en esta Tesis para resolver el problema de linealización mediante teoría de norma infinita. Posteriormente, en el *capítulo VII*, se aplica este método y el basado en VS-MRAC a ejemplos ilustrativos, acompañado de una serie de resultados de simulación.

I.2.- Sistemas no lineales. Linealización.

I.2.1.- Introducción.

A lo largo de este trabajo la idea que se quiere dar a entender con la palabra *linealizar* es la de como conseguir que un sistema dinámico no lineal se comporte, es decir responda, como si fuera lineal. Además, el problema que se considera no es de modelado (aproximar un sistema no lineal por uno lineal), ni tampoco de filtrado (eliminar no linealidades en la medida de la salida de un sistema), sino que lo que se pretende es modificar (controlar) el sistema no lineal y hacer que su comportamiento sea lineal.

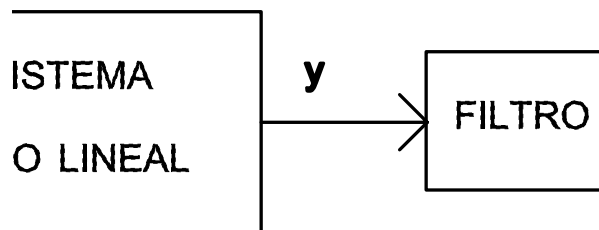


Fig.I.1: Filtrado de la salida de un sistema no lineal.

En la figura I.1 se puede ver un bloque que representa un sistema dinámico con entrada v y salida y . Asumiremos que la relación entre la entrada y la salida es no lineal. Desde un punto de vista de filtrado, si con la conexión del filtro se obtiene una salida y_f carente de no linealidades entonces podría considerarse que la relación entre v y y_f es lineal, y por tanto se habría realizado una linealización.

Sin embargo, el tipo de solución que nos interesa no es ésta, sino la que sea capaz de eliminar no linealidades en la misma salida y , no en una señal filtrada obtenida del procesamiento de y . Por ejemplo, una aplicación que tendremos presente a lo largo de este trabajo será la de linealizar etapas de potencia, especialmente de radiofrecuencia. Si un amplificador de potencia contiene no linealidades en su salida, la solución es modificar de alguna manera la señal de entrada para que la salida no contenga dichas no linealidades; obviamente no tiene ningún sentido una linealización de la señal ya amplificada (salida del amplificador). Por tanto, el linealizador útil a nuestros propósitos ha de estar conectado a la entrada del sistema no lineal, no después.

Básicamente se pueden considerar dos enfoques de como abordar el diseño de linealizadores:

- i) Una opción, mediante un filtro que modifique del modo adecuado la señal de excitación del sistema no lineal. A este filtro, generalmente no lineal y adaptativo, se le denomina predistorsionador. La predistorsión debe compensar el efecto

posterior de la distorsión debida a la no linealidad, conformando de modo adecuado la señal de excitación, tal como se puede ver en la figura 1.2. El predistorsionador puede ser adaptativo o no, y si lo es significa que los parámetros del mismo serán ajustados como consecuencia del resultado de una medida de la salida del sistema no lineal, o sea que hay una realimentación para el ajuste de los parámetros.

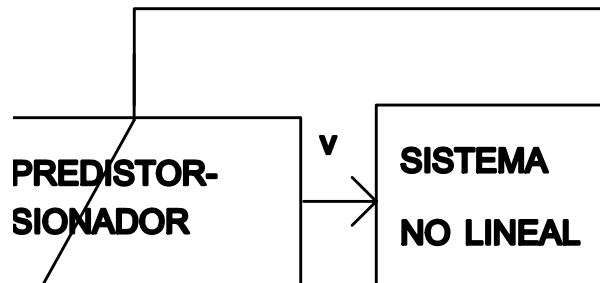


Fig.1.2: Predistorsión adaptativa a la entrada de un sistema no lineal.

ii) Y otra opción, mediante una realimentación (un controlador) que modifique la dinámica del sistema no lineal. En la figura 1.3 se puede ver como el bloque controlador genera la señal de entrada v a partir de las medidas que hace de la propia salida del sistema no lineal y de la señal u_c , que no es más que la señal de entrada que se aplicaría directamente al sistema no lineal caso de no haber linealizador.

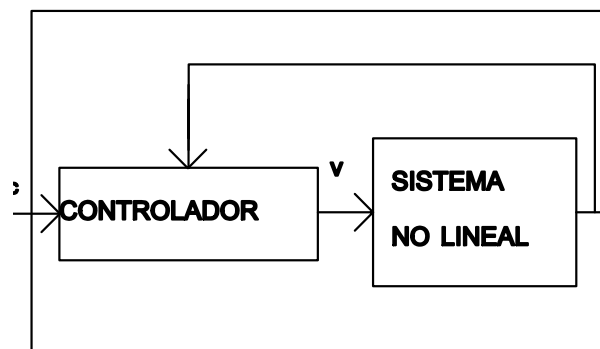


Fig.1.3: Sistema no lineal realimentado.

La línea de puntos en la figura 1.3 engloba al sistema no lineal junto al controlador en un bloque único al que cabe considerar como el sistema linealizado.

1.2.2.- Linealización mediante predistorsión.

El análisis y diseño de filtros no lineales tiene en la actualidad muchas aplicaciones, especialmente en comunicaciones, control y procesamiento de imagen y voz. En estas áreas de conocimiento son populares filtros no lineales tales como los filtros de

estadística de orden superior, los filtros polinómicos y los filtros de Volterra.

La expansión en serie de Volterra de un sistema no lineal, o su caracterización mediante una estructura polinómica, es útil tanto para el modelado como para el diseño de filtros que conectados al sistema no lineal original lo linealicen. Esta conexión acostumbra a ser en serie (cascada) o en paralelo [Ko91], [Ma91], [Si92].

La linealización de sistemas mediante la síntesis del filtro inverso de Volterra de orden p ha sido considerada en diversos trabajos [Sc80], [Bi88]. Uno de los mayores inconvenientes que tiene la aplicación práctica de este método es la identificación de los kernels de la expansión en serie de Volterra del sistema no lineal, generalmente más fáciles de medir que de deducir analíticamente [Ev95]. Para solventarlo se han desarrollado alternativas como la expansión en funcionales de Wiener (G-funcionales), que es en una expansión ortogonal para el caso en que la excitación en la entrada sea ruido blanco gaussiano [Sc80].

Actualmente se están investigando temas orientados al desarrollo de diferentes técnicas de linealización aplicables al caso específico de sistemas de comunicaciones, realizando un estudio comparativo entre ellas, y buscando las modificaciones pertinentes en cada técnica de modo que se adecue al problema concreto. Esta adecuación es imprescindible en cuanto a que las soluciones obtenidas al trabajar con sistemas no lineales suelen no ser globales, sino particulares a cada caso.

En diferentes publicaciones recientes se encuentran trabajos que abordan el diseño y la realización de predistorsionadores para compensar los efectos indeseados en subsistemas no lineales [St92a], [St92b], [Gh93]. El diseño está basado en encontrar el inverso de orden p , siendo para ello necesario primero identificar el sistema y luego sintetizar su inverso. La mayoría de los trabajos acaban realizando un predistorsionador estático, dada la dificultad que conlleva la puesta en práctica de un diseño dinámico basado en expansión de Volterra. Como ya se ha comentado anteriormente, los grandes problemas son la identificación de los kernels y la posterior síntesis del sistema inverso. Habitualmente, lo que se hace es el estudio del diseño exacto de un sistema inverso de orden p (por consideraciones operativas no más allá del tercer orden), y la comprobación práctica de sus efectos en la cancelación de los términos de orden inferior y su efecto en los de orden superior.

Las aportaciones y resultados obtenidos por los diferentes trabajos hechos sobre la temática se resumen a continuación, siguiendo un cierto orden cronológico:

- En [Bi84] se estudia la eliminación de interferencia intersimbólica debido a no linealidades en un canal de comunicación, usándose para ello un filtro de *Volterra* que estima las no linealidades y luego las cancela. Se considera la aplicación de dicha técnica a la transmisión de modulaciones QAM a través de canales pasobanda.

- La cancelación adaptativa y no lineal de ruido es planteada en [St85], donde se consideran las no linealidades modelables como polinómicas, pero sin dinámica, y filtradas por un sistema lineal. A este modelo se le conoce como *modelo de Hammerstein*. Este es un modelo más simple de manejar computacionalmente que el modelo de *Volterra*.
- Basándose en el inverso de Volterra de orden p en [Bi88] se diseña un linealizador, para un amplificador de RF, que actúa antes del modulador. Primero, es necesario identificar el canal mediante una serie de Volterra ortogonal. El efecto no lineal de los amplificadores de RF es caracterizable mediante distorsiones de amplitud que afectan a la amplitud (AM/AM) o bien de amplitud que afectan a la fase (AM/PM). Estos efectos son de considerable importancia al trabajar cerca de saturación, lo cual a su vez es deseable para tener un buen rendimiento de potencia. En estos casos el modelo de canal lineal con ruido gaussiano blanco aditivo es poco realista. Una solución de linealización es aceptar el canal tal como es, sin modificarlo, y en el receptor realizar un procesamiento no lineal, por ejemplo empleando técnicas de MLSE (maximum likelihood sequence estimation) mediante el algoritmo de *Viterbi*. Sin embargo, este procesamiento se hace complicado y difícil de implementar a muy alta velocidad, y por ello se propone emplear receptores subóptimos, que sean más sencillos de sintetizar. Todo se complica al haber también ruido gaussiano añadido, lo que hace que interese compensar las no linealidades antes de la adición del ruido. Esto último justifica el uso de compensadores antes del amplificador. Uno de los mayores inconvenientes del predistorsionador es que aumente el nivel de señal fuera de banda, aunque sea a la entrada del amplificador, ya que ello supone la presencia de interferencias en el sistema. El predistorsionador que se diseña en este artículo [Bi88] es digital (flexibilidad en el diseño y ajuste) y se basa en sintetizar el filtro inverso de *Volterra* de orden 3 de las no linealidades identificadas. Además, se propone la posibilidad de hacerlo adaptativo, es decir que los parámetros del filtro varíen conforme vaya variando el resultado de un algoritmo de identificación.
- En otros trabajos como [Ca90], se predistorsiona la señal en banda base a partir de los datos de una tabla. El método que se expone consiste en acudir a una tabla, donde se obtienen los parámetros del predistorsionador de acuerdo a la señal a transmitir. Lógicamente, primero es necesario haber creado dicha tabla.
- En [St92a] ha sido estudiada la linealización adaptativa polinómica, haciéndose uso de medidas de distorsión de intermodulación (IMD) fuera de la banda para ajustar los coeficientes del filtro. Se muestra que las componentes de orden 3 y 4 de la IMD son función cuadrática de los coeficientes, y se demuestra que es suficiente un predistorsionador de segundo orden. El predistorsionador adaptativo diseñado minimiza la potencia de los productos de intermodulación fuera de la banda. El artículo presenta el diseño final de un predistorsionador analógico estático. Se usa la envolvente de la señal en banda base para generar

I.- Introduccion

las funciones no lineales del predistorsionador, que luego se modifica de acuerdo a un algoritmo adaptativo de búsqueda del mínimo. Se obtiene una mejora de 15 dB en el tercer producto de intermodulación y de 5 dB en el quinto, respecto al mismo sistema sin predistorsionador.

- También se aborda el diseño de filtros de *Volterra* o polinómicos en el trabajo [Si92]. Este tipo de filtros tienen la característica de que son lineales respecto a los coeficientes, lo cual permite extender la teoría de filtraje óptimo lineal a los denominados filtros de *Volterra* óptimos. Si los coeficientes se ajustan con el objetivo de minimizar un criterio cuadrático, por ejemplo usando algoritmos tipo RLS o LMS, entonces el filtro se ha convertido en adaptativo. El caso más elemental y más empleado son los filtros cuadráticos, que son filtros no lineales que sólo incluyen no linealidades de orden 2. Se emplean en aplicaciones de modelado, cancelación de ecos, cancelación de ruido, detección y estimación.
- En [Wr92] se expone la linealización de un amplificador de potencia mediante un predistorsionador digital y adaptativo, que predistorsiona la señal en banda base, y se ajusta de acuerdo al muestreo de la salida demodulada del amplificador de potencia de RF. Se compara la envolvente de esta señal medida con la deseada, es decir la que se tendría si no hubiera alinealidades. Los parámetros del predistorsionador estático planteado se obtienen acudiendo a una tabla de coeficientes, y estos dependen de la comparación hecha entre las envolventes de la señal medida y de la deseada.
- En [Gh93] se aborda el diseño de un predistorsionador polinómico para linealizar amplificadores de potencia que han de trabajar con señales QAM. Las modulaciones eficientes espectralmente, como la QAM (modulación de amplitud en cuadratura) son sensibles a no linealidades en la etapa de potencia, lo cual obliga a linealizar el amplificador. El predistorsionador propuesto actúa en la señal banda base, y para dar robustez al diseño la predistorsión se hace adaptativa.

I.2.3.- Linealización mediante técnicas de control.

Se conocen diferentes técnicas de control, más o menos desarrolladas, con las que es posible la linealización de determinados sistemas mediante realimentación. Algunas de ellas son técnicas adaptativas y otras basadas en sistemas de parámetros fijos.

Si las no linealidades son estructuralmente conocidas, es posible establecer una ley de control que las tenga en cuenta y las compense, esencialmente como extensión del método clásico aplicable a sistemas lineales. Si no son conocidas, se diseña el sistema prescindiendo de ellas y luego se estudia el efecto de la presencia de dinámica no modelada y de incertidumbre en el diseño [Ma88].

La presencia de dinámica no modelada comporta la posibilidad de que en el sistema global exista peligro de inestabilidades y bifurcaciones. Para evitarlas, en el algoritmo resultante se introducen modificaciones que den robustez al diseño, es decir insensibilidad frente a las desviaciones respecto al caso ideal. Dan buen resultado las leyes con discontinuidades (*switch*), aunque otras también son posibles [Na89], [Or89], [Bu92].

Comparando un sistema cuya relación entrada-salida es no lineal con otro de comportamiento lineal, si se consigue que la salida de ambos sistemas sea la misma para las mismas excitaciones, ello será equivalente a haber linealizado el bloque no lineal, ya que se estará comportando como el lineal. El bloque lineal hace el papel de un modelo, modelo de referencia, y el bloque no lineal es el sistema a controlar. El mérito estará en establecer una ley de control, que será la entrada del bloque no lineal, tal que haga que una señal de error tienda a cero, o en su defecto que se mantenga reducida y acotada. Esta señal de error está definida como la diferencia entre las dos salidas. La base de este método de linealización es similar a la de los *Sistemas y Controladores Adaptativos por Modelo de Referencia* (MRAS o MRAC) usados para el ajuste de controladores de estructura lineal pero parámetros variables, útiles para el control adaptativo de plantas con incertidumbre [La79].

La linealización mediante *Control Adaptativo por Modelo de Referencia* (MRAC) también es aplicable a subsistemas de comunicaciones [Be92], [Be94a]. Se debe estudiar el modelo de referencia más adecuado a los diferentes subsistemas posibles y obtener la ley de control apropiada, empleando para ello la base matemática que proporcionan el segundo método de estabilidad de Lyapunov y el método de hiperestabilidad. Las leyes obtenidas son habitualmente una modificación de la ley básica proporcional-integral, acorde al tipo de no linealidad considerada. En este caso tiene gran interés el empleo de leyes de control discontinuas de comprobado buen funcionamiento frente a incertidumbres, tanto paramétricas como estructurales, en el sistema a controlar [Na89].

En general, un sistema adaptativo por modelo de referencia se caracteriza por su insensibilidad frente a perturbaciones externas (ruido) o internas (dinámica no modelada). Sólo éste último caso es el que nos interesa en nuestros estudios de linealización, ya que ambos enfoques son distintos. Generalmente las perturbaciones externas pueden ser consideradas acotadas, pero no así las internas que pueden ser causa de inestabilidad [Bu92].

La linealización mediante realimentación de estado no lineal consiste en usar realimentación de las variables de estado para transformar un sistema no lineal en lineal, bien para posteriormente aplicar técnicas lineales de control o bien para el desarrollo de controladores adaptativos. La idea del método está en cancelar las no linealidades vía realimentación de estado y por ello es tan sólo aplicable a sistemas no lineales representables en la forma canónica controlable. Si no es este el caso, se pueden emplear transformaciones algebraicas para obtener la representación controlable [Is89], [SI91]. En la linealización por realimentación de estado se distingue entre entrada-estado y entrada-salida:

I.- Introducción

- i) La *linealización entrada-estado* se consigue mediante una transformación de las variables de estado originales, regidas por una relación no lineal, de modo que las variables de estado del sistema resultante estén relacionadas de acuerdo a una representación en forma de estado lineal [Is89], [SI91].
- ii) Mediante *linealización entrada-salida* se pretende que la relación entrada-salida del sistema realimentado sea lineal, pero sin imponer una relación lineal entre las variables internas, es decir las variables de estado. La técnica empleada consiste en derivar sucesivamente la salida del sistema no lineal hasta que se obtenga una expresión en la que aparezca explícitamente la señal de entrada, y luego elegir ésta de modo que cancele las no linealidades. Posteriormente es necesario estudiar la estabilidad de la dinámica interna, es decir la acotación de los estados [Is89], [SI91], [Vi93].

Sin embargo, tanto la linealización entrada-estado como entrada-salida no son métodos aplicables a todos los sistemas no lineales, sino a aquellos que puedan ser caracterizados en una determinada forma de variables de estado. Además, para su aplicación práctica es necesario la medida de los estados físicos del sistema, es decir, suele ser necesario el empleo de observadores de estado no lineales. Tampoco está asegurada la robustez frente a incertidumbres en el valor de los parámetros o frente a la presencia de dinámicas no modeladas.

Las técnicas basadas en realimentación de estado están siendo investigadas en su aplicación práctica a sistemas reales, y en los problemas que ello conlleva. Es dificultoso el diseño y desarrollo de observadores de estado no lineales, siendo un área abierta de investigación. Aparte, se está profundizando en los efectos de incertidumbre y dinámicas no modeladas en los diseños mediante realimentación de estado. Una solución a ello es la inclusión de adaptabilidad en la realimentación de estado. La resolución de todos estos problemas, aplicados a casos particulares, es necesaria para que dichas técnicas puedan utilizarse en casos prácticos [Is89], [Vi93], [Ma93a], [Ma93b].

Algunos de los trabajos más interesantes de linealización haciendo uso de técnicas específicas de control se van a comentar a continuación:

- Por ejemplo, en [Re84] se plantea un método de linealización local. Un comportamiento no lineal, caracterizado en el espacio de estado, puede aproximarse como lineal en un punto (linealización local). Sin embargo, al alejarnos del punto del espacio de estado en que se ha hecho la aproximación el error crece. En este artículo se plantea como obtener una linealización local que sea independiente del punto en que se hace. Haciendo una transformación algebraica de las variables de estado y una realimentación no lineal es posible, en algunos casos, conseguirlo. Es como hallar para un sistema no lineal un modelo tangente que sea independiente del punto de linealización. En este contexto, se está entendiendo linealizar como hallar un modelo lineal, no como

modificar el comportamiento para hacer que el sistema físico se comporte linealmente.

- En [Bo94] se encuentra una aplicación interesante de linealización aplicada a un motor de inducción, de comportamiento claramente no lineal, en el que no todas las variables de estado del sistema son medibles físicamente. Además, la dinámica es fuertemente variable con la temperatura. Para conseguirlo se plantea una transformación de estado no lineal (cambio de coordenadas) a partir de sólo medidas de flujo, velocidad y corriente. Además, se añade una realimentación lineal de las variables no lineales. El resultado final es una relación lineal entre las nuevas variables definidas.
- Para realizar controladores no lineales muchas veces es necesario realimentar las variables de estado del sistema no lineal. Esto es problemático, y es una de las causas de que el control adaptativo de sistemas no lineales no esté demasiado desarrollado. En el artículo [Th94] se propone el diseño de observadores de estado no lineal diseñados mediante redes neuronales.

II.- SISTEMAS NO LINEALES.

II.1.- Introducción.

Prácticamente todos los sistemas físicos son no lineales de por sí, aunque muchas veces es posible describir su funcionamiento de modo aproximado mediante un modelo lineal. La caracterización matemática del comportamiento de los sistemas lineales es posible hacerla o bien en el dominio temporal o bien en el dominio transformado. En el dominio temporal se trabaja con ecuaciones diferenciales lineales, compactables en la formulación en ecuaciones de estado. En el dominio transformado lo habitual es la caracterización mediante funciones de transferencia. En general, en un sistema lineal es posible simultanear estas dos posibilidades de caracterización.

Sin embargo, la formulación de sistemas no lineales es más rígida y no está tan homogeneizada. Cada tipo de sistema no lineal requiere un tipo de modelado, no habiendo tantas posibilidades de elección como en el caso lineal. Esto conlleva que sea difícil hallar la formulación de un sistema global formado por la interconexión de diversas no linealidades.

Para los sistemas lineales, bien descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales o bien en el dominio transformado, se conocen métodos con los que es posible obtener expresiones cerradas de la solución de dichas ecuaciones. En cambio, en general, esto no es posible en el caso de sistemas no lineales. En éstos, en muchas ocasiones lo máximo posible es poder hacer ciertas predicciones acerca de su funcionamiento. La ausencia de expresiones cerradas para la solución de las ecuaciones de sistemas no lineales hace que este tipo de análisis predictivo aproximado sea muchas veces la única opción posible para el análisis de ciertos sistemas. En general, el análisis de sistemas no lineales requiere usar una mayor variedad de técnicas matemáticas que en el caso de sistemas lineales ya que no hay métodos universales aplicables a sistemas no lineales, sino que los métodos y soluciones suelen ser particulares a cada caso concreto.

En este capítulo, dedicado a los sistemas no lineales, se pretende exponer la teoría y algún ejemplo de aplicación de algunos de los métodos más habituales tanto en modelado como en linealización.

El objetivo de modelar es el de hallar un conjunto de ecuaciones matemáticas que caractericen el funcionamiento de un sistema. Esto se puede conseguir bien conociendo las ecuaciones de funcionamiento exacto, o bien de funcionamiento aproximado bajo ciertas restricciones. En ocasiones, el comportamiento de un sistema en la proximidad de una región de funcionamiento denominada punto de trabajo, es aproximable por unas ecuaciones lineales, obteniéndose lo que se denomina modelo nominal. El modelo nominal será válido si no hay grandes desviaciones respecto al punto de trabajo para el que se ha obtenido. Sin embargo, a menudo hay situaciones en que esto no ocurre y entonces el modelo linealizado nominal es inexacto e inadecuado.

De entre los métodos de modelado expuestos, el más importante para el desarrollo de este trabajo será el de la expansión en serie de Volterra. Teniendo en cuenta que lo que se pretende es linealizar, en el sentido de cancelar las no linealidades presentes en un sistema, el paso previo será descomponer el sistema a linealizar en dos bloques. Un bloque caracterizará la componente de respuesta lineal del sistema, y el otro la no lineal. Este último será el término a cancelar.

Además se expondrán las técnicas de linealización más habituales actualmente, presentando las bases teóricas en que se fundamentan y discutiéndose su viabilidad en aplicaciones reales.

II.2.- Caracterización y modelado.

El modelo matemático que caracteriza el comportamiento de un sistema no lineal está determinado por una o varias ecuaciones. Se distinguirá entre sistemas estáticos (sin dinámica) y sistemas dinámicos. En estos últimos, las ecuaciones del sistema no sólo incluyen términos exclusivamente relativos a las no linealidades, básicamente operaciones algebraicas, sino también operaciones con derivadas e integrales.

II.2.1.- Sistemas no lineales sin dinámica.

La forma más sencilla de relación no lineal entre dos variables la podemos expresar como una relación entrada salida con una función del tipo

$$y = f(x)$$

donde la variable y se puede interpretar como la salida del bloque no lineal, mientras que x sería la entrada. En principio, la relación matemática entre las dos variables se asume que es cualquiera que no incluya ni derivadas ni integrales.

II.2.1.1.- Polinomios de Taylor.

La expansión en serie de Taylor de una función proporciona una aproximación polinómica $p(x)$ a dicha función $f(x)$, haciendo que ambas coincidan en sus n derivadas evaluadas en un punto dado x_0 . El polinomio de Taylor se formula del siguiente modo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x-x_0)); \quad 0 < \alpha < 1$$

en donde $E_n(x)$ representa el error entre la aproximación polinómica y la función $f(x)$, que estará acotado si también lo está la derivada de orden $n+1$. Consecuencia de esto

es que sólo serán aproximables por polinomios de Taylor aquellas funciones cuyas derivadas sucesivas en un punto existan y sean finitas. Por ejemplo, no serán aproximables las no linealidades que incluyan discontinuidades o ciclos de histéresis.

Por ejemplo, si la función tangente hiperbólica se aproxima mediante los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en el punto $x=0$, se obtiene

$$y = \tanh(x) \approx \tilde{y}$$

$$\tilde{y} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

El desarrollo en serie de Taylor de n variables. Este caso tiene interés por su utilidad en la aproximación lineal de sistemas caracterizados por sus ecuaciones de estado no lineales. Estos, en ocasiones son linealizables alrededor de un punto de funcionamiento. Por ejemplo, el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 \cos(x_2) + x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \sin(x_2) + x_2 + (x_1 + 1)x_1$$

$$\text{vectorialmente } \dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

se puede aproximar su dinámica alrededor del punto $x=0$ por su Jacobiano, obteniéndose

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

En el ejemplo anterior, se ha entendido por linealizar el hecho de buscar un modelo lineal. Cabe distinguirlo de cuando se habla de linealizar en el sentido de obligar a tener un comportamiento lineal.

II.2.1.2.- Polinomios de Legendre.

El conjunto de polinomios generados a partir de la expresión

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)$$

se comprueba que son ortogonales en el intervalo $-1 < x < 1$, según el producto interno definido así

$$\int_{-1}^{+1} p_m(x) p_n(x) dx = \delta_{mn}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker

Los primeros polinomios de Legendre son

$$p_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$$p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)$$

$$p_3(x) = \sqrt{\frac{7}{8}} (5x^3 - 3x)$$

Por tanto, la aproximación polinómica que se puede plantear es la siguiente

$$f(x) \approx p(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_n p_n(x)$$

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f(x) p_n(x) dx$$

Al obtenerse los coeficientes aplicando la propiedad de ortogonalidad, implica que el error cuadrático de la aproximación disminuye al aumentar el número de coeficientes. La expresión para el error cuadrático de la aproximación es

$$\int_{-1}^{+1} (f(x) - p(x))^2 dx = \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx - c_0^2 - c_1^2 - \dots - c_n^2$$

Aplicado al ejemplo anterior de la tangente hiperbólica, se obtiene la siguiente aproximación

$$y = \tanh(x)$$

$$\tilde{y} = p(x) = 0.69 p_1(x) - 0.047 p_3(x)$$

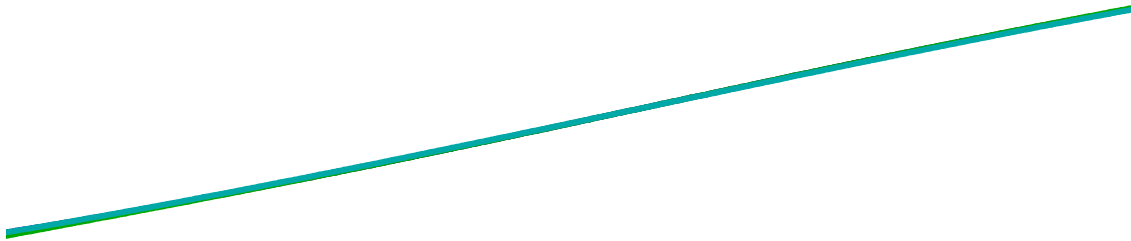


Fig.II.1: Aproximación por Legendre (trazo continuo) y por Taylor (discontinuo) de la función $y=\tanh(x)$.

En la figura II.1 puede verse dibujado en trazo continuo la función tangente hiperbólica y su aproximación por Legendre (prácticamente superpuestos), y en trazo discontinuo la aproximación por Taylor.

Y en la figura II.2 se ha representado el valor absoluto del error entre $\tanh(x)$ y las aproximaciones por Taylor y por Legendre. Se han dibujado a igual escala para tener un orden de magnitud de la diferencia entre ambos errores.

Fig.II.2: Valor absoluto de los errores de la aproximación por Taylor (trazo discontinuo) y por Legendre (continuo) de la función $\tanh(x)$.

II.- Sistemas no lineales

Con la figura II.2 queda de manifiesto que en el tramo de x entre -1 y $+1$ la aproximación por Legendre es más uniforme, mientras que la de Taylor pretende ser buena sólo en un punto.

II.2.1.3.- Polinomios de Hermite.

Los polinomios de Hermite cumplen la propiedad

$$\overline{H_p(x) H_q(x)} = p! A^p \delta_{pq}$$

donde δ_{pq} es la delta de Kronecker

cuando x es una señal de estadística gaussiana, de media cero y $\sigma^2=A$. Los primeros polinomios de Hermite son

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - A$$

$$H_3(x) = x^3 - 3Ax$$

Por ejemplo, si la función tangente hiperbólica la aproximamos con los cuatro primeros polinomios de Hermite, se obtiene

$$y = \tanh(x)$$

$$\tilde{y} = 0.614 H_1(x) - 0.05 H_3(x)$$

donde para realizar esta aproximación se ha tomado como señal x de excitación cinco mil muestras de una señal gaussiana de media cero y varianza unitaria.

II.2.1.4.- Series de Fourier.

Muchas no linealidades al ser excitadas por una señal sinusoidal presentan una respuesta periódica. En este caso, es posible realizar un desarrollo en serie de Fourier de esta respuesta, obteniéndose la amplitud y fase de los armónicos de la salida en función del armónico de entrada. Este es el caso, por ejemplo, de las no linealidades del tipo saturación y zona muerta. Se obtiene la formulación siguiente

$$y(t) = f(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \cos(n \omega t) dt ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \sin(n \omega t) dt ;$$

Por ejemplo, para una saturación del tipo

$$\text{si } |x| \leq a \text{ entonces } y = K x$$

$$\text{si } |x| \geq a \text{ entonces } y = K a$$

el armónico principal del
tiene los coeficientes

desarrollo en serie de Fourier
siguientes

$$a_1 = 0 ; \quad b_1 = \frac{2 K A}{\pi} \left(\sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) ;$$

También están relacionados con el desarrollo en serie de Fourier de la salida de una no linealidad los polinomios de Chebyshev. Los primeros polinomios de Chebyshev de primera clase son

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

y cumplen la relación recurrente ... siguiente

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

y también la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} \quad \text{si } m, n \neq 0$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker

Si se aplica una señal sinusoidal, más en concreto un coseno, a la entrada de una no linealidad estática, la salida no lineal es posible desarrollarla en serie de Fourier, de este modo

$$y(t) = f(A \cos(\omega t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \cos(n \omega t) dt$$

y realizando un cambio de variable se obtiene

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \cos(n \omega t) dt = \left\{ \text{si } x = \cos(\omega t) \right\} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y(t) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Por tanto, los coeficientes de la serie de Fourier coinciden con los del desarrollo en serie polinómica de Chebyshev

$$y(t) = f(A x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t)$$

La utilidad del desarrollo en serie de Fourier de la respuesta de una no linealidad a una excitación sinusoidal está en su relación con el método del balance armónico, que se describirá en el apartado II.2.2.1.

II.2.2.- Sistemas no lineales con dinámica.

II.2.2.1.- Función descriptiva.

El método del balance armónico es una extensión del concepto de respuesta frecuencial comúnmente usado para el análisis de sistemas lineales. Es un método aproximado para analizar la posibilidad de oscilaciones armónicas en sistemas no lineales en lazo cerrado. La idea esencial del método consiste en considerar la posibilidad de existencia o no de armónicos de una cierta frecuencia en la respuesta del sistema no lineal. La magnitud de estos armónicos, normalmente el fundamental, se determina haciendo uso de lo que se denomina función descriptiva. Una buena referencia básica sobre el tema es [SI91], mientras que en [Ge92] se encuentra una reciente aplicación del método del balance armónico al estudio de dinámica caótica en sistemas no lineales.

Supongamos un sistema no lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, en el que esta excitación de la entrada se asume que es una senoide

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

en cuyo caso la salida del sistema no lineal será una suma de armónicos, múltiplos de ω

$$y(t) = y_1(\omega) + y_2(2\omega) +$$

es decir, ω es la frecuencia fundamental. Se define la función descriptiva, $N(A, \omega)$, como

$$y_1(\omega) = |N(A, \omega)| A \sin(\omega t + \phi_N)$$

$$N(A, \omega) = |N(A, \omega)| e^{j\phi_N}$$

que se puede interpretar como una función de transferencia a la frecuencia dada, y que tiene la particularidad de que depende no sólo de la frecuencia de entrada (como es el caso de las funciones de transferencia de los sistemas lineales) sino también de la amplitud de la señal de entrada.

Como ejemplo ilustrativo vamos a aplicar el método a predecir la presencia de oscilaciones en un sistema no lineal constituido por la interconexión de un bloque lineal y otro no lineal, tal como el de la figura II.3

II.- Sistemas no lineales

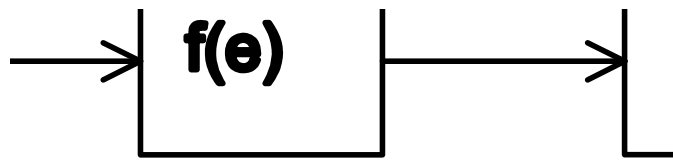


Fig.II.3: Diagrama de bloques de un sistema no lineal.

donde $G(s)$ es la función de transferencia de la parte lineal, y el bloque no lineal viene dado por una saturación, tal como

$$f(e) = k e \text{ si } |e| \leq a$$

$$f(e) = k a \text{ si } |e| \geq a$$

Si se supone la existencia de una oscilación armónica del tipo

$$e = e(t) = A \sin(\omega t)$$

significa que a la salida de la no linealidad saturación se tendrá una señal compuesta por la suma de armónicos de una frecuencia fundamental. En el apartado II.2.1.4 ya se ha mostrado que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier a la salida de la saturación son

$$a_1 = 0; \quad b_1 = \frac{2 K A}{\pi} \left(\sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right);$$

y en consecuencia, para el armónico fundamental, esta no linealidad tiene un comportamiento frecuencial dado por

$$N(A, \omega) = \frac{2 K}{\pi} \left(\sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$$

A la salida de la no linealidad, nos quedamos sólo con el primer armónico, ya que se considera que el resto son eliminados mediante filtraje por el bloque lineal. Esta es la aproximación que se hace al trabajar con la función descriptiva, considerar un solo armónico. En cierto modo, es como substituir el bloque no lineal por un bloque lineal, equivalentes a una frecuencia dada (se le llama bloque *quasi-lineal*). En el bucle cerrado solo está presente un armónico de frecuencia ω , y para el cual se ha de cumplir la siguiente condición de

oscilación

$$1 + N(A, \omega) G(\omega) = 0$$

la cual permite, en lazo cerrado, la existencia de una oscilación de amplitud mantenida. A partir de esta última ecuación se pueden despejar los valores de la amplitud y de la frecuencia de la oscilación.

Resultados empíricos, con una posterior justificación teórica, han mostrado que con el método de la función descriptiva se puede solucionar, aproximadamente, un gran número de problemas de oscilación. Sin embargo, debido a que es un método aproximado, puede ocurrir que:

- i) Que la frecuencia y amplitud de la oscilación predicha no sean correctas.
- ii) Que una oscilación predicha no exista.
- iii) Que una oscilación que exista no sea predicha.

II.2.2.2.- Sistemas bilineales.

Los sistemas bilineales son un caso particular de sistema no lineal. Al formularlos en ecuaciones de estado quedan compuestos por un término lineal más otro término no lineal. Y éste último, está formado por productos entre las variables de estado y la/s señales de entrada al sistema.

Su representación matemática es

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^m N_i$$

Es decir, que incluyen un término de control aditivo y otro de control multiplicativo. Este tipo de modelado aparece habitualmente en varios sistemas físicos: sistemas biológicos, sistema inmunológico, sistema cardiovascular y sistemas demográficos [Mo91]. Además, son fácilmente estabilizables usando técnicas de estabilidad basadas en el segundo método de Lyapunov (Apéndice I).

II.- Sistemas no lineales

II.2.2.3.- Series funcionales de Volterra.

La expansión en serie de Volterra es una forma de representar sistemas no lineales que generaliza el concepto de respuesta impulsional de sistemas lineales. Así como la salida de un sistema lineal se puede obtener como la convolución entre la señal de entrada y la respuesta impulsional de dicho sistema lineal, de igual modo la salida de algunos sistemas no lineales se podrá obtener como la suma de las convoluciones de unas funciones multivariables (kernels que hacen el papel de respuesta impulsional) con una señal obtenida como la potencia de orden k de la señal de entrada. Por ejemplo, no son caracterizables por serie de Volterra los sistemas que incluyen no linealidades del tipo histéresis, backlash, o con discontinuidades. La referencia básica sobre el tema es [Sc80].

Supongamos la siguiente descomposición de la señal $y(t)$, que es la salida de un sistema no lineal invariante y causal, como consecuencia de una entrada $u(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) = H_1(u) + H_2(u) + \dots + I$$

$$\text{es decir } y_k(t) = H_k(u)$$

Cada uno de los k -términos está asociado a un orden de no linealidad. El término $y_1(t)$ corresponde a la componente de respuesta lineal, y el resto de términos conforman lo que podríamos denominar como no linealidades. Así por ejemplo $y_2(t)$ caracteriza las no linealidades de orden 2 y se obtiene mediante el operador correspondiente $H_2(u)$. Para un determinado grado de no linealidad se cumple que

$$H_k(cu) = c^k H_k(u)$$

La caracterización de una no linealidad de orden k mediante su correspondiente kernel de Volterra viene dada por la siguiente integral

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) u(\tau_1) \dots u(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \end{aligned}$$

$$h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \text{ _ kernel de orden } k$$

que puede ser considerada como la particularización de una integral de convolución multidimensional a una variable unidimensional, es decir

$$\begin{aligned}
y_k(t_1, \dots, t_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) u(t_1 - \tau_1) \dots u(t_k - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) u(\tau_1) \dots u(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \\
y_k(t) &= y_k(t_1, \dots, t_k) |_{t=t_1=\dots=t_k}
\end{aligned}$$

Precisamente esta particularización es lo que hace que un kernel de orden k no esté unívocamente definido. Para que la solución de la obtención de un kernel sea única, se impone la condición de simetría, lo cual dará además propiedades especiales a la expansión. La propiedad de simetría se expresa matemáticamente de este modo

$$h(\dots, \tau_i, \dots, \tau_j, \dots) = h(\dots, \tau_j, \dots, \tau_i, \dots)$$

y por tanto el kernel es inalterable a los cambios de orden de las variables. Dado un kernel de orden k no simétrico, es posible simetrizarlo (ver [Sc80]), o sea, obtener su equivalente simétrico. En este caso equivalente significa que la particularización de la convolución multidimensional sea la misma, es decir que responda con la misma señal de salida para una misma entrada.

Lo importante de la expansión en serie de Volterra es que cada uno de los k -términos caracteriza un grado de no linealidad, y se obtiene a partir de una integral de convolución, que no olvidemos que es una operación lineal. La no linealidad queda *condensada* en la señal que se convoluciona con el kernel correspondiente, y cabe considerarla como una señal multidimensional de orden k obtenida a partir de $u(t)$.

La condición de estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output) de cada uno de los términos queda asegurada si se cumple la condición suficiente (pero no necesaria) siguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)| d\tau_1 \dots d\tau_k < \infty$$

Otra de las ventajas de trabajar con series de Volterra es que, al estar relacionadas con convoluciones multidimensionales, significa que es posible usar toda la teoría de transformadas de Fourier y de Laplace asociadas al procesado multidimensional.

Sin embargo, el mayor inconveniente de la teoría de funcionales de Volterra está precisamente en como obtener los kernels correspondientes a la expansión de un determinado sistema no lineal. Distinguiremos dos tipos de métodos:

- Los métodos analíticos, que consisten en obtenerlos directamente a partir de las ecuaciones no lineales (caso que se conozcan).
- Los métodos de identificación, que identifican los kernels haciendo uso de excitaciones multiarmónicas (o multisinusoidales). Las señales multisinusoidales, [La81], [Ev95], [Mc95], están formadas por la suma de armónicos de diferentes frecuencias, elegidos de modo que provoquen la respuesta de los diferentes kernels de Volterra. Entonces, realizando análisis espectral a la salida del sistema no lineal se puede identificar cada armónico generado por un kernel en concreto, sin ambigüedad, y de este modo ir conformando la respuesta frecuencial de los kernels.

II.2.2.4.- Series funcionales de Wiener (G-funcionales).

La expansión en serie de funcionales de Wiener tiene una formulación del tipo

$$y(t) = G_1(u) + G_2(u) + \dots + G_n(u)$$

que en apariencia es similar a una serie de Volterra. Sin embargo hay dos diferencias fundamentales:

- La primera, es que un funcional de Wiener de orden p no sólo posee no linealidades de este tipo sino también de inferior. Esto significa que cada funcional de Wiener es caracterizable mediante una serie de Volterra.
- La segunda diferencia, está en que a cada funcional de Wiener se le impone la condición de que su respuesta sea ortogonal a cualquier otra respuesta de un kernel de Volterra de orden inferior, cuya señal de excitación u sea ruido blanco gaussiano.

Así pues, la respuesta al kernel de Wiener de orden p es ortogonal a cualquier

II.- Sistemas no lineales

respuesta a un kernel de Volterra de orden inferior ($p-1$, $p-2$, ...), y en consecuencia es ortogonal a la respuesta de los kernels de Wiener también de orden inferior. Claramente, la ventaja de este tipo de expansión está en que se facilita la tarea de identificación de cada uno de los términos, lo cual es más dificultoso en la expansión en serie de Volterra.

Existen técnicas basadas en correlación cruzada para obtener cada uno de los puntos correspondientes a un kernel de Wiener, realizándose de este modo una estimación punto a punto. Otra alternativa consiste en reformular la expansión en serie de Wiener de modo que se expresa cada término como una combinación de polinomios de Laguerre y de Hermite, pudiéndose hallar los diversos coeficientes aplicando propiedades de ortogonalidad [Sc80].

II.3.- Medida de no linealidades.

A veces puede ser difícil o innecesario el conocimiento exacto de las ecuaciones o del modelo que caracterizan el funcionamiento de un sistema no lineal. No siempre va a ser posible saber cual es el modelo que más se adecua a un cierto sistema, y en caso de conocerse la estructura de este modelo quizás no se puedan obtener fácilmente los parámetros del mismo.

Por ejemplo, supongamos el caso de un sistema básicamente lineal, pero con una cierta cantidad de no linealidades que se manifiestan esencialmente cuando el nivel de la señal de excitación es de una cierta magnitud, contaminando la respuesta lineal, que es la predominante. En este caso, quizás puede bastar con conocer el término lineal de la serie de Volterra, por ser el más importante, y luego realizar una serie de medidas que determinen la cantidad de no linealidades debidas al resto de kernels.

Sería el caso del modo como se caracteriza la distorsión en amplificadores. El amplificador se modela como un sistema lineal, y se considera la presencia de distorsión en ciertas zonas de funcionamiento de dicho amplificador, sobretodo cerca de saturación. Si no hubiera no linealidades, el modelo lineal de que se dispone determinaría exactamente el funcionamiento del amplificador.

Por tanto, es útil conocer técnicas para conocer la cantidad de no linealidades, que eviten haber de modelar exactamente el sistema, a través de una serie de mediciones. A continuación se va a presentar alguna de estas técnicas, empleadas especialmente en la caracterización de amplificadores de radiofrecuencia.

Consideremos un sistema no lineal, cuya relación entrada-salida está caracterizada por un polinomio, tal como

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Y supongamos que la señal de entrada es una sinusoidal, que en general podrá variar respecto al tiempo en fase o en amplitud, de este modo

$$x(t) = A \cos(\phi)$$

$$A = A(t); \quad \phi = \phi(t);$$

Entonces, considerando no linealidades hasta el tercer orden, se obtiene la siguiente expresión de la salida

$$y(t) = \frac{1}{2} a_2 A^2 +$$

$$+ (a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3) \cos(\phi) +$$

$$+ \frac{1}{2} a_2 A^2 \cos(2\phi) +$$

$$+ \frac{1}{4} a_3 A^3 \cos(3\phi) + \dots$$

es decir

$$y = D_0 + D_1 \cos(\phi) + D_2 \cos(2\phi) + D_3 \cos(3\phi) +$$

- Si la señal $x(t)$ corresponde a una modulación en amplitud, formulada de este modo

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t)$$

entonces el primer armónico que se obtiene a la salida del sistema no lineal es

$$(a_1 A(t) + \frac{3}{4} a_3 A(t)^3) \cos(\omega_0 t)$$

y por tanto la información de amplitud ha quedado alterada debido a que la no linealidad la modifica.

- En el caso de una modulación que de alguna manera afecte solo a la fase de la portadora (por ejemplo modulación de frecuencia), la señal $x(t)$ es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_x(t)),$$

y el primer armónico a la salida del sistema no lineal es

$$(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3) \cos(\omega_0 t + \phi_x(t)),$$

por tanto se mantiene íntegra la información relativa a la fase.

En conclusión, se ha comprobado que las modulaciones de fase son más inmunes a

II.- Sistemas no lineales

las no linealidades que las modulaciones de amplitud.

Existen varios métodos para medir la cantidad de no linealidades presentes a la salida de un sistema. Se van a exponer algunos de ellos. Los más habituales son: la distorsión armónica total (THD-Total Harmonic Distortion), el punto de compresión, el ratio de distorsión de intermodulación (IMR-Intermodulation Ratio) y el punto de intercepción [No90], [Sm86]. A continuación se describirán:

- i) Distorsión armónica total (THD): Si una señal sinusoidal de amplitud y fase constante es aplicada a la entrada de un sistema no lineal, la salida estará formada por la suma de los diversos armónicos generados por la no linealidad. Entonces, se define el parámetro THD del siguiente modo

$$THD = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} |D_n|^2}{|D_1|^2} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} |D_n|^2}{|D_1|^2}$$

siendo $|D_n|$ la amplitud de cada armónico

es decir, la suma de los cuadrados de la amplitud de cada armónico generado por la no linealidad (excluyendo el primero), y dividido por el cuadrado de la amplitud del primer armónico.

- ii) Punto de compresión a 1 dB: Tal como se ha mostrado anteriormente, el término de amplificación correspondiente al primer armónico generado por una no linealidad polinómica es

$$\left(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right) \cos(\omega_0 t)$$

y si el coeficiente a_3 es negativo, como ocurre por ejemplo en el caso de no linealidades debidas a efecto de saturación, entonces se produce una compresión. Es decir que la amplificación del primer armónico es menor que la que se tendría caso de que no hubiera no linealidades. En consecuencia, se tiene la desigualdad

$$si \ a_3 < 0 \quad a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 < a_1 A$$

El punto de compresión a 1 dB es el nivel de señal de entrada para el cual la ganancia del término lineal está 1 dB por debajo del valor que tendría en el caso de no

II.- Sistemas no lineales

haber no linealidades.

iii) Ratio de distorsión de intermodulación (IMR): Otro modo de medir la presencia de no linealidad, distorsión, es analizando los productos de intermodulación. Si la entrada $x(t)$ del sistema no lineal polinómico es la suma de dos sinusoides de diferente amplitud y frecuencia, mediante desarrollo trigonométrico se puede obtener la señal de salida $y(t)$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{2} a_2 A_1^2 + \frac{1}{2} a_2 A_2^2 + \\ & + (a_1 A_1 + \frac{3}{4} a_3 A_1 (A_1^2 + 2 A_2^2)) \cos(\omega_1 t) + \\ & + (a_1 A_2 + \frac{3}{4} a_3 A_2 (2 A_1^2 + A_2^2)) \cos(\omega_2 t) + \\ & + (\frac{1}{2} a_2 A_1^2) \cos(2 \omega_1 t) + \\ & + (\frac{1}{2} a_2 A_2^2) \cos(2 \omega_2 t) + \\ & + a_2 A_1 A_2 [\cos((\omega_1 - \omega_2) t) + \cos((\omega_1 + \omega_2) t)] + \\ & + \frac{1}{4} a_3 A_1^3 \cos(3 \omega_1 t) + \\ & + \frac{1}{4} a_3 A_2^3 \cos(3 \omega_2 t) + \\ & + \frac{3}{4} a_3 A_1^2 A_2 [\cos((2 \omega_1 + \omega_2) t) + \cos((2 \omega_1 - \omega_2) t)] + \\ & + \frac{3}{4} a_3 A_1 A_2^2 [\cos((\omega_1 + 2 \omega_2) t) + \cos((-\omega_1 + 2 \omega_2) t)] \end{aligned}$$

Particularizando el resultado anterior al caso en que los dos tonos de excitación tengan igual amplitud, y estén separados en frecuencia un incremento respecto a una frecuencia central, se obtiene

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t - \Delta_\omega t) + A_2 \cos(\omega_0 t + \Delta_\omega t)$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \frac{1}{2} a_2 A_1^2 + \frac{1}{2} a_2 A_2^2 + \\
 & + (a_1 A_1 + \frac{3}{4} a_3 A_1 (A_1^2 + 2 A_2^2)) \cos(\omega_0 t - \Delta_\omega t) + \\
 & + (a_1 A_2 + \frac{3}{4} a_3 A_2 (2 A_1^2 + A_2^2)) \cos(\omega_0 t + \Delta_\omega t) + \\
 & + (\frac{1}{2} a_2 A_1^2) \cos(2 \omega_0 t - 2 \Delta_\omega t) + \\
 & + (\frac{1}{2} a_2 A_2^2) \cos(2 \omega_0 t + 2 \Delta_\omega t) + \\
 & + a_2 A_1 A_2 [\cos(2 \Delta_\omega t) + \cos(2 \omega_0 + 2 \Delta_\omega t)] + \\
 & + \frac{1}{4} a_3 A_1^3 \cos(3 \omega_0 t - 3 \Delta_\omega t) + \\
 & + \frac{1}{4} a_3 A_2^3 \cos(3 \omega_0 t + 3 \Delta_\omega t) + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 A_1^2 A_2 [\cos(3 \omega_0 t - \Delta_\omega t) + \cos(\omega_0 t - 3 \Delta_\omega t)] + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 A_1 A_2^2 [\cos(3 \omega_0 t + \Delta_\omega t) + \cos(\omega_0 t + 3 \Delta_\omega t)] +
 \end{aligned}$$

Suponiendo de nuevo que a_3 sea negativo, y que la amplitud de los dos tonos sea la misma, se obtiene para el término lineal la siguiente desigualdad

$$a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3 < a_1 A$$

en la que queda de manifiesto el efecto de compresión. Del resto de productos de intermodulación, los más peligrosos, a los que llamaremos armónicos interferentes, son los que corresponden a

II.- Sistemas no lineales

$$\frac{3}{4} a_3 A_1 A_2 [A_1 \cos((2 \omega_1 - \omega_2) t) + A_2 \cos((-\omega_1 + 2 \omega_2) t)]$$

ya que por proximidad con el armónico principal pueden caer dentro de la banda de paso del sistema que se esté considerando, generalmente con respuesta frecuencial paso-banda. Los armónicos cuya frecuencia coincide con la banda de paso no son eliminables mediante un filtro lineal convencional.

El IMR (ratio de distorsión de intermodulación) es una relación entre la amplificación de los armónicos interferentes en relación a la amplificación del primer armónico, y por tanto es

$$IMR = \frac{\frac{3}{4} a_3 A_1^2 A_2}{a_1 A_1} = \frac{3}{4} \frac{a_3}{a_1} A_1 A_2$$

Si la amplitud de las dos sinusoides es la misma, la potencia distorsionadora (P_d) es proporcional al cubo de la potencia de una cualesquiera de las sinusoides de la excitación (P_i), es decir

$$P_d = \alpha_d \left(\frac{A_1^2}{2} \right)^3 = \alpha_d P_i^3$$

y se define el ratio P_{IMR} como la relación entre la potencia distorsionadora y la potencia deseada a la salida

$$P_d = \alpha_d P_i^3$$

$$P_o = \alpha_o P_i$$

$$P_{IMR} = \frac{P_d}{P_o} = \frac{\alpha_d}{\alpha_o} P_i^2$$

iv) Punto de intercepción: El punto de intercepción (P_i) es el valor de potencia a la entrada de un sistema para el cual la potencia deseada (del término lineal) y la potencia distorsionadora se igualan. O sea, cuando la P_{IMR} es unitaria. En este caso, se obtienen las igualdades siguientes

II.- Sistemas no lineales

$$si P_{IMR} = I - P_d = P_o - P_l = \sqrt{\frac{\alpha_d}{\alpha_o}}$$

$$P_{IMR} = \left(\frac{P_i}{P_l}\right)^2$$

II.4.- Linealización mediante filtraje inverso de Volterra.

Supongamos un sistema modelado mediante una expansión en serie de Volterra. La salida y de dicho sistema se puede expresar como la suma de salidas debidas a cada uno de los funcionales que componen la expansión, siendo u la entrada. Es decir, matemáticamente

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = H_1(u) + H_2(u) + \dots +$$

$$y_i = H_i(u)$$

Lo que se pretende es, que al conectar un sistema (filtro) no lineal en cascada con el anterior, la expansión en serie de Volterra del sistema total obtenido no tenga kernels de hasta un cierto orden.

Se distinguirá entre: i) filtro post-inverso y ii) filtro pre-inverso.

- i) El filtro post-inverso de orden p será un filtro no lineal, caracterizable mediante una expansión de Volterra, tal que conectado en cascada a continuación de un sistema determinado, tal como se ve en la figura II.4, cancele las no linealidades de orden igual o inferior a p .

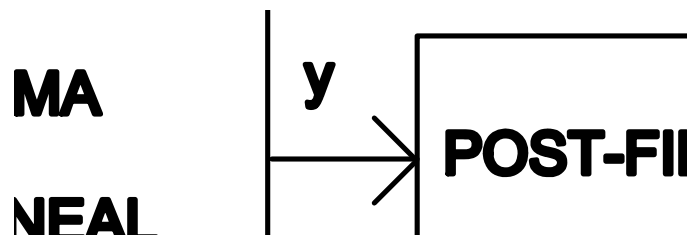


Fig.II.4: Sistema a linealizar conectado a un post-filtro.

La expansión en serie de Volterra del post-inverso es

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_p = K_1(y) + K_2(y) + \dots +$$

y la expansión de los dos bloques conectados en cascada es la siguiente

$$z = K_1 H_1(u) + K_1 H_2(u) + K_2 H_1(u)$$

El objetivo es obtener las condiciones de diseño de los funcionales, o de los kernels, del post-filtro para que el término lineal sea unitario, y el resto de términos sean nulos.

Se obtiene que, las relaciones matemáticas que permiten obtener los tres primeros operadores inversos son

$$K_1 H_1(u) = u \quad K_1 = H_1^{-1}$$

$$K_1 H_2(u) + K_2 H_1(u) = 0 \quad K_2 = -K_1 H_2 K_1 = -H_1^{-1} H_2$$

$$K_3 = -H_1^{-1} (H_2 (H_1^{-1} + K_2) - H_2 H_1^{-1} - H_2 K_2 + H_3 H_1^{-1})$$

y queda de ... manifiesto que para la síntesis del filtro inverso sólo es necesario el invertir el funcional lineal (H_1) del sistema a linealizar correspondiente. El filtro inverso total es la suma de cada uno de los términos que lo sintetizan.

ii) De igual modo, podría plantearse el filtro pre-inverso, ver figura II.5, es decir el filtro que conectado a la entrada del sistema a linealizar haga que el bloque total no tenga términos no lineales de orden p o inferior. Se demuestra que el resultado que se obtiene es el mismo que en el caso del post-inverso, es decir que los filtros pre-inverso y post-inverso de orden p coinciden en sus kernels [Sc80].

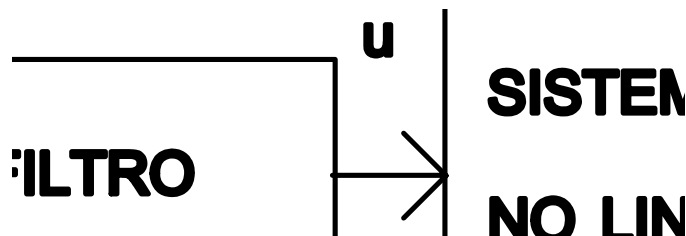


Fig.II.5: Pre-filtraje inverso.

Recientemente, [Do95], se ha publicado un trabajo en el que se describe un nuevo método de realizar un filtro inverso de Volterra, distinto a la síntesis mediante suma de funcionales. Supongamos el sistema no lineal descrito anteriormente mediante una expansión en serie de Volterra, y agrupemos todos los términos de la expansión en serie de Volterra en dos únicos funcionales, uno el lineal (H_1) y el otro el no lineal (N) (lo que se denomina modelo particionado), de este modo

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = H_1(u) + H_2(u) + \dots + H_n(u) = H_1(u)$$

Operando, se obtiene la

II.- Sistemas no lineales

relación siguiente

$$y = H_1(u) + N(u) = H_1(u + H_1^{-1} N(u)) = H_1(I + H_1^{-1} N)$$

y por tanto, si al sistema a linealizar se le conecta el siguiente prefiltro

$$u = (I + H_1^{-1} N)^{-1} H_1^{-1}(v)$$

se obtiene, con la combinación en cascada entre ambos, la siguiente relación entre y y v

$$y = H_1(I + H_1^{-1} N)(I + H_1^{-1} N)^{-1} H_1^{-1}(v) =$$

El prefiltro indicado, se puede generar mediante una realimentación tal como la de la figura II.6

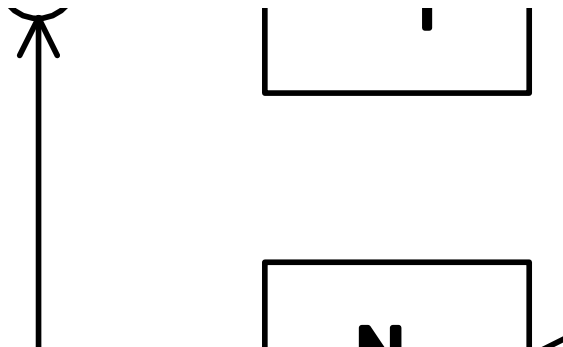


Fig.II.6: Síntesis del prefiltro inverso.

y por tanto, tiene la ventaja de que no es necesario sintetizar los kernels del sistema inverso, sino que sólo se ha de sintetizar el inverso de orden 1, es decir el inverso de H_1 . Luego, se obtiene el sistema inverso mediante el sistema realimentado indicado en la figura II.6, donde se hace uso de los mismos kernels identificados del sistema no lineal, incluidos en N . Para más detalles puede verse [Do95].

Los dos métodos de diseño de filtros inversos comentados han sido: por suma de funcionales o por realimentación. Ambos, presentan los siguientes inconvenientes:

- Necesidad de una secuencia infinita de funcionales para tener exactamente el inverso. Además, no está asegurada la convergencia de la serie de funcionales inversos sintetizados.
- Si el inverso de H_1 no es realizable ya no es realizable el filtro inverso. Este inconveniente, en [Do95] se soluciona sintetizando el mejor inverso de H_1 de acuerdo a un criterio de mínimo error cuadrático.

- Si se sintetiza un inverso de orden p , o sea con un número finito de términos, se eliminan la no linealidades hasta este orden, pero ¿ que ocurre con las no linealidades superiores ? . En principio, hasta es posible que aumenten [Sc80].

II.5.- Linealización mediante técnicas de control.

II.5.1.- Métodos geométricos.

Aquellas técnicas de la teoría de control que tienen su base matemática en el álgebra de *Lie* componen lo que se conoce como métodos geométricos. La linealización de sistemas caracterizados por sus ecuaciones de estado haciendo uso de métodos geométricos se resuelve en lo que se denomina linealización entrada-estado. En este apartado se pretende exponer los fundamentos y definiciones básicas para entender que es y utilidad del álgebra de *Lie*. Estas definiciones se usarán, posteriormente, en la formulación de los métodos de linealización basados en métodos geométricos, conocidos como linealización entrada-estado y linealización entrada-salida. Una buena exposición del tema se encuentra en [Is89], [SI91] y [VI93].

Se empezará presentando una serie de definiciones:

- La *derivada de Lie* de la función escalar $h(x)$ respecto al vector $f(x)$ se define como

$$L_f h = \Delta h \bullet f$$

siendo Δh el vector gradiente

que no es más que la derivada direccional de $h(x)$ en la dirección del vector $f(x)$.

- La función

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ definida en una región } \Omega$$

se dice que es un *difeomorfismo* si es invertible y si además tanto ella como su inversa tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden. En cierto modo, cabe considerar un difeomorfismo como una generalización del concepto de cambio de coordenadas, aplicable a sistemas no lineales.

- Se define el *Lie bracket* de dos vectores como la operación

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = ad_f g$$

$$f \in \mathbb{R}^n \quad g \in \mathbb{R}^n$$

siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ los correspondientes Jacobianos

cuyo resultado es una función vectorial. Los vectores f y g se supone que son dependientes de x .

- Un conjunto linealmente independiente de vectores $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ se dice que es *involutivo* si y solo si el *Lie bracket* de cualesquiera dos vectores del conjunto se puede expresar como combinación lineal de los vectores del conjunto. Expresado matemáticamente, es equivalente a

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ij} f_k$$

Haciendo uso de las definiciones anteriores es posible plantear una serie de relaciones, que conforman lo que se denomina como *álgebra de Lie*. Las más significativas son:

$$ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g] = ad_f(ad_f^{i-1} g)$$

$$[f, g_1 + g_2] = [f, g_1] + [f, g_2]$$

$$[f, g] = -[g, f]$$

$$ad_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h$$

Finalmente, para nuestro propósito de cómo aplicar los métodos geométricos a la linealización de sistemas, es necesario conocer el *teorema de Frobenius*. Este teorema da una condición necesaria y suficiente de existencia de la solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones siguiente

II.- Sistemas no lineales

$$\Delta h \bullet f_1 =$$

...

$$\Delta h \bullet f_m =$$

del cual se desea saber si existe una solución, es decir si existe el escalar $h(x)$ que cumple las ecuaciones. Se demuestra que esta solución existe si los vectores $f_i(x)$ son completamente integrables, y el teorema de Frobenius enuncia que un conjunto de vectores $f_1(x), \dots, f_m(x)$ es completamente integrable si y solo si es involutivo [Is89].

II.5.1.1.- Linealización entrada-estado.

Considérese un sistema no lineal SISO (Single Input Single Output), del que se conoce su formulación en ecuaciones de estado, escritas del siguiente modo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)$$

en donde tanto x como $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son vectores. El método de linealización entrada-estado consta de dos etapas: una transformación de estado y una realimentación. El detalle de como se plantea cada una de estas etapas se expone a continuación:

i) En primer lugar, realizar una *transformación de estado* tal como

$$z_1 = T_1(x)$$

$$z_2 = T_2(x)$$

...

que escrito en forma compactada es $z_n = T_n(x)$ equivalente a

$$z = T(x)$$

Lo que se pretende con esta transformación algebraica de las variables de estado es llegar a un nuevo sistema que tenga la estructura conocida como forma canónica controlable. Si se deriva respecto al tiempo la variable de estado z , y se impone la estructura de forma canónica controlable, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{z}_1 = \Delta T_1 \bullet (f + g u)$$

$$\dot{z}_2 = \Delta T_2 \bullet (f + g u)$$

...

en donde v será la nueva señal de control. Haciendo uso del álgebra de Lie se pueden expresar las ecuaciones anteriores de un modo más compacto

$$L_f T_1 + (L_g T_1) u =$$

$$L_f T_2 + (L_g T_2) u =$$

...

Solucionar este problema de transformación de variables consiste en hallar la función $T(x)$ adecuada que cumpla las condiciones impuestas. Esta función debe ser independiente de u , y esto significa que se ha de cumplir que

$$L_g T_1 = L_g T_2 = \dots = L_g T_{n-1} = 0 \quad \text{y} \quad L_g T_n \neq$$

$$L_f T_1 = T_2$$

$$L_f T_2 = T_3$$

...

Haciendo uso del álgebra de Lie se puede demostrar (ver [SI91]) que estas relaciones quedan sintetizadas en

$$L_f T_{n-1} = T_n$$

álgebra de Lie se puede demostrar (ver [SI91]) que estas relaciones quedan sintetizadas en

$$\Delta T_1 \bullet ad_f^i g = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\Delta T_1 \bullet ad_f^{n-1} g \neq 0$$

Finalmente, el teorema de Frobenius aplicado a este caso nos dice que existirá la transformación de estado planteada inicialmente, $z=T(x)$, si se cumplen la dos condiciones siguientes

II.- Sistemas no lineales

i) los vectores $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g$ sean l.i.

ii) los vectores $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g$ sean involutivos

ii) En segundo lugar, realizar una *realimentación* del tipo

$$u = \frac{-L_f^n T_1 + v}{L_g L_f^{n-1} T_1}$$

tal que en función de las nuevas variables de estado z , el sistema resultante sea lineal y admita representación en forma canónica controlable. En este caso, la formulación final que se obtiene del sistema realimentado será

$$\dot{z} = A z + b v$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

A continuación, se va a linealización entrada-estado servirá como ejemplo con el objetivo de clarificar los pasos a seguir, anteriormente explicados. Sea el sistema

aplicar el método de a un caso concreto, que

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos(x_1) + u \cos(2x_1)$$

en el que se plantea un cambio de coordenadas como éste

cambio de coordenadas

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = a x_2 + \sin(x_2)$$

El sistema transformado obtenido, en función de z , es

$$\dot{z}_1 = -2 z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2 z_1 \cos(z_1) + \cos(z_1) \sin(z_1) + a u \cos(2 z_1)$$

y luego, eligiendo la
como

señal de control u

$$u = \frac{1}{a \cos(2 z_1)} (v + 2 z_1 \cos(z_1) - \cos(z_1) \sin(z_1))$$

se obtiene el
función de z

siguiente sistema en

$$\dot{z}_1 = -2 z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

que es lineal respecto a v .

Como conclusión, cabe decir que con el método de linealización entrada-estado lo que se obtiene son unas nuevas variables de estado (z) y una nueva señal de control (v) que están relacionadas matemáticamente entre sí mediante ecuaciones lineales. Y en consecuencia, el control del sistema linealizado se puede plantear como un control lineal, diseñándolo en función de z y v . Sin embargo, la señal u se obtiene mediante una relación no lineal, es decir que el controlador que linealiza es no lineal. Esto puede ser un inconveniente en una posible aplicación práctica.

Por tanto, lo que se realiza no es una linealización en el sentido de que el sistema que se está controlando se comporte de un modo lineal, sino que en este contexto se entiende por linealizar el hecho de tener unas ecuaciones lineales. Y para ello, se emplea un control no lineal que hace uso de las variables de estado del sistema no lineal (x). En general, para obtener estas variables de estado será necesario el uso de identificadores de estado no lineales, lo cual suele ser problemático.

II.5.1.2.- Linealización entrada-salida.

Con la linealización entrada-salida, a diferencia de la linealización entrada-estado, no se busca tener unas ecuaciones de estado lineales respecto a una señal de entrada, sino que sólo se busca linealidad en la relación entre la entrada y la salida.

II.- Sistemas no lineales

Consideremos las siguientes ecuaciones no lineales

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

en donde u es la entrada, y la salida
funciones vectoriales $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$

y x las variables de estado. Las
son no lineales.

La idea esencial de este método está en derivar sucesivamente y respecto al tiempo, hasta llegar a una relación explícita entre u y y . Por ejemplo, la primera derivada, expresada en terminología de *álgebra de Lie*, es

$$\dot{y} = \Delta h(f + gu) = L_f h + L_g h u$$

De la ecuación anterior se
entonces la señal de control u siguiente

establece que si $L_g h \neq 0$,

$$u = \frac{1}{L_g h} (-L_f h + \dot{y})$$

aplicada al sistema no lineal, conduce a una relación tal como

$$\dot{y} = v$$

que es lineal respecto a v . En caso de

que $L_g h = 0$, entonces es necesario hallar
la derivada segunda de y , siendo ésta

$$\ddot{y} = L_f^2 h + L_g L_f h u$$

Generalizando, se debe ir derivando la señal y respecto al tiempo, hasta que se cumpla una desigualdad como ésta

$$L_g L_f^{r-1} h \neq 0$$

en cuyo caso se establece que la

señal de control linealizadora será

$$u = \frac{-L_f^r h + v}{L_g L_f^{r-1} h}$$

Finalmente, el sistema linealizado obtenido queda caracterizado por

$$y^r = v$$

En conclusión, la linealización entrada-salida permite tener una relación lineal entre las señales y y v , aunque la realimentación linealizadora (para obtener u) es no lineal. En general, es necesario el empleo de identificadores de estado no lineales, siendo ello un inconveniente.

Sin embargo, el mayor inconveniente de la linealización entrada-salida está en que sólo se considera la relación entrada salida, y por tanto la dinámica interna (ecuaciones de estado) no se tiene en cuenta, pudiendo ser inestable. Esto obliga a que una vez obtenido el sistema linealizado, sea necesario analizar la dinámica interna y la estabilidad del mismo [SI91].

II.5.2.- Sistemas Adaptativos por Modelo de Referencia (MRAS).

Los sistemas adaptativos por modelo de referencia fueron introducidos por *Whitacker* en 1958, y fue durante la década de los 70 cuando tuvieron su época de potenciación, motivado por los avances teóricos que se iban logrando. Una referencia esencial de los orígenes es [La79], mientras que en [Na89] encontraremos una síntesis de los resultados más significativos obtenidos hasta la década de los 80.

El objetivo de un sistema de control por modelo de referencia es que el comportamiento del sistema a controlar sea lo más próximo posible a un sistema modelo, denominado modelo de referencia. El controlador se diseña con esta finalidad, generalmente mediante realimentación de estado. Si el controlador es adaptativo entonces se está hablando de control adaptativo por modelo de referencia (MRAC).

Hacer que sistema a controlar y modelo tengan el mismo comportamiento significa que el error entre las variables de estado de ambos sistemas sea nulo, o en su defecto lo menor posible. Es decir, que la evolución temporal de sus variables de estado sea la misma. De este modo, si el sistema que se está controlando es no lineal pero el modelo es lineal, se estará linealizando. La validez de un sistema MRAS (o MRAC) para linealizar estará en cuanto a que sea capaz de forzar al sistema no lineal a seguir, a comportarse igual, al lineal que le sirve de modelo.

A continuación, se formulará matemáticamente el problema general del control adaptativo por modelo de referencia. Se considerará que sistema a controlar y modelo son lineales, ya que es el caso más estudiado y para el que existe una solución más o menos sistemática. Luego, por extensión, se discutirá la validez de los resultados obtenidos al aplicarse a sistemas no lineales.

Supongamos que las ecuaciones de estado del sistema a controlar son

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + b_p u(t)$$

$$y_p(t) = c_p^T x_p(t)$$

y las del modelo de referencia

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m u_c(t)$$

$$y_m(t) = c_m^T x_m(t)$$

La estructura y parámetros del modelo son conocidos. Sin embargo, del sistema a controlar sólo se conoce la estructura, pero hay incertidumbre por desconocimiento del valor de sus parámetros.

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores se obtiene el sistema de ecuaciones que

caracterizan a la señal de error, definida como la diferencia entre las variables de estado del sistema a controlar y las del modelo. En un planteamiento general, el sistema de ecuaciones de estado del error se estructura de modo que tenga una formulación de este tipo

$$x(t) = x_p(t) - x_m(t)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b (u(t) - \varphi_1(t) \alpha_1 + \dots + \varphi_n(t) \alpha_n) = A x(t) + b (u(t) - \varphi^T(t) \alpha)$$

$$e(t) = c^T x(t)$$

La señal u_c es la consigna, que es la señal de excitación que se aplicaría al sistema modelo para que este responda del modo deseado. El vector α serán unos parámetros constantes, y desconocidos, que multiplican a las φ , las cuales son señales relacionadas con el sistema a controlar (generalmente con las variables de estado del mismo). El objetivo es diseñar la señal de control u que haga que las variables de estado del error tiendan a cero.

Si la señal u se obtiene de una combinación lineal de las mismas funciones φ , se llega a

$$u(t) = \varphi^T(t) k(t)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b \varphi^T (k(t) - \alpha) = A x(t) + b \varphi^T(t) \phi(t)$$

$$e(t) = c^T x(t)$$

La señal de control u con un controlador al desconocimiento de lo que el vector k

$$\text{siendo } \phi(t) = k(t) - \alpha$$

no se puede obtener convencional debido los parámetros α , por tampoco puede tener unos valores concretos. Esto obliga a que los parámetros k del controlador se deban obtener adaptativamente. Por tanto, generando de modo adaptativo los parámetros variables k se ha conseguido que el error paramétrico ϕ sea nulo, en cuyo caso el error de las variables de estado también será nulo.

II.- Sistemas no lineales

Un modo de diseñar leyes de control adaptativas en sistemas MRAC es mediante el método directo de estabilidad de Lyapunov (Apéndice I). Se plantea la función de *Lyapunov* siguiente

$$V = x(t)^T P x(t) + \phi(t)^T \gamma^{-1} \phi(t)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}$$

donde la matriz P ha de ser definida positiva ($P > 0$), y las constantes γ_i han de ser positivas. Además, la función de transferencia $H(s)$ siguiente

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

debe ser SPR (estrictamente real positiva), y (A, b) controlable. Si se cumplen estas condiciones, es posible aplicar el lema de *Kalman-Yakubovich* (ver [Na89] y [SI91]), que enuncia lo siguiente: existen para el sistema anterior unas matrices P y Q , definidas positivas, tales que

$$A^T P + P A = -Q$$

$$P b = c$$

y entonces, la derivada de la función de *Lyapunov* anteriormente planteada es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{\phi}(t)^T \gamma^{-1} \phi(t) + \phi(t)^T \gamma^{-1} \dot{\phi}(t) = \\ &= x(t)^T (P A + A^T P) x(t) + 2 (\phi(t)^T \varphi(t)) x(t)^T P b + 2 \phi(t)^T \gamma^{-1} \dot{\phi} \end{aligned}$$

En consecuencia, si el vector k este modo se genera de

$$= -x(t)^T Q x(t) + 2 \phi(t)^T (e(t) \varphi(t) + \gamma^{-1} \dot{\phi}(t))$$

entonces la derivada de la función de Lyapunov cumplirá que

$$\dot{\phi}(t) = \dot{k}(t) = -\gamma e(t) \varphi(t)$$

$$\dot{V} = -x(t)^T Q x(t),$$

Así pues, el resultado al que se ha llegado es que si el control u es obtenido como combinación lineal de los parámetros γ , ponderados por los parámetros k , y estos son generados mediante la siguiente ley integral

$$u(t) = \varphi(t)^T k(t) = k_1(t) \varphi_1(t) + \dots + k_n(t) \varphi_n(t)$$

$$\dot{k}_1(t) = -\gamma_1 \varphi_1(t) e(t)$$

...

$$\dot{k}_n(t) = -\gamma_n \varphi_n(t) e(t)$$

entonces las variables de estado del error tienden a cero [Na89]. Esto es equivalente a decir que el sistema a controlar está siguiendo al modelo de referencia.

El desarrollo anterior se ha planteado para lo que se considera como caso ideal, en el que sólo se asume incertidumbre en el valor de los parámetros del sistema a controlar. Esto hace que la ley adaptativa integral pura deducida no sea del todo adecuada para controlar sistemas con otro tipo de incertidumbre, como la estructural [Be94a]. En cambio, el control adaptativo robusto (Robust Adaptive Control) tiene en cuenta la presencia de no idealidades en dicho sistema a controlar, tales como dinámica no modelada, perturbaciones externas y no linealidades.

Para que el mecanismo de adaptación sea inmune a dinámica no modelada y no

II.- Sistemas no lineales

linealidades, es necesario modificar la ley de adaptación básica (la ley integral antes expuesta) obtenida para el caso ideal. La mayoría de soluciones propuestas, [Or89] [Na89], consisten en ligeras modificaciones de la ley integral. De entre éstas, comentaremos: ley de adaptación con zona muerta, modificaciones sigma y gamma y los sistemas VS-MRAC.

- i) La modificación conocida como *zona muerta* consiste en detener la ley de adaptación cuando el error entre las salidas sea suficientemente pequeño. Con ello no se obliga al sistema adaptativo a compensar aquello para lo que no ha sido diseñado. De este modo se consigue acotación de las señales generadas y preservar la estabilidad de todo el sistema.
- ii) Otra opción que también se ha estudiado como mecanismo de robustez en controladores adaptativos es el *acotar* el margen de valores permitidos de los parámetros adaptativos del controlador, estableciéndose un margen de funcionamiento.
- iii) Las denominadas *modificación sigma* y *modificación gamma* consisten en añadir un nuevo término a la ley integral pura con la finalidad de convertirla en un integrador con pérdidas o en un primer orden. Es una solución válida para casos muy particulares [Na89].
- iv) El inconveniente de los anteriores sistemas adaptativos robustos está en que aseguran acotación de los parámetros del sistema, es decir estabilizan, pero se pierde la propiedad del diseño ideal de que el error tienda a cero. Sin embargo, con leyes adaptativas discontinuas (*switch*) es posible, en algunos casos, conseguir ambas cosas: robustez y error nulo. A este tipo de sistemas se le denomina *VS-MRAC* (control adaptativo por modelo de referencia con estructura variable), y serán tratados en el siguiente apartado.

II.5.3.- Linealización mediante Control Adaptativo por Modelo de Referencia con Estructura Variable (VS-MRAC).

Los sistemas VS-MRAC [Hs88] (Variable Structure - Model Reference Adaptive Control), son capaces de cancelar interferencias [Be94b] y dinámica no modelada con el único conocimiento previo de una cota de la magnitud de éstas, lo cual hace pensar en su adecuación al problema de linealización.

Recuperemos la formulación de un sistema error obtenida en el apartado anterior, asumiendo la *dependencia temporal de las correspondientes variables*, aunque no se indique de un modo explícito, tal como

$$u = \varphi^T k + u_d$$

$$\dot{x} = Ax + b(\varphi^T(k - \alpha) + d + u_d) = Ax + b(\varphi^T \phi$$

$$e = c^T x$$

donde se cumple la dinámica del error conlleva (ver) *siendo $\phi = k - \alpha$* condición de SPR, y lo que ello apartado II.5.2). Además, se ha considerado la incorporación de dos nuevos términos en la formulación:

- d : que puede representar tanto la presencia de una interferencia exterior como de dinámica no modelada, lineal o no lineal.
- u_d : es el término que se añade a la señal de control con la finalidad de cancelar a d .

La señal de control u_d se generará de este modo

$$u_d = -M \operatorname{sgn}(e)$$

$$\text{siendo } M \geq \max(|d|)$$

donde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo. En la obtención de la señal canceladora u_d vemos que interviene la cota del valor absoluto de la perturbación d . Esta cota no siempre existirá. Para perturbaciones de origen externo, si que es razonable asumir que estarán acotadas, pero en el caso de que esté modelando dinámica no lineal, esta cota puede no existir o ser difícil de hallar.

Supongamos que se conoce la cota anterior. Ahora, se plantea la siguiente función de Lyapunov

$$V = x^T P x + \phi^T \gamma^{-1} \phi$$

y con la señal de control siguiente

$$u = \varphi^T k + u_d$$

$$\dot{k} = -\gamma \varphi e$$

$$u_d = -M \operatorname{sgn}(e); \quad M \geq \max(|d|);$$

II.- Sistemas no lineales

se puede comprobar [Be95] que la derivada de la función V es

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 e (-M \operatorname{sgn}(e) +$$

y se cumple que

$$\dot{V} \leq 0$$

y entonces $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

En caso de que no se conozca una cota de d , existe la alternativa de obtenerla adaptativamente. El desconocimiento de la cota de la perturbación es solventable con los sistemas *adaptativos* VS-MRAC [Fe94] [Be95]. En la referencia [Be95] se propone la siguiente ley proporcional-integral

$$\dot{M} = \mu_1 |e| + \mu_2 \dot{|e|}$$

$$M = M(t) = \mu_1 \int_0^t |e| dt + \mu_2 |e|$$

siendo $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 \geq 0$

y considerando una función de Lyapunov como

$$V = x^T P x + \phi^T \gamma^{-1} \phi + \frac{(M - \max(|d|) - \mu_2 |e|)^2}{\mu_1}$$

se obtiene esta derivada

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 e (-\max(|d|) \operatorname{sgn}(e) + d) - 2 \mu_2 |e|^2 \leq -\epsilon$$

lo cual implica convergencia del error a cero [Be95]. Los problemas más graves asociados a sistemas con estructura variable, como el propuesto, están relacionados con el hecho de que la señal de control sea discontinua. En muchos casos, el correcto funcionamiento teórico es obtenido bajo la suposición de un tiempo de conmutación nulo, inviable en la práctica. Cuando existe retraso en la conmutación el sistema total ya no se comporta del modo teóricamente obtenido, y es posible incluso que el sistema se haga inestable.

III.- NORMAS.

III.1.- Introducción.

Una norma es interpretable como una generalización del concepto de longitud de un vector, habitual en espacios vectoriales lineales de dos y tres dimensiones. Es un concepto más amplio, aplicable a espacios de dimensión n y cuya definición va más allá de lo que es físicamente una *longitud*. Buenas referencias sobre el tema son [De75] y [Vi93]. Además, en esta Tesis se incluye un apéndice con las ideas y definiciones fundamentales sobre espacios normados (Apéndice II). Una norma es una especie de *función métrica*, o sea una función para medir otras funciones. Por ejemplo, si se aplica una norma a la diferencia entre dos funciones, entonces esta norma da una idea de la proximidad entre ambas.

En nuestra aplicación en linealización, si se aplica una norma al error entre un sistema no lineal (el sistema a linealizar) y otro lineal (modelo de referencia), entonces cabe considerar que esta norma está midiendo *lo no lineal* que es dicho sistema. El problema de linealización se enfocará con un objetivo claro: disminuir la norma del error entre el sistema lineal y el no lineal, realimentando del modo adecuado para ello. Será importante elegir que norma nos servirá para realizar esta medida, es decir una norma que tenga validez en el entorno de los sistemas no lineales.

Las definiciones de normas de orden p expuestas en el Apéndice II se han hecho respecto a funciones en general, $f(t)$ o $F(s)$. Concretando, estas funciones pueden corresponder a señales o a funciones que caracterizan el comportamiento de un sistema (por ejemplo funciones de transferencia). Conceptualmente, no tiene el mismo significado la norma de una señal que la de un sistema.

Por ejemplo, si la definición de norma de orden 2 se aplica a una señal temporal $x(t)$, tal como

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

que no es más que la raíz cuadrada de su energía. Para la misma señal $x(t)$ se puede hallar la potencia media, siendo

$$Pot_media(x) = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt}$$

y ésta puede ser cero aunque no lo sea $x(t)$. Es decir, la potencia media de una señal $x(t)$ no cumple una de las condiciones que han de cumplir las normas (ver Apéndice II). Es por esto que a la potencia media se la califica como *seminorma*.

Por otro lado, al aplicar normas a sistemas surge el concepto de *norma inducida*:

- Para una función o funcional $\phi(x)$, se define la norma inducida de orden p como

$$\gamma = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\phi(x)\|_p}{\|x\|_p}$$

lo cual es equivalente a considerar a la norma inducida de orden p como una cota de la ganancia entre las normas de la señal de entrada y la señal de salida de un determinado sistema. La definición anterior es expresable de otro modo, mediante la siguiente desigualdad

$$\|\phi(x)\|_p \leq \gamma \|x\|_p$$

Además, si el operador $\phi(\cdot)$ tiene norma inducida de orden p finita, se dice que es L_p estable.

Las definiciones de normas presentadas en esta introducción y en el Apéndice II, tienen importancia por el uso que se hará en la nomenclatura de los apartados siguientes. Además, posteriormente será de gran importancia el poder hallar normas inducidas de sistemas, tanto lineales como no lineales, con la intención de aplicar criterios de estabilidad y de optimización. Con este propósito, será útil conocer tres de las propiedades más importantes que cumplen las funciones normadas: el teorema de Parseval, la desigualdad de Minkowski y la desigualdad de Holder.

- i) *Teorema de Parseval*: Relaciona la norma temporal de una función $f(t)$ con la norma frecuencial de su transformada de Fourier $F(j\omega)$, caso de que exista. La relación matemática que nos dice el teorema de Parseval es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

que, con la nomenclatura propia de normas, es lo mismo que

$$\|f\|_2 = \|F\|_2$$

Además, si se tiene un sistema lineal e invariante, cuya relación entrada-salida está expresada mediante una integral de convolución

III.- Normas

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

y se halla la norma de orden 2 de la señal de salida $y(t)$, se obtiene el resultado siguiente

$$\|y\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega} \leq \|H\|_{\infty} \|x\|_2$$

en el que se relaciona las normas de orden 2 de las señales de entrada y de salida, con la norma infinita de la transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h(t)$ del sistema. Entonces, diremos que la norma infinita de $H(j\omega)$ es una cota del cociente entre la energía a la salida respecto a energía a la entrada, es decir es una norma inducida de orden p .

ii) *Desigualdad de Minkowski*: También es conocida como *desigualdad triangular*. La norma de orden p de la suma de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, que sean L_p estables, cumple la siguiente desigualdad

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

iii) *Desigualdad de Holder*: Es una extensión de la conocida desigualdad de *Schwartz*, que relaciona la norma de orden p del producto con el producto de las normas. Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ tales que

$$f \in L_p; g \in L_q; f \cdot g \in L_1$$

se establece que

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

para aquellos valores enteros de p y q que cumplen la siguiente condición

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

III.2.- Normas inducidas en sistemas lineales.

En un sistema formado por una interconexión de subsistemas, no siempre es posible hallar una expresión matemática que caracterice el funcionamiento de todo el sistema global a partir de la formulación de cada subsistema, caso de que ésta se conozca. Es lo que ocurre, por ejemplo, al conectar entre sí subsistemas no lineales: no hay un método sistemático para obtener la relación entrada-salida total, aunque se conozca esta relación para cada bloque. En cambio, al interconectar subsistemas lineales, la función de transferencia total es fácilmente calculable conociéndose las funciones de transferencia parciales de cada subsistema.

Cuando, por cualquier motivo, no sea posible obtener una expresión analítica que determine una interconexión de subsistemas, una alternativa es hallar la norma inducida del sistema total. La norma inducida está relacionada con la ganancia de normas. De este modo, si de cada subsistema se conoce su norma inducida, entonces haciendo uso de álgebra de bloques se hallará la norma inducida total, que será una cota del cociente entre las normas de la salida y la entrada. Además, existen criterios de estabilidad, que se expondrán más adelante en este mismo capítulo, que están basado en normas inducidas de bloques interconectados.

En consecuencia, es útil tener información sobre las ganancias entre normas, normas inducidas, que se puedan definir y medir tanto en sistemas lineales como no lineales. En este apartado se hallaran relaciones entre las normas de la entrada y la salida de sistemas lineales.

Consideremos un sistema lineal e invariante, cuya relación entrada-salida viene dada por una integral de convolución, tal como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d$$

que en el dominio transformado de Fourier es equivalente a

$$Y(j \omega) = H(j \omega) X(j \omega)$$

Se establecen las siguientes desigualdades:

- La relación que se obtiene entre las normas de orden 1 de la salida y la entrada es

$$\|y\|_1 = \|h * x\|_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |x(\tau)| d\tau dt$$

por tanto

- La relación que se obtiene entre las normas de la entrada es $\|y\|_1 \leq \|h\|_1 \|x\|_1$ las normas de orden 2 de la salida y

$$\|y\|_2 = \|h * x\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega \leq \|H\|_2 \|x\|_2$$

por tanto

- La relación que se obtiene entre las normas de orden 1 de la transformada de Fourier de la salida y la entrada es $\|y\|_2 \leq \|H\|_\infty \|x\|_2$ que se obtiene entre las normas de orden 1 de la transformada de Fourier de la salida y la entrada es

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)| d\omega \leq \|H\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)| d\omega$$

por tanto

$$\|Y\|_1 \leq \|H\|_\infty \|X\|_1$$

III.3.- Normas inducidas en sistemas no lineales.

III.3.1.- Introducción.

Igual que se ha hecho para sistemas lineales en el apartado anterior, ahora se buscarán relaciones entre las normas de entrada y de salida en un sistema no lineal. En el problema de linealización, es necesario caracterizar de alguna manera la no linealidad, y no siempre va a ser posible tener una relación matemática exacta que defina el comportamiento de la misma. Puede ser interesante, y también factible, conocer algún tipo de norma inducida que acote la ganancia de normas en sistemas no lineales. De este modo, con esta información, será posible hacer un análisis de estabilidad que incluya la no linealidad, y también será posible establecer métodos para reducirla.

Esto último será cuantificable del siguiente modo: si se disminuye, por ejemplo mediante una realimentación, la norma inducida del error entre un bloque no lineal y un bloque lineal, se está linealizando.

Un modo directo de obtener normas inducidas es mediante medida. Siempre es posible medir las señales de entrada y salida de un sistema, y procesando esta información hallar las normas de entrada y salida para posteriormente obtener una cota de la ganancia entre estas normas, tal como se indica en la figura III.1.

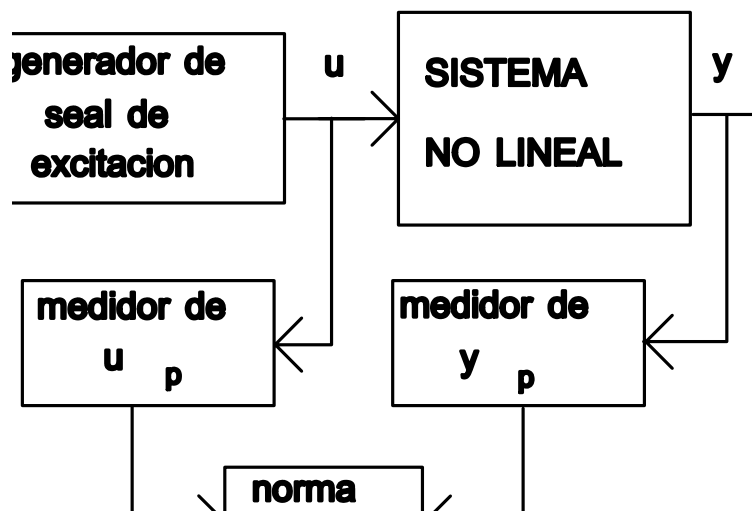


Fig.III.1: Obtención experimental de una norma inducida.

Aparte de la posibilidad de obtener esta cota mediante medidas, será útil también conocer algún modo más o menos sistemático de obtenerla a partir de información analítica del sistema no lineal. El inconveniente es que ésto no es siempre generalizable, ya que dependerá del sistema en concreto. Por ejemplo, analicemos el caso de una relación no lineal estática entre y y u , como la de la figura III.2



Fig.III.2: No linealidad estática acotada sectorialmente.

La función de la figura III.2 está acotada sectorialmente (trazos discontinuos), es decir que se cumplen las desigualdades

$$\alpha_2 < \frac{y}{u} < \alpha_1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

y por tanto, simplemente elevando al cuadrado e integrando se obtiene que también cumplirán las mismas desigualdades entre normas de orden 2

cuadrado e integrando se obtiene desigualdades entre normas de

$$\alpha_2 \|u\|_2 < \|y\|_2 < \alpha_1 \|u\|_2$$

y en consecuencia se puede establecer que α_1 es una cota de la norma inducida de orden 2.

establecer que α_1 es una cota

III.3.2.- Normas inducidas y series de Volterra.

Para generalizar en lo posible el cálculo de normas inducidas en sistemas no lineales, se quiere plantear si es posible obtener, de un modo sistemático, la norma inducida, o una cota de ésta, para un sistema no lineal caracterizable por una expansión en serie de Volterra. Ya se expuso en el apartado dedicado a series de Volterra que muchas no linealidades son caracterizables de este modo, y además existe una teoría bien desarrollada sobre ello.

Supongamos un sistema cuya relación entrada-salida está determinada matemáticamente por un funcional, tal como

y además, dicho funcional se puede $w = \phi(v)$ caracterizar mediante una expansión en funcionales de Volterra. Entonces

$$w = \phi(v) = w_1 + w_2 + \dots + w_N = \phi_1(v) + \phi_2(v) + \dots + \phi_N$$

donde la v la w podemos entender como la señal de entrada y la de salida. Se usa esta nomenclatura porque, cuando se aborde el problema de linealización, la w será lo que se llamará *perturbación de origen interno*, que interferirá de un modo aditivo en un sistema lineal, haciéndolo no lineal.

Según teoría de funcionales de Volterra (ver capítulo II), la contribución que realiza cada funcional al total de la respuesta viene dado por

$$w_n = w_n(t) = \phi_n(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) v(\tau_1) \dots v(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

que se puede entender como una particularización de la integral de convolución multidimensional. Matemáticamente, la particularización que se hace es

$$w_n(t) = w_n(t_1, t_2, \dots, t_n) |_{t=t_1=t_2=\dots=t_n}$$

siendo

$$w_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) v(\tau_1) \dots v(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

El objetivo es, conocida una expansión en serie de Volterra de un sistema, cómo obtener alguna información relativa a la norma inducida del mismo. En primer lugar, se buscará una cota (norma inducida) de la relación entre la norma de orden 2 de la señal de salida y la norma de orden 2 de la señal de entrada. Este caso se resolverá en el dominio temporal (III.3.2.1) y en el frecuencial (III.3.2.2). Posteriormente se hará lo mismo para la norma de orden 1 de las transformadas de Fourier de entrada y salida (III.3.2.3).

III.3.2.1.- Norma de orden 2 temporal.

Vamos a buscar alguna relación entre la norma de orden 2 de la salida w respecto a la norma de orden 2 de la señal de entrada v , en el dominio temporal. En primer lugar se buscará una acotación entre v y la salida debida a cada uno de los kernels, es decir hallar una relación del tipo

$$w_{n-2} \leq \rho_n(v)$$

donde $\rho_n(\cdot)$ es una función que acota la ganancia entre normas de entrada y salida del funcional. Aplicando la propiedad de la desigualdad triangular, se tiene la cota total siguiente

$$w_{-2} \leq \rho_1(v_{-2}) + \dots + \rho_N(v_{-1})$$

Esto se puede lograr buscando algún tipo de acotación mediante el desarrollo de las relaciones matemáticas de cada uno de los kernels de la expansión de la serie de Volterra. Así pues, tomando el valor absoluto de la contribución de cada término, se obtiene

$$w_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) v(\tau_1) \dots v(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

y entonces

$$|w_n(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)|^2 |v(\tau_1) \dots v(\tau_n)| |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)|^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \dots d\tau_n$$

A continuación, a la relación anterior se le aplicará la desigualdad de Schwartz. Para ello se definen las funciones $f(\bullet)$ y $g(\bullet)$ de este modo

$$f(\bullet) = |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)|^{\frac{1}{2}} v(\tau_1) \dots v(\tau_n)$$

$$g(\bullet) = |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)|^{\frac{1}{2}}$$

y aplicando la desigualdad de Schwartz se tiene

$$\begin{aligned} |w_n(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bullet) g(\bullet) d\tau_1 \dots d\tau_n \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bullet)^2 d\tau_1 \dots d\tau_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bullet)^2 d\tau_1 \dots d\tau_n \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si la desigualdad anterior se eleva al cuadrado, entonces

$$|w_n(t)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)| |v(\tau_1) \dots v(\tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n \right) C_1^2$$

siendo

$$C_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Finalmente se llega a la siguiente desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w_n(t)|^2 dt \leq C_1^2 C_2^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\tau_1) \dots v(\tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n \right)$$

siendo

$$C_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n$$

$$C_2^2 = \sup_{\tau_1 \dots \tau_n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)| dt \right\}$$

que escrito en
es equivalente a

forma compacta

$$\|w_n\|_2 \leq C_1 C_2 \|v\|_2$$

III.3.2.2.- Norma de orden 2 frecuencial.

También es posible el plantearse obtener la cota entre la normas de orden 2 de la entrada y la salida del término no lineal, desarrollando las relaciones de Volterra en el dominio frecuencial. Haciendo uso de la transformada de *Fourier* se pueden obtener las relaciones frecuenciales siguientes [Sc80]

$$\begin{aligned}
 W_n(\omega) &= \mathcal{F}\{w_n(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} d\omega_1 \dots d\omega_n = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}
 \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto

$$|W_n(\omega)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |W_n(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{n-1})| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}$$

y sabiendo que en el dominio transformado multidimensional se cumple que

$$W_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) V(\omega_1) V(\omega_2) \dots V(\omega_n)$$

puede efectuarse un desarrollo equivalente al del apartado anterior. Aplicando la desigualdad de Schwartz, se obtiene como resultado

$$\begin{aligned}
 |W_n(\omega)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(\omega - \omega_1, \dots, \omega_{n-1})|^{\frac{1}{2}} |H_n(\omega - \omega_1, \dots, \omega_{n-1})|^{\frac{1}{2}} (\text{sigue} \rightarrow) \\
 &\quad (\rightarrow \text{sigue}) |V(\omega - \omega_1) \dots V(\omega_{n-1})| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \leq \\
 &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left(\int \dots \int |H_n| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \dots \int |H_n| |V(\omega - \omega_1) \dots V(\omega_{n-1})|^2 d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, la desigualdad obtenida es

$$|W_n(\omega)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right) (\text{sigue} \rightarrow)$$

$$(\rightarrow \text{sigue}) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n| |V(\omega - \omega_1) \dots V(\omega_{n-1})|^2 d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right)$$

Finalmente se llega al siguiente resultado

$$|W_n|_{-2}^2 \leq \frac{C_3^2 C_4^2}{(2\pi)^{2n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega - \omega_1) \dots V(\omega_{n-1})|^2 d\omega d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}$$

siendo

$$C_4^2 = \sup_{\omega_1, \dots, \omega_n} \{ |H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \}$$

$$C_3^2 = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sup_{\omega} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(\omega - \omega_1, \dots, \omega_{n-1})| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right\}$$

que escrito en forma compacta es equivalente a

$$|W_n|_{-2} \leq C_3 C_4 |V|_{-}$$

III.3.2.3.- Norma de orden 1 de la transformada de Fourier.

Las normas inducidas obtenidas en los desarrollos anteriores se han buscado de modo que relacionaran las normas de orden 2 de la entrada y la salida de un sistema no lineal caracterizable por su expansión en serie de Volterra. Sin embargo, el inconveniente que tienen es que el resultado es una norma inducida que para cada kernel depende de integrales de la respuesta impulsional o frecuencial de dicho kernel, según el caso.

Interesará tener relaciones más simples. Por ejemplo, podríamos plantearnos con que norma inducida está directamente relacionada la norma infinita de la transformada de Fourier de un kernel, que es una magnitud más sencilla de medir que no la integral. Considerando la siguiente desigualdad frecuencial

$$\begin{aligned}
 |W_n(\omega)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |W_n(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{n-1})| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \leq \\
 &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{n-1})| (sigue \rightarrow) \\
 &(\rightarrow sigue) |V(\omega - \omega_1)| |V(\omega_1 - \omega_2)| \dots |V(\omega_{n-1})| d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}
 \end{aligned}$$

e integrando respecto a la frecuencia ω , se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} |W_n(\omega)| d\omega \leq \\
 &\leq \frac{\gamma_n}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega - \omega_1)| |V(\omega_1 - \omega_2)| \dots |V(\omega_{n-1})| d\omega d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}
 \end{aligned}$$

siendo

$$\gamma_n = \sup_{\omega, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}} \{ |H_n(\omega - \omega_1, \dots, \omega_{n-1})| \} = \sup_{\omega_1, \dots, \omega_n} \{ |H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \}$$

que escrito con la nomenclatura típica de normas es equivalente a

$$|W_n(\omega)| \leq \gamma_n |V(\omega)|.$$

$$|W_{n-1}| \leq \gamma_n |V_{-1}|^n$$

y extendido a una no linealidad modelada por una expansión en serie de Volterra se obtiene

$$|W_{-1}| \leq \gamma_1 |V_{-1}| + \gamma_2 |V_{-1}|^2 + \dots + \gamma_N.$$

III.4.- Criterios de estabilidad entrada-salida.

III.4.1.- Introducción.

De todas las propiedades que caracterizan un sistema, quizás la más importante es si es estable o inestable. Para sistemas no lineales, determinar la estabilidad del mismo es tarea difícil, ya que no existen métodos sistemáticos aplicables a cualquier sistema no lineal. Es por esto que es útil conocer diferentes métodos, y aplicar el que se pueda para cada caso concreto.

Sin embargo, si algo tienen en común la mayoría de los criterios de estabilidad aplicables a sistemas no lineales es que se basan en la convergencia y acotación de algún tipo de norma, aplicada bien a las variables de estado o bien a la salida del sistema en estudio.

El método directo de estabilidad de Lyapunov (Apéndice I) es aplicable a sistemas caracterizados por un conjunto de ecuaciones diferenciales, que describen la evolución en el tiempo de las variables de estado. Con el método directo de estabilidad de Lyapunov, se define una función relacionada con estas variables de estado (mediante una forma cuadrática), y se estudia la evolución en el tiempo de la derivada de esta función.

Los criterios de estabilidad que se expondrán en este capítulo tienen en común que estudian la estabilidad desde el punto de vista de entrada-salida. Además, en su formulación intervienen normas. El objetivo de la estabilidad entrada-salida es determinar bajo que condiciones una entrada acotada, según una cierta medida (norma), produce una salida acotada según el mismo, u otro, criterio de medida.

Los primeros trabajos en estabilidad entrada-salida se remontan a mediados de los años 60 (Zames y Sandberg), o sea que tienen un origen bastante reciente en comparación con los trabajos de Lyapunov de finales del siglo XIX. El método directo de estabilidad de Lyapunov determina la estabilidad interna, de las variables de estado, en contraposición a lo que es determinar la estabilidad entrada-salida. Ambos enfoques, estabilidad interna o estabilidad entrada-salida, no son incompatibles sino que son maneras distintas de abordar un mismo problema, relacionadas aunque no del todo equivalentes [Vi93].

III.4.2.- Método de la pequeña ganancia.

El método de estabilidad de la pequeña ganancia establece una serie de condiciones suficientes para la existencia de estabilidad entrada-salida en un sistema. Es aplicable a sistemas no lineales y/o variantes con el tiempo. Se debe remarcar el hecho de que las condiciones de estabilidad que establece son suficientes, pero no necesarias. Ello significa que, en general, aquellos sistemas en que no se cumplan estas condiciones no tienen porque ser inestables. Por tanto, en este sentido, es un criterio conservativo [De75] y [Vi93].

Sea un sistema en lazo cerrado, tal como el representado en la figura III.3

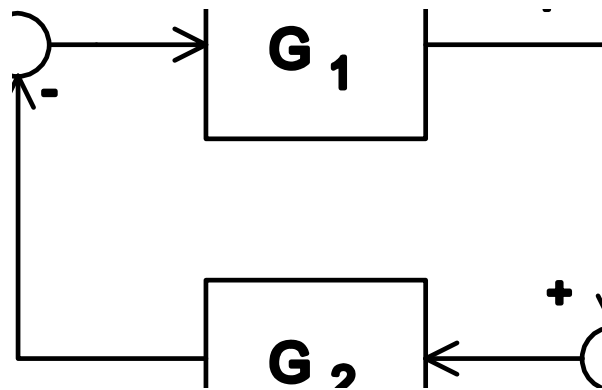


Fig.III.3: Interconexión de dos sistemas.

compuesto por la interconexión de dos sistemas, cuya relación entrada-salida está caracterizada por los operadores $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$. Las ecuaciones que relacionan las variables definidas en el sistema anterior son las siguientes

$$y_1 = G_1(e_1); \quad y_2 = G_2(e_2);$$

$$e_1 = u_1 - y_2; \quad e_2 = y_1 + u_2;$$

Supongamos que los operadores $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ son L_p estables, es decir que la ganancia de la norma de orden p de la entrada está acotada, y por tanto la norma de orden p de la salida también lo estará. Si esta relación entre normas de entrada y de salida viene dada por las siguientes relaciones

$$\|y_{1-p}\| \leq \gamma_1 \|e_{1-p}\|$$

$$\|y_{2-p}\| \leq \gamma_2 \|e_{2-p}\|$$

siendo los γ_i y β_i números reales positivos, entonces si se cumple la condición

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1$$

se puede obtener, mediante desarrollo algebraico, las siguientes inecuaciones

$$\begin{bmatrix} -y_{1-p} \\ -y_{2-p} \end{bmatrix} \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 \\ \gamma_1\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{1-p} \\ -u_{2-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1 \\ \gamma_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2\beta_2 \end{bmatrix} \right)$$

que relacionan las normas de las señales exteriores u_1 y u_2 con la salidas de cada bloque y_1 y y_2 , y unas relaciones similares para las señales e_1 y e_2

$$\begin{bmatrix} -e_{1-p} \\ -e_{2-p} \end{bmatrix} \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{1-p} \\ -u_{2-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 + \gamma \\ \beta_1 + \gamma \end{bmatrix} \right)$$

Por tanto, el criterio de estabilidad entrada-salida que se establece es el siguiente:

si las señales u_1 y u_2 tienen norma de orden p finita entonces una condición suficiente para que la norma de orden p de e_1 , e_2 , y_1 y y_2 sea finita es que $\gamma_1\gamma_2 < 1$

III.4.3.- Pasividad.

Sea el mismo sistema que se ha considerado en el apartado anterior, en el que se supone que los operadores $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ están acotados por las relaciones siguientes

$$\langle e_1, G_1(e_1) \rangle_T \geq \varepsilon_1 \|e_1\|_{-2}^2 + \delta_1 \|G_1(e_1)\|_{-2}^2$$

$$\langle e_2, G_2(e_2) \rangle_T \geq \varepsilon_2 \|e_2\|_{-2}^2 + \delta_2 \|G_2(e_2)\|_{-2}^2$$

siendo

$$\langle x, y \rangle_T = \int_{-\infty}^T x(t) y(t) dt; \quad \|x\|_{-2}^2 = \langle x, x \rangle; \quad \delta_i, \varepsilon_i$$

Entonces, si se cumplen la condiciones

$$\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$$

$$\delta_2 + \varepsilon_1 > 0$$

el sistema en cuestión será L_2 estable, y además se cumplirá la desigualdad indicada a continuación

$$\begin{bmatrix} -y_{1-2} & -y_{2-2} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -y_{1-2} \\ -y_{2-2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -y_{1-2} & -y_{2-2} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} -u_{1-2} \\ -u_{2-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{1-2} \\ -u_{2-2} \end{bmatrix}$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} \delta_1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \delta_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} I & 2|\varepsilon_2| \\ 2|\varepsilon_1| & I \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} |\varepsilon_1| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estos resultados se pueden particularizar para un tipo concreto de sistemas, para lo cual será útil realizar previamente una serie de definiciones:

- Un operador $G(\cdot)$ es pasivo si se cumple que

$$\langle x, G(x) \rangle_T \geq 0 \quad \forall T \geq t$$

- Un operador $G(\cdot)$ es estrictamente pasivo si

$$\exists \varepsilon > 0$$

$$\text{tal que } \langle x, G(x) \rangle_T \geq \varepsilon \|x\|_{-2}^2 \quad \forall T \geq t$$

Nótese, en las definiciones anteriores,

III.- Normas

que si x correspondiera a la corriente que circula por un dispositivo electrónico, y $G(x)$ fuera la tensión en sus bornes, se tendría una analogía con la condición de pasividad en Teoría de Circuitos [An68].

Aprovecharemos las definiciones anteriores para establecer que, si se cumplen las condiciones indicadas a continuación:

i) que $G_1(\bullet)$ sea estrictamente pasivo

ii) que la ganancia L_2 de $G_1(\bullet)$ sea finita

iii) que $G_2(\bullet)$ sea pasivo

entonces el sistema en lazo cerrado será L_2 estable [Vi93]. Además, si a G_1 se le imponen las condiciones de G_2 , y viceversa, también habrá estabilidad L_2 .

III.4.4.- Estabilidad absoluta.

Los primeros trabajos sobre estabilidad absoluta fueron iniciados por Lure, y es por ello que también se conoce a este criterio de estabilidad como *problema de Lure*.

Sea un sistema no lineal representable mediante lo que se denomina forma de Lure, que es la estructura de la figura III.4,



Fig.III.4: Estructura de Lure con no linealidad sectorial en la realimentación.

en donde $\varphi(\cdot)$ es una no linealidad estática, acotada sectorialmente, mientras que G es un sistema causal, lineal e invariante, caracterizable por $G(s)$ (la transformada de Laplace de su respuesta impulsional). Según el tipo de no linealidad sectorial, se distinguen dos criterios de estabilidad absoluta:

i) El criterio de *estabilidad absoluta de Popov* establece que, si se cumplen las

condiciones siguientes:

- $G(s)$ es estrictamente estable.
- La no linealidad estática $\phi(\cdot)$ es sectorial y cumple la siguiente acotación

$$0 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq \sigma$$

$$\text{con } \phi(0) = 0, \sigma \geq 0$$

entonces se establece que una
asintótica del punto de
es que

condición suficiente de estabilidad
equilibrio, en el sistema indicado,

$$\exists r > 0 \text{ y } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\text{Re}\{ (1 + j \omega r) G(j \omega) \} + \frac{1}{\sigma} \geq \delta, \forall \omega \geq 0$$

- ii) El *criterio del círculo* es otro criterio de estabilidad absoluta, aplicable a no linealidades estáticas sectoriales del tipo

$$\sigma_1 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq \sigma_2$$

$$\text{siendo } \phi(0) = 0, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0$$

que establece un criterio suficiente de estabilidad a partir del diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ [SI91].

III.4.5.- Hiperestabilidad.

En 1963 Popov presentó un criterio de estabilidad conocido como hiperestabilidad, que cabe interpretar como una extensión del concepto de estabilidad absoluta. La teoría de hiperestabilidad tuvo un creciente interés a partir de los años 70, ya que fue ampliamente empleada en el diseño de sistemas adaptativos por modelo de referencia (MRAS). Una de las referencias más importantes sobre hiperestabilidad y su aplicación al diseño de sistemas adaptativos es el trabajo de Landau [La79], mientras que en [An68] se expone una interpretación interesante del concepto de hiperestabilidad y se relaciona con pasividad [Na80].

Sea el diagrama de bloques de la figura III.5, en donde se interconectan dos bloques, formando la estructura en lazo cerrado conocida como forma de Lure

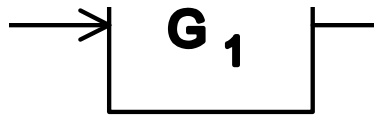


Fig.III.5: Estructura de Lure.

La teoría de hiperestabilidad establece que el sistema $G_1(\cdot)$ es *hiperestable* si es estable para todas aquellas señales de entrada w (en cuya generación interviene $G_2(\cdot)$) para las cuales exista un valor real l que cumpla las siguientes condiciones

$$\int_0^T v(t) y(t) dt \geq -l^2 \quad \forall T \geq 0$$

$$\int_0^T w(t) y(t) dt \leq l^2$$

y si la estabilidad es asintótica entonces se dirá que $G_1(\cdot)$ es *asintóticamente hiperestable*.

El resultado más interesante en teoría de hiperestabilidad, y que se aplica en el diseño de sistemas adaptativos por modelo de referencia (MRAS), se da en el caso en que G_1 sea un sistema causal, lineal e invariante tal como

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$y = Cx + Dw$$

$$G_1 = G_1(s) = C(sI - A)^{-1}B +$$

ya que en este caso, una condición necesaria y suficiente para que G_1 sea hiperestable es que su función de transferencia $G_1(s)$ sea una función PR (real positiva).

Y si $G_1(s)$ es una función SPR (estrictamente real positiva) entonces se cumple la condición necesaria y suficiente para tener hiperestabilidad asintótica.

Las condiciones que ha de cumplir una función de transferencia para ser PR o SPR son las siguientes:

- Real positiva (PR): Una función de transferencia $G(s)$, racional y propia, es PR si y solo si

i/ $G(s)$ es estable

ii/ Los polos en el eje imaginario son simples y con residuo real y no negativo

- Estrictamente (SPR):
transferencia $G(s)$, racional y propia, es SPR si y solo si

iii/ $\forall \omega \geq 0 \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0$

real positiva
Una función de

i/ $G(s)$ es estrictamente estable

ii/ $\forall \omega \geq 0 \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$

IV.- OPTIMIZACION DE NORMAS.

IV.1.- Introducción.

La teoría de optimización plantea y soluciona el problema de optimizar, generalmente en el sentido de minimizar, un cierto criterio de funcionamiento o función de coste, sujeto al cumplimiento de unas restricciones. Aplicado a sistemas dinámicos, es habitual el empleo de funciones de coste cuadráticas relacionadas con las variables de estado y la señal de control del sistema a controlar, siendo las restricciones las ecuaciones de estado del sistema. La gran eclosión del empleo de teoría de optimización en el diseño de controladores se produjo durante la década de los 60, trabajándose esencialmente en el diseño de controladores óptimos de acuerdo a criterios de coste cuadrático aplicados a sistemas lineales. Y si bien los primeros trabajos se realizaron desde el enfoque frecuencial, finalmente los mayores logros han sido con la formulación en espacio de estado.

Existen varias aproximaciones al problema de la optimización del funcionamiento de sistemas dinámicos caracterizados por sus variables de estado, que es el caso que nos interesa. Las más importantes teorías mediante las que es posible solucionar este problema son: el cálculo de variaciones, la programación dinámica y el principio del mínimo de Pontryagin. Para nuestros propósitos lo más importante es conocer los resultados finales a los que se ha llegado al aplicar cualquiera de estas teorías al diseño de controladores óptimos de acuerdo a criterios cuadráticos para controlar sistemas lineales. Estos resultados se concretan en dos problemas ampliamente estandarizados: el regulador óptimo cuadrático lineal (LQR) y el control óptimo gaussiano cuadrático lineal (LQG).

Todo el detalle de los antecedentes y desarrollo de la solución a los problemas LQR y LQG se puede encontrar en la referencia [An89].

La optimización, minimización, de normas está relacionada con las cada vez más conocidas teorías de control óptimo H_2 y H_∞ . Consideraremos un sistema lineal, tal como el representado en el diagrama de bloques de la figura IV.1,

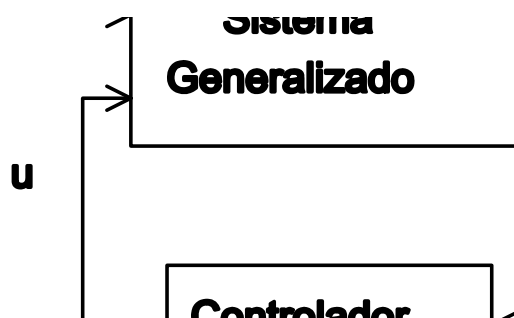


Fig.IV.1: Estructura de un sistema de control.

en donde se distinguen dos entradas w y u , y dos salidas z y y . El bloque etiquetado como *sistema generalizado* relaciona mediante ecuaciones lineales las entradas con las salidas, de modo que esta relación se puede expresar mediante una función de

transferencia (quizás matricial) tal como

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}$$

donde el operador G puede estar expresado en el dominio de Laplace, siendo en este caso la función de transferencia $G(s)$. Si se establece una realimentación mediante el bloque *controlador*, se obtendrá un bloque resultante con entrada w y salida z relacionadas mediante la función de transferencia T_{zw} . Si el objetivo es minimizar la norma de orden 2 de esta función de transferencia, es decir minimizar $\|T_{zw}\|_2$, entonces se está considerando un control óptimo H_2 . En cambio, si se pretende minimizar $\|T_{zw}\|_\infty$ se tratará de control óptimo H_∞ .

La solución del control óptimo H_2 deriva directamente del problema LQG mediante una adecuada elección de los pesos de la función de coste. La idea clave de esto está en que en el caso LQG se está considerando que tanto el ruido de proceso como el de medida tienen densidad espectral plana. De este modo, minimizar la potencia de ruido a la salida de un sistema lineal, cuando el ruido a la entrada tiene densidad de potencia constante, es equivalente a minimizar la norma de orden 2 de la función de transferencia.

El diseño de controladores basados en norma- ∞ tiene su punto de partida en 1981 a raíz de un trabajo de Zames en el que estudiaba la minimización de funciones de sensibilidad. Se empezó estudiando soluciones frecuenciales, basadas en interpolación del tipo Nevanlinna-Pick y en métodos frecuenciales relacionados con factorización espectral y norma de Hankel.

Fue en 1984 cuando Doyle presentó una solución en el dominio temporal, espacio de estado, y se relacionó el problema de control óptimo H_∞ con el problema de Nehari (mínima distancia de acuerdo al criterio de norma de Hankel). Este método propuesto era computacionalmente costoso.

En 1989 se publica un artículo, [Do89], que cabe considerar el inicio de la hegemonía de la solución en el espacio de estado, frente a las soluciones frecuenciales que más o menos se habían ido desarrollando y perfeccionando en los años anteriores. El método propuesto en [Do89] permite el diseño de controladores subóptimos según el criterio H_∞ a partir de la resolución de dos ecuaciones de Riccati, una correspondiente a un controlador por realimentación de estado y otra al observador (similitud con LQG). Al decir controlador subóptimo significa que se diseña un controlador que haga que se cumpla que $\|T_{zw}\|_\infty$ esté por debajo de una cota, y reduciendo sucesivamente esta cota nos iremos aproximando al óptimo.

Parte de la importancia creciente del control óptimo por norma- ∞ cabe atribuirlo a la validez de este criterio para ser aplicado en sistemas con incertidumbre, y relacionarlo con criterios de estabilidad basados en normas, como el método de la pequeña

IV.- Optimización de normas

ganancia. Todo ello lo hace adecuado para resolver muchos problemas prácticos relacionados con Control Robusto (ver Capítulo V).

A nivel teórico, en la década de los 90 se está trabajando en la extensión del control óptimo por norma infinita a sistemas no lineales. Actualmente, la teoría H_∞ para sistemas no lineales está mucho menos desarrollada que para sistemas lineales, y es una línea de investigación abierta. También tienen mucho interés los denominados criterios *mixed* H_2/H_∞ , que plantean optimizar la norma H_2 de un sistema, pero manteniendo al mismo tiempo acotada su norma infinita. A continuación se detallan algunos trabajos representativos de lo que son las líneas de investigación sobre la temática de norma infinita:

- En el artículo [Ba93], se estudia el aplicar a un sistema no lineal una realimentación, también no lineal, con la que se obtenga un sistema resultante que sea disipativo e internamente estable. La utilidad de ello está en su aplicación como método para estabilizar sistemas no lineales.
- La atenuación de perturbaciones, mediante realimentación de estado, en sistemas no lineales es tratada en [Is92]. El controlador resultante es no lineal, y tiene en cuenta la estabilidad interna del sistema en lazo cerrado. La obtención de dicho controlador no lineal obliga a resolver una ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs, siendo computacionalmente costoso y no siempre posible.
- En [Sc92] se realimenta no linealmente un sistema no lineal, para minimizar su ganancia L_2 . Para obtener el controlador adecuado a ello se ha de resolver una desigualdad del tipo Hamilton-Jacobi-Isaacs.
- Una buena publicación sobre optimización *mixed* H_2/H_∞ es [Zh94]. La idea de dicho criterio mezcla consiste en diseñar un controlador que optimice un criterio H_2 pero con la restricción de que la norma- ∞ del mismo esté por debajo de una cota. Tiene interés en sistemas que se quieran diseñar de acuerdo a la norma de orden 2 (justificado por la presencia de ruido blanco gaussiano) y a los que además se quiere dar un cierto grado de robustez frente a algún tipo de incertidumbre. La solución se obtiene de resolver dos ecuaciones de Riccati acopladas, lo cual hace que sea costoso computacionalmente. Es un área activa de investigación.
- En [Sh95] se plantea y resuelve el problema de seguimiento (*tracking*) de acuerdo a un criterio H_∞ . Es decir, conseguir que la salida del sistema a controlar se aproxime en lo posible a la señal de referencia externa. La solución obtenida es válida para sistemas lineales variantes, y se obtiene a partir de un criterio óptimo que considera horizonte finito.

- Una realimentación no lineal de salida, para optimizar la ganancia L_2 de un sistema no lineal, se estudia en [Is95]. El controlador se obtiene de resolver dos desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs.

IV.2.- Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dado un sistema, caracterizable por n ecuaciones diferenciales (ecuaciones de estado), tal como el siguiente

$$\dot{x} = f(x, u, t), \text{ y la condición inicial } x(0) = x_0$$

que se puede interpretar como un conjunto de ecuaciones de restricción, que rigen el funcionamiento de un sistema dinámico. El problema de optimización consistirá en hallar la señal de control u óptima (u_{op}), en el sentido de que minimice una función de coste del tipo

$$\text{Coste} = \int_0^{t_f} f_0(x, u, t) dt$$

lo cual, generalizado a una condición inicial $x(t)$, queda descrito así

$$J = J(x, u, t) = \int_t^{t_f} f_0(x, u, t) dt$$

$$J_{op} = J_{op}(x, t) = \min_u \{ J \}$$

La función de coste penaliza tanto las variables de estado x como la propia señal de control u . La solución se puede obtener por diversos enfoques teóricos, y lo que nos interesa en nuestro caso es sólo el resultado final, que es un conjunto de ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman*. Para más detalles, acudir a la referencia [An89].

En primer lugar, se define la denominada función Hamiltoniana del siguiente modo

$$H(x, p, u, t) = f_0(x, u, t) + p(t)^T f(x, u, t)$$

$$\text{abreviado } H = f_0 + p^T f$$

en donde se ha hecho uso, para su definición, de una función auxiliar $p(t)$. Se demuestra que, en el caso de control óptimo se ha de cumplir la *ecuación de Bellman*, que se enuncia así

$$-\frac{\partial J_{op}}{\partial t} = \min_u \left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial J_{op}}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) \right\}$$

o lo que es lo mismo, haciendo uso de la igualdad siguiente

$$p = p(t) = \frac{\partial J}{\partial z}$$

entonces, la ecuación de Bellman queda escrita de este otro modo

$$-\frac{\partial J_{op}}{\partial t} = \min_u \{$$

Además, con el controlador óptimo se cumple la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial J_{op}}{\partial t} + H(x_{op}, u_{op}, p, t) =$$

siendo u_{op} y x_{op} el control y la trayectoria óptima, respectivamente.

Desarrollando y compactando los resultados anteriores, se llega a la formulación conocida como *mínimo de Pontryagin*, que consiste en una serie de condiciones (ecuaciones) que ha de cumplir el control óptimo, y son las siguientes

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad p = \frac{\partial J_{op}}{\partial x}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad H(x_{op}, u_{op}, p, t) = -\frac{\partial J_o}{\partial t}$$

Además, se demuestra que la señal de control u que minimiza la función de coste planteada es la misma que minimiza la función Hamiltoniana, y por tanto se puede obtener de resolver esta desigualdad

$$\min_u \{ H \} = H(x_{op}, u_{op}, p, t)$$

$$H(x, u, p, t) \geq H_{op}$$

IV.2.1.- El problema LQR.

El regulador lineal cuadrático óptimo (*Linear Quadratic Regulator*) es quizás el resultado más conocido en teoría de optimización de sistemas dinámicos lineales. Las ecuaciones de restricción vienen dadas por las de un sistema lineal, expresado en forma de variable de estado de este modo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde x es el vector de las variables de estado y u el vector de la señal de control. Se pretende conocer para qué señal de control u se tiene el mínimo de la función de coste cuadrática siguiente

$$J = \int_0^{t_f} (x^T W_1 x + u^T W_2 u)$$

donde se pondera tanto las variables de estado x como la propia señal de control u . En primer lugar se obtiene la función Hamiltoniana

$$H = H(x, p, u) = x^T W_1 x + u^T W_2 u + p^T (Ax + Bu)$$

cuyo mínimo, en función de u , se puede obtener derivando e igualando a cero. De este modo, la ley de control óptima es

$$u_{op} = \frac{-W_2^{-1} B^T p}{2}$$

Substituyendo el control óptimo en las ecuaciones previas, y haciendo uso de las condiciones del mínimo de Pontryagin, se tiene el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B W_2^{-1} B^T \left(\frac{p}{2}\right) \\ \dot{p} &= -W_1 x - A^T \left(\frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

que escrito en forma matricial es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B W_2^{-1} B^T \\ -W_1 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

Si se definen unas matrices Q y R del modo indicado a continuación, se compacta aún más la notación

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ (\frac{\dot{P}}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ (\frac{P}{2}) \end{bmatrix}$$

$$Q = W_1; \quad R = -B W_2^{-1} B^T;$$

Para completar la solución del problema de optimización planteado, es necesario resolver el sistema matricial anterior. Para ello, se define la matriz de *Riccati* P del siguiente modo

$$\frac{P(t)}{2} = P(t) x(t) - \frac{P}{2} = P x$$

y al incorporar esta definición al sistema anterior, se llega a que la matriz P debe cumplir la ecuación diferencial siguiente

$$-\dot{P} = A^T P + P A + Q + P R P; \quad P(t_f) = 0;$$

Q, R *Simétricas y definidas positivas* conocida como *ecuación de Riccati* diferencial. Además, tanto el coste como el control óptimo se pueden expresar en función de la solución de dicha ecuación $P(t)$

$$u_{op} = -W_2^{-1} B^T P(t) x(t) = -K_c(t) x(t); \quad B u_{op}(t) = R P(t) x(t)$$

$$J_{op} = x_0^T P(0) x_0$$

Las siguientes igualdades se obtienen mediante cálculo diferencial

IV.- Optimización de normas

$$\dot{x}^T P x = x^T A^T P x + u^T B^T P x$$

$$x^T P \dot{x} = x^T P A x + x^T P B u$$

$$x^T \dot{P} x = -x^T A^T P x - x^T P A x - x^T Q x - x^T P R P x$$

y de este modo

$$\frac{d(x^T P x)}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x =$$

$$= x^T A^T P x + u^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B u - x^T A^T P x - x^T P A x - x^T Q x - x^T P R P x =$$

$$= -x^T W_1 x + (-u_{op})^T W_2 u + u^T W_2 (-u_{op}) + u_{op}^T W_2 u_{op}$$

e integrando se

obtiene la igualdad

$$= -x^T W_1 x - u^T W_2 u + (u - u_{op})^T W_2 (u - u_{op})$$

$$J = J_{op} + \int_0^{t_f} (u - u_{op})^T W_2 (u - u_{op}) dt$$

$$\text{siendo } u_{op} = -W_2^{-1} B^T P x$$

que pone de manifiesto de qué modo repercuten en el nivel de optimalidad las desviaciones de la señal de control respecto a la señal de control óptima.

También es importante conocer la particularización de todo lo anterior para el caso de función de coste con horizonte infinito, es decir cuando t_f es infinito, ya que en este caso la ecuación de Riccati a resolver es una ecuación algebraica, tal como

$$A^T P + P A + Q + P R P = 0$$

que se relaciona con la *matriz Hamiltoniana* del siguiente modo

$$P = Ric \left(\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \right)$$

La matriz Hamiltoniana la asociaremos a una ecuación de Riccati algebraica (ARE), y la matriz P será la solución de esta ecuación.

IV.2.2.- El problema LQG.

El regulador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) establece cuál es la realimentación óptima que aplicada a un sistema lineal contaminado con ruido blanco gaussiano en su salida (ruido de medida) y en su entrada (ruido de proceso). El problema es similar al del control LQR, con el añadido de la incertidumbre de las señales ruidosas.

Las ecuaciones de estado del sistema a optimizar son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B u + I \\ y &= C x + v\end{aligned}$$

en donde el efecto del ruido de proceso y del ruido de medida se ha incorporado al sistema de ecuaciones mediante las señales w y v , respectivamente.

El objetivo es minimizar la siguiente función de coste

$$J = E \left\{ \int_0^{\infty} (x^T W_1 x^T + u^T W_2 u) dt \right\}$$

que es un criterio cuadrático medio con horizonte infinito. El operador $E\{\}$ (esperanza) aplicado a la integral anterior lo que hace es promediar estadísticamente la integral cuadrática. Para obtener la realimentación óptima se ha de disponer de la información estadística del ruido de proceso y del ruido de medida, que está caracterizada por la media y las correlaciones de las señales w y v , tal como

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\tau)^T & v(\tau)^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} R_{ww} & 0 \\ 0 & R_{vv} \end{bmatrix}$$

Se está considerando que los ruidos de proceso y de medida están incorrelados, y las autocorrelaciones vienen dadas por funciones delta de *Dirac*. La realimentación óptima de la salida, en el sentido de minimizar el criterio anteriormente planteado, viene dado por el *principio de separación*, que establece que esta realimentación óptima se descompone en un estimador de estado óptimo y un controlador óptimo LQR que realimenta las variables de estado estimadas.

La estructura del estimador es

$$\dot{\xi} = A \xi + B u + K_e (y - C \xi)$$

siendo K_e la solución de la ecuación de Riccati siguiente

$$P_J = Ric \left(\begin{bmatrix} A^T & -C^T R_{vv}^{-1} C \\ -\Gamma R_{ww} \Gamma^T & -A \end{bmatrix} \right)$$

$$A P_J + P_J A^T + \Gamma R_{ww} \Gamma^T - P_J C^T R_{vv}^{-1} C P_J$$

$$K_e = P_J C^T R_{vv}^{-1}$$

El controlador óptimo es similar al obtenido en el problema LQR resuelto anteriormente, es decir

$$P_H = Ric \left(\begin{bmatrix} A & -B W_2^{-1} B^T \\ -W_1 & -A^T \end{bmatrix} \right)$$

$$A^T P_H + P_H A + W_1 - P_H B W_2^{-1} B^T P_H$$

$$K_c = W_2^{-1} B^T P_H$$

y finalmente, la realimentación óptima del estado óptimamente identificado será

$$u = -K_c \hat{\xi}$$

En síntesis, se puede expresar la realimentación óptima como un filtro de entrada y salida u , cuya transformada de Laplace viene dada por

$$U(s) = F(s) Y(s)$$

$$F(s) = \begin{bmatrix} A - K_e C - B K_c \\ -K_c \end{bmatrix} \hat{1}$$

IV.3.- Ecuación de Riccati y matriz Hamiltoniana.

La solución al problema de optimización pasa muchas veces por la resolución de una o varias ecuaciones de Riccati algebraicas (ARE). Por ejemplo, es el caso visto en el control cuadrático LQR y LQG, y también será el caso en la optimización según el criterio de la norma-2 y de la norma-∞. Es por esto que interesa conocer las condiciones y forma de la solución de la ecuación de Riccati asociada a una cierta matriz Hamiltoniana.

Sea la matriz Hamiltoniana siguiente

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$A, Q, R, \in \mathfrak{R}^{n \times n}; \quad H \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n};$$

Q, R son matrices $_C$ tricas

y la ecuación algebraica de Riccati (ARE) asociada a la matriz H es

Riccati (ARE) asociada a la

$$A^T P + PA + PRP + Q =$$

Se define la matriz J como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & C \end{bmatrix}$$

y se puede comprobar que se cumple la relación

$$J^{-1} H J = _ J H J = _$$

Consecuencia de lo anterior es que la matrices H y $-H^T$ son similares, y si λ es un autovalor de H también lo será $-\lambda$. Por tanto los autovalores son simétricos respecto al eje imaginario, y si no hay autovalores en el eje imaginario la mitad de los autovalores serán estrictamente estables y la otra mitad estrictamente inestables. Cada autovalor tendrá asociado su autovector, y de este modo se define

$$\lambda^+(H) \in _+ \text{ y sus autovectores en } V^+$$

$$\lambda^-(H) \in _- \text{ y sus autovectores en } V^-$$

Los siguientes teoremas, cuya demostración se halla en [Kn93] y en [Zh96], establecen condiciones necesarias y suficientes de existencia de una solución estabilizable de una determinada ARE

Si se cumple que

- i) H no tiene autovalores en el eje imaginario*
- ii) los subespacios V^- y $\text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ son complementarios*

entonces \exists una única solución P de la ARE

tal que P es \mathbb{R} -Céntrica y $\lambda(A + RP) \in \mathbb{C}^-$

Si se cumple que

- i) H no tiene autovalores en el eje imaginario*

ii) $R \geq 0$ o $R \leq 0$

iii) (A, R) es estabilizable

entonces \exists una única solución P de la ARE

A esta matriz P tal que P es \mathbb{R} -Céntrica y $\lambda(A + RP) \in \mathbb{C}^-$ real y simétrica, solución estabilizable de una ecuación de Riccati algebraica, asociada a una matriz Hamiltoniana, la indicaremos como $P = \text{Ric}(H)$.

IV.4.- Norma-2.

IV.4.1.- Definición y cómputo.

Indudablemente, los criterios de optimización cuadráticos han sido y son los más empleados tanto en Procesado de señal como en Teoría de Control. En parte, cabe atribuir el motivo de este éxito a que su optimización suele conducir a soluciones lineales, más o menos implementables. Además, las funciones de coste cuadráticas tienen una interpretación física relacionada con magnitudes físicas tan conocidas como la energía y la potencia.

A continuación, veremos como se define y minimiza la norma-2 de un sistema, y cual es su relación con un tipo concreto de criterio cuadrático. Consideremos un sistema lineal y estrictamente estable, con una entrada y una salida (SISO), formulado en forma de espacio de estado de este modo

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x$$

$$\text{estrictamente estable } _ \lambda(A) \in _ \text{ '}$$

donde el operador $\lambda(\cdot)$ representa los autovalores de la matriz a la que se aplica. El sistema anterior, formulado como función de transferencia en el dominio de Laplace viene dado por

$$G = G(s) = C (s I - A)^{-1}$$

y su respuesta impulsional será

$$g = g(t) = C e^{At}$$

El cálculo de la norma de orden 2 del sistema anterior se puede realizar a partir de las siguientes definiciones de los gramianos de controlabilidad y de observabilidad:

- Se define como *gramiano de controlabilidad* L_c a la siguiente función

$$L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

que es posible obtener de un modo indirecto, ya que si se plantea la siguiente igualdad, obtenida mediante derivación,

$$\frac{d(e^{At} B B^T e^{A^T t})}{dt} = A e^{At} B B^T e^{A^T t} + e^{At} B B^T e^{A^T t}$$

posteriormente integrando de 0 a ∞ ,
y teniendo en cuenta que para una matriz A estable se cumple que

$$e^{At} \Big|_{t=\infty} = 0$$

se llega a las relaciones siguientes

$$-B B^T = A L_c + L_c A^T$$

$$\text{siendo } L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

- De igual forma, el *gramiano* de observabilidad L_o se define y obtiene de un modo similar

$$\frac{d(e^{A^T t} C^T C e^{At})}{dt} = A^T e^{A^T t} C^T C e^{At} + e^{A^T t} C^T C e^{At}$$

$$\text{integrando se obtiene } -C^T C = A^T L_o + L_o A$$

$$\text{siendo } L_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Las anteriores definiciones de
gramiano de controlabilidad y
gramiano de observabilidad tienen interés en cuanto a su utilidad en el cómputo de la norma de orden 2 de un sistema lineal. Si se define la *norma-2* de un sistema lineal y causal como la integral (entre los límites de 0 a ∞ por motivos de causalidad) del cuadrado de su respuesta impulsional, y esta expresión se relaciona con las definiciones de *gramianos* ya expuestas, se obtiene

$$\int_0^\infty g^2(t) dt = \int_0^\infty C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T dt = \int_0^\infty B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B dt$$

$$= C L_c C^T = B^T L_o B$$

que escrito con la simbología
propia de normas es equivalente a

IV.- Optimización de normas

$$-g_{-2} = -G_{-2} = (C L_c C^T)^{\frac{1}{2}} = (B^T L$$

V.4.2.- Minimización de la norma-2.

El objetivo que se pretende ahora es minimizar, mediante realimentación u de una medida y , la norma de orden 2 de la función de transferencia que relaciona la entrada w con la salida z de un sistema lineal.

Las ecuaciones de estado del sistema en cuestión son

$$\dot{x} = Ax + b_1 w_x + b_2 u$$

$$y = c x + d_{21} w_y$$

que por simplicidad consideraremos SISO. Las señales w_x y w_y son el ruido de proceso y el de medida, respectivamente. El sistema anterior también se puede representar así

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$y = C_2 x + D_{21} w$$

siendo

donde u es la señal a realimentar, de modo que se consiga minimizar la función de coste de orden-2 siguiente

$$J = \int_0^{\infty} (c x^2 + d_{12} u^2) dt$$

que definiendo la variable z así

$$z = C_1 x + D_{12} u$$

siendo

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad C_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{12} \end{bmatrix};$$

$$\text{entonces } J = \int_0^{\infty} (z_1^2 + z_2^2) dt = \int_0^{\infty} z^T z dt = \int_0^{\infty} x^T C_1^T C_1 x + u^T D_{12}^T D_{12} u dt$$

permite decir que lo que se

pretende es reducir en lo posible el efecto de w en z , minimizando la norma 2 de la función de transferencia que relaciona ambas.

De las definiciones anteriores, se sigue que se cumple la siguiente propiedad de ortogonalidad

$$B_1 D_{21}^T = 0$$

que es equivalente a decir que el ruido de medida y el de proceso que se consideran están incorrelados. Una vez establecida una realimentación de la salida y a la señal de control u , la relación entre w y z se puede expresar mediante una función de transferencia

$$z = T_{zw} v$$

Todas las ecuaciones anteriores se pueden compactar en un sistema generalizado, obteniéndose en este caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Este problema de optimización de norma-2, tal como se ha planteado, se puede demostrar que es similar al problema *LQG* resuelto en un apartado anterior. La similitud deriva de tomar el problema *LQG* y considerar estas funciones peso

$$W_1 = C_1^T C_1; \quad W_2 = D_{12}^T D_{12};$$

$$R_{ww} = I; \quad R_{vv} = D_{21} D_{21}^T;$$

y por tanto, la solución se obtiene de resolver las dos ecuaciones de *Riccati* correspondientes al bloque controlador y al bloque estimador, es decir

controlador

$$K_c = (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X$$

$$A^T X + X A + C_1^T C_1 - X B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T \lambda$$

estimador

$$K_e = Y C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

siendo la realimentación óptima, según el criterio de $Y A^T + A Y + B_1 B_1^T - Y C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 Y$ mínima norma-2, la siguiente

$$u = -K_c \xi$$

$$\dot{\xi} = A \xi + B_2 u + K_e (y - C_2 \xi)$$

y el controlador óptimo, en forma compacta, viene dado por

$$U(s) = F(s) Y(s)$$

$$F(s) = \left[\frac{A - K_e C_2 - B_2 K_c}{-K_c} \right]^{-1}$$

IV.5.- Norma- ∞ .

IV.5.1.- Definición y cómputo.

Los inicios de la teoría de control H_∞ óptimo se remontan a un trabajo de Zames presentado en 1981, en el que estudiaba, para un sistema lineal SISO, el diseño de un controlador con el que se obtenía un sistema en lazo cerrado estable y que minimizaba la norma infinita (el valor del pico) de la función de sensibilidad.

Este primer trabajo de Zames fue el inicio de un creciente interés en el desarrollo teórico y aplicación del criterio de optimización de norma infinita en diferentes ámbitos y problemas. De entre las diferentes formulaciones del problema, la que tiene más interés en nuestro caso es la formulación y solución de lo que se conoce como *problema standard*. Sea el esquema de la figura IV.2,

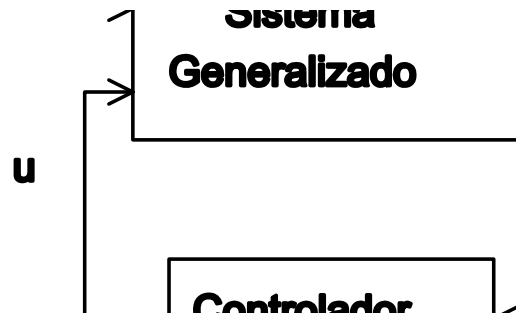


Fig.IV.2: Estructura del problema standard.

en el que tanto el bloque del sistema generalizado como el del controlador son sistemas lineales. El *problema standard* consiste en hallar el controlador para el cual la norma infinita de la función de transferencia entre la entrada w y la salida z tiene mínima norma infinita. Desde la década de los 80 se han publicado diversos trabajos relacionados con la solución de este problema, tanto desde un enfoque frecuencial como desde el punto de vista de espacio de estado. La referencia básica a la solución en el espacio de estado del *problema standard* se encuentra en [Do89]. Una referencia más reciente es [Zh96].

Sea un sistema lineal y estrictamente estable, descrito en el espacio de estado, tal como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

estrictamente estable $\lambda(A) \in \mathbb{C}^-$

y cuya función de transferencia es

$$G = G(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

entonces, se define la función de transferencia normalizada por γ de este modo

$$G_\gamma = \gamma^{-1} C (sI - A)^{-1} B = \gamma^{-1} G$$

La matriz *Hamiltoniana* asociada al sistema normalizado anterior se construye a partir de sus parámetros, siendo su expresión

$$H = \begin{bmatrix} A & -\gamma^{-2} B B^T \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

y se puede comprobar que se cumple la siguiente propiedad [Do89]

$$\frac{I}{I - G_\gamma(s) G_\gamma(-s)} = I + \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} (sI - H)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$$

Por tanto, de la igualdad anterior se deduce que si la matriz H no tiene autovalores en el eje imaginario entonces se cumplirá que

$$|G_\gamma(j\omega)| \neq 1 \quad \forall \omega$$

y, como además la función $G(s)$ es estrictamente propia, es decir

$$G(\infty) = 0$$

entonces se llega a la conclusión siguiente

$$\text{si } |G_\gamma(j\omega)| \neq 1 \quad \forall \omega$$

$$\text{entonces } \|G_\gamma\|_\infty < 1 \text{ y por tanto } \|G\|_\infty < \gamma$$

es decir que, si la matriz *Hamiltoniana* no tiene autovalores en el eje imaginario ello significa que la función de transferencia $G(s)$ tiene norma infinita inferior a γ .

De este modo, es posible obtener por aproximación la norma- ∞ de la función de

IV.- Optimización de normas

transferencia $G(s)$ mediante el siguiente algoritmo iterativo:

- i) Se toma un valor inicial de γ .
- ii) Se construye la matriz H , y se hallan sus autovalores.
- iii) Si algún autovalor de H está en eje imaginario, se aumenta γ y se vuelve al paso ii). Si no, se disminuye γ y se vuelve al paso ii).

IV.5.2.- Ganancia L_2 de un sistema lineal.

En un sistema lineal, el concepto de norma infinita está muy relacionado con lo que se denomina ganancia de orden 2 o ganancia L_2 . Una demostración directa de esto se obtiene del teorema de *Parseval*.

Sea un sistema lineal, cuya relación entrada salida se plantea en términos de una convolución tal como

$$y(t) = g(t) * x(t)$$

entonces, aplicando el teorema de *Parseval* siguen las siguientes desigualdades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \leq \sup(|G(j\omega)|^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\|y\|_2 \leq \sqrt{\sup(|G(j\omega)|^2)} \|x\|_2$$

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} \leq \gamma$$

que demuestran entre las normas salida y la entrada norma infinita de la transferencia del sistema lineal. Usando teoría de optimización se puede llegar al mismo resultado, e interesa conocer esta demostración para desarrollos posteriores.

siendo $\gamma = \sqrt{\sup(|G(j\omega)|^2)} = \sup(|G(j\omega)|)$ que el cociente de orden 2 de la función de G está acotado por la función de G .

Supongamos un sistema lineal en forma de variables de estado, tal como

$$\dot{x} = Ax + B$$

$$y = Cx$$

cuya función de transferencia viene dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}E$$

Se define la siguiente función de coste

$$J(t) = \int_t^\infty (y^T y - \gamma^2 u^T u) dt = \int_t^\infty (x^T C^T C x - u^T \gamma^2 u)$$

que consiste en una función de coste cuadrática con horizonte infinito, y lo que se quiere es maximizar respecto a u . Para ello, haciendo uso de la teoría de optimización expuesta en un apartado previo, se plantea una función Hamiltoniana tal como

$$H = x^T C^T C x - \gamma^2 u^T u + p^T (Ax + l)$$

que deberá ser maximizada respecto a u , ya que el objetivo que se persigue es el de la optimización entendida como maximización.

El máximo se puede hallar derivando respecto a u e igualando a cero, y se obtiene la u_{op} (u que optimiza) y las igualdades siguientes

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2\gamma^2 u_{op} + B^T p =$$

$$u_{op} = \frac{B^T p}{2\gamma^2}$$

y, tratándose de una optimización con horizonte infinito, el valor del Hamiltoniano para la señal de control óptima (asociada a la solución P de la ecuación de Riccati correspondiente) es

IV.- Optimización de normas

$$p^T \dot{x} - \gamma^2 u_{op}^T u_{op} + x^T C^T C x =$$

siendo en este caso la matriz

Hamiltoniana la siguiente

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$Q = C^T C; \quad R = \frac{B B^T}{\gamma^2};$$

y la ecuación de Riccati algebraica correspondiente a la matriz *Hamiltoniana* anterior es

$$A^T P + P A + Q + P R P = 0$$

Para cualquier otra u que no sea u_{op} se cumplirá la desigualdad

$$p^T \dot{x} - \gamma^2 u^T u + x^T C^T C x \leq$$

y sabiendo que

$$J_{op} = J_{op}(t) = x(t)^T P x(t); \quad \dot{p}(t) = -2 P \dot{x}$$

$$\text{entonces: } \frac{dJ_{op}}{dt} = p^T \dot{x}$$

se puede indicar así

$$\frac{dJ_{op}}{dt} - \gamma^2 u^T u + y^T y \leq 0$$

El signo del coste óptimo J_{op} también se puede evaluar. Se substituye en la derivada del coste óptimo las expresiones ya conocidas, y posteriormente se integra, obteniéndose

$$\frac{dJ_{op}}{dt} = x^T (-Q + P R P) x$$

$$J_{op}(t) = \int_t^\infty x^T (Q - P R P) x dt = x(t)^T P x$$

y por tanto

$$\text{si } P \geq 0 \text{ } \int_0^\infty J_{op}(t) dt \geq 0$$

En este caso, recordando que

$$J_{op}(\infty) + \int_0^\infty (y^T y) dt - \gamma^2 \int_0^\infty (u^T u) dt \leq J_{op}(\infty)$$

se llega a la siguiente desigualdad en terminología de normas

$$J_{op}(\infty) + \|y\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u\|_2^2 + J_{op}(\infty)$$

$$x(\infty)^T P x(\infty) + \|y\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u\|_2^2 + J_{op}(\infty)$$

Finalmente, si se considera que las condiciones iniciales son nulas, ya que se está evaluando la salida como consecuencia de una entrada y no de condiciones iniciales, se obtendrá

$$\|y\|_2^2 - \gamma^2 \|u\|_2^2 \leq -x(\infty)^T P x(\infty) \leq 0 \text{ } \Rightarrow \frac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} \leq \gamma^2$$

Los resultados anteriores pueden usarse para establecer una técnica sistemática de búsqueda de la cota de la ganancia L_2 de un sistema lineal. Se procederá del siguiente modo:

- 1.- Elegir un valor de γ .
- 2.- Intentar resolver la ecuación de Riccati correspondiente:
 - 2.1.- Si tiene solución definida positiva: la γ elegida cumple la desigualdad, por tanto se disminuye el valor de γ y se vuelve a testear (volver a 2.-).
 - 2.2.- Si no: se aumenta γ , y se vuelve a testear (volver a 2.-).

IV.- Optimización de normas

IV.5.3.- Atenuación de perturbaciones via realimentación de estado.

El problema que ahora se plantea es el de hallar cuál es la realimentación óptima u para que la norma infinita de una función de transferencia sea mínima.

El sistema lineal que se considera es el siguiente

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$z = C_1 x + D_{12} u$$

donde u es la señal de control, y w es la perturbación cuyo efecto en z se quiere atenuar. Además, por simplicidad, consideraremos que u es un escalar, y z y w son vectores. Al considerarse realimentación de estado significa que se supone que de algún modo las variables de estado del sistema x son accesibles.

Se plantea una función de coste a optimizar tal como

$$J(u, w) = \int_0^{\infty} (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt = \|z\|_{\infty}^2 - \gamma^2 \|w\|_{\infty}^2$$

y en este caso, optimizar significa hallar los valores de u y w óptimos en el sentido siguiente

$$J(u_{op}, w) \leq J(u_{op}, w_{op}) \leq J(u, w_{op})$$

$$J_{op} = J(u_{op}, w_{op})$$

o lo que es lo mismo, se busca el valor de w para el cual se maximiza la función de coste (la peor perturbación), y el valor de u que minimiza la función de coste (la mejor realimentación).

El *Hamiltoniano* correspondiente a este problema de optimización es

$$H = -C_1 x + D_{12} u - \gamma^2 w + p^T (Ax + B_1 w + B_2 u)$$

y aplicando teoría de optimización se obtienen los correspondientes valores de u y w que optimizan la función de coste, de acuerdo a lo planteado previamente

$$\begin{bmatrix} w_{op} \\ u_{op} \end{bmatrix} = -R^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde R se ha definido así

$$R = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}; \quad R_1 = D_{12}^T D_{12}$$

Por tanto, la solución óptima se obtiene con estos valores de u y w

$$w_{op} = F_1 x; \quad u_{op} = F_2 x;$$

donde F_1 y F_2 se han definido como

$$F_1 = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P; \quad F_2 = -R_1^{-1} (B_2^T P + D_{12}^T C_1);$$

La ecuación algebraica de *Riccati* a resolver es

$$A^T P + P A + C_1^T C_1 + \gamma^2 F_1^T F_1 - F_2^T R_1 F_2$$

y haciendo un cambio de variables, es equivalente a

$$\underline{A} = A - B_2 R^{-1} D_{12}^T C_1$$

$$\underline{Q} = C_1^T (I - D_{12} R^{-1} D_{12}^T) C_1$$

$$\underline{R} = \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 R_1^{-1} B_2^T$$

El Hamiltoniano *la ecuación de Riccati*: $\underline{A}^T P + P \underline{A} + \underline{Q} + P \underline{R} P =$ correspondiente a esta última ecuación de *Riccati* es

$$H = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{R} \\ -\underline{Q} & \underline{A}^T \end{bmatrix}$$

Si se considera que la realimentación es la óptima, es decir $u=u_{op}$, pero que la señal w no lo es, entonces se obtiene la desigualdad

$$\frac{dJ_{op}}{dt} + (z^T z) - \gamma^2 (w^T w) \leq 0$$

Si ahora se integra de 0 a ∞ , y se supone condiciones iniciales nulas, se deberá cumplir que

$$x(\infty)^T P x(\infty) + \int_0^\infty z^T z \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T w$$

y finalmente se tiene

$$\text{si } P \geq 0 \text{ y } u = u_{op}$$

entonces $\int_0^\infty z^T z \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T w$ para cualquier w

Para evaluar la óptimo, primero se relaciones

derivada del coste las obtienen

$$\dot{x}^T P x = x^T A^T P x + w^T B_1^T P x + u^T B_2^T P x$$

y derivando y

$$x^T P \dot{x} = x^T P A x + x^T P B_1 w + x^T P E$$

substituyendo

$$\frac{d(x^T P x)}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} =$$

$$\begin{aligned} &= x^T (A^T P + P A) x + w^T B_1^T P x + x^T P B_1 w + u^T B_2^T P x + x^T P B_2 u = \\ &= -x^T C_1^T C_1 x - \gamma^2 x^T F_1^T F_1 x + x^T F_2^T R_1 F_2 x + w^T B_1^T P x + x^T P B_1 w + u^T B_2^T P x + x^T P B_2 u \\ &= -x^T C_1^T C_1 x - \gamma^2 w_{op}^T w_{op} + u_{op}^T R_1 u_{op} + \gamma^2 w^T w_{op} + \gamma^2 w_{op}^T w + u^T B_2^T P x + x^T P B_2 u \\ &= -x^T C_1^T C_1 x + \gamma^2 w^T w - \gamma^2 (w - w_{op})^T (w - w_{op}) + u_{op}^T R_1 u_{op} + u^T B_2^T P x + x^T P B_2 u \\ &= -z^T z + \gamma^2 w^T w - \gamma^2 (w - w_{op})^T (w - w_{op}) + (u - u_{op})^T R_1 (u - u_{op}) \end{aligned}$$

IV.- Optimización de normas

Integrando de t_0 a t_f

$$x(t_f)^T P x(t_f) - x(t_0)^T P x(t_0) = - \int_{t_0}^{t_f} (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt + \int_{t_0}^{t_f} e_u^T R_1 e_u dt - \gamma^2 \int_{t_0}^{t_f} \dots$$

y, particularizando los límites de integración de 0 a ∞ y considerando condiciones iniciales nulas, se tiene

$$x(\infty)^T P x(\infty) + \dots = \dots$$

Finalmente, y recordando que se ha de cumplir que $P \geq 0$, se llega a la desigualdad

$$\dots \leq \dots$$

De esta desigualdad se deduce que si la función de transferencia que relaciona el error $w-w_{op}$ con el error $u-u_{op}$ tiene norma- ∞ menor o igual a γ , es decir si

$$\dots \leq \gamma \dots$$

entonces

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 \leq 1$$

y por tanto

$$\|T_{zw}\| \leq \gamma$$

La importancia de estas relaciones está en que si no es posible acceder a las variables de estado, sino que se han de obtener mediante un estimador, entonces el estimador óptimo será aquel que optimice la función de transferencia entre los errores en w y en u . Esto se usará para resolver el problema de minimización de norma infinita por realimentación de la salida [Do89].

IV.5.4.- Atenuación de perturbaciones via realimentación de la salida.

El problema que ahora se va a considerar consiste en establecer una realimentación de una señal de medida, a partir de la cual se consiga reducir la norma- ∞ de un sistema. El sistema a optimizar, formulado en modo generalizado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

donde se considera que w es el vector de perturbaciones, que afecta directamente a las variables de estado x y a la señal medida que se ha de realimentar y . El efecto de la perturbación w en z debe ser minimizado de acuerdo al criterio de minimizar la norma- ∞ de la función de transferencia que relaciona w con z . Por simplicidad, se considera que u y y son escalares, y w y z son vectores. El mecanismo de optimización será estableciendo la señal de control u , en función de y , con la cual se obtiene un sistema en lazo cerrado con mínima norma infinita.

El sistema anterior es equivalente a haber escrito

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + [B_1 \ B_2] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ z &= C_1 x + [D_{11} \ D_{12}] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ y &= C_2 x + [D_{21} \ D_{22}] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con D_{11} y D_{22} nulos. La señal y es la salida medible a realimentar, a partir de la cual se va a generar la señal de control u con la que minimizar el efecto de la perturbación w en z .

Se supone que D_{11} y D_{22} son nulos, lo que es equivalente a considerar que en la variable a optimizar (z) no se considera efecto directo de perturbación, y que la variable que se realimenta (y) está relacionada con u mediante una función de transferencia estrictamente propia. Además, se ha de cumplir que

(A, B_2) es estabilizable

(C_2, A) es detectable

además de ciertas condiciones de rango de las matrices (ver [Zh96]).

Se llega a la solución de este problema a través de un extenso desarrollo teórico, que puede encontrarse en diversas referencias como [Do89], [Kn93], [Sh93] y [Zh96]. El resultado final al que se llega es similar al del control óptimo LQG, es decir, el controlador óptimo se puede descomponer en un controlador óptimo propiamente más un estimador óptimo. La base de esto se justifica con el principio de separación.

Para exponer el resultado final es necesario que se definan los Hamiltonianos siguientes

$$H_{\infty} = \begin{bmatrix} A - B_2 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 \tilde{D}_{12} B_2^T \\ & -\tilde{C}_1^T \tilde{C}_1 \quad -(A - B_2 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix}$$

$$J_{\infty} = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T \tilde{D}_{21} C_2 \\ & -\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T \quad -(A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T \end{bmatrix}$$

donde se ha hecho uso de unas variables auxiliares definidas así

$$\tilde{B}_1 = B_1 (I - D_{21}^T \tilde{D}_{21} D_{21}),$$

$$\tilde{C}_1 = (I - D_{12} \tilde{D}_{12} D_{12}^T) C_1$$

$$\tilde{D}_{12} = (D_{12}^T D_{12})^{-1}$$

$$\tilde{D}_{21} = (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

• Entonces, si y solo si se cumple que

$$i) X_{\infty} = Ric(H_{\infty}) \geq 0$$

$$ii) Y_{\infty} = Ric(J_{\infty}) \geq 0$$

existe el controlador subóptimo $iii) \rho(X_{\infty} Y_{\infty}) < \gamma$ $K(s)$ con el que se cumple que $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ [Do89].

IV.- Optimización de normas

En la condición iii) aparece el operador $\rho(M)$, radio espectral, y aplicado a una matriz consiste en: el mayor valor absoluto de entre los valores absolutos de los autovalores de dicha matriz.

Cabe hacer las siguientes consideraciones respecto al controlador que se obtiene como solución del problema de optimización planteado:

- Para que el problema tenga solución, además de cumplir las condiciones i) ii) y iii), también es necesario que los diferentes vectores y matrices que aparecen en la formulación cumplan unas condiciones de dimensión y rango (ver [Sh93] y [Zh96]).
- El orden del controlador obtenido no supera al del sistema que se está controlando.
- El controlador que se obtiene es subóptimo, ya que cumple la cota con desigualdad, y no hay una condición de unicidad de esta solución: es decir, no es el único controlador que cumple esta cota. Para obtener el óptimo se debe ir reduciendo γ e ir obteniendo los subóptimos correspondientes, mientras sea posible. De este modo, se llegaría al óptimo por aproximación.
- En [Bh91] se ha realizado un estudio de como se produce esta aproximación al óptimo. Matemáticamente, se puede interpretar que el problema de optimización es el de hallar el mínimo valor de γ para el cual se cumplen las tres condiciones anteriores: i) ii) y iii). En dicho trabajo, [Bh91], se llega al resultado de que si se disminuye demasiado γ , la primera condición que se deja de cumplir es la de que las matrices X_∞ y Y_∞ sean semidefinidas positivas. Si todavía disminuye más, entonces estas matrices ya dejan de existir, es decir que no hay solución de las ecuaciones de Riccati correspondientes.

A continuación se va a detallar como se obtiene el controlador correspondiente, haciendo uso del principio de separación: se descompone el controlador en una realimentación y un estimador.

Recordando que, en el apartado anterior habíamos definido las funciones F_1 y F_2 así

$$F_1 = \frac{B_1^T X_\infty}{\gamma^2}; \quad F_2 = -\tilde{D}_{12} (B_2^T X_\infty + D_{12}^T C)$$

entonces, se obtiene el siguiente controlador de estado que realimenta las variables de estado identificadas

$$K_c = \tilde{D}_{12} (B_2^T X_\infty + D_{12}^T C)$$

$$u = -K_c \xi$$

y el estimador de estado es

$$\dot{\xi} = A \xi + B_1 w + B_2 u + Z_\infty K_e (y - C_2 \xi - D_{21} w)$$

$$\text{tomando } u = F_2 \xi \quad \text{y} \quad w = F_1 \xi$$

$$\text{se obtiene } \dot{\xi} = A \xi + B_1 F_1 \xi + B_2 F_2 \xi + Z_\infty K_e (y - C_2 \xi - D_{21} F)$$

El

en forma
queda formulado así

$$\text{siendo } K_e = (Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T) \tilde{D}_{21} \quad \text{y} \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)$$

controlador,
compacta

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = A - B_2 K_c - Z_\infty K_e C_2 + \gamma^{-2} (B_1 B_1^T - Z_\infty K_e D_{21} B_1)$$

$$K_{12} = Z_\infty K_e$$

$$K_{21} = -K_c$$

siendo todo el
cerrado el

$$U(s) = K(s) Y(s)$$

sistema en lazo
siguiente

IV.- Optimización de normas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 K_c \\ K_{12} C_2 & K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{12} \end{bmatrix}$$

y, substituyendo cada
quedaría

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12} K_c \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

variable por su expresión,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 K_c \\ Z_\infty K_e C_2 & A - B_2 K_c + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - Z_\infty K_e (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12} K_c \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w$$

V.- CONTROL ROBUSTO Y NORMA INFINITA.

V.1. Introducción.

La finalidad del control robusto es el diseño de sistemas de control en lazo cerrado para controlar sistemas con incertidumbre. En un sistema existe incertidumbre cuando no es conocido de un modo exacto un modelo del mismo, y por ello tampoco es posible diseñar de un modo exacto, matemáticamente, el controlador más apropiado. Habitualmente, se caracteriza el sistema incierto mediante un término nominal más otro término que representa la desviación respecto a dicho comportamiento nominal, y generalmente esta desviación no es conocida de un modo riguroso.

Por ejemplo, si se trata de incertidumbre debida a dinámica no modelada lineal, puede ser sencillo conocer una cota de los valores máximos de desviación de su respuesta frecuencial. Y en este caso, el diseño del controlador robusto se sistematiza bastante. En cambio, si es debida a dinámica no lineal, el planteamiento del problema ya no es tan simple, existiendo diversidad de enfoques de como hallar el controlador adecuado. Dos buenas referencias, que son una recopilación de artículos publicados desde la década de los 60, son [Do87] y [Do90].

A continuación se expondrán, en síntesis, las bases en que se fundamenta la Teoría de Control Robusto, haciendo un especial énfasis en su relación con la optimización por norma infinita.

V.2.- Control Robusto e incertidumbre.

A un sistema del cual no se conoce de un modo exacto la descripción matemática de su comportamiento se le denomina incierto. Supongamos un sistema incierto, en el que su relación entrada-salida está expresada mediante el funcional siguiente

$$P = P_o + \Delta P$$

donde P_o representa a lo que se denomina *sistema nominal*, que es el término que se supone conocido, y generalmente lineal. En cambio, la desviación respecto al nominal, ΔP , es quasi-desconocida: no se tiene una descripción matemática exacta de la misma, pero sí algún tipo de información. En el caso de una desviación debida a dinámica lineal, esta información podría ser la siguiente

$$|\Delta P(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$$

$$\forall \omega$$

es decir, una cota de su respuesta frecuencial. En este caso, se tendría una planta lineal incierta, pero con una acotación de la incertidumbre en el dominio frecuencial.

Los objetivos que persigue el control robusto son básicamente dos:

- i) La *estabilidad robusta*, que establece las condiciones que se han de cumplir para que el sistema incierto en lazo cerrado sea estable.
- ii) El *funcionamiento robusto*, es decir, que el objetivo de control que nos hayamos fijado se cumpla, pese a la incertidumbre.

Sea un sistema de control convencional, como el de la figura V.1

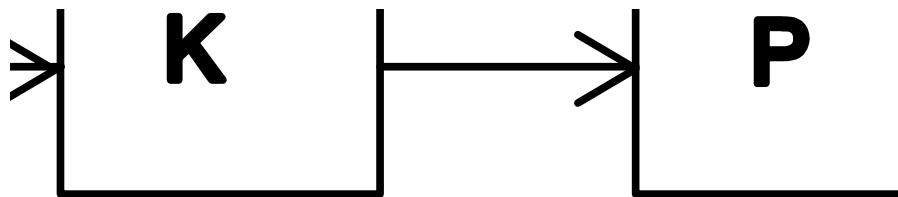


Fig.V.1: Sistema de control convencional.

donde P y K son funciones de transferencia asociadas a operadores lineales, correspondientes al sistema incierto a controlar y al controlador, respectivamente. Además, consideraremos que se dispone de un modelo de incertidumbre multiplicativo de la planta [Do92], tal como

$$P = P_o (I + \Delta_p)$$

y con la incertidumbre acotada frecuencialmente por una función

V.- Control Robusto y Norma Infinita

W_2 , cumpliéndose entonces que

$$|\Delta_p(j\omega)| \leq |W_2(j\omega)|$$

$$\forall \omega$$

Para establecer las condiciones de control robusto en el sistema de la figura V.1, previamente es necesario definir, para el sistema incierto, las funciones de sensibilidad S y de sensibilidad complementaria T , y para el sistema nominal S_o y T_o . Las definiciones son las siguientes

$$\text{sensibilidad} \rightarrow S = \frac{e}{x} = \frac{1}{1+PK}$$

$$\text{sensibilidad nominal} \rightarrow S_o = \frac{1}{1+P_o K}$$

$$\text{sensibilidad complementaria} \rightarrow T = \frac{y}{x} = \frac{PK}{1+PK}$$

$$\text{sensibilidad nominal complementaria} \rightarrow T_o = \frac{P_o K}{1+P_o K}$$

Nótese que las anteriores cumplen que

funciones

$$S+T=1$$

$$S_o+T_o=1$$

Por tanto, un decremento de S ha de ser a costa de un incremento de T , y viceversa. Y lo mismo cabe decir de S_o y de T_o . Si lo que se pretende es diseñar un controlador que minimice S , lo cual sería equivalente a establecer una condición de seguimiento, se conseguirá a cambio de un incremento de T , o lo que es lo mismo a cambio de aumentar la señal de control. Minimizar S se puede entender como minimizar la norma infinita de su respuesta frecuencial, que sería como diseñar pensando en la frecuencia a la cual hay un mayor error de seguimiento. Por otro lado, un valor elevado de T puede ser causa de inestabilidad, debido al efecto en el lazo cerrado de la incertidumbre.

Generalmente, se plantea la minimización de $W_1 S$, donde W_1 es una función peso en el dominio frecuencial, que lo que hace es penalizar de diferente modo aquellos

márgenes de frecuencia de la sensibilidad, según interese insensibilizar más o menos.

En la referencia [Do92] se encuentra la demostración de las condiciones de estabilidad y funcionamiento robusto para el sistema lineal, con incertidumbre lineal multiplicativa, de la figura V.1. Estas condiciones son:

i) Se tiene estabilidad robusta si y solo si

$$\|W_2 T_o\|_{\infty} < 1.$$

ii) Se tiene funcionamiento robusto y estable si y solo si

$$\|W_1 S_o\| + \|W_2 T_o\|_{\infty} < 1.$$

La condición ii) es la que debe cumplir el controlador robusto para que el sistema en lazo cerrado sea estable y tenga un mínimo error de seguimiento, incluso en presencia de la cantidad de incertidumbre considerada (incorporada en el diseño en W_2). Además, al problema matemático planteado en ii) se le denomina *mixed sensitivity*, ya que el diseño tiene en cuenta la minimización de una mezcla de objetivos, generalmente la sensibilidad y otra función más, que en este caso es la sensibilidad complementaria. La solución ha de ser un compromiso entre dos objetivos contrapuestos.

A continuación, se entrará en más detalle de qué es la *mixed sensitivity* y su resolución matemática.

V.3.- Mixed Sensitivity.

Precisamente, el hecho de que los objetivos de la *mixed sensitivity* sean contrapuestos es lo que hace que la obtención del controlador adecuado no sea trivial.

Sin embargo, a través de una interpretación de qué es lo que se pretende con la *mixed sensitivity*, se llega a una formulación de dicho problema que lo relaciona directamente con el ya comentado *problema standard* en teoría de optimización de norma infinita, cuyo planteamiento y resolución han sido expuestas en el capítulo IV.

Vamos a relacionar ambos problemas. Nótese que si se cumple la siguiente desigualdad

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S_o \\ W_2 T_o \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

que es equivalente a (ver Apéndice II)

$$\sqrt{|W_1 S_o|^2 + |W_2 T_o|^2} < 1$$

en cuyo caso, se está cumpliendo la condición i) que asegura estabilidad, y además se tiene en cuenta la minimización de la función de sensibilidad nominal. Sin embargo, la condición ii) de funcionamiento robusto no se cumple rigurosamente, aunque cuanto menor sea la norma infinita anterior más cerca se estará del funcionamiento robusto [Do92]. De este modo, se enlaza el problema de control robusto con el de optimización de norma infinita (el ya comentado problema standard), y puede ser resuelto en el dominio del espacio de estado mediante el método propuesto en [Do89], tal como se ha explicado en el apartado IV.5.4.

En la figura V.2 se puede ver una representación gráfica que simboliza el significado del problema de *mixed sensitivity*

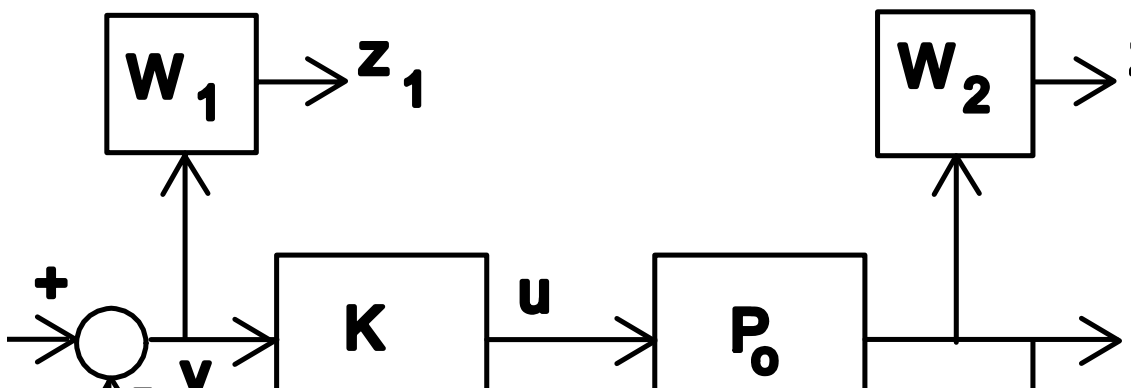


Fig.V.2: Representación gráfica de la *mixed sensitivity*.

de donde se obtienen las siguientes relaciones matemáticas

$$z_1 = W_1 w - W_1 P_o u$$

$$z_2 = W_2 P_o u$$

que escrito en forma matricial es $y = w - P_o u$ equivalente a

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1 P_o \\ 0 & W_2 P_o \\ 1 & -P_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad u = K y$$

siendo W_1 y W_2 las funciones de peso relativas a sensibilidad y a estabilidad, respectivamente, ya definidas anteriormente.

De este modo, el problema de diseño de controladores robustos para sistemas con incertidumbre multiplicativa lineal ha quedado bien establecido, y su resolución es posible mediante optimización de norma infinita. El siguiente paso a dar es saber como proceder cuando la incertidumbre es no lineal.

En la extensa y reciente literatura sobre la temática de Control Robusto, también se ha estudiado la robustez ante incertidumbre no lineal y/o variante. Sin embargo, los resultados a los que se ha llegado son muy específicos a no linealidades de un determinado tipo, y acotadas de las formas más diversas. Esta no uniformidad, en el caso de incertidumbre no lineal, hace que el diseño del controlador no esté tan sistematizado como en el caso lineal.

A continuación, se detallará algunas de las referencias más interesantes del tema de control robusto y *mixed sensitivity*. Algunos, estudian el caso de incertidumbre lineal y otros de no lineal.

La síntesis de la aportación de estos trabajos, cronológicamente ordenados, es la siguiente:

- En [Za63], Zames realizó un trabajo pionero en la temática de control robusto no lineal, al plantearse el estudio del siguiente sistema en lazo cerrado

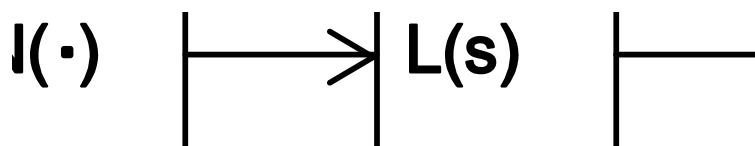


Fig.V.3: Sistema no lineal estudiado por Zames.

en donde $N(\cdot)$ es una no linealidad estática acotada sectorialmente, $L(s)$ una función de transferencia pasobanda de segundo orden y K una constante. La relación entrada salida se expresa mediante un funcional G , tal como

$$y = G(x)$$

$$\text{siendo } G = G_o + \Delta G$$

en donde el funcional nominal G_o es lineal, ya que es la función de transferencia en lazo cerrado aproximando la no linealidad por una recta. A continuación, Zames analizó la mejor realimentación constante K en el sentido de disminuir la diferencia entre el sistema obtenido G y el que se obtendría sin no linealidad, G_o , es decir minimizar ΔG . Para ello, hizo servir el concepto de "ganancia de un sistema", con un planteamiento y resultados similares a los de la teoría de la pequeña ganancia, y estableciendo las bases de la teoría de control robusto.

- En [Za81], se plantea hallar un controlador K que haga que un sistema lineal en lazo cerrado sea estable, y además se minimice la norma infinita de la sensibilidad S , o lo que es lo mismo, el mayor valor de la respuesta frecuencial de S . Este artículo fue el que popularizó el empleo de norma infinita en control robusto, siendo pionero en el enfoque de lo que se denomina *mixed sensitivity* (ya comentado anteriormente).
- En un artículo de J.P. Calvet y Y. Arkun (1989), incorporado a la recopilación [Do90], se aplica una realimentación lineal a lo que denominan un sistema quasi-linealizado. El sistema, primeramente es quasi-linealizado mediante linealización entrada-estado. Quasi-linealizado significa que en el sistema resultante aparece un término no lineal, a modo de perturbación aditiva y acotada en su norma de orden 2. A continuación, se plantea una realimentación lineal y se estudia la estabilidad del lazo cerrado mediante funciones de Lyapunov.
- En [Ku90] se emplea *mixed sensitivity* en una aplicación en automoción. En sistemas de inyección de carburante, debido a cambios de temperatura se producen también cambios en la viscosidad del combustible, lo cual implica variaciones en la posición del solenoide que regula la salida de carburante. Por tanto, se quiere controlar, o sea insensibilizar, la posición de dicho solenoide frente a dichos cambios de temperatura. Para ello, en primer lugar se realiza una identificación del sistema, trazando varios diagramas de Bode de la planta entre 0°C a 60°C. Se toma el sistema nominal a 25°C, y a partir de éste se determina un modelo de incertidumbre multiplicativo, considerando la dinámica incierta lineal.

Finalmente, se diseña el controlador óptimo por norma infinita. El resultado obtenido es correcto, mostrando una respuesta estable y robusta en el margen de temperatura de 0°C a 60°C.

- En una publicación de M. Fu (et al.), incorporada en [Bh91], se considera el problema standard de minimización de norma infinita para un sistema con incertidumbre variante con el tiempo y con perturbaciones externas. Se establece la realimentación que asegura una mínima acotación de la norma infinita a partir de la solución de ecuaciones de Riccati modificadas.
- La referencia [Li93] es un buen ejemplo de aplicación de control robusto a un problema concreto. En dicho artículo, se controla un péndulo invertido en el que se considera incertidumbre debido a rozamiento no modelado. Es decir, que los efectos no lineales de la planta no se modelan, pero se tiene en cuenta su presencia y la minimización de su efecto. Esta no linealidad debida al rozamiento es la incertidumbre a eliminar, y en este artículo se considera como si fuera una incertidumbre lineal. El controlador se diseña mediante *mixed sensitivity* lineal, aplicando optimización por norma infinita. Consecuencia de esto es que no todos los controlador que se obtienen, para diferentes ponderaciones de la *mixed sensitivity*, funcionan bien. Alguno de ellos incluso llega a inestabilizar el sistema en lazo cerrado. Se puede decir que lo que se hace es considerar, por simplicidad, la incertidumbre como lineal e ir obteniendo y probando diferentes diseños de controladores, obtenidos de las distintas ponderaciones.
- En [Co94] se aplica optimización por norma infinita el control de las estructuras flexibles que han de soportar cámaras de TV sobre un vehículo, en donde el movimiento de la cámara está sujeto a perturbaciones externas imprevisibles pero acotables, incertidumbre. Por medio de un giróscopo se obtiene una señal de error, que sirve de referencia a partir de la cual se compensan errores de movimiento en dos ejes.
- El trabajo [Gu94] considera el problema standard de optimización de norma infinita vía realimentación de variables de estado, pero considerando que la perturbación w depende no linealmente de la señal de control, o sea una relación del tipo $w=\varphi(u)$. Se supone que esta relación no lineal cumple una desigualdad asociada a una forma cuadrática, y se emplea esta información para modificar la ecuación de Riccati que surge al plantear el problema standard, incluyéndose en dicha ecuación la matriz de la forma cuadrática que acota la no linealidad. Se demuestra, que la realimentación de estado resultante de esta ecuación de Riccati modificada, da lugar a un sistema en lazo cerrado con ganancia de norma de orden 2, respecto a la perturbación, acotada.
- En [Sh94] se busca un comportamiento robusto en lazo cerrado, mediante un controlador lineal, para una planta y un controlador perturbados por dinámica

V.- Control Robusto y Norma Infinita

incierto variable con el tiempo. Se entiende estabilidad como ganancia finita para señales de energía finita. La estabilidad en lazo cerrado no se resuelve mediante teorema de la pequeña ganancia, por considerarlo demasiado conservativo. Se analiza la estabilidad de ganancia finita de norma l_2 , y se obtiene una condición, haciendo uso de los valores singulares, para la cual hay estabilidad robusta en lazo cerrado.

- En [Su94] se considera la estabilización y funcionamiento robusto en sistemas con incertidumbres paramétricas lineales, mediante un sistema de control por modelo de referencia, con dos controladores, uno que actúa a la entrada de la planta y el otro en la señal realimentada. En primer lugar se realiza una realimentación nominal, de acuerdo a la planta nominal y al sistema de referencia deseado, y luego otra realimentación correctora de la incertidumbre. Se usa norma infinita para medir la diferencia entre los sistemas en lazo cerrado nominal y perturbado con incertidumbre lineal. Luego, se plantea una estructura fija de los controladores y se eligen sus parámetros buscándose una norma infinita del error mínima.

En general, los trabajos que se han publicado sobre *mixed sensitivity* abordando la problemática de la dinámica no lineal lo han hecho a partir de un planteamiento muy abstracto y basado en que se cumplan unas condiciones matemáticas muy específicas. Esto es habitual en la mayoría de trabajos sobre la temática de control robusto, y más aún en el caso de incertidumbre no lineal: se obtienen resultados basados en un planteamiento que se basa en el cumplimiento de unas condiciones matemáticas que, en una aplicación a un caso práctico, difícilmente se cumplirán. Es más, aunque se quiera, en muchos casos es difícil determinar si se cumplen o no, con lo cual los resultados que aportan estos artículos no dejan de ser resoluciones de complicados ejercicios matemáticos.

Con este capítulo se finaliza los temas relativos a bases teóricas y antecedentes. A continuación, se desarrollará el método de linealización propuesto, establecido a partir del contenido de los capítulos anteriores.

El método se basará en un control por modelo de referencia que tenga en cuenta la incertidumbre de las no linealidades. De la diferencia entre modelo y sistema no lineal se obtendrá una señal de error. Realimentando linealmente este error, se quiere disminuir el efecto de las no linealidades, que pueden ser interpretadas como incertidumbre, y que deberán estar acotadas. Las bases teóricas relativas a modelado

de sistemas no lineales pueden ser útiles para este propósito de separar parte lineal y parte no lineal en el sistema a linealizar (Capítulo II). Y la obtención de cotas para no linealidades se expone en el Capítulo III.

Una vez separada la parte no lineal y la lineal, se tendrá un sistema incierto del tipo multiplicativo. Y el siguiente paso será el diseño del controlador lineal que atenúe al máximo la presencia de la incertidumbre en el sistema error. Este diseño se hará por medio de la optimización de norma infinita (Capítulo IV). La estabilidad en lazo cerrado quedará establecida por el Teorema de la Pequeña Ganancia (Capítulo III).

VI.- LINEALIZACION MEDIANTE NORMA INFINITA.

VI.1.- Introducción. Enunciado del problema.

Tal como se ha comentado en el capítulo IV, existe una teoría de optimización de ganancia L_2 aplicable a sistemas no lineales. Esta teoría estudia cual es el controlador adecuado para minimizar dicha ganancia, o sea que minimice la relación entre las normas de orden 2 de la salida y de la entrada del sistema. En este sentido, la ganancia L_2 de un sistema no lineal hace un papel similar a la norma infinita en sistemas lineales. En las referencias [Ba93], [Is92] y [Sc92] se encuentran desarrollados los principios básicos sobre el tema (ver capítulo IV).

Sin embargo, la realidad es que la teoría de optimización de ganancia L_2 aplicable a sistemas no lineales, en la actualidad adolece de varios problemas:

- Está poco desarrollada a nivel teórico, no siendo sencillo ni sistemático el diseño del controlador correspondiente.
- Es sólo aplicable a tipos muy concretos de sistemas no lineales, de los que además se debe conocer exactamente su formulación matemática, generalmente en ecuaciones de estado.
- Su realización implica el uso de controladores no lineales, y en algunos casos también de estimadores de estado no lineales, lo cual es una fuerte limitación desde un punto de vista práctico.

El objetivo en esta Tesis es extender la teoría de norma infinita existente para sistemas lineales, de modo que con ciertas modificaciones sea aplicable a sistemas no lineales. Además, la finalidad que se busca con el método propuesto es la de linealización. El método presentado se caracterizará por:

- Para establecer el objetivo de linealización se hará uso de un modelo de referencia lineal, y de este modo se estará planteando un problema de *seguimiento*.
- El sistema no lineal deberá ser particionado en un bloque lineal y otro no lineal. El modelado mediante expansión en serie de Volterra puede ser útil para este propósito (ver apartado II.2). Además, de la parte no lineal se deberá conocer una cota de su ganancia L_2 mientras que la parte lineal ha de estar caracterizada en formulación de estado.

- La parte lineal se estructurará de forma igual al conocido *problema standard* en teoría de optimización de norma infinita, haciendo las no linealidades el papel de perturbación (ver apartado IV.5).
- Finalmente, se diseñará el controlador óptimo (y lineal) que minimice el efecto de las perturbaciones (no linealidades) en la parte lineal (ver apartado IV.5). Además, usando el método de la pequeña ganancia se determinará la estabilidad del lazo cerrado (ver apartado III.4).

En la figura VI.1 puede verse el esquema de lo que es un sistema de control por modelo de referencia en paralelo, que será el que consideremos en lo sucesivo

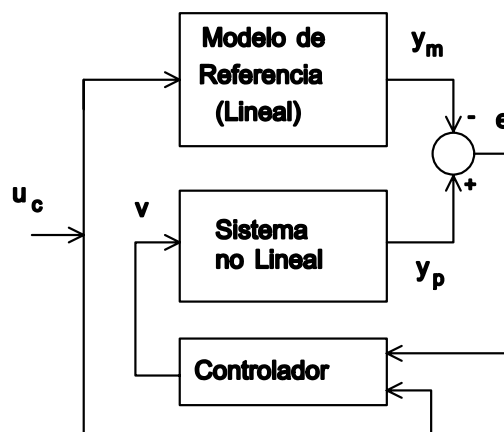


Fig.VI.1: Sistema de control por modelo de referencia.

En la figura VI.1, la señal de error e es la diferencia entre el sistema lineal y el no lineal. Entonces, el objetivo está en diseñar el controlador más adecuado que haga que este error sea mínimo. La señal que genera el controlador es v , y ésta será la excitación, entrada, del sistema no lineal.

Supongamos que el *sistema no lineal* que se quiere linealizar puede ser caracterizado por un conjunto de ecuaciones de estado, del siguiente modo

$$\dot{x}_p = A x_p + b_1 \phi(v) + b.$$

$$y_p = c x_p$$

donde se considera un sistema escalar. La señal y_p es la

SISO, y por tanto y_p y v son salida del sistema no lineal, y v

VI.- Linealización mediante norma infinita

su entrada. Además, las no linealidades están modeladas por una función que depende de la entrada v , siendo el término $\phi(v)$ un funcional que las caracteriza matemáticamente. O sea, que las no linealidades están expresadas en función de la entrada v del sistema no lineal.

El comportamiento no lineal que se ha modelado, se puede considerar como una señal de perturbación w_x , definida así

$$w_x = \phi(v)$$

y de este modo la formulación total obtenida es la siguiente

$$\dot{x}_p = A x_p + b_l w_x + l$$

$$y_p = c x_p$$

En el planteamiento estandarizado que se hace del problema de optimización de norma infinita de un sistema lineal (ver capítulo IV), se considera la existencia de una perturbación (w) cuyo efecto se debe minimizar. Si esta *perturbación es externa*, no depende de ninguna variable del sistema. En nuestro caso, ya que w_x está modelando no linealidades, diremos que es una *perturbación interna*.

Sin embargo, los resultados que se obtengan se pueden particularizar al caso en que w_x fuera un ruido. Es decir, que el enfoque del control por modelo de referencia también es válido para cancelar ruido, no sólo no linealidades.

Además, también se puede distinguir entre no linealidades dependientes de la entrada v o no linealidades dependientes de la salida y_p . En este segundo caso, la formulación anterior sería con la w_x siguiente

$$w_x = \phi(y_p)$$

El siguiente sistema que se va a definir será el *modelo de referencia*. Teniendo presente que el objetivo está en que la salida del sistema no lineal y_p debe seguir a la salida del sistema modelo y_m , el modelo de referencia lineal se buscará que sea lo más parecido a la componente lineal del sistema a linealizar. Con ello, se reducen esfuerzos de la señal de control, cuya única finalidad será la de atenuar el efecto de las no linealidades. Sin embargo, el planteamiento que se hará también será válido en el caso en que se quiera compensar dinámica no modelada lineal. En este caso, la presencia de ésta deberá también incorporarse a w_x .

El modelo de referencia se formula como un sistema lineal, tal como

$$\dot{x}_m = A x_m + b_2 \iota$$

$$y_m = c x_m$$

donde se toma un modelo igual a la parte lineal del sistema no lineal, y se considera que corresponde a una función de transferencia estrictamente propia.

parte lineal del sistema no lineal, y una función de transferencia

De este modo, se obtiene un *sistema error*, matemáticamente caracterizado por las ecuaciones siguientes

$$x = x_p - x_m$$

$$e = y_p - y_m$$

$$\dot{x} = A x + b_1 w_x + b_2 v - b_2$$

$$e = c x$$

en donde x son las variables de su salida, y v la entrada. Igual perturbación, que ya se ha dicho que puede tener origen externo (ruidos o interferencias) o interno (dinámica no lineal o la lineal que se aparte del modelo). Además, en el caso de perturbación interna, ésta puede depender bien de la entrada v o bien de la salida y_p del sistema no lineal.

estado del sistema error, e es que antes, w_x es la

Definiendo la señal v como

$$v = u + u$$

se obtiene el sistema error siguiente

$$\dot{x} = A x + b_1 w_x + b_2$$

$$e = c x$$

Por tanto, ya se tiene formulado matemáticamente el objetivo: obtener la señal de control u para la cual se tenga el menor error e . Enfocándolo como una optimización por norma infinita, queda claro que lo que se querrá es minimizar la norma infinita de la función de transferencia que relaciona e con w_x .

VI.- Linealización mediante norma infinita

Pero, en el caso en que w_x tenga un origen interno, es decir que directa o indirectamente tenga relación con u , entonces se debe considerar que quizás se esté obteniendo una norma pequeña a cambio de incrementar excesivamente la señal de control u , y en consecuencia con peligro de incrementar la no linealidad e incluso de inestabilizar.

VI.2.- Atenuación óptima de perturbaciones externas.

Sea el sistema error obtenido en el apartado anterior, para el caso en que la perturbación w_x es una señal externa, y por tanto no depende de ninguna de las variables del propio sistema.

Es decir, el problema que se plantea ahora es el de *atenuar ruido* en un sistema lineal contaminado por una perturbación externa, contando con ello con la ayuda de un modelo de referencia limpio de perturbación.

El sistema error formulado en espacio de estado es

$$\dot{x} = Ax + b_1 w_x + b$$

$$e = cx$$

A continuación, se ha de buscar un formulación del problema de modo que sea aplicable la teoría de minimización de normas de acuerdo al criterio H_∞ . Para ello, en primer lugar se ha de definir el vector z asociado a las variables a minimizar. La elección de z es

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \beta_1 u \end{bmatrix}$$

en donde la componente z_1 tiene en cuenta el propio error e , mientras que z_2 penaliza el coste de la señal de control u , ponderada por un escalar β_1 . Se puede reescribir lo anterior de este modo

$$z = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u = C_1 x + D_{12} u$$

siendo

$$C_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

La señal de realimentación u se ha de obtener a partir de una medida de la salida del sistema error e . Esta medida la denominaremos y , y se supone que está contaminada por un ruido de medida w_y . Además, se incluirá un escalar β_2 que ponderará este ruido de medida. De este modo, todo esto es formulado así

VI.- Linealización mediante norma infinita

$$y = c x + \beta_2 w_y = C_2 x + \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = C_2 \cdot$$

$$\text{siendo } w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

donde se ha definido el vector perturbación w , que incluye los dos tipos de ruido descritos: w_x que hace el papel de ruido de proceso y w_y que es un ruido de medida.

Todo lo anterior, si se escribe en la forma compactada presentada en el capítulo de optimización de norma infinita (capítulo IV), queda representado en el sistema generalizado siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = c; \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \end{bmatrix};$$

El objetivo de optimización se ha de alcanzar realimentando con un controlador lineal la señal medida y . De este modo, la señal de control u será consecuencia de un filtraje lineal de y , que expresado en terminología de transformada de Laplace es equivalente a

$$U(s) = K(s) Y(s)$$

$$\text{donde } U(s) = _ \{ u(t) \}; \quad Y(s) = _ \{ y(t) \};$$

Siguiendo con el diseño, lo que se

VI.- Linealización mediante norma infinita

quiere es minimizar la ganancia cuadrática (norma infinita) entre los vectores de señal w y z . Es decir, hallar la realimentación u para la que se cumple la desigualdad

$$\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$$

con el mínimo valor de γ . Como se está considerando un sistema SISO y además existe ortogonalidad entre C_1 y D_{12} (es inmediato comprobarlo), ello supone que

$$\|z\|_2^2 = \|C_1 x + D_{12} u\|_2^2 = \|C_1 x\|_2^2 + \|D_{12} u\|_2^2$$

Esta ortogonalidad es debida a que la variable a controlar z tiene dos componentes: una parte dependiente de las variables de estado x y otra que depende de u y que penaliza la señal de control, y ambas son independientes entre sí.

Como se considera que el sistema es SISO (una entrada u y una salida e) y haciendo uso de las definiciones de C_1 y D_{12} antes presentadas, la ecuación anterior puede reescribirse así

$$\|z\|_2^2 = \|e\|_2^2 + \beta_1^2 \|u\|_2^2$$

Por tanto, se quiere diseñar el controlador con el que sea posible obtener la mínima γ que cumpla la desigualdad siguiente

$$\|e\|_2^2 + \beta_1^2 \|u\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$$

Tal como está planteado el problema, ya es factible usar el método iterativo de solución del *problema standard*, expuesto en el apartado IV.5.4, para obtener el controlador apropiado asociado a la mínima γ .

Particularizando las ecuaciones del apartado IV.5.4 al caso concreto que estamos considerando, se tiene que

VI.- Linealización mediante norma infinita

$$\tilde{D}_{12} = (D_{12}^T D_{12})^{-1} = ([0 \quad \beta_1] \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix})^{-1} =$$

$$\tilde{D}_{21} = (D_{21} D_{21}^T)^{-1} = ([0 \quad \beta_2] \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix})^{-1} =$$

$$\tilde{C}_1 = (I - \frac{1}{\beta_1^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} [0 \quad \beta_1]) C_1 = C_1$$

$$\tilde{B}_1 = B_1 (I - \frac{1}{\beta_2^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} [0 \quad \beta_2]) = B_1$$

y además, se cumplen ortogonales siguientes

las relaciones

$$B_1 D_{21}^T = 0$$

$$D_{12}^T C_1 = 0$$

Las matrices *Hamiltonianas* obtenidas son

$$X_\infty = Ric \left(\begin{bmatrix} A & \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} - \frac{B_2 B_2^T}{\beta_1^2} \\ -c^T c & -A^T \end{bmatrix} \right)$$

y

$$Y_\infty = Ric \left(\begin{bmatrix} A^T & \frac{c^T c}{\gamma^2} - \frac{c^T c}{\beta_2^2} \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \right)$$

Ahora, la dificultad que se plantea para obtener el controlador, viene dada por tener que jugar con tres parámetros de diseño, que son: la cota γ , el peso β_1 con que se pondera la señal de control y el peso β_2 de la ponderación de la incertidumbre en la medida. Por tanto, es importante tener claro el efecto de cada uno de estos parámetros en el diseño del controlador, y elegirlos de modo adecuado. Es decir, vamos a tratar de sistematizar en lo posible la obtención del controlador más adecuado. Para ello,

VI.- Linealización mediante norma infinita

haremos uso de las siguientes acciones:

- i) El parámetro β_2 afecta directamente en el diseño del observador, y tiene un efecto similar al que ocurre cuando se diseña un observador de Luenberger [An89]: si el ruido de medida se penaliza poco, el ancho de banda del controlador aumenta. En cambio, penalizar mucho este ruido de medida tiene el efecto de reducir dicho ancho de banda.
- ii) Si, en un principio, se da a β_2 un valor pequeño, ya que no consideramos la presencia de ruido de medida, entonces la ecuación de Riccati correspondiente al diseño del observador tiene una solución que tiende a la que se obtiene al plantear el criterio de minimización de la norma de orden 2, y es independiente de γ . En este caso, matemáticamente la matriz Hamiltoniana es

$$Y_{\infty} = Ric \left(\begin{bmatrix} A^T & -\frac{c^T c}{\beta_2} \\ -B_l B_l^T & -A \end{bmatrix} \right)$$

la cual es independiente de γ , por lo que no tendrá intervención en el algoritmo de optimización. El controlador que se obtiene es

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{K_{21}} & \frac{K_{12}}{0} \end{bmatrix}$$

siendo

$$K_{11} = A - \frac{B_2 B_2^T X_\infty}{\beta_1^2} - Z_\infty K_e c + \frac{B_1 B_1^T X_\infty}{\gamma^2} - \frac{Z_\infty K_e D_{21}}{\gamma^2}$$

$$K_{12} = Z_\infty K_e = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} K_e$$

$$K_{21} = -K_c = -\frac{B_2^T X_\infty}{\beta_1^2}$$

iii) Entonces, se
mínimo
cual existe

$$K_e = \frac{Y_\infty c^T}{\beta_2^2}$$

buscará el
valor de γ para el
solución de la

ecuación de Riccati de la realimentación de estado, y no hará falta comprobar la del estimador ya que no depende de γ . Los parámetros γ y β_1 serán los que intervendrán directamente en la búsqueda de la realimentación de estado óptima, teniendo en cuenta que hay un compromiso entre ambos parámetros, ya que aumentar uno obliga a disminuir el otro.

iv) Una vez se han obtenido unos valores concretos de ambos parámetros, se procede a ir incrementado el valor de β_2 hasta que sea posible, es decir mientras se pueda resolver la ecuación de Riccati correspondiente. Con esto, lo que se hace es disminuir al máximo el ancho de banda del observador, sin afectar a la solución obtenida anteriormente.

VI.3.- Atenuación óptima de perturbaciones internas. Linealización.

En este apartado, se plantea qué ocurre cuando la perturbación no es externa, sino de origen interno. Este es el caso cuando w caracteriza la dinámica no lineal, o la lineal no modelada. Y lo importante es saber de qué modo se alterará el planteamiento hecho respecto al caso de perturbaciones externas.

En general, una perturbación de origen interno puede depender de varias de las variables internas del sistema. En nuestro caso, se analizarán dos supuestos respecto a la dinámica no lineal:

- i) Un caso, que la no linealidad esté formulada en función de la entrada v del sistema no lineal, y por tanto

$$w_x = \phi(v)$$

y en este caso, el conjunto de ecuaciones a estudiar será el siguiente

$$\dot{x} = Ax + b_1 w_x + b_2$$

$$e = c x$$

- ii) Y el otro caso será que esté formulada en función de la salida y_p del sistema no lineal, y por tanto

$$w_x = \phi(y_p)$$

y con este segundo planteamiento, al considerar que las no linealidades están formuladas dependientes de y_p se obtienen las ecuaciones

$$\dot{x} = Ax + b_1 w_x + b_2$$

$$e = c x$$

A la vista de este planteamiento, los dos casos anteriores, queda de manifiesto que se ha de diseñar una realimentación (controlador) que optimice la norma infinita de la parte lineal, como ocurre en el caso de la atenuación de perturbaciones externas, pero además se ha de estudiar el efecto de la realimentación en las no linealidades, es decir en w_x .

VI.- Linealización mediante norma infinita

Podría darse el caso que se consiguiera disminuir la norma infinita del bloque lineal a costa de aumentar excesivamente la no linealidad, e incluso a costa de inestabilizar el sistema en lazo cerrado. Por tanto, el método de diseño a establecer debe minimizar la norma infinita de la parte lineal y al mismo tiempo, mediante algún criterio de estabilidad, asegurar que queda acotado el posible incremento de la no linealidad. De este modo se mantendrá la estabilidad en lazo cerrado.

En la figura VI.2 se puede ver, una representación en diagrama de bloques del sistema error al que se ha llegado, con la formulación hecha del problema de linealización en el caso en que la no linealidad depende de v . Se pone de manifiesto que, la señal de salida del controlador u actúa en el sistema lineal, con la finalidad de disminuir su norma infinita, y además afecta a la no linealidad.

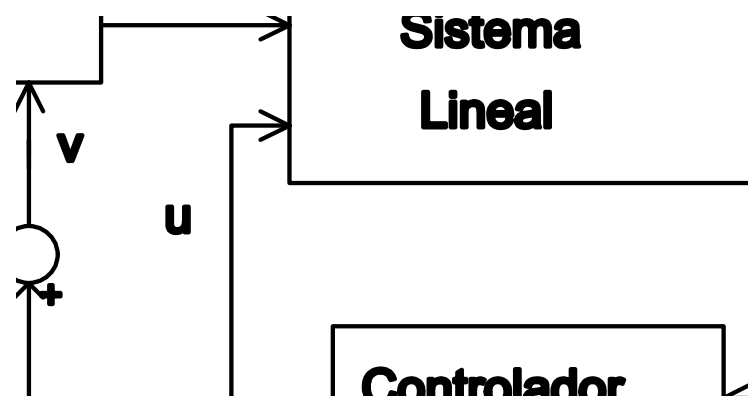


Fig.VI.2: Interconexión entre el bloque lineal y el no lineal.

El criterio de estabilidad que se emplearemos para determinar la estabilidad del sistema de la figura VI.2 es el de la *pequeña ganancia*. Es un criterio que se puede establecer a partir de la norma inducida (ganancias de normas) del funcional que caracteriza la no linealidad, y además permite determinar la estabilidad de un sistema formado por la interconexión de varios subsistemas, con la única información del conocimiento de las cotas de la ganancia de la norma de orden p para cada subsistema (ver III.4.2).

Por tanto, el siguiente paso es incorporar el criterio de estabilidad de la *pequeña ganancia* al sistema error obtenido anteriormente. Y con este propósito, lo primero será obtener las normas inducidas del bloque lineal y del no lineal, tal como se hará en los siguientes apartados.

VI.3.1.- Cota del término lineal.

Tal como ya ha sido explicado, se considerará el término lineal formulado como el conocido problema standard en teoría de optimización de norma infinita, de este modo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Y el problema de optimización realimentación para la cual se desigualdad $C_2 = c \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$ consistirá en hallar la cumple, con la menor γ , la

$$\|z\|_{\infty} \leq \gamma \|w\|_{\infty}$$

En la práctica, en la búsqueda del óptimo es importante hacer uso de la ponderaciones β_1 y β_2 . En el apartado VI.2 ya ha sido explicado un modo de realizar esta búsqueda, partiendo de un valor pequeño de β_2 que luego se va incrementado.

Cabe tener presente las siguientes consideraciones:

- La ponderación β_1 lo que hace es penalizar en mayor o menor medida la magnitud de la señal de control u , ya que tiene influencia directa en la norma infinita de la función de transferencia que relaciona w con u , en lazo cerrado. Valores grandes de β_1 harán que la señal de control esté más penalizada y por tanto que sea menor dicha función de transferencia, o sea que se minimiza el mayor valor posible de u .

En cambio, valores pequeños de β_1 permiten una señal de control u mayor. Si esto ocurre, significa que u tendrá más influencia en el lazo cerrado, haciendo que la norma infinita de la función que relaciona w con e disminuya, pero al aumentar u en magnitud el peligro de inestabilidad es, a priori, mayor.

- El valor de β_2 puede reducirse todo lo que se quiera, ya que en el problema que se resuelve no se considera la presencia de incertidumbre en la medida de la señal de error a realimentar. Sin embargo, tiene interés no hacer demasiado pequeña esta β_2 para que exista una cierta protección frente a una posible presencia de este tipo de incertidumbre.

El método de linealización expuesto consiste en ir hallando la γ mínima para los diferentes valores de β_1 y β_2 que convengan, y que se cumpla la condición de estabilidad.

En la práctica es factible realizar una mejora a esto, que consistiría en ir buscando el mínimo de la norma infinita del sistema generalizado que se ha planteado, para diferentes valores de β_1 y β_2 , y a la vez obtener la norma infinita de la función de transferencia que relaciona w_x con cada uno de los términos del vector z (que son e y $\beta_1 u$), y así conocer de qué modo cada una de las componentes de z se ve afectada.

El problema numérico de obtener el controlador óptimo se resolverá programándolo con MATLAB. Los datos del programa serán los parámetros del sistema lineal generalizado (que incorporan a β_1 y β_2) y un valor propuesto de γ , a partir del cual se buscará el mínimo.

Y a continuación, cuando se ha obtenido el controlador asociado a este mínimo, se han de medir las normas infinita de cada una de las funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado, que relaciona w_x con z . Es decir, midiendo, se obtendrán las siguientes cotas

$$\|e\|_{\infty} \leq \gamma_e \|w_x\|_{\infty}$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \gamma_u \|w_x\|_{\infty}$$

donde recordemos que e , u y w_x son escalares.

Además, tal como se ha mostrado en el capítulo III, estas cotas también sirven como cota de la ganancia de las normas de orden 1 de las transformadas de Fourier, es decir que también se cumplirá que

$$\|E\|_1 \leq \gamma_e \|W_x\|_1$$

$$\|U\|_1 \leq \gamma_u \|W_x\|_1$$

siendo éstas unas relaciones que también se tendrán en cuenta en apartados posteriores.

VI.3.2.- Cota del término no lineal.

Del término no lineal, caracterizado por

$$w_x = \phi(v)$$

se deberá disponer una relación entre las normas de orden p de su entrada (v) y su salida (w_x), para poder incorporar este término al análisis de estabilidad mediante el criterio de la pequeña señal. Se considerarán dos posibilidades, que serán: o bien tener acotada la relación entre las normas de orden 2 de las señales de salida y de entrada, o bien tener acotada la relación entre las normas de orden 1 de la transformada de Fourier de las señales de salida y de entrada. Para cada uno de estos casos, el problema queda particularizado de este modo:

- i) Acotación de las norma de orden 2 de la salida respecto a la norma de orden 2 de la entrada: En este caso, la relación directa con el planteamiento típico considerado en la teoría de estabilidad por pequeña señal (ver capítulo III) se da cuando esta acotación es mediante una relación lineal tal como

$$\|w_{x-2}\| \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|v\|.$$

Y, si el término no lineal se puede modelar mediante una expansión en serie de Volterra, entonces ya se mostró en el capítulo III que era posible obtener, a partir de los kernels, una relación polinómica entre las normas de orden 2 de entrada y salida, tal como

$$\|w_{x-2}\| \leq \rho(\|v_{-2}\|)$$

siendo

donde cada constante $\rho(\|v_{-2}\|) = \rho_0 + \rho_1 \|v_{-2}\| + \rho_2 \|v_{-2}\|^2 + \dots + \rho_i \|v_{-2}\|^i$ se obtiene de un kernel.

- ii) Si se dispone de una cota de la ganancia entre normas de orden 1 de las transformadas de Fourier, entonces las desigualdades son

$$\|W_{x-1}\| \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|V\|$$

VI.- Linealización mediante norma infinita

Además, también era posible obtener una relación polinómica a partir de la expansión en serie de Volterra (ver capítulo III), que la expresaremos así

$$W_{x-1} \leq \rho(V_{-1})$$

siendo

$$\rho(V_{-1}) = \rho_0 + \rho_1 V_{-1} + \rho_2 V_{-1}^2 + \dots + \rho_N$$

Por tanto, los dos tipos de cota entre normas de entrada y de salida que se han expuesto ha sido:

- bien una relación lineal
- o bien una relación polinómica ($\rho(\cdot)$).

En este segundo caso, el polinomio relativo a la acotación será del tipo

$$\rho(x) = \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots + \rho_N$$

siendo

donde x es siempre positivo
norma. Y, si el polinomio ha
una expansión en serie de Volterra, sus coeficientes serán todos positivos, ya que
proviene de acotaciones individuales de cada uno de los kernels, y por tanto será una
función creciente.

$$\rho_i, x \geq 0$$

ya que corresponde a una
sido sintetizado a partir de

También puede ser posible que los valores de x estén acotados dentro de un margen, por ejemplo debido a una limitación impuesta a las señales de excitación. Y en este caso, el polinomio puede aproximarse, dentro de dicho margen, por una recta. Sería una acotación del tipo

$$\rho(x) \leq \alpha_1 + \alpha_2 x \quad \text{para } x \leq x_{\text{MAX}}$$

siendo

en cuyo caso la estabilidad

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

que se pueda establecer a

VI.- Linealización mediante norma infinita

través de esta aproximación será una estabilidad local, ya que sólo sería válida dentro de un margen de funcionamiento.

VI.- Linealización mediante norma infinita

VI.3.3.- Cota del sistema global.

En los apartados anteriores se han analizado los bloques correspondientes a la parte lineal y a la no lineal en que se ha descompuesto el sistema error, y se ha estudiado la obtención de normas inducidas asociadas a cada bloque.

El siguiente paso es relacionar entre sí todos estos bloques, para obtener lo que han de ser las cotas del sistema global en lazo cerrado. Y, en consecuencia, establecer:

- primero, si el sistema en lazo cerrado es estable
- y segundo, en cuanto se ha reducido el error entre el sistema lineal y el no lineal.

Distinguiremos entre no linealidades consideradas respecto a la entrada v , o bien respecto a la salida y_p , del sistema no lineal. En los siguientes apartados se particularizarán los resultados para cada caso.

VI.3.3.1.- No linealidad respecto a la entrada.

En este caso las ecuaciones del sistema error eran las siguientes

$$\dot{x} = Ax + b_1 w_x + b_2$$

$$e = c x$$

y las desigualdades $w_x = \phi(v) = \phi(u + u_c)$ correspondientes a las relaciones lineales entre las normas de orden 2 de la salida y la entrada de los bloques que caracterizan la parte lineal y la parte no lineal, considerando la ausencia de ruido de medida ($w_y=0$), son

$$\|e\|_2^2 + \beta_1^2 \|u\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w_x\|_2^2$$

$$\|w_x\|_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|u_c\|_2 + \alpha_3$$

Si, con el propósito de establecer una normalización, dividimos las desigualdades anteriores por la norma de u_c , se obtiene

$$\frac{e_{-2}^2}{u_{c-2}} + \beta_1^2 \frac{u_{-2}^2}{u_{c-2}} \leq \gamma^2 \frac{w_{x-2}}{u_{c-2}}$$

$$\frac{w_{x-2}}{u_{c-2}} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 u_{c-2}}{u_{c-2}} + \alpha_2 \frac{u}{u_{c-2}}$$

y haciendo un cambio de variables, para que sea más cómoda la notación, se llega a la formulación siguiente

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 \leq \gamma^2 l_z^2$$

$$l_z \leq \alpha_c + \alpha_2 l_y$$

donde

$$l_x = \frac{e_{-2}}{u_{c-2}}; \quad l_y = \frac{u_{-2}}{u_{c-2}}; \quad l_z = \frac{w_{x-2}}{u_{c-2}}; \quad \alpha_c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 u_c}{u_{c-2}}$$

El objetivo, es hallar el l_x , de entre los que cumplen las desigualdades anteriores, ya que éste será el valor más grande de la norma de orden 2 de e , que recordemos que es el error entre el sistema no lineal y el modelo lineal. El mayor valor de l_x es el peor caso de linealización, ya que es una medida de lo máximo que puede apartarse el sistema no lineal del lineal.

Gráficamente, el problema de optimización consiste en hallar el máximo valor de l_x sometido a las restricciones impuestas por las inecuaciones, se puede ver en la figura VI.3

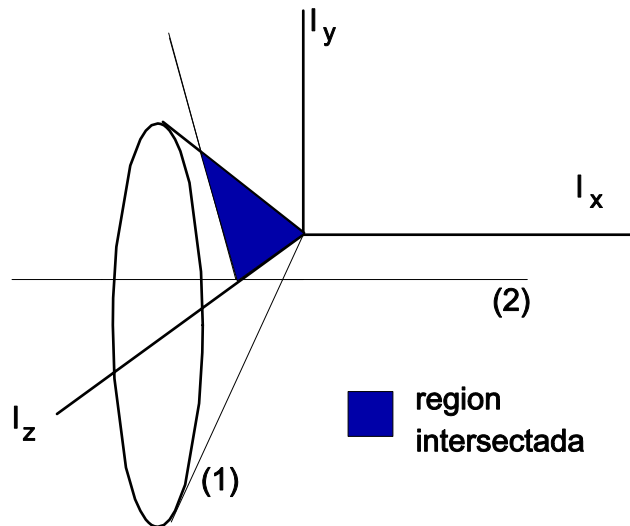


Fig.VI.3: Región intersectada por las dos inecuaciones.

en donde se comprueba que el máximo pertenece a la región determinada por la intersección entre: la superficie de un cono, indicada por (1) en la figura VI.3, y matemáticamente definida por

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 = \gamma^2 l_z^2$$

y un volumen, indicado por (2), y matemáticamente definido por

$$l_z \leq \alpha_c + \alpha_2 l$$

Con la finalidad de hallar la expresión de este máximo, definiremos la variable k , que nos permitirá convertir la inecuación anterior en una ecuación, tal como

$$l_z + k = \alpha_c + \alpha_2 l, \quad k \geq 0$$

De este modo, el problema matemático es equivalente a encontrar el valor de l_y que maximiza una función que depende de l_x . Posteriormente, hallaremos el valor de k que maximiza el resultado anterior. Es decir, se define la función $f(\cdot)$ a maximizar de este modo

$$f(l_x) = l_x^2$$

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 = \gamma^2 (\alpha_c + \alpha_2 l_y - k)$$

y derivando respecto a l_y , e igualando la derivada a cero, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial l_y} = \frac{\partial}{\partial l_y} \left(\gamma^2 (\alpha_c + \alpha_2 l_y - k)^2 - \beta_1^2 l_y^2 \right)$$

$$2 \alpha_2 \gamma^2 (\alpha_c + \alpha_2 l_y - k) - 2 \beta_1^2 l_y = 0$$

$$l_y = \frac{\alpha_2 \gamma^2 (\alpha_c - k)}{\beta_1^2 - \alpha_2^2 \gamma^2}$$

$$\alpha_c + \alpha_2 l_y - k = \frac{\beta_1^2 l_y}{\gamma^2 \alpha_2}$$

obteniéndose el valor máximo de l_x siguiente

$$(l_x^*)^2 = \gamma^2 \left(\frac{\beta_1^2 l_y}{\gamma^2 \alpha_2} \right)^2 - \beta_1^2 l_y^2 = \frac{\beta_1^4 - \beta_1^2 \gamma^2 \alpha_2^2}{\gamma^2 \alpha_2^2} \frac{\alpha_2^2 \gamma^4 (\alpha_c - k)^2}{(\beta_1^2 - \alpha_2^2 \gamma^2)^2} = \frac{\beta_1^2 \gamma^2 (\alpha_c - k)^2}{\beta_1^2 - \alpha_2^2 \gamma^2}$$

$$\text{finalmente } (l_x^*)^2 = \frac{\gamma^2 \beta_1^2 (\alpha_c - k)^2}{(\beta_1^2 - \alpha_2^2 \gamma^2)}$$

Además, se comprueba que es máximo para $k=0$, y por tanto para este valor se tiene el máximo que acota al cociente entre las normas de orden 2 de la señal error e y la consigna u_c , obteniéndose que

$$l_x \leq \frac{\gamma \beta_1 \alpha_c}{\sqrt{\beta_1^2 - \alpha_2^2 \gamma^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2}}} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - u_{c-2}}{-u_{c-2}}$$

VI.- Linealización mediante norma infinita

Desnormalizando, la acotación que se ha obtenido es

$$-e_{-2} \leq \frac{\gamma \alpha_1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2}}} + \frac{\gamma \alpha_2 - u_c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2}}}$$

Y además, es sistemático deducir las cotas para el resto de normas de orden 2. Para la señal u , sabiendo que

$$\beta_1^2 l_y^2 = \gamma^2 l_z^2$$

se obtiene

$$l_z = \alpha_c + \alpha_2 l$$

$$\frac{-u_{-2}}{-u_{c-2}} \leq \frac{\frac{\gamma \alpha_c}{\beta_1}}{1 - \frac{\gamma \alpha_2}{\beta_1}}$$

Y para w_x , el resultado es el siguiente

$$\frac{-w_{x-2}}{-u_{c-2}} \leq \frac{\alpha_c}{1 - \frac{\gamma \alpha_2}{\beta_1}}$$

Por otro lado, y tal como se ha explicado en el apartado VI.3.1, si se hace uso de la información, medible, de las normas infinitas de las funciones de transferencia que relacionan w_x con cada uno de los términos de z , se llega al sistema de inecuaciones siguiente

$$-e_{-2} \leq \gamma_e - w_{x-2}$$

$$-u_{-2} \leq \gamma_u - w_{x-2}$$

en cuyo caso, despejando se $-w_{x-2} \leq \alpha_1 + \alpha_2 - u_{c-2} + \alpha_2$ obtienen estas relaciones

$$-w_{x-2} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \gamma_u \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{1 - \gamma_u \alpha_2} - u_{c-}$$

$$-u_{-2} \leq \frac{\gamma_u \alpha_1}{1 - \gamma_u \alpha_2} + \frac{\gamma_u \alpha_2}{1 - \gamma_u \alpha_2} - u_{c-}$$

$$-e_{-2} \leq \frac{\gamma_e \alpha_1}{1 - \gamma_u \alpha_2} + \frac{\gamma_e \alpha_2}{1 - \gamma_u \alpha_2} - u_{c-}$$

y, de donde se deduce que (criterio de la pequeña ganancia) para que el sistema total en lazo cerrado sea estable es

la condición suficiente

$$\gamma_u \alpha_2 < 1$$

Además, este resultado obtenido a partir de las *cotas medidas* es igualmente válido si se realiza con la cota de la ganancia de las normas de orden 1 de las transformadas de Fourier, o más en general, con cualquier relación entre normas en las que la norma infinita sirva como cota de la ganancia.

Es más, si se conoce que la cota correspondiente al término no lineal viene limitada por una función $\rho(\cdot)$, las inecuaciones a resolver serían

$$-e_{-} \leq \gamma_e - w_{x-}$$

$$-u_{-} \leq \gamma_u - w_{x-}$$

donde $\rho(\cdot)$ puede ser la $-w_{x-} \leq \rho(-u + u_{c-}) \leq \rho(-u +$ norma de orden 2 o la norma de orden 1 de la transformada de Fourier, o bien cualquier otra cuya ganancia esté acotada por la norma infinita. Resolver este

VI.- Linealización mediante norma infinita

sistema de inecuaciones entre normas implica hallar la solución de este problema matemático

hallar el máximo valor de u que cumple

$$\gamma_u \rho(u_c + u) - u \geq 0$$

en función de u_c

y se puede resolver por optimización numérica, para cada u_c , teniendo en cuenta que puede tener solución o no. Si existe solución acotada significa que el sistema es estable, por estar la u acotada, en cuyo caso lo estarán también el resto de señales del sistema. También cabe considerar la posibilidad de que sólo exista solución en un margen acotado de u_c , lo cual significaría que es una solución local: se habría obtenido estabilidad y linealización en un margen de funcionamiento.

VI.3.3.2.- No linealidad respecto a la salida.

En este caso, el sistema es formulado de este modo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b_1 w_x + b_2 \\ e &= cx\end{aligned}$$

y por tanto, las inecuaciones para $w_x = \phi(y_p) = \phi(y_m^-)$ el bloque lineal y el no lineal son

$$-e_{-2}^2 + \beta_1^2 u_{-2}^2 \leq \gamma^2 -w_{x-2}^2$$

donde γ_m es la norma infinita de la función de transferencia del modelo de referencia lineal. Además, se ha tomado, para la no linealidad, una cota lineal de la ganancia de orden 2.

Con la intención de normalizar, se divide por la norma de u_c

$$\frac{-e_{-2}^2}{-u_{c-2}} + \beta_1^2 \frac{u_{-2}^2}{-u_{c-2}} \leq \gamma^2 \frac{-w_{x-2}^2}{-u_{c-2}}$$

$$\frac{-w_{x-2}}{-u_{c-2}} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \gamma_m u_{c-2}}{-u_{c-2}} + \alpha_2 \frac{-e}{-u_{c-2}}$$

y haciendo un cambio de variables se obtiene

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 \leq \gamma^2 l_z^2$$

$$l_z \leq \alpha_c + \alpha_2 l_x$$

donde

$$l_x = \frac{-e_{-2}}{-u_{c-2}}; \quad l_y = \frac{-u_{-2}}{-u_{c-2}}; \quad l_z = \frac{-w_{x-2}}{-u_{c-2}}; \quad \alpha_c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \gamma_m u_c}{-u_{c-2}}$$

A continuación, el objetivo es obtener las correspondientes cotas en lazo cerrado, fundamentalmente la que relaciona la norma de orden 2 de la señal de error e con la norma de orden 2 de la consigna u_c .

VI.- Linealización mediante norma infinita

Buscaremos el máximo de l_x a partir de la ecuaciones

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 = \gamma^2 l_z^2$$

$$l_z = \alpha_c + \alpha_2 l_x$$

y por tanto, igualando se obtiene

$$l_x^2 + \beta_1^2 l_y^2 = \gamma^2 (\alpha_c + \alpha_2 l_x)$$

Derivando respecto a l_y , igualando a cero y despejando, el resultado es

$$2 l_x \frac{\partial l_x}{\partial l_y} + \beta_1^2 2 l_y = 2 \gamma^2 (\alpha_c + \alpha_2 l_x)$$

$$\text{como } \frac{\partial l_x}{\partial l_y} = 0 \text{ } l_y = 0$$

siendo el resultado final

$$l_x^* = \frac{\gamma \alpha_c}{1 - \gamma \alpha_2}$$

$$-e_{-2} \leq \frac{\gamma \alpha_1}{1 - \gamma \alpha_2} + \frac{\gamma \alpha_2 \gamma_m}{1 - \gamma \alpha_2} - u_c$$

Igual que en lo expuesto al considerar la no linealidad respecto a la entrada, también en este caso se puede hacer uso de las cotas medidas, es decir

$$-e_{-2} \leq \gamma_e - w_x$$

$$-u_{-2} \leq \gamma_u - w_x$$

lo cual conduce al sistema de inecuaciones

$$-e_{-2} \leq \gamma_e - w_{x-2}$$

$$-u_{-2} \leq \gamma_u - w_{x-2}$$

$$-w_{x-2} \leq \alpha_1 + \gamma_m \alpha_2 - u_{c-2} + \alpha_2 -$$

y despejando, el resultado

obtenido es

$$-w_{x-2} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - u_{c-}$$

$$-u_{-2} \leq \frac{\gamma_u \alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_u \gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - u_{c-}$$

$$-e_{-2} \leq \frac{\gamma_e \alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_e \gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - u_{c-}$$

Y este último desarrollo es igualmente válido si se considera la norma de orden 1 de las transformadas de Fourier (ver VI.3.1), siendo el resultado

$$-W_{x-1} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - U_{c-}$$

$$-U_{-1} \leq \frac{\gamma_u \alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_u \gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - U_{c-}$$

$$-E_{-1} \leq \frac{\gamma_e \alpha_1}{1 - \gamma_e \alpha_2} + \frac{\gamma_e \gamma_m \alpha_2}{1 - \gamma_e \alpha_2} - U_{c-}$$

Además, igual que se ha mostrado cuando se consideraba la no linealidad respecto a la entrada (ver VI.3.3.1), también en este caso se puede plantear una formulación general válida para cualquier norma que tenga como norma inducida la norma infinita, es decir las inecuaciones

VI.- Linealización mediante norma infinita

$$e \leq \gamma_e w_x$$

$$u \leq \gamma_u w_x$$

$$w_x \leq \rho(e + \gamma_m u)$$

lo cual implica resolver el problema siguiente

hallar el máximo valor de e que cumple

$$\gamma_e \rho(\gamma_m u_c + e) - e \geq 0$$

en función de u_c

que se puede resolver mediante optimización numérica. Si existe solución acotada significa que existirá acotación de normas, lo cual es una condición suficiente de estabilidad, y además el error e estará acotado. También es posible que sólo exista solución en un cierto margen de valores de las normas, con lo que la solución sería local.

VII.- APLICACIONES.

VII.1.- Introducción.

En el capítulo VI se ha desarrollado una metodología de diseño de controladores para sistemas con modelo de referencia, aplicable a la linealización de sistemas no lineales, con las siguientes características esenciales:

- Estructuración del problema de linealización como un sistema de *control por modelo de referencia*, haciendo uso de un sistema lineal a modo de modelo de referencia.
- Diseño del controlador lineal aplicando teoría de optimización de *norma infinita*.
- Haciendo uso del criterio de la *pequeña ganancia* se comprueba la estabilidad del sistema en lazo cerrado y además se determina una cota del error entre sistema no lineal y lineal, dando ésto una medida de la linealización obtenida.

Además, el método propuesto no es sólo válido para aplicaciones de linealización, sino que también se puede emplear para eliminar dinámica no modelada lineal y para eliminar la presencia de ruido interferente en un sistema. Es decir, en aquellas aplicaciones en que se pretende que un sistema incierto *siga* a un modelo.

A continuación, se mostrará una serie de ejemplos en los que se usarán varios de los desarrollos expuestos y obtenidos en esta Tesis, con la finalidad de resolver diversos problemas.

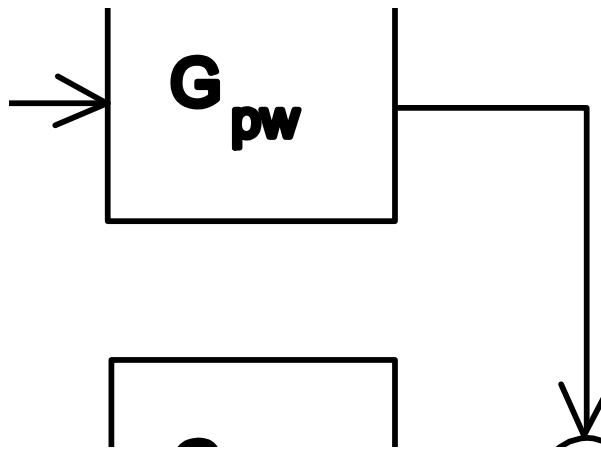
VII.2.- Cancelador de ruido externo.

El primer ejemplo que se va a desarrollar como aplicación del método propuesto va a consistir en cancelar, o más bien atenuar, la presencia de ruido en un sistema.

Supongamos un sistema lineal, contaminado por una señal externa w_x que cabe considerar como una interferencia, cuya respuesta viene dada por las siguientes funciones de transferencia

$$Y_p(s) = G_{pw}(s)W_x(s) + G_{pv}(s)V(s)$$

que corresponde al sistema de la figura VII.1



Por tanto, la salida del sistema está formada por la contribución de dos señales. Una es consecuencia de la entrada útil, que pasa a través del sistema G_{pv} , y la otra es consecuencia de una entrada ruidosa. Este ruido de la entrada, w_x , llega a la salida después de ser filtrado por G_{pw} .

Expresado en formulación de espacio de estado, sería equivalente a

$$\dot{x}_p = A x_p + b_1 w_x + b_2 v$$

$$y_p = c x_p$$

y en consecuencia, se han de cumplir las siguientes igualdades

$$G_{pw}(s) = c (s I - A)^{-1} b$$

$$G_{pv}(s) = c (s I - A)^{-1} b_i$$

VII.- Aplicaciones

Vamos a plantear el cancelador de ruido con la siguiente idea: determinar un modelo de referencia, libre de ruido, y obligar a que el sistema ruidoso se comporte como dicho modelo. Es decir que, como modelo de referencia se va a elegir un sistema con las mismas ecuaciones de estado que el anterior, pero sin el término ruidoso, o sea

$$\dot{x}_m = A x_m + b_2 u_c$$

$$y_m = c x_m$$

donde u_c es la señal que se aplicaría directamente a la entrada del sistema contaminado ($v=u_c$) si no hubiera ruido. La señal de error entre modelo y sistema ruidoso se obtiene fácilmente, resultando la siguiente formulación

$$x = x_p - x_m$$

$$e = y_p - y_m = c x$$

$$\dot{x} = A x + b_1 w_x + b_2 v - b_2 u_c$$

Ahora, eligiendo $v=u+u_c$ se llega a un sistema error con la estructura adecuada para aplicar las técnicas expuestas en esta Tesis, es decir

$$\dot{x} = A x + b_1 w_x + b_2 u$$

$$e = c x$$

y con el objetivo de obtener la señal de control (u) más adecuada para reducir el efecto del ruido. Esta señal de control se generará realimentando el error e .

Para completar el ejemplo, se dará valores numéricos a las funciones de transferencia anteriores, tales como

$$Y_p(s) = G_{pw}(s) W_x(s) + G_{pv}(s) V(s)$$

$$G_{pw}(s) = \frac{s+3}{s^2+s+1}; \quad G_{pv}(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1};$$

lo que conduce a una formulación en espacio de estado dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad c = [1 \quad 0];$$

El sistema generalizado que se formula es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} e \\ \beta_1 u \end{bmatrix}; \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde una función de transferencia matricial ya que el sistema error tiene tres entradas (w_x , w_y y u) y tres salidas (z_1 , z_2 y y).

$$G = G(s) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, el principal objetivo es la atenuación del efecto de w_x en la salida del sistema, pero teniendo en cuenta que también se ha de considerar la posible presencia de ruido de medida en la señal a realimentar y, lo cual significa que se ha de considerar w_y en el diseño del observador.

Se diseña la realimentación óptima, en el sentido de obtener la mínima γ que cumple la inecuación

$$z_{-2}^2 \leq \gamma^2 w_{-2}^2$$

$$e_{-2}^2 + \beta_1^2 u_{-2}^2 \leq \gamma^2 v$$

Después de una fase de búsqueda de posibles soluciones, obtenidas a partir de diferentes valores de β_1 y β_2 (siguiendo la metodología explicada en el capítulo VI) se acaba eligiendo $\beta_1=0.5$ y $\beta_2=1$, que corresponde a un mínimo valor de γ de 1.4 y a un γ_e de 0.89. Para estos parámetros el controlador

VII.- Aplicaciones

obtenido es el siguiente

$$K(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 9.71 & -0.56 & 7.57 \\ 12.83 & 0.19 & -10.97 \\ -1.26 & 0.75 & 0 \end{array} \right] = -\frac{17.76s + 12.97}{s^2 + 9.52s + 5.34}$$

A continuación, haciendo uso de la transformada de Laplace, se buscarán las funciones de transferencia, en lazo cerrado, entre las señales de entrada del sistema ruidoso (u_c y w_x) y su salida (y_p). En una primera etapa, obtenemos

$$\begin{aligned} V(s) &= U_c(s) + U(s) = U_c(s) + K(s) E(s) = U_c(s) + K(s) (Y_p(s) - Y_m(s)) \\ &= U_c(s) + K(s) (Y_p(s) - G_{pv}(s) U_c(s)) \end{aligned}$$

para llegar al

resultado

$$Y_p(s) = G_{pw}(s) W_x(s) + G_{pv}(s) V(s) =$$

$$= G_{pw}(s) W_x(s) + G_{pv}(s) U_c(s) + G_{pv}(s) K(s) (Y_p(s) - G_{pv}(s) U_c(s))$$

y por tanto

$$Y_p(s) = \frac{G_{pw}(s)}{1 - G_{pv}(s) K(s)} W_x(s) + G_{pv}(s) U_c(s)$$

La respuesta frecuencial de la función de transferencia que afecta a la perturbación w_x , para los casos con y sin cancelador, es

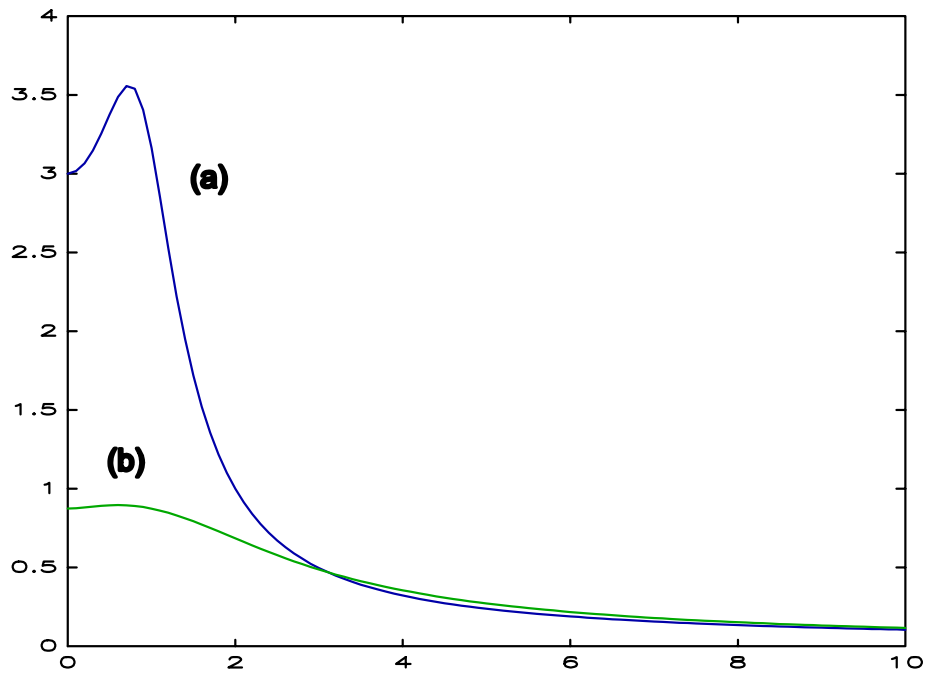


Fig.VII.2: Respuesta frecuencial de la función de transferencia de la perturbación, (a) sin cancelador y (b) con cancelador.
Eje de ordenadas el módulo, y el de abscisas la frecuencia en radianes/segundo.

en donde la curva (a) es en lazo abierto, siendo el máximo de la respuesta frecuencial de 3.55. Y la curva (b) corresponde al sistema ruidoso con el sistema atenuador de ruido incorporado. En este segundo caso, el máximo de la respuesta frecuencial de la perturbación es de 0.89, que corresponde a la respuesta del sistema error, y por tanto $\gamma_e=0.89$.

Otro caso de interés, que difiere del anterior, es cuando las funciones de transferencia de la señal y de la interferencia no coinciden en el valor de los polos, por ejemplo

$$G_{pw}(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2}; \quad G_{pv} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

en cuyo caso, el sistema generalizado planteado debe incluir todos estos polos, y por tanto aumenta en dimensión. Se obtiene la siguiente función de transferencia para el sistema generalizado

$$G = G(s) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{array} \right]$$

Ahora se procede al diseño del controlador siguiendo la metodología explicada en el capítulo VI, del siguiente modo:

- i) En primer lugar, se ajusta β_2 a un valor muy pequeño, de 0.01, para que no afecte al diseño del controlador. Esto es equivalente a no considerar la presencia de ruido de medida.
- ii) A continuación, se va dando valores a β_1 para obtener diferentes soluciones con mínima γ . Estos valores corresponden a diferentes ponderaciones que se le da a la señal de control.
- iii) Finalmente, se elige $\beta_1=0.5$ y $\gamma=0.5$, y luego se procede a ir incrementando el valor de β_2 , para de este modo disminuir el ancho de banda del controlador, mientras

siga existiendo solución con los valores prefijados de β_1 y γ . El valor final al que se llega es de $\beta_2=0.5$. Otro criterio de elección de solución podría ser el de buscar la solución para la cual hay una mínima γ_e , aunque ello puede ser a coste de una excesiva señal de control, por culpa de que γ_u sea excesivo.

Con el controlador elegido, se realizan simulaciones y medidas de la norma infinita de la función de transferencia de la perturbación, que en lazo cerrado es de $\gamma_e=0.52$. En lazo abierto era de 1.508 .

La función de transferencia del controlador es

$$K(s) = \frac{69.66 s^3 + 164.3 s^2 + 164.3 s + 94.63}{s^4 + 31 s^3 + 80.63 s^2 + 105 s + 31.9}$$

y la figura VII.3 es la respuesta frecuencial de la función de transferencia correspondiente a la perturbación, en lazo abierto y en lazo cerrado

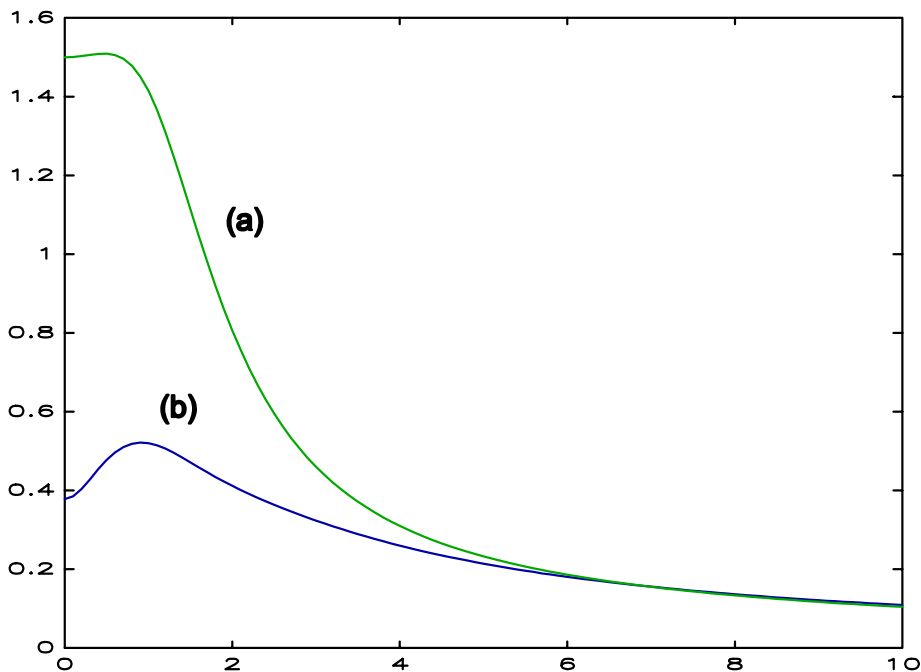


Fig.VII.3: Respuesta frecuencial de la función de transferencia de la perturbación, (a) sin controlador y (b) con el controlador.

Se puede comprobar que el polo de mayor valor, que determina el ancho de banda, se encuentra en -28.27 para el controlador obtenido con $\beta_2=0.5$. En cambio, el controlador que corresponde a un parámetro $\beta_2=0.01$ tiene el polo de alta frecuencia en -103.3 , y al utilizarlo en el sistema en lazo cerrado proporciona una γ_e de 0.45 .

En la figura VII.4 se representa la respuesta frecuencial de estos dos controladores, obtenidos con diferente valor de la ponderación del ruido de medida

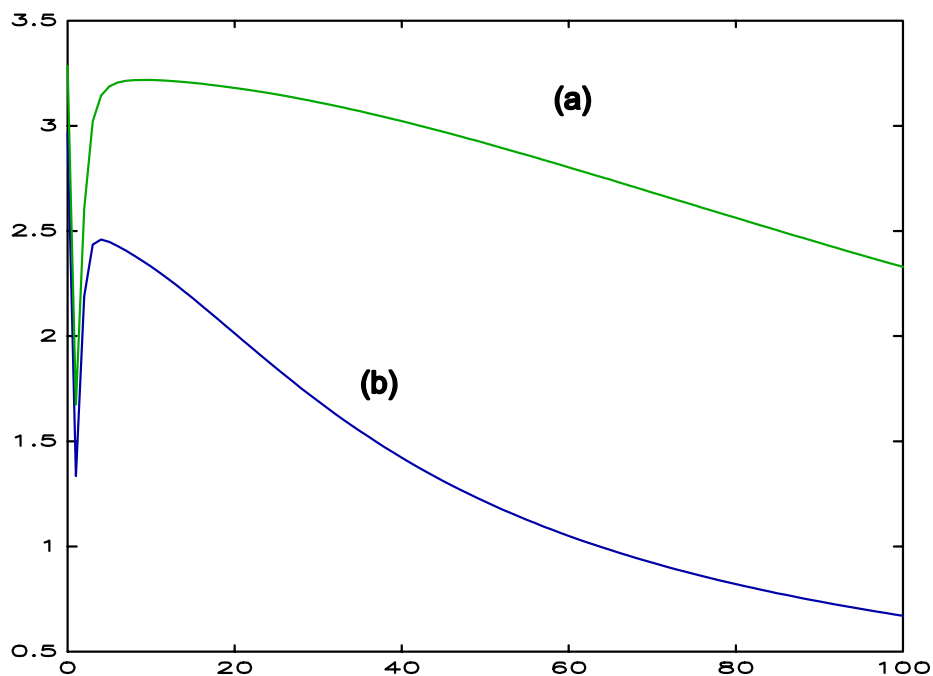


Fig.VII.4: Respuesta frecuencial de los controladores obtenidos con β_2 de 0.01 (a) y de 0.5 (b).

Eje de ordenadas el módulo, y en abscisas la frecuencia en radianes/segundo.

La conclusión a la que se llega es que la mejora que se obtiene en la reducción del error, según si $\beta_2=0.5$ ($\gamma_e=0.52$) o $\beta_2=0.01$ ($\gamma_e=0.45$), es poca en relación al incremento en el ancho de banda y en la respuesta frecuencial del controlador. Cabe recordar que un ancho de banda excesivo no es aconsejable ya que entonces el controlador es menos inmune al ruido de medida.

De este modo, se ha visto la importancia de diseñar el controlador después de una etapa de análisis de las diferentes soluciones obtenidas con los diferentes pesos β_1 y β_2 .

Con este ejemplo, se ha mostrado la viabilidad de aplicar control por modelo de referencia, con diseño del controlador mediante minimización de norma infinita, para aplicaciones de cancelación/atenuación de perturbaciones externas. La información que se requiere acerca del sistema ruidoso es la función de transferencia del camino de la señal y la del camino de la perturbación. En cierto modo, el sistema de control atenuador lo que hace es modificar esta función de transferencia de la perturbación, y reduce el pico de su respuesta frecuencial. Es decir, se minimiza el peor caso de amplificación de perturbaciones acotadas en energía o potencia.

VII.- Aplicaciones

VII.3.- Cancelador de dinámica lineal.

En este ejemplo se va a aplicar el método propuesto a la eliminación de dinámica lineal. Es decir, que dado un sistema nominal, del cual se producen variaciones paramétricas, se quiere establecer un sistema de control por modelo de referencia tal que el sistema realimentado sea inmune a estas variaciones, lo cual es como considerar que se está cancelando la dinámica lineal que difiere del sistema nominal: se trata de un problema de insensibilización.

Consideremos un sistema lineal, cuya relación entrada salida viene dada por su función de transferencia, tal como

$$Y_p(s) = G_p(s) V(s)$$

y además, resulta que esta función de transferencia no está bien definida debido a que sufre variaciones con la temperatura. Sería el mismo caso que el problema expuesto en la referencia [Ku90], donde se muestra la dependencia con la temperatura de un sistema de inyección de carburante.

Después de una etapa de identificación del sistema, se conoce $G_p(s)$ a estas temperaturas

$$G_p(s) \text{ a } 0^\circ\text{C} \rightarrow G_0(s)$$

$$G_p(s) \text{ a } 25^\circ\text{C} \rightarrow G_{25}(s)$$

$$G_p(s) \text{ a } 60^\circ\text{C} \rightarrow G_{60}(s)$$

y la idea es insensibilizar el sistema nominal definido a la temperatura de 25°C . En este caso, el sistema modelo de referencia queda establecido así

$$Y_m(s) = G_m(s) U_c(s)$$

$$G_m(s) = G_{25}(s)$$

El sistema a insensibilizar lo incertidumbre multiplicativa que transferencia nominal, tal como

formularemos como una afecta a una función de

$$Y_p(s) = G_p(s)V(s) = G_m(s)(1 + G_e(s))V(s)$$

$$\text{siendo } G_e(s) = \frac{G_p(s) - G_m(s)}{G_m(s)} = \frac{G_p(s)}{G_m(s)} - 1$$

donde $G_e(s)$ es una función obtenida del error relativo entre la función de transferencia a una cierta temperatura y la nominal.

Entonces, se puede decir que el papel de perturbación lo hace el término

$$G_e(s)V(s) = W_x(s)$$

que se debe considerar como una perturbación interna, no externa como en la aplicación desarrollada en VII.2, ya que esta w_x depende de la propia señal de control u .

Ahora formulamos el error, y tomando $v=u+u_c$, se obtiene

$$E(s) = Y_p(s) - Y_m(s) = G_m(s)(U(s) + G_e(s)V(s))$$

El objetivo es establecer la realimentación adecuada para insensibilizar las variaciones del sistema cuando la temperatura difiere de 25°C. El diagrama de bloques de todo el sistema es

Fig.VII.5: Insensibilización del sistema con incertidumbre lineal multiplicativa.

Haciendo uso de los mismos valores numéricos que en la referencia [Ku90], se tienen las siguientes funciones de transferencia

VII.- Aplicaciones

$$G_0(s) = \frac{-1.76 \cdot 10^{-2} s^2 + 4.939 \cdot 10^2 s - 3.137 \cdot 10^5}{s^3 + 98.34 s^2 + 9.223 \cdot 10^3 s + 8.771 \cdot 10^4}$$

$$G_{25}(s) = \frac{5.498 s^2 + 4.007 \cdot 10^2 s - 4.444 \cdot 10^5}{s^3 + 93.72 s^2 + 9.52 \cdot 10^3 s + 1.214 \cdot 10^5}$$

Es de destacar el hecho de que el sistema nominal, a 60°C , tendrá un cero en el semiplano derecho, y esto significa que $G_e(s)$ va a tener un polo en el semiplano derecho. Sin embargo, como lo que interesa de $G_e(s)$ es su respuesta frecuencial, y está claro que el conjunto $G_m(s)G_e(s)$ es estable, se puede considerar a $G_e(s)$ como estable y tomar como norma infinita el pico de su respuesta frecuencial.

El módulo de la respuesta frecuencial de los sistemas anteriores (a 0°C , 25°C y 60°C) es

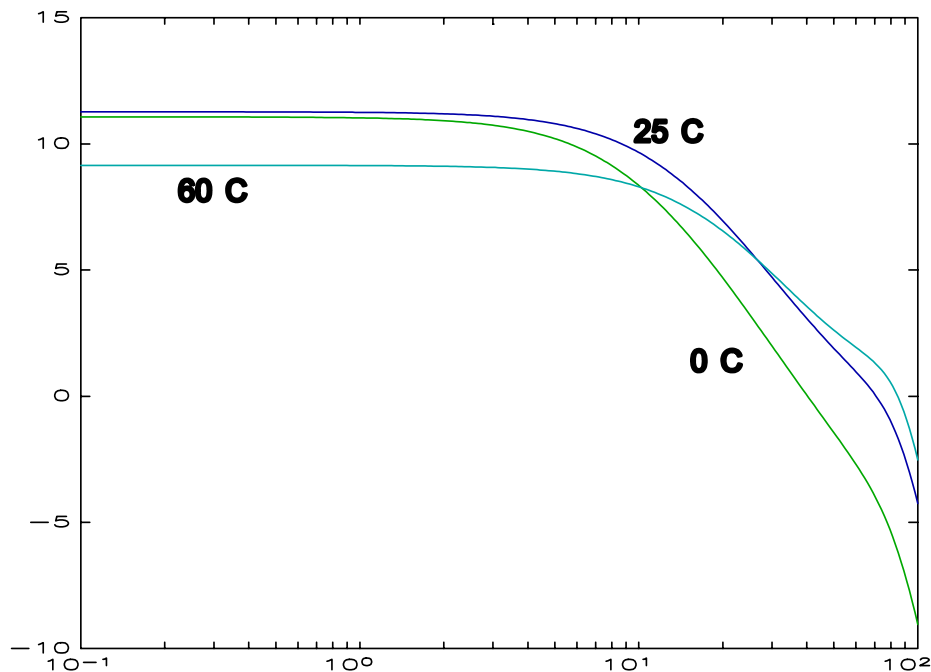


Fig.VII.6: Respuesta frecuencial a las temperaturas de 0°C , 25°C y 60°C . Eje de ordenadas en decibelios, y el de abscisas en radianes/segundo.

Y en lazo cerrado, se puede comprobar que se obtiene la siguiente función de transferencia

$$Y_p(s) = G_m(s)U_c(s) + \frac{G_m(s)G_e(s)}{1 - K(s)G_m(s)} (U_c(s) + U(s))$$

o también esta

$$Y_p(s) = \left(G_m(s) + \frac{G_p(s) - G_m(s)}{1 - K(s)G_p(s)} \right) U_c(s)$$

El sistema generalizado, con los valores numéricos anteriores, es

$$G = G(s) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -93 & -9520 & -121400 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5.5 & 400 & -444400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 5.5 & 400 & -444400 & 0 & \beta_2 & 0 \end{array} \right]$$

VII.- Aplicaciones

Y ahora, se procede a diseñar el controlador. Después de varias pruebas de búsqueda de una buena solución, se elige $\beta_1=0.2$ y $\beta_2=0.2$, que se corresponde a un mínimo de $\gamma=0.62$. Además, con esta solución se mide $\gamma_e=0.577$, $\gamma_u=1.43$ y el controlador que se obtiene es

$$K(s) = \frac{3.61 \cdot 10^5 s^2 + 3.9 \cdot 10^7 s + 2.8 \cdot 10^9}{s^3 + 2.37 \cdot 10^4 s^2 + 1.095 \cdot 10^7 s + 1.9 \cdot 10^9}$$

El módulo de la respuesta frecuencial de todo el sistema en lazo cerrado, con las diferentes funciones de transferencia a 0°C , 25°C y 60°C es

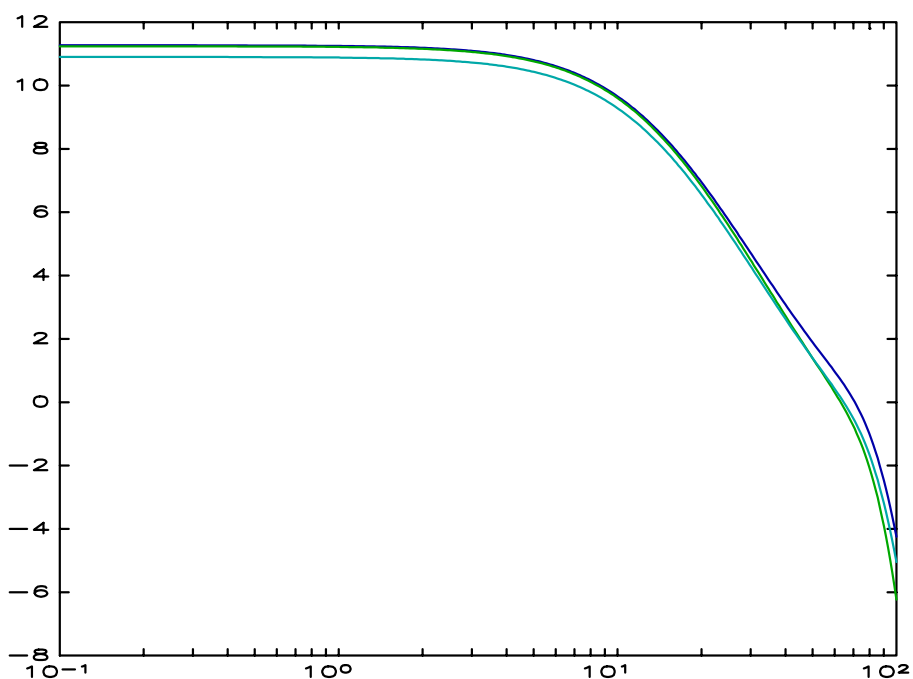


Fig.VII.7: Respuesta del sistema realimentado, a las temperaturas de 0°C , 25°C y 60°C . Eje de ordenadas en decibelios, y abscisas en radianes/segundo.

En la figura VII.8 se representa el modulo de la respuesta frecuencial de $G_e(s)$, a las temperaturas de 0°C y 60°C , junto al modulo de $\frac{G_m(s)}{1 - K(s)G_m(s)}$ 30

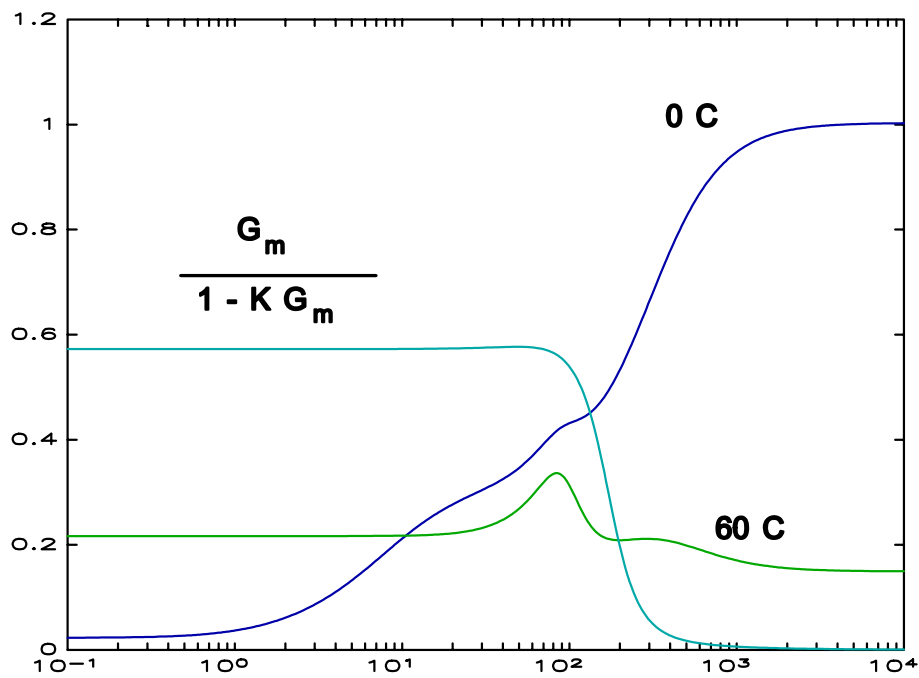


Fig.VII.8: Eje de ordenadas en escalado lineal, y abscisas en logarítmico.

Por tanto, y recordando lo expuesto en el tema VI, en esta aplicación se tendría las siguientes relaciones entre normas

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{G_m}{1 - K G_m} \|w_x\|_{\infty}$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \gamma_u \|w_x\|_{\infty}$$

$$\|w_x\|_{\infty} \leq G_{e-\infty} \|v\|_{\infty}$$

siendo

se puede comprobar, con los resultados obtenidos, que no se cumple la condición suficiente de estabilidad ya que no se cumple

$$G_{e-\infty} \gamma_u < 1$$

En general, la condición suficiente de estabilidad que establece el criterio de la pequeña ganancia es bastante restrictiva. Es por esto que, para el caso que se está considerando, por tratarse de un sistema lineal, vamos a buscar otro planteamiento del sistema en lazo cerrado, no tan restrictivo, al cual aplicarle de nuevo el criterio de la pequeña ganancia. Por ejemplo, en el caso de esta aplicación se cumplen las siguientes igualdades

$$E(s) = \frac{G_m(s) G_e(s)}{1 - K(s) G_m(s)} (U(s) + U_c(s))$$

$$U(s) = K(s) E(s)$$

y una condición suficiente

de estabilidad será que

$$-\frac{G_m G_e}{1 - K G_m} K \rightarrow \infty <$$

En la figura VII.9 se ha representado el módulo de $\frac{G_m G_e}{1 - K G_m} K$ 35 a las temperaturas de 0 °C y 60 °C

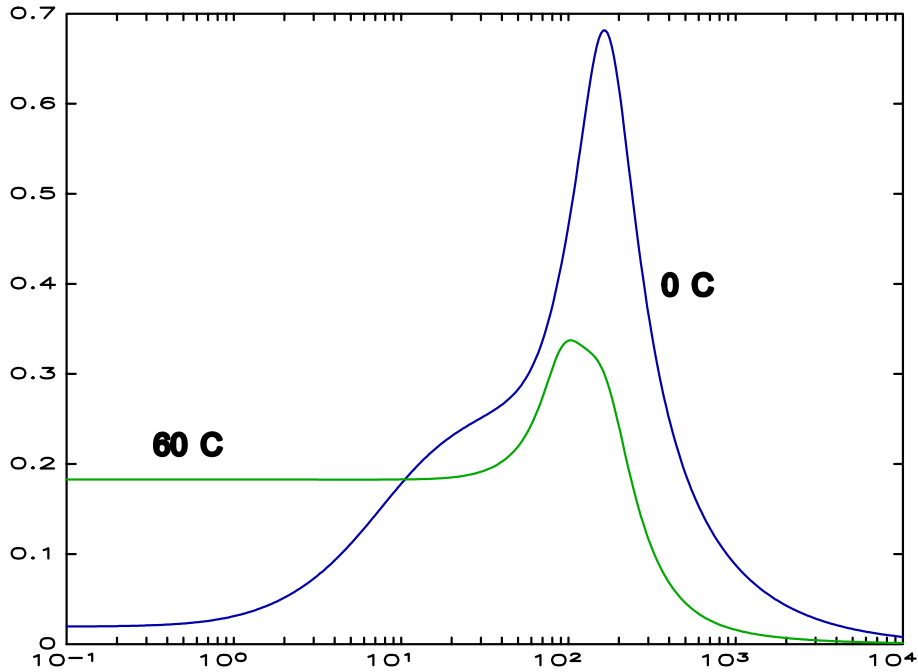


Fig.VII.9: Eje de ordenadas en escalado lineal, y el de abscisas en logarítmico.

con lo que, al ser menor que 1, se cumple la condición suficiente de estabilidad.

VII.4.- Linealización de un péndulo.

La linealización del funcionamiento de un péndulo tiene interés en cuanto a que cabe considerarlo como un problema *benchmark* con el que empezar a comprobar el funcionamiento del método de linealización propuesto. La ecuación diferencial del péndulo a considerar es del tipo

$$\ddot{y}_p + a \dot{y}_p + b \sin(y_p)$$

que escrita en formulación de espacio de estado viene dada por

$$\dot{x}_1 = -a x_1 - b \sin(x_2) +$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

En este caso consideramos serie de funcionales de Volterra [Sc80], tomando como entrada v y como salida y_p . Los términos de la expansión hasta el tercer orden son

$$y_p = x_2$$

que se conoce la expansión en de esta relación entrada salida

$$y_p = \phi_1(v) + \phi_3(v)$$

$$\phi_1(v) = \int_{-\infty}^t \{ H_1(s) V(s) \}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b}$$

$$\phi_3(v) = \int_{-\infty}^t \{ H_3(s_1, s_2, s_3) V(s_1) V(s_2) V(s_3) \} |_{t^-}$$

que también admite matemática

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{b}{6} H_1(s_1) H_1(s_2) H_1(s_3) H_1(s_1 + s_2 + s_3)$$

la representación siguiente

VII.- Aplicaciones

$$y_p = \phi_1(v + \phi(v))$$

$$\phi(v) = \int_{t_1}^{t_2} \{ H_3(s_1, s_2, s_3) V(s_1) V(s_2) V(s_3) \} |_{t_1=t_2=}$$

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{b}{6} H_1(s_1) H_1(s_2) H_1(s_3)$$

y de este modo la no linealidad queda incorporada en el vector de perturbaciones

$$w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(v) \\ v \end{bmatrix}$$

Dando valores numéricos (a=b=1), se llega a un sistema no lineal matemáticamente caracterizado por las ecuaciones

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -I & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \phi(v) \\ v \end{bmatrix}$$

y se tomará como modelo de referencia un sistema que se corresponda con la parte lineal de la expansión en serie funcional de Volterra, es decir que coincida con lo que es el primer *kernel*, tal como

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -I & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Finalmente, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para caracterizar el error entre sistema no lineal y sistema lineal

$$y_m = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} x_m$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -I & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

donde la no linealidad w_x viene dada por $e = [0 \quad I]x$

$$w_x = \phi(v)$$

$$W_x(s_1, s_2, s_3) = H_3(s_1, s_2, s_3) V(s_1) V(s_2) V$$

siendo

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{6} H_1(s_1) H_1(s_2) H_1(s_3)$$

El sistema lineal se ha de minimizar su dado por

$$h_3(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6} h_1(t_1) h_1(t_2) h_1(t_3)$$

generalizado del que norma infinita viene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ \beta_1 u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & -I & I & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & I & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde β_1 y β_2 caracterizan los factores de peso que se van a dar a la señal de control u y al posible ruido (incertidumbre) de medida w_y , respectivamente.

Haciendo uso de los kernel de Volterra es posible obtener una cota de la relación entre las normas de orden 1 de las transformadas de Fourier de la entrada y de la salida. En este caso se obtiene, para el kernel de orden 3

VII.- Aplicaciones

$$\|H_3(s_1, s_2, s_3)\|_{\infty} < \frac{1}{6} (1.155)^3 < 0.2$$

Como en esta aplicación, la expansión en serie de Volterra de la no linealidad que se está considerando tiene infinitos términos, los resultados obtenidos al tomar sólo hasta el kernel de orden 3 serán una aproximación. Lógicamente, no es posible tomar todos los términos del polinomio. Sin embargo, la bondad de esta aproximación será válida para valores pequeños de las normas, es decir alrededor de cero, que es donde tiene más interés. Esto se comprobará a continuación.

A partir de las normas inducidas de la parte lineal, para la señal de control y la señal de error, se plantean las siguientes desigualdades

$$\|E\| \leq \gamma_e \|W_x\|$$

$$\|U\| \leq \gamma_u \|W_x\|$$

y para la incertidumbre no lineal se tiene esta otra

$$\|W_x\| \leq \rho$$

$$\rho = 0.26 (\|U\| + \|U_c\|)$$

La representación gráfica de las curvas definidas por las ecuaciones anteriores, se puede ver en la siguiente ilustración

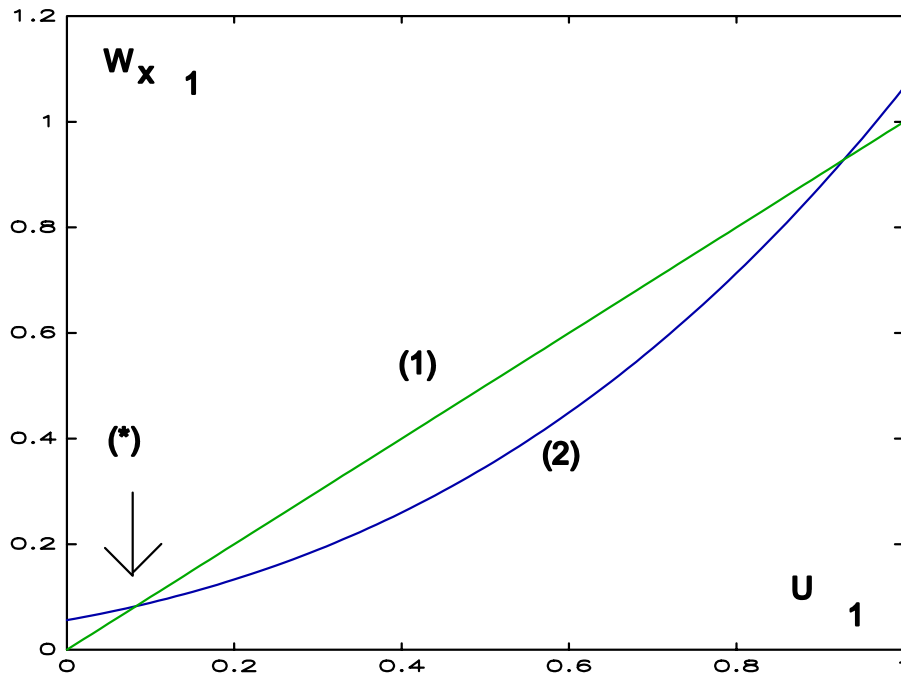


Fig.VII.10: Intersección entre las inecuaciones obtenidas del bloque lineal y del bloque no lineal.

La curva (1) representa la recta definida por la ecuación

VII.- Aplicaciones

$$\rho_{x-1} = \frac{U}{\gamma_u}$$

mientras que (2) es la representación de ρ , obtenida del kernel de Volterra de tercer orden. Además, la curva ρ está representada para un valor concreto de $U_c/1$ (se ha tomado de 0.6, y se ha considerado $\gamma_u=1$). Para valores mayores, la curva ρ se desplazará hacia arriba, y por tanto también el punto de intersección se moverá. Este punto de intersección, indicado con (*), determina el valor máximo de las normas. Para valores de $U/1$ elevados aparece otro punto de intersección que caracteriza un funcionamiento que no tiene suficiencia de la estabilidad.

También es cierto que si γ_u o $U_c/1$ aumentan, el punto (*) se desplaza hacia la derecha, y por tanto la cota superior de las normas aumenta. Es más, a partir de ciertos valores de γ_u o de $U_c/1$, el punto (*) puede desaparecer, con lo cual se pierde la zona de estabilidad alrededor del cero.

En consecuencia, el sistema lineal se ha de diseñar de modo que para los valores óptimos de norma infinita exista un punto (*), lo cual será una condición suficiente de existencia de una región de funcionamiento estable alrededor del punto de equilibrio (normas nulas).

Según la figura VII.10, del punto (*) se obtiene la cota $U/1^*$, y a partir de ésta

$$U_{-1} \leq U_{-1}^*$$

$$W_{x-1} \leq W_{x-1}^*, \text{ siendo } W_{x-1}^* \leq \rho(U_{-1}^* + U_c)$$

$$E_{-1} \leq \gamma_e W_{x-1}^*$$

Ahora, el siguiente paso sería hallar diversos controladores que minimizaran la norma infinita de la parte lineal, según diversas ponderaciones de β_1 y β_2 . De cada solución se mediría γ_e y γ_u y se establecería si existe o no la zona de estabilidad suficiente. Luego, simulando se comprobaría la validez de la solución: el mayor peligro es que el sistema realimentado evolucione en la zona de intersección que existe a valores elevados, en cuyo caso el diseño no sería válido.

Sin embargo, el modo natural de abordar la linealización del péndulo es plantearlo

considerando la no linealidad respecto a la salida, ya que es el modo natural como ésta aparece en la formulación, en vez de respecto a la entrada. Las ecuaciones diferenciales del péndulo y del modelo de referencia eran

$$\ddot{y}_p + \dot{y}_p + \sin(y_p) = u$$

y la ecuación del péndulo puede ser reescrita así

$$\ddot{y}_m + \dot{y}_m + y_m = u_c$$

$$\ddot{y}_p + \dot{y}_p + y_p = u + u_c + y_p - \text{si}$$

o en forma de función de transferencia

(haciendo uso, por comodidad, de una terminología habitual en la literatura, que expresa con letras minúsculas relaciones en el dominio transformado)

$$y_p = \frac{1}{s^2 + s + 1} (u + u_c + w_x); \quad y_m = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

y en este caso el término no lineal viene dado por

$$w_x = y_p - \sin(y_p)$$

Representando gráficamente w_x (ordenadas) en función de y_p (abscisa) se obtiene

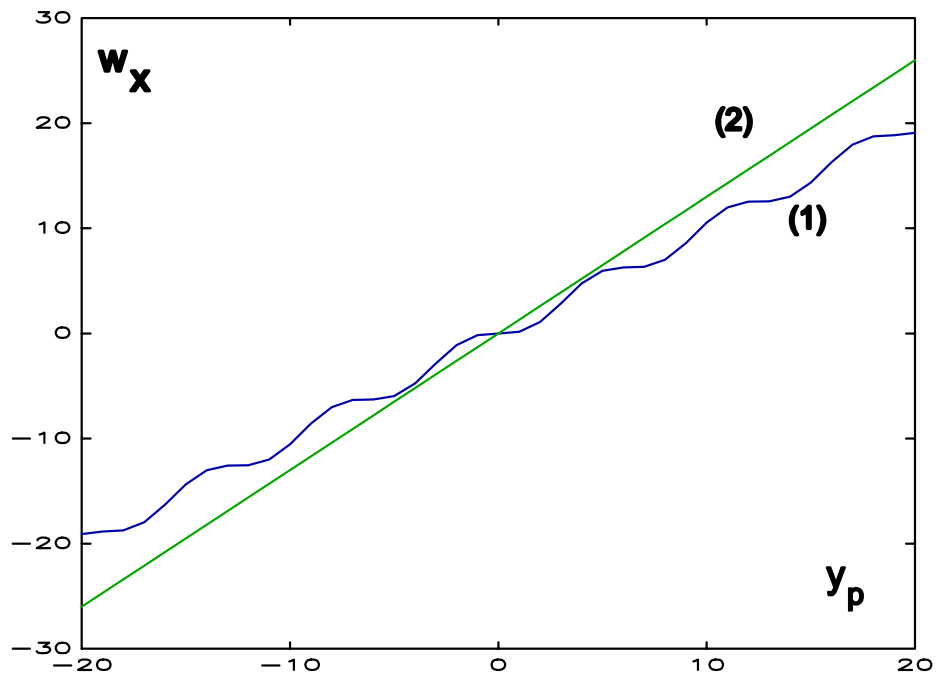


Fig.VII.11: Representación de la no linealidad, acotada sectorialmente.

donde la curva (1) es w_x en función de y_p , y la curva (2) muestra que la curva se puede acotar por una recta tal como

$$|w_x| < \alpha_2 |y_p|, \text{ con } \alpha_2 = 1.3$$

lo que implica que se obtiene la cota de la ganancia de orden 2 siguiente

$$|w_{x-2}| < \alpha_2 |y_{p-2}|, \quad \alpha_2 = 1.$$

y por tanto la condición suficiente de estabilidad del sistema en lazo cerrado será que se cumpla la restricción

$$\gamma_e \alpha_2 < 1 \quad \gamma_e < 0.768$$

A continuación, procedemos al diseño del controlador. Después de una etapa de búsqueda de una buena solución, nos quedamos con la que corresponde a los pesos $\beta_1=0.1$ y $\beta_2=0.3$, con la que se tiene una γ mínima de 0.4 . La γ_e medida es de 0.34 , por lo que se cumple la condición de estabilidad.

El controlador obtenido con estos parámetros es el siguiente

$$K(s) = -\frac{84.73s + 89.87}{s^2 + 11.42s + 45.57}$$

y con este diseño, se realizan con resultados satisfactorios.

una serie de simulaciones,

En concreto, en las figuras VII.12 y VII.13 se muestran los resultados de simulación cuando la excitación u_c es una señal cuadrada de amplitud 1 y frecuencia $\omega=0.2$.

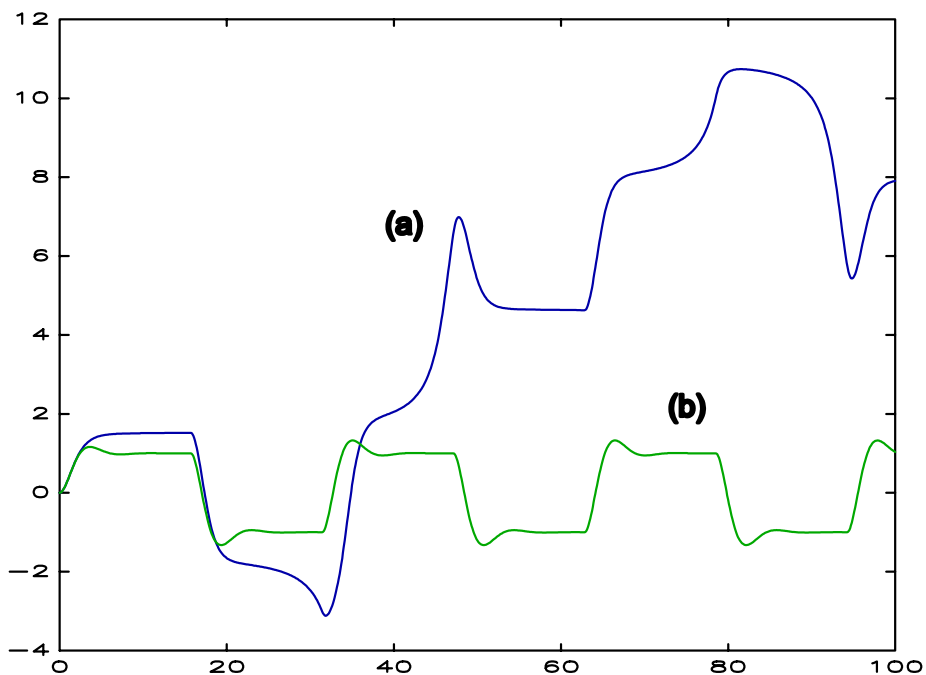
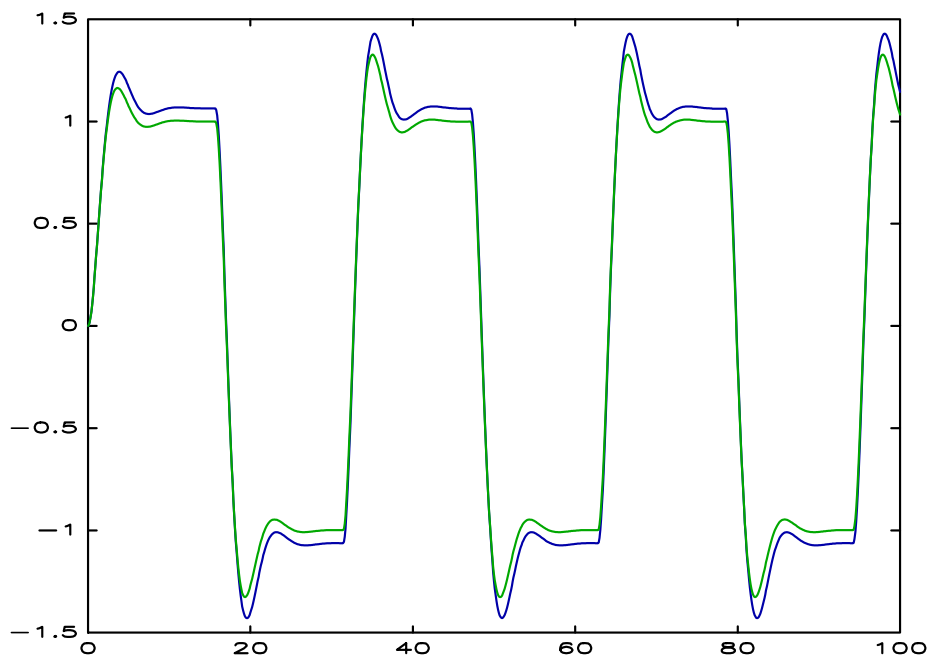


Fig.VII.12: (a) salida y_p sin controlador, y (b) salida del modelo y_m .

En la figura VII.12 se ve en la curva (a) la evolución de la señal y_p en lazo abierto, y como difiere claramente de la trayectoria y_m , que es la que marca el modelo de referencia lineal. O sea, que la diferencia entre y_p y y_m es debida a la dinámica no lineal del péndulo. En cambio, en la figura VII.13 se puede ver como el sistema de control cancela bastante bien las no linealidades.



VII.- Aplicaciones

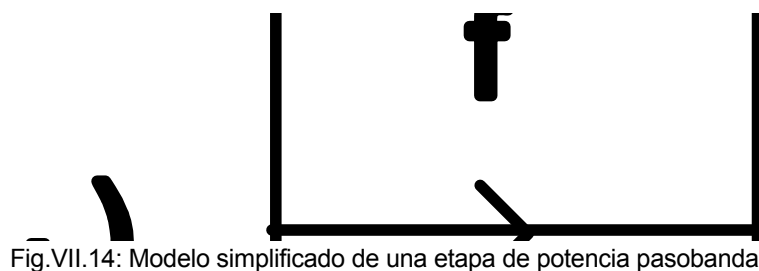
En conclusión, con este ejemplo de aplicación se ha mostrado la validez del método de linealización propuesto. Con el sistema de control por modelo de referencia, con controlador lineal que minimiza la norma infinita, lo que se hace es disminuir el pico de la función de transferencia que afecta a las no linealidades. Lógicamente, esto implica atenuar las no linealidades, siempre y cuando la realimentación no las haga aumentar.

Cabe remarcar, como ya se dijo en el capítulo VI, que el diseño a partir de los kernels de Volterra conducen a una cota polinómica de la no linealidad, y esto hace que, además de la zona de funcionamiento que corresponde a suficiencia de estabilidad alrededor del punto cero, exista otra zona en la que no hay acotación de las normas. En consecuencia, sólo mediante simulación se acaba determinando si el diseño es válido o no. Por tanto, el diseño mediante la cota polinómica, para el caso de no linealidad respecto a la entrada, sigue estas pautas:

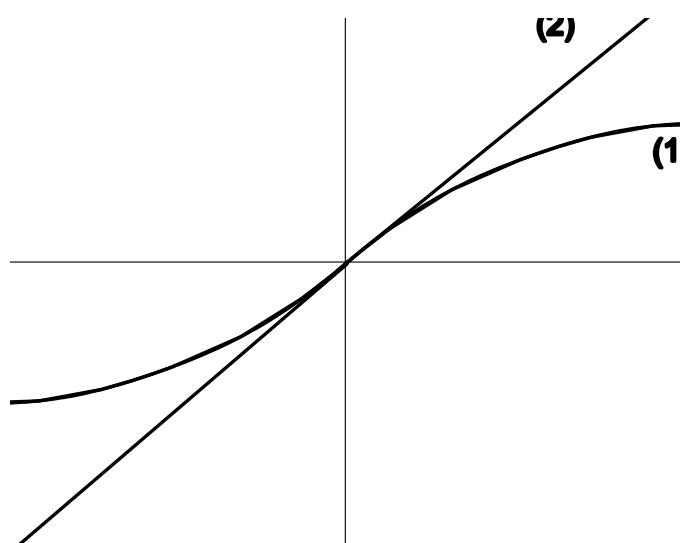
- i) Determinar la γ_u máxima, para la cual existe la zona de suficiencia de la estabilidad alrededor de cero. Es decir, asegurar su existencia.
- ii) Comprobar mediante simulación si el sistema evoluciona en esta zona o no.

VII.5.- Linealización de una etapa de potencia pasobanda.

En esta aplicación se va a considerar el problema de linealizar una etapa de potencia con respuesta frecuencial pasobanda. Por ejemplo, un amplificador de clase A consiste en una etapa activa transistorizada, que realizará la amplificación de señal, seguida de una etapa que limita en frecuencia, y que en parte elimina todos los armónicos que caen fuera de lo que se considera banda de paso. De este modo, se asume que la etapa de potencia pasobanda es modelable como una no linealidad estática en cascada con un filtro pasobanda, tal como se puede ver en la figura VII.14



donde se distingue el bloque no lineal estático $\varphi(\cdot)$, que está conectado a un bloque lineal $H(s)$ con respuesta frecuencial pasobanda. Además, consideraremos que la respuesta de la parte no lineal estática es matemáticamente modelable, de un modo aproximado, por una tangente hiperbólica (ver Fig. VII. 15).



VII.- Aplicaciones

En la figura VII.15, la curva (1) representa la no linealidad y la (2) una recta que la acota sectorialmente. Esta no linealidad, tangente hiperbólica, admite la siguiente expansión en serie de Taylor

$$f = 10 \tanh(v) \approx 10 \left(v - \frac{v^3}{3} + \frac{2v^5}{15} - \dots \right)$$

y por tanto, alrededor del paso por cero es aproximable por una recta de pendiente 10, que es la consideración de comportamiento en pequeña señal que se hace en amplificadores, suponiendo que no exista distorsión de cruce, como es el caso de un clase A. De este modo, la aproximación linealizada es

$$f(t) \approx 10 v(t)$$

El bloque lineal está determinado por la función de transferencia pasobanda siguiente

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Con los datos de que disponemos, vamos a replantear el problema de modo que quede estructurado tal como se ha indicado en el capítulo VI, y de este modo poder aplicar el método de linealización propuesto. El sistema total, particionado en un bloque no lineal y otro lineal, se formula así

$$\text{bloque lineal: } y_p = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} f$$

$$\text{bloque no lineal: } f = 10 v + 10 w_x$$

y por tanto

$$y_p = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1} (v + w_x)$$

$$w_x = \tanh(v) - v$$

El modelo de referencia se elige de modo que coincida en con la parte lineal del sistema no lineal, es decir

$$y_m = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1} t$$

En consecuencia, es inmediato llegar a la formulación del sistema error

$$e = y_p - y_m = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1} (v + w_x)$$

y eligiendo

$$v = u + u$$

se obtiene

$$e = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1} (u + w_x)$$

El siguiente paso es encontrar una cota para algún tipo de norma de la señales v y w_x , es decir de la entrada y la salida de la no linealidad, respectivamente.

La representación gráfica de w_x en función de v se halla en la figura VII.16,

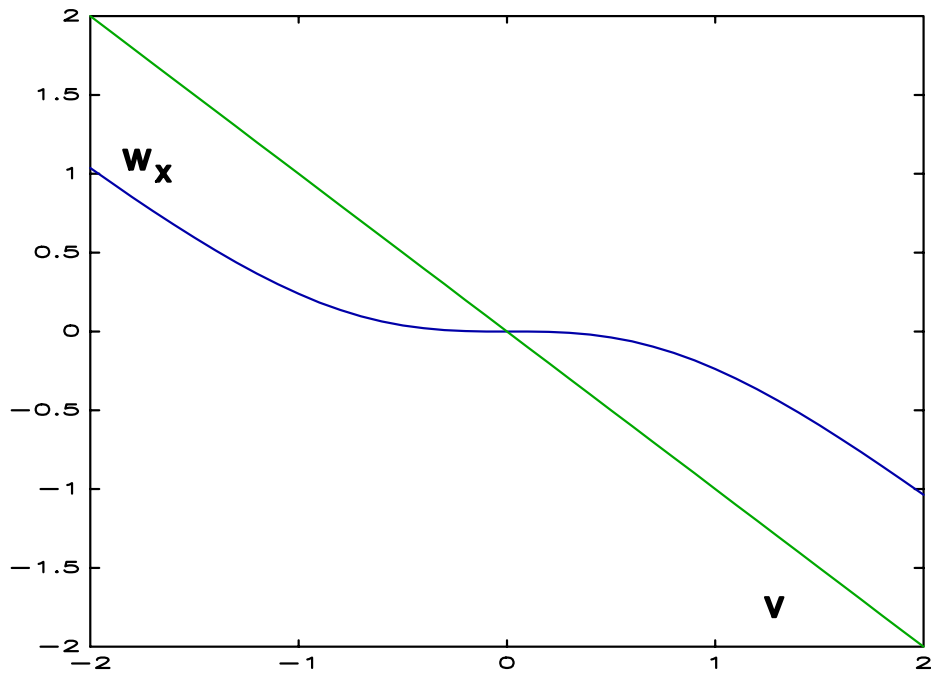


Fig.VII.16: Representación gráfica de la incertidumbre no lineal.

de donde se obtiene la desigualdad

$$-w_{x-2} < -v_{-2} - \alpha_2 = 1$$

Con todo esto, ya se tiene planteado el problema del

modo indicado en el capítulo anterior, donde se exponía el método de linealización propuesto, en este caso considerando la no linealidad respecto a la entrada.

El sistema lineal generalizado del que se ha de minimizar su norma infinita es

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}; \quad \text{siendo } G = G(s) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 20 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, para el diseño del mejor controlador vamos a proceder de otro modo: lo que haremos será tomar un valor fijo de β_2 , y analizar las soluciones que se obtienen dando diferentes valores a β_1 , y hallando la correspondiente mínima cota γ para cada caso, junto a γ_e y γ_u .

Los resultados numéricos obtenidos, para una $\beta_2=1$ fija, se encuentran en la tabla siguiente

β_1	γ	γ_e	γ_u
0.1	1	0.197	0.98
0.5	1.1	0.518	0.948
1	1.5	0.961	0.903
1.5	1.7	0.909	0.909
2	2.1	1.044	0.895

donde se puede ver que al aumentar β_1 (que es cuando se penaliza más la señal de control) ocurre que γ_u disminuye y a cambio γ_e aumenta. Esto, cabe tomarlo como una tendencia general y habitual (confirmado en múltiples simulaciones), aunque en ciertos casos no se cumple. Este es el caso de pasar de $\beta_1=1$ a $\beta_1=1.5$, en que la tendencia es inversa.

Se elige implementar el controlador correspondiente a $\beta_1=1$, que al cumplirse que $\gamma_u \alpha_2 < 1$ significa que tenemos asegurada la estabilidad en lazo cerrado. Para este caso, el controlador obtenido es

VII.- Aplicaciones

$$K(s) = \frac{-71.02 s}{s^2 + 75.57 s + 1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -75.57 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_{12} = \begin{bmatrix} 3.026 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad K_{21} = [-23.47 \quad 0];$$

El sistema total, incluyendo sistema no lineal, modelo de referencia y controlador es

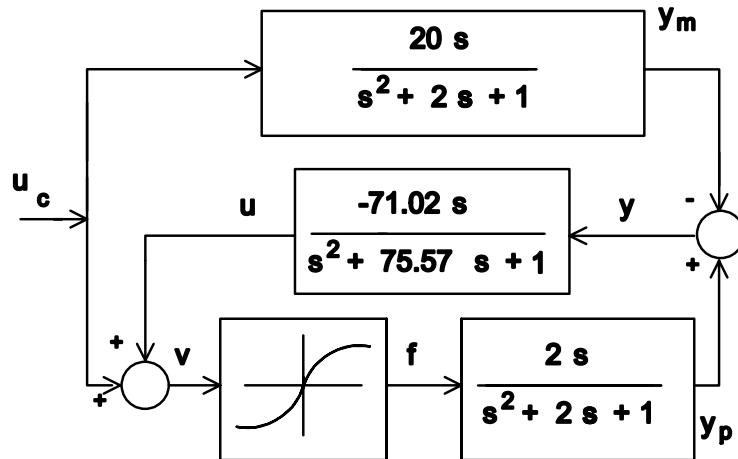


Fig.VII.17: Sistema total: amplificador y linealizador.

Y los resultados gráficos de simulaciones tomando como señal u_c una senoide de frecuencia $w=1$ y amplitud unitaria son

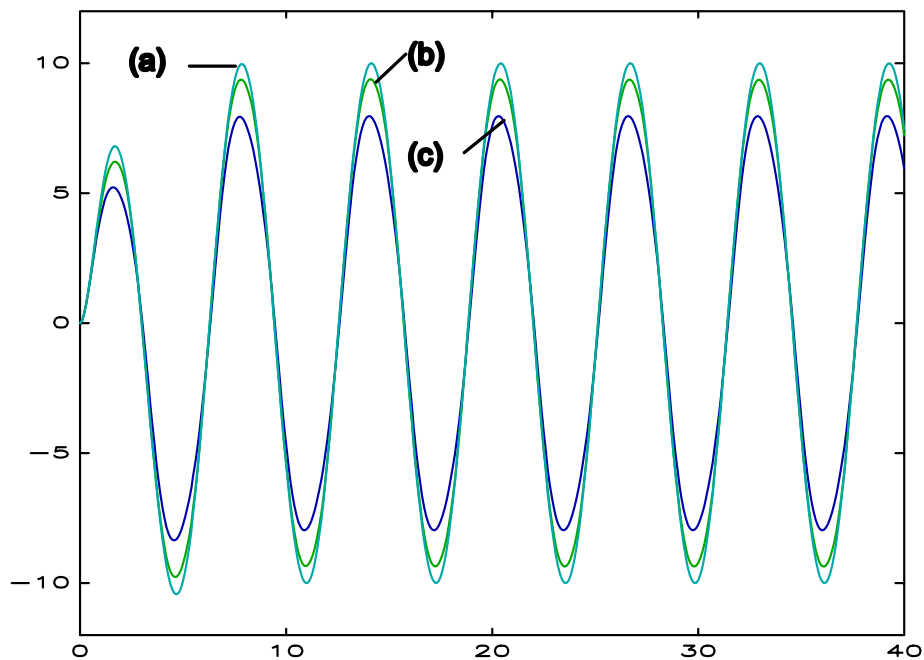


Fig.VII.18: Señales y_m (a), y_p (b) con controlador, y y_p (c) sin controlador.

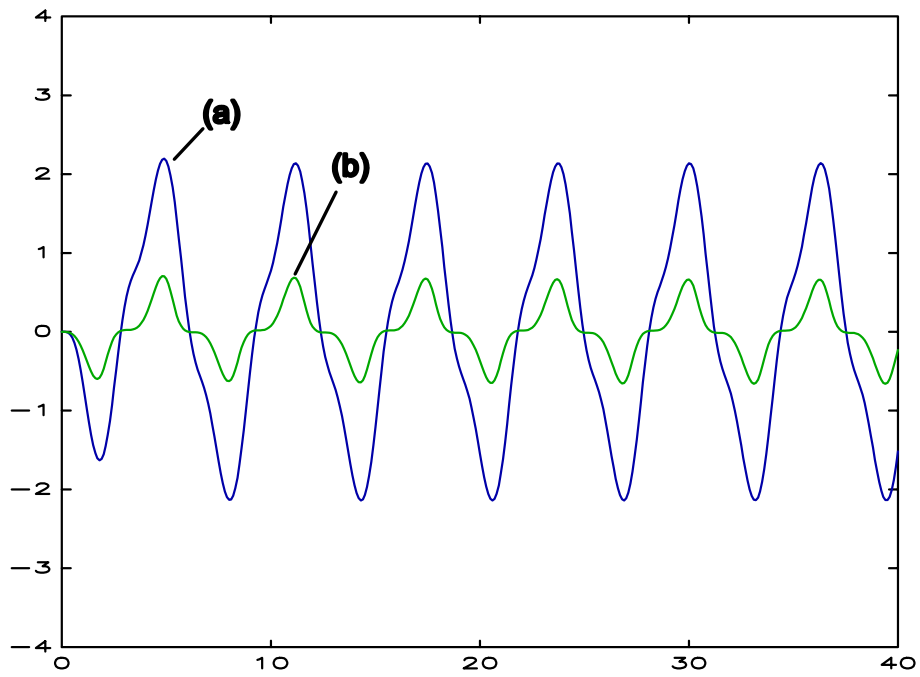


Fig.VII.19: Señales de error para la excitación sinusoidal, (a) sin controlador y (b) con controlador.

Y tomando como señal u_c una señal cuadrada de frecuencia $w=1$ y amplitud unitaria se obtiene

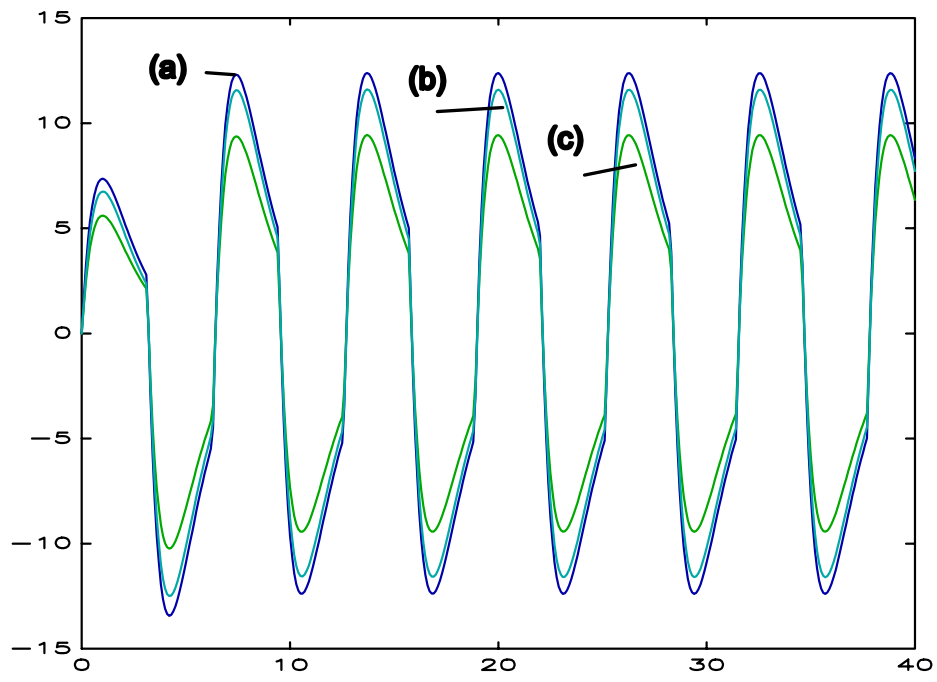


Fig.VII.20: Señales y_m (a), y_p con controlador (b) y sin controlador y_p (c).

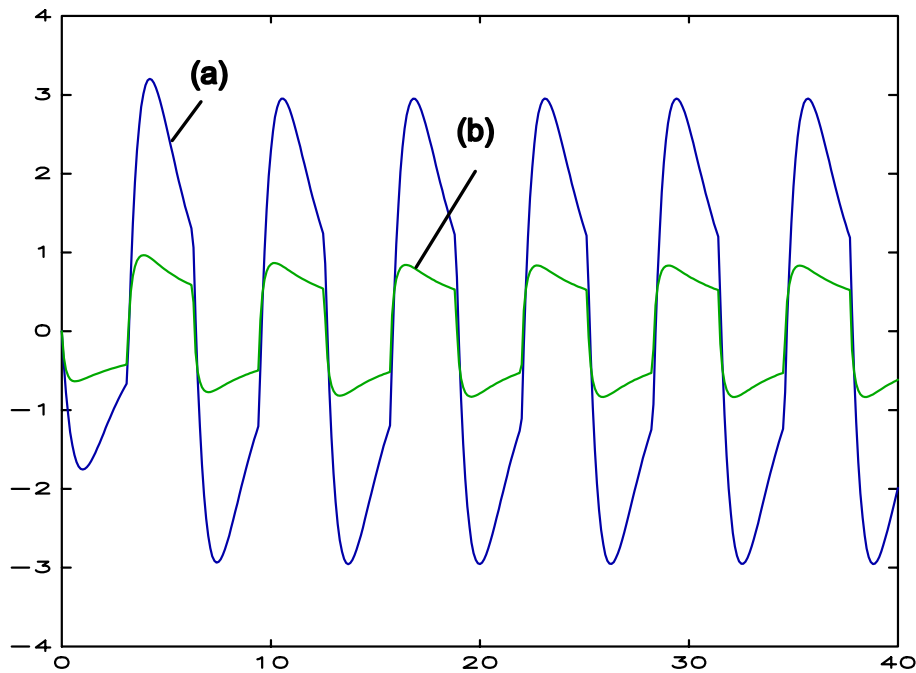


Fig.VII.21: Señales de error con excitación cuadrada, (a) sin controlador y (b) con controlador.

Tal como ya se ha dicho, la linealización de amplificadores pasobanda tiene interés en sistemas de radiocomunicaciones, ya que la presencia de no linealidades, entre otros efectos, genera productos de intermodulación y señales fuera de la banda de trabajo. Para ponderar esto, se suele hacer uso de dos tipos de medidas muy propias del entorno de RF: el *punto de compresión* y el *test de dos tonos*. Emplearemos este tipo de medidas para comparar el funcionamiento de la etapa de potencia pasobanda antes

y después de ser linealizada.

La medida del punto de compresión se realiza con una señal de excitación sinusoidal de frecuencia $\omega=1$, y cuya amplitud se va aumentando hasta que la diferencia de amplitud que tiene el armónico principal y la que debería tener caso de ser un sistema lineal (que se puede obtener del modelo de referencia) sea de 1 dB .

Para el sistema no linealizado se llega al punto de compresión de 1 dB con una entrada de 0.71 , mientras que con el sistema linealizado se llega a 1.21 . Por tanto hay una mejora de 4.63 dB en el punto de compresión.

Para realizar el test de dos tonos, consideraremos una señal de excitación tal como

$$u_c(t) = 0.5 \sin(\omega_1 t) + 0.5 \sin(\omega_2 t)$$

$$\omega_1 = 0.9; \quad \omega_2 = 1.1;$$

y los espectros obtenidos pueden verse en la figura VII.22, donde se aprecia que con el linealizador propuesto, existe una atenuación de 6 dB en el armónico más próximo a la banda de paso (que es el más interferente).

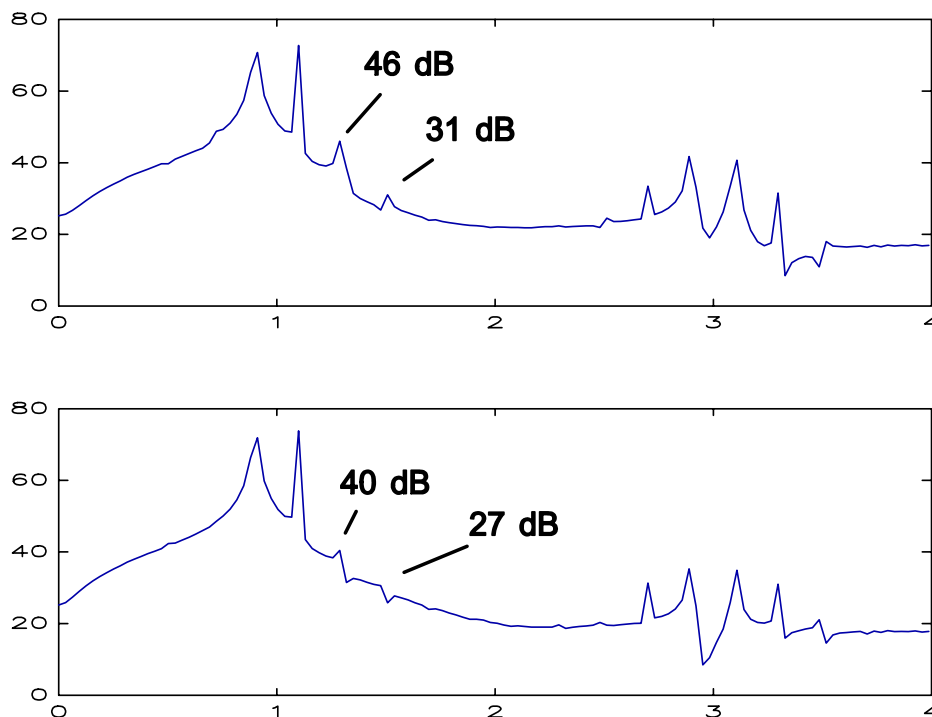


Fig.VII.22: Resultado del test de intermodulación, sin (arriba) y con (abajo) linealizador.

VII.- Aplicaciones

En el apartado II.5.3 se mostró la viabilidad de los sistemas de control VS-MRAC como canceladores de dinámica no lineal, es decir para linealizar. Aplicándolo a este ejemplo que se está considerando, con los siguientes valores numéricos

$$y_p = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} (10 \tanh(v))$$

$$y_m = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1}$$

y a partir de un sistema error tal como

que se formula, con $v = u_d + u_c$,

$$e = y_p - y_m = \frac{20s}{s^2 + 2s + 1} (u_d$$

$$d = w_x = \tanh(v) - v$$

y además se puede transferencia

comprobar que la función de

$$\frac{20s}{s^2 + 2s + 1}$$

es estrictamente real y positiva. A continuación se genera la señal v de este modo

$$v = u_c + u_d$$

$$u_d = -M \operatorname{sgn}(y_p - y_m)$$

$$\text{con } M = M(t) = \mu_1 \int_0^t |y_p - y_m| dt + \mu_2 |y_p - y_m|$$

donde la función de u_d es anular a la no linealidad d . La cota de la no linealidad es estimada adaptativamente por M . De este modo, el error tenderá a cero, y la señal u_d acabará tendiendo a un valor determinado por la acotación de la no linealidad, aunque desconocido a priori.

Los resultados de las simulaciones, siendo la señal u_c una senoide de frecuencia $\omega=1$ y amplitud unitaria, y con $\mu_1=1$ y $\mu_2=1$ son

VII.- Aplicaciones

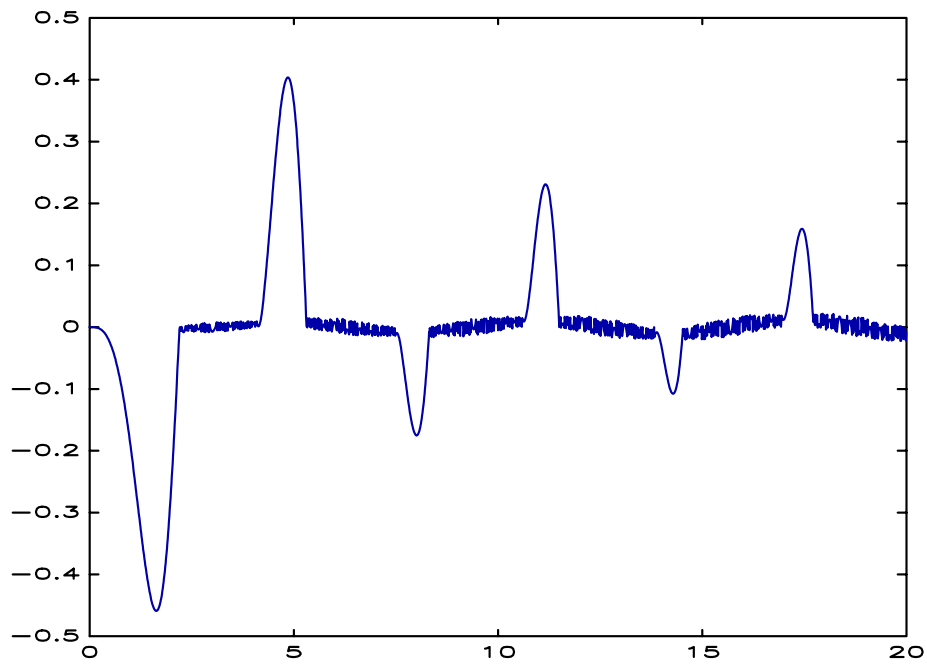


Fig.VII.23: Señal de error obtenida con el sistema VS-MRAC.

En las figuras VII.23 y VII.24 se observa el alto contenido en alta frecuencia tanto en la señal de error como en la señal canceladora. Esto es debido a las continuas conmutaciones instantáneas producidas por la función signo (*chattering*), pero precisamente es esta instantaneidad la que hace, teóricamente, que el sistema funcione.

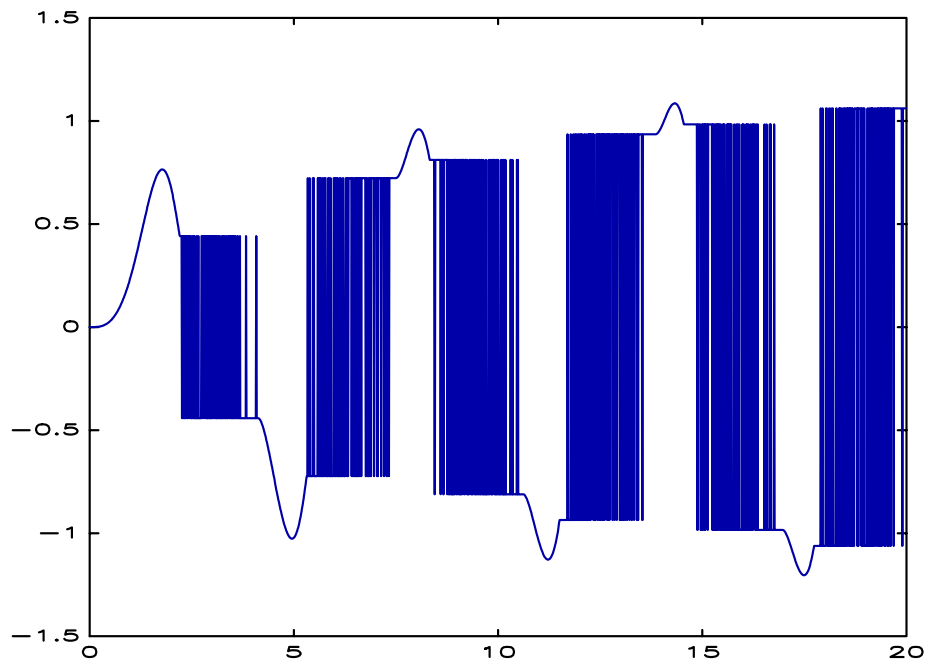


Fig.VII.24: Señal de control u_d .

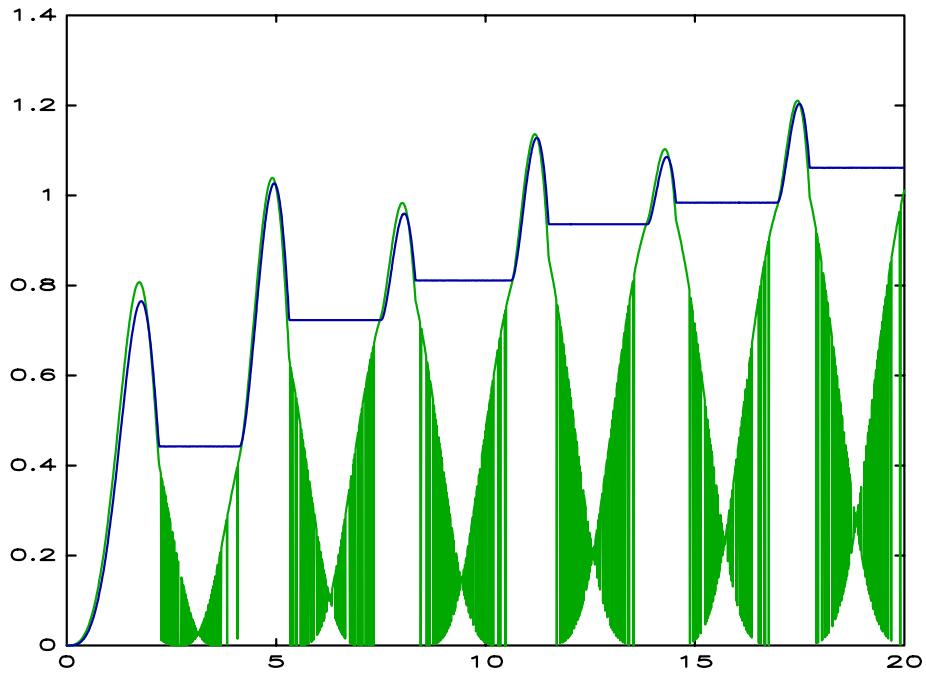


Fig.VII.25: La cota generada M (trazo discontinuo) y la cota real (trazo continuo).

A la vista de estas figuras, cabe decir que con el sistema linealizador basado en en teoría *VS-MRAC*, el error es menor que con el basado en norma infinita, y por tanto linealiza mejor. Incluso, el sistema es capaz de generar adaptativamente, y de forma correcta, la cota de la perturbación.

Sin embargo, el gran inconveniente de los sistemas *VS-MRAC* está en que la señal de control canceladora, u_d , tiene un gran contenido de alta frecuencia y de discontinuidades. Ello es debido a que es generada a partir de una función signo.

A través de simulaciones, se comprueba que el buen funcionamiento del linealizador *VS-MRAC* es muy dependiente de la buena calidad de las conmutaciones, es decir que requiere conmutaciones instantáneas. Si no es así, como es normal que ocurra, el buen funcionamiento se degrada, e incluso se puede llegar a la inestabilidad.

VIII.- CONCLUSIONES.

A lo largo de este trabajo se han estudiado y analizado varios aspectos relacionados con los sistemas no lineales, y más específicamente con su linealización. Las dificultades inherentes en el empleo de técnicas de análisis, modelado y control de sistemas no lineales, son debidas en gran parte a lo poco sistemáticas que son. Es por ello que, en los primeros capítulos de esta Tesis se ha hecho una síntesis de métodos de modelado, linealización y análisis de estabilidad aplicables a sistemas no lineales, a modo de visión general y estado de la temática.

Respecto a métodos de linealización basados en técnicas de control, cabe decir que los que usan realimentación de estado, en general, son difíciles de realizar en la práctica, ya que el diseño de observadores de estado no lineales es problemático. Asimismo, también lo es el diseño y realización de controladores no lineales.

Es por esto que, uno de los planteamientos iniciales en el desarrollo del sistema de control linealizador propuesto en esta Tesis fue que el controlador sea lineal y basado en realimentación de salida. Y otra consideración, fue la de relacionar el problema de linealización con los sistemas por modelo de referencia. Esto, es un modo claro y directo de establecer el objetivo de diseño: el modelo será el sistema lineal, al cual ha de seguir el sistema no lineal. Consecuencia de este enfoque, se obtiene un sistema error.

El sistema error se ha de estructurar de modo que las no linealidades se las pueda considerar como perturbaciones (perturbaciones internas) que son procesadas por un término lineal. Es decir, se ha de reestructurar el sistema error, y distinguir entre término lineal y no lineal.

Una vez formulado adecuadamente este sistema error, se ha realizado un primer trabajo consistente en cancelar la dinámica no lineal mediante un control adaptativo con estructura variable (VS-MRAC), en el que además se obtiene adaptativamente la cota requerida por este tipo de controladores. Se ha hecho una aportación en el algoritmo para obtener dicha cota. Este linealizador, a pesar de funcionar bien presenta el problema de que requiere instantaneidad en las conmutaciones de la función signo con la que se genera la señal de control. La no instantaneidad supone una considerable degradación del funcionamiento. Además, el contenido frecuencial de la señal de control es excesivo en frecuencias elevadas.

El siguiente trabajo desarrollado en esta Tesis, y principal, en linealización, ha consistido en abordar el diseño del controlador del sistema error minimizando la norma infinita del termino lineal del mismo, y que es el que filtra al término no lineal. De este modo, lo que se hace es disminuir el pico de la respuesta frecuencial de la función de transferencia por la que la perturbación interna, no linealidad, se manifiesta en la salida del sistema error. Este controlador lineal es obtenido haciendo uso de los desarrollos

teóricos hechos en los últimos años sobre control óptimo según el criterio de mínima norma infinita.

Además, junto al diseño del controlador-linealizador se hace necesario el análisis de la estabilidad en lazo cerrado, empleando para ello criterio de la pequeña ganancia. Aquí, la mayor dificultad está en hallar la norma inducida del término no lineal. Se han hecho aportaciones sobre como conseguirlo a partir de la expansión en serie de Volterra de dicha no linealidad.

Al realizar aplicaciones prácticas de linealización, con el método basado en norma infinita, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- En el diseño del controlador es importante el análisis de las soluciones que se obtienen con diferentes valores de los pesos de la función de coste. De este modo, es posible obtener resultados en los que se va aumentando o disminuyendo los efectos de la no linealidad en el error y en la señal de control. En principio, interesa reducir al máximo la norma infinita de la función de transferencia que relaciona la perturbación con la señal error, pero no a costa de una excesiva señal de control.
- El criterio de estabilidad de la pequeña ganancia es restrictivo, lo cual en parte se debe a que es una condición suficiente de estabilidad. Se ha comprobado, en alguna de las aplicaciones, que todo y no cumplirse la condición de pequeña ganancia, el sistema en lazo cerrado era estable. Sin embargo, generalmente en sistemas no lineales inciertos este criterio de estabilidad es el único viable.
- Existe una dificultad práctica para hallar cotas de las normas inducidas en sistemas no lineales. Se ha presentado un método que lo permite, a partir de una expansión en serie de Volterra de la no linealidad. Sería interesante el desarrollar más técnicas, analíticas o empíricas, con las que fuera posible la obtención sistemática de este tipo de cotas.
- Respecto a los resultados prácticos obtenidos, simulaciones, cabe decir que son mejores que los teóricos. Esto está justificado por el hecho de que las relaciones teóricas a las que se ha llegado se basan en condiciones suficientes y basadas en hipótesis de peor caso, por lo que pueden llegar a ser muy restrictivas.

VIII.- Conclusiones

Las futuras líneas de investigación sobre el método de linealización propuesto han de ir orientadas a:

- Desarrollo e implementación de métodos para la obtención de normas inducidas en sistemas no lineales, bien de un modo analítico o empírico (midiendo).
- Incorporar a la metodología establecida las nuevas aportaciones que se vayan haciendo en la teoría de optimización de norma infinita.
- Extensión del método a sistemas discretos.

IX.- APENDICES.

Apéndice I: Método directo de estabilidad de Lyapunov.

Sea un sistema no lineal, cuyas ecuaciones diferenciales vectoriales son

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ y } f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$$

$$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$$

a continuación, se realizan
relativas al sistema anterior:

las siguientes definiciones

- Al punto $x=0$ se le denomina *punto de equilibrio*.
- Un punto de equilibrio es *estable* en el sentido de Lyapunov si

$$\text{si } \|x(0)\| < r \implies \|x(t)\| < R, \forall t \geq 0$$

$$r, R > 0$$

Esto es equivalente a decir que, las variables de estado solución de la ecuación diferencial, si parten de una condición inicial acotada evolucionan dentro de una región acotada del espacio de estado, sin salirse de ella.

- Un punto de equilibrio es *uniformemente estable* si

$$\text{si } \|x(t_1)\| < r \implies \|x(t)\| < R, \forall t_1 \geq 0$$

$$r, R > 0$$

es decir, que se mantiene la condición de estabilidad independientemente del instante de tiempo en que se aplica la condición inicial.

- Un punto de equilibrio es *asintóticamente estable* si es estable y además

$$\text{si } \|x(0)\| < r \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

es decir que si las condiciones iniciales son un punto cercano al punto de equilibrio, el

sistema converge a éste.

- Un punto de equilibrio es *uniformemente asintóticamente estable* si

$$\text{si } \|x(t_1)\| < r \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall t_1 \geq 0$$

- Una función escalar $V(t,x)$ es *definida positiva* si existe una función $\alpha(\cdot)$ tal que

$$(i) \alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ debe ser continua y no decreciente}$$

$$(ii) \alpha(V) > 0 \text{ si } V > 0, \alpha(V) = 0 \text{ si } V = 0$$

$$(iii) V(t,x) \geq \alpha(\|x\|) \text{ si } x \neq 0, V(t,0) = 0, \forall t \geq 0$$

- Una función escalar $V(t,x)$ es *decreciente* si existe una función $\beta(\cdot)$ tal que

$$(i) \beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ debe ser continua y no decreciente}$$

$$(ii) \beta(V) > 0 \text{ si } V > 0, \beta(V) = 0 \text{ si } V = 0$$

A este tipo de $(iii) V(t,x) \leq \beta(\|x\|) \forall t \geq 0$ funciones
escalares $V(t,x)$ se les denomina *funciones de Lyapunov*.

- *Método directo de estabilidad de Lyapunov*: Establece que si para las variables de estado x de un sistema se puede hallar una función escalar $V(t,x)$ tal que

$$(i) V(t,x) \text{ es continuamente derivable y definida positiva}$$

$$(ii) \dot{V}(t,x) \leq 0, \forall t \geq 0$$

entonces el punto de equilibrio en $x=0$ es estable. Si también se cumple que

$$(i) V(t,x) \text{ es continuamente derivable, definida positiva y decreciente}$$

$$(ii) -\dot{V}(t,x) \text{ es positiva definida}$$

entonces la estabilidad es uniformemente asintótica. Además, según si las relaciones anteriores son válidas en todo el espacio de estado o en un entorno cerrado se hablará de estabilidad *global* o *local*, respectivamente. El método directo de Lyapunov es una condición suficiente de estabilidad, que en general no tiene que ser necesaria.

- *Lema de Barbalat*: Establece que, si una función diferenciable tiene un límite finito cuando $t \rightarrow \infty$, y si su derivada primera es uniformemente continua, entonces esta derivada ha de tender a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Este lema se emplea en la obtención de funciones de Lyapunov para diseñar sistemas adaptativos. Matemáticamente, si una función escalar cumple que

$$V(t, x) > 0 \text{ y } \dot{V}(t, x) \leq 0$$

y también que

$$\dot{V}(t, x) \text{ es uniformemente continua en } t$$

entonces

$$\dot{V}(t, x) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty$$

Apéndice II: Espacios normados.

Una norma, simbólicamente representada como $|\cdot|$, definida en un espacio lineal X , es una función de X en \mathbb{R} que debe cumplir las siguientes *condiciones*:

i) Sólo el vector cero tiene norma cero.

$$\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \text{ ademas } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

ii) Al multiplicar un vector por un escalar, la norma de este producto es la del vector original multiplicada por la magnitud del mismo escalar.

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X \text{ y } \forall \text{ escalar } \alpha$$

iii) La norma de la suma de dos vectores no es superior a la suma de las normas de cada uno de los vectores (*desigualdad triangular*).

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$$

A continuación se detalla una serie de *definiciones y conceptos* habituales en el ámbito de los espacios normados:

- **Secuencia de Cauchy:** Una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio normado X es una secuencia de Cauchy si

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \text{ si } n, m \rightarrow \infty$$

es decir, que los elementos de la secuencia pueden estar arbitrariamente próximos entre sí.

- **Convergencia:** Se dice que una secuencia $\{x_n\}$ *converge* a un elemento fijo x si

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0$$

- Un espacio *normado completo* es aquel en el que toda secuencia de Cauchy en X converge a un elemento en X .

- A un espacio normado completo se le denomina *espacio de Banach*.
- Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definido en un espacio X , debe cumplir las siguientes propiedades

se define $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(i) \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$

$$(ii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(iii) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ si } x \neq 0$$

- Un espacio de *Hilbert* es un espacio normado completo en el que se ha definido una norma mediante un producto interno. Por tanto, un espacio de Hilbert es también un espacio de Banach.
- donde $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- La norma de orden p de una función $f(t)$ definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} , dependiente de una variable real t (por ejemplo el tiempo), se define así

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)| \quad p = \infty$$

Además, se dice que $f(t)$ pertenece al espacio de Lebesgue L_p si

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) \in L_p(-\infty, +\infty) \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < \infty$$

$$f(t) \in L_\infty \text{ si } \sup_t |f(t)| < \infty$$

siendo el supremo $\sup |f(t)|$ la menor cota superior del valor absoluto.

- La norma de orden p de una función $F(s)$ definidas de \mathbb{C} en \mathbb{C} , como es el caso de las

funciones que se manejan en el dominio transformado de Fourier o de Laplace, se indica como $\|F\|_p$, y su definición es

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|F\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega} |F(j\omega)| \quad p = \infty$$

Además, una función $F(s)$ pertenece al espacio real de Hardy RH_p si

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$F(s)$ real, racional, analítica en $\text{Re}\{s\} > 0$ y $|F(\infty)|$ finito

$$F(s) \in RH_p \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^p d\omega < \infty$$

$$F(s) \in RH_\infty \text{ si } \|F\|_\infty = \sup_{\omega} |F(j\omega)| < \infty$$

Cabe aclarar que una función $F(s)$ se dice que es propia o estrictamente propia cuando

$$|F(\infty)| < \infty \rightarrow \text{propia}$$

$$|F(\infty)| = 0 \rightarrow \text{estrictamente propia}$$

• Para vectores y matrices, la norma de orden 2 y la norma- ∞ se particularizan así

$$G(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\|G\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i(j\omega)^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

siendo

$$\sigma_i(A) = \text{valor singular} = \sqrt{\lambda_i(A^* A)}$$

$$\bar{\sigma}(A) = \text{el mayor } \sigma_i(A)$$

se cumple que $\frac{Ax}{\|x\|} \leq \bar{\sigma}(A)$ y que $|\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A)$

X.- REFERENCIAS.

[An68] Anderson, B.D.O., *A Simplified Viewpoint of Hyperstability*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 13, pp. 292-294, June 1968.

[An89] Anderson, B.D.O. and J.B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall International, 1989.

[Ar90] Ariyavisitakul, S. and T.P. Liu, *Characterizing the Effects of Nonlinear Amplifiers on Linear Modulation for Digital Portable Radio Communications*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 39, No. 4, pp. 383-389, November 1990.

[Ba93] Ball, J.A., J.W. Helton and M.L. Walker, *H_∞ Control for Nonlinear Systems with Output Feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No 4, April 1993.

[Be87] Benedetto, S., E. Biglieri and V. Castellani, *Digital Transmission Theory*, Prentice-Hall International, 1987.

[Be89] Bernstein, D.S. and W.M. Haddad, *LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 3, pp. 293-305, March 1989.

[Be92] Bertran, E., *Continuous-Time Adaptive Control of Consumer Electronic Circuits*, Proceedings of the 4th IFAC International Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, July 1992.

[Be94a] Bertran, E., G. Montoro and N. Talavera, *Continuous-Time Adaptive Control Applied to RF Amplifier Linearization*, Proceedings of the 7th Mediterranean Electrotechnical Conference, pp. 160-163, April 1994.

[Be94b] Bertran, E., and G. Montoro, *Application of Hyperstability Theory to Interference Cancelling*, Proceedings of the 7th Mediterranean Electrotechnical Conference, pp. 679-682, April 1994.

[Be95] Bertran, E. and G. Montoro, *Adaptive VS-MRAC for Disturbance Cancellation*, IEE Electronics Letters, Vol. 31, No. 2, pp. 142-144, January 1995.

[Be96] Bertran, E. and G. Montoro, *Robust Model Reference Linearization*, Presentado

a la European Control Conference ECC'97.

[Bh91] Bhattacharyya, S.P. and L.H. Keel (Eds.), *Control of Uncertain Dynamic Systems*, CRC Press, March 1991.

[Bi84] Biglieri, E., A. Gersho, R.D. Gitlin and T.L. Lim, *Adaptive Cancellation of Nonlinear Intersymbol Interference for Voiceband Data Transmission*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 2, No. 5, pp. 765-777, September 1984.

[Bi88] Biglieri, E., S. Barberis and M. Catena, *Analysis and Compensation of Nonlinearities in Digital Transmission Systems*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 6, No. 1, pp. 42-51, January 1988.

[Bo94] Bodson, M., J. Chiasson and R. Novotnak, *High Performance Induction Motor Control via Input-Output Linearization*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 14, No. 4, pp. 25-33, August 1994.

[Bu92] Butler, H., *Model Reference Adaptive Control*, Prentice-Hall, 1992.

[Ca90] Cavers, J.K., *Amplifier Linearization Using a Digital Predistorter with Fast Adaptation and Low Memory Requirements*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 39, No. 4, pp. 374-382, November 1990.

[Ch95] Chichka, D.F. and J.L. Speyer, *An Adaptive Controller Based on Disturbance Attenuation*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No 7, pp. 1220-1233, July 1995.

[Co94] Coustal, P. and J.M. Michelin, *Industrial Application of an H-infinity Design Method for Flexible Structures*, Vol. 14, No. 4, pp. 49-54, August 1994.

[De75] Desoer, C.A. and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, 1975.

[Do84] Donati, F. and M. Vallauri, *Guaranteed Control of "Almost-Linear Plants"*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 29, No. 1, January 1984.

[Do87] Dorato, P. (Ed.), *Robust Control*, IEEE Press, 1987.

X.- Referencias

[Do89] Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, *State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-34, pp. 831-847, August 1989.

[Do90] Dorato, P., and R.K. Yedavalli (Eds.), *Recent Advances in Robust Control*, IEEE Press, 1990.

[Do92] Doyle, J.C., B.A. Francis and A.R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell Macmillan International Editions, 1992.

[Do95] Doyle III, F.J., B.A. Ogunnaike and R.K. Pearson, *Nonlinear Model-based Control Using Second-order Volterra Models*, Automatica, Vol. 31, No. 5, pp. 697-714, 1995.

[Ev95] Evans, C., D. Rees, L. Jones and M. Weiss, *Periodic Signals for Measuring Nonlinear Volterra Kernels*, accepted for the IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1995.

[Fe94] Feng, G., *New Robust Model Reference Adaptive Control Algorithm*, IEE Proc. Control Theory Appl, No 141, pp. 177-180, May 1994.

[Fr87] Francis, B.A., *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Fu93] Fujita, M. (et al.), *Loop Shaping Based Robust Control of a Magnetic Bearing*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 13, No. 4, August 1993.

[Ge92] Genesio, R. and A. Tesi, *Harmonic Balance Methods for the Analysis of Chaotic Dynamics in Nonlinear Systems*, Automatica, Vol. 28, No. 3, pp. 531-548, May 1992.

[Gh93] Ghaderi, M., S. Kumar and D.E. Dodds, *Fast Adaptive Predistortion Lineariser Using Polynomial Functions*, Electronics Letters, Vol. 29, No. 17, pp. 1526-1528, August 1993.

[Gl91] Glover, K., D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle, E.S. Kasenally and M.G. Safonov, *A Characterization of all Solutions to the Four Block General Distance Problem*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 29, pp. 283-324, 1991.

[Gu94] Gurov, I.R. and G. Tadmor, *On the Robustness of H_∞ State Feedback Control to Nonlinear Perturbations*, Automatica, Vol. 30, No. 3, pp. 499-502, 1994.

[Hs88] Hsu, L., *Variable Structure Model-Reference Adaptive Control (VS-MRAC) using only Input and Output Measurements: Part II*, Proceedings of the 27'th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2396-2401, December 1988.

[Is89] Isidori, A., *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1989.

[Is92] Isidori, A. and A. Astolfi, *Disturbance Attenuation and H_∞ -Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-37, No. 9, pp. 1283-1293, September 1992.

[Is95] Isidori, A. and W. Kang, *H_∞ Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No 3, pp. 466-472, March 1995.

[Kn93] Knobloch, H.W., A. Isidori and D. Flockerzi, *Topics in Control Theory*, Birkhauser, 1993.

[Ko91] Korenberg, M.J. and L.D. Paarmann, *Orthogonal Approaches to Time-Series Analysis and System Identification*, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 29-43, July 1991.

[Kr92] Krause, J.M., and P.P. Khargonekar, *A Comparison of Classical Stochastic Estimation and Deterministic Robust Estimation*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 7, pp. 994-1000, July 1992.

[Ku90] Kuraoka, H. (et al.), *Application of H -infinity Design to Automotive Fuel Control*, IEEE Control Systems Magazine, April 1990.

[Kw93] Kwakernaak, H., *Robust Control and H_∞ Optimization-Tutorial Paper*, Automatica, Vol. 29, No. 2, pp.255-273, 1993.

[La79] Landau, I.D., *Adaptive Control-The Model Reference Approach*, New York: Marcel Dekker, 1979.

X.- Referencias

[La81] Lawrence, P.J. and B. Tech, *Estimation of the Volterra Functional Series of a Nonlinear System Using Frequency-Response Data*, IEE Proc-D, Vol. 128, No. 5, pp. 206-210, September 1981.

[Li93] Linden, G.W., and P.F. Lambrechts, *H_∞ Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry Friction*, IEEE Control Systems Magazine, August 1993.

[Ma88] Mareels, I.M.Y. and R.R. Bitmead, *Bifurcation Effects in Robust Adaptive Control*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 35, No. 7, pp. 835-841, July 1988.

[Ma91] Mathews, V.J., *Adaptive Polynomial Filters*, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 10-26, July 1991.

[Ma93a] Marino, R. and P. Tomei, *Global Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Part I: Linear Parameterization*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 1, pp. 17-32, January 1993.

[Ma93b] Marino, R. and P. Tomei *Global Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Part II: Nonlinear Parameterization*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 1, pp. 33-48, January 1993.

[Mc95] McCormack, A.S., K.R. Godfrey and J.O. Flower, *Design of Multilevel Multiharmonic Signals for System Identification*, IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 142, No. 3, May 1995.

[Mo91] Mohler, R.R., *Nonlinear Systems: Applications to Bilinear Control*, Prentice-Hall, 1991.

[Na80] Narendra, K.S. and L.S. Valavani, *A Comparison of Lyapunov and Hyperstability Approaches to Adaptive Control of Continuous Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25, No. 2, pp. 243-247, April 1980.

[Na89] Narendra, K.S. and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, 1989.

[Na91] Nagpal, K.M. and P.P. Khargonekar, *Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 2, pp. 152-166, February 1991.

[No90] Northrop, R.B., *Analog Electronic Circuits*, Addison-Wesley, 1990.

[Or89] Ortega, R. and Y. Tang, *Robustness of Adaptive Controllers - A Survey*, *Automatica*, Vol. 25, No. 5, pp. 651-677, 1989.

[Pe87] Petersen, I.R., *Disturbance Attenuation and H_∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 5, May 1987.

[Re84] Reboullet, C. and C. Champetier, *A New Method for Linearizing Non-linear Systems: The Pseudolinearization*, *International Journal of Control*, Vol. 40, No. 4, pp. 631-638, 1984.

[Sc80] Schetzer, M., *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, 1980.

[Sc92] Schaft, A.J., *L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770-784, June 1992.

[Sh93] Shahian, B. and M. Hassul, *Control System Design Using Matlab*, Prentice-Hall, 1993.

[Sh94] Shamma, J.S., *Robust Stability with Time-Varying Structured Uncertainty*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 4, pp. 714-724, April 1994.

[Sh95] Shaked, U. and C.E. de Souza, *Continuous-Time Tracking Problems in an H_∞ Setting: A Game Theory Approach*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 5, pp. 841-852, May 1995.

[Si92] Sicuranza, G.L., *Quadratic Filters for Signal Processing*, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 80, No. 8, pp. 1263-1285, August 1992.

[SI91] Slotine, J.E. and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, 1991.

[Sm86] Smith, J., *Modern Communication Circuits*, McGraw-Hill, 1986.

X.- Referencias

[St85] Stapleton, J.C. and S.C. Bass, *Adaptive Noise Cancellation for a Class of Nonlinear, Dynamic Reference Channels*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 32, No. 2, pp. 143-150, February 1985.

[St92a] Stapleton, S.P. and F.C. Costescu, *An Adaptive Predistorter for a Power Amplifier Based on Adjacent Channel Emissions*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 41, No. 1, pp. 49-56, February 1992.

[St92b] Stapleton, S.P., G.S. Kandola and J.K. Cavers, *Simulation and Analysis of an Adaptive Predistorter Utilizing a Complex Spectral Convolution*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 41, No. 4, pp. 387-394, November 1992.

[Su93] Sun, W., K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar, *H_∞ Control and Filtering for Sampled-Data Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-38, No. 8, pp. 1162-1175, August 1993.

[Su94] Sun, J., A.W. Olbrot and M.P. Polis, *Robust Stabilization and Robust Performance Using Model Reference Control and Modelling Error Compensation*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 3, pp. 630-635, March 1994.

[Th94] Theocharis, J. and V. Petridis, *Neural Network Observer for Induction Motor Control*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 14, No. 2, pp. 26-37, April 1994.

[Vi86] Vidyasagar, M., *New Directions of Research in Nonlinear System Theory*, Proceedings of the IEEE, Vol. 74, No 8, pp. 1060-1091, August 1986.

[Vi93] Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, 1993.

[Wi71] Willems, J.C., *Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 621-634, December 1971.

[Wi90] Wilson, D.A., *Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 5, pp. 583-585, May 1990.

[Wr92] Wright, A.S. and W.G. Durtler, *Experimental Performance of an Adaptive Digital*

Linearized Power Amplifier, Vol. 41, No. 4, pp. 395-400, November 1992.

[Ya91] Yaesh, I. and U. Shaked, *Two-Degree-of-Freedom H_∞ -Optimization of Multivariable Feedback Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 11, November 1991.

[Za63] Zames, G., *Functional Analysis Applied to Nonlinear Feedback Systems*, IEEE Transactions on Circuit Theory, September 1963.

[Za81] Zames, G., *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, pp. 301-320, 1981.

[Zh94] Zhou, K., K. Glover, B. Bodenheimer and J. Doyle, *Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives (I): Robust Performance Analysis, (II): Optimal Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 8, pp. 1564-1587, August 1994.

[Zh96] Zhou, K., J.C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.