UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

TOT PROBLEMA TÉ LES SEVES SOLUCIONS
Un estudi sobre la resolució de problemes matemàtics, el discurs i l'autoconcepte matemàtic al programa (En)Raonem en parella

Clara Bastart Jané

TESI DOCTORAL

TOT PROBLEMA TÉ LES SEVES SOLUCIONS

Un estudi sobre la resolució de problemes matemàtics, el discurs i l'autoconcepte matemàtic al programa *(En)Raonem en parella*

Clara Bastart Jané

Directora: Dra. Marta Flores Coll

Tutor: Dr. David Duran Gisbert

[2024]

Programa de Doctorat Interuniversitari de Psicologia de l'Educació
Departament de Psicologia Bàsica, Evolutiva i de l'Educació

TAULA DE CONTINGUTS

ÍNDEX DE TAULES

ÍNDEX DE GRÀFICS

Agraïments

A tots els docents i alumnes dels centres participants d’aquesta recerca.

A tots els membres del GRAI que han col·laborat més directament o més indirectament en el projecte.

Molt especialment, a la Dra. Marta Flores Coll que ha estat acompanyant-me de manera incondicional al llarg de tot aquest llarg viatge.

A tota la meva família, especialment la meva mare, la meva germana i al meu pare (que encara que no hi ha pogut ser fins al final va ser una de les persones que em va engrescar a començar el camí).

A l’Eduard, per ser-hi sempre, i a la nostra filla Júlia que ha començat a estar amb nosaltres a la dura, però bonica etapa final de la tesi.

A tots i totes, gràcies.

Resum

L'estudi presenta dos objectius principals: 1) conèixer si es produeixen canvis en la resolució de problemes matemàtics degut a la implementació del programa *(En)Raonem en parella,* un programa basat en la *tutoria entre iguals per a la resolució de problemes quotidians* i analitzar si l'evolució del discurs matemàtic pot haver contribuït a aquests canvis; i 2) conèixer si es produeixen canvis en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat degut a la implementació del programa (*En)Raonem en parella* i esbrinar quins són els factors que poden haver contribuït a aquests canvis.

Els participants de l'estudi, 181 alumnes, pertanyen a sis centres que van formar part de la xarxa de centres del programa *(En)Raonem en parella* de Catalunya al curs 2020-2021.

Per a la recerca es distribueixen els participants en dos grups. El primer, Grup d'Intervenció 1 (GI 1), són 84 alumnes que van participar en el programa en el seu format habitual; i el segon, Grup d'Intervenció 2 (GI 2), format per 97 alumnes que també van participar en el programa en el format habitual rebent, a més a més, una formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics i per a reforçar l'autoconcepte matemàtic. Per a l'anàlisi de la interacció se selecciona una submostra de 30 alumnes (15 parelles), dels tres centres que formen part del GI 2 (5 parelles de cada centre). Els mestres participants de la submostra que durant el curs van seguir la formació del programa *(En)Raonem en parella,* van ser 4.

Es desenvolupa un disseny mixt seqüencial explicatiu combinant un disseny quasiexperimental (pretest-posttest) amb un estudi qualitatiu amb l'objectiu de poder explicar els canvis que s'observin a nivell quantitatiu.

Els resultats del disseny quasi-experimental indiquen que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella*, tant del GI 1 com del GI 2 i tant tutors com tutorats, presenten millores estadísticament significatives en la variable de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta. A més, el GI 2 mostra millores estadísticament significatives superiors respecte del GI 1. Per contra, no es detecten canvis en el constructe d'autoconcepte matemàtic en cap cas, mostrant una estabilitat del constructe després de participar en el programa.

Els resultats de l'anàlisi del procés de la variable de resolució de problemes matemàtics indiquen que els canvis observats es poden atribuir, a part de a elements propis de la metodologia de tutoria entre iguals utilitzada, a altres factors associats a la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics que van rebre els alumnes del GI 2, com poden ser *formular preguntes*, *explicitar les operacions que faran* o *el procés a seguir*, i que permeten explicar els beneficis d'aquesta formació per a la millora de la competència en resolució de problemes matemàtics. Referent a l'anàlisi del procés de la variable de l'autoconcepte matemàtic, s'han pogut identificar les possibles causes que expliquen l'estabilitat en el constructe, en aquest cas, poden ser l'escassa presència d'intervencions associades a la *verbalització de les seves capacitats*, *dificultats*, *millores*, *actuacions de reconeixement* o la *regulació de les intervencions* al llarg del desenvolupament de les sessions que fa evident la necessitat d'una formació més explícita i perllongada en el temps per observar-hi millores significatives.

Es fan un conjunt de propostes per millorar la pràctica educativa en el context del programa: 1) una guia d'ús per a docents com a model per a poder reforçar l'estratègia que s'ha detectat que s'ha desenvolupat en menys mesura al llarg de les sessions del programa, la de revisió i, 2) el disseny i ús de material específic ampliant la quantitat i varietat d'ítems associats al constructe inclosos en la pauta d'autoavaluació i fent un treball més explícit dels diferents elements que s'han associat a les possibles millores de l'autoconcepte matemàtic al llarg de les sessions de desenvolupament del programa.

Paraules clau: Aprenentatge entre iguals, Tutoria entre iguals, Resolució cooperativa de problemes matemàtics, Discurs matemàtic, Autoconcepte matemàtic

Resumen

El estudio presenta dos objetivos principales: 1) conocer si se producen cambios en la resolución de problemas matemáticos debido a la implementación del programa *Razonar en pareja*, un programa basado en la tutoría entre iguales para la resolución de problemas cotidianos y analizar si la evolución del discurso matemático puede haber contribuido a estos cambios; y 2) conocer si se producen cambios en el autoconcepto matemático del alumnado debido a la implementación del programa *Razonar en pareja* y averiguar cuáles son los factores que pueden haber contribuido a estos cambios.

Los participantes del estudio, 181 alumnos, pertenecen a seis centros que formaron parte de la red de centros del programa *Razonar en pareja* de Catalunya en el curso 2020-2021.

Para la investigación se distribuyen los participantes en dos grupos. El primero, Grupo de Intervención 1 (GI 1), son 84 alumnos que participaron en el programa en su formato habitual; y el segundo, Grupo de Intervención 2 (GI 2), formado por 97 alumnos que también participaron en el programa en el formato habitual recibiendo además una formación específica en estrategias para la resolución de problemas matemáticos y para reforzar el autoconcepto matemático. Para el análisis de la interacción se selecciona una submuestra de 30 alumnos (15 parejas), de los tres centros que forman parte del GI 2 (5 parejas de cada centro). Los maestros participantes de la submuestra que durante el curso siguieron la formación del programa *Razonar en pareja*, fueron 4.

Se desarrolla un diseño mixto secuencial explicativo combinando un diseño cuasiexperimental (pretest-postest) con un estudio cualitativo con el objetivo de poder explicar los cambios que se observen a nivel cuantitativo.

Los resultados del diseño casi-experimental indican que todos los alumnos participantes en el programa *Razonar en pareja*, tanto del GI 1 como del GI 2 y tanto tutores como tutorados, presentan mejoras estadísticamente significativas en la variable de resolución de problemas matemáticos con una medida de efecto alta. Además, el GI 2 muestra mejoras estadísticamente significativas superiores respecto del GI 1. Por el contrario, no se detectan cambios en el constructo de autoconcepto matemático en ningún caso, mostrando una estabilidad del constructo después de participar en el programa.

Los resultados del análisis del proceso de la variable de resolución de problemas matemáticos indican que los cambios observados se pueden atribuir, aparte de a elementos propios de la metodología de tutoría entre iguales utilizada, a otros factores asociados a la formación específica en estrategias discursivas para la resolución de problemas matemáticos que recibieron los alumnos del GI 2, como pueden ser *formular preguntas*, *explicitar las operaciones que harán* o el *proceso a seguir*, y que permiten explicar los beneficios de esta formación para la mejora de la competencia en resolución de problemas matemáticos.
En lo referente al análisis del proceso de la variable del autoconcepto matemático, se han podido identificar las posibles causas que explican la estabilidad en el constructo, en este caso, pueden ser la escasa presencia de intervenciones asociadas a la *verbalización de sus capacidades*, *dificultades*, *mejoras*, *actuaciones de reconocimiento* o la *regulación de las intervenciones* a lo largo del desarrollo de las sesiones que hace evidente la necesidad de una formación más explícita y prolongada en el tiempo para observar mejoras significativas.

Se hacen un conjunto de propuestas para mejorar la práctica educativa en el contexto del programa: 1) una guía de uso para docentes como modelo para poder reforzar la estrategia que se ha detectado que se ha desarrollado en menos medida a lo largo de las sesiones del programa, la de revisión y, 2) el diseño y uso de material específico ampliando la cantidad y variedad de ítems asociados al constructo incluidos en la pauta de autoevaluación y haciendo un trabajo más explícito de los diferentes elementos que se han asociado a las posibles mejoras del autoconcepto matemático a lo largo de las sesiones de desarrollo del programa.

Palabras clave: Aprendizaje entre iguales, Tutoría entre iguales, Resolución cooperativa de problemas matemáticos, Discurso matemático, Autoconcepto matemático

Abstract

The study presents two main objectives: 1) to find out if there are changes in the mathematical problem solving due to the implementation of the *(En)Raonem en parella* programme, a programme based on peer tutoring for solving everyday problems and analyse whether the evolution of the mathematical discourse may have contributed to these changes; and 2) find out if changes occur in the students' mathematical self-concept due to the implementation of the *En(Raonem) en parella* programme and analyse which factors may have contributed to these changes.

The participants of the study, 181 students, belong to six centers that were part of the network of centers of the *(En)Raonem en parella* programme in the 2020-2021 academic year.

For the research, the participants are divided into two groups. The first, Intervention Group 1 (GI 1), are 84 students who participated in the programme in its usual format; and the second, Intervention Group 2 (GI 2), made up of 97 students who also participated in the programme in the usual format receiving, in addition, specific training in strategies for solving mathematical problems and to strengthen the mathematical self-concept. For the analysis of the interaction, a subsample of 30 students (15 pairs) is selected from the three schools that are part of GI 2 (5 pairs from each school). There were 4 participating teachers in the subsample who followed the training of the *(En)Raonem en parella* programme during the course.

A mixed sequential explanatory design is developed combining a quasi-experimental design (pretest-postest) with a qualitative study with the aim of being able to explain the changes observed at a quantitative level.

The results of the quasi-experimental design indicate that all the students participating in the *(En)Raonem en parella* programme, both from GI 1 and GI 2 and both tutors and tutees, show statistically significant improvements in the variable of mathematical problem solving with a high effect size. In addition, GI 2 shows statistically significant improvements over GI 1. Conversely, no changes were detected in the mathematical self-concept construct in any case, showing a stability of the construct after participating in the programme.

The results of the analysis of the process of the mathematical problem solving variable indicate that the changes observed can be attributed, apart from the specific elements of the peer tutoring methodology used, to other factors associated with the specific training in discursive strategies for the resolution of mathematical problems that the GI 2 students received, such as *formulating questions*, *explaining the operations they will do* or *the process to follow*, and which make it possible to explain the benefits of this training for improving competence in solving mathematical problems.
Regarding the analysis of the process of the mathematical self-concept variable, it was possible to identify the possible causes that explain the stability of the construct, in this case, they may be the scarce presence of interventions associated with *verbalization of their abilities*, *difficulties*, *improvements*, *recognition actions* or the *regulation of interventions* throughout the development of the sessions which makes clear the need for more explicit and prolonged training in order to observe significant improvements.

A set of proposals are made to improve educational practice in the context of the programme: 1) a user guide for teachers as a model to be able to reinforce the strategy that has been detected that has been less developed throughout the sessions of the programme, the review, 2) the design and use of specific material expanding the amount and variety of items associated with the construct included in the self-assessment guideline and making a more explicit work of the different elements that have been associated with possible improvements in mathematical self-concept throughout the programme development sessions.

Keywords: Peer learning, Peer tutoring, Cooperative mathematical problem solving, Mathematical discourse, Mathematical self-concept

I. INTRODUCCIÓ

I. INTRODUCCIÓ

1.1. Justificació de la investigació
1.2. Estructura del treball

I. INTRODUCCIÓ

1.1. Justificació de la investigació

En l'actualitat encara trobem molts centres de primària i secundària que presenten una estructura individualista del procés d'ensenyament i aprenentatge, amb una transmissió unidireccional del coneixement del docent a l'alumnat i amb la posada en pràctica d'insuficients metodologies actives i estructures cooperatives d'organització de l'alumnat (Fúneme-Mateus, 2019).

L'ús limitat de mètodes de caràcter cooperatiu genera barreres associades a la possibilitat que els alumnes aprenguin a raonar, a dialogar i a defensar el propi punt de vista de manera argumentada (Serra, 2016). També es detecten dificultats perquè desenvolupin habilitats socials i afectives, així com generar situacions d'ensenyament-aprenentatge emmarcades en un paradigma sòcio-constructivista on la personalització de l'aprenentatge sigui l'eix central del procés (Coll, 2016). És molt difícil que aquestes competències es desenvolupin a qualsevol àrea curricular amb, únicament, una estructura tradicional de l'activitat de l'aula, on cada alumne/a treballa de manera individual o a través del treball conjunt però amb estructures no cooperatives (Espinoza, 2017).

En l'àrea curricular de matemàtiques que ens ocupa, igual que a qualsevol altra disciplina, l'estructuració cooperativa de l'aula facilita, en gran mesura, l'adquisició de les habilitats socials mencionades i permet generar aprenentatges profunds (Sánchez-Cano i Gràcia, 2018). En primer lloc, mentre els alumnes[1] treballen els continguts curriculars matemàtics en equips reduïts o parelles, en un marc d'interacció estructurat pel docent, tenen la possibilitat de desenvolupar habilitats discursives, com preveure els resultats que s'obtindran, decidir entre alternatives o identificar els encerts i els errors propis i dels altres (Serra, 2016). El perfeccionament de les habilitats discursives pot contribuir a la millora de les competències matemàtiques i de manera concreta, al procés de resolució de problemes (Espinoza, 2017). En segon lloc, les estructures cooperatives permeten desenvolupar habilitats socials relacionades amb components actitudinals que poden, alhora, contribuir en el desenvolupament de la competència matemàtica (Molera, 2012).

El discurs matemàtic, doncs, té un paper fonamental en el procés d'aprenentatge matemàtic. Tot i això, no és un aspecte que s'acostumi a tenir en compte en les activitats curriculars de les etapes de primària i secundària. Es tendeix a pensar que els processos associats a les matemàtiques no estan influenciats pels sistemes de pensament verbal (Serra, 2016). Com

[1] Per a facilitar la lectura del text, s'ha optat per utilitzar el masculí genèric, entenent que en tots els casos es fa referència a tots els gèneres.

a conseqüència, existeixen pocs estudis relacionats amb la influència del llenguatge en el desenvolupament de certs elements matemàtics. Les investigacions més recents, però, apunten que les habilitats lingüístiques són un predictor significatiu del procés d'aprenentatge matemàtic, i de manera concreta, del procés de resolució de problemes matemàtics (Chronaki i Planas, 2018; Planas, 2014, 2016, 2018; Planas i Schütte, 2018). Aprendre matemàtiques, doncs, requereix la tria de les opcions metodològiques adequades per a garantir el desenvolupament de les competències associades al discurs matemàtic (Coronado, 2015).

La relació educativa és una relació dialògica, que està basada en el discurs que s'estableix entre l'educador i l'educand, però també, entre els propis alumnes (Pujolàs, 2003). Així doncs, és necessari apostar per metodologies cooperatives (com la tutoria entre iguals) com a camí de desenvolupament de les habilitats discursives de l'alumnat per a la millora del procés de resolució de problemes (Serra, 2016).

Al llarg del present projecte d'investigació s'abordarà la importància de l'ús del discurs matemàtic en contextos didàctics i la influència i beneficis de metodologies basades en l'aprenentatge entre iguals per a l'enriquiment del discurs matemàtic. El primer gran objectiu de la present tesi doctoral és, doncs, conèixer si es produeixen canvis en la resolució de problemes matemàtics degut a la implementació del programa *(En)Raonem en parella,* un programa basat en la *tutoria entre iguals per a la resolució cooperativa de problemes quotidians* (Flores et al., 2016) i analitzar si l'evolució del discurs matemàtic pot haver contribuït a aquests canvis.

Sabem que les creences, les emocions i els sentiments tenen un paper central amb relació a l'èxit i el fracàs en l'aprenentatge de les matemàtiques. Tot i això, en l'àmbit educatiu i escolar, i especialment a la disciplina de matemàtiques, s'ha tendit a donar importància, de manera quasi exclusiva, a factors de caràcter cognitiu (Molera, 2012). Aquesta tendència pedagògica ha provocat en cert alumnat el rebuig i la inseguretat envers les matemàtiques i el procés de resolució de problemes. La investigació coincideix a apuntar que el domini afectiu és un factor indispensable pel desenvolupament de la competència matemàtica (León-Mantero et al., 2020) i que les estructures de caràcter cooperatiu afavoreixen la millora de les actituds envers les matemàtiques (Campit i Garin, 2017).

Al llarg del present projecte d'investigació s'abordaran, també, els beneficis pedagògics de l'aprenentatge entre iguals, la importància dels elements afectius en contextos didàctics i els beneficis de les metodologies cooperatives per a la millora de les actituds envers les matemàtiques. El segon gran objectiu de la tesi doctoral és, doncs, conèixer si es produeixen canvis en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat degut a la implementació del programa *En(Raonem) en parella* (Flores et al., 2016) i esbrinar quins són els factors que poden haver contribuït a aquests canvis.

1.2. Estructura del treball

El treball d'investigació està estructurat en diferents apartats. Primerament, la presentació del marc teòric que fonamenta tot el procés de recerca. El marc teòric presenta diferents parts. Es comença amb l'apartat d'aprenentatge entre iguals on s'exposen: els fonaments teòrics, els models teòrics interpretatius, l'evolució de la investigació, les dimensions, l'aprenentatge cooperatiu, la tutoria entre iguals, i finalment, es presenta el programa *(En)Raonem en parella* i els resultats preliminars de recerca. Seguidament, es presenta l'apartat de resolució cooperativa de problemes matemàtics on es revisen: les concepcions psicològiques, la competència matemàtica, el desenvolupament del discurs matemàtic i la construcció de l'autoconcepte matemàtic. El segon gran bloc és el treball d'investigació amb els objectius, hipòtesis i preguntes. Finalment, s'exposen el mètode, els resultats i les conclusions extretes de tot el procés de recerca.

II. MARC TEÒRIC

II. MARC TEÒRIC

2. Aprenentatge entre iguals. Tutoria entre iguals

2.1. Interacció entre iguals i aprenentatge: consideracions prèvies en la revisió de la literatura

Actualment, ens trobem davant la transformació del paradigma educatiu, des d'un procés centrat exclusivament en l'ensenyament, en un altre centrat en l'estudiant i el seu procés d'aprenentatge (Juárez et al., 2019; Villagra-Bravo i Valdebenito, 2019). Sota aquest paradigma, el professorat ofereix als seus estudiants més oportunitats per a la construcció del seu coneixement i propícia una gestió metacognitiva del procés d'aprenentatge. Estructurar les interaccions dels individus a través de mètodes d'aprenentatge cooperatiu brinda oportunitats de construcció del coneixement als estudiants a través del diàleg, la reflexió i la negociació de significats (Sellet, 2020).

Per conceptualitzar el camp de coneixement ens proposem presentar els tipus d'aprenentatge entre iguals i les seves particularitats -a través de les aportacions de diferents autors al llarg del temps. Damon i Phelps (1989) distingeixen entre diferents tipus d'aprenentatge entre iguals basant-se en les característiques dels membres, els objectius i el tipus d'interacció i establint un continu entre la tutoria entre iguals, l'aprenentatge cooperatiu i l'aprenentatge col·laboratiu. Segons els autors, l'aprenentatge cooperatiu, a diferència del col·laboratiu, constitueix una forma d'interacció més estructurada on el professor actua com a organitzador i facilitador de l'activitat i s'encarrega del disseny específic de l'objectiu a aconseguir. En canvi, en l'aprenentatge col·laboratiu els estudiants han de disposar de les habilitats per estructurar el seu propi procés d'aprenentatge. La tutoria entre iguals estructura l'alumnat en parella (amb dos rols diferents) i el grau de gestió i organització del docent està al nivell de l'aprenentatge cooperatiu.

Alguns dels autors que han fet un treball més exhaustiu en l'àmbit de l'aprenentatge entre iguals, en una línia pròxima a l'anterior, apunten que l'aprenentatge cooperatiu i la tutoria entre iguals (a diferència de l'aprenentatge col·laboratiu) requereixen un procés d'estructuració de la interacció entre l'alumnat per a generar processos d'aprenentatge rics i funcionals. Així mateix, apunten els principis (Johnson i Johnson, 2002) requerits per a un correcte funcionament de la metodologia i determinen alguns mètodes i tècniques per a concretar els principis més generals en pràctiques pedagògiques concretes (Kagan, 2002).

Valdebenito i Duran (2015), per la seva part, afirmen que en l'aprenentatge col·laboratiu els propis participants: 1) organitzen la interacció dins del grup; 2) trien als seus companys o col·legues; 3) tenen una motivació alta per a aconseguir l'objectiu; i 4) disposen d'habilitats socials per a treballar en equip. En aquesta direcció, Duran i Monereo (2008) apunten que l'aprenentatge col·laboratiu es caracteritza per un format menys estructurat i més simètric, on: 1) les tasques són definides pels integrants (no pel professorat); 2) la responsabilitat és individual i grupal (mentre que en el cooperatiu es divideix entre els components del grup); i 3) el treball és conjunt.

Segons Domingo (2008), entre els beneficis de l'aprenentatge cooperatiu destaca que els estudiants s'involucren en el seu propi procés d'aprenentatge, s'impliquen en la matèria d'estudi i amb els seus iguals, i incrementen el nivell d'aprenentatge mitjançant la interacció. En aquesta línia, Slavin (1995) explica que en utilitzar-lo es milloren el rendiment i les relacions interpersonals, es desenvolupen destreses de pensament i s'incrementen les habilitats d'ajuda mútua. Altres treballs revelen la seva influència en la millora del desenvolupament acadèmic, personal i social de l'alumnat (Pérez i Poveda, 2008; Santos i Slavin, 2002).

Santos et al. (2009) al·ludeixen al concepte d'aprenentatge cooperatiu i els seus efectes positius en un enfocament pedagògic en el qual hi ha un alt nivell d'estructuració de l'aprenentatge, permetent que els alumnes en equips heterogenis, puguin treballar junts per a l'assoliment d'una meta compartida en el mateix procés d'aprenentatge. Per tant, cada estudiant es responsabilitza no de manera única i exclusiva del seu aprenentatge, sinó també del dels altres membres del grup. Amb una bona estructuració del treball conjunt es poden generar beneficis d'aprenentatge per a tots els membres de l'equip o la parella (Topping, 2000).

Des d'una perspectiva pròxima a l'anterior, es determina que l'aprenentatge cooperatiu és un enfocament pedagògic on els estudiants treballen en petits equips heterogenis per a aconseguir una meta comuna (Castellaro i Peralta, 2020; Martínez , 2013). L'autor indica que l'aprenentatge cooperatiu és una estratègia o una metodologia que promou de manera activa la participació de l'alumnat, basat en l'ajuda mútua i sota la direcció activa del professorat. Per consegüent, es tracta d'un mètode didàctic on l'aprenentatge és de tots i per a tots.

Des del punt de vista de l'atenció educativa inclusiva, l'aprenentatge cooperatiu impulsa actituds més positives cap a la diferència. Així mateix, treballar en estructures cooperatives augmenta la sensibilitat social i l'empatia cap als altres, s'assumeix la capacitat de lideratge, cooperació, solidaritat i cerca del bé comú (UNESCO, 2015), i disminueix l'egocentrisme (Martínez, 2013; Valdebenito i Duran, 2013). El treball d'Oberto (2014), conclou que l'aprenentatge cooperatiu és important perquè: 1) permet a l'alumnat desenvolupar habilitats socials i 2) possibilita al professorat augmentar el rendiment dels estudiants i assegurar l'assoliment dels objectius didàctics.

2.2. Fonaments teòrics de l'aprenentatge entre iguals

En les darreres dècades, s'han realitzat un gran nombre d'investigacions que estudien els efectes de l'aprenentatge entre iguals en l'assoliment acadèmic dels estudiants (Sharan et al., 1979; Slavin, 1983; Slavin et al., 2003), incloent-hi diversos metanàlisis (Kyndt et al., 2013; Roseth et al., 2008). Aquests estudis aporten evidències que l'aprenentatge cooperatiu pot conduir a la millora del desenvolupament cognitiu dels estudiants (Kyndt et al., 2013; Roseth et al., 2008). Les recerques apunten que per tenir èxit dins i fora de l'escola, l'alumnat ha d'aprendre a cooperar, cosa que fa que les habilitats per treballar junts siguin un objectiu educatiu primordial (Barron, 2003; Blatchford et al., 2006; Gillies, 2014).

En la línia del que apunten Veldman et al. (2020) en les converses exploratòries, els infants es relacionen de manera constructiva amb les idees dels altres. El procés reflexiu i de raonament aflora en el diàleg que s'estableix (Mercer et al., 1999). És necessària la participació de tots els membres del grup quan els alumnes treballen entre iguals. Tots els membres han de contribuir al procés d'aprenentatge grupal, cosa que significa que s'han de superar situacions com l'efecte *free-Rider* (Karau i Williams, 1993; Slavin et al., 2003). El treball en grup adequat depèn de la confiança, la sensibilitat i el respecte dels alumnes (Baines et al., 2008; Galton i Hargreaves, 2009; Kutnick et al., 2008). Gillies (2004) va evidenciar que oferir als alumnes l'oportunitat de treballar conjuntament de forma cooperativa en equips d'aprenentatge, sempre ben estructurats, els anima a desenvolupar comportaments socials que fomentin la participació en les activitats col·lectives.

La implementació de l'aprenentatge cooperatiu pot resultar particularment complexa en els cursos inicials de l'educació primària, ja que es necessita més orientació per part del professorat (Battistich i Watson, 2003). Ara bé, trobem aportacions d'estudis recents que mostren la millora del comportament en el treball en grup d'alumnes de primària en edats primerenques mitjançant bones estructures d'aprenentatge cooperatiu (Blatchford et al., 2006; Gillies, 2004; Kutnick et al., 2008; Tolmie et al., 2010).

La pràctica general i habitual en què els estudiants treballen majoritàriament *en grup*, però no *com a equip* han de ser qüestionades (Baines et al., 2008; Galton i Hargreaves, 2009; Veenman et al., 2000). Les investigacions futures, doncs, haurien de tenir en compte els reptes i barreres que pot experimentar el professorat quan implementa l'aprenentatge cooperatiu a les seves aules, en particular pel que fa a la implementació de l'aprenentatge cooperatiu a les edats primerenques de l'educació primària.

2.3. Models teòrics interpretatius

2.3.1. Teories explicatives de l'aprenentatge entre iguals

Les aportacions teòriques associades a la cooperació i l'aprenentatge entre iguals tenen una llarga tradició i trajectòria en l'àmbit de la recerca en psicologia i educació (Escudero et al., 2000; Melero i Fernández, 1995; Pérez et al., 2022; Roselli, 2016; Strijbos i Fischer, 2007).

Trobem dos corrents teòrics principals associats a l'aprenentatge entre iguals: per un costat, la línia de recerca sobre cooperació que és bàsicament anglosaxona; els germans Johnson i Slavin són els seus representants principals. Per l'altre, l'enfocament que s'associa a l'aprenentatge col·laboratiu (Bruffe, 1993).

Les tres teories principals, associades al procés d'ensenyament i aprenentatge entre iguals són: la teoria del conflicte sòcio-cognitiu, la teoria de la intersubjectivitat i la teoria de la cognició distribuïda (Cubero i Rubio, 2005; Hollan et al., 1999; Roselli, 2016). Per a la primera teoria, que parteix de les aportacions de Piaget (1979) el conflicte sòcio-cognitiu constitueix el factor determinant del desenvolupament intel·lectual (Roselli, 2016; Venet-Muñoz i Calvas-Ojeda, 2022). Aquest es vehicula en el sí de la interacció social, fonamentalment en contextos de cooperació entre iguals. Només a través del coneixement de les perspectives alienes, el subjecte pot modificar els seus propis esquemes. No es tracta d'un coneixement estàtic, sinó d'una negociació activa amb el(els) altre(s).

En relació amb la segona teoria, la interacció amb els altres (i la interacció del subjecte amb ell mateix) és bàsicament dialògica, ja que es tracta d'una interactivitat mediada pel llenguatge i altres sistemes simbòlics (Vygotsky, 1979). La consciència (com a fenomen intrapsicològic) emergeix, doncs, de la intersubjectivitat (Wertsch, 1988), entesa aquesta com a comunicació mediada (Cubero i Rubio, 2005; Santigosa, 2005). Es remarca la importància de la bastida i l'ajuda mútua, la complementació de rols i la regulació de l'activitat.

Finalment, la teoria de la cognició distribuïda apunta que la idea fonamental és que el processament d'informació que es realitza a escala humana no és un fenomen exclusivament individual, mental o intern. La cognició humana està ancorada en el context social i cultural en el qual ocorre (en aquest sentit, es parla de cognició situada) i, per això, el funcionament cognitiu no ha de considerar-se en termes de consciència individual, sinó *distribuït* entorn d'agents socials que intervenen (Salomon, 2001).

2.3.2. Propostes d'un marc teòric integrat

El que permet aquesta perspectiva és tenir en compte les aportacions de diferents autors per a poder establir unes bases conceptuals ben fonamentades i connectades.

Murray (1994) planteja la teoria de l'aprenentatge social, a partir, sobretot, dels treballs de Johnson i Slavin. Aquesta teoria es fonamenta en dos principis: la interdependència positiva (treballar tots els membres de l'equip per un mateix objectiu) i el reconeixement social del treball per part de tots els membres. L'autor considera que aquestes dues condicions són les que garanteixen l'èxit de les pràctiques educatives cooperatives.

Per altra banda, Slavin (1996) se centra a revisar, sintetitzar i classificar en tres categories els mètodes cooperatius tenint en compte les perspectives teòriques en què es fonamenten. Aquesta revisió permet a l'autor plantejar els tres components responsables de l'aprenentatge entre iguals:

- Les *perspectives motivacionals* que es basen en la promoció de la interdependència positiva entre els components de l'equip i la responsabilitat individual a partir de l'estructura de recompensa o de fita. Es tracta de mètodes en què els estudiants ajuden als seus companys d'equip a aprendre perquè és positiu pels seus interessos. Els principals autors que fan propostes d'aquests tipus de dissenys són: el mateix Slavin i els seus col·laboradors, Devries i Edwards (1986) amb l'*Student Team Learning* i els germans Johnson i Johnson (1991) amb el *Learning Together*.
- Les *perspectives de cohesió social* es fonamenten en la unitat de l'equip per assolir l'èxit. Els membres de l'equip s'ajuden els uns als altres perquè senten que en formen part i se'n preocupen. Es substitueixen els incentius externs per a la promoció de l'autoavaluació del grup durant i al final del procés. Es crea la interdependència a partir de la distribució del treball en rols i també per la distribució dels recursos. Es basen en la divisió del treball i en la responsabilitat dels membres del grup. Els autors i treballs respectius que representen aquesta línia de mètodes cooperatius són: *Jigsaw* d'Aronson et al. (1978), *Complex Instruction* de Cohen et al. (1994) i *Group Investigation* de Sharan i Sharan (1994).
- En el darrer lloc d'aquesta classificació de Slavin, trobem les *perspectives cognitives* que se centren, bàsicament, en la certesa que els processos cognitius i les interaccions entre iguals són els màxims responsables dels aprenentatges. Des

d'aquesta perspectiva es planteja una distinció interna. Per una banda, la *perspectiva del desenvolupament* que quedaria fonamentada en les teories de caràcter genètic i sociocultural. Per l'altra, les que se sustentarien en *l'elaboració cognitiva*, que manté la necessària implicació de l'alumne/a en la reestructuració cognitiva o elaboració per tal de fixar la informació i poder establir relacions amb els esquemes ja existents.

Apunta Slavin (1996) que les perspectives revisades no són antagòniques, sinó que es complementen, ja que cada un dels components principals que les defineixen (motivació, cohesió de grup i processament cognitiu) són factors necessaris per poder explicar els efectes que els mètodes d'aprenentatge cooperatiu tenen sobre el rendiment dels alumnes.

Topping i Ehly (2001), per la seva banda, plantegen un altre model teòric explicatiu amb una proposta de classificació en cinc categories generals:

- Organització i compromís: inclou característiques organitzatives i estructurals de l'aprenentatge entre iguals. Aspectes com el temps de dedicació a la tasca, la formulació d'objectius i l'elaboració de plans de treball comuns, la individualització de l'aprenentatge i la immediatesa de la retroalimentació del grup. Aspectes que promouen un compromís més elevat envers la tasca plantejada i que estimula noves formes d'interacció.
- Conflicte cognitiu: es relaciona amb el conflicte sociocognitiu prenent com a base la teoria de Piaget. Els alumnes reflexionen en comú, la qual cosa pot influir en l'activitat cognitiva individual, provocant la modificació de les pròpies idees en confrontació amb els punts de vista dels altres i promoure, d'aquesta manera, l'aprenentatge.
- Bastida i gestió de l'error: fa referència al suport que pot construir un individu més competent envers un altre. Exigeix la gestió de les activitats dins de la Zona de Desenvolupament Proper (Vygotsky, 1979) i guanys per a tots els participants. El seguiment del procés d'aprenentatge permet donar suport i corregir els errors de manera instantània, la qual cosa reverteix en els progressos observats tant en aprenents com en mediadors.
- Comunicació: l'aprenentatge entre iguals requereix un alt nivell d'habilitats de comunicació, tant pels que són mediadors com pels aprenents. Els conceptes apresos es poden reafirmar o entendre's amb més profunditat si s'expliquen a un altre. Segons Vygotsky, aquest seria el procés de cristal·lització del pensament a través del llenguatge. Es requereixen habilitats de comunicació que es poden exercitar i desenvolupar conversant, escoltant, qüestionant, preguntant, resumint, hipotetitzant, aclarint, revisant i simplificant.

- Afecte: aquest és un component molt destacat. Una relació de confiança amb un company pot facilitar la manifestació de l'error i permetre, d'aquesta manera, la correcció. L'actitud d'entusiasme per part del mediador, la competència i la possibilitat d'èxit pot influenciar en la confiança de l'aprenent. A més a més, el sentit de lleialtat i de regulació entre un i altre pot ajudar a mantenir a la parella o equip d'estudiants motivats en la tasca.

El model plantejat per aquests autors és força més complex que els anteriors. A partir d'aquestes cinc categories es planteja que el desenvolupament es produeix per processos d'ajustament i reestructuració que afavoreixen l'ampliació de les capacitats ja existents i la co-construcció cognitiva i intersubjectiva.

Finalment, es presenta la proposta que plantegen Johnson i Johnson (2009) amb la teoria de la interdependència social. Aquests autors proposen cinc variables mediadores de la interacció entre iguals que possibilitarien l'efectivitat de l'aprenentatge cooperatiu. Aquestes són:

- Interdependència positiva (*positive interdependence*).
- Responsabilitat individual i de grup (*individual and group accountability*).
- Interacció promotiva o cara a cara (*promotive interaction*).
- Ús òptim de les habilitats socials (*appropriate use of social skills*).
- Autoreflexió de grup (*group processing*).

Es farà una anàlisi d'aquestes condicions en profunditat en l'apartat de l'aprenentatge cooperatiu. Cal dir que aquestes condicions són força acceptades per la comunitat científica com a aspectes clau que afavoreixen l'aprenentatge cooperatiu. Veient la complexitat i la diversitat de variables que intervenen en els processos d'aprenentatge entre iguals, considerem important tenir en compte les diferents perspectives per a constituir un marc teòric integrat.

2.4. Aprenentatge cooperatiu

La utilització de l'aprenentatge cooperatiu com a metodologia i pràctica alternativa a l'ensenyament tradicional ha demostrat la seva eficàcia en centenars d'estudis a tot el món (Slavin, 2011). S'estima que són tan importants les seves aportacions que és considerat com una eina metodològica capaç de donar resposta a les diferents necessitats que presenten els individus del segle XXI (Johnson i Johnson, 2009). Tal com apunta Riera (2011) es tracta d'un recurs imprescindible per a una educació inclusiva, un contingut a aprendre i una metodologia essencial per a tenir en compte la pluralitat de les diferències individuals i realitats personals.

L'aprenentatge cooperatiu es considera, actualment, un mètode que és apte per a, entre altres aspectes: 1) respondre a les necessitats de tot l'alumnat i promoure que tots i totes puguin participar i sentir-se valorats (Pujolàs, 2008, 2012); 2) aportar al professorat una metodologia útil que li permeti superar aspectes com la dificultat d'adaptació a la diversitat, el comportament disruptiu o la falta de motivació cap a l'aprenentatge (Catalán et al., 2023; Gillies i Boyle, 2006); i 3) generar un clima favorable a l'aula per a la inclusió real de l'alumnat nouvingut (León et al., 2012).

Diferents recerques (Bertucci et al., 2010; Gillies, 2003; Johnson i Johnson, 2005, 2008; Slavin, 2011; Tran i Lewis, 2012) evidencien que els estudiants que es formen utilitzant estructures de treball cooperatiu (de qualsevol nivell educatiu) tenen beneficis afectius i psicològics. Bertucci et al. (2010) també van destacar que l'aprenentatge cooperatiu millora les habilitats socials com la comunicació, la presentació, la resolució de problemes, el lideratge, la delegació i l'organització dels estudiants; desenvolupa les capacitats cognitives, lingüístiques i socials (Killen, 2007); i ofereix oportunitats als estudiants per intercanviar explicacions amb altres persones (Johnson i Johnson, 2009).

Un estudi recent (Tran et al., 2019) mostra com els estudiants són més eficaços a l’hora de gestionar el seu temps i entorn d’estudi, regular el seu esforç i atenció, donar suport als altres, ensenyar, recitar o anomenar ítems i crear connexions internes entre els conceptes a aprendre, construir connexions entre informacions, aplicar coneixements previs a noves situacions i elaborar idees sobre els conceptes treballats en el procés d’aprenentatge. Per últim, encara que en podríem enumerar altres, l’estudi de Johnson i Johnson l’any 2009 indica que els alumnes participants en la investigació mostren una alt participació en el procés d’aprenentatge, presenten una bona gestió de recursos i estratègies cognitives i metacognitives.

2.4.1. Condicions i finalitats de l’aprenentatge cooperatiu

En aquest apartat es presenta l'evolució que ha tingut el concepte d’aprenentatge cooperatiu des de la seva aparició en la literatura especialitzada i es descriuen els diferents elements que la conformen (Azorín, 2018; Fuentes et al., 2023; Medina, 2021). Les diferents recerques que ofereix la literatura sobre aquesta temàtica posen de manifest les condicions i finalitats que se li han assignat a l'aprenentatge cooperatiu en la línia del temps que va des de finals dels anys quaranta del segle XX, quan aquest mètode es conceptualitzava pròxim a la cerca de l'eficiència, fins als nostres dies, que es valora com a estratègia per a la inclusió.

Una de les condicions que es proposa per un correcte funcionament de l'aprenentatge cooperatiu és que els professors estructurin adequadament la interacció. Els docents saben que si no s'organitza la interacció del grup perquè es converteixi en un equip, i es donin situacions d'aprenentatge cooperatiu, és molt probable que alguns estudiants no participin i altres desenvolupin totes les tasques (Topping et al., 2017). No n'hi ha prou a posar alumnes junts i demanar-los que treballin conjuntament perquè hi hagi aprenentatge. L'estructuració és una eina d'ajuda pedagògica. Gràcies a aquesta ajuda els estudiants tenen l'oportunitat d'aprendre amb els altres. De totes maneres, els estudis pedagògics demostren que és important anar retirant gradualment l'estructuració a mesura que els alumnes van aprenent a cooperar. Aprendre a cooperar és una competència central a tots els nivells educatius, també a la universitat (Bruffe, 1995).

Johnson et al. (1999) i més tard Johnson i Johnson (2009), enumeren cinc condicions que fan possible que la cooperació funcioni i sigui efectiva. Segons Monereo i Duran (2001), aquestes condicions són les que permeten convertir el grup en un equip, transformant d'aquesta manera, l'activitat grupal en cooperativa.

- Interdependència positiva (*positive interdependence*).

L'èxit de cada membre de l'equip està lligat al de la resta de membres del grup i a la inversa. Es basa en la concepció que l'esforç i el treball de tot l'equip genera millors resultats que l'esforç individual. Hi ha evidències que la interacció per sí sola és insuficient per millorar la productivitat i per això es requereix que es generi interdependència per aconseguir-la. Pot haver-hi interdependència de resultats (objectius i recompenses), interdependència de mitjans (recursos, rols i tasques) i interdependència dels límits (normes). La interdependència positiva va més enllà de la simple motivació dels individus per treballar amb entusiasme i confiança i fer una feina de qualitat, facilitant el desenvolupament de nous punts de vista i descobriments i utilitzant estratègies que incorporen nivells complexos de raonament.

- Responsabilitat individual (*individual accountability*) i de grup.

La interdependència positiva que uneix els membres del grup a mantenir-se junts fa que es generin sentiments de responsabilitat cap a la resolució de la tasca compartida i també per facilitar el treball dels altres membres. També s'observa que quan el rendiment de la persona afecta els altres membres de l'equip, aquesta se sent responsable envers elles i envers la seva persona. Cal tenir en compte que com més gran és l'equip, la difusió de responsabilitats pot créixer; els membres tendeixen a comunicar-se amb menys freqüència i es pot produir una reducció de la quantitat d'informació a treballar, la qual cosa pot fer disminuir la qualitat de la tasca. El menor nombre de membres de l'equip fa augmentar la responsabilitat individual.

- Interacció promotiva o cara a cara (*promotive interaction*).

La interdependència positiva es produeix com a resultat de la promoció de la interacció. La interacció pren força quan els membres del grup encoratgen i faciliten els esforços de cada un dels seus companys per poder complir els objectius del grup. Els autors fan un recull d'actuacions i actituds que afavoreixen la comunicació i que, en certa manera, condueixen a la promoció de la interacció. Algunes d'elles són: persones que actuen de manera confiada ajudant de manera eficaç als altres companys de grup; les que faciliten també l'intercanvi de recursos necessaris, per exemple, informació i materials; persones que es mostren motivades per generar benefici mutu; persones que tenen baixos nivells d'ansietat i estrès, però que tenen un nivell moderat de motivació en l'assoliment dels objectius de grup; persones que ofereixen un *feedback* constant als companys per tal d'anar millorant en les tasques assignades i en les responsabilitats i, en darrer lloc, persones que qüestionen raonablement els arguments i conclusions dels altres amb la finalitat de promoure el pensament profund i la creativitat de les decisions a prendre.

- Ús òptim d'habilitats socials (*appropriate use of social skills*).

La cooperació efectiva es basa en el bon domini de les habilitats de treball en grup. Els estudiants han de ser entrenats en l'ús de les habilitats interpersonals i de treball en petit equip necessàries per garantir una cooperació d'alta qualitat i estar motivats a usar-les. Les habilitats bàsiques que esmenten són: conèixer i confiar en els altres, comunicar-se amb precisió i sense ambigüitats, acceptar i donar-se suport l'un a l'altre i resoldre els conflictes de manera constructiva. No només les habilitats socials són les responsables d'alts nivells d'èxit, però sí que contribueixen a construir relacions més positives entre els membres del grup.

- Autoreflexió de grup (*group processing*).

Per assolir els objectius del grup, cal engegar processos d'autoreflexió que permetin millorar l'eficàcia dels processos engegats. Els processos d'autoreflexió giren, en primer lloc, al voltant de la reflexió sobre les accions que s'han realitzat i el seu grau d'utilitat envers la tasca i els objectius a assolir i, en segon lloc, a la presa de decisions sobre les accions a fer o les que cal canviar per millorar l'efectivitat. Durant l'autoreflexió d'equip s'espera un respecte per les contribucions i esforços dels companys. Aquestes expressions de respecte dins del grup fan millorar, també, l'autoconcepte i autoestima de l'equip i reforçar, en certa manera, la implicació i pertinença.

Aquestes condicions han estat majoritàriament acceptades per la comunitat científica tot i que alguns autors han fet algunes aportacions per tal d'ajustar-les. Destaquem la proposta de Kagan i Kagan (2009) en el que ells anomenen els principis bàsics de l'aprenentatge cooperatiu o *PIES. PIES* és l'acrònim de quatre principis bàsics fonamentals per a l'aprenentatge cooperatiu i es refereixen a P – *Positive Interdependence*, I – *Individual Accountability*, E – *Equal Participation*, i S – *Simultaneous Interaction.* Segons aquests autors aquests principis són l'essència d'aquest tipus d'aprenentatge i permeten distingir-lo d'altres formes d'aprenentatge i, a més a més, els consideren fonamentals per a l'èxit de l'aprenentatge cooperatiu.

- *Positive Interdependence*: la correlació positiva de resultats es produeix quan l'èxit d'un dels estudiants està necessàriament lligat a l'èxit d'un altre. Aquesta dependència genera una força que condueix cap a l'assoliment dels objectius al mateix temps que promou entre els estudiants la consolidació d'una comunitat de suport a l'aprenentatge, creant una aula cooperativa. La interdependència, segon concepte d'aquest principi, es configura com la necessitat d'aportar alguna cosa a l'equip per tal de poder assolir els objectius proposats. No es poden finalitzar les tasques sense l'aportació de la part de cada membre de l'equip.
- *Individual Accountability*: es concreta en la necessitat que tots els estudiants facin la seva aportació a l'equip i es responsabilitzin de la seva tasca. Es tracta d'evitar, amb una estructura adequada, les desigualtats que es podrien produir en l'aportació individual de treball a l'equip.
- *Equal Participation*: es focalitza en la necessària participació i compromís de tots els estudiants en el procés d'aprenentatge. Si no participen tots, no es pot garantir l'aprenentatge. Intenta contrastar, d'aquesta manera, amb la situació tradicional d'aprenentatge en la qual només hi participen uns quants, generalment els que tenen més capacitat, i els altres, els que mostren alguna dificultat, no participen. Per això, l'estructura de l'activitat ha de contemplar aquest principi propiciant la participació de cada un dels membres de l'equip.
- *Simultaneous Interaction,* el darrer principi plantejat pels autors, ressalta el fet que, treballant en equip, la disposició de temps de què disposa cada estudiant per a la participació en l'activitat d'aprenentatge augmenta considerablement respecte a una situació d'aula tradicional en la qual el professorat ocupa la major part del temps

parlant. D'aquesta manera, els alumnes disposen de tot el temps per interaccionar entre ells.

Aquestes condicions o principis bàsics, tal com els anomenen Kagan i Kagan, són, com hem pogut veure, força coincidents amb les condicions plantejades per Johnson i Johnson. Kagan i Kagan, però, insisteixen en l'equitat de la participació (que pot ser desigual però igualment necessària) i també en la simultaneïtat de la interacció que els altres autors també recullen tot i que no de manera tan explícita.

Les finalitats que contempla l'aprenentatge cooperatiu (Johnson i Johnson, 1991; Kagan, 1992) són: 1) la correlació positiva d'assoliments; 2) l'adquisició d'objectius compartits; 3) el desenvolupament de processos d'interacció; 4) la cooperació com a element clau per a l'aprenentatge; i 5) la resposta a la diversitat.

- La correlació positiva d'assoliments (condicional): la situació social cooperativa és aquella situació en la qual les metes dels individus separats van tan unides que existeix una correlació positiva entre els seus assoliments, de manera que un individu aconsegueix el seu objectiu només si els altres membres també aconsegueixen el seu.
- L'adquisició d'objectius compartits (grupal): per a Johnson i Johnson (1991), cooperar significa treballar junts per a assolir objectius compartits. Posteriorment, Johnson et al. (2013) amplien aquesta definició indicant que l'aprenentatge cooperatiu consisteix en la formació d'equips petits amb l'objectiu que els estudiants treballin junts i maximitzin el seu propi aprenentatge i el dels altres, la qual cosa implica, intrínsecament, l'adquisició de continguts curriculars juntament amb el desenvolupament d'habilitats associades.
- El desenvolupament de processos d'interacció (relacional): Kagan (1992) sosté que l'aprenentatge cooperatiu té a veure amb una sèrie d'estratègies instruccionals que inclouen la interacció cooperativa d'estudiant a estudiant. En aquesta mateixa línia, Lobato (1998) entén l'aprenentatge cooperatiu com un enfocament interactiu que implica que els estudiants aprenguin els uns dels altres.
- La cooperació com a element clau per a l'aprenentatge (motivacional): per a Pujolàs (2004, 2008), l'estructuració cooperativa de l'aprenentatge suposa l'organització de la classe/ús didàctic de tal manera que els alumnes tinguin l'oportunitat de cooperar (ajudar-se els uns als altres) per a aprendre millor els continguts escolars, i aprendre al mateix temps a treballar en equip.

- La resposta a la diversitat (inclusiu): a) la diversitat com un aspecte natural i inherent a la humanitat; b) la diferència com un valor i c) l'ensenyament com un repte al qual s'enfronta el professorat, que ha de garantir una resposta de qualitat. L'aprenentatge cooperatiu és considerat una de les eines que posa en marxa i desenvolupa la transmissió d'aquests valors indispensables per a la vida en societat, una societat diversa quant a aptituds, creences i cultures.

Finalment, més recentment, Fernández (2017) aporta el denominat cicle de l'aprenentatge cooperatiu, que consta de tres fases, imbricades les unes en les altres:

- Creació i cohesió de grup. L'objectiu principal d'aquesta fase és construir grups/classes on tots els estudiants aprenguin que poden treballar els uns amb els altres, mentre comencen a experimentar els beneficis de cooperar amb altres persones. Aquesta primera fase es divideix en quatre subfases: presentació, trencaglaç, confiança i autoconeixement.
- L'aprenentatge cooperatiu com a contingut per a ensenyar i aprendre. El propòsit d'aquesta fase és ensenyar a l'alumnat a usar aquest mètode a través de fàcils i simples tècniques.
- L'aprenentatge cooperatiu com a recurs per a ensenyar i aprendre. Si el docent ha seguit el cicle, en aquest punt els estudiants ja tenen certa experiència de treball en contextos cooperatius; per tant, poden plantejar-se estructures de classe on ells es vegin reforçats en cooperar de manera regular.

Al llarg del present apartat s'han anat apuntant les finalitats, condicions i posicionaments de diferents autors en relació a l'aprenentatge entre iguals. Ara bé, volem concloure apuntant que des de la perspectiva teòrica en que se situa aquest treball i marc conceptual entenem que l'aprenentatge cooperatiu no ha de ser plantejat en fases diferents, sinó construït d'una manera integrada (desenvolupant les diferents fases de manera recursiva des del primer moment d'ús del plantejament pedagògic).

2.4.2. Mètodes, tècniques i tipus d'aprenentatge cooperatiu

Un cop vistes les condicions i finalitats essencials que aporten aquests autors i que han de ser presents en tota situació d'aprenentatge cooperatiu, farem una selecció d'alguns mètodes cooperatius que han tingut major repercussió en l'àmbit escolar i que comparteixen alguna similitud amb el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016), ja sigui per l'estructura de la interacció que proposen o bé, perquè se centren en l'objectiu de millorar la competència matemàtica.

Per poder organitzar la interacció entre iguals ens cal disposar de plantejaments didàctics que estructurin i ordenin d'alguna manera les interaccions per tal que siguin generadores d'aprenentatges. Amb aquesta finalitat, s'han anat dissenyant diferents propostes que ho facilitin i que alguns autors han anomenat estructures perquè són habitualment lliures de contingut (Duran, 2012). D'entre aquestes estructures, podríem distingir dues categories segons el nivell de complexitat de la pròpia proposta: mètodes i tècniques.

Els mètodes són les estructures més complexes que requereixen més temps per al seu desenvolupament i un procés de formació inicial de l'alumnat força acurat. Cal destacar que els mètodes d'aprenentatge cooperatiu són dissenys amb una estructura predeterminada, però no fixa ni inamovible. Per això, el seu ús ha de ser creatiu i adaptable i ha de possibilitar poder-los combinar, ajustar, reordenar o canviar segons la realitat que tinguem al davant. És per això que segons les condicions, els alumnes i les necessitats caldrà utilitzar-los de manera estratègica per tal de poder ajustar-los a la realitat de cada moment (Monereo i Duran, 2001).

Les tècniques, en canvi, són estructures més simples que poden aplicar-se de manera esporàdica perquè no requereixen cap preparació per part dels alumnes i, per tant, poden desenvolupar-se en qualsevol moment. Les tècniques es poden utilitzar tal qual s'expliciten i els mètodes requereixen una apropiació per part del professorat per tal de poder desenvolupar-los a l'aula, fet que comporta conèixer a fons els fonaments conceptuals per ajustar-los de la pròpia realitat (Echeita, 1995), com és el cas del mètode de *tutoria entre iguals.*

Segons Slavin (1995), l'*Student Team Learning*, desenvolupat a la Universitat John Hopkins comprèn diferents mètodes com són:

- *Student Teams-Achievement Division* (*STAD*).
- *Teams-Games-Tournaments (TGT).*
- *Jigsaw II.*
- *Cooperative Integrated Reading and Composition (CIRC).*
- *Team Accelerated Instruction (TAI).*

Els tres primers són més generals i es poden adaptar segons l'àrea i el nivell dels alumnes. En canvi, els dos darrers *(CIRC i TAI*) es refereixen a àrees i edats concretes. Altres mètodes que destaca el mateix autor són:

- *Group Investigation.*
- *Learning Together.*
- *Complex Instruction.*
- *Structured Dyadic Methods.*

Més endavant, aquest mateix autor (Slavin, 2000) fa un intent de classificació d'alguns mètodes del llistat extens fet prèviament, en aquest cas, partint del tipus d'aprenentatge que promouen:

- Mètodes de grups d'estudi:
    - *Student teams-Achievement division.*
    - *Jigsaw II.*
    - *Learning Together.*
- Aprenentatge basat en projectes:
    - *Complex Instruction.*
    - *Group Investigation.*

Sharan (2002) fa una altra proposta per presentar els mètodes d'aprenentatge cooperatiu ordenats segons les diferents habilitats que hi predominen:

- Coneixement i motivació:
    - *Student Teams-Achievement Division* (*STAD*).
    - *Cooperative Integrated Reading and Composition (CIRC).*
    - *Jigsaw II.*
- Socials i comunicació interpersonal:
    - *Learning Together.*
- Investigació intel·lectual, motivació intrínseca i interacció en igualtat de condicions:
    - *Complex Instruction.*
    - *Group Investigation.*

Dins de l'ampli ventall de mètodes cooperatius que hi ha, destaquem aquells que més ressò han tingut en els contextos escolars i en l'àrea de les matemàtiques. Per elaborar el llistat, s'han consultat els principals investigadors sobre aprenentatge cooperatiu (Johnson i Johnson, 1994; Monereo i Duran, 2001; Sharan, 2002; Sharan i Sharan, 1994; Slavin, 1995 i 2000).

- *Complex Instruction.* Cohen et al. (1994) van desenvolupar i fer recerca sobre aprenentatge cooperatiu en aproximacions que emfasitzen els projectes orientats al descobriment, bàsicament en ciències i matemàtiques. Es focalitza en les diferents habilitats que tenen els estudiants i utilitza una àmplia varietat de rols i habilitats a desenvolupar i aconseguir l'èxit de l'equip.
- *Structured Dyadic Methods.* Mentre els diferents mètodes revisats es desenvolupen en equips de quatre persones o més, aquest mètode proposa el treball per parelles i a diferència dels altres que ofereixen una relativa llibertat en l'organització i el desenvolupament segons els casos, en aquest mètode s'estructura la tasca de manera que un dels alumnes esdevé tutor de l'altre i, per tant, pren el paper d'ensenyant i el tutorat, d'aprenent. Hi ha diferents propostes com són la *Classwide Peer Tutoring* (Greenwood et al., 1989) o la *Reciprocal Peer Tutoring* (Fantuzzo et al., 1992).
- *Structuring Academic Controversy* de Johnson i Johnson (1991). Es basa en la controvèrsia, en la diferència de punts de vista i en la possibilitat de poder argumentar i cercar noves solucions als conflictes a partir d'una gestió constructiva. Quan les controvèrsies són estructurades, cal que els estudiants es preparin una argumentació a partir de l'aprofundiment en una temàtica. Posteriorment, caldrà defensar-la amb els arguments construïts i establir un diàleg amb altres punts de vista i coneixements. Finalment, caldrà arribar a un acord en què totes les parts puguin estar d'acord.

A continuació, es presenten algunes de les tècniques d'aprenentatge cooperatiu. Tot i que hi pot haver una gran quantitat de tècniques a tenir en compte a l'hora de posar en marxa a l'aula, s'opta per fer un recull breu d'algunes d'elles seguint la classificació que fa Duran (2012). Aquest autor classifica les tècniques d'aprenentatge cooperatiu en quatre grups en què s'inclouen tècniques que se centren en: el diàleg, el processament de la informació, la construcció del coneixement i la resolució de problemes.

- Tècniques per al diàleg:
    - *Active knowledge Sharing* (Silberman, 1996). *Compartir coneixements previs*. En parelles, els alumnes miren de respondre les preguntes inicials abans de començar un nou tema i així poder compartir i recordar el què ja saben.
    - *Talking Chips* (Kagan, 1992). *Torns de conversa*. Per fomentar el diàleg i la participació de tots els alumnes, es deixa un petit objecte personal al mig de la taula i, a mida que van intervenint, es retira. No es pot tornar a iniciar un torn de conversa fins que han participat tots els alumnes de l'equip. És convenient

donar temps per tal de poder reflexionar sobre les pròpies aportacions i les dels companys.

- *Three-Step Interview* (Kagan, 1992). *Entrevista a tres passos*. Entrevistes mútues entre membres d'una parella. Es creen grups de quatre i després d'una presentació del company als altres, sintetitzen tres de les respostes de les entrevistes fetes.

- Tècniques per al processament de la informació:

  - *Think-Pair-Share* (Lyman, 1992). *Pensar en parella*. Durant l'explicació del docent, formula alguna pregunta i deixa temps per respondre-la individualment i per a després poder discutir-la amb el company. Al final es comparteix amb la resta dels companys d'aula les respostes donades.
  - *Cooperative Note-Taking Pairs* (Johnson et al., 1998). *Apunts en parella*. Durant l'explicació el professorat dona temps per compartir amb un company les idees principals de què s'està exposant i que millorin els propis apunts amb aportacions dels companys.
  - *Scripted Cooperation* (O'Donnell, 1999). *Cooperació guiada*. En una parella d'alumnes, un pren el rol de sintetitzador i l'altre el d'oient. En un moment donat, el professor para l'explicació i el sintetitzador resumeix la informació i l'oient la complementa. Acaben elaborant una síntesi pròpia del tema treballat.

- Tècniques per a la construcció conjunta de coneixement:

  - *Teammates Consult* (Kagan, 1992). *Llapis al mig*. Es distribueix un plec d'activitats a cada equip i un dels membres en llegeix la primera. Deixen els llapis al mig i discuteixen com resoldre-la. Un cop està clar, tornen a agafar els llapis i la resolen individualment. I així successivament fins a acabar les tasques plantejades.
  - *Numbered Heads Together* (Kagan, 1992). *Per números*. S'assigna un número de l'1 al 4 a cada membre del grup. Resolen activitats proposades pel professorat i s'asseguren que tots els membres del grup les entenen i poden explicar-les posteriorment. Un cop fet això, el professorat diu un número i l'alumne que el té assignat ha de ser qui expliqui el procediment de resolució utilitzat.
  - *Structuring Academic Controversy* (Johnson i Johnson, 1994). *Controvèrsia acadèmica*. Es treballa en equips de quatre persones. Per parelles, busquen

informació sobre un tema donat per argumentar una determinada posició, l'altra parella ho fa en la posició contrària. Es defensa la respectiva posició de cada parella. Un cop fet això, les parelles canvien la seva posició i trien els arguments de l'altra parella que voldran ampliar. Finalment, es fa una síntesi dels millors arguments per a cada punt de vista.

- Tècniques cooperatives per a la resolució de problemes:

  - *Pair Thinking aloud Problem Solving* (Barkley et al., 2005). *Resolució en parella pensant en veu alta.* Les parelles tenen una sèrie de problemes amb un cert grau de complexitat i es distribueixen els rols (solucionadors i oïdors) que s'intercanvien en cada problema. El solucionador pensa en veu alta i parla mentre fa els passos necessaris per resoldre el problema. L'oïdor segueix els passos, mira de comprendre'ls i suggereix solucions si detecta errors.
  - *Send a problem* (Kagan, 1992). *Passa el problema.* Cada equip rep un sobre amb un problema. El resol i inclou la solució escrita dins del sobre i el passa a un altre equip. El següent equip (sense mirar la resposta) completa la seva resolució i torna a passar el problema. Quan ja ha passat per tots els equips, cada equip inicial revisa les respostes del *seu problema* i avalua els procediments de resolució seguits pels altres (Kagan, 1992).
  - *Team-Pair-Solo* (Cuseo, 2002). *Equip-parella-individual.* Els alumnes reben tres problemes: el primer el resolen en equips de quatre; el segon, en equips de dos; i l'últim individual. S'aposta per la retirada progressiva del suport.

Amb els mètodes i les tècniques exposades, s'han donat a conèixer aquelles estructures cooperatives que són més rellevants, segons el nostre punt de vista, pel seu ús educatiu a les aules. A continuació revisem amb més profunditat la tutoria entre iguals que és el mètode cooperatiu que es desenvolupa en el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

2.5. Tutoria entre iguals

En aquest apartat s'aprofundeix en la tutoria entre iguals, un mètode cooperatiu que parteix d'un disseny inicial altament estructurat i es configura a partir d'unes particularitats que revisarem en profunditat i que difereixen substancialment d'altres mètodes cooperatius ja detallats. En primer lloc, exposarem una conceptualització inicial sobre la metodologia; seguidament, presentarem els diferents tipus de tutoria entre iguals. El tercer apartat se centra en l'exposició de les potencialitats i les limitacions, fent referència a la tutoria entre iguals com a mètode d'atenció educativa inclusiva, el rol del tutor i el tutorat com a font d'aprenentatge, per tancar amb la reflexió sobre el constructe *Aprensenyar.*

2.5.1. Conceptualització de la tutoria entre iguals

La tutoria entre iguals és un mètode d'aprenentatge cooperatiu basat en la formació de parelles d'estudiants amb una relació asimètrica, un que desenvolupa el rol de tutor i l'altre, de tutorat. La parella té un objectiu comú i compartit que ha d'aconseguir dins un marc d'interacció dissenyada pel docent (Duran i Vidal, 2004). La interacció de la parella, convenientment estructurada pels mestres i professors, pot generar situacions d'aprenentatge significatives. La provisió d'una ajuda personalitzada i ajustada per garantir el progrés dels dos membres de la parella és un molt bon recurs per a l'aprenentatge (Duran, 2018).

En funció de l'edat dels participants i en relació amb la continuïtat dels rols, trobem diferents tipologies de tutoria entre iguals, que s'exposaran en el següent apartat. Els beneficis del mètode estan àmpliament avalats per evidències de recerca (Duran i Flores, 2013; European Agency for Special Needs and Inclusive Education, 2018; Flores i Duran, 2013; Topping, 2000; Valdebenito i Duran, 2013). Per un costat, el tutor aprèn de la tasca específica d'ensenyar un altre estudiant (Duran, 2014). Per l'altre, el tutorat es beneficia de l'ajuda personalitzada i ajustada que el tutor li ofereix (Camino et al., 2019; Robinson et al., 2005).

La recerca sobre tutoria entre iguals demostra que aquesta estratègia instruccional comporta beneficis per a l'alumnat (Duran, 2003). Com s'ha esmentat, no únicament per a l'alumnat tutorat, sinó també pel tutor. Per a l'alumne tutor es produeix un augment de la implicació, un major control del contingut i una millora de les habilitats psicosocials i d'interacció (Duran, 2014). Per a l'alumnat tutorat es produeixen millores en l'àmbit acadèmic i amb relació a l'ajust pedagògic (Pujolàs, 2003). Hi ha autors (Person i Graesser, 1999) que atribueixen els avantatges de la tutoria entre iguals a la interacció i el diàleg establert entre tutor i tutorat en el treball entre iguals.

En el cas de la tutoria entre iguals (Duran et al., 2003) el diàleg entre tutor i tutorat passa per cinc fases diferents (IRFCA): el tutor formula una pregunta o planteja un problema (I), el tutorat respon la pregunta (R), el tutor ofereix retroalimentació o *feedback* (F), el tutor i el tutorat milloren cooperativament la qualitat de la resposta (C) i, finalment, el tutor avalua la comprensió de la resposta (A). És el quart pas, el de col·laboració (C), el que s'ha demostrat com a central de la tutoria entre iguals i el que explica els seus avantatges.

Així mateix, la tutoria entre iguals és un dels mètodes d'aprenentatge cooperatiu més implementats i estudiats empíricament (Topping et al., 2015). Les investigacions apunten que es tracta d'una de les estratègies didàctiques més potents i validades en diversos contextos de pràctica per a l'educació de qualitat (González et al., 2015; Topping, 2000). Els estudis en aquesta àrea mostren resultats favorables en les seves intervencions, tant en tutoria fixa (Fuchs et al., 1997; Valdebenito i Duran, 2017), recíproca (Blanch et al., 2010; Mastropieri et al., 2003) i per a tots dos rols (Duran i Monereo, 2005).

A més, s'han reportat els beneficis d'aquesta estratègia didàctica en diferents àmbits i nivells escolars, com a mètode efectiu d'atenció educativa (Álvarez i González, 2005; De Backer et al., 2016; Robinson et al., 2005); així com per a la millora de diferents competències d'aprenentatge. La millora de la competència científica (Thurston et al., 2007); la millora de la competència lectora (Flotes et al., 2024; Topping et al., 2015; Topping i Bryce, 2004) per a l'escriptura (Blanch et al., 2014); i l'autoconcepte (Flores i Duran, 2016), entre altres.

Roscoe i Chi (2007), en una revisió exhaustiva, evidencien guanys cognitius per al tutor en diferents tipus de tutoria, nivells, àrees curriculars, orígens culturals i ètnics. Aquests autors plantegen que amb l'ús de la metodologia es desenvolupa l'activitat d'explicació, que considera comprometre's en la construcció reflexiva del coneixement, a través de la generació d'explicacions coherents, internament consistents, la reorganització mental, i l'avaluació conscient del procés i dels seus coneixements. Posteriorment, es desenvolupa la interrogació per a introduir nous temes, guiar i avaluar el procés, tal com ho fa un professor, i estar preparat per a donar respostes a les preguntes plantejades pel seu company o companya.

De totes maneres, és evident que qualsevol opció metodològica pot presentar limitacions si no se'n fa un ús adequat i funcional. És per aquest motiu que perquè la tutoria entre iguals sigui realment efectiva cal que compleixi amb un conjunt de requisits (Topping, 1996): delimitar correctament els objectius generals i curriculars que es persegueixen, seleccionar amb criteris pedagògics fonamentats les parelles que es conformaran, preveure les diferents sessions que s'hi dedicaran, els recursos que s'utilitzaran i l'estructura de tutoria per la qual s'optarà. Finalment, cal preveure una bona formació prèvia i fer èmfasi a la importància de l'avaluació, tot acompanyat d'un procés de reflexió sobre la pròpia acció.

2.5.2. Tipologia de tutoria entre iguals

Com s'ha mencionat anteriorment tenint en compte l'edat dels participants de la parella, Topping (1998) distingeix dos tipus de tutoria: la tutoria entre alumnes de diferent edat (*Cross Age Tutoring*) i la tutoria entre alumnes de la mateixa edat o curs (*Same Age Tutoring*). Les

tutories d'alumnes de diferent edat provenen de l'antiga concepció que l'alumne tutor prenia el paper del mestre per tal d'ajudar a aprendre a un company més jove. Alguns autors recomanen, per aquest tipus de tutories, que les edats entre els membres de la parella no siguin massa distants i aconsellen que la distància que s'estableixi sigui com a màxim de dos cursos (Duran et al., 2009). Altres autors ho allarguen fins a quatre anys de distància màxima (Lippit, 1976).
Hi ha altres estudis que sostenen que l'important és la diferència d'aptituds i habilitats entre tutor i tutorat (Baudrit, 2000; Molina et al., 2019), tant si aquesta distància entre tots dos ve donada per l'edat, per la formació o preparació prèvia o per les pròpies capacitats personals. Segons el mateix autor, el que sí que cal és que es vetlli per tal que hi hagi aquesta diferència entre els dos rols per tal de poder treure profit pedagògic de l'activitat d'aprenentatge. També és important tenir en compte que la diferència no sigui tan gran que el procés de tutoria sigui totalment improductiu pel tutor pel fet de no oferir-li suficients reptes per al seu propi aprenentatge i arribi a avorrir-se (Duran et al., 2009).
Cal destacar, també, que a nivell organitzatiu del centre, aquesta opció de tutoria presenta un cert grau de complexitat (que es pot resoldre amb una prèvia planificació d'horaris del centre i dels cursos que poden participar).

L'altra opció de tutoria, la *Same Age Tutoring* és menys complexa d'implementar, ja que no requereix dels condicionants organitzatius i compta amb la proximitat (d'edat i de coneixença). Roscoe i Chi (2007) també sostenen que les tutories d'igual edat són més naturals, ja que al no haver-hi diferència d'edat és molt probable que els participants tinguin interessos més propers; a banda que les situacions de convivència quotidiana, segons afirmen les mateixes autores, poden aportar un valor afegit a la situació tutorial que es desenvolupa a l'aula. Per contra, hi ha alguns autors que alerten dels possibles biaixos de la proximitat socioafectiva (Berghmans et al., 2014; Ellis i Gauvin, 1992).

S'ha fet referència, fins al moment, a les tutories de rol fix, d'igual o diferent edat. La tutoria de la mateixa edat o curs pot, alhora, donar lloc a una nova possibilitat: l'intercanvi de rols.

La tutoria de rol recíproc (*Reciprocal Peer Tutoring)* va ser dissenyada originàriament per Fantuzzo et al. (1992). En aquest tipus de tutoria els participants tenen la mateixa edat i habilitats també similars, per la qual cosa, poden alternar el rol de tutor i tutorat, si, es compleixen, com a mínim, dues condicions: cada component en l'adopció del rol de tutor haurà de fer un treball previ de preparació de la tasca per tal d'aconseguir la distància necessària per poder fer el guiatge de l'activitat a desenvolupar; i, en segon lloc, i també imprescindible, haurà de conèixer i dominar el format estructurat de la sessió en la que ha de tenir lloc la tasca (Duran et al., 2003).

Tot i que no hi ha estudis concloents sobre quin tipus de tutoria proporciona més beneficis pedagògics, sí que és veritat que hi ha autors (Baudrit, 2000; Duran et al., 2003; Gazula et al., 2017) que consideren que la tutoria recíproca podria potencialment aplegar molts dels avantatges de la tutoria entre iguals i reduiria alguns dels desavantatges de la tutoria de la mateixa edat de rol fix.

Per exemple, segons Baudrit (2000):

- Pot facilitar la construcció conjunta de coneixement en creure que tots dos membres poden aportar elements rellevants en l'aprenentatge.
- Desapareix l'adjudicació d'un rol personal invariable que podria afectar la percepció sobre sí mateixos en tutors i tutorats. Uns, els tutors, per adopció de rols dominants i autoritaris en la reproducció del model transmissiu de l'aprenentatge. Els altres, els tutorats, per creure's dependents i, per tant, poc autònoms en el seu procés d'aprenentatge.
- Fa evolucionar la tutoria cap a la col·laboració, ja que permet més mutualitat, multidireccionalitat i un augment de la simetria.

2.5.3. Potencialitats i limitacions de la tutoria entre iguals

Basant-nos en dues grans revisions (Johnson i Johnson, 1989, amb 470 estudis i Slavin, 1983, amb 46 estudis), podem concloure que la cooperació és una eina poderosa per a l'aprenentatge, però que els seus beneficis no són automàtics. Com assenyalen Buchs et al. (2012), de mitjana, aquestes revisions indiquen que més de la meitat de les comparacions (57.89%) mostren la superioritat de l'aprenentatge cooperatiu enfront de treball competitiu o individual per a l'assoliment acadèmic. Aquests resultats mostren que els beneficis de l'aprenentatge cooperatiu poden qualificar-se de moderats a forts, per a tasques verbals, matemàtiques i de procediments.

Nastasi i Clements (1991) van reportar la importància del pensament d'ordre superior, la motivació i les habilitats socials per a explicar els beneficis de l'aprenentatge cooperatiu i més concretament, la tutoria entre iguals, per al desenvolupament cognitiu, el rendiment acadèmic i el creixement sòcio-emocional. Els autors troben millors resultats per als estudiants que treballen en grups cooperatius en ciència, matemàtiques, enginyeria i tecnologia. Una metaanálisis dels efectes de l'aprenentatge cooperatiu cara a cara o promotiu (Kyndt et al., 2013) conclou que, en general, els estudiants en ambients d'aprenentatge cooperatiu superen als estudiants en ambients d'aprenentatge tradicional en l'assoliment (particularment en els cursos no lingüístics, com a matemàtiques o ciències) i en les actituds.

Aprendre a cooperar és una competència central a tots els nivells educatius (Bruffe, 1995). El treball en equip permet jugar amb les habilitats i actituds quotidianes i afavoreix les relacions interpersonals i les estratègies cognitives, tot millorant els processos d'argumentació d'idees, escolta activa dels altres punts de vista, resolució de conflictes a través de la negociació i l'arribada a acords (Slavin, 1996).

Centrant-nos en la tutoria entre iguals, els beneficis acadèmics (Berghmans et al., 2014; Cohen et al., 1982; Robinson et al., 2005; Topping, 1996) i beneficis afectius de la metodologia (Bowman-Perott et al., 2014; Ginsburg-Block et al., 2006; Miller et al., 2010; Robinson et al., 2005; Topping, 1996; Worley i Naresh, 2014; Zeneli et al., 2016) estan ben documentats a la literatura. Els beneficis afectius inclouen un millor autoconcepte, un augment d'actituds positives envers la temàtica i una major dedicació envers l'aprenentatge.

Aquests resultats es poden atribuir a un entorn d'aprenentatge individualitzat, personalitzat, estructurat i relaxat que es configura habitualment en la tutoria entre iguals, en comparació amb una estructuració tradicional d'aula (Chow, 2016; Topping, 1996; Ul Ain et al., 2023). Una metaanàlisi va evidenciar que el rendiment dels estudiants augmentava amb la incorporació de la tutoria entre iguals a 45 de 52 estudis revisats (Cohen et al., 1982). Més tard es va confirmar en una altra metaanàlisi, en que Rohrbeck et al. (2003) van revelar un augment similar del rendiment acadèmic de la tutoria entre iguals en un nivell elemental.

Els estudis demostren que tenir una millor comprensió d'un tema pot donar lloc a una millor autoestima (Johnson i Johnson, 1989; Miller et al., 2010) i això pot transferir-se a altres matèries (Worley i Naresh, 2014), com les matemàtiques. Aquest resultat és significatiu, perquè demostra que les interaccions un a un poden generar la confiança dels estudiants fins al punt que puguin aplicar aquestes habilitats recentment apreses. Zeneli et al. (2016) van apuntar que l'autoconcepte de les matemàtiques, l'autoconcepte social i el gaudi matemàtic van augmentar com a resultat de la tutoria entre iguals.

El professorat pot proporcionar als tutors exemples de preguntes guiades per ajudar-los a proporcionar comentaris constructius als tutorats (Johnson, 2019). Si ho fan, ajuden els alumnes tutors a evitar la direccionalitat excessiva, que es produeix habitualment en la tutoria entre iguals. És probable que els tutors estiguin més preocupats en produir un nombre determinat de respostes, en lloc de desafiar intel·lectualment els tutorats (McLuckie i Topping, 2004).

Topping (2000) explica que la metodologia és àmpliament utilitzada en molts països, tant en l'educació formal com en la informal, així com en tots els nivells educatius i àrees curriculars. És recomanada per experts en educació, per exemple, la UNESCO, com una de les pràctiques instructives més efectives per a l'educació de qualitat. Ara bé, cal tenir en compte que no hi ha un mètode millor ni més adequat que els altres en totes les circumstàncies, es tracta d'utilitzar a cada moment, aquell que s'adapti més a les nostres necessitats en funció del grup d'alumnes i l'activitat a desenvolupar de manera que es potenciïn els factors que facilitin la cooperació i l'aprenentatge. La tutoria entre iguals facilita el tracte individual i personalitzat de les necessitats formatives de cada estudiant.

Finalment, en la línia del que ens aporten Palma-Villavicencio et al. (2019) podem trobar diferents avantatges i limitacions del mètode:

Avantatges de la tutoria entre iguals:

- S'incrementa la motivació, les interaccions, els alumnes col·laboren i aprenen els uns dels altres, equilibrant-se el ritme de treball en un ambient general d'autosuperació.
- Els estudiants estan motivats a donar el millor de sí per a contribuir als èxits dels altres o, en el seu cas, de la parella.
- Fomenta l'autoaprenentatge, ja que els alumnes seleccionen la informació i creen els seus propis continguts.
- Ajuda a millorar l'empatia i l'assertivitat.
- Produeix entorns educatius que afavoreixen l'interès i la implicació.

Limitacions de la tutoria entre iguals:

- Les etapes prèvies a la fixació d'objectius i l'elaboració d'un esquema de treball clar poden allargar-se amb discussions i desacords.
- Bona part del treball es desenvolupa en absència del docent facilitador i alguns dubtes poden trigar a aclarir-se (d'aquí sorgeix la importància del rol docent en la bona estructuració de la interacció i el paper actiu durant les sessions de tutoria entre iguals).

- Cal vigilar perquè és fàcil que sorgeixi la desmotivació per la sensació de pèrdua de temps (aquí també es requereix una gestió estratègica per part del docent).

Als següents apartats s'especifiquen els avantatges de la metodologia a diferents àmbits: la inclusió i l'aprenentatge concret de tutors i tutorats.

2.5.3.1. La tutoria entre iguals, un mètode cooperatiu que afavoreix la inclusió

La tutoria entre iguals s'ha utilitzat per a convertir les interaccions entre alumnes en oportunitats d'aprenentatge i creixement, tant acadèmic com personal. Estudis recents en aquest àmbit (González et al., 2015) destaquen que en la tutoria entre iguals es genera una connexió i aprenentatge constructiu en l'alumnat. Aquesta apreciació es basa en elements com el llenguatge pròxim en les explicacions, la confiança per a expressar dubtes, la tolerància i l'assertivitat, entre altres. La diversitat en un sentit ampli, és una qualitat inherent a la condició humana que ve estipulada per diferents factors (Llauna i Castro, 2016; Toulia et al., 2023) i l'escola, al cap i a la fi, acaba sent un espai de representació de tota aquesta diversitat social, cultural, ètnica, política, religiosa, lingüística, que vivim en l'actualitat.

D'aquesta manera, la diversitat en el context educatiu és una realitat, i davant d'això, els propòsits de l'escola han de ser: respectar les diferències, no convertir-les en desigualtats, prendre-les en consideració i assegurar-se que no són un obstacle per a l'aprenentatge sinó una font d'enriquiment (Riera, 2011). En aquest marc, resulta complicat pensar en una escola que treballa per la inclusió educativa i que no inclogui en la seva estratègia pràctiques de participació i cooperació entre els seus membres, perquè són elements fonamentals per a la construcció d'un model d'escola més intercultural i més inclusiu.

Ainscow i Booth (2002) defineixen l'educació inclusiva com a un procés d'anàlisi de les cultures, polítiques i pràctiques escolars amb l'objectiu d'eliminar o reduir, mitjançant iniciatives de millora i innovació educativa, les barreres que restringeixen la presència, la participació i l'aprenentatge de tot l'alumnat. Avui dia els mètodes d'aprenentatge cooperatiu, entre els quals la tutoria entre iguals, són utilitzats com a una estratègia per a l'equitat i la inclusió (Chacón, 2015).

A més, recentment, Cook i Rao (2018) han fet una metaanàlisi concloent que els estudiants amb diversitat funcional podien ser tan bons actuant com tutors d'altres companys com els estudiants sense discapacitat. En la mateixa línia, una revisió de 51 estudis de tutoria entre iguals en els quals participaven alumnes amb discapacitat intel·lectual (Spencer i Balboni,

2003) va mostrar que poden desenvolupar el rol correctament, amb els suports necessaris: formació inicial, estructuració de la interacció i seguiment.

Ja coneixíem les experiències que constaten millores en el rendiment acadèmic de l'alumnat en diferents àrees curriculars, com la llengua (Duran i Valdebenito, 2014) i les matemàtiques (Gibertson et al., 2007) usant el mètode de tutoria entre iguals. Però, a més, els resultats de diverses recerques apunten en la direcció que la tutoria entre iguals millora considerablement la inclusió en l'àmbit educatiu (Duran et al., 2015; González et al., 2015; Heredia i Duran, 2013; Pujolàs et al., 2013; Riera, 2011; Villar i Ros, 2011).

2.5.3.2. El rol del tutor i el tutorat com a font d'aprenentatge

En aquest apartat es destaquen els beneficis que pot tenir la tutoria entre iguals, segons el rol que s'adopti. En una concepció d'ensenyament tradicional/transmissiu, es donaria per suposat que en situacions de tutoria entre iguals, l'alumne que exerceix el rol del tutorat és el que més aprèn. I en una situació extrema el tutor, alumne que ensenya transmetent allò que sap, no tindria per què aprendre res. Però en la majoria de les investigacions realitzades es constaten resultats que divergeixen d'aquesta expectativa. I fins i tot, es detecten, en algunes d'elles, que els guanys dels tutors són més elevats que els guanys que experimenten els tutorats (Duran, 2018) en un model no radial d'aula. Es farà una revisió dels estudis que parlen dels beneficis d'un rol i l'altre.

Quan un individu assumeix un rol, és probable que es comporti conforme aquest (Robinson, et al., 2005), adoptant actituds coherents amb el paper i desenvolupant l'autopercepció en línia amb les expectatives del propi rol. Seguint encara aquest autor, veiem que es considera que la teoria del rol pot explicar l'increment de sentiments de la competència acadèmica i actituds més positives cap a l'escola per part dels tutors.

Per una banda, el tutor, al posar-se en el lloc del docent, valora la importància de la seva tasca i, alhora, pren consciència de les actituds que ha de tenir per millorar l'aprenentatge i esdevenir un model per al tutorat. Els guanys, en aquest cas, són evidents, ja que en les situacions d'aula on no s'usa la tutoria entre iguals, pot seguir enfocant l'aprenentatge en les actituds i conductes que volia que el seu tutorat demostrés.

Melero i Fernández (1995) destaquen que els tutors mostren un augment de la implicació, de la responsabilitat i de l'autoestima, alhora que també una millora en el domini del contingut i de l'organització de coneixements, cosa que condueix a una consciència superior de les mancances. En aquests alumnes també es percep una millora de les habilitats socials (comunicatives i d'ajuda) i també en la interacció.

Galbraith i Winterbottom (2011), en un estudi que s'interessa especialment per l'aprenentatge dels tutors, expliquen que les percepcions inicials del rol del tutor giren entorn de ser experts i autoritaris i també ens fan notar que les seves motivacions per aprendre del material són generades per evitar la vergonya de no saber respondre les preguntes que els facin els tutorats. Observen, però que, a mesura que el programa va progressant, el seu rol passa a ser més de facilitadors de l'aprenentatge per als tutorats. Hi ha també un potencial augment de l'autoestima i es beneficien de l'oportunitat de discutir idees en igualtat de condicions amb els seus companys. En aquest mateix estudi es destaca que hi ha indicis que la tutoria entre iguals millora la metacognició dels tutors degut a la quantitat de reflexions fetes sobre com aconseguir l'aprenentatge dels tutorats.

En alguns estudis, també, es destaca que el fet de fer de tutor pot comportar uns beneficis que cal considerar a l'hora d'adjudicar els rols i fins i tot, a l'hora de plantejar-se el tipus de tutoria que caldrà portar a terme. Tenint en compte aquestes consideracions, s'han fet estudis -amb resultats satisfactoris- que encomanen el paper de tutors a alumnes amb certes dificultats o condicions vulnerables -ja siguin d'origen social o cognitiu (Cook i Rao, 2018).

D'altra banda, els tutorats aprenen perquè reben una ajuda ajustada i personalitzada, de manera constant durant el temps que dura l'activitat, del seu company tutor dins la Zona de Desenvolupament Proper (Duran, 2018). Robinson et al. (2005), referint-se als tutorats, consideren que la tutoria un a un és més personal, amb menys anonimat, i la responsabilitat cau de ple en l'estudiant per seguir el rol de bon estudiant i demostrar el seu aprenentatge.

Melero i Fernández (1995) destaquen, també, millores acadèmiques pels tutorats, a banda de la detecció d'una major motivació i compromís. Els tutorats es mostren, en aquestes situacions d'aprenentatge en tutoria entre iguals en què interactuen amb un company, més confiats i còmodes suposant una reducció de l'estrès i de l'ansietat.

Cal considerar, també, els efectes de les tutories recíproques. En estudis de tutories recíproques en les que l'alumnat intercanvia el rol, amb una periodicitat marcada prèviament, també es constaten millores significatives. Es ressenyen millores en tutories recíproques a Duran i Monereo (2005) i per a tutories recíproques virtuals a Blanch, Duran, Dekhinet i Topping (2010). Les potencialitats de la tutoria recíproca es detecten tant en l'àmbit cognitiu com afectiu (Thurston et al., 2009).

2.5.3.3. Aprendre ensenyant. Aprensenyar

Si seguim aprofundint en l'aprenentatge dels tutors que, com hem vist, poden aconseguir grans millores d'aprenentatge en el procés de tutoria, ens trobem amb el paradigma del *learning by teaching*. Duran (2011 i 2014) fa referència al potencial d'aprenentatge que tenen els mediadors, els tutors. Exposa que partint d'aquest nou paradigma emergent de l'aprendre ensenyant seria des del qual es podria explicar l'aprenentatge del tutor i n'exposa les evidències científiques i algunes de les possibles repercussions sobre les pràctiques educatives.

Planteja que el professorat s'enfronta a dos reptes per construir la societat de l'aprenentatge. En primer lloc, el d'aprendre a gestionar la capacitat dels seus estudiants per ensenyar-se els uns als altres i, en segon lloc, el de compartir la capacitat d'ensenyar amb ells. Tots dos reptes són prou rellevants i suggereixen canvis profunds en les pràctiques educatives que es duen a terme actualment a les aules del nostre entorn.

És important destacar que trobem diferents graus d'aprenentatge dins del procés d'aprendre ensenyant (Duran, 2016; Ribosa i Duran, 2021). Els estadis o graus són els següents: 1) aprendre per ensenyar (creient que posteriorment s'ensenyarà, però sense arribar a fer-ho -*Expectancy-).* 2) aprendre i exposar (l'audiència exerceix un efecte positiu); 3) aprendre i explicar (construint reflexivament el coneixement); i 4) aprendre i explicar qüestionant (de manera interactiva, responent i formulant preguntes profundes). Entenem que per a la millora de la tutoria entre iguals (i l'aprenentatge dels dos membres de la parella) seria òptim arribar a l'últim estadi.

En el seu moment ja Annis (1983) va observar, en un estudi on comparava un grup de 130 estudiants en cinc situacions d'aprenentatge d'un mateix contingut, que els estudiants que el van aprendre millor van ser aquells que van aprendre'l per ensenyar-lo i van poder ensenyar-lo a altres. L'autora va concloure que el fet d'ensenyar a altres afavoreix un aprenentatge verbal al precisar una major atenció al que s'ha d'ensenyar (i, per tant, aprendre); al fet d'haver d'apropiar-se del contingut i elaborar els propis esquemes comprensius i també per l'esforç cognitiu realitzat per associar-lo als coneixements previs.

També Cortese (2005) planteja que ensenyar pot ser la millor manera d'aprendre i conclou que desenvolupar el rol de mediador implica enfrontar-se amb la diversitat i recollir diferents idees i punts de vista que cal, a partir d'una primera reflexió individual, integrar amb profunditat en els propis esquemes cognitius. Traspassar a la reflexió pública aquest exercici de comprensió individual permetrà poder contrastar amb altres l'elaboració conceptual feta, compartir-la en processos d'ajuda mútua i possibilitar el canvi.

Roscoe i Chi (2007) en una revisió d'investigacions proposen dues explicacions per donar raó de l'aprenentatge dels tutors. En primer lloc, en l'activitat d'explicació, el tutor es compromet a construir reflexivament el coneixement. No es tracta de *dir* el coneixement, sinó de *transformar* el coneixement previ en missatges coherents i apropiats. No es tracta doncs de transmetre el coneixement sense cap mena d'elaboració, sinó que aquest procés implica generar explicacions que són fruit de la reorganització dels propis models mentals. I per poder explicar, per poder fer una argumentació lògica i dotada de sentit, cal ordenar el coneixement (Flores, 2012).

A més, preguntar i respondre requereix un alt nivell de reflexió sobre el material i sobre els seus coneixements, idees, relacions i principis. El tutor ha de reflexionar per plantejar qüestions que facin pensar profundament al tutorat. Les bones preguntes són aquelles que requereixen la integració del coneixement previ i el nou, la reorganització dels models mentals, la generació d'inferències i el monitoratge metacognitiu.

Finalment, la tutoria entre iguals es presenta com una oportunitat excepcional perquè possibilita la participació del tutor en la planificació i desenvolupament de les activitats d'ensenyament i aprenentatge en un estadi primerenc de la seva formació acadèmica. Aquest vincle fomentat per a la pròpia metodologia és molt favorable per a l'estudiant-tutor (Hidalgo et al., 2020) perquè li permet desenvolupar habilitats comunicatives i una observació per a poder identificar l'interès i la regulació per a garantir una percepció analítica i crítica.

2.5.4. Recomanacions pràctiques per a l'ús de la tutoria entre iguals

Els estudis pioners de Topping (1989) van obrir el camí a centenars d'experiències en el camp de la tutoria entre iguals. Com dèiem, la literatura recent i diferents metaanàlisis i articles (Alegre et al., 2019; Moliner i Alegre, 2022) han documentat repetidament els beneficis acadèmics, socials i psicològics de la metodologia.

Duran et al. (2019) apunten que els estudiants poden ser grans mediadors en esferes acadèmiques. L'argument principal és que els estudiants han après els continguts recentment. Per tant, són més sensibles a les àrees en les quals els seus companys poden necessitar més ajuda (majors nivells d'intersubjectivitat). El motiu principal és que poden fer un ús d'un discurs més directe, a més de compartir més referents lingüístics.

Centrant-nos en les recomanacions per a la pràctica i d'acord amb Topping (2000), la tutoria entre iguals és més efectiva en sessions curtes amb més freqüència. Per a garantir que la tutoria entre iguals tingui un impacte positiu cal que la durada de cada sessió sigui de com a mínim 15 minuts i que tingui una durada de fins a 40 minuts. Mantenir un mínim de sessions de durada del programa és un requisit essencial pel seu funcionament.

Hi ha estudis que mostren que la tutoria *cross-age* té més bons resultats que la *same-age*. Aquesta evidència queda constatada per autors com Topping et al. (2003) en relació a diferents camps, també el matemàtic. El mateix passa amb la durada del programes, ja que els estudis de Topping apunten el fet que els programes que s'estenen molt en el temps tenen menys eficàcia que aquells que duren menys de 8 o 10 setmanes. És important tenir en compte aquestes recomanacions per a garantir l'ús més eficaç possible de la metodologia.

2.5.5. El desenvolupament de la competència de resolució de problemes matemàtics a través de l'aprenentatge cooperatiu i la tutoria entre iguals

La resolució de problemes matemàtics és una dimensió molt present a tota la formació STEM (*Science, Technology, Engineering and* Mathematics) i cada cop més valorada en el món professional i social, i es reconeix com a una competència útil per gestionar situacions i contextos nous. S'ha evidenciat l'eficàcia de l'ensenyament explícit de la competència i les estratègies de resolució als estudiants (Rohim i Umam, 2019; Syarifuddin et al., 2020), especialment a través d'estructures cooperatives d'aprenentatge. En aquesta línia, Carbonaro et al. (2020) van dur a terme una investigació amb unes conclusions clares: els estudiants i professors valoren molt positivament l'experiència centrada en la cooperació, amb l'intercanvi d'informació i l'aplicació d'un esquema de solucions, per a la resolució de problemes matemàtics.

Hi ha dues raons principals per a fomentar l'aprenentatge cooperatiu en el camp de les matemàtiques: (1) alguns resultats de la investigació demostren que l'ús de l'aprenentatge cooperatiu pot millorar la competència en resolució de problemes matemàtics dels estudiants i les habilitats socials, (2) l'aprenentatge cooperatiu pot facilitar que els estudiants aprenguin a pensar en els problemes i a integrar coneixements i habilitats (Alegre i Moliner, 2017).

Trobem diverses investigacions que ho evidencien (Arteaga-Martínez et al., 2020; Campit i Garin, 2017; English i Gaingsburg, 2016; Timmerman et al., 2017; Stacey, 2005; Stanic i Kilpatrick, 1989). Des d'aquesta perspectiva es proposa treballar l'àrea de matemàtiques, i concretament, un aspecte tan fonamental com la resolució de problemes, des d'una perspectiva dialògica (Bakker et al., 2015). Aquest enfocament aposta per centrar l'ensenyament de les matemàtiques en un procés compartit entre els alumnes per a qüestionar-se i desenvolupar estratègies de resolució de problemes. La clau es troba en construir formes de pensar compartides (Paenza, 2016) que reflecteixin la potencialitat de les matemàtiques per a resoldre problemes o situacions pròpies de la vida quotidiana.

Així doncs, les investigacions més recents (Giné i Deulofeu, 2014; Mallart i Deulofeu, 2017) apunten una relació directa entre l'ús de metodologies pedagògiques cooperatives -com la tutoria entre iguals proposada al programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016)- i la millora en el nivell de competència matemàtica dels alumnes. Aquesta millora de les habilitats de l'alumnat es pot associar a l'actitud positiva que adopten arran de treballar utilitzant mètodes d'aprenentatge entre iguals (Timmerman et al., 2017) i al procés d'enriquiment del diàleg matemàtic que s'estableix entre ells gràcies als espais de cooperació que es produeixen durant la interacció estructurada pel docent (Duran et al., 2003; Sánchez-Cano i Gràcia, 2018; Serra, 2016). L'aprenentatge cooperatiu pot fomentar interaccions productives i afavorir el desenvolupament d'estratègies d'aprenentatge, com ara qüestionar, explicar i justificar opinions, l'articulació, l'argumentació i l'elaboració (Mäkitalo-Siegl et al., 2012).

La resolució de problemes com a forma específica de cooperació, a més, ha adquirit un interès creixent a causa de les recents iniciatives de la política educativa. La resolució de problemes de manera cooperativa es valora en l'estudi internacional a gran escala PISA (2018). Des d'aquesta perspectiva, els problemes especialment complexos requereixen abordar-los de forma responsable treballant junts, intercanviant idees i gestionant els conflictes. A PISA (2018) es valoren les tres competències següents: (1) establir i mantenir la comprensió i el coneixement mutu; (2) prendre mesures adequades per resoldre un problema; i (3) establir i mantenir l'organització de grup (organització/gestió).

Tal com apunta la mateixa institució, les cinc grans àrees de Resolució Cooperativa de Problemes (CPS, per les seves sigles en anglès) són les següents: 1) la presa de perspectiva (la capacitat de tenir en compte les perspectives dels altres); 2) la participació (preparació per compartir informació i externalitzar pensaments); 3) la regulació social (consciència dels punts forts i febles dels membres del grup); 4) la regulació de tasques (habilitats de planificació i control per desenvolupar estratègies de resolució de problemes i representació compartida de problemes); i 5) la creació de coneixement (la capacitat d'aprendre i construir coneixement mitjançant la interacció de grup).

En altres estudis es van fomentar experiències d'aprenentatge relacionades amb la resolució de problemes com fer hipòtesis, dissenyar experiments, realitzar investigacions, recopilar i interpretar dades, treure conclusions, presentar, discutir i fer informes (Diani et al., 2019; Orlando et al., 2019). Una de les hipòtesis subjacents al desenvolupament de l'aprenentatge cooperatiu és que la sinèrgia derivada de la cooperació augmenta la motivació molt més que a través d'un entorn competitiu o individualista. En aquest sentit, mitjançant la interacció, un individu pot desenvolupar el seu coneixement de manera més àmplia (Kasayanond et al., 2019).

Un exemple és el model d'aprenentatge cooperatiu introduït per Huinker i Laughlin (1996) anomenat *Think Talk Write* (TTW). Aquest aprenentatge es construeix mitjançant el procés de pensar, parlar i escriure (Pratiwi i Muiz, 2016). Segons els resultats de la recerca realitzada per investigadors d'un institut de secundària a *South Lampung* (Huda et al., 2020) hi ha un bon progrés de la capacitat de resolució de problemes matemàtics dels estudiants en termes de comprensió, ús d'estratègies i resolució i revisió dels problemes.

Com a element addicional, quan es planteja com facilitar i assolir un aprenentatge actiu, participatiu i cooperatiu en la resolució de problemes matemàtics es determina que un aspecte clau és que els estudiants regulin el seu propi aprenentatge (Häkkinen et al., 2017). Altres investigacions han demostrat que els estudiants amb èxit utilitzen un repertori d'estratègies per guiar i millorar el seu procés d'aprenentatge, incloses les estratègies cognitives, conductuals i de motivació, cap a la realització de tasques acadèmiques (Schunk i Zimmerman, 2008). L'aprenentatge autoregulat i estratègic implica experimentar i aprendre estratègies efectives per regular (és a dir, planificar, establir objectius, organitzar, supervisar) els processos d'aprenentatge compartits (Winne i Hadwin, 1998).

Així doncs, aquest treball es fonamenta en models d'ensenyament-aprenentatge socioconstructivistes com a marc referent per a les actuacions pedagògiques en el procés de resolució de problemes matemàtics. Seguint aquest paradigma es considera que els subjectes d'aprenentatge són actius i usen el coneixement a través de la interacció entre els seus constructes mental i l'entorn que els envolta. Aquesta perspectiva és la que es pren de referència per a construir les propostes pedagògiques del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

A continuació, es presenten diverses investigacions sobre programes i pràctiques que usen l'aprenentatge cooperatiu i la tutoria entre iguals per a la millora de la resolució de problemes matemàtics. I en el següent apartat es farà referència a altres recerques més genèriques sobre l'ús de la metodologia a l'àrea de matemàtiques.

2.5.5.1. Investigacions sobre pràctiques i programes de resolució de problemes matemàtics amb l'ús de l'aprenentatge cooperatiu i la tutoria entre iguals

Una de les pràctiques sobre la qual s'han desenvolupat diferents investigacions és l'anomenat *Problem-based learning* -PBL- (Amalia et al., 2017). La proposta pedagògica planteja que és imprescindible ajudar els alumnes a desenvolupar un coneixement flexible, unes estratègies de resolució de problemes efectives i uns recursos d'autodirecció de les tasques. Per a poder resoldre els problemes, els estudiants han de treballar amb el seu equip de manera cooperativa, identificar què és el que necessiten i aplicar el coneixement nou per a resoldre el problema i reflectir allò que han après i l'eficàcia de les estratègies usades.

Zumbach et al. (2005) proposen una altra pràctica de resolució de problemes matemàtics que permet crear bastides per a donar suport al procés d'aprenentatge cooperatiu -en parella-, incloent el disseny de la tasca, la distribució dels recursos d'aprenentatge i el disseny i l'oferiment de *feedback* a l'estudiant. La proposta conté quatre fases principals per a resoldre els problemes de manera eficaç: (1) identificació cognitiva de la situació problemàtica; (2) disseny del mètode de resolució de problemes; (3) resolució del problema, i (4) reflexió sobre el procés i el resultat. Aquestes quatre fases es poden equiparar fàcilment a la proposta pròpia del programa que proposem.

Més concretament, els autors indiquen que les bastides tenen per objectiu guiar les direccions d'aprenentatge dels estudiants i assistir-los perquè aprenguin a resoldre problemes complexos. A més, el treball també inclou els factors determinants per a desenvolupar el *Mecanisme d'Incetiu Grupal* (GIM, amb les seves sigles en anglès) dins de l'aprenentatge basat en la resolució cooperativa de problemes (CPBL), que inclou la responsabilitat individual en un grup cooperatiu i la interdependència. La responsabilitat individual és un aspecte essencial dins d'un equip d'aprenentatge que afecta el resultat del treball cooperatiu.

Altres recerques apunten que la pràctica basada en la tècnica *Think-pair-share* (Lyman, 1992*)* és útil i efectiva per a millorar les competències matemàtiques de l'alumnat i el procés de resolució de problemes (Rohim i Umam, 2019). Aquesta estructura permet millorar les habilitats de resolució de problemes, però també les habilitats de comunicació i el pensament crític i creatiu (Tan i Ang, 2016; Umam i Kowiyah, 2018). Paridjo i Waluya (2017), de manera coincident, ressenyen que l'habilitat de comunicació matemàtica és vital per aprendre matemàtiques.

Es pot enriquir la comunicació verbal matemàtica a través de plantejar problemes i demanar als estudiants que comentin sobre un concepte o problema particular (Lesh i Zawojewski, 2007; Lester i Kehle, 2003). Els estudiants poden demanar als seus companys que responguin a les seves preguntes. Donar respostes i plantejar una pregunta, alhora, permetrà millorar les habilitats de comunicació i de resolució de problemes matemàtics dels estudiants (igual que es planteja al programa *(En)Raonem en parella*, que també presenta una estructura d'aprenentatge en parelles). El model d'aprenentatge cooperatiu *Think-pair-share,* per tant, ajuda els estudiants a promoure les seves habilitats matemàtiques de resolució de problemes i habilitats de comunicació matemàtica (Tint i Nyunt, 2015).

Finalment, cal afegir que investigacions força recents sobre pràctiques basades en la tutoria entre iguals per a la resolució de problemes matemàtics apunten les condicions perquè els problemes siguin una eina d'aprenentatge (Arteaga-Martínez i Macías, 2016; García et al., 2015; Pedroza et al., 2020). Aquestes són les següents: a) la importància del coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema; b) el repertori d'estratègies generals i específiques que és capaç de posar en marxa el subjecte per a resoldre el problema concret; c) el paper de les estratègies metacognitives; i d) la influència dels components individuals i afectius de la persona que resol el problema (Coleoni i Buteler, 2008). Tots aquests aspectes són tinguts en consideració per la posada en pràctica del programa sobre el qual estem desenvolupant el present projecte d'investigació.

Si ens endinsem en l'anàlisi de programes trobem les següents referències. En un programa educatiu que promovia la resolució de problemes en parella (Tran, 2014) es va demostrar que abans de la intervenció 12 estudiants (37,50%) eren capaços d'entendre el problema, després del primer cicle d'acció n'hi havia 20 (62, 50%) i després del segon cicle n'hi havia 26 (81,25 %). En un altre programa d'innovació/investigació (Abidin et al., 2018) es va arribar a la conclusió que amb l'ús de metodologies cooperatives els estudiants aprenien a justificar els seus punts de vista mitjançant exemples i claredat de pensament i expressió, millorant la seva capacitat de comunicació. En aquest context, cada alumne/a tenia l'oportunitat de parlar, discutir per resoldre el problema i participar en transmetre el resultat de la discussió.

També podem fer referència a una altra proposta educativa ben estructurada sobre la qual es va fer recerca. Es tracta de l'enfocament contextual. És un mètode (que es materialitza en una proposta pedagògica) per relacionar el material ensenyat i la vida real i animar els estudiants a connectar els coneixements que tenen i l'aplicació de la seva vida diària. Khotimah (2019) argumenta que l'ensenyament i l'aprenentatge contextual (CTL, per les seves sigles en anglès) és un dels enfocaments d'aprenentatge que fan servir problemes de la vida quotidiana com a objectes d'aprenentatge.

El CTL aplica sis components per crear un procés eficaç. Els components de l'aprenentatge contextual són: agrupar, modelar, interrogar, fomentar la comunitat d'aprenentatge i promoure la investigació i l'avaluació autèntica. L'enfocament contextual posa èmfasi a la importància de la resolució de problemes de manera que mitjançant el seu ús s'incrementa la capacitat de resolució dels estudiants. Les diferents pràctiques, programes i estudis presentats estan alineats amb les propostes metodològiques pròpies del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

2.5.5.2. Altres recerques sobre aprenentatge cooperatiu i tutoria entre iguals en l'àrea de matemàtiques

Comencem presentant una recerca que posa el focus en el camp de l'avaluació en parella a l'àrea de matemàtiques. L'estudi apunta que els estudiants perceben que l'avaluació entre alumnes en el marc de les activitats matemàtiques els ajuda a millorar en termes de profunditat d'aprenentatge, creativitat i motivació (Hwang et al., 2014). Entre diferents estratègies d'aprenentatge, l'avaluació entre iguals s'ha reconegut com a efectiva per ajudar l'alumnat a fer reflexions i millorar la seva capacitat per a desenvolupar el pensament profund (Bouzidi i Jaillet, 2009; Chang et al., 2011; Bulu i Yildrim, 2008; Van de Boom et al., 2007). En l'última dècada molts educadors i investigadors han aplicat l'estratègia d'avaluació entre iguals en diferents camps aconseguint resultats prometedors (Tsai i Liang, 2009; Wen i Tsai, 2008).

El focus de l'avaluació entre iguals hauria de ser transferida des dels educadors als estudiants per a poder promocionar l'aprenentatge autònom (Yang et al., 2006). Els objectius són aconseguir més qualitat en el procés d'aprenentatge i millorar les habilitats d'oferiment d'ajudes, de tal manera que els alumnes puguin aprendre entre ells a través de la interacció. El *feedback* ofert pels companys pot ser un bon referent per a generar millores d'aprenentatge (Chang i Tseng, 2009). Diferents estudis han demostrat que els alumnes poden rebre alts nivells d'inspiració dels resultats de l'avaluació (Chen, 2010), que pot incentivar la seva motivació per aprendre i la seva capacitat per a pensar i promoure el rendiment acadèmic (Wang, 2004; Xiao i Lucking, 2008), i facilitar l'autoreflexió i les habilitats comunicatives.

Cohen et al. (1982) van observar que els programes de tutoria entre iguals tenien efectes positius per al desenvolupament acadèmic de tutors i tutorats. Xiao i Lucking (2008) van considerar les variables que influïen al rendiment acadèmic a la tutoria entre iguals, incloent-hi 17 estudis matemàtics. Com els anteriors autors van documentar els efectes positius de la metodologia. Ara bé, només varen incloure estudis amb un pretest i posttest amb grup control, altres estudis amb diferents dissenys es van excloure. Incloïen diferents nivells educatius, però només es valorava el rendiment acadèmic.

Britz et al. (1989), per la seva part, van conduir una revisió de 14 estudis. Els seus resultats també indiquen guanys cognitius per ambdós membres de la parella, i concretament, per a alumnes amb dificultats d’aprenentatge, diversitat funcional o barreres socials. Robinson et al. (2005) van fer una revisió de resultats en matemàtiques (centrant-se en els estudis que parlaven de l’entrenament del tutor i els elements emocionals i es va demostrar l’efectivitat de la metodologia en el camp de l’autoconcepte).

Centrant-nos en els estudis que consideren que la tutoria entre iguals és un bon mètode per al treball profund de les habilitats metacognitives, cal tenir en compte les aportacions inicials de Flavell (1976). L’autor va assumir la metacognició com el més alt nivell d'activitat mental que controla els altres nivells inferiors. Per a aquest autor, la metacognició comprèn el coneixement que tenim sobre el que significa pensar, com funcionen els processos de pensament, les habilitats o estratègies d'aprenentatge en relació amb diferents tipus de tasques, així com el coneixement o les creences sobre un mateix (per exemple, autoconcepte, autoeficàcia, motivació, etc.). Conseqüentment, l'ús d'estratègies metacognitives en matemàtiques fomenta la reflexió sobre el procés d'aprendre; és a dir, la manera com l’alumnat afronta una determinada tasca, els processos de control i regulació i com utilitza aquest coneixement per a regular la cognició (Pérez i Ramírez, 2011).

Gravini i Iriarte (2008) assenyalen que la metacognició es pot ensenyar i aprendre, i es desenvolupa amb l'edat i l'experiència, per la qual cosa l'individu gradualment va aconseguint un major control sobre els seus propis processos cognitius, especialment si es fomenta l’aprenentatge entre iguals. Activar processos cognitius està associat a què els alumnes es coneguin millor, identifiquin l'origen de les seves dificultats i dels errors que cometen quan resolen exercicis o problemes; i implica que reconeguin les seves habilitats (i les dels altres) per a construir i posar en pràctica procediments propis de la matemàtica per a ajustar el que saben, les seves expectatives i el rendiment que poden obtenir.

A la llum dels resultats obtinguts a l’estudi de Mato-Vázquez et al. (2017) es pot dir que les estratègies metacognitives van millorar significativament l'aprenentatge dels estudiants del curs de primària que van participar en l'estudi. Es va comprovar la importància d'incorporar situacions pròximes als estudiants, la qual cosa va permetre que relacionessin els seus coneixements amb els de la vida quotidiana, desenvolupessin activitats de tipus cooperatiu, intercanviessin punts de vista i establissin acords per a solucionar les situacions que se'ls presentaven. El treball cooperatiu, la resolució de problemes, els processos d'aprenentatge, la confiança en sí mateixos i la motivació són capacitats prèvies i prioritàries en la formació matemàtica dels estudiants. Les habilitats metacognitives permeten millorar la representació mental, seleccionar estratègies, elaborar els objectius i identificar obstacles; en resum, contribueixen al progrés i millora dels estudiants.

Tradicionalment, la recerca sobre l'ensenyament-aprenentatge de qualsevol àrea de coneixement s'ha centrat en els processos cognitius i s'han oblidat els factors motivacionals, afectius, metacognitius, evolutius i socials, que són importants en el context real de l'educació. Es prioritzen els resultats sense preocupar-se dels processos mentals que desenvolupa l'alumne/a en resoldre exercicis o problemes matemàtics (Ricce et al., 2022; Tesouro, 2005). No obstant això, perquè l'ensenyament sigui significatiu, i per a *aprendre a aprendre* i *aprendre a pensar*, l'estudiant ha de ser el protagonista de la construcció del seu coneixement d'una manera conscient i reflexiva (Troncoso, 2013), i la resolució de problemes haurà d'ocupar un lloc important en el seu procés d'ensenyament-aprenentatge i en el procés d’aprenentatge conjunt amb els seus iguals (Schraw, 2001).

Finalment, podem fer esment a un últim element pedagògic que, també, es veu altament influenciat pels agrupaments de caràcter cooperatiu en el treball matemàtic: la motivació. La motivació pot augmentar la capacitat acadèmica de l'estudiant com a factor principal per obtenir un bon assoliment acadèmic a l’àrea de matemàtiques, i també en els altres àmbits del coneixement. A més, els estudiants també poden augmentar les seves habilitats de pensament crític, de manera que seran més competents en construir idees per a la resolució de problemes matemàtics (Syukri et al., 2020).

Tal com apunten Zakaria et al. (2010) un dels propòsits de l’aprenentatge de les matemàtiques a l’escola és formar el pensament i raonament per arribar a conclusions, desenvolupar la capacitat de resolució de problemes i desenvolupar la capacitat de proporcionar informació o comunicar idees. Els docents, doncs, haurien d’optar per un model d’aprenentatge que requereixi una implicació activa dels estudiants i també puguin desenvolupar les habilitats de pensament durant el procés d’aprenentatge de manera que aquests objectius siguin assolits. Els experts han demostrat que l’aprenentatge cooperatiu (tutoria entre iguals) pot millorar el rendiment dels estudiants en tasques acadèmiques, ajudar-los a comprendre conceptes difícils i a desenvolupar habilitats de pensament crític (Serra, 2016). Els programes educatius que es proposin en aquest context haurien d’anar alineats, doncs, amb els plantejaments pedagògics apuntats.

2.6. *(En)Raonem en parella*

En el present apartat es fa una síntesi dels elements principals per al desenvolupament del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016). S'hi inclouen les bases conceptuals i objectius, el desenvolupament didàctic i els diferents elements pedagògics a tenir en compte. Seguidament es fa referència als resultats preliminars obtinguts de l'estudi pilot dut a terme en el marc del programa durant el curs acadèmic 2018-2019.

2.6.1. Síntesi del programa

El programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016) és un programa educatiu impulsat pel Grup de Recerca sobre Aprenentatge entre Iguals (GRAI) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), que, emprant la tutoria entre iguals, té com a objectiu desenvolupar la competència en resolució cooperativa de problemes matemàtics quotidians. Mitjançant els ajustaments oportuns, el programa està dissenyat per a poder desenvolupar-se amb alumnat de primària i de secundària.

El programa està fonamentat per les següents bases conceptuals: 1) la competència matemàtica en resolució de problemes, alineada amb les aportacions de l'OCDE (2017) i els processos de resolució involucrats; 2) la tutoria entre iguals; 3) la implicació familiar en les tasques escolars per la millora dels resultats i la qualitat dels centres i, 4) el treball en xarxa del professorat. Els objectius principals són els que se citen a continuació: 1) millorar la competència matemàtica i, especialment, la relacionada amb la resolució de problemes matemàtics per part de l'alumnat; 2) fomentar la capacitat de cooperació entre l'alumnat; 3) desenvolupar didàctiques d'orientació clarament inclusiva per a l'ensenyament de la matemàtica; 4) crear xarxes col·laboratives de treball i d'aprenentatge entre iguals amb el professorat dels diferents centres que participen en el programa i finalment, 5) potenciar la implicació familiar en les tasques escolars.
El desenvolupament del programa es duu a terme al llarg de tot un curs escolar seguint unes fases prefixades que a continuació es detallen:

- Primerament, cal informar i explicar el programa a alumnes i famílies, per tal d'engrescar els participants. En aquesta primera fase és important transmetre la idea que és gràcies al fet que els alumnes són diferents que poden aprendre, en definitiva, fer viure la diversitat en positiu. A més, també cal explicar els avantatges de ser tutors i tutorats i animar a les famílies perquè siguin participants actius.
- A continuació, arriba el moment de dur a terme la creació de parelles d'alumnes. En aquesta fase cal decidir el tipus de parelles amb què es pretén treballar. *Cross age*

tutoring -parelles de diferent edat- o *same age tutoring* -parelles de la mateixa edat. En el segon cas, cal també decidir si s'optarà per la tutoria de rol fix o recíproc. Cal, a més, tenir en compte dos aspectes essencials: per un costat, perquè la tutoria entre iguals tingui èxit els alumnes han de tenir prou temps per a desenvolupar el seu rol i ajustar-lo a les característiques del seu company o companya (requerint una estabilitat del rol suficient en el cas de la tutoria recíproca, sobretot a l'inici). Per l'altre, amb relació a les parelles familiars, convé arribar a aquelles famílies que necessiten establir espais de diàleg educatiu i les que podran aprofitar més els beneficis de la interacció i l'aprenentatge compartit (optimitzant, d'aquesta manera, els recursos i esforços).

- A partir d'aquí, s'inicia la formació dels participants. Cal destinar temps a formar a les parelles perquè puguin exercir el rol assignat de la millor manera possible i amb el màxim nivell d'informació. Per aquest motiu, cal destinar tres sessions a la formació de l'alumnat. A la primera sessió, se'ls explica el concepte de tutoria entre iguals, els avantatges per als tutors i tutorats i les qualitats dels dos rols. A la segona sessió, es concreten les tasques a realitzar a cada una de les sessions de desenvolupament del programa a l'aula. Finalment, a la tercera, es comparteixen els sistemes d'avaluació. En relació amb la sessió de formació amb les famílies cal fer una presentació breu del programa, una explicació amb modelatge de les tasques per sessió i una presentació dels materials de suport, dels consells per als familiars tutors i del diari de sessions pensat per a les famílies.
- Després de la formació arriba la fase de desenvolupament de les sessions (d'una durada aproximada d'un trimestre escolar - unes 12 setmanes, amb una dedicació de dues sessions setmanals). En aquest desenvolupament hi ha, com a mínim, tres aspectes clau a conèixer i tenir en compte:

    - Primerament, l'estructura de les sessions, que tenen una durada aproximada de trenta minuts i que presenten uns passos concrets que concorden amb la mateixa estructura dels fulls d'activitats: abans de començar, què ens diu el problema, dades, planificació, resolució, elaboració de respostes i revisió final. Addicionalment, es plantegen activitats complementàries per ampliar i aprofundir en el contingut matemàtic treballat. Aquests moments, també estan alineats amb els quatre processos involucrats a la resolució de problemes (OCDE, 2017): explorar i comprendre, representar i formular, planificar i executar i revisar i reflexionar.
    - El segon aspecte clau és el guió d'interacció de la parella. És aquest material el que permet estructurar d'una manera clara els rols de cada un dels alumnes

i facilitar el procés d'aprenentatge compartit. El guió especifica els passos i accions que han de desenvolupar cada un dels membres de la parella (en cada un dels moments de resolució del problema); oferint orientacions, idees clau i recursos perquè la interacció sigui més profitosa i fluïda. A mesura que l'alumnat es va apropiant d'aquests passos es poden anar desprenent de l'estructuració que els ofereix el guió i ser cada vegada més autònoms en el procés de treball conjunt.

- El tercer aspecte clau, ja esmentat, són els propis fulls d'activitats, que seran els que orientaran el procés de resolució al llarg de tota la sessió. Cal tenir en compte que els problemes que es plantegin presentin situacions contextualitzades i realistes des de la perspectiva de l'alumnat. Problemes oberts, amb la possibilitat de diferents respostes i camins de resolució. Segueixen les orientacions ofertes per PISA (2018) per a garantir fer propostes orientades al procés d'aprenentatge competencial de l'alumnat.

Es recomana que a la fase de desenvolupament del programa a les aules s'hi dediquin 24 sessions. És d'aquesta manera com els resultats demostren que hi poden haver millores significatives de l'aprenentatge en els alumnes. Al final del desenvolupament de les sessions és interessant demanar a l'alumnat tutor que siguin ells mateixos els qui dissenyin i es preparin a consciència un o dos fulls d'activitats. D'aquesta manera se'ls ofereix la possibilitat d'implicar-se d'una manera més activa en l'aprenentatge de la parella.

Finalment, destacar la fase d'avaluació dins del desenvolupament de les sessions del programa a l'aula. Tot i que en aquest cas està explicada en darrer terme, no vol dir que es tracti, únicament, d'una avaluació final, ben al contrari, l'objectiu és dur a terme una avaluació continuada i formadora al llarg de tot el procés. Els principals instruments d'avaluació són els següents: la prova inicial i final, la pauta d'autoavaluació de la parella, la rúbrica d'avaluació de les proves inicials i finals, la carpeta d'aprenentatge, els fulls d'activitats elaborats per l'alumnat tutor, el registre d'observacions del professorat i el diari de sessions familiars.

Per tal que tot el procés de desenvolupament del programa a les aules sigui possible és aconsellable un procés de formació i acompanyament dels docents durant els tres primers anys d'implementació (encara que no sigui un requisit indispensable i que els centres puguin desenvolupar el programa de manera autònoma). La Xarxa d'Aprenentatge entre Iguals (XAI) -Miquel i Duran, 2017- té l'objectiu d'afavorir l'aprenentatge entre iguals en tres nivells: entre els alumnes, entre les parelles de docents de cada centre i entre centres. És per això que el procés de treball en xarxa entre docents i escoles és un pilar fonamental del programa. Per aconseguir, doncs, aquest aprenentatge a diferents nivells hi ha diferents activitats de formació específica impulsades per la XAI: tres trobades presencials durant el curs dedicades a la formació del professorat i seguiment del programa, l'aula virtual i les visites entre escoles.

És en el context de desenvolupament del programa als centres que es duu a terme la present investigació. L'objectiu principal és identificar els canvis produïts com a conseqüència de la participació dels alumnes en el *programa (En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016) en el procés de resolució cooperativa de problemes matemàtics, i explicar-los a través de l'evolució en el discurs matemàtic i l'autoconcepte matemàtic dels alumnes.

2.6.2 Contextualització del programa *(En)Raonem en parella* en l'àmbit curricular

S'ha pres com a referència per a la construcció de l'apartat les aportacions de PISA (2018); el NCTM, 2000; la Llei Orgànica 3/2020, de 29 de desembre (LOMLOE); el Reial Decret 157/2022, d'1 de març; la Llei 12/2009, de 10 de juliol, d'educació; el Decret 150/2017, de 17 d'octubre i el Decret 175/2022, de 27 de setembre.

Tal com s'especifica a l'article 8 del segon capítol del Decret 175/2022, de 27 de setembre (desenvolupat a l'annex 2 del mateix Decret) entenem que a l'educació primària i secundària, l'ensenyament de les matemàtiques té una doble funció formativa. D'una banda, permet proporcionar la formació matemàtica bàsica que qualsevol ciutadà necessita per desenvolupar-se en la societat, ajudant l'alumnat a conèixer el món en què viu, a ser capaç de fonamentar els seus criteris i les seves decisions, i a adaptar-se als canvis en els diversos àmbits de la vida. D'altra banda, promou la formació intel·lectual general, potenciant tant les habilitats de raonament crític, comunicació, abstracció, cerca d'informació i respostes, i elaboració i ús d'estratègies de resolució, com les actituds positives cap a l'aprenentatge (perseverança, ordre, flexibilitat, valoració de punts de vista diversos, confiança, autoestima, etc.). A més, té una finalitat pragmàtica o utilitària, en ser una eina indispensable per aprendre continguts d'altres àrees i desenvolupar-se en la societat actual.

A l'àrea es desenvolupen un conjunt de competències clau (presentades a l'annex 1 del Decret esmentat) com la competència matemàtica i la competència en ciència, tecnologia i enginyeria (CMCCTE), i els seus indicadors operatius corresponents; així com altres competències clau-transversals (competència digital – CD) i específiques de l'àrea.

Les competències específiques de l'àrea, es relacionen entre sí i constitueixen un tot interconnectat. S'organitzen en cinc eixos: resolució de problemes, raonament i prova, connexions, comunicació i representació, i destreses socioemocionals. Aquestes orienten els processos i principis metodològics que han de dirigir l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, i afavoreixen l'enfocament multidisciplinari i la innovació.

A més, la resolució de problemes constitueix un dels eixos fonamentals de l'ensenyament de les matemàtiques, ja que són al mateix temps un dels focus d'aprenentatge i també una metodologia per promoure l'aprenentatge de les matemàtiques. La resolució de problemes és una activitat present a la vida diària i a través de la qual es posen en acció altres eixos de la competència matemàtica com el raonament i el pensament computacional, la representació d'objectes matemàtics i el maneig i la comunicació emprant llenguatge matemàtic.

L'assoliment de les competències específiques constitueix la base per a l'avaluació competencial de l'alumnat i es valorarà a través dels criteris d'avaluació. S'avaluaran a través de la posada en acció de diferents sabers, proporcionant la flexibilitat necessària per establir connexions entre ells. S'han de treballar en el context de situacions d'aprenentatge (presentades a l'annex 5 del Decret), connectades amb la realitat i que convidin l'alumnat a la reflexió.

Els sabers d'aquesta àrea s'estructuren en sis sentits al voltant del concepte de sentit matemàtic i integren un conjunt de coneixements, destreses i actituds dissenyades d'acord amb el desenvolupament evolutiu de l'alumnat: el sentit numèric, el sentit de la mesura, el sentit espacial, el sentit algebraic, el sentit estocàstic i, per últim, el sentit socioemocional. Els plantejaments propis del programa *(En)Raonem en parella* estan relacionats amb els sis sentits del plantejament curricular.

L'àrea ha d'abordar-se de forma experiencial, concedint una rellevància especial a la manipulació, especialment en els primers nivells, impulsant progressivament la utilització contínua de recursos digitals, proposant a l'alumnat situacions d'aprenentatge que propiciïn la reflexió, el raonament, l'establiment de connexions, la comunicació i la representació.

Pel desenvolupament de les competències i sabers de qualsevol dimensió matemàtica les metodologies actives i de la indagació són especialment adequades en un enfocament competencial, ja que permeten construir el coneixement i dinamitzar l'activitat de l'aula mitjançant l'intercanvi d'idees. El treball per projectes possibilita la interdisciplinarietat i afavoreix la reflexió, la crítica, l'elaboració d'hipòtesis i la tasca investigadora.

El programa *(En)Raonem en parella* presenta uns fonaments teòrics, pedagògics, organitzatius i didàctics que encaixen amb els plantejaments de la nova llei d'educació, així com amb els principis del Decret 175/2022. D'aquí que sigui una opció metodològica vàlida per complir amb les perspectives educatives pròpies de l'escola del segle XXI.

2.6.3. Resultats inicials de recerca

Els resultats que es presenten són de l'estudi pilot que es va fer el curs 2018-2019 a tall d'estudi exploratori en el marc de l'avantprojecte de tesi a diferents centres participants del programa *(En)Raonem en parella* aquell any acadèmic (Bastart i Flores, 2024). Aquest treball va servir per plantejar millores al programa que van ser implementades en cursos següents i sobre les quals s'ha fet la recollida de dades de la tesi doctoral.

2.6.3.1. Resultats de la resolució de problemes matemàtics

Els resultats de l'estudi quasi-experimental que fan referència a la resolució de problemes matemàtics van indicar diferències estadísticament significatives ($p<.05$) entre el pretest i el posttest, confirmant la millora del procés de resolució de problemes matemàtics.

Els resultats de l'anàlisi del procés suggerien que les intervencions més freqüents van ser aquelles que poden relacionar-se amb l'organització pautada del full d'activitat del problema, i que requerien que els alumnes demanessin i donessin informació. Juntament amb aquesta organització del full d'activitat, l'estructuració de la interacció entre tutor i tutorat -pròpia de la tutoria entre iguals- va permetre que es produïssin intervencions que no es limitaven només a les tasques concretes del full, com ara oferir pistes o formular preguntes.

Tot i això, els resultats també van mostrar que alguns indicadors apareixen amb poca freqüència, sobretot aquells que fan referència a fer hipòtesis i a la revisió i monitorització del procés.

Finalment, es va poder identificar una certa tendència a l'augment del nombre d'intervencions codificades al llarg de les sessions. L'augment del total d'intervencions codificades com a discurs matemàtic podia indicar que l'alumnat probablement s'apropiava i flexibilitzava l'estructura del programa, fet que els va dur a enriquir els diàlegs entre ells.

2.6.3.2. Resultats de l'autoconcepte matemàtic

Els resultats de l'estudi quasi-experimental que fan referència a l'autoconcepte matemàtic indiquen que la mitjana entre el pretest i el posttest va disminuir lleugerament de la situació inicial a la final. En aquest sentit, podríem concloure que no hi va haver una millora general de l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat, sinó que aquest constructe es va mantenir estable.

Els resultats de l'anàlisi del procés suggerien que el tutor acostumava a orientar la comprensió i el procés de resolució, i el tutorat l'escoltava i intervenia amb respecte, explicava com resoldria el problema, escoltava la proposta del tutor i responia les seves preguntes. Això semblava indicar que el tutor acostumava a dirigir la interacció de forma prescriptiva, seguint el full d'activitat.

Finalment, es va poder observar una certa tendència que es produís una cessió progressiva del control del tutor cap al tutorat, que semblaria indicar que es va generar aprenentatge i que el tutorat va adquirir confiança i seguretat vers el procés de resolució de problemes.

3. Resolució cooperativa de problemes matemàtics i la influència del discurs matemàtic i l'autoconcepte matemàtic

Aquest tercer gran bloc conceptualitza la perspectiva des de la qual s'entén la resolució cooperativa de problemes matemàtics i com, el treball explícit i sistemàtic de dos constructes de la present investigació, el discurs matemàtic i l'autoconcepte matemàtic, tenen una influència en l'anterior: la resolució cooperativa de problemes matemàtics.

3.1. Introducció

Es parteix de la base que l'alumnat aprèn matemàtiques a partir de la interacció amb situacions problemàtiques i juntament amb els iguals, que el porten a anar modificant la seva estructura cognitiva mitjançant l'experimentació, tot fent-se preguntes, particularitzant situacions o generalitzant resultats (Mallart i Deulofeu, 2017). Per tant, l'aprenentatge funcional a l'àrea de matemàtiques està estretament lligat als processos d'ensenyament-aprenentatge que promoguin un aprenentatge productiu i creatiu, que apostin pel plantejament de situacions contextualitzades de resolució de problemes i per facilitar el diàleg entre l'alumnat tot treballant amb estructures cooperatives.

En aquest context, la conceptualització de la resolució de problemes matemàtics està canviant. Des de la perspectiva didàctica, s'ha d'apostar per a formar ciutadans que utilitzin les matemàtiques per a resoldre problemes de la vida diària i de situacions socials i interdisciplinàries (Piñeiro et al., 2016) - tal com planteja el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

Així doncs, en l'àmbit legislatiu i als centres educatius s'opta cada vegada més per una proposta curricular, dins l'àrea de matemàtiques, que està centrada en la resolució de problemes des d'una perspectiva específica (i oferint-li un rol destacat a aquesta competència): "resoldre problemes, aplicant diferents tècniques, estratègies i formes de raonament, per explorar i compartir diferents maneres de procedir, obtenir solucions i assegurar la seva validesa des d'un punt de vista formal i en relació amb el context plantejat i generar noves preguntes i reptes" (Decret 175/2022, p. 132).

Des de la perspectiva de la investigació, sabem que la resolució de problemes constitueix un dels eixos principals de l'ensenyament de les matemàtiques (Mallart i Deulofeu, 2017). De fet, les dificultats dels alumnes de tots els nivells per a resoldre problemes és un dels temes d'investigació més rellevants en l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques (Giné i Deulofeu, 2014).

L'èmfasi en l'aprenentatge orientat a la resolució de problemes (National Research Council, 2011), es va ampliar arran de la decisió del *Programme for International Student Assessment* 2015 (OCDE, 2013) d'avaluar la resolució col·laborativa de problemes. Aquesta resolució col·laborativa és entesa com la capacitat de participar de manera efectiva en el procés on dues o més persones intenten resoldre un problema, tot compartint significats i prenent consciència de les estratègies que utilitzen per obtenir la resposta.

L'any 2020 es va publicar l'informe espanyol de l'Estudi Internacional de Tendències en Matemàtiques i Ciències (TIMSS, per les seves sigles en anglès) i també es va fer èmfasi en la importància de la dimensió de resolució de problemes matemàtics, i més específicament, la resolució cooperativa i la seva influència en el rendiment acadèmic de l'alumnat.

Per conceptualitzar les diferents perspectives referents a l'educació matemàtica (i la dimensió de resolució de problemes) i poder apuntar en quina d'elles se situa el plantejament del treball s'han tingut en compte l'aportació de diferents autors. Handal i Herrington (2003), entre altres, han reflexionat sobre les diferents postures filosòfiques i epistemològiques que existeixen en relació amb la seva naturalesa. Alguns dels enfocaments més destacats són els següents:

Idees principals de la *perspectiva modernista*:

- Racionalisme. La lògica racional és el fonament de la veritat.
- Existeix una estructura racional de pensament inqüestionable basat en un pla lògic.
- Les matemàtiques tenen una fonamentació única i ferma, en la qual ni la conversa ni el diàleg són necessaris.

Idees principals de la *perspectiva postmodernista*:

- Les matemàtiques són, essencialment, un fenomen social i, per tant, són pràctiques situades.
- Són necessàriament una activitat textual o simbòlica és a dir, dialògica.
- Accepten contradiccions i paradoxes.

Sierpinska i Lerman (1996) proposen una classificació de les recerques en matemàtica educativa, denominant-les "epistemologies de l'educació matemàtica", en relació amb l'enfoc epistemològic que adopten. Basats en aquest criteri, aquests investigadors distingeixen cinc tendències principals:

a) *Les recerques de tall constructivista.* Des d'aquesta perspectiva, es considera que no s'ensenya, sinó que es genera l'oportunitat de modificar estructures. Per a aquesta postura, la qüestió d'autonomia és crucial.

b) *Les recerques que assumeixen una visió sociocultural.* Partint de la teoria vygotskiana, es considera que el món i els individus són productes del seu temps i lloc i que la consciència, element fonamental d'aquest enfocament, es forma mitjançant la mediació de signes que són expressions del moment històric i cultural.

c) *Les recerques que s'ocupen de l'epistemologia i de la teoria de la instrucció.* Aquestes tenen com a objecte d'estudi el coneixement i el seu funcionament en un "subjecte arbitrari". Consideren que el coneixement depèn d'un sistema cognitiu que pot ser el d'un subjecte individual, el d'una cultura o qualsevol sistema que pugui assignar un significat a un objecte o a un esdeveniment.

d) *Les recerques que assumeixen una perspectiva interaccionista*. Es considera que interacció i desenvolupament són inseparables. Les matemàtiques són vistes com un tipus particular de discurs, són una manera de veure el món i pensar sobre ell, rebutjant el llenguatge com a representació, assumit pels constructivistes, així com la visió de signe cultural de Vygotsky.

e) *Les recerques que adopten una aproximació basada en l'epistemologia del significat*. S'assumeix una reflexió sobre la naturalesa dels conceptes matemàtics, referits als processos i condicions del seu desenvolupament. Per a aquesta visió, el p-roblema fonamental és la comunicació de significats matemàtics.

Finalment, i més recentment, Villa-Ochoa et al. (2018) ens acosten a les aproximacions socioculturals lligades de manera estreta a la pràctica matemàtica. Plantegen que l'educació matemàtica hauria de contribuir al desenvolupament de visions crítiques i a l'aprenentatge de continguts i estratègies específiques; així com a la capacitat de produir activament coneixement. És en aquesta última perspectiva epistemològica en la qual es veuria més alineat el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

Hi ha diferents motius pels quals el programa *(En)Raonem en parella* se situa dins d'aquesta perspectiva, alguns dels quals són els següents:

1. Aposta per un aprenentatge de caràcter competencial, on l'alumnat sigui capaç d'aplicar allò après en els seus contextos quotidians.
2. Planteja problemes contextualitzats, oberts, és a dir, amb possibilitat de múltiples respostes i l'activació d'estratègies diverses per arribar a les solucions dels problemes. Això porta l'alumnat a activar processos de raonament complexos i al professorat a acompanyar-los en la construcció d'estratègies efectives de resolució.
3. Facilita espais de cooperació on es creen situacions de comunicació activa entre les parelles d'alumnes i on es va desenvolupant el discurs matemàtic de l'alumnat a través de la participació raonada i les orientacions del professorat.

3.2. Concepcions psicològiques del procés d'aprenentatge matemàtic

De manera lligada a les idees presentades a la introducció, hi ha tres grans marcs psicològics principals en què se situen les teories de l'aprenentatge (i que ens permeten explicar els canvis de concepció en el terreny pedagògic al llarg del temps). Aquests són, en termes generals: el conductisme, el cognitivisme i els diferents corrents de les teories constructivistes.

L'anàlisi dels diferents enfocaments teòrics permetrà conceptualitzar l'evolució dels plantejaments educatius (centrant-nos en l'àmbit matemàtic), valorar-ne els avantatges i inconvenients i conèixer a fons els arguments que ens porten a defensar una determinada perspectiva. Es farà, doncs, una síntesi de cada una d'elles per tancar l'apartat amb una valoració de les aportacions que fan i els arguments que porten a situar el programa en algunes d'elles i no les altres.

3.2.1. Perspectiva conductista

La perspectiva conductista descriu, entre altres plantejaments, el comportament en l'educació de les matemàtiques: l'entorn d'aprenentatge "ideal" se centra en procediments i resultats jeràrquics de manera que el domini de les habilitats bàsiques proporciona una bastida a activitats progressivament més avançades (Díaz-Barriga, 2014). En aquest marc, el coneixement matemàtic és extern i absolut. L'aprenentatge és concebut com l'aplicació d'alguns algoritmes adequats per obtenir respostes correctes, amb un comportament condicionat i reforçat positivament per "recompenses" d'èxit i aprovació o negativament per fracàs i desaprovació.

Segons les aportacions d'Imenda (2014) algunes de les actuacions pedagògiques pròpies d'aquesta perspectiva serien:

1. Als estudiants se'ls hauria de dir els resultats concrets de l'aprenentatge perquè puguin fixar les expectatives i puguin jutjar per sí mateixos si han aconseguit o no el resultat de la lliçó.
2. Els estudiants han d'avaluar-se per determinar si han aconseguit o no el resultat d'aprenentatge.
3. Els materials d'aprenentatge s'han de seleccionar adequadament per afavorir l'aprenentatge. La seqüenciació pot prendre forma de simple a complex, conegut a desconegut i de coneixement a aplicació.
4. Els estudiants han de rebre comentaris perquè puguin supervisar el seu funcionament i prendre mesures correctores.

3.2.2. Perspectiva cognitiva

El cognitivisme va sorgir, en gran mesura, com a resposta al conductisme, i concep l'aprenentatge com un procés adaptatiu on el coneixement es pot transmetre entre els individus, però es guarda com a representacions o construccions mentals internes. El cognitivisme social, que reconeix que l'aprenentatge és tant una activitat social com conductual i cognitiva, fusiona elements del comportament i el cognitivisme amb aspectes socials de l'aprenentatge (Bandura, 1986). La teoria posa l'accent en la importància de l'aprenentatge observacional, procés incorporat en el concepte de creences d'autoeficàcia (Bandura, 1999), que tenen un paper destacat en les activitats d'aprenentatge dels estudiants dins les matemàtiques (Klinger, 2009).

Segons les aportacions d'Imenda (2014) algunes de les actuacions pedagògiques pròpies d'aquesta perspectiva serien:

1. S'han de fer servir estratègies que permetin als estudiants percebre i atendre la informació, de manera que es pugui transferir a la memòria de treball (color, mida del text, etc.).
2. S'han d'utilitzar estratègies per permetre als estudiants recuperar la informació existent de la memòria a llarg termini per ajudar a donar sentit a la nova informació.
3. La informació ha de ser creada per evitar la sobrecàrrega durant el processament a la memòria de treball.
4. S'han de fer servir altres estratègies que fomentin el processament profund per ajudar a transferir informació a l'emmagatzematge a llarg termini. Les estratègies que requereixen que els estudiants apliquin, analitzin, sintetitzin i avaluïn afavoreixen un aprenentatge de nivell superior, cosa que fa més efectiva la transferència a la memòria a llarg termini.

5. S'han de proporcionar suports adequats per a estudiants.
6. La informació s'ha de presentar en diferents estils per donar resposta a diferències de processament i facilitar la transferència a la memòria a llarg termini. Sempre que sigui possible, s'ha de presentar informació textual, verbal i visual per afavorir la codificació.
7. Els estudiants han d'estar motivats a aprendre.
8. Cal animar els estudiants a utilitzar les seves habilitats metacognitives per ajudar en el procés d'aprenentatge.
9. La transferència a situacions de la vida real podria ajudar els aprenents a desenvolupar significats personals i a contextualitzar la informació.

3.2.3. Perspectives constructivistes

Durant almenys tres dècades, el constructivisme ha dominat com a teoria de l'aprenentatge (Alenezi, 2008). El principi central de la perspectiva és que els aprenents tenen un paper actiu a l'hora de construir la comprensió per donar sentit al món, amb l'aprenentatge resultat d'un procés continu d'hipòtesis, creació de regles i reflexió. Els docents renuncien al paper de l'autoritat didàctica per convertir-se, en canvi, en un canal d'informació i facilitadors del procés d'aprenentatge proporcionant als estudiants oportunitats de descobrir, explorar i aplicar idees que satisfan els seus objectius d'aprenentatge.

El constructivisme social afegeix la nova proposta que no hi pot haver una definició del coneixement que ignori el seu context social (Esteban et al., 2019). És a dir, el coneixement s'ha de fonamentar necessàriament en els valors socials, els estàndards, els costums, la llengua i la cultura mitjançant els quals l'aprenent adquireix una comprensió del món. En acceptar que l'aprenentatge és una activitat social, es desprèn que la interacció social estén la ubicació del coneixement de l'individu a la comunitat.

Sfard et al. (1998) van argumentar que la construcció del coneixement es produeix dins d'un context social i cultural on el discurs és un component vital per establir un context d'aprenentatge efectiu. L'aprenent construeix el seu propi coneixement; cada aprenent crea una representació mental única de la tasca a realitzar, selecciona la informació que considera rellevant i interpreta aquesta informació a partir dels seus coneixements existents (Shuell, 1996). El paper del docent és el de garantir que els estudiants es relacionin amb els continguts que s'han d'aprendre de manera funcional -dins del marc del triangle interactiu, entès com la relació pedagògica entre professorat, alumnat i contingut (Coll, 1985)- i, en particular, de fomentar les connexions entre els nous coneixements i els esquemes mentals previs.

A més, les teories constructivistes consideren l'aprenentatge com el producte de les interaccions amb altres persones i amb les eines materials i representatives que ofereix l'entorn d'aprenentatge. Des d'aquesta perspectiva, doncs, l'ensenyament i l'aprenentatge matemàtics són inherentment socials i estan integrats en la participació activa en processos de raonament comunicatiu (Johnston, 1994; Lerman, 2001; Steen, 2001). En aquest entorn, els estudiants guanyen cada cop més nivell de *participació perifèrica legítima* -entesa com a la creixent capacitat de participació en un determinar context d'aprenentatge- (Lave i Wenger, 1991) a mesura que accedeixen i participen en un discurs matemàtic productiu. Algunes de les tasques que els docents haurien de desenvolupar segons la present teoria per Castellaro i Peralta (2020) són:

- Utilitzar una gran varietat d'estratègies d'ensenyament-aprenentatge que demanin la participació activa de l'alumnat.
- No desbordar els estudiants de tasques i de materials que superin amb escreix les seves capacitats.
- Intentar comprendre com els estudiants veuen l'experiència escolar des de la seva pròpia perspectiva.
- Buscar ajuda professional sempre que calgui i treballar sobre l'autodesenvolupament professional participant de sessions de formació.

Finalment, segons les aportacions d'Imenda (2014) algunes de les actuacions pedagògiques pròpies d'aquesta perspectiva serien:

1. L'aprenentatge ha de ser un procés actiu. Mantenir els estudiants actius fent activitats significatives resulta en un processament d'alt nivell, cosa que facilita la creació de significats personalitzats.
2. Cal fomentar l'aprenentatge col·laboratiu i cooperatiu per facilitar l'aprenentatge constructivista: el treball amb altres aprenents els permet utilitzar les seves habilitats metacognitives.
3. Els estudiants han de tenir el control del procés d'aprenentatge. Hi hauria d'haver una forma d'aprenentatge basada en la descoberta guiada on els estudiants puguin crear-se els seus objectius d'aprenentatge, però amb orientació i guiatge dels docents.
4. Els estudiants han de tenir temps i oportunitat de reflexionar.
5. L'aprenentatge ha de ser significatiu per als aprenents. Els materials d'aprenentatge han d'incloure exemples relacionats amb els estudiants, de manera que puguin donar

sentit a la informació. Les tasques i els projectes han de permetre als estudiants triar activitats significatives per ajudar-los a aplicar i personalitzar la informació.
6. L'aprenentatge ha de ser interactiu per promoure l'aprenentatge de nivell superior i la presència social i contribuir a desenvolupar el sentit personal.

Hi ha diferents teories i models discutits sota aquest mateix marc conceptual. Entre els més destacats trobem la teoria psicogenètica (Piaget, 1979), la teoria sociocultural (Vygotsky, 1986) i la teoria interaccionista (Siemens, 2005). Comú a totes aquestes teories és la comprensió que les persones construeixen significats d'esdeveniments i comportaments mitjançant la interacció social, per exemple, a les escoles a partir de les seves experiències anteriors subjectives (Hashash et al., 2018). A continuació, es presenten de manera general les tres teories principals, entenent que cada una d'elles presenta matisos concrets.

3.2.3.1. Teoria psicogenètica

La teoria constructiva psicogenètica en la pràctica educativa considera que els estudiants han d'acceptar la informació que se'ls transmet sense qüestionament i no se'ls ofereixen les eines per a fer-ho (López i Ursini, 2007). Aquesta és l'actuació contra la qual intenten lluitar les teories postmodernes. Des d'aquesta perspectiva, les matemàtiques que s'ensenyen, sustentades en el mètode axiomàtic, no ofereixen espai a cap altra forma de pensament que no sigui el lògic-racional. Les postures postmodernes i dialògiques consideren, pel contrari, que les matemàtiques són producte de l'activitat humana i, per tant, socialment construïdes, i que es conceptualitzen com un llenguatge que permet una visió del món específica.

3.2.3.2. Teoria sociocultural

L'aplicació dels principis del constructivisme social s'han fet molt populars per a l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques des de la dècada de 1980. Des d'aquesta perspectiva, els principis d'un marc docent adequat són els següents (Villa-Ochoa et al., 2018):

- Orientació: aquest és el pas inicial que connecta el passat amb les experiències d'aprenentatge actuals i centra el pensament de l'alumnat en els resultats d'aprenentatge de les activitats actuals.
- Exploració: en aquest pas els estudiants exploren el seu entorn per crear una base comuna d'experiències identificant i desenvolupant conceptes, processos i habilitats.
- Formalització: els estudiants expliquen i verbalitzen els conceptes que han estat explorats i desenvolupen noves habilitats i comportaments. El professorat té

l'oportunitat d'introduir termes formals, definicions i explicacions per als nous conceptes i processos i demostrar noves habilitats o comportaments.

- Assimilació: els estudiants desenvolupen una comprensió conceptual més profunda i àmplia i obtenen més informació sobre àrees d'interès mitjançant la pràctica de les seves noves habilitats i comportaments.
- Avaluació: aquest procés és recursiu (present al llarg de tots els moments d'ensenyament-aprenentatge), on s'anima als estudiants a valorar la seva comprensió i habilitats i el professorat avalua les habilitats dels estudiants sobre els nous coneixements.

Depenent de les reaccions dels estudiants a l'aula, hi ha transicions cap endavant o enrere entre els tres passos intermedis del marc anterior (en un procés recursiu). Val la pena remarcar que aquests tres passos són, en realitat, les fases consecutives de Polya (1945), que s'especifiquen més endavant, per a l'ensenyament de les matemàtiques amb el mètode de descobriment, molt basat en l'aprenentatge actiu.

3.2.3.3. Teoria interaccionista

George Siemens (2004 i 2005) va proposar una "teoria de l'aprenentatge per a una era digital". El valor particular del paradigma del connectivisme en l'ensenyament de les matemàtiques i la numeració rau en l'explotació de les propietats de la connectivitat de xarxes en sistemes complexos. Cercant activament oportunitats per als estudiants de crear enllaços que promoguin una comprensió de les matemàtiques com a llenguatge, els podem ajudar a crear connexions que facilitin el mapeig entre conceptes matemàtics i les seves diverses habilitats i comprensions del món.

La idea és que la connectivitat aconsegueixi enllaçar coneixements matemàtics, de llenguatge i altres habilitats de la base de coneixement existent en els esquemes mentals de l'alumnat. Els alumnes poden donar significat a les regles matemàtiques, ja que són conseqüències del llenguatge matemàtic més que procediments algorítmics que s'han d'aplicar mecànicament (Downes, 2019). Segons Polo (2020) aquest oferiment de sentit a l'àrea de matemàtiques permet als estudiants guanyar confiança, superar les seves percepcions negatives per descobrir la motivació intrínseca i per perseguir l'aprenentatge com a fi en sí mateix. El paradigma del connectivisme, si més no en la línia indicada aquí, necessita processos d'investigació profunds per deixar de ser únicament un dispositiu retòric (Godino, 2023).

Per concloure, especificar que el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016) s'allunya de centrar el procés d'aprenentatge matemàtic en els aspectes purament conductuals (conductisme), així com deslligats de la influència que el context té en els processos d'ensenyament i aprenentatge (cognitivisme). Per tant, presenta una proposta pedagògica que s'acosta als postulats del constructivisme, i més concretament, a la teoria sociocultural, amb els seus orígens a les aportacions de Vygotsky (1979).

Entenem, doncs, que les propostes pedagògiques que es fan a l'alumnat (i, per tant, els problemes matemàtics de la vida quotidiana que es plantegen) han d'estar ben contextualitzades, han de permetre a l'alumnat atorgar significat a allò que aprèn i han d'estar centrades en la flexibilitat, els plantejaments oberts i el foment de la capacitat reflexiva. El fet d'emmarcar-nos en aquest paradigma en concret ens permet recolzar les pràctiques proposades en un fonament teòric específic i poder construir el marc pedagògic en el qual ens basem de manera reflexiva, compartida i ben estructurada.

3.3. Resolució cooperativa de problemes matemàtics

3.3.1. Introducció

Els intents més inicials de definició de problema matemàtic els van realitzar Polya (1945) i Duncker i Lees (1945). Els autors van determinar que un problema matemàtic exigeix que una persona tingui un objectiu, però no sàpiga com assolir-lo de manera directa. Davant d'això és necessari que identifiqui i analitzi els components que el conformen i que els defineixi, per poder assolir el seu objectiu. D'entrada es coneix l'objectiu, que es pot identificar a través de la pregunta que es planteja. A partir d'aquí, preval el coneixement que tingui la persona o l'equip de persones que s'hi enfronten. Per últim, trobem els instruments i operacions que, combinats de múltiples maneres, es converteixen en requeriments necessaris per arribar a l'objectiu desitjat.

Anys després, en els *Principles and Standards* del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) es definia el problema matemàtic com la implicació en una tasca per la qual el mètode de resolució és inicialment desconegut. Aquesta idea de no conèixer un mètode o procés de resolució també es troba en la definició que proposen Lesh i Zawojewski (2007), que afirmen que una tasca amb un objectiu concret es converteix en un problema quan el resolutor -o el grup de resolutors- necessiten desenvolupar una manera més productiva de pensar en la situació donada. En el mateix sentit, Lester i Kehle (2003) suggereixen que el raonament i/o processos de pensament d'ordre superior han de ser presents durant la resolució d'un problema de matemàtiques, ja que l'essència del problema es troba en el desenvolupament de coneixements o estratègies no conegudes prèviament durant l'activitat.

Salovey i Mayer (1990), per la seva part, el defineixen com un procés cognitiu que s'adreça a transformar una situació concreta amb una meta plantejada quan no existeix un mètode de resolució obvi o directe. Aquesta aproximació, àmpliament acceptada per la comunitat científica, dona peu a la definició que fa PISA de la competència en la resolució de problemes (OCDE, 2010). PISA la defineix com la capacitat individual d'activar processos de resolució quan no és directament òbvia. Inclou la predisposició d'implicar-se en aquestes situacions en el sentit d'assolir el màxim potencial com a ciutadans constructius i reflexius.

Seguint també PISA (2018), per poder analitzar els aspectes clau que determinen què és una situació problemàtica o un problema és imprescindible conèixer tres elements: el context del problema, la seva naturalesa i els processos cognitius involucrats. (1) El context del problema pot ser personal o social. (2) La naturalesa pot ser estàtica o interactiva. Finalment, (3) Els processos cognitius involucrats en la resolució de problemes determinen les estratègies que el resolutor activa per tal d'afrontar-los (OCDE, 2010). A més, cal ressaltar els elements que defineixen un problema depenent del context o de les característiques i habilitats de les persones que intervenen en el procés de resolució (OCDE, 2013b).

Altres autors apunten que les diverses definicions del concepte de problema matemàtic fan referència a un o diversos dels elements següents:

- Subjectivitat: el resolutor ha de desconèixer la via de solució i interessar-se per trobar-la (Ontoria, 2006).
- Presència de relacions matemàtiques: en la solució es requereix l'ús de mitjans matemàtics (Vila i Callejo, 2004).
- Existència com a text: ús del llenguatge verbal per a formular-los. Tot problema sorgeix de la necessitat de formular verbalment una situació problemàtica identificada, la qual cosa està condicionada per la impossibilitat de pensar sense mediació del llenguatge (Fernández i Huepp, 2014).

Finalment, destacar una última classificació de tipus de problemes que proposen Lester i Charles (1992). Els autors classifiquen els problemes en: a) problemes estàndard de paraules o història, els quals requereixen que el subjecte transformi les afirmacions verbals en un model matemàtic; b) problemes no estàndard de recerca oberta, que fomenten l'ús de mètodes flexibles, ja que el resolutor no té procediments rutinaris per trobar una resposta; c) problemes de la vida real, que impliquen situacions en les quals els estudiants necessiten seleccionar i aplicar eines matemàtiques; i d) puzles, la resolució dels quals depèn de la sort o l'ús d'estratègies inusuals.

3.3.2. Fases de la resolució de problemes matemàtics

Tot i que no hi ha un clar consens respecte del que pot anomenar-se problema en matemàtiques o com classificar-los, existeix la convicció compartida que el procés de resolució de problemes pot dividir-se en quatre fases o nivells principals. Així Polya (1945), ja va dividir el procés de resolució d'un problema de matemàtiques en les següents fases: 1) comprendre el problema; 2) idear un pla; 3) desenvolupar el pla; i 4) revisar el procés. El treball de Polya ha influït a la comunitat d'investigadors en educació matemàtica i els diferents models presentats sobre els processos de resolució de problemes segueixen el mateix esquema que ell va proposar (Brandsford i Stein, 1986; De Guzmán, 2006; Mason et al., 1992). Tenint en compte aquests treballs previs, PISA 2015 (OCDE, 2013) també proposa que la resolució es divideixi en quatre estadis.

1. *Explorar i comprendre (Exploring and understanding)*. És l'estadi de l'exploració de la naturalesa de la situació, on la interacció amb la situació permet activar l'observació, el reconeixement, la relació amb experiències i coneixements previs, la detecció d'informació desconeguda i l'eliminació d'informació irrellevant. També es delimiten els obstacles que s'han d'afrontar. D'aquesta manera, s'integra la representació i la comprensió de la situació.

2. *Representar i formular (Representing and formulating)*. Un altre procés fonamental és la construcció de representacions mentals coherents de la situació, és a dir, la figuració de quin és el model de la situació del problema. Això pressuposa seleccionar la informació rellevant i organitzar mentalment els coneixements i les experiències anteriors. A més, també pot implicar dos subprocessos: la representació gràfica/simbòlica/verbal i la formulació d'hipòtesis a partir de factors clau del problema i les seves interaccions, organitzant i avaluant críticament la informació.

3. *Planificar i executar (Planning and executing).* Es tracta de marcar objectius parcials i finals, elaborar una estratègia per assolir-los (incloent-hi passos intermedis que s'han de dur a terme) i portar-ho a la pràctica.

4. *Revisar /reflexionar (Monitoring and thinking about).* Per una banda, cal revisar tot el procés, pas a pas, incloent-hi la comprovació dels resultats parcials i finals obtinguts. Per altra banda, s'han de detectar els fets inesperats i la implementació de mesures de correcció. Aquest procés de monitoratge comporta processos de reflexió sobre les solucions des de diferents perspectives. També inclou l'avaluació crítica de les hipòtesis i de les solucions alternatives, així com el desenvolupament de processos de recerca d'informació addicional i de clarificació.

3.3.3. Nivells en la resolució de problemes matemàtics

Per fer una bona conceptualització del constructe problema de matemàtiques també és imprescindible determinar els diferents nivells que existeixen en el procés de resolució. És important conceptualitzar i analitzar aquest constructe perquè ens permet determinar el nivell de competència de l'alumnat, en funció del grau de complexitat i profunditat del seu raonament matemàtic. Hi ha diferents autors que han presentat i reflexionat entorn d'aquests nivells de complexitat en la resolució (Chávez i Montes, 2015; Díaz i Aravena, 2021; López et al., 2006). A continuació, presentem tres nivells extrets de les diferents aportacions esmentades:

Nivell I: inclou aquelles operacions i accions que permeten identificar els elements del text, conceptes i relacions que hi apareixen, a més de realitzar inferències senzilles a partir de relacions que poden aparèixer en el text. Exemple: subratllar paraules, dades o idees; identificar els fets, fenòmens, objectes, personatges i al·lusions històriques que formin part dels referents del text; identificar els elements de l'estructura externa del text (dades, condicions i exigències); inferir significats de relacions matemàtiques que apareixen explícites en el text; parafrasejar el contingut del text; seleccionar informació donada explícitament; ometre informació innecessària.

Nivell II: conté aquelles operacions i accions que permeten establir relacions més complexes per a poder inferir les relacions de part-tot o oposició i emetre judicis. Per exemple: reformular el text; inferir significats de relacions complexes (part-tot, analogia, altres); identificar la relació de part-tot que es dona en el text; identificar els subproblemes; realitzar esquemes gràfics que representin la situació continguda en el text.

Nivell III: agrupa les operacions i accions que permeten fer transformacions, buscar noves vies de solució i emetre raons. És transferir els coneixements a situacions completament desconegudes. Exemple: elaborar imatges mentals sobre el text; transformar les condicions del text per a trobar altres vies de solució i/o comprovar la via emprada; resoldre el problema per diferents vies; formular problemes; transformar el problema.

3.3.4. Requisits en la resolució cooperativa de problemes matemàtics

Arriba el moment de presentar els requisits necessaris per a una resolució funcional dels problemes matemàtics, i més específicament, la resolució cooperativa dels problemes matemàtics. Resolució cooperativa perquè és la tutoria entre iguals la metodologia usada en el context del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016). Abans de presentar aquests requisits, però, cal conceptualitzar el constructe *resolució cooperativa de problemes matemàtics*.

Hi ha autors que n'han fet diferents aproximacions (Kirschner et al., 2011; Tindale i Sheffey, 2002), així com institucions com l'OCDE en el marc de l'avaluació de PISA (2018). Tenint en compte les diferents aportacions podem conceptualitzar la resolució cooperativa de problemes matemàtics com a la creació d'un espai on es distribueix el procés de resolució entre els membres de l'equip aconseguint el repartiment de la càrrega cognitiva. Cada un dels membres de l'equip o la parella posseeix una informació que ha de compartir de manera activa, discutir-la i recordar-la. L'equip ha de disposar d'objectius compartits, ha de realitzar esforços per arribar a consensos i així aconseguir l'èxit de l'equip.

A partir d'aquesta primera aproximació ja podem determinar, doncs, els factors clau que contribueixen a l'èxit de l'equip i que, per tant, són un requisit indispensable per a la resolució cooperativa funcional de problemes matemàtics. Aquests requisits són els tres següents: 1) la comunicació efectiva; 2) l'organització de l'equip; i 3) el tipus de cooperació que s'estableix (Flores et al., 2016). La comunicació efectiva entre les persones de l'equip (Dillenbourg i Traum, 2006) s'entén com el procés de comunicació de la informació correcta i les accions que cada alumne/a desenvolupa per poder construir una comprensió de la tasca compartida. Aquesta competència bàsica per arribar a acords d'equip inclou aspectes com tenir en compte les perspectives dels altres membres, així com la construcció i avaluació de la comprensió compartida al llarg del desenvolupament de la tasca. El segon aspecte clau és l'organització efectiva de l'equip perquè pugui actuar cada vegada de manera més autònoma en la consecució dels objectius. Aquesta organització requereix l'organització estructurada de la tasca per part del docent perquè hi hagi una comprensió de rols, i el manteniment i l'adaptació de l'organització. A més, el fet de treballar en equip implica mantenir desacords per assolir els objectius, i afrontar les emocions negatives que poden comportar aquests processos propis de l'equip (Barth i Funke, 2010). Finalment, destaca el factor que es refereix al tipus de cooperació i a les normes que van associades al compromís de pertinença a l'equip. En el treball cooperatiu, els principals aspectes que s'han de tenir en compte són la cognició de l'equip i les habilitats de comunicació matemàtiques (OCDE, 2013b), necessàries per produir una interacció -també en la dimensió de resolució de problemes.

3.3.5. Beneficis de la resolució cooperativa de problemes matemàtics

Finalment, després d'haver conceptualitzat el constructe de problema matemàtic, haver-ne exposat les fases, els nivells de complexitat i aprofundiment i els requisits per a la resolució funcional (en el marc de l'aprenentatge cooperatiu); a continuació, es destaquen alguns dels beneficis de l'ús d'estructures cooperatives per a la resolució de problemes matemàtics.

L'OCDE (2017) apunta els avantatges de l'aprenentatge cooperatiu davant la resolució individual en el procés de resolució de problemes. Per una banda, es destaca la resolució més efectiva de la tasca, la incorporació d'informació de diverses fonts de coneixement, de diferents perspectives i de diverses experiències; i, per l'altra, l'increment de la creativitat, la millora dels elements emocionals i afectius dels aprenents (Almo et al., 2022) i la qualitat de les solucions facilitades per les idees de tots els membres de l'equip.

A més, hi ha autors que apunten els beneficis pel procés d'aprenentatge que pot representar la distribució de la càrrega cognitiva (Palincsar i Herrenkohl, 1999), que implica la disminució de l'esforç cognitiu o la càrrega cognitiva (com apuntàvem anteriorment), al contrari de l'esforç que l'equip haurà de dedicar a la comunicació i la coordinació de les seves accions.

Per últim, cal tenir en compte que en els espais de cooperació es fa imprescindible la interdependència positiva (Johnson i Johnson, 1981) i la interacció social és un element clau sempre que estigui basada en la creació d'objectius compartits, d'un esforç per arribar a un consens des de diferents perspectives i d'intents organitzats per assolir l'èxit dels objectius plantejats.

3.4. El desenvolupament del discurs matemàtic

Des de la perspectiva socioconstructivista, el llenguatge és un eina indispensable per a construir aprenentatges en qualsevol àmbit. Segons Vygotsky (1979), el llenguatge segueix, com qualsevol funció psicològica, el procés d'internalització, indispensable per a la construcció de coneixements profunds. Mercer (2001) afirma que les potencialitats del llenguatge rauen en les oportunitats que ens ofereix per construir coneixements i significats de forma compartida. Per poder aprendre de la interacció establerta (Wertsch, 1988) cal que hi hagi una bona comunicació entre els interlocutors en el marc d'una activitat conjunta. Tenint en compte, doncs, la importància del desenvolupament del llenguatge per a la construcció de coneixement -també en el camp de les matemàtiques-, en el següent apartat es presenten les aportacions de la literatura en relació amb aquest constructe, per després associar-lo a l'aprenentatge cooperatiu i a la resolució de problemes matemàtics.

3.4.1. Aportacions de la literatura

Sense oblidar la importància de les aportacions del paradigma socioconstructivista i el paper indispensable del llenguatge per a l'aprenentatge, cal tenir en compte que en el camp concret d'estudi de les matemàtiques i la llengua tendeixen a produir-se confusions terminològiques que denoten una certa debilitat en la perspectiva ontològica (Planas i Schütte, 2018). En aquesta àrea d'estudi, s'ha tendit a conceptualitzar el llenguatge matemàtic com a sinònim de discurs. S'utilitzen indistintament diferents constructes per a referir-se al mateix concepte. Amb l'objectiu de suplir algunes de les mancances principals de la recerca trobem investigacions força recents (Planas, 2018) que se centren a unificar els constructes i termes utilitzats per a definir els elements d'investigació associats a l'ús de la llengua en matemàtiques.

Algunes investigacions recents -properes al nostre context- mostren acord a fer referència a aquest camp d'investigació amb el concepte de discurs matemàtic, també apunten la importància d'usar termes matemàtics clau de manera diferenciada i precisa (Adler i Ronda, 2017; Chronaki i Planas, 2018; Planas, 2014, 2016, 2018; Planas i Valero, 2016). És per aquest motiu que aquest ús terminològic, el discurs matemàtic, serà el que s'utilitzarà al present estudi. El concepte de discurs està associat al llenguatge i al text. Alguns dels continguts matemàtics associats al concepte de discurs són la reformulació de preguntes o la construcció i reconstrucció d'enunciats matemàtics per part de l'alumnat. El focus d'estudi se centra no únicament en el discurs matemàtic sinó en tot el procés d'interacció social a l'aula del qual el discurs en forma part.

Els mateixos autors (Chronaki i Planas, 2018; Planas, 2014, 2016, 2018) fan referència al discurs com a representació del llenguatge específic usat pels estudiants a la classe que permet maximitzar les oportunitats d'aprenentatge de les matemàtiques, alhora que representa un potencial per aprendre a fer i a pensar en el procés d'ensenyament i aprenentatge de resolució de problemes. A més, determinen que la combinació d'estratègies, normes i processos utilitzats a l'àmbit d'aula contribueixen al desenvolupament competencial de les matemàtiques i també en l'aprenentatge lingüístic (Chitera, 2011; Chval i Khisty, 2009; Civil, 2012; Moschkovich, 2002).

El discurs de l'estudiant és concebut com els múltiples usos del llenguatge que apareixen en el procés d'aprenentatge en el qual el discent es comunica. El discurs de l'alumnat es desenvolupa gràcies a la seva participació en pràctiques comunicatives, incloent-hi maneres d'explicar o definir constructes matemàtics (Planas et al., 2018). Els conceptes, teories, hàbits i competències desenvolupades durant l'ús compartit del discurs matemàtic a l'aula és decisiu per a resoldre problemes i aprendre processos matemàtics. Un estudi de Morgan i Alshwaikh (2010) posa de manifest que l'anàlisi de resolució de problemes per part dels alumnes en entorns rics d'aprenentatge, demostra com els alumnes utilitzen el llenguatge i altres mètodes de comunicació per a resoldre més competencialment els problemes.

Sabem, però, que tradicionalment ha existit la concepció que la construcció d'aprenentatges matemàtics no està influenciada pels sistemes de pensament verbal i lingüístic (Espinoza, 2017). Com a conseqüència, trobem pocs estudis específics que determinin la influència del discurs en el desenvolupament de les competències matemàtiques -d'aquí el valor i aportació del present estudi en aquest camp. En canvi, les investigacions recents centrades en aquest àmbit (Rubio, 2019; Sánchez-Cano i Gràcia, 2018) mostren que les habilitats lingüístiques són un indicador significatiu en relació amb l'aprenentatge de les matemàtiques, concretament, el domini numèric i la resolució de problemes matemàtics.

Els estudis apunten els beneficis de l'ús de la llengua oral i, més concretament, la metodologia conversacional com a eina per a desenvolupar diferents continguts d'aprenentatge i, de manera específica, continguts matemàtics (Sánchez-Cano i Gràcia, 2018; Serra, 2016). En tot procés d'ensenyament de les matemàtiques, doncs, és necessari establir situacions comunicatives amb el propòsit de simplificar els procediments que requereixen ser coneguts i perquè els alumnes hi puguin trobar una funcionalitat i generar, així, un aprenentatge significatiu (Coronado, 2015). La importància de la llengua dins l'educació matemàtica inclou el seu ús i també la seva forma (Boukafri, 2017), comportant que les funcions de la llengua permetin el desenvolupament de processos de raonament, argumentació i prova.

Per als aprenents, el discurs matemàtic que s'estableix a l'aula pot esdevenir un pont cap a la comprensió i la representació; alhora que pot afavorir la connexió i la transferència de conceptes matemàtics (Serra, 2016). L'oralitat és una eina de raonament discursiu en la resolució de les qüestions matemàtiques que, a més, dona entrada als diversos gèneres lingüístics com l'expositiu i l'argumentatiu. Els aprenents tenen la possibilitat d'argumentar, contraargumentar i arribar a acords sobre els millors camins a emprendre. Cal, doncs, fer un ús competencial de la llengua oral, com un recurs molt potent per a millorar, en aquest cas, la competència matemàtica i la resolució de problemes.

En el procés de resolució de problemes, el gènere argumentatiu pren un paper fonamental. L'alumne ha de jerarquitzar les dades i les raons que el porten a emprendre unes operacions i no unes altres i utilitzar els connectors lingüístics que els condueixin a l'objectiu proposat. Per comprendre el paper que juga el discurs matemàtic en el procés de resolució de problemes és important conceptualitzar els processos matemàtics necessaris per a resoldre'ls. En aquesta línia hi ha diferents investigacions recents (Díaz et al., 2018; Lozano i Tejada, 2019; Rubio, 2019; Villalonga 2017) que ens permeten construir una idea global dels diferents passos que s'activen quan els alumnes estan resolent problemes de caràcter matemàtic i que ens permeten comprendre el marc en el qual entra en joc el paper del discurs matemàtic.

Hi ha diferents autors que determinen els processos matemàtics activats per a resoldre problemes en la línia de les aportacions inicials de Polya (1945). Encara que amb alguns matisos, els passos generals proposats (Lozano i Tejada, 2019) són els següents: comprendre el problema -identificant les dades i usant el llenguatge amb precisió-; dissenyar estratègies de resolució -amb un augment progressiu de l'autonomia-; executar el pla d'actuació; dominar els continguts -amb un ús adequat del llenguatge formal-; reflexionar sobre les actituds posades en joc i activar la metacognició -reflexionant sobre el procés de resolució seguit.

En una línia d'estudi força coincident amb l'anterior Villalonga (2017) proposa un conjunt de processos per a la resolució de problemes on el llenguatge també juga un paper fonamental. En primer lloc, cal entendre el problema -tenint en compte la importància del nivell de coneixement que es posseeix, el procés d'autoregulació i el sistema de creences (Schoenfeld, 2013). En segon lloc, cal esbrinar com es connecten els diferents ítems o elements que componen el problema, com es vinculen els aspectes desconeguts amb les dades per obtenir la idea de la solució, i així traçar un pla d'acció. En tercer lloc, s'ha d'aplicar el pla. Finalment, i, en quart lloc, cal mirar enrere a la resolució per revisar-la, i extreure conclusions i aprenentatges per a futurs processos de resolució de problemes.

Un altre estudi recent (Díaz et al., 2018) considera, en una direcció semblant als estudis anteriors, quatre processos de resolució dels problemes. Comprensió del problema, presentació del pla, desenvolupament i revisió de la solució del problema. La investigació proposa articular els processos comunicatius, les habilitats lectores i el text expositiu a les diferents àrees del coneixement i dissenyar estratègies pedagògiques per millorar les competències de resolució de problemes.

Hi ha altres autors que fan èmfasi als processos activats durant la resolució de problemes matemàtics de manera encara més estretament lligada al paper del discurs matemàtic. En aquesta línia Rubio (2019) analitza la incidència que té la comprensió lectora en els processos d'anàlisi de les situacions matemàtiques en contextos reals. Determina, també, els processos d'anàlisi de les situacions numèriques en aquests mateixos contextos. Aquest fet permet el desenvolupament de les competències de comunicació i resolució de problemes en l'àmbit matemàtic. En aquest sentit, la investigació proposa l'establiment de la interdisciplinarietat entre el llenguatge i les matemàtiques. Així doncs, es determina la importància d'implementar la lectura literal, inferencial i crítica com una prioritat per a totes les àrees del coneixement, en concret les matemàtiques, complementada amb activitats d'escriptura que promoguin un procés complet i que enforteixin les competències textuals i comunicatives.

Molts dels estudis en educació matemàtica s'han centrat en la noció de relació social i altres en la noció d'interacció social. Tots ells apunten que les estructures socials i la seva concreció per mitjà de la interacció condiciona el desenvolupament de l'activitat matemàtica (Lerman i Zevenbergen, 2004). Altres estudis s'han centrat en el discurs a l'aula i les formes d'interacció promogudes per diferents tipus de discurs (Forman i Ansell, 2002). En examinar els tipus d'interacció social s'obté informació sobre els processos d'aprenentatge i se'n coneix el grau d'accés dels alumnes.

Des de la perspectiva de les teories socioculturals, el caràcter social del context d'aprenentatge ve donat per l'impacte de les interaccions entre els participants en els processos de construcció de coneixement i de la influència de les relacions socials en el desenvolupament de les interaccions (Planas, 2006). L'aprenentatge és un procés social que pot entendre's com a una forma de participació. Diferents autors apunten que l'ús de la dimensió social de l'aprenentatge, per mitjà de tècniques i mètodes cooperatius de treball, facilita el procés d'aprenentatge (Bielaczyc i Collins, 1999; Duran, 2009; Duran i Oller, 2017; Echeita, 2012; Johnson i Johnson, 2009, 2014a; Pujolàs, 2013, 2008; Slavin, 2010).

De manera més concreta, es pot destacar la importància dels exemples com un dels molts mitjans/estratègies per a desenvolupar el discurs matemàtic i la resolució de problemes (Montero i Mahecha, 2020). S'entén com a exemple un cas particular des del qual és possible generalitzar un coneixement matemàtic. La generació d'exemples presenta dos objectius: construir significats sobre la generalització que s'exemplifica i impactar a la creació d'oportunitats d'aprenentatge pels alumnes (dimensions semàntiques i pragmàtiques de qualsevol discurs). Un rastreig de la literatura sobre exemples en educació matemàtica apunta a l'existència d'usos d'exemples amb potencial en la creació d'oportunitats que siguin explorables i eventualment aprofitables per al desenvolupament de l'aprenentatge matemàtic dels alumnes. Respecte a la selecció d'exemples, Bills i Watson (2008) assenyalen la importància de considerar exemples que atenguin una diversitat de variacions i que de manera acumulativa contribueixin a l'ensenyament d'un objecte d'aprenentatge (Watson i Mason, 2005).

Les matemàtiques són concebudes, per tant, com un tipus particular de discurs i l'aprenentatge matemàtic emergeix en formes discursives específiques (Sfard, 2008). Així, en dinàmiques d'aula on els estudiants puguin entrellaçar el seu coneixement amb el dels altres es consideren experiències significatives per al desenvolupament del seu aprenentatge matemàtic. El discurs exerceix un paper fonamental en la comprensió de com els estudiants aprenen, per exemple, a argumentar en matemàtiques mitjançant la negociació de significats en situacions d'interacció. Moltes recerques emmarcades en aquest enfocament teòric se centren en l'estudi d'interaccions observables a l'aula de matemàtiques, entre estudiants involucrats en una activitat matemàtica (Krummheuer, 2011; McCrone, 2005).

Finalment, doncs, podem establir que el desenvolupament del discurs matemàtic és un objectiu educatiu fonamental dins l'àrea que implica activitats cognitives i socials i s'utilitza per implicar els estudiants en situacions comunicatives per construir idees matemàtiques compartides, intercanviar pensaments matemàtics, desenvolupar conceptes i estratègies matemàtiques i reflexionar sobre la seva comprensió matemàtica actual (Cooke i Buchholz, 2005). D'aquí la interconnexió que existeix entre el discurs matemàtic i l'aprenentatge cooperatiu. Tal com es planteja en la present investigació és a través de l'establiment d'estructures funcionals de treball cooperatiu i el reforçament explícit d'estratègies com es podrà desenvolupar i millorar el discurs matemàtic de l'alumnat, i conseqüentment, el seu nivell de competència en la dimensió de resolució de problemes matemàtic.

3.4.2. Estratègies resolució de problemes matemàtics associades a la metacognició i el llenguatge

La metacognició es defineix com el coneixement i la regulació de l'esforç cognitiu (Flavell, 1979). Es refereix al control d'una persona sobre el seu pensament i aprenentatge (Desoete i Ozsoy, 2009). La metacognició inclou tres factors: persona, tasca i estratègia. 1) El coneixement i les creences sobre un mateix i també sobre els altres. 2) El coneixement de la tasca: com es gestiona la tasca, quines estratègies existeixen en una tasca cognitiva i les característiques de la tasca cognitiva. I finalment, el desenvolupament d'estratègies, que inclou el coneixement sobre per què i quan s'ha d'utilitzar una acció cognitiva determinada per assolir els objectius d'un procés cognitiu.

Aquests tres factors, persona, tasca i estratègia del coneixement metacognitiu indicats per Flavell apareixen a la literatura en tres subcategories com a coneixement declaratiu, coneixement procedimental i coneixement condicional respectivament. L'activació d'estratègies per garantir la regulació implica controlar el resultat de qualsevol empresa cognitiva, planificar els passos següents, supervisar el rendiment actual quant a la seva efectivitat i revisar i avaluar el procés cognitiu (Baker i Brown, 1980). La regulació metacognitiva es considera en tres grups d'activitats cognitives en general: planificació, seguiment i avaluació. La planificació es refereix a decidir l'estratègia adequada i organitzar els recursos de l'individu; el control o regulació fa referència a la presa de consciència sobre el transcurs dels esdeveniments durant la representació; i l'avaluació es refereix a revisar els resultats i el procés d'un esforç cognitiu (Schraw i Moshman, 1995).

Narang i Saini (2013) van afirmar que la metacognició té un paper important en obtenir millors resultats dels estudiants en diverses tasques acadèmiques. En el context d'educació matemàtica, diversos estudis van afirmar que els individus amb nivells metacognitius més desenvolupats afronten millor les tasques de resolució de problemes matemàtics (Pennequin et al., 2010). Els estudiants que tenen coneixement sobre els seus punts forts i febles i diverses estratègies per utilitzar en noves tasques poden regular el procés de manera cognitiva i dominar fàcilment l'aprenentatge (Pintrich, 2002).

Cal afegir el paper clau de les estratègies metacognitives en el desenvolupament de la dimensió de resolució de problemes. Cinc dels principals models metacognitius -des de l'inicial de Polya (1945), passant per Schoenfeld (1985), l'*IMPROVE* de Mevarech i Kramarski (1997), el model d'instrucció metacognitiva o el model de l'Institut Nacional d'Educació Superior de Singapur (Lianghou i Yan, 2007)- coincideixen en assenyalar la importància de la metacognició i de l'ensenyament explícit d'estratègies metacognitives en contextos d'ensenyament i aprenentatge en la resolució de problemes matemàtics (Ricardo-Fuentes et al., 2023).

Mevarech i Kramarski (2014) observen que el professorat de matemàtiques emfatitza l'ús de les estratègies metacognitives, però poques vegades dedica temps a ensenyar i a practicar processos metacognitius que empra habitualment per a la resolució de problemes. Aquestes autores porten a terme la comparativa dels cinc models metacognitius i arriben a la conclusió que és possible ensenyar estratègies metacognitives a les classes ordinàries puntualitzant que no hi ha un límit d'edat. També observen que l'ús de preguntes autodirigides permet que els estudiants prenguin consciència dels requisits i les exigències de les tasques, del coneixement previ que tenen, i de les capacitats i estratègies que serien adients per a la resolució de problemes. Així mateix, afegeixen que aquest tipus de preguntes es focalitzen en la comprensió, en les connexions, en les estratègies i en la reflexió; per tant, activen processos de planificació, monitoratge, control i reflexió.

A més, en una investigació prèvia, Mevarech i Kramarski (2003) van mostrar que desenvolupar el treball metacognitiu en estructures cooperatives és més efectiu per a la millora del discurs matemàtic, el rendiment matemàtic, la transferència de coneixement i la creativitat matemàtica. Així s'observa que els resultats d'aquest conjunt d'investigacions atorguen ple sentit a l'ús i la pràctica de les estratègies metacognitives en contextos cooperatius, tal com planteja el programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

Tal com s'apuntava, l'ús d'una estratègia tan valuosa com són les preguntes en el treball cooperatiu s'ha considerat un bon recurs del procés metacognitiu. Les preguntes com a estratègia ajuden els estudiants a controlar i regular el seu processament i comprensió cognitiva i a construir nous coneixements (King, 2002). La concepció del procés d'ensenyament-aprenentatge ha sofert diverses transformacions al llarg dels anys, no obstant això, el valor de les preguntes ha estat reconegut sempre. La didàctica ha abordat les preguntes com a procediments, fonamentalment per a la direcció i control de l'activitat cognoscitiva dels estudiants. Les preguntes obertes exigeixen respostes més o menys desplegades i no previsibles totalment, on l'alumne pugui seleccionar, integrar, afegir, crear i en les quals s'involucren amb major èmfasi la subjectivitat de l'estudiant (Moores et al., 2006)- en una línia coincident a la proposada en el programa.

Rasmussen i Secher (2022) presenten els elements sòcio-matemàtics que enriqueixen el diàleg establert entre estudiants en sessions de tutoria entre iguals recíproca: 1) escoltar activament a través de la formulació de preguntes i oferint suport a través de la comunicació no verbal; 2) esbrinar què entén o no l'altra persona; 3) compartir significats i crear connexions i, 4) indagar sobre preguntes i possibles respostes.

En el nostre context més proper, l'any 2021 el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya (Direcció General de Currículum i Personalització) va presentar un document interessant associat a l'ús d'estratègies discursives, i més concretament, la formulació de bones preguntes, per a provocar respostes productives en l'alumnat. El document planteja la necessitat de presentar a l'alumnat bones preguntes, que vagin més enllà de recollir informacions concretes i que estimulin la construcció de coneixements matemàtics.

També s'assenyalen les característiques que haurien de tenir les anomenades "bones preguntes": 1) són preguntes productives o "autèntiques" que poden ser formulades en forma de problema, i han de facilitar la construcció de respostes a partir dels coneixements apresos, que s'activen de manera creativa, ajudant a reestructurar el coneixement i aportant-ne de nou. 2) Han d'estar contextualitzades, per evitar les respostes literals i plantejant situacions noves on transferir el coneixement. 3) Han de facilitar "pistes" del que ha d'incloure la resposta, per concretar la demanda i orientar l'alumnat, per tal d'evitar incoherències, en les idees que s'inclouen o bé en l'estructura que es presenta, i així aproximar-se a la resposta que esperem. I finalment, 4) Han de ser concretes sobre el que es pretén preguntar, emprant els verbs adients per fer paleses les funcions cognitivolingüístiques (definir, descriure, explicar, justificar, argumentar, etc.) que es volen activar en l'elaboració de la resposta.

En l'àmbit internacional trobem un recurs interessant (*Right Question Institute*-RQI) per a fomentar, també, el treball explícit d'estratègies discursives com són la formulació activa de preguntes per als altres i per a un mateix tant per a la millora de la competència matemàtica (i la comprensió i resolució de problemes), com per a la millora d'altres competències de caràcter més transversals.

Hi ha altres autors que fan referència a l'ús d'estratègies metacognitives -molt associades al desenvolupament del discurs- que poden ajudar a la comprensió i la resolució dels problemes matemàtics. Ping i Jitendra (1999) en la seva metanàlisi apuntaven que és necessari l'ensenyament explícit d'estratègies com les autopreguntes, l'autoregulació, la creació d'hipòtesis o l'estimació de la resposta. Una metaanàlisi més recent (Zhang i Ping, 2012) apunta a la mateixa direcció: es presenten els beneficis de l'ensenyament d'estratègies en què s'ensenya als alumnes una sèrie de passos, per exemple "què em pregunten?", "quines dades tinc?" o "què necessito saber?" per resoldre els problemes.

Una investigació de Swanson de l'any 2015 acaba proposant l'ús d'estratègies verbals per a la resolució competencial de problemes matemàtics. Consignes tals com: troba i subratlla la pregunta, encercla els números, assenyala amb un rectangle la paraula clau, ratlla la informació no necessària, decideix què has de fer (sumar, restar o totes dues operacions), entre altres. L'any 2020 Lein et al. apunten els beneficis dels problemes on es treballen estratègies lingüístiques específiques per l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge.

L'any 2005 es va publicar un estudi on es determinaven diferents estratègies per a millorar el procés de resolució basades en l'ús d'esquemes (Ping et al., 2005). El procés a seguir és el següent: 1) llegir el problema tractant de comprendre'l; 2) identificar el tipus de problema i fer servir un diagrama per representar-lo; 3) transformar el diagrama en una expressió matemàtica i fer-la servir per resoldre el problema i, finalment, 4) revisar i comprovar que la solució és adequada.

Finalment, apuntar que encara hi ha dos estudis que associen de manera més directa l'entrenament i ús d'estratègies amb el discurs de l'alumnat (Moran et al., 2014; Rodríguez i Domínguez, 2016). Els primers apunten l'interès d'usar una estratègia lingüística com és la paràfrasi com a recurs per interpretar i resoldre de manera funcional els problemes matemàtics. Les segones se centren en els processos de comprensió destacant diferents activitats lingüístiques per a millorar-la: activitats per treballar analogies verbals, per adquirir un desenvolupament lèxic, lectures actives i comprensives i de construcció d'inferències.

3.4.3. Implicacions de la tutoria entre iguals en el desenvolupament del discurs matemàtic

Trobem diferents recerques que posen de manifest que l'ús positiu o negatiu del discurs matemàtic a l'aula depèn essencialment de com es conceben les matemàtiques en relació amb els discursos socials entre els alumnes i l'existència de pràctiques flexibles relacionades amb el llenguatge (Planas i Setati-Phakeng, 2014; Setati i Planas, 2012). La qualitat de les activitats estructurades cooperativament i la discussió en parella afavoreix la construcció d'aquests aprenentatges, a diferència de l'organització tradicional de l'aula en tasques individuals. Aquests aprenentatges estan associats a les oportunitats per parlar, comunicar i modelar el llenguatge acadèmic i disciplinar (Chico i Planas, 2018).

Així doncs, amb relació a l'organització funcional del discurs a l'aula per aprendre matemàtiques i per aconseguir fer un ús real i funcional de la llengua oral com a eina fonamental per aprendre en el procés de resolució de problemes, la millor opció és l'organització de l'aula en grups d'aprenentatge cooperatiu (Herrada i Baños, 2018). Treballant en equip es desenvolupen competències comunicatives i metodològiques i és un marc ideal per aprendre a dialogar (Pujolàs, 2008). És aquest tipus d'agrupament el que permetrà generar situacions de discussió i, a través del treball sistemàtic de la llengua oral, desenvolupar les funcions comunicatives, que, alhora, implicarà considerar les habilitats comunicatives que es despleguen en l'exercici d'aquestes funcions. En aquesta línia trobem una investigació recent (Planas et al., 2018), que remarca les possibilitats d'aprenentatge que permet treballar usant metodologies que impliquin la creativitat intel·lectual i la capacitat de prendre decisions treballant en equip, per sobre de rebre únicament inputs de continguts matemàtics de manera inqüestionable.

Serà a través del discurs i la discussió matemàtica, en les diferents fases del procés concret de resoldre un problema, com els alumnes aniran disposant de cada vegada més eines per al desenvolupament de la competència comunicativa. Sánchez-Cano i Gràcia (2018) fan una proposta de treball explícit del discurs matemàtic resolent problemes de manera cooperativa. Aquesta proposta és fàcilment equiparable a les diferents fases del procés de resolució contemplades al programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016). A la fase de plantejament del problema o en la detecció de les dades importants i la planificació els estudiants hauran de comprendre l'enunciat i definir els termes que apareixen. En aquest primer moment, els aprenents han de tenir l'oportunitat de parlar i conversar per explicitar el què ha entès cadascú, fer preguntes de tempteig o concretar la presa de decisions.

Seguidament, a la fase de desenvolupament o de resolució és necessari l'intercanvi verbal per a prendre decisions de què es necessita, raonar sobre si les dades que s'estan obtenint van o no en la direcció proposada, comprovar si les dades poden generar algun dubte i utilitzar estratègies adequades per a realitzar operacions. Per acabar, a la fase de presentació de resultats, elaboració de respostes i revisió, és imprescindible utilitzar la parla per exposar, argumentar i acordar. Cal que els discents argumentin i acordin els resultats als quals s'ha arribat, comprovin l'encaix dels diferents elements o resolguin possibles dubtes. Serà, doncs, a través del treball cooperatiu de l'alumnat, com es podran anar incorporant estratègies metodològiques d'ajuda al discurs matemàtic construït entre els alumnes, abans, durant i després del procés de resolució de problemes matemàtics (Sánchez-Cano i Gràcia, 2018).

Així doncs, podem dir que existeix una estreta relació entre l'ús de metodologies cooperatives en el procés de resolució de problemes, i la possibilitat que els alumnes desenvolupin competències i habilitats comunicatives (Sarah et al., 2021). Entre aquestes habilitats (Pujolàs, 2003) podríem destacar la capacitat de comunicar-se en diferents contextos, expressar les pròpies idees i escoltar les dels altres o ser capaç de posar-se al lloc de l'altre. El llenguatge és utilitzat com a mediador de l'execució dels rols, fet que facilita i enriqueix el discurs establert perquè l'estudiant verbalitza el treball que va fent en traspassar-lo a l'altre: un alumne dona una consigna, l'altre realitza una acció, i el primer comprova com s'ha fet, en un procés recursiu de construcció d'aprenentatges matemàtics (Pujolàs, 2003).

Flecha (2000) determina que l'aprenentatge és dialògic si els participants utilitzen enunciats vàlids per a justificar els seus arguments. Tenint en compte l'aproximació teòrica, es defineix la "parla dialògica" com el tipus de diàleg establert entre dues o més persones que són capaces de parlar i orientar els seus arguments per a arribar a acords en relació amb diferents tasques i activitats matemàtiques. La innovació d'aquesta aproximació és que està explícitament centrada en la cerca de la comprensió, per a reforçar els arguments vàlids desenvolupats.

A l'educació matemàtica hi ha una gran tradició en utilitzar el discurs per analitzar com els estudiants arriben a la comprensió dels conceptes matemàtics i les seves connexions (Edwards, 1993; Greeno, 1997). Sfard (2002) apunta que la comunicació no hauria de ser entesa com a una simple ajuda per a pensar sinó com a un aspecte central en ella mateixa. L'autora afirma que aprendre matemàtiques està definit, de manera específica, pel discurs matemàtic.

En l'àmbit normatiu, les polítiques educatives actuals aconsellen fomentar la discussió matemàtica mitjançant converses que proporcionin retroalimentació, suport mutu i desafiaments matemàtics per a un aprenentatge significatiu (Chico, 2014). S'accepta el vincle entre la interacció en parella i en grup amb la construcció de coneixement matemàtic. S'apunta als beneficis cognitius de compartir idees i raonaments matemàtics sobretot quan hi ha diferents punts de vista (Morsanyi et al., 2018). Així les diferències entre estudiants, en concret les diferències en el pensament matemàtic, són un requisit previ per a una discussió matemàtica productiva en la qual s'aprengui (Sfard, 2008). Certes accions adreçades a la reflexió matemàtica, com ara mostrar, explicar, justificar i reconstruir el treball propi així com explicar, valorar i reconstruir el treball dels altres, condueixen a l'augment del nivell conceptual en una discussió.

Finalment, cal remarcar que la discussió de petit equip o parella pot facilitar l'aprenentatge en convidar els estudiants a ser explícits en les argumentacions i justificacions dels seus raonaments així com en els estàndards que utilitzen per a decidir si un argument és acceptable (Morguen et al., 2020). A McCrone (2005) s'afirma que animar als estudiants a prendre una postura més reflexiva en el seu raonament matemàtic facilita la construcció i comprensió de conceptes matemàtics. En aquest sentit, posar a prova, escoltar i incorporar les idees dels altres, en l'ús de metodologies com la tutoria entre iguals, ajuda a consolidar raonaments mitjançant la verbalització.

3.4.4. Implicacions del discurs matemàtic en el procés de resolució cooperativa de problemes matemàtics

En quins sentits s'afavoreix la competència en resolució de problemes amb l'ús de la tutoria entre iguals i l'activació del discurs matemàtic? En primer lloc, expressar permet activar la comunicació matemàtica, com ara explicar, manipular diferents representacions, preguntar, respondre i corregir els errors d'altres (King, 1998). En segon lloc, els estudiants poden assajar els seus coneixements, integrar els coneixements previs en altres de nous i generar noves idees. En tercer lloc, poden produir explicacions rellevants, prioritzant la informació i decidint quins conceptes estan més relacionats amb els temes bàsics i, després, reorganitzar les connexions conceptuals (Chi et al., 2008). En quart lloc, els estudiants poden supervisar les idees que els ajudin a avaluar l'amplitud i la profunditat del seu propi coneixement i millorar idees incorrectes o insuficients (Roscoe i Chi, 2008). En cinquè lloc, els estudiants haurien de desglossar detingudament els exemples en molts passos i enllaçar-los amb els principis subjacents per obtenir una comprensió més profunda (Atkinson et al., 2003). Tota aquesta informació tan valuosa ens porta a afirmar que cal desenvolupar el discurs matemàtic dels estudiants per millorar el seu nivell de competència en resolució de problemes matemàtics (Hunter i Hunter, 2018; Webb et al., 2019).

Austin i Howson (1979) classifiquen les primeres recerques d'educació matemàtica i llengua que es remunten a la dècada de 1940 en tres temes. La llengua de l'alumne/a: la llengua o llengües i les habilitats lingüístiques que els alumnes aprenen a la classe de matemàtiques. La llengua del professor i de la classe: la llengua o llengües i les habilitats lingüístiques que els professors porten a la classe de matemàtiques. La llengua de les matemàtiques: la llengua o llengües i les característiques lingüístiques dels textos que sorgeixen dins de la pràctica de les matemàtiques.

D'acord amb Gee (2005), des de la perspectiva social en la qual ens situem, el discurs és molt més que *el que es diu*: és una combinació de dir-escriure-fer-ser-valorar-comportar-se. Addicionalment, segons Pimm (1990), a la classe de matemàtiques hi ha dues raons principals per tal que els alumnes parlin: parlar per un mateix i parlar per als altres. Aquest enfocament dialògic dona lloc a oportunitats d'aprenentatge per a alumnes, per exemple, quan tracten d'expressar les seves solucions o d'entendre punts de vista alternatius. Stein i Smith (2011) afirmen que les discussions conjuntes permeten als alumnes comunicar i avaluar els seus pensaments i al professor guiar aquests pensaments en direccions matemàticament sòlides.

El discurs matemàtic inclou maneres de parlar, actuar, interactuar, pensar, llegir i escriure valors matemàtics, creences i punts de vista. Participar en les pràctiques del discurs matemàtic consisteix a parlar i actuar de la manera en què les persones matemàticament competents parlen i actuen quan parlen de matemàtiques (Moschkovich, 2002). En la classe de matemàtiques existeixen normes pròpies de la discussió matemàtica, normes sòcio-matemàtiques (Yackel i Cobb, 1996) que regulen l'argumentació i influeixen a les oportunitats d'aprenentatge.

A més, existeixen diferents tipus de reaccions: aprovar, desaprovar, repetir, replantejar, traduir, redirigir, sondejar, ampliar, incidir i retornar (Ruthven i Hofmann, 2016). Així com repetir, usant les mateixes paraules; parafrejar, substituint paraules per altres similars per a la mateixa idea; ampliar, substituint paraules per altres similars afegint contingut matemàtic; i relatar, usant altres paraules per a la mateixa idea. Cal reconèixer a l'alumne/a com a autor d'idees matemàtiques. Això implica posicionar als alumnes respecte a: l'avaluació de les seves idees; les normes socials i sòcio-matemàtiques (Yackel i Cobb, 1996).

Detallem, a continuació, el llistat de funcions lingüístiques a l'àrea de matemàtiques partint d'O'Connor i Michaels (2019) per a la millora de la dimensió de resolució de problemes matemàtics:

1. Posicionar als alumnes en termes de l'activitat matemàtica.
2. Donar rols als alumnes (com fer hipòtesis i demostrar enunciats).
3. Explicar el raonament.
4. Resumir, repetir o afegir.
5. Crear alineacions i oposicions sobre les idees matemàtiques.
6. Ajudar els alumnes a escoltar-se entre ells.
7. Aclarir.
8. Emfatitzar o destacar importància.
9. Ajudar els alumnes a parlar més matemàticament.
10. Estendre els pensaments de l'alumnat.
11. Empènyer al desenvolupament d'una idea.
12. Ajudar els alumnes a escoltar.

El suport a la participació dels alumnes a discussions matemàtiques requereix escoltar i descobrir el contingut matemàtic comunicat; i re-expressar intervencions amb termes més adequats matemàticament parlant (Moschkovich, 1999). El concepte *Revoicing* consisteix a repetir, parafrejar, relatar o ampliar expressions d'idees matemàtiques expressades en intervencions de participants i amb efectes discursius en el desenvolupament d'idees matemàtiques. Finalment, l'ús de *Revoicing* pot ajudar alumnes a seguir el que està succeint matemàticament en discussions de classe. En definitiva, l'ús competent del discurs matemàtic a l'aula pot contribuir al desenvolupament de la dimensió de resolució de problemes matemàtics quan els alumnes treballen usant estructures cooperatives com la tutoria entre iguals.

3.5. La construcció de l'autoconcepte matemàtic

Analitzar com l'autoconcepte es vincula amb l'assoliment acadèmic, i més concretament, amb la dimensió de resolució cooperativa de problemes matemàtics, des de l'escola primària fins a l'adolescència primerenca i mitjana podria ajudar a comprendre el desenvolupament de l'autoconcepte i l'assoliment durant tota l'escolarització. És aquest constructe el que s'abordarà en els següents apartats.

3.5.1. L'autoconcepte

Entenem que l'autoconcepte positiu és la base del bon funcionament personal, social i professional; depenent d'ell, en gran mesura, la satisfacció personal o altrament, el sentir-se bé amb un mateix. És per aquest motiu que, sovint, fomentar la seva millora en els centres escolars (Brookover i Lezotte, 1979) es converteix en un dels objectius a assolir en diversos programes d'intervenció desenvolupats en els nivells educatius obligatoris.

Per Rosenberg (1979), l'autoconcepte es conforma per tots els pensaments i sentiments individuals que fan referència a un mateix com un objecte particular en relació amb una habilitat pròpia. En canvi, per Shavelson et al. (1976), l'autoconcepte es resumeix en la percepció que cadascú té de sí mateix formada per experiències i relacions amb l'entorn, on les persones significatives juguen un paper important. Marsh i Yeung (1997) consideren l'autoconcepte com un conjunt de percepcions o punts de referència que els individus tenen sobre sí mateixos; el conjunt de característiques, atributs, qualitats, deficiències, capacitats i límits, els valors i les relacions que les persones saben que són una descripció d'elles mateixes i que perceben com a dades relatives a la seva identitat. Per la seva banda, Lee (2009), defineix l'autoconcepte com un conjunt de coneixements, actituds i percepcions que les persones tenim sobre nosaltres mateixes i les característiques o atributs que usem per a descriure'ns.

Marsh et al. (2019) defineixen l'autoconcepte com l'autopercepció dels individus formada a través de les seves pròpies experiències i interpretacions del seu entorn. Segons Parker et al. (2018), una definició alternativa és la suma de les característiques mentals i físiques dels individus i la seva pròpia avaluació. L'autor defineix tres aspectes principals de l'autoconcepte: el comportamental (acció), l'afectiu (sentiment) i el cognitiu (pensament). Segons Marsh i O´Neill (1984), l'estructura de l'autoconcepció de les matemàtiques és polifacètica i jeràrquica, amb facetes cada cop més diferenciades amb l'edat. Marsh i Shavelson (1985) i Lee (2009) van arribar a la conclusió que les matemàtiques eren la matèria en la qual el rendiment acadèmic dels estudiants estava més influenciat pel seu autoconcepte.

A continuació, es desglossarà el concepte més genèric en els tipus d'autoconcepte que podem trobar i els conceptes associats, com l'autoeficàcia o la motivació.

3.5.2. L'autoconcepte acadèmic

Un estudi recent va examinar el desenvolupament de la relació entre l'autoconcepte i l'assoliment acadèmic en el domini de les matemàtiques. Watt (2006) va comprovar que les pròpies creences dels estudiants respecte a les seves habilitats en matemàtiques mediaven la relació entre la consecució matemàtica primerenca i posterior. Una visió més positiva de les habilitats matemàtiques i lectores va mostrar nivells més alts d'assoliment de les matemàtiques i de la lectura, respectivament, fins i tot per als estudiants amb menys rendiment. Aquests resultats suggereixen que l'autoconcepte de la capacitat té un paper important en la motivació per l'assoliment al llarg del temps.

Les emocions tenen un rol important en els entorns educatius, ja que influeixen en els processos i estratègies cognitives, en la presa de decisions i en la motivació (Kim i Pekrun, 2014). Diversos estudis han demostrat que experiències emocionals com el gaudi i l'ansietat estan vinculades recíprocament a l'assoliment matemàtic (Ahmed et al., 2013; Szücs i Mammarella, 2020). Una metaanàlisi de Ma (1999) va demostrar una correlació global de .27 entre l'ansietat de les matemàtiques i l'assoliment de les matemàtiques entre estudiants de primària i secundària. A més, s'ha apuntat la relació entre l'ús de la metodologia de la tutoria entre iguals i la millora dels nivells d'ansietat envers les matemàtiques (Moliner i Alegre, 2020b).

Morony et al. (2013), per la seva banda, també van trobar una correlació de .27 entre l'ansietat matemàtica i l'assoliment en una gran mostra internacional d'alumnat de 15 anys. Per això, les creences, comunament conegudes com l'autoconcepte acadèmic, són crucials per comprendre la relació entre el desenvolupament acadèmic i les emocions. La idea clau hauria de ser la presa de consciència entre els educadors de les formes en què contribueixen al desenvolupament de l'autoconcepte dels estudiants (Lim i Chapman, 2013; Urdan i Schoenfelder, 2006).

3.5.3. Autoconcepte i autoeficàcia

El procés ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques constitueix un dels àmbits de la recerca científica que major interès ha despertat en els últims anys. Diverses avaluacions a nivell internacional sobre rendiment en la matemàtica (OCDE, 2013; PISA, 2018) revelen que un alt percentatge d'alumnes fracassen en l'educació secundària i mostren dificultats per a superar amb èxit aquesta matèria (Vizcaino i Manzano, 2017).

Diferents autors, com Abrate et al. (2006) n'investiguen les causes. Schunk i Ertmer (2000) li ho atribueixen a l'autoeficàcia percebuda per a aprendre aquesta ciència. En l'àmbit de les creences epistemològiques sobre les matemàtiques es troben els treballs de Schommer i Duell (2013) els qui van considerar que si els alumnes consideren que l'àrea no és útil per a la seva vida o en una carrera futura, no voldran dedicar el temps i l'esforç necessari per a aprendre-la; al mateix temps, en aquests estudis van mostrar que les creences epistemològiques (molt associades a l'autoeficiència) sobre les matemàtiques guarden relació amb l'ús eficaç d'estratègies de solució i amb l'assoliment acadèmic.

Com a apunt d'interès es podria destacar que nombroses recerques deixen en evidència, a més, que l'actitud negativa cap a l'aprenentatge de la matemàtica és més acusada entre les noies, i presenten majors nivells d'ansietat enfront de les tasques en aquest àmbit, i menors nivells d'autoeficàcia (Akin i Kurbanoglu, 2011). És possible afirmar que podria haver-hi patrons emocionals en les dones basats en factors culturals com a creences i estereotips de menor domini en matemàtiques i, per tant, més baixa competència en l'àrea (Nosek i Smyth, 2011).

3.5.4. Autoconcepte i motivació

La motivació en matemàtiques inclou aspectes associats a la manera com afrontar els reptes matemàtics i la valoració de les pròpies habilitats (Gottfried et al., 2007). Algunes persones amb alts nivells d'ansietat eviten més les matemàtiques, altres, hi posen més esforç (Lyons i Beilock, 2012). L'ansietat i la motivació en matemàtiques conjuntament milloren la predicció de bones actituds i predisposició envers els objectius matemàtics a assolir, en comparació a les dues variables per separat. L'activació de les parts del cervell associades a la motivació permet que s'evitin els efectes més negatius de la tasca matemàtica (Lyons i Beilock, 2012).

La correlació positiva entre la motivació envers les matemàtiques i el rendiment es troba principalment en els problemes de càlculs i els aplicats (no a altres àmbits curriculars de matemàtiques). Els avantatges i desavantatges de l'ansietat en matemàtiques envers el rendiment depenen no només dels diferents nivells d'ansietat sinó també com de motivats estan els alumnes per a tenir bons resultats (Fiorella et al., 2022). Aquest patró apunta la importància de la influència de la motivació envers les matemàtiques per a mobilitzar recursos cognitius i regular els efectes negatius durant el procés de resolució de problemes matemàtics. Una combinació d'uns nivells moderats d'ansietat i una alta motivació intrínseca pot ajudar a potenciar el procés d'aprenentatge de l'alumnat (Gottfried et al., 2007).

3.5.5. Autoconcepte i resolució de problemes matemàtics

En l'actualitat, les matemàtiques juguen un paper fonamental en la formació dels alumnes, dotant-los de les eines necessàries perquè sàpiguen desenvolupar-se i actuar de manera adequada a la societat de la informació (Molera, 2012). El seu domini és imprescindible perquè els aprenents puguin estructurar la informació que els arriba, actuar amb autonomia i resoldre problemes quotidians. La importància d'aquesta àrea del coneixement entra en contradicció amb els baixos resultats obtinguts en diverses proves avaluatives internacionals i nacionals (OCDE, 2017). Aquests registres subratllen la preocupant situació acadèmica d'alguns alumnes que posa de manifest que el mètode matemàtic (Hidalgo et al., 2004) requereix una exigència sistemàtica en termes de rigor i reflexió i que les matemàtiques, presenten una dificultat intrínseca.

Les dificultats a l'àrea de matemàtiques dels estudiants, doncs, s'ha tornat preocupant en molts països (Yáñez-Marquina i Villardón-Gallego, 2016). Tot i la importància creixent del pensament matemàtic i les habilitats relacionades amb les matemàtiques per al desenvolupament integral de l'individu, aquesta àrea és percebuda per la majoria d'estudiants com a abstracte, difícil i sense relació amb les tasques quotidianes. Com a conseqüència, molts dels estudiants presenten actituds negatives envers les matemàtiques, manifestant sentiments d'aversió, intranquil·litat i inseguretat (Gómez-Chacón, 1997).

Un dels factors principals d'aquesta situació és que l'ensenyament matemàtic a molts centres educatius se centra en tasques mecàniques i poc funcionals que no ajuden els alumnes a desenvolupar concepcions positives envers les matemàtiques (Boaler i Dweck, 2016). En canvi, sabem que l'autoconcepte i concepcions dels alumnes tenen efectes directes i indirectes sobre l'assoliment acadèmic (Timmerman et al., 2017). De manera concreta, en el camp de les matemàtiques, existeix una correlació entre l'autoconcepte matemàtic i l'assoliment de competències.

La recerca ens ha permès saber que l'aprenentatge i el rendiment acadèmic es veuen condicionats per factors de diferent índole, entre ells, els motivacionals juguen un paper primordial (Pintrich i Schunk, 2006). Això és així, especialment, quan els alumnes s'han d'enfrontar a tasques escolars complexes com són les matemàtiques i en particular, la resolució de problemes (Turner et al., 1998). Estimular els sentiments i creences dels estudiants en la seva pròpia competència matemàtica i fer èmfasi en el domini afectiu (Molera, 2012), per tant, podria conduir a una millor competència en la dimensió de resolució de problemes matemàtics.

3.5.6. Implicacions de la tutoria entre iguals en la construcció de l'autoconcepte matemàtic

En la línia de les aportacions de Campit i Garin (2017), podem dir que la interacció entre iguals té una influència positiva en l'actitud cap a les matemàtiques i la motivació acadèmica. Els efectes positius que una organització cooperativa de la classe té per a l'ensenyament de les matemàtiques estan provats (Ibernón, 2017). Això implica que els estudiants immersos en una metodologia d'aprenentatge entre iguals poden tenir una actitud més favorable en relació amb l'àrea de matemàtiques (Campit i Garin, 2017) i més probabilitats d'assolir un èxit acadèmic (Capar i Tarim, 2015). S'ha de dir, però, que l'autoconcepte és un constructe complex i a continuació presentarem estudis que mostren resultats força divergents.

Per una banda, Alegre et al. (2019) van realitzar una meta-anàlisi on s'analitzaren 50 estudis independents que van provar l'efectivitat de la metodologia de tutoria entre iguals per a la millora de l'autoconcepte matemàtic en un 88%. Després de realitzar un qüestionari d'autoconcepte matemàtic validat es van notificar millores estadísticament significatives per als grups experimentals. La conclusió principal d'aquest estudi és que la tutoria *same-age* i *recíproca* pot ser molt beneficiosa per a l'autoconcepte matemàtic dels estudiants de secundària. Hi ha diverses recomanacions per als educadors sorgides de l'estudi: utilitzar la tutoria de la mateixa edat i recíproca abans que la tutoria *cross-age* i fixa; cal apostar per programes de tutoria que durin quatre setmanes o menys amb dues a quatre sessions de 25 minuts o menys a la setmana.

Per l'altra banda, hi ha altres recerques, però, que apunten que els resultats d'estudis en el camp no són concloents. Autors com Sticca et al. (2017) o Onetti et al. (2019) afirmen que la transició de l'escola primària a la secundària sol donar lloc a una disminució de l'autoconcepte de les matemàtiques dels estudiants i que tot i que s'aposti per un enfocament metodològic determinat és complex generar millores en l'autoconcepte dels joves.

Addicionalment, hi ha diferents meta-anàlisis en el camp dutes a terme per Ginsburg-Block et al. (2006) i Ullah et al. (2018) que han assenyalat que la tutoria entre iguals sol tenir un impacte positiu en l'autoconcepte dels estudiants, però la importància de l'efecte encara s'ha de demostrar. En els estudis pioners de Fantuzzo et al. (1992), Fantuz et al. (1995), Ginsburg-Block i Fantuzzo (1997) i Topping et al. (2003) la meitat d'estudiants van mostrar millores importants en l'autoconcepte, mentre que els resultats de l'altra meitat no van ser significatius o no van ser concloents.

Tot i que en molts articles sobre la recerca en el camp mostren resultats positius i millores en l'autoconcepte de les matemàtiques dels estudiants, només alguns d'ells reporten millores estadístiques significatives o mides d'efectes significatius (Moliner i Alegre, 2020a; Vasalampi et al., 2020). Autors com Froiland i Davison (2016), Sáinz i Upadyaya (2016), Westphal et al. (2018) indiquen que l'ajuda dels companys pot ser beneficiosa per l'autoconcepte dels estudiants de matemàtiques i afirmen que es necessita més recerca per indagar sobre els avantatges del suport entre iguals en les emocions dels estudiants.

3.5.7. Implicacions de l'autoconcepte matemàtic en el procés de resolució cooperativa de problemes matemàtics

Des dels anys 80, sobretot des dels estudis de McLeod (1992), hem estat testimonis d'un augment gradual del valor donat a la dimensió afectiva de l'adquisició de coneixement, especialment pel que fa a l'aprenentatge de les matemàtiques (Hidalgo et al., 2005). Les creences sobre les matemàtiques es consideren un dels components del coneixement subjectiu implícit de cada individu, basat en experiències sobre matemàtiques i el seu ensenyament i aprenentatge (Gómez-Chacón, 2000).

Des de la perspectiva de l'educació matemàtica, s'han analitzat les creences amb dues orientacions diferents, una relacionada amb l'adquisició de nous conceptes basats en coneixements i creences anteriors (Socas, 2007) i l'altra basada en el mateix perfil emocional matemàtic (Hidalgo et al., 2013). La idea d'aquest perfil emocional assumeix l'existència d'una relació bidireccional entre emocions, actituds i creences, d'una banda, i el rendiment de l'altra; en el sentit que l'experiència de l'aprenentatge de les matemàtiques provoca reaccions i influeix en les creences i, al revés, aquesta última influència en la capacitat d'aprenentatge (Gil et al., 2002).

Alguns estudis han intentat detectar quines creences poden tenir una repercussió negativa en aquest aprenentatge, alhora que han analitzat si aquestes diferències variaven en funció del sexe i l'edat (Poulou, 2007). Aquestes recerques han buscat relacionar les creences matemàtiques amb el tipus de metodologia emprada (Warfield et al., 2005) o amb el rendiment (Simpkins et al., 2006). En tot cas, tots ells determinen l'impacte del component afectiu envers la dimensió de resolució de problemes matemàtics.

II. TREBALL D'INVESTIGACIÓ

III. TREBALL D'INVESTIGACIÓ

4. Objectius , hipòtesis i preguntes d'investigació
5. Mètode
   - 5.1. Disseny metodològic de la investigació
   - 5.2. Mostra: centres, alumnes i mestres
   - 5.3. Procediment de la investigació i instruments de recollida de dades
     - 5.3.1. Fase inicial
     - 5.3.2. Fase intermèdia
     - 5.3.3. Fase final
   - 5.4. Anàlisi i tractament de les dades

4. Objectius, hipòtesis i preguntes d'investigació

Els objectius d'aquesta investigació se centren a esbrinar quins són els efectes que té la participació en el programa *(En)Raonem en parella* sobre la competència matemàtica, i més concretament, sobre la competència en resolució de problemes matemàtics. Es pretenen evidenciar alguns dels canvis que es produeixen en la competència en resolució de problemes matemàtics i l'autoconcepte matemàtic després de la participació en el programa; i esbrinar quins són els factors que afavoreixen aquests canvis a partir de l'anàlisi de la interacció de les parelles de treball.

L'opció d'un disseny de multiplicitat metodològica, ens porta a presentar els objectius de recerca, diferenciant hipòtesis (pròpies del disseny quasiexperimental) i preguntes (de l'anàlisi del procés). Així doncs, els diferents objectius de la present investigació es concreten en les següents hipòtesis i preguntes d'investigació.

Objectiu general 1 (OG1)

Conèixer els canvis que es produeixen en la competència en **resolució de problemes matemàtics** per part de l'alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella*** i esbrinar quins són els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

Objectiu específic 1 (OE1)

Conèixer els canvis que es produeixen en la competència en **resolució de problemes matemàtics** per part de l'alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella***.

Hipòtesi 1 (H1)

Tots els alumnes participants en el programa ***(En)Raonem en parella***, tant si són **tutors** com si són **tutorats**, milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta.

Hipòtesi 1.1 (H1.1)

Els alumnes **tutors** participants en el programa (***En)Raonem en parella*** milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics.** Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta.

Hipòtesi 1.2 (H1.2)

Els alumnes **tutorats** participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta.

Objectiu específic 2 (OE2)

Conèixer els canvis que es produeixen en la competència en **resolució de problemes matemàtics** per part de l'alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella*** que ha rebut una **formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics** i indagar en els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

Hipòtesi 2 (H2)

Tots els alumnes participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics,** tant si són **tutors** com si són **tutorats**, milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Hipòtesi 2.1 (H2.1)

Els alumnes **tutors** participants en el programa (***En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics** milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Hipòtesi 2.2 (H2.2)

Els alumnes **tutorats** participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics** milloraran la seva competència en **resolució de problemes matemàtics**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Pregunta 1 (P1)

Hi ha diferències entre el discurs matemàtic inicial i final del grup d'alumnes que rep una formació específica? Quines són? Aquestes diferències estan relacionades amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis observats en la resolució de problemes?

Pregunta 2 (P2)

Hi ha diferències entre el discurs matemàtic inicial i final de **tutors** i **tutorats** del grup d'alumnes que rep una formació específica? Quines són? Aquestes diferències estan relacionades amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis en la resolució de problemes?

Objectiu general 2 (OG2)

Conèixer els canvis que es produeixen en l'**autoconcepte matemàtic** per part de l'alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella*** i esbrinar quins són els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

Objectiu específic 1 (OE1)

Conèixer els canvis que es produeixen en l'**autoconcepte matemàtic** per part de l'alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella***.

Hipòtesi 1 (H1)

Tots els alumnes participants en el programa ***(En)Raonem en parella***, tant si són **tutors** com si són **tutorats**, milloraran el seu **autoconcepte matemàtic**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d'autoconcepte matemàtic.

Hipòtesi 1.1 (H1.1)

Els alumnes **tutors** participants en el programa (***En)Raonem en parella*** milloraran l'**autoconcepte matemàtic**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d'autoconcepte matemàtic.

Hipòtesi 1.2 (H1.2)

Els alumnes **tutorats** participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** milloraran l'**autoconcepte matemàtic**. Per això s'espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d'autoconcepte matemàtic.

Objectiu específic 2 (OE2)

Conèixer els canvis que es produeixen en l’**autoconcepte matemàtic** per part de l’alumnat que participa en el programa ***(En)Raonem en parella*** que ha rebut una **formació en estratègies específiques per a reforçar l’autoconcepte matemàtic** i indagar en els factors que poden ser els causants d’aquests canvis.

Hipòtesi 2 (H2)

Tots els alumnes participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació en estratègies específiques per a reforçar l’autoconcepte matemàtic**, tant si són **tutors** com si són **tutorats**, milloraran **l’autoconcepte matemàtic**. Per això s’espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d’autoconcepte matemàtic, amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Hipòtesi 2.1 (H2.1)

Els alumnes **tutors** participants en el programa (***En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació en estratègies específiques per a reforçar l’autoconcepte matemàtic** milloraran **l’autoconcepte matemàtic**. Per això s’espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d’autoconcepte matemàtic, amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Hipòtesi 2.2 (H2.2)

Els alumnes **tutorats** participants en el programa ***(En)Raonem en parella*** que han rebut una **formació en estratègies específiques per a reforçar l’autoconcepte matemàtic** milloraran **l’autoconcepte matemàtic**. Per això s’espera obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest d’autoconcepte matemàtic, amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Pregunta 1 (P1)

Quins són els moments en què s’observen canvis en les intervencions associades a l’autoconcepte matemàtic de l’alumnat que rep una formació específica?

Pregunta 2 (P2)

Quins són els elements que poden tenir influència en els canvis observats en l’autoconcepte matemàtic de l’alumnat tutor i tutorat? Estan relacionats amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis en l’autoconcepte matemàtic?

5. Mètode

5.1. Disseny metodològic de la investigació

El caràcter subjectiu i complex dels fenòmens educatius requereix una metodologia que sigui capaç de copsar la riquesa de la seva naturalesa (Flores, 2012). La consciència de la multiplicitat de formes de contemplar i conceptualitzar la realitat educativa porta a què el present estudi plantegi la utilització d'un disseny mixt seqüencial explicatiu (Creswell, 2015). Seguint les recomanacions actuals de la investigació psicoeducativa, aquest tipus de plantejament combina un disseny quasiexperimental pretest i posttest amb un estudi qualitatiu basat en l'anàlisi dels diferents components del procés, per tal d'ajudar a interpretar els possibles canvis quantitatius constatats. També es pretén conèixer el perquè dels canvis a través dels agents implicats en l'ús d'entrevistes en profunditat.

Així doncs, es duu a terme un pretest-posttest amb relació a la resolució de problemes matemàtics -hipòtesis 1, 1.1, 1.2, 2, 2.1 i 2.2-, i l'autoconcepte matemàtic -hipòtesis 1, 1.1, 1.2, 2, 2.1 i 2.2. Les diferències entre els resultats es pretenen explicar a través d'un estudi de caràcter qualitatiu –preguntes 1 i 2 de la dimensió de resolució de problemes matemàtics i 1 i 2 de la dimensió d'autoconcepte matemàtic. L'ús d'un mètode mixt d'investigació permetrà beneficiar-se de les potencialitats dels mètodes quantitatius i qualitatius per generar una comprensió més completa de la situació estudiada (Creswell, 2015).

5.2. Mostra: centres, alumnes, mestres

Els participants de l'estudi pertanyen a sis centres que van formar part de la xarxa de centres del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016) de Catalunya al curs 2020-2021 (Taula III-2). Els centres participants són quatre escoles de primària i dos instituts de secundària. Tres centres van formar part del grup d'intervenció 1 (GI 1) i els altres tres del grup d'intervenció 2 (GI 2). Són participants de l'estudi 181 alumnes, que pertanyen a tercer (47 alumnes), quart (15 alumnes), cinquè (23 alumnes) i sisè de primària (24 alumnes) i a primer de secundària (72 alumnes).

De tot aquest alumnat trobem doncs, per un costat, els alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* (84 alumnes) -GI 1- (van desenvolupar el programa en el seu format habitual, amb la formació sobre el seu funcionament, la tutoria entre iguals i el desenvolupament de les sessions de resolució de problemes a partir del full d'activitats). Per l'altre, els alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* en el GI 2 que, a més, van rebre una formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics i una formació específica associada al constructe d'autoconcepte matemàtic (97 alumnes).

La submostra (Taula III-3) està conformada per 30 alumnes (15 parelles), dels tres centres que formen part del GI 2 (5 parelles de cada centre). Els mestres participants van ser 1 o 2 per centre (4 en total) que durant el curs van seguir la formació del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016).

Els centres participants s'han escollit seguint el criteri d'obtenir dades d'alumnat de diferents cicles de l'educació obligatòria, incloent-hi educació primària i secundària, per a disposar d'una mostra diversificada i representativa dels diferents nivells educatius que participen en el programa. La submostra de 30 alumnes s'ha escollit tenint en compte aspectes de diversitat en el desenvolupament de la competència objecte d'estudi, per tal de tenir uns participants diversos seguint criteris d'heterogeneïtat en l'àmbit de l'aprenentatge i les habilitats.

Taula III-1. Mostra de l'estudi

Centre	Curs	Tipus de grup	Tipus de tutoria	Mostra d'alumnat	Docents
1	1r ESO	GI 1	Fixa *same age*	37	-
2	5è EP	GI 1	Fixa *same age*	23	-
3	6è EP	GI 1	Recíproca	24	-
4	3r EP	GI 2	Fixa *same age*	31	1
5	3r i 4t EP	GI 2	Fixa *cross age*	31	1
6	1r ESO	GI 2	Fixa *same age*	35	2
Total				**181**	**4**

Taula III-2. Submostra d'estudi (GI 2)

Centre	Curs	Tipus de grup	Tipus de tutoria	Submostra alumnat	Docents
4	3r EP	GI 2	Fixa *same age*	10	1
5	3r i 4t EP	GI 2	Fixa *cross age*	10	1
6	1r ESO	GI 2	Fixa *same age*	10	2
Total				**30**	**4**

5.3. Procediment de la investigació i instruments de recollida de dades

L'explicació del procediment es duu a terme seguint una lògica temporal. Es divideix en tres fases desenvolupades durant el curs 2020-2021. Es presenten els diferents moments del desenvolupament -fase inicial, fase intermèdia i fase final- del programa i són exposats de manera paral·lela als processos de recerca seguits en l'estudi. D'aquesta manera, es poden establir connexions entre la pràctica didàctica als centres i el procés d'investigació, i oferir més coherència al procés exposat.

5.3.1. Fase inicial

Aquesta primera fase es duu a terme durant el primer trimestre del curs. Comprèn la preparació prèvia dels docents i els materials, incloent-hi la primera sessió de formació al professorat que desenvolupa el programa en els centres respectius; així com la recollida de dades inicials dels centres participants en el programa. És en aquesta fase quan es duu a terme el triatge dels centres que participen en l'estudi. Es demana a les escoles i instituts la participació voluntària i se'n fa la tria seguint els criteris de diversitat exposats anteriorment. Seguidament, s'inicia la recollida de dades als centres i es demanen i tramiten els permisos requerits per a dur a terme les gravacions. Un cop tancat aquest procés, es passa als alumnes la prova individual de resolució de problemes matemàtics i el qüestionari d'autoconcepte matemàtic -a tota la mostra-, i la bateria de proves de raonament matemàtic -únicament al GI 2, a tall de pretest. L'ús de la bateria de proves de raonament matemàtic (Elosua i Almeida, 2016) presenta l'objectiu d'usar, a part de l'instrument d'avaluació més situat a la realitat del programa, un de complementari que ha estat dissenyat i validat per a ser utilitzat en el camp específic de la recerca.

5.3.2. Fase intermèdia

Aquesta fase es produeix durant el desenvolupament del programa. Un cop els docents se n'apropien, després de la realització de la primera sessió presencial i de la revisió i organització del material de l'aula virtual, s'inicia la formació dels alumnes perquè puguin participar adequadament en el programa, tenint en compte els rols assignats i les tasques a realitzar.

Amb la formació es dona pas a la segona fase de la investigació amb la posada en pràctica del programa, les sessions de resolució cooperativa de problemes matemàtics i la recollida de dades mitjançant les gravacions d'àudio: l'enregistrament d'una submostra de quinze parelles pertanyents a tres dels centres participants (GI 2) i que seran enregistrades en tres moments del programa: primera i última sessió de desenvolupament del programa i una sessió d'autoavaluació a la meitat del procés -on les parelles valoren el seu procés d'aprenentatge al llarg de les sessions a través d'una pauta d'autoavaluació.

També serà aquest l'espai temporal en el qual s'anirà desenvolupant la formació específica per enriquir i reforçar el repertori d'estratègies de resolució de problemes (planificació, formulació de preguntes, oferiment de pistes i exemples i revisió) i els aspectes metacognitius (per reforçar l'autoconcepte matemàtic), dels alumnes pertanyents al GI 2, tot compartint de manera progressiva el material de suport i les estratègies proposades.

Les estratègies de suport es concreten en un material escrit específic (Annex A) i audiovisual -acompanyat de guions de suport- (Annex B) que permet anar desenvolupant una formació permanent amb l'alumnat al llarg de les diferents sessions del programa. Es proposa que es puguin anar visualitzant els vídeos associats a les quatre estratègies treballades de manera progressiva i completar la reflexió sobre el seu desenvolupament a través de les pautes d'autoavaluació ajustades. A l'Annex C es presenta un exemple de les pautes d'autoavaluació ajustades a alumnat de cicle mitjà de primària i de secundària. Caldria considerar-lo un instrument flexible que oferís l'oportunitat a cada centre i a cada docent de fer els ajustos necessaris en funció de l'edat de l'alumnat, així com les seves capacitats i preferències.

Així doncs, es comença treballant la planificació durant dues setmanes, passant a la formulació de preguntes, l'oferiment de pistes i exemples i, finalment, la revisió.

El funcionament de les sessions és el següent:

1) Quan ja estan totalment familiaritzats amb el desenvolupament del programa (a la tercera o quarta sessió depenent dels casos), revisar la primera estratègia.
2) S'aporten les indicacions concretes (amb el guió de suport de l'estratègia treballada), seguidament es procedeix a la visualització del vídeo i la pràctica i el modelatge amb el material escrit específic (el docent activa l'estratègia de manera adequada mentre està resolent un problema matemàtic del programa de mostra).
3) Es fa ús de l'estratègia en les següents dues setmanes (treballant-la en el mateix context de resolució de problemes dins la parella de tutor i tutorat ja establerta). A la següent sessió es començarà amb el treball explícit de la segona estratègia, i així successivament.
4) Cada dues setmanes, abans de començar amb el treball de la següent estratègia, han de completar una pauta d'autoavaluació ajustada, respecte de la que es proposava inicialment en el programa, que a més d'incloure ítems específics de cada una d'elles, és un complement formatiu pel reforçament de l'autoconcepte matemàtic. Aquesta pauta d'autoavaluació ajustada inclou ítems explícits per a fomentar l'autoreflexió associada a la implicació, capacitat, dificultats i millores de l'alumnat al llarg del procés.

5.3.3. Fase final

En aquesta última fase, acabades ja les sessions de tutoria entre iguals i durant el tercer trimestre del curs acadèmic, es tornen a passar les proves, la prova de resolució de problemes matemàtics i el qüestionari d'autoconcepte matemàtic a tota la mostra i la bateria de proves de raonament matemàtic al GI 2, aquesta vegada a tall de posttest. En aquesta última fase també es recullen les valoracions finals dels docents i alumnes (de la submostra) sobre la influència del programa i les estratègies apreses en el procés de resolució de problemes matemàtics i el discurs matemàtic, així com l'autoconcepte matemàtic. Aquesta valoració es recull a través d'entrevistes en profunditat.

A continuació, es presenten de manera sintetitzada tots els instruments de recollida i anàlisi de dades que s'han utilitzat en el present estudi (Taula III-4). La intenció és mostrar informació detallada sobre cada un d'ells que permeti donar una visió completa i profunda de la seva naturalesa. A continuació, es fa una presentació i justificació més exhaustiva de cada un dels instruments de recollida de dades seguint l'ordre en el qual es troben a la taula.

Taula III-3. Instruments de recollida i anàlisi de dades

Disseny	**Instrument**	**Mesura**	**Agents**	**Ús**	**Anàlisi de dades**	**Hipòtesi o pregunta**
Quasi-experimental	Prova de resolució de problemes matemàtics	Resolució individual de problemes matemàtics	Alumnat: tutors i tutorats (total de la mostra)	Pretest i posttest	JASP	Hipòtesis 1, 1.1, 1.2, 2, 2.1 i 2.2
	Bateria de Proves de raonament matemàtic		Alumnat: tutors i tutorats (GI 2)			
	Qüestionari autoconcepte matemàtic	Autoconcepte matemàtic	Alumnat: tutors i tutorats (total de la mostra)	Pretest i posttest	JASP	Hipòtesis 1, 1.1, 1.2, 2, 2.1 i 2.2
Procés	Enregistrament de 2 sessions de resolució cooperativa de problemes i 1 d'autoavaluació	Discurs matemàtic	15 parelles d'alumnes del GI 2	Procés	Atlas.ti	Pregunta 1 i 2
		Autoconcepte matemàtic	15 parelles d'alumnes del GI 2	Procés	Atlas.ti	Pregunta 1 i 2
	Entrevistes en profunditat	Resolució de problemes, discurs matemàtic i autoconcepte matemàtic	15 parelles d'alumnes i 4 docents del GI 2	Final	Atlas.ti	Pregunta 1 i 2 (discurs matemàtic i autoconcepte matemàtic)

1. **Prova individual de resolució de problemes matemàtics inicial i final.**

Es tracta de dos fulls d'activitats (Annex D), és a dir, dos problemes matemàtics plantejats des de l'enfocament competencial del programa (Flores et al., 2016) i utilitzats a condició pretest-posttest. Els problemes escollits per ambdues proves són similars, però amb alguna diferència per evitar que els resultats del posttest puguin atribuir-se al fet que els alumnes recordin la manera de resoldre el problema.

Es resol de manera individual. Les proves són corregides i puntuades a través d'una rúbrica (Flores et al., 2016). Hi ha proves de diferents nivells ajustades a l'edat dels alumnes i al seu nivell de competència.

L'ús de la rúbrica (Annex E) com a instrument d'anàlisi permet avaluar d'una manera completa els processos usats en la resolució de problemes i els resultats obtinguts. Les dimensions d'anàlisi de la correcció estan, també, estretament associats als estadis de resolució proposats per PISA (OCDE, 2010) i que són propis de l'estructura del plantejament dels problemes del programa: analitzar la informació de la situació del problema, representar-la, desenvolupar estratègies de resolució, comunicar la solució correcta i, finalment, justificar i argumentar les estratègies utilitzades.

Finalment, cal afegir que l'instrument d'avaluació permet identificar clarament les competències que es pretén que l'alumnat desenvolupi. S'hi descriuen de manera detallada l'escala de qualificació i nivells d'expectativa, reduint així, situacions d'ambigüitat en la determinació del resultat. Es concreten, doncs, els nivells d'assoliment màxim, intermedi i mínim, tenint en compte els criteris i dimensions que es poden ajustar en funció de l'edat i nivells.

2. **Bateria de proves de raonament matemàtic (BPR).**

Instrument de recollida de dades dissenyat i validat per Elosua i Almeida (2016), publicat per TEA Edicions (Annex F). Utilitzat a condició de pretest-posttest. Està dividida en tres nivells diferents: **Nivell 1:** de 4t a 6è de primària (de 9 a 12 anys). **Nivell 2:** de 1r a 3r d'ESO (de 12 a 15 anys). **Nivell 3:** de 4t d'ESO a 2n de Batxillerat i Cicles Formatius de Grau mig (de 15 a 18 anys).

La BPR està constituïda per diverses proves que avaluen la capacitat de l'aprenent per a desenvolupar relacions lògiques entre elements (raonament induït) i per aplicar aquestes relacions a nous contextos o situacions (raonament deductiu). Donat que engloba un ampli rang d'edats que cobreix un interval comprès entre els 9 anys i els 18 anys, la BPR s'organitza en 3 nivells o quaderns.

Cada nivell conté proves específiques adaptades al rang d'edat a la qual estan destinades. En total, la BRP està formada per sis proves diferents dissenyades per a l'avaluació de capacitat cognitives específiques relacionades amb el raonament abstracte (Ra), el raonament verbal (Rv), el raonament numèric (Rn), el raonament pràctic (Rp), el raonament espacial (Re) i el raonament mecànic (Rm). A més, la correcció de les proves permet obtenir un índex de raonament general (Rg) que reflecteix el nivell en el factor general de raonament.

- **Raonament abstracte (Ra):** habilitat per captar i aplicar relacions lògiques entre elements figuratius sense càrrega cultural; raonament lògic-deductiu. S'aproxima al factor general de la intel·ligència (g), que és la capacitat per prestar atenció per abstreure i formar conceptes.
- **Raonament verbal (RV):** capacitat per captar relacions entre paraules (inducció) i d'aplicar aquestes relacions a nous contextos (deducció), partint de la comprensió verbal o el significat de les paraules.
- **Raonament numèric (Rn):** habilitat per captar i aplicar relacions lògiques entre els nombres (raonament base de les relacions quantitatives). Requereix capacitat d'atenció i també de motivació per evitar la fatiga associada a la realització d'una tasca rutinària.
- **Raonament pràctic (Rp):** capacitat d'anàlisi i de síntesi de la informació complexa per a la resolució de problemes que requereixen atenció, comprensió, organització i raonament. El rendiment de la prova depèn, en gran nivell, de lectura i de la comprensió lectora dels avaluats.
- **Raonament espacial (Re):** habilitat d'inferir en el moviment, anticipar formes en un espai donat i donar continuïtat a les transformacions i les rotacions de les figures que requereixen una tridimensionalitat.
- **Raonament mecànic (Rm):** habilitat per a codificar i organitzar la informació descriptiva dels problemes amb la finalitat de donar una solució. L'habilitat mecànica pot fer referència als coneixements curriculars de l'àrea de física, geometria i ciències, així com la informació provinent d'aspectes quotidians.

En el cas específic del desenvolupament del programa s'utilitza la bateria de proves del nivell 1 pels alumnes de 3r i 4t i la del nivell 2 pels alumnes de 1r d'ESO (ambdues escurçades per una qüestió de gestió temporal). Les proves específiques que s'utilitzen en ambdós casos són: raonament abstracte, numèric, verbal i pràctic.

3. **Qüestionari d'autoconcepte matemàtic.**

Per al present estudi, després de revisar i valorar diferents propostes de la literatura, s'ha utilitzat el qüestionari d'autoconcepte matemàtic elaborat i validat per Campit i Garin (2017). Les preguntes de l'instrument van ser concretades d'acord amb la revisió de la literatura prèvia. El qüestionari inclou 15 ítems, cada un d'ells conformat per una afirmació en primera persona (Annex G). La codificació de respostes es realitza mitjançant una escala tipus *Likert,* que segons l'ítem, valora la freqüència -de mai a sempre. Els ítems estan associats a processos afectius i cognitius genèrics de la perspectiva que l'alumnat té envers les matemàtiques. És utilitzat a condició de pretest i posttest per a poder conèixer els canvis produïts en el constructe d'autoconcepte matemàtic.

4. **Enregistrament de les sessions.**

Sessions enregistrades en àudio de 15 parelles que formen part del GI 2 -5 de cada centre. Per un costat, es pren la decisió d'enregistrar 2 sessions -a l'inici i al final de la intervenció. Així es pot donar resposta a les preguntes de recerca que ens porten a comparar les intervencions de l'alumnat a l'inici i al final de desenvolupament del programa, i explicar els canvis quantitatius constatats. Per l'altre costat, s'enregistra i analitza una sessió d'autoavaluació de la parella (aproximadament a la meitat del procés).

5. **Entrevistes en profunditat.**

Les entrevistes en profunditat (Annex H) han estat dissenyades d'acord amb els objectius d'investigació principals de l'estudi. Així doncs, estan conformades per preguntes dirigides a indagar sobre la valoració final dels docents i dels estudiants sobre les aportacions del programa en dues línies diferents: per un costat, els canvis generats en el procés de resolució de problemes i els factors del discurs que els poden explicar; i per l'altre, els canvis generats en l'autoconcepte matemàtic i els factors que els poden explicar. L'estructura de l'entrevista és igual per als docents i els alumnes, tot i que s'utilitza un llenguatge ajustat a les característiques de la submostra.

Es tracta d'un instrument explicatiu que permet triangular la informació obtinguda i incloure la veu dels participants de l'estudi al procés d'investigació. Així doncs, tot i que el guió està estructurat en un conjunt de preguntes (algunes més obertes i d'altres de més específiques), també s'ofereix espai a anar més enllà i que alumnat i professorat pugui oferir informació més àmplia. Aquest és el valor principal de l'instrument usat, que permet obrir el ventall d'informació per a analitzar els enunciats associats als constructes de la present investigació.

Tal com s'ha presentat, s'han usat dos instruments de recollida de dades per a valorar la variable de resolució de problemes matemàtics: la prova de resolució de problemes matemàtics i la BPR. Els canvis detectats en el GI 2 en resolució de problemes, queden reforçats pels resultats obtinguts a través del segon instrument de recollida de dades utilitzat, únicament, en aquest grup: la bateria de proves de raonament matemàtic (instrument validat per a la recerca), -Elosua i Almeida, 2016.

Per acabar de mostrar si existeix una correlació entre els resultats del GI 2 tenint en compte les dues proves s'ha fet una anàlisi de *correlació* amb el coeficient de *pearson* que ens mostra que la millora estadísticament significativa de l'alumnat en la prova de resolució de problemes matemàtics i la millora estadísticament significativa de l'alumnat en la BPR estan influenciades entre si, amb la p <. 001. Així ens ho mostra la taula III-5 que es presenta a continuació.

Taula III-4. Prova de correlació per a detectar la relació establerta entre dues variables (els resultats finals obtinguts en la prova de resolució de problemes matemàtics i els resultats obtinguts en la BPR)

	R de Pearson	*p*
POSTTOTAL resolució problemes% - POSTTOTAL BPR %	0.827***	<.001

5.4. Anàlisi i tractament de les dades

Les dades de caràcter quantitatiu, obtingudes a través de la prova inicial i final pròpia del programa, la BPR (Elosua i Almeida, 2016) i el qüestionari d'autoconcepte matemàtic (Campit i Garin, 2017) són analitzades utilitzant la prova *t d'Student per a mostres relacionades* o la de *Wilcoxon*, segons si les dades són paramètriques o no paramètriques, mitjançant el programa JASP (versió 0.17.3). Permet demostrar o refutar les hipòtesis plantejades.

El document de referència de López-Martín i Ardura-Martínez (2022) sobre les mides de l'efecte en les publicacions científiques ens indica que a la prova *t d'Student per a mostres relacionades* es considera una mida de l'efecte gran quan $d \geq 0.80$. En el cas de la prova *Wilcoxon per a mostres relacionades* la mida d'efecte és gran quan $r_b \geq 0.50$.

La informació de caràcter qualitatiu s'analitza a través del procés de codificació i categorització usant el programa *Atlas.ti*. Es parteix del sistema inicial creat durant el curs 2018-2019 en un estudi pilot i d'acord amb la revisió de la literatura (Bastart i Flores, 2024), tenint en compte les aportacions de Sánchez-Cano i Gràcia (2017), i ajustat als moments del procés de resolució en què s'estructuren les sessions del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016). Aquest sistema inicial s'ajusta i enriqueix en aquest treball a través d'una nova revisió més exhaustiva i actualitzada de la literatura, i centrant-se en les aportacions de Chico i Planas (2018), Hennessy et al. (2016), Macagno i Bigi (2017) i Vrikki et al. (2019). A l'apartat de resultats d'anàlisi del procés es concretarà el sistema tenint en compte les aportacions dels autors esmentats i es desplegaran, de manera exhaustiva, cada una de les seves categories i indicadors.

L'estudi es basa en l'anàlisi de la interactivitat (Clarà et al., 2019; Coll et al., 2008), tenint en compte, però, que s'ajusta a la interacció entre estudiants (Duran i Monereo, 2005; Engel, 2008). Per tant, se centra en la identificació dels Segments d'Interactivitat (SI).

El sistema d'anàlisi que, finalment, s'ha acabat concretant (Taula III-6) es divideix en dues grans dimensions: (1) fases de resolució i estratègies discursives i (2) activació de reflexions metacognitives i afavoriment d'interaccions positives. La primera més directament associada als constructes: resolució de problemes matemàtics i discurs; i la segona a l'autoconcepte matemàtic.

Dins la primera dimensió hi ha 9 categories que reflecteixen les diferents fases de resolució seguint la seqüència temporal pròpia del programa *(En)Raonem en parella:* (1) activació de coneixements previs, (2) lectura de l'enunciat, (3) ampliació de la informació de l'enunciat, (4) dades, (6) planificació, (7) resolució, (8) elaboració de respostes i (9) revisió; afegint una categoria (5) que pot succeir al llarg de diferents fases del procés de resolució que és la predicció del resultat final. Hi ha la possibilitat d'analitzar les estratègies de planificació i de revisió (emmarcades en les seves fases corresponents - 6 i 9) i les estratègies de formular preguntes, donar pistes i exemples (emmarcades en la fase de resolució - 7). Per a cada una de les 9 categories descrites es despleguen un conjunt d'indicadors més específics que fan referència a les accions concretes que tutor i tutorat poden desenvolupar a cada una de les fases, que es presentaran més endavant.

Dins la segona dimensió hi ha 3 categories: (1) autoavaluació de les estratègies activades, (2) autoavaluació d'ells mateixos com a aprenentes (amb indicadors associats de manera directa als processos metacognitius i d'autoregulació), i (3) maneres d'afavorir les interaccions positives i la millora de la confiança en un/a mateix/a (amb indicadors associats als ànims, suport i reflexions sobre els progressos personals i col·lectius, que són factors que influeixen de manera directa a la construcció de l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat). Els indicadors també s'acabaran de concretar a l'apartat de resultats de l'anàlisi del procés.

Taula III-5. Sistema de categories d'anàlisi

Dimensions	Categories	Indicadors
1. Fases de resolució i estratègies discursives.	1.1. Explorar els coneixements previs.	1.1.1. Llegeix les preguntes prèvies.
		1.1.2. Respon a les preguntes prèvies.
		1.1.3. Comparteix experiències i coneixements personals més enllà de les preguntes.
	1.2. Llegir l'enunciat.	1.2. Llegeix l'enunciat.
	1.3. Ampliar la informació de l'enunciat.	1.3.1. Explica l'enunciat amb les pròpies paraules.
		1.3.2. Expressa el que s'ha entès.
		1.3.3. Expressa el que no s'ha entès.
	1.4. Identificar les dades principals.	1.4. Identifica les dades principals.
	1.5. Formular hipòtesis sobre el resultat.	1.5.1 Estima el resultat.
		1.5.2. Estima el resultat de manera argumentada.
	1.6. Determinar els passos a seguir.	1.6.1. Explicita les operacions que faran.
		1.6.2. Explicita el procés que seguiran.
	1.7. Resoldre el problema.	1.7.1. Convida la parella a intervenir.
		1.7.2. Dona respostes directes.
		1.7.3. Formula preguntes per afavorir la resolució.
		1.7.4. Dona pistes per afavorir la resolució.
		1.7.5. Posa exemples per afavorir la resolució.
	1.8. Elaborar les respostes.	1.8.1. Comunica el resultat final en acord amb la parella.
		1.8.2. Comunica el resultat final en desacord amb la parella.
		1.8.3. Expressa el perquè del resultat.
	1.9. Revisar el problema.	1.9.1. Repassa els passos seguits per comprovar que van bé.
		1.9.2. Repassa al final.
		1.9.3. Fa els canvis necessaris.
2. Activació de reflexions metacognitives i afavoriment	2.1. Autoavaluar les estratègies discursives activades.	2.1.1. Valora la planificació.
		2.1.2. Valora la formulació de preguntes.
		2.1.3. Valora l'oferiment de pistes.
		2.1.4. Valora la revisió.

d’interaccions positives.	2.2. Reflexionar sobre com són com a aprenents.	2.2.1. Valora el seu nivell de preparació/implicació en el procés.
		2.2.2. Valora la seva capacitat per resoldre els problemes.
		2.2.3. Valora les seves dificultats.
	2.3. Contribuir a la gestió de les interaccions (positives).	2.3.1. Utilitza expressions d’ànim i suport.
		2.3.2. Regula les intervencions.
		2.3.3. Verbalitza allò que han millorat.
		2.3.4. Verbalitza allò que fan bé.
		2.3.5. Verbalitza allò que encara poden millorar.

6. Resultats
   6.1. Resultats de l'estudi quasiexperimental
      6.1.1. Resultats obtinguts per la competència en resolució de problemes matemàtics
      6.1.2. Resultats obtinguts per l'autoconcepte matemàtic
   6.2. Resultats de l'anàlisi del procés
      6.2.1. Presentació del sistema de categories: resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic) i autoconcepte matemàtic
         6.2.1.1. Presentació del sistema de categories per a la competència en resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic)
         6.2.1.2. Presentació del sistema de categories per a l'autoconcepte matemàtic
      6.2.2. Presentació de resultats
         6.2.2.1. Presentació de resultats de l'anàlisi de la resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic).
         6.2.2.2. Presentació dels resultats de l'anàlisi de l'autoconcepte matemàtic

6. Resultats

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en la investigació considerant, primerament, els objectius i hipòtesis plantejades a l'estudi quasiexperimental i, seguidament, les preguntes de recerca.

6.1. Resultats de l'estudi quasiexperimental

A continuació, es presenten els resultats obtinguts en la investigació, tenint en compte els objectius i les hipòtesis plantejades en l'estudi quasiexperimental. En primer lloc, es detallen els resultats que fan referència a la competència en resolució de problemes matemàtics, i seguidament, es revisen els resultats obtinguts en l'autoconcepte matemàtic.

6.1.1. Resultats obtinguts per la competència en resolució de problemes matemàtics

S'exposen, primerament, els resultats quantitatius obtinguts a partir de les proves pretest i posttest de resolució de problemes administrades als 84 alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* en el grup d'intervenció 1 (GI 1). I seguidament, els resultats quantitatius de les proves pretest i posttest de resolució de problemes dels 97 alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* en el grup d'intervenció 2 (GI 2).

Abans d'endinsar-nos en la presentació d'aquests resultats, però, es revisa si hi ha diferències estadísticament significatives inicials entre aquests dos grups. Per comprovar-ho, i prenent els dos grups d'alumnat com a mostres independents, s'utilitza la prova *Mann-Whitney* (Ramírez i Polak, 2020) per a mostres no paramètriques (Taula III-6), ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament significatius ($p < .05$).

Taula III-6. Resultats pretest de resolució de problemes matemàtics en el GI 1 i el GI 2

Variable	Grup	*N*	Mitjana	DT	W	*p*
Resolució de problemes matemàtics	GI 1	84	46.4	31.0	3488.000	0.094
	GI 2	97	39.4	36.3		

$^{*}p < .05$

La prova assenyala que no hi ha diferències estadísticament significatives amb relació als resultats inicials de la competència en resolució de problemes entre tots dos grups, ja que $p > .05$. Per tant, podem dir que a l'inici de la intervenció els dos grups són equivalents.

Un cop constatat que els grups són equivalents, es presenten els resultats totals obtinguts en el pretest i el posttest de la variable de resolució de problemes matemàtics. La prova utilitzada és la de *Wilcoxon* per a mostres no paramètriques (Ramírez i Polak, 2020), ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament significatius ($p < .05$).

Els resultats (Taula III-7) ens mostren que els 84 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* en el GI 1 parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i s'evidencien diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat participant del programa en aquest grup.

Taula III-7. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics (GI 1)

Prova	***N***	***M_e* pretest**	**DT**	***M_e* posttest**	**DT**	**Correlació de rang biserial (r_b)**	***p***
Resolució de problemes matemàtics	84	46.7	31.0	64.0	29.0	-0.614	<.001*

*$p < .05$

Tenint en compte la **hipòtesi 1** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella*, tant tutors com tutorats, millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics mostrant diferències estadísticament significatives entre el pretest i el posttest ($p < .05$) amb una mida d'efecte alta ($r_b = -0.614$) - López-Martín i Ardura-Martínez (2022)-; i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

Seguidament, ens centrem en les **hipòtesis 1.1** i **1.2** en les que es fan prediccions de l'aprenentatge de l'alumnat segons el tipus de rol desenvolupat en la resolució de problemes matemàtics. La prova és, també, la de *Wilcoxon* per a mostres no paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament significatius ($p < .05$). A la taula III-8 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutor del GI 1.

Taula III-8. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics per tutors (GI 1)

Prova	*N*	M_e pretest	DT	M_e *posttest*	DT	Correlació de rang biserial (r_b)	*p*
Resolució de problemes matemàtics	43	48.0	29.4	69.3	25.7	-0.672	<.001*

$^*p < .05$

Els resultats ens mostren que els 43 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* en el GI 1, amb el rol de tutor, parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i els resultats de l'anàlisi mostren diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat tutor participant del programa en aquest grup.

Tenint en compte la **hipòtesi 1.1** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que els alumnes tutors participants en el programa *(En)Raonem en parella* millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics mostrant diferències estadísticament significatives entre el pretest i el posttest ($p < .05$) amb una mida d'efecte alta (r_b = -0.672); i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

A la taula III-9 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutorat del GI 1.

Taula III-9. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics per tutorats (GI 1)

Prova	*N*	M_e pretest	DT	M_e *posttest*	DT	Correlació de rang biserial (r_b)	*p*
Resolució de problemes matemàtics	41	44.3	28.7	59.3	26.8	-0.502	0.021*

$^*p < .05$

Els resultats ens mostren que els 41 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* en el GI 1, amb el rol de tutorat, parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i els resultats de l'anàlisi mostren diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat tutorat participant del programa en aquest grup.

Tenint en compte la **hipòtesi 1.2** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que els alumnes tutorats participants en el programa *(En)Raonem en parella* millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics mostrant diferències estadísticament significatives entre el pretest i el posttest ($p < .05$) amb una mida d'efecte alta (r_b = -0.502); i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

Prosseguim a presentar (Taula III-10) els resultats de la competència en resolució de problemes matemàtics, pels alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics (GI 2). La prova és la de *Wilcoxon* per a mostres no paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament significatius ($p < .05$).

Taula III-10. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics (GI 2)

Prova	***N***	***M_e* pretest**	**DT**	***M_e* posttest**	**DT**	**Correlació de rang biserial (*r_b*)**	***p***
Resolució de problemes matemàtics	97	45.3	36.3	76.3	35.0	-0.988	<.001*

*p < .05

Els resultats ens mostren que els 97 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* en el GI 2 amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i els resultats de l'anàlisi mostren diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat participant del programa en aquest grup.

Per tal de poder acabar de donar resposta a la darrera part de la hipòtesi 2 en què s'esperava que els resultats obtinguts en el GI 2 mostrarien millores amb diferències estadísticament significatives respecte del GI 1 es realitza la prova *Ancova* (López-Martín i Ardura-Martínez, 2022).

La Taula III-11 ens mostra que si, efectivament, controlem la covariable dels resultats del pretest, considerant el tipus de grup com a factor fix (variable independent) i els resultats del posttest com a variable dependent la millora del GI 2 és estadísticament superior a la millora del GI 1 (p = 0.008).

Taula III-11. Prova *Ancova* de detecció de diferències estadísticament significatives entre les millores dels dos grups participants de l'estudi

Tipus de grup	*N*	($\overline{X}$) postest	DT	n²	*p*
GI 1	84	64.3	29.0	0.014	0.008*
GI 2	97	76.5	35.0		
Resultats pretest (%)				0.642	<.001*

*p < .05

Tenint en compte la **hipòtesi 2** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics, tant tutors com tutorats, millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta (r_b = -0.988) i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

Seguidament, ens centrem en les **hipòtesis 2.1** i **2.2** en les que es fan prediccions de l'aprenentatge de l'alumnat segons el tipus de rol desenvolupat en la resolució de problemes matemàtics. La prova és, també, la de *Wilcoxon* per a mostres no paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament significatius (p < .05). A la Taula III-12 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutor de la prova de resolució de problemes matemàtics.

Taula III-12. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics per tutors (GI 2)

Prova	*N*	M_e pretest	DT	M_e *posttest*	DT	Correlació de rang biserial (r_b)	*p*
Resolució de problemes matemàtics	50	46.7	35.6	80.0	34.3	-1.000	<.001*

*p < .05

Els resultats ens mostren que els 50 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics en el GI 2, amb el rol de tutor, parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i els resultats de l'anàlisi mostren diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat tutor participant del programa en aquest grup.

La Taula III-13 ens mostra la prova *Ancova* pels tutors. La millora del GI 2 és estadísticament superior a la millora del GI 1 (p = <.001).

Taula III-13. Prova *Ancova* de detecció de diferències estadísticament significatives entre les millores dels dos grups participants de l'estudi amb el rol de tutor

Tipus de grup	*N*	($\overline{X}$) postest	DT	n²	*p*
Tutors GI 1	43	68.3	32.0	0.014	<.001*
Tutors GI 2	50	80.7	35.0		
Resultats pretest (%)				0.622	<.001*

*p < .05

Tenint en compte la **hipòtesi 2.1** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que els alumnes tutors participants en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta (r_b = -1.000) i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

A la Taula III-14 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutorat de la prova de resolució de problemes matemàtics.

Taula III-14. Resultats pretest i posttest de la prova de resolució de problemes matemàtics per tutorats (GI 2)

Prova	*N*	M_e pretest	DT	M_e *posttest*	DT	Correlació de rang biserial (r_b)	*p*
Resolució de problemes matemàtics	47	44.7	37.5	73.3	35.9	-0.970	<.001*

*p < .05

Els resultats ens mostren que els 47 alumnes que van participar del programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics en el GI 2, amb el rol de tutorat, parteixen en el pretest de medianes inicials més baixes que en el posttest, i els resultats de l'anàlisi mostren diferències estadísticament significatives entre ambdues, amb la qual cosa podem observar que hi ha una millora en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat tutorat participant del programa en aquest grup.

La Taula III-15 ens mostra la prova *Ancova* pels tutorats del GI 2. La millora del GI 2 és estadísticament superior a la millora del GI 1 (p = 0.020).

Taula III-15. Prova *Ancova* de detecció de diferències estadísticament significatives entre les millores dels dos grups participants de l'estudi amb el rol de tutorat

Tipus de grup	***N***	**($\overline{X}$) postest**	**DT**	**n²**	***p***
Tutorats GI 1	41	58.3	33.2	0.011	0.020*
Tutorats GI 2	47	72.7	34.3		
Resultats pretest (%)				0.642	<.001*

*p < .05

Tenint en compte la **hipòtesi 2.2** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que els alumnes tutorats participants en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació específica en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta (r_b = -0.970) i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; i veient els resultats obtinguts, podem acceptar aquesta hipòtesi.

A continuació es presenten els resultats de la variable d'autoconcepte matemàtic.

6.1.2. Resultats obtinguts per l'autoconcepte matemàtic

Es presenten els resultats de la variable d'autoconcepte matemàtic obtinguts a partir de les proves pretest i posttest administrades als alumnes que van participar en el programa *(En)Raonem en parella* en el GI 1 i seguidament en el GI 2.

Abans d'endinsar-nos en la presentació d'aquests resultats, però, cal conèixer si existeixen diferències estadísticament significatives inicials entre aquests dos grups. Per comprovar-ho, i prenent els dos grups d'alumnat com a mostres independents, s'administra la prova *t-Student* per a mostres paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament no significatius (p > .05), en les puntuacions pretest obtingudes en ambdós grups (Taula III-16).

Taula III-16. Resultats pretest d'autoconcepte matemàtic en el GI 1 i el GI 2

Variable	Grup	*N*	Mitjana ($\overline{X}$)	DT	*t*	*p*
Autoconcepte matemàtic	GI 1	84	67.0	12.5	2.721	0.007*
	GI 2	97	72.1	12.8		

*p < .05

La prova assenyala que hi ha diferències estadísticament significatives amb relació als resultats inicials de l'autoconcepte matemàtic entre tots dos grups, on p < .05, per tant, caldrà tenir en compte aquestes diferències a l'hora d'interpretar els resultats.

Un cop contrastats aquests resultats inicials que ens han mostrat que tot i que els dos grups comparats parteixen de mitjanes força similars no són equivalents, es passa a observar els resultats obtinguts per cada un dels grups entre el pretest i el posttest de la variable d'autoconcepte matemàtic.

Es presenten els resultats obtinguts a partir del qüestionari d'autoconcepte matemàtic dels participants del programa *(En)Raonem en parella* en el GI 1. La prova utilitzada és la *t-Student* per a mostres paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament no significatius (p > .05) -Taula III-17.

Taula III-17. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic (GI 1)

Prova	*N*	$\overline{X}$ pretest	DT	$\overline{X}$ *posttest*	DT	*D de Cohen*	*p*
Autoconcepte matemàtic	84	67.0	12.8	66.7	12.0	0.027	0.806

*p < .05

Els resultats ens mostren que no hi ha gairebé diferències entre les mitjanes inicials i finals, amb la qual cosa podem observar que no es detecta una millora en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat del GI 1.

Tenint en compte la **hipòtesi 1** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que es produirien millores en l'autoconcepte matemàtic dels participants en el programa *(En)Raonem en parella* del GI 1, no podem acceptar aquesta hipòtesi.

Seguidament, ens centrem en les **hipòtesis 1.1** i **1.2** en les que es fan prediccions de la millora de l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat segons el tipus de rol desenvolupat. La prova és la t-*Student* per a mostres paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament no significatius (p >

.05). A les següents taules es mostren els resultats obtinguts per aquests grups d'alumnes distribuïts segons els rols. La taula III-18 mostra els resultats de l'alumnat tutor.

Taula III-18. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic per tutors (GI 1)

Prova	*N*	$\overline{X}$ **pretest**	**DT**	$\overline{X}$ ***posttest***	**DT**	***D de Cohen***	***p***
Autoconcepte matemàtic	43	66.9	13.6	67.9	12.6	-0.109	0.433

$^{*}p < .05$

Podem veure que l'alumnat que desenvolupa el rol de tutor no mostra millores estadísticament significatives. Per aquesta raó, podem afirmar que la **hipòtesi 1.1** en la que es predeia que l'alumnat participant en el programa *(En)Raonem en parella* amb el rol de tutor en el GI 1 mostraria millores estadísticament significatives en l'autoconcepte matemàtic, no queda acceptada.

A la taula III-19 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutorat.

Taula III-19. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic per tutorats (GI 1)

Variable	*N*	$\overline{X}$ **pretest**	**DT**	$\overline{X}$ ***posttest***	**DT**	***D de Cohen***	***p***
Autoconcepte matemàtic	41	67.2	11.7	64.6	10.7	0.288	0.120

$^{*}p < .05$

Podem veure que l'alumnat que desenvolupa el rol de tutorat mostra un menor autoconcepte en el posttest i, per tant, no mostra millores en aquest constructe. Per aquesta raó, podem afirmar que la **hipòtesi 1.2** en la que es predeia que l'alumnat participant en el programa *(En)Raonem en parella* amb el rol de tutorat en el GI 1, mostraria millores estadísticament significatives en l'autoconcepte matemàtic, no queda acceptada.

Seguidament (Taula III-20), es presenten els resultats obtinguts a partir del qüestionari d'autoconcepte matemàtic dels participants del programa *(En)Raonem en parella* amb la formació en estratègies específiques per reforçar l'autoconcepte matemàtic del GI 2. La prova utilitzada és la *t-Student* per a mostres paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament no significatius ($p > .05$).

Taula III-20. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic (GI 2)

Variable	***N***	$\overline{X}$ **pretest**	**DT**	$\overline{X}$ ***posttest***	**DT**	***D de Cohen***	***p***
Autoconcepte matemàtic	97	72.1	12.5	72.9	11.2	-0.093	0.363

$^*p < .05$

Referent a l'autoconcepte matemàtic, els resultats de l'alumnat del GI 2 que va participar del programa *(En)Raonem en parella* amb la formació en estratègies específiques per millorar l'autoconcepte matemàtic, mostra una lleugera millora, però sense que arribi a ser estadísticament significativa.

Tenint en compte la **hipòtesi 2** plantejada a l'inici de la investigació, que predeia que es produirien millores en l'autoconcepte matemàtic per part de l'alumnat participant en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació en estratègies específiques per reforçar l'autoconcepte matemàtic del GI 2, i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; i veient els resultats obtinguts, no s'accepta aquesta hipòtesi.

Seguidament, ens centrem en les **hipòtesis 2.1** i **2.2** en les que es fan prediccions de l'aprenentatge de l'alumnat respecte al tipus de rol desenvolupat en l'autoconcepte matemàtic. La prova és, també, la *t-Student* per a mostres paramètriques, ja que la verificació del contrast de normalitat (Shapiro-Wilk) presenta uns resultats estadísticament no significatius ($p > .05$). A la taula III-21 es mostren els resultats obtinguts per part de l'alumnat tutor.

Taula III-21. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic per tutors (GI 2)

Variable	***N***	$\overline{X}$ **pretest**	**DT**	$\overline{X}$ ***posttest***	**DT**	***D de Cohen***	***p***
Autoconcepte matemàtic	50	70.2	13.5	72.6	11.9	-0.264	0.068

$^*p < .05$

Podem veure que l'alumnat tutor mostra millores encara que les diferències no arriben a ser estadísticament significatives. Per aquesta raó, podem afirmar que la **hipòtesi 2.1** en la que es predeia que l'alumnat participant en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació en estratègies específiques per millorar l'autoconcepte matemàtic del GI 2 amb el rol de tutor mostraria millores estadísticament significatives en l'autoconcepte matemàtic i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica, no queda acceptada.

Taula III-22. Resultats pretest i posttest de la prova d'autoconcepte matemàtic per tutorats (GI 2)

Variable	*N*	$\overline{X}$ pretest	DT	$\overline{X}$ *posttest*	DT	*D de Cohen*	*p*
Autoconcepte matemàtic	47	74.2	11.2	73.3	10.4	0.107	0.467

$^*p$ < .05

Finalment, podem veure (Taula III-22) que l'alumnat tutorat mostra un menor autoconcepte en el posttest i, per tant, no mostra millores estadísticament significatives entre el pretest i el posttest. Per aquesta raó, podem afirmar que la **hipòtesi 2.2** en la que es predeia que l'alumnat participant en el programa *(En)Raonem en parella* amb la formació en estratègies específiques per millorar l'autoconcepte matemàtic del GI 2 amb el rol de tutorat mostraria millores estadísticament significatives en l'autoconcepte matemàtic i que aquestes diferències serien estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica, tampoc no queda acceptada.

6.2. Resultats de l'anàlisi del procés

6.2.1. Presentació del sistema de categories: resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic) i autoconcepte matemàtic

Un cop revisats els resultats de l'estudi quasiexperimental i per tal de poder respondre les preguntes plantejades en la recerca cal analitzar els mecanismes que permeten explicar els efectes de la tutoria entre iguals en la competència en resolució de problemes matemàtics (CRPM) i l'autoconcepte matemàtic (AM). És necessari analitzar el procés de treball de les parelles per conèixer i entendre quins són els elements explicatius que poden haver contribuït en els canvis observats i, arran de conèixer-los, continuar millorant la pràctica educativa a les aules. L'anàlisi de la interacció entre les parelles durant l'activitat de resolució de problemes matemàtics de les sessions de l'*(En)Raonem en parella*, pot ser la clau per a donar resposta als interrogants plantejats.

Es presenta, a continuació, el sistema de categories que ens permetrà fer l'anàlisi de la interacció durant el procés de resolució, per poder explicar amb detall els resultats obtinguts i donar resposta a les preguntes d'investigació.

Tal com s'avançava a l'apartat del disseny metodològic, es parteix del sistema inicial creat durant el curs 2018-2019 en un estudi pilot i d'acord amb la revisió de la literatura

(Bastart i Flores, 2024), tenint en compte les aportacions de Sánchez-Cano i Gràcia (2017), i ajustat als moments del procés de resolució en què s'estructuren les sessions del programa *(En)Raonem en parella* (Flores et al., 2016). Aquest sistema inicial s'ajusta i enriqueix en aquest treball a través d'una nova revisió més exhaustiva i actualitzada de la literatura, i centrant-se en les aportacions de Chico i Planas (2018), Hennessy et al. (2016), Macagno i Bigi (2017) i Vrikki et al. (2019).

El sistema proposat per Chico i Planas (2018) presenta l'objectiu de mostrar la importància de la llengua de les matemàtiques dels alumnes per aprendre en quatre formes d'interacció diferents: iniciar-sol·licitar, iniciar-compartir, dubtar-sol·licitar i iniciar-dubtar. Pretenen conèixer com es produeix la mediació en la resolució de problemes matemàtics, mitjançant quines formes d'interacció i amb quins efectes per les tasques específiques. S'han ajustat les aportacions de les autores per a la creació del sistema de categories que s'emprarà en aquesta recerca per què es va considerar interessant la combinació que presenta de codis propis de la interacció, amb aquells més centrats en les estratègies de resolució.

Hennessy et al. (2016) i Vrikki et al. (2019), per la seva banda, dissenyen el sistema anomenat *SEDA* (Scheme for Educational Dialogue Analysis). Proposen un sistema d'anàlisi de formes de diàleg productives. La unitat d'anàlisi que suggereixen s'anomena *acte comunicatiu* a tres nivells diferents: micro, meso i macro, que permet donar cabuda a un rang més ampli de naturaleses d'intervenció. Es tracta d'un sistema molt detallat i útil per utilitzar-lo en el context de resolució de problemes, interacció entre parelles i treball en un àmbit de coneixement específic. És a dir, justament, dos contextos d'anàlisi de la present investigació, la tutoria entre iguals i la resolució de problemes matemàtics.

Finalment, el sistema d'anàlisi proposat per Macagno i Bigi (2017) presenta un plantejament més genèric i proposa el procés d'anàlisi per *moviments* del discurs i no per *enunciats.* Els autors apunten que el diàleg es construeix en la comunicació entre els esforços cooperatius i les intencions individuals. Amb els ajustos pertinents, el sistema ha aportat la vessant d'anàlisi centrada en la intencionalitat de la intervenció: de persuasió, de negació, de deliberació, entre altres.

La combinació d'aportacions dels diferents autors ha permès concretar un sistema complet i ajustat per conèixer en profunditat la naturalesa de les interaccions de l'alumnat analitzat durant el desenvolupament de les sessions del programa. Es parteix, doncs, d'aquest sistema de dimensions i categories d'anàlisi de la interacció que és un sistema *ad hoc* que ha quedat complementat i ajustat per les categories emergents que han aparegut arran de l'observació de la interacció de les parelles.

En aquest apartat es presenta el sistema de categories complet (Taula III-23). En la darrera columna s'especifica quina és la variable que s'analitza prioritàriament en cada dimensió.

Taula III-23. Presentació del sistema de categories per a l'anàlisi de la interacció de les parelles durant el procés de resolució de problemes matemàtics: dimensions i categories

Dimensions	Categories	Variable analitzada
1. Fases de resolució i estratègies discursives.	1.1. Explorar els coneixements previs.	CRPM
	1.2. Llegir l'enunciat.	CRPM
	1.3. Ampliar la informació de l'enunciat.	CRPM
	1.4. Identificar les dades principals.	CRPM
	1.5. Formular hipòtesis sobre el resultat.	CRPM
	1.6. Determinar els passos a seguir.	CRPM
	1.7. Resoldre el problema.	CRPM
	1.8. Elaborar les respostes.	CRPM
	1.9. Revisar el problema.	CRPM
2. Activació de reflexions metacognitives i afavoriment d'interaccions positives.	2.1. Autoavaluar les estratègies discursives activades.	AM
	2.2. Reflexionar sobre com són com a aprenents.	AM
	2.3. Contribuir a la gestió de les interaccions (positives).	AM

Un cop configurat el sistema i abans d'iniciar l'anàlisi es va dur a terme la valoració de la fiabilitat d'aquest sistema de categories referida a la resolució de problemes matemàtics i l'autoconcepte matemàtic a partir d'una prova interjutges. L'índex de concordança entre jutgesses es va calcular a partir del coeficient *kappa de Fleiss* (Taula III-24).

Taula III-24. Fiabilitat del sistema de categories segons el coeficient *kappa de Fleiss*

Alfa	Kappa	Valor de *p*	Límit inferior	Límit superior
.05	.818	.00	.801	.837

Els valors del coeficient *kappa de Fleiss* propers a 1 (per sobre de .75) i els nivells de significació menors a .01 ens indiquen una alta correlació entre les jutgesses. Vistos aquests resultats, es pot considerar que el sistema de categories és fiable per poder ser utilitzat en l'anàlisi de la interacció de les parelles, per a aquests dos constructes, durant les sessions d'*(En)Raonem en parella*.

En el següent apartat, s'han organitzat les categories d'anàlisi en dues dimensions, que corresponen a cada una de les variables d'estudi. Es procedeix a presentar, primer, el desplegament de categories i indicadors, junt amb la seva definició i un exemple, de la primera dimensió del sistema de categories: *fases de resolució i estratègies discursives* per a l'anàlisi de la resolució de problemes matemàtics (associada al discurs matemàtic de l'alumnat). A continuació, es presenta el desplegament del sistema de categories i indicadors, junt amb la seva definició i un exemple, de la segona dimensió del sistema de categories: *activació de reflexions metacognitives i afavoriment d'interaccions positives* per a l'autoconcepte matemàtic.

6.2.1.1. Presentació del sistema de categories per a la competència en resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic)

En aquest subapartat es presenta el sistema de categories elaborades per a l'anàlisi del procés que s'espera que aporti elements explicatius respecte dels efectes de la tutoria entre iguals en el desenvolupament de la competència en resolució de problemes matemàtics.

Les categories queden desglossades en diferents indicadors -que durant les sessions poden ser intervencions que fa l'alumnat tutor o l'alumnat tutorat- (Taula III-25). A continuació, es descriuen i es posa un exemple per a cada un d'ells.

Taula III-25. Sistema de categories i indicadors referits a la competència en resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic)

Categories	Indicadors	Descripció	Exemple
1.1. Explorar els coneixements previs.	1.1.1. Llegeix les preguntes prèvies.	Llegir les preguntes d'activació de coneixement previ.	*Les gallines ponen ous cada dia?*
	1.1.2. Respon a les preguntes prèvies.	Respondre a les preguntes d'activació de coneixement previ.	*Jo crec que sí perquè ho vaig veure a la granja dels meus avis.*
	1.1.3. Comparteix experiències i coneixements personals més enllà de les preguntes.	Comunicar una o algunes experiències/coneixements associats al context del problema que els ajuden a familiaritzar-se més amb la situació matemàtica plantejada.	*Quan vam anar d'excursió a Can Jofresa també vam haver de calcular les dimensions de la pista i ho vam fer a partir del diàmetre dels cercles que vam pintar a terra i fent aproximacions.*
1.2. Llegir l'enunciat.	1.2.1 Llegeix l'enunciat.	Llegir l'enunciat del problema (sigui fent parades per afegir comentaris o de manera seguida).	*Dissabte vindran a dinar uns amics a casa i els pares ens han dit que haurem de preparar un àpat entre tots. Hem decidit que cuinarem espagueti a la carbonara. El primer que cal fer és anar a comprar els ingredients necessaris per a poder-los cuinar (…) Creus que caldrà canviar el temps de cocció? I les quantitats d'aigua*
1.3. Ampliar la informació de l'enunciat.	1.3.1. Explica l'enunciat amb les pròpies paraules.	Usar paraules o idees més fàcils per a ell/a per aconseguir simplificar o facilitar la comprensió del problema.	*El que ens vol dir amb això és que cal comparar els preus de les diferents peces de roba amb cada un dels descomptes i després valorar què ens surt més a compte… oi?*
	1.3.2. Expressa el que s'ha entès.	Comunicar allò que ja ha quedat clar del plantejament i que permetrà continuar amb la següent fase del procés de resolució.	*Aquesta primera part de l'enunciat la tenim clara. Ens fa una llista amb diferents mesures i nosaltres hem de classificar aquests objectes.*
	1.3.3. Expressa el que no s'ha entès.	Comunicar allò que no es comprèn totalment o parcialment (no ha quedat prou clar) del plantejament del problema com a primer pas per buscar una possible solució (generalment amb l'ajuda de la parella).	*Ostres! Jo no entenc què vol dir que les dues mesures són proporcionals. Tu si?*

1.4. Identificar les dades principals.	1.4.1. Identifica les dades principals.	Concretar quines són les dades més importants del problema (les principals i/o les secundàries).	*Les dades de l'enunciat són… la jaqueta costa 14 euros, el xandall 18 euros i els pantalons 17 euros… Ah! I també els descomptes per cada peça.*
1.5. Formular hipòtesis sobre el resultat.	1.5.1 Estima el resultat.	Fer hipòtesis sobre quin s'espera que sigui el resultat del problema. Pot ser: una xifra específica, una aproximació, una conclusió genèrica, etc. (aquest tipus d'intervencions no corresponen a cap fase específica i les podem trobar a qualsevol punt del procés de resolució).	*Jo crec que ens sortirà que a la piscina del gimnàs 1 hi caben més l3 d'aigua que a la del gimnàs 2.*
	1.5.2. Estima el resultat de manera argumentada.	Fer hipòtesis sobre quin s'espera que sigui el resultat explicant el perquè de la seva idea o reflexió (aquest tipus d'intervencions no corresponen a cap fase específica i les podem trobar a qualsevol punt del procés de resolució).	*El més segur és que ens surti més a compte anar a comprar a la botiga A perquè com veus els productes ecològics són molt més cars…*
1.6. Determinar els passos a seguir.	1.6.1. Explicita les operacions que faran.	Verbalitzar la tipologia d'operacions que es faran (algorismes), sempre que el problema en requereixi l'ús per a la resolució.	*Si no m'equivoco, primer haurem d'anar convertint cada un dels ingredients de la recepta per 4 persones a 8 persones. Si... Per 4 persones són 400 g, quants g seran per 8, fent allò de multiplicar 8 x 400 i després dividir-ho entre 4, saps?*
	1.6.2. Explicita el procés que seguiran.	Verbalitzar les accions que es duran a terme durant el procés de resolució (siguin totes i de manera detallada o algunes i de manera genèrica).	*Ara mateix estem fent la planificació… després ja haurem de passar a fer les operacions i tot això... o sigui la resolució i després ja podrem escriure la resposta. No ens hem d'oblidar de revisar-ho tot bé al final. Amb aquestes preguntes segur que ens és més fàcil.*
1.7. Resoldre el problema.	1.7.1. Convida la parella a intervenir.	Utilitzar expressions que mostrin que estan esperant que la parella parli. Sigui preguntant directament què en pensa sobre un aspecte o cedint el torn de paraula de manera directa.	*Ara et toca a tu...*
	1.7.2. Dona respostes directes.	Dir de manera explícita a la parella què ha de fer, quines operacions ha d'escriure, quins	*Has d'escriure 3.200 dividit entre 4 igual a 800 g.*

		passos ha de seguir, etc. (no s'ofereix la possibilitat o el temps perquè pensi i pugui trobar solucions per ell/a mateix/a).	
	1.7.3. Formula preguntes per afavorir la resolució.	Facilitar la resolució de dubtes i/o solucionar la falta de comprensió amb la formulació de preguntes d'indagació.	*Penses que hi ha una manera més ràpida de resoldre el problema? Com ho faries?*
	1.7.4. Dona pistes per afavorir la resolució.	Facilitar la resolució de dubtes i/o solucionar la falta de comprensió amb l'ús de pistes.	*Pensa en el dia que vam anar d'excursió a Montserrat i vam calcular quanta estona hauríem de caminar i estaríem dinant, restant els viatges d'autocar i l'estona de joc lliure. Doncs aquí has de fer una cosa molt semblant.*
	1.7.5. Posa exemples per afavorir la resolució.	Facilitar la resolució de dubtes o i/o solucionar la falta de comprensió amb l'ús d'exemples.	*Això vol dir que si, per exemple, la quantitat de pasta fos 30 g més, els ml d'aigua que hauríem de posar a l'olla haurien de ser X més, entens?*
1.8. Elaborar les respostes.	1.8.1. Comunica el resultat final en acord amb la parella.	Comunicar un resultat final coincident amb l'expressat per la parella (estar d'acord).	*Penso que el resultat és 15 ous de les gallines vermelles, 10 de les blanques i 20 de les negres. Tu també penses que ho hem fet bé, oi?*
	1.8.2. Comunica el resultat final en desacord amb la parella.	Comunicar un resultat final no coincident amb l'expressat per la parella (estar en desacord).	*Jo no crec que aquesta sigui la millor opció, però si tu ho dius, ho deixem així.*
	1.8.3. Expressa el perquè del resultat.	Comunicar el resultat i explicar el perquè ha estat aquell i no un altre.	*Tenint en compte les sumes i les multiplicacions fetes i que, a més, ho hem repassat bé una vegada quan ho fèiem, el resultat ha de ser 65 m²*
1.9. Revisar el problema.	1.9.1. Repassa els passos seguits per comprovar que van bé.	Aturar-se en qualsevol punt del procés de resolució per pensar, comprovar, revisar, etc.	*Ens aturem un moment i fem la comprovació de les dues multiplicacions i la divisió. Vale? Així assegurem que fins aquí ho tenim bé.*
	1.9.2. Repassa al final.	Fer una relectura de tot el que s'ha inclòs en el full d'activitats a les diferents fases del procés per veure si hi ha algun error o aspecte que es podria millorar.	*Ens aturem un moment i fem la comprovació de les dues multiplicacions i la divisió. Vale? Així assegurem que fins aquí ho tenim bé.*

	1.9.3. Fa els canvis necessaris.	Un cop comprovat que hi ha un error de qualsevol classe en la resolució (operacions, plantejament, enfocament, etc.), fer les modificacions que es considerin oportunes.	*Jo crec que no hem argumentat del tot bé, podem donar més idees i dir més el perquè de les coses…*

6.2.1.2. Presentació del sistema de categories per a l'autoconcepte matemàtic

Es procedeix en aquest segon subapartat a presentar el sistema de categories respecte dels efectes de la tutoria entre iguals en el desenvolupament de l'autoconcepte matemàtic.

Com s'ha posat de manifest al marc teòric, l'autoconcepte matemàtic és un element clau en la formació de la competència matemàtica, més concretament, en la resolució de problemes matemàtics i poder tenir resultats sobre aquest constructe pot ajudar a tenir en compte aspectes psicopedagògics per desenvolupar aquesta competència clau i específica (CRPM).

Tot i la dificultat de poder fer emergir els processos psicològics implicats en l'autoconcepte, i específicament en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat, perquè són processos interns i implícits, la metodologia usada en les sessions del programa, la tutoria entre iguals, podria ajudar a emergir alguns dels elements associats a l'autoconcepte matemàtic en el marc de la interacció de les parelles.

El sistema de categories, com ja s'ha especificat, segueix l'estructura pròpia de les sessions del programa. Tot i que els elements associats a l'autoconcepte matemàtic es poden desenvolupar de manera implícita a diferents moments del procés de resolució, es considera que on poden ser més visibles és en el moment d'autoavaluació de la parella. És per això que les categories i indicadors més lligades a aquest constructe estan situades en aquest segment temporal.

Les categories queden desglossades en diferents indicadors -que durant les sessions poden ser intervencions que fa l'alumnat tutor o l'alumnat tutorat- (Taula III-26). A continuació, es descriuen i es posa un exemple per a cada un d'ells.

Taula III-26. Sistema de categories i indicadors referits a l'autoconcepte matemàtic

Categories	Indicadors	Descripció	Exemple
2.1. Autoavaluar les estratègies discursives activades.	2.1.1. Valora la planificació.	Analitzar qualsevol dels següents aspectes: de quina manera utilitzen l'estratègia, en quina freqüència, la utilitat que té, etc.	*El tutorat/da explica com resoldria el problema i ho argumenta? No sempre… això ho podria fer millor*
	2.1.2. Valora la formulació de preguntes.	Analitzar qualsevol dels següents aspectes: de quina manera utilitzen l'estratègia, en quina freqüència, la utilitat que té, etc.	*Ens fem preguntes sovint? No gaire…*
	2.1.3. Valora l'oferiment de pistes.	Analitzar qualsevol dels següents aspectes: de quina manera utilitzen l'estratègia, en quina freqüència, la utilitat que té, etc.	*Donar-nos pistes ens ajuda a millorar la resolució del problema? Molt!!!*
	2.1.4. Valora la revisió.	Analitzar qualsevol dels següents aspectes: de quina manera utilitzen l'estratègia, en quina freqüència, la utilitat que té, etc.	*Revisem tots dos els resultats del problema i comprovem si hem seguit la planificació inicial i si les respostes són adequades i reals? Sí.*
2.2. Reflexionar sobre com són com a aprenents.	2.2.1. Valora el seu nivell de preparació/implicació en el procés.	Compartir si es prepara a fons el full d'activitats (generalment en el cas del tutor) i si s'implica activament en el moment de la resolució (generalment en el cas del tutorat).	*M'implico en resoldre els problemes de matemàtiques? Sí, perquè estic atenta i m'esforço!*
	2.2.2. Valora la seva capacitat per resoldre els problemes.	Compartir fins a quin punt se sent capaç de resoldre els problemes del programa (o altres).	*Em sento capaç d'afrontar els problemes de l'assignatura de matemàtiques? Mmm… Sí…*
	2.2.3. Valora les seves dificultats.	Valorar si es troba en entrebancs, manques de comprensió, possibles errors en la resolució dels problemes plantejats en el programa (o altres).	*Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats? Encara em costa eh…*
2.3. Contribuir a la gestió de les interaccions (positives).	2.3.1. Utilitza expressions d'ànim i suport.	Verbalitzar expressions que facin entendre a la parella que és capaç de resoldre adequadament la situació plantejada, superar possibles dificultats, moments en què s'estigui encallant, etc.	*Ara sí que ho has entès! Fantàstic! Veus com te'n pots sortir!*
	2.3.2. Regula les intervencions.	Utilitzar expressions que permetin gestionar les diferents fases i moments de resolució i comprendre quines són les accions que ha de fer cada un dels membres de la parella, organitzar-se i autogestionar-se.	*Recorda que ara et toca escriure a tu. En la resolució tu dictes i jo escric. Aquesta valoració l'he de fer jo, tu em pots ajudar.*

	2.3.3. Verbalitza allò que han millorat.	Expressar allò que ara se sap fer millor en comparació amb sessions prèvies.	*En aquest problema crec que ens hem ajudat molt millor l'una a l'altra, en comparació amb el primer dia que vam fer el programa…*
	2.3.4. Verbalitza allò que fan bé.	Expressar aquells aspectes en els quals ja no es cometen errors (o se saben resoldre de manera més estratègica) en aquest moment.	*Crec que fer les operacions és el que millor se'ns dona.*
	2.3.5. Verbalitza allò que encara poden millorar.	Establir reptes, objectius o noves metes per a futures sessions del programa.	*Per la pròxima quinzena hauríem de fer la planificació, perquè aquí quasi no hi hem posat res…* *La planificació ara la fem millor, però encara ens costa recordar de fer-la abans de la resolució…*

D'ara endavant s'aniran presentant els resultats de l'anàlisi del procés per poder respondre de manera progressiva les quatre preguntes d'investigació plantejades a la present recerca. Primerament, a les dues que fan referència a la variable de resolució de problemes matemàtics (associada al discurs matemàtic de l'alumnat). I seguidament, a les altres dues que fan referència a la variable d'autoconcepte matemàtic.

Es comença donant resposta a la pregunta 1 de la variable de resolució de problemes matemàtics, presentant els resultats de les categories més genèriques. Seguidament, es passa a donar resposta a la pregunta 2 de la variable de resolució de problemes. Per fer-ho, es presenten els resultats desglossats de cada un dels indicadors corresponents a cada categoria, i tenint en compte cada un dels rols desenvolupats.

En darrer terme, es dona pas a la pregunta 1 (de la variable d'autoconcepte matemàtic), presentant els resultats de les categories més genèriques. I per acabar amb la presentació dels resultats es respon a la pregunta 2 de la variable d'autoconcepte matemàtic centrant-se en l'anàlisi més específica dels indicadors de cada una de les categories, i tenint en compte cada un dels rols desenvolupats.

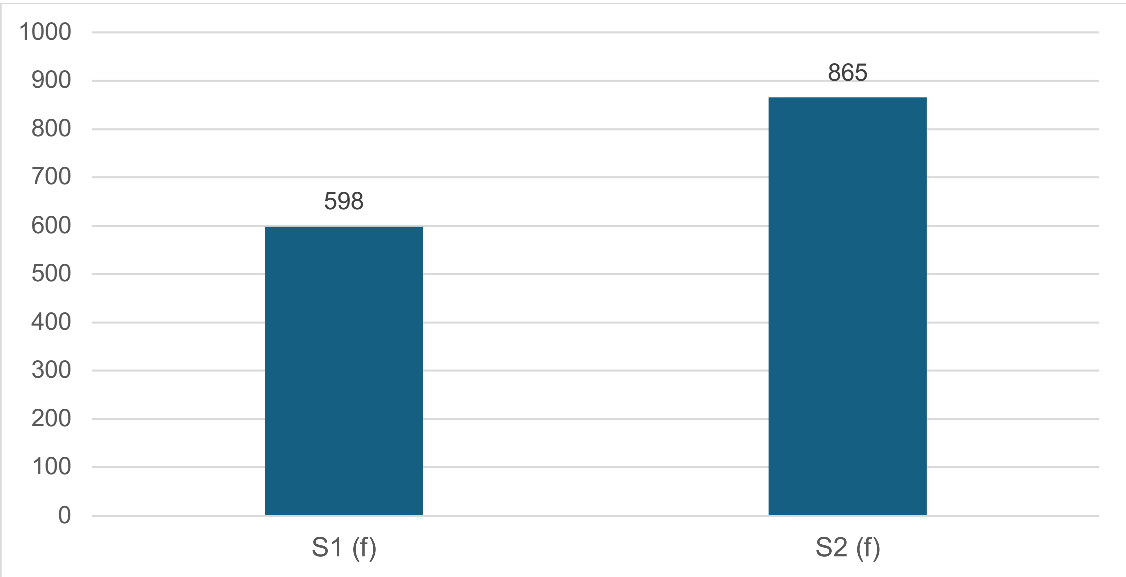
6.2.2. Presentació de resultats

6.2.2.1. Presentació de resultats de l'anàlisi de la resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic)

Pregunta 1. *Hi ha diferències entre el discurs matemàtic inicial i final del grup d'alumnes que rep una formació específica? Quines són? Aquestes diferències estan relacionades amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis observats en la resolució de problemes?*

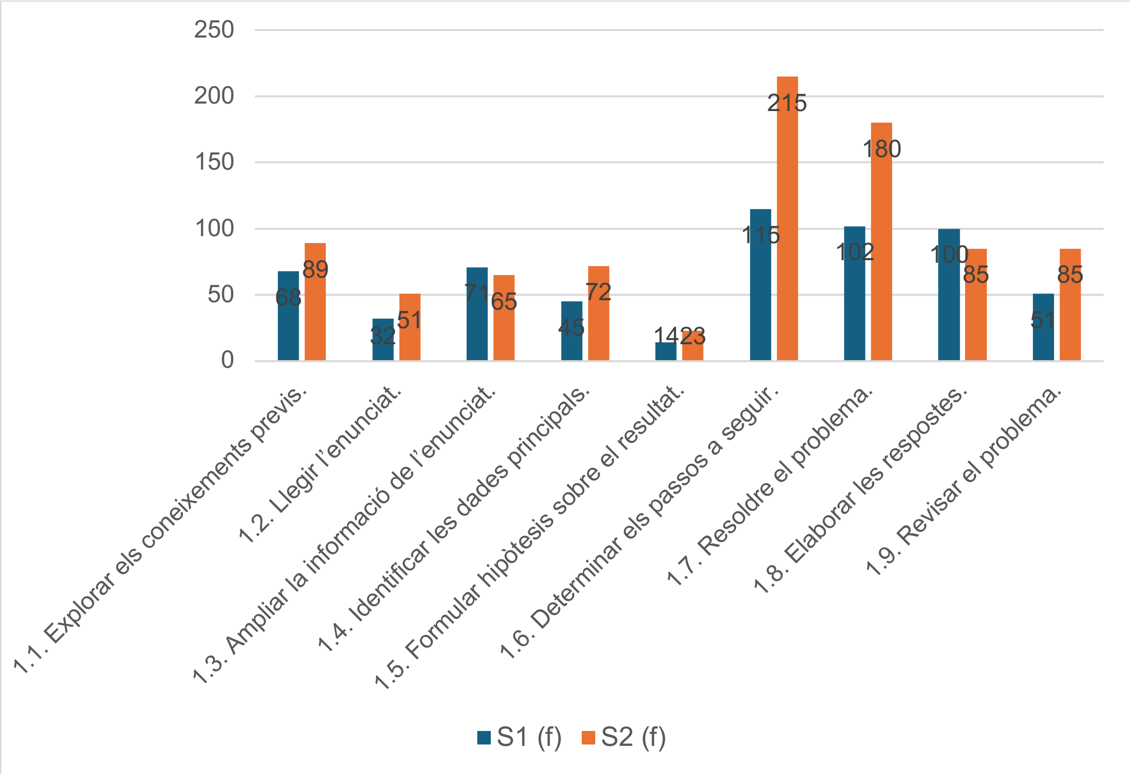
Un primer aspecte que es pot observar, tal com es mostra al Gràfic III-1, és que hi ha un augment general d'intervencions (aportacions a la interacció de cada membre de la parella) de la sessió 1 -S1- (598) a la sessió 2 -S2- (865).

Gràfic III-1. Presentació de resultats: freqüència d'interaccions en la S1 i la S2 (resolució de problemes matemàtics)



El Gràfic III-2 ens mostra que totes les categories augmenten en nombre d'intervencions, i només s'observen dues categories que disminueixen la freqüència (*ampliar la informació de l'enunciat* -71 a 65 intervencions- i *elaborar les respostes* -100 a 85 intervencions-). L'augment general de freqüències a la resta de categories de la S1 a la S2 podria explicar la disminució del percentatge d'intervencions, únicament, d'aquestes dues dimensions.

Gràfic III-2. Presentació de resultats: freqüència d'interaccions en la S1 i la S2 per cada categoria (resolució de problemes matemàtics)



La Taula III-27 ens mostra, si ens centrem en la distribució dels percentatges de cada una de les categories dins de cada sessió, que en la S1 les categories amb freqüències més altes són: *determinar els passos a seguir* (19.23%) i *resoldre el problema* (17.06%). En el cas de la S2 observem uns resultats similars, els dos indicadors amb freqüències més altes són: *determinar els passos a seguir* (24.86%) i *resoldre el problema* (20.81%). Un aspecte a destacar és que, a més, s'observa un clar augment de les interaccions en ambdues categories entre la S1 i la S2.

Pel contrari, les categories amb freqüències més baixes tant a la S1 com a la S2 són: *llegir l'enunciat* (amb el 5.35% i el 5.90% respectivament) i *formular hipòtesis sobre el resultat* (2.34% i 2.66%).

Taula III-27. Presentació dels resultats de les categories: resolució de problemes matemàtics (discurs matemàtic)

Categories	S1		S2	
	f	*% de f*	*f*	*% de f*
1.1. Explorar els coneixements previs.	68	11.37	89	10.29
1.2. Llegir l'enunciat.	32	5.35	51	5.90
1.3. Ampliar la informació de l'enunciat.	71	11.87	65	7.51
1.4. Identificar les dades principals.	45	7.53	72	8.32
1.5. Formular hipòtesis sobre el resultat.	14	2.34	23	2.66
1.6. Determinar els passos a seguir.	115	19.23	215	24.86
1.7. Resoldre el problema.	102	17.06	180	20.81
1.8. Elaborar les respostes.	100	16.72	85	9.83
1.9. Revisar el problema.	51	8.53	85	9.83
Total	**598**	**100.00**	**865**	**100.00**

Part d'aquests resultats semblen tenir correspondència amb les estratègies en les quals es va centrar la formació específica feta a l'alumnat al llarg del desenvolupament de les sessions del programa. Per un costat, l'estratègia de *planificació*, que correspon, principalment, a la categoria *determinar els passos a seguir,* i per l'altre costat, les estratègies associades a la *formulació de preguntes, pistes i exemples*, que es troben majoritàriament reflectides a la categoria *resoldre el problema.*

Així doncs, s'observa que són les dues categories amb freqüències més elevades en ambdues sessions. En canvi, l'estratègia de *revisió* (també treballada a la formació específica), que es correspondria a la categoria *revisar el problema* (8.53% i 9.83%), és la que menys presència té, tot i que en valors absoluts sí que s'observa un augment de la S1 (51 intervencions) a la S2 (85 intervencions).

En línies generals, es detecten canvis en els elements associats al discurs matemàtic per a la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat de l'inici al final del programa, quedant palès en l'augment de les freqüències de la gran majoria de categories, especialment evident en dues de les treballades de manera específica.

Aquest augment general dels percentatges d'intervencions de l'inici al final del programa el podem explicar per diferents motius. Primerament, la mateixa participació de les parelles al procés de resolució dels problemes porta a que cada vegada coneguin amb més profunditat els processos implicats a cada un dels moments de resolució i que, per tant, puguin ampliar el seu repertori d'intervencions a cada un d'aquests moments. Un testimoni de les entrevistes en profunditat evidencia aquest aspecte:

> Docent 3: "*La metodologia que hem utilitzat al llarg de les sessions ha afavorit el diàleg entre l'alumnat, amb un augment progressiu del nivell d'interacció i una desvinculació del full d'activitats".*

També ho pot explicar el fet que, durant les sessions, el treball explícit de les estratègies de planificació, formular preguntes, donar pistes/exemples i revisar, i el seu ús continuat, pot haver contribuït a l'augment d'intervencions associades a cada una d'elles. Així ho expressen un alumne tutorat i un alumne tutor participants de la intervenció en el marc del programa.

> Alumne tutorat 6: *"Al principi ens centràvem molt més en el format o estructura del problema, però a poc a poc hem anat augmentant el diàleg i era més fluid, ens fèiem més preguntes i la meva companya va aprendre a no dir-me les respostes tan directes".*
>
> Alumne tutor 3: *"Com a tutor m'he sentit còmode en el meu rol, resolent preguntes i fent que aprengui més i millor".*

Finalment, l'augment de la fluïdesa de la interacció entre tutors i tutorats i de la seva participació també queda reflectit en aquest augment del nombre d'intervencions de cada una de les categories entre S1 i la S2. Ho comenta una alumna tutorada a l'entrevista en profunditat final.

> Alumna tutorada 4: *"Les ajudes del tutor m'han servit per tenir cada vegada més facilitat i recursos per resoldre problemes".*

Per tant, observem que, a més d'altres raons, un dels factors principals que generen canvis en el discurs matemàtic de l'alumnat i que, com a conseqüència, poden generar canvis i millores en la resolució de problemes matemàtiques és el treball continuat i explícit al llarg de les sessions de les diferents estratègies esmentades.

A continuació, i un cop vist que, efectivament, es produeixen canvis entre el discurs inicial i final de l'alumnat i de quin tipus són, posem el focus en els indicadors específics de cada una de les categories: *explorar els coneixements previs, llegir l'enunciat, ampliar la informació de l'enunciat, identificar les dades principals, formular hipòtesis sobre el resultat, determinar els passos a seguir, resoldre el problema, elaborar les respostes i revisar el problema;* per poder donar resposta a la pregunta de recerca 2.

Pregunta 2. *Hi ha diferències entre el discurs matemàtic inicial i final de tutors i tutorats del grup d'alumnes que rep una formació específica? Quines són? Aquestes diferències estan relacionades amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis en la resolució de problemes?*

La Taula III-28, que revisa els diferents indicadors de la categoria *explorar els coneixements previs,* ens mostra que hi ha un augment general del percentatge d'intervencions de la S1 a la S2, tant per tutors com per tutorats.

Taula III-28. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 1: explorar els coneixements previs

Indicadors	Tutors					
	S1		S2		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.1.1. Llegeix les preguntes prèvies.	26	49.06	27	50.94	53	100
1.1.2. Respon a les preguntes prèvies.	4	40	6	60	10	100
1.1.3. Comparteix experiències i coneixements personals més enllà de les preguntes.	7	29.17	17	70.83	24	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.1.1. Llegeix les preguntes prèvies.	0	0	5	100	5	100
1.1.2. Respon a les preguntes prèvies.	15	42.86	20	57.14	35	100
1.1.3. Comparteix experiències i coneixements personals més enllà de les preguntes.	16	53.33	14	46.67	30	100

S'observa que en el cas dels tutors la gran majoria d'intervencions es concentren a *llegir les preguntes prèvies*, mantenint la freqüència entre S1 i S2.
En el cas dels tutorats les intervencions es concentren en *respondre les preguntes* prèvies i *compartir experiències i coneixements personals.*

El fet que la categoria *compartir experiències i coneixements personals* s'iguali a la S2 entre tutors i tutorats pot ser indicador de l'augment de confiança dins de la parella i l'equilibri en la distribució de les intervencions.

Pot ser degut també a que els tutors deixen de fer el rol directiu i passen a compartir com a iguals, sent un indicatiu de construcció conjunta d'exploració de coneixements previs.

Per tant, hi ha una lleugera tendència a establir una interacció menys vertical (o directiva) i el tutorat pren més la iniciativa a mesura que avancen les sessions, tot i que segueix havent-hi força diferència entre rols.

Els resultats obtinguts es poden explicar per l'estructura pròpia del *full d'activitats* i la *guia de rols* del programa (Flores et al., 2016) que porta a que, especialment a l'inici de la intervenció, el tutor adopti un paper més directiu i guiï amb la lectura de les preguntes i el tutorat sigui qui les respon. Així ho manifesta una docent:

> Docent 2: *"A l'inici als tutors els costava molt no donar respostes directes (i ajudar a través de pistes i orientacions). Una possible estratègia per evitar que el tutor sigui tan directiu és que malgrat que s'hagin preparat la resolució del problema a casa, no portin un full escrit amb la resolució/resposta, per així treure més suc de l'aprenentatge que pot generar el format obert dels problemes".*

Respecte a la categoria *llegir l'enunciat* (Taula III-29), s'observen uns resultats en una línia semblant. Els tutors són els que tendeixen a *llegir l'enunciat* (amb un augment del percentatge de 40.54% a la S1 a un 59.45% a la S2). Els tutorats, en canvi, presenten una freqüència baixa d'intervencions. Per tant, veiem que és l'alumnat tutor el que acostuma a llegir el problema, per poder donar peu al procés de resolució.

Taula III-29. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 2: llegir l'enunciat

Indicadors	**Tutors**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.2.1. Llegeix l'enunciat.	30	40.54	44	59.45	74	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.2.1. Llegeix l'enunciat	2	22.22	7	77.78	9	100

En la categoria *ampliar la informació de l'enunciat* (taula III-30), s'observa un augment de l'indicador *expressar el que s'ha entès* de la S1 (42.86%) a la S2 (57.14%), en el cas dels tutors.

Taula III-30. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 3: ampliar la informació de l'enunciat

Indicadors	Tutors					
	S1		S2		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.3.1. Explica l'enunciat amb les pròpies paraules.	16	57.14	12	42.86	28	100
1.3.2. Expressa el que s'ha entès.	9	42.86	12	57.14	21	100
1.3.3. Expressa el que no s'ha entès.	12	57.14	9	42.86	21	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.3.1. Explica l'enunciat amb les pròpies paraules.	3	25	9	75	12	100
1.3.2. Expressa el que s'ha entès.	10	62.5	6	37.5	16	100
1.3.3. Expressa el que no s'ha entès.	21	55.26	17	44.74	38	100

Els tutorats, en canvi, tendeixen més a *expressar el que no entenen*, sense gaires variacions entre S1 i S2. A més, en el cas dels tutorats l'indicador *explica l'enunciat amb les pròpies paraules* tot i que presenta freqüències petites, mostra un augment important entre la S1 i la S2 (del 25% al 75%). Així doncs, augmenten la seva capacitat d'expressió de la comprensió de l'enunciat, fet que pot repercutir en el seu procés d'aprenentatge. Els altres dos indicadors: *expressa el que s'ha entès* i *expressa el que no s'ha entès* disminueixen lleugerament en els tutorats. Pot ser que, en aquest cas, el fet d'explicar l'enunciat generi una disminució del nombre de dubtes.

Els dos membres de la parella acostumen a intervenir, doncs, d'una manera molt estructurada en funció de les indicacions rebudes a la *formació inicial* i al *full d'activitats.* Així ho comenta una alumna tutora a l'entrevista en profunditat final.

> Alumna tutora 7: *"Normalment soc jo la que explico més, perquè soc la tutora, i la meva tutorada fa més preguntes del que no entén".*

En el cas de la categoria *identificar les dades principals*, (Taula III-31), s'observa que el percentatge d'intervencions de tutor i tutorat són molt semblants, i de fet, lleugerament superiors en el cas dels tutorats, tant a la S1 com a la S2. Això es deu, probablement, a l'estructuració del mateix *full d'activitats* que requereix que siguin els tutorats (sempre amb l'orientació i intervenció dels tutors quan tenen dubtes) els encarregats de determinar les dades necessàries per a resoldre el problema. Aquesta orientació fa que estiguin actius i hi hagi una interacció equitativa entre ambdós membres de la parella. Aquest fet pot ajudar a explicar l'augment de la freqüència en ambdós casos.

Taula III-31. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 4: identificar les dades principals

Indicadors	Tutors					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.4.1. Identifica les dades principals.	22	40	33	60	55	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.4.1. Identifica les dades principals.	23	37.10	39	62.90	62	100

A la Taula III-32 s'observa que, dins la categoria de *formular hipòtesis sobre el resultat*, els processos d'*estimar els resultats* especialment *de manera argumentada* presenten freqüències molt baixes tant per tutors com per tutorats. Aquest fet es pot explicar per què tot i que hi va haver una formació exhaustiva en l'estratègia de planificació per a la resolució de problemes matemàtics, no es va fer tant èmfasi en el procés d'estimar possibles resultats i argumentar-ho. Així ho expressa una mestra en el tall d'àudio d'una entrevista en profunditat final que transcrivim a continuació:

> Docent 1: *"Una de les coses que més els costava era preveure o anticipar els resultats que podrien obtenir de la resolució de problemes. De vegades els hi demanàvem de manera explícita perquè fessin la reflexió".*

Tanmateix, es pot destacar que, si bé les freqüències dels indicadors d'aquesta categoria són força baixes, s'observa un lleuger augment entre la S1 i la S2, tant per a tutors com per a tutorats.

Taula III-32. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 5: formular hipòtesis sobre el resultat

Indicadors	Tutors					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.5.1 Estima el resultat.	8	44.44	10	55.55	18	100
1.5.2. Estima el resultat de manera argumentada.	2	40	3	60	5	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*

1.5.1 Estima el resultat.	4	33.33	8	66.67	12	100
1.5.2. Estima el resultat de manera argumentada.	0	0	2	100	2	100

Referent als indicadors inclosos dins la categoria *determinar els passos a seguir* veiem que ambdós rols presenten freqüències força altes (Taula III-33), i amb un augment considerable de les intervencions entre la S1 i la S2. Això, segurament, es pot explicar per la formació explícita en estratègies discursives per a facilitar la *planificació* que es va fer amb aquest grup d'alumnes. Així ho expressa una de les mestres de matemàtiques.

> Docent 2: *"Com que amb el grup d'alumnes vam estar treballant tan a fons com podien planificar tot el procés que seguirien per resoldre el problema, cada cop hi estaven més acostumats i ho feien millor".*

Taula III-33. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 6: determinar els passos a seguir

Indicadors	Tutors					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.6.1. Explicita les operacions que faran.	39	34.51	74	65.49	113	100
1.6.2. Explicita el procés que seguiran.	34	40.48	50	59.52	84	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.6.1. Explicita les operacions que faran.	24	34.29	46	65.71	70	100
1.6.2. Explicita el procés que seguiran.	18	28.57	45	71.43	63	100

Una dada interessant és que, mentre que les intervencions dels tutors augmenten força en l'*explicitació de les operacions que faran*, els tutorats, en canvi, mostren un augment d'intervencions major en l'*explicitació del procés que seguiran.* Un tall d'àudio de la S2 d'una de les parelles així ens ho mostra.

> Alumna tutora 1: *Recorda que en aquest problema hem de calcular el diàmetre...*
> Alumne tutorat 2: *Però espera, ens estem avançant, primer cal fer el pas de la planificació i explicar bé com ho farem.*
> Alumna tutora 1: *Sí, sí, clar! Tens raó.*

Referent als indicadors més directament associats a les estratègies discursives per a la *resolució de problemes matemàtics* (Taula III-34) s'observa que en el cas dels tutors, l'indicador amb freqüències més altes des de l'inici i que mostra un augment entre les dues sessions és: *formula preguntes per afavorir la resolució* i els que presenten freqüències clarament menors són: *dona pistes per afavorir la resolució* i *posa exemples per afavorir la resolució.* En el següent tall de conversa s'evidencia el que s'apunta:

> Alumne tutor 5: *Per què diries que aquí s'hauria de sumar en comptes de multiplicar?*
> Alumne tutorat 6: *Perquè sumant és la manera més fàcil de trobar el resultat.*
> Alumna tutora 1: *I no creus que hi hauria un sistema més ràpid?*
> Alumne tutorat 2: *Potser si...*

Taula III-34. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 7: resoldre el problema

Indicadors	Tutors					
	S1		S2		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.7.1. Convida la parella a intervenir.	10	37.04	17	62.96	27	100
1.7.2. Dona respostes directes.	9	37.50	15	62.50	24	100
1.7.3. Formula preguntes per afavorir la resolució.	50	44.25	63	55.75	113	100
1.7.4. Dona pistes per afavorir la resolució.	5	27.78	13	72.22	18	100
1.7.5. Posa exemples per afavorir la resolució.	6	46.15	7	53.85	13	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.7.1. Convida la parella a intervenir.	4	30.77	9	69.23	13	100
1.7.2. Dona respostes directes.	10	50	10	50	20	100
1.7.3. Formula preguntes per afavorir la resolució.	7	16.28	36	83.72	43	100
1.7.4. Dona pistes per afavorir la resolució.	0	0	7	100	7	100
1.7.5. Posa exemples per afavorir la resolució.	1	33.33	2	66.67	3	100

Especialment en el cas de l'indicador associat a *donar pistes* hi ha un cert augment del percentatge de la freqüència (del 27.28% a la S1 al 72.22% a la S2), tot i que són més baixes del que es podria esperar, essent una de les estratègies sobre la que van rebre formació específica. A més, l'indicador *dona respostes directes* també augmenta de la S1 a la S2, tot i que això justament és el que es vol evitar.

En el cas dels tutorats, també observem que l'indicador amb la freqüència final més alta és el de *formular preguntes per afavorir la resolució* i els indicadors amb freqüències més baixes són *donar pistes per afavorir la resolució* i *posa exemples per afavorir la resolució*. Un tall d'exemple:

> Alumne tutorat 8: *Si calculem la proporció no creus que ens donarà correcte?*
> Alumne tutora 7: *Mmm... deixem pensar...*
> Alumne tutorat 8: *Sí! Jo crec que sí.*

Un motiu que pot explicar aquesta alta presència d'intervencions associades a la *formulació de preguntes* és que al llarg de les sessions es va fer molt èmfasi a l'ús de material dissenyat per aprendre a fer bones preguntes i, així, contribuir a la millora del procés de resolució de problemes matemàtics. L'augment general de les freqüències dels diferents indicadors que associem més directament a la formació en estratègies discursives i per a la resolució de problemes matemàtics (especialment la formulació de preguntes, i en no tanta mesura, oferir pistes i exemples) ens indica els beneficis d'aquesta intervenció per a la millora de l'aprenentatge de l'alumnat. Una altra docent posa de manifest als beneficis de l'ús de tots aquests materials i recursos de suport:

> Docent 4: *"Els mestres valorem molt positivament l'ús de material extra per treballar diferents estratègies de resolució i així aconseguir millorar la qualitat de les intervencions dels nostres alumnes i del procés de resolució de problemes en general".*

A la Taula III-35 veiem que a l'hora d'*elaborar les respostes* l'alumnat tendeix a *comunicar el resultat final d'acord amb la parella*. Tot i que són els tutors els que acostumen a fer-ho amb freqüències més elevades, els tutorats també presenten freqüències força altes en aquest indicador, que a més augmenta lleugerament el percentatge de la S1 a la S2. En canvi, veiem com en aquest cas no es va identificar cap intervenció on la comunicació del resultat final fos de desacord.

Taula III-35. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 8: elaborar les respostes

Indicadors	Tutors					
	S1		S2		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.8.1. Comunica el resultat final d'acord amb la parella.	48	52.17	44	47.86	92	100
1.8.2. Comunica el resultat final en desacord amb la parella.	0	0	0	0	0	0
1.8.3. Expressa el perquè del resultat.	22	73.33	8	26.67	30	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.8.1. Comunica el resultat final d'acord amb la parella.	22	46.81	25	53.19	47	100
1.8.2. Comunica el resultat final en desacord amb la parella.	0	0	0	0	0	100
1.8.3. Expressa el perquè del resultat.	8	50	8	50	16	100

Si bé és cert que al llarg del procés de resolució sí que hi havia moments de divergència d'opinió entre tutor i tutorat, al final sempre arribaven a un acord. També s'observa que tot i que en certes ocasions argumenten el *perquè d'un resultat o un altre*, no ho fan en totes les ocasions essent els tutors els que mostren més intervencions en aquest sentit. Veiem, doncs, que ambdós membres de la parella comuniquen els resultats als quals arriben de manera acordada. Però, en canvi, la major part de les vegades no ho justifiquen.

En últim terme, passem als indicadors referents a la categoria *revisar el problema* (Taula III-36). I en aquest cas veiem que hi ha freqüències en augment o bé estables dels indicadors: *repassa al final* i *fa els canvis necessaris*, especialment en el cas dels tutors. En canvi, tot i que hi ha un augment d'intervencions associades a la *revisió durant el procés de resolució per comprovar que van bé* els valors absoluts de les freqüències són molt menors respecte als altres indicadors.

Taula III-36. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 9: revisar el problema

Indicadors	Tutors					
	S1		S2		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.9.1. Repassa els passos seguits per comprovar que van bé.	1	12.50	7	87.50	8	100
1.9.2. Repassa al final.	12	28.57	30	71.43	42	100
1.9.3. Fa els canvis necessaris.	17	53.13	15	46.88	32	100
Indicadors	**Tutorats**					
	S1		**S2**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
1.9.1. Repassa els passos seguits per comprovar que van bé.	0	0	4	100	4	100
1.9.2. Repassa al final.	13	41.94	18	58.06	31	100
1.9.3. Fa els canvis necessaris.	8	42.11	11	57.89	19	100

La possible explicació a aquesta situació és que tot i que a la formació en estratègies es va fer èmfasi a la importància que no només es fessin revisions al final, sinó al llarg de tot el procés, l'alumnat encara té la tendència a encasellar molt les diferents fases del procés de resolució, associant el moment de la revisió essencialment al final del procés de resolució. Una mostra d'això:

> Alumna tutora 1: *Ara ja hem resolt el problema, o sigui que podem mirar si tot ho hem fet bé...*
> Alumne tutorat 2: *Sí! Podem mirar les operacions i l'escrit, oi?*
> Alumna tutora 1: *Tienes razón (en castellà).*
> Alumne tutorat 2: *Vale pues comencem!*

Es pot afirmar, doncs, que sí que es produeixen diferències entre els elements del discurs matemàtic de l'alumnat que s'identifiquen a l'inici i al final del desenvolupament del programa, tant per tutors com per tutorats, i que això pot ser una de les causes de les millores en la resolució de problemes matemàtics constatades, anteriorment, a l'estudi quasiexperimental.

Amb l'anàlisi de tots els moments del procés de resolució s'ha pogut anar observant que hi ha moltes de les categories que es troben cada vegada més presents en la interacció de la parella en la resolució dels problemes: *determinar els passos a seguir* i *resoldre el problema,* tant per tutors com per tutorats.

També ho veiem en el cas dels indicadors: *comparteix experiències i coneixements personals més enllà de les preguntes*, *explicita les operacions que faran* i *explicita el procés que seguiran*, per tutors i tutorats i *formula preguntes per afavorir la resolució* i *comunica el resultat final d'acord amb la parella*, especialment per tutors.

Això es deu a tots els motius que s'han anat recollint al llarg de l'apartat: els rols i les guies d'actuació, la confiança entre els dos membres de la parella, l'autonomia progressiva dels tutorats, l'augment de la seguretat en el procés de resolució, la pròpia participació en el programa; i també, i de manera destacada, per factors directament associats a la formació específica en estratègies.

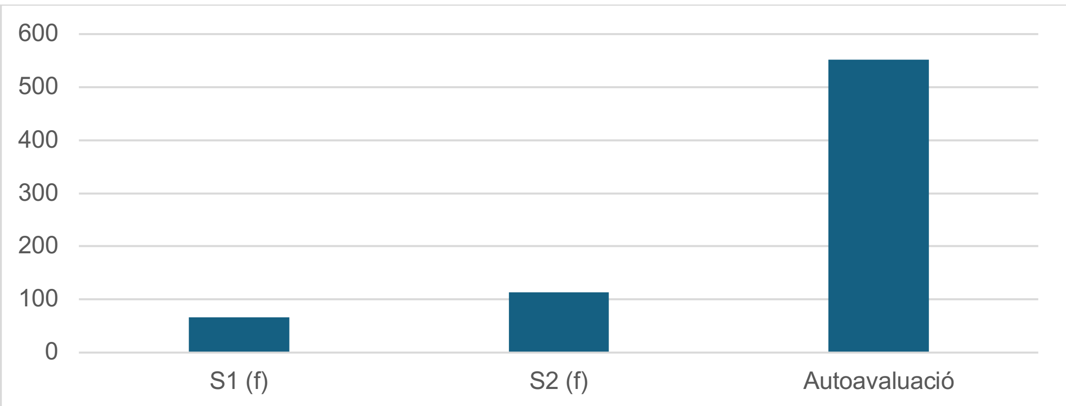
Per tant, podem afirmar que, efectivament, hi ha diferències entre el discurs inicial i final de tutors i tutorats, que a més aquestes estan associades a la formació en estratègies discursives i poden explicar els canvis quantitatius detectats en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat.

6.2.2.2. Presentació dels resultats de l'anàlisi de l'autoconcepte matemàtic

Pregunta 1. *Quins són els moments en què s'observen canvis en les intervencions associades a l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat que rep una formació específica?*

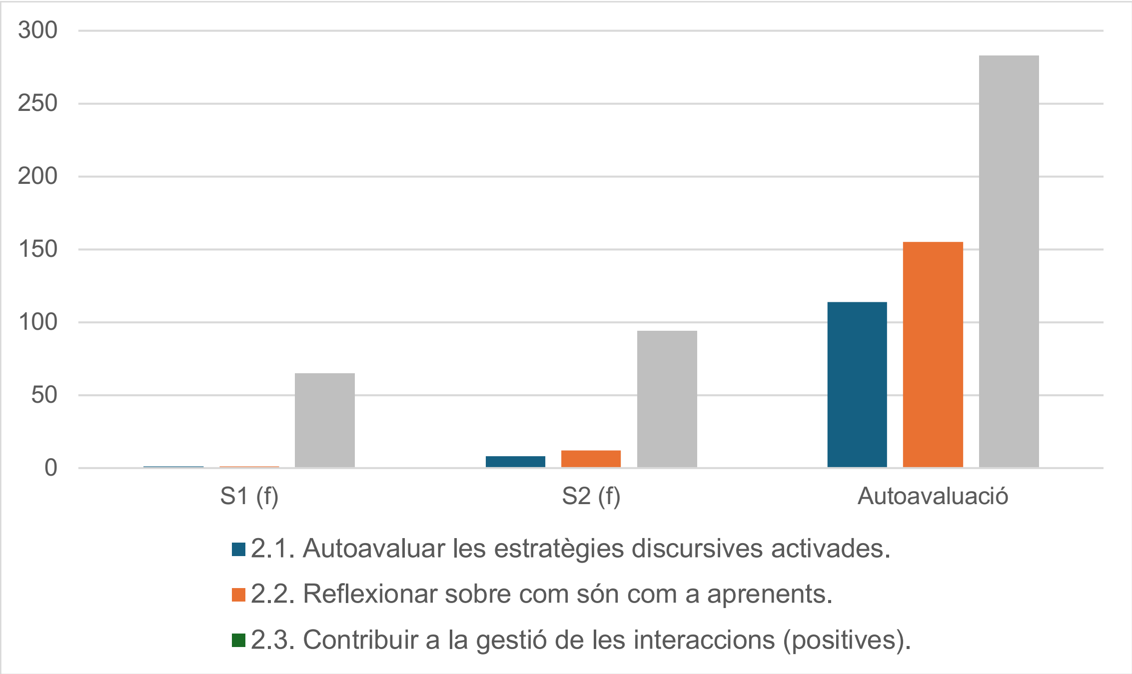
Per donar resposta a aquesta pregunta s'analitzen, per una banda, les interaccions de les dues sessions -S1 i S2- (com a la dimensió de resolució de problemes) i, per altra banda, una sessió d'autoavaluació. El Gràfic III-3 mostra un lleuger augment general de les freqüències de la S1 a la S2, encara que amb proporcions força baixes.

Gràfic III-3. Presentació de resultats: freqüència d'interaccions en la S1 i la S2 (autoconcepte matemàtic)



Tal com ens mostra el Gràfic III-4, mentre que les categories d'*autoavaluar les estratègies* i *reflexionar* apareixen sobretot i en gran mesura a la sessió d'autoavaluació, i durant el procés estan molt poc presents; la categoria de *contribuir a la gestió de les interaccions* mostra freqüències més elevades, durant les S1 i S2 i especialment altes en la sessió concreta d'autoavaluació.

Gràfic III-4. Presentació de resultats: freqüència d'interaccions en la S1 i la S2 per cada categoria (autoconcepte matemàtic)



Tal com s'observa en la Taula III-37 a la S1 gairebé el 97% de les intervencions es concentren en la *contribució a la gestió de les interaccions positives*, a la S2 disminueix lleugerament (al voltant del 82%) i, per contra, s'observa un augment de les altres dues categories: *autoavaluar les estratègies discursives activades* (7.02%) i *reflexionar sobre com són com a aprenents* (10.53%). Un tall d'àudio d'una parella a la sessió d'autoavaluació així ho mostra.

> Alumne tutorat 8: *Si calculem la proporció no creus que ens donarà correcte?*
> Alumne tutora 7: *Mmm... deixem pensar...*
> Alumne tutorat 8: *Sí! Jo crec que sí.*

Taula III-37. Presentació dels resultats de les categories: autoconcepte matemàtic

Categories	**S1**		**S2**		**Autoavaluació**	
	f	*% de f*	*f*	*% de f*	*f*	*% de f*
2.1. Autoavaluar les estratègies discursives activades.	1	1.52	8	7.02	114	20.65
2.2. Reflexionar sobre com són com a aprenents.	1	1.52	12	10.53	155	28.08
2.3. Contribuir a la gestió de les interaccions (positives).	65	96.97	94	82.46	283	51.27
Total	**66**	**100.00**	**114**	**100.00**	**552**	**100**

Per tant, la categoria que, clarament destaca per sobre de les altres en nombre d'intervencions és *contribuir a la gestió de les interaccions* i el moment del programa que presenta freqüències clarament més altes en relació amb els indicadors associats a l'autoconcepte matemàtic és el d'autoavaluació, amb un total de 552 intervencions entre les tres categories destacades.

Encara que es tracti de canvis no perceptibles a nivell d'estudi quasiexperimental, l'augment general dels percentatges d'intervencions, en les categories associades a aquesta variable, de l'inici al final del programa (de 66 a 114 intervencions), especialment en l'indicador *contribuir a la gestió de les interaccions*, el podríem explicar per l'augment dels nivells de confiança en la interacció dels dos membres de la parella, generant canvis en: les *valoracions del procés d'aprenentatge, les intervencions de suport i ajuda a la parella* o la *regulació de les intervencions*. Així ho expressen una mestra i un alumne tutor a les entrevistes finals:

> Docent 3: *"Els nivells de confiança entre les parelles cada cop són més altes... al principi la relació es basa molt en la pregunta-resposta, però cada cop el diàleg és més fluid".*
> Alumna tutora 1: *"Al principi el tutorat quasi no em demanava coses... no preguntava i estava bastant tímid. Però a mesura que anàvem avançant cada cop ha participat més... diu... no, això jo crec que seria així... dona la seva opinió i així jo també aprenc més..."*

Però, com ja avançàvem el moment en què veiem una freqüència més elevada d'intervencions que es podrien relacionar amb possibles canvis en l'autoconcepte matemàtic és en la sessió d'autoavaluació. Mostra d'això l'expressa una docent a l'entrevista final.

Docent 4: *"És cert que al llarg de les sessions tendeixen a reflexionar poc sobre com van avançant... com van aprenent... però per això ja tenen el moment de l'autoavaluació cada quinze dies en què poden valorar els seus punts forts i febles i fer propostes de millora del seu propi treball".*

Per tant, acabant de donar resposta a la pregunta 1 de la variable d'autoconcepte matemàtic, veiem que el moment clau on dediquen temps a autoavaluar-se, a reflexionar i a fer aportacions per a poder millorar és a l'autoavaluació, no tant durant el desenvolupament de les sessions.

Aquest pot ser un dels motius que expliquen per què no s'observen millores estadísticament significatives en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat de l'inici al final del desenvolupament del programa. És probable que, tot i que aquests indicadors es troben força presents en el moment de l'autoavaluació, sigui necessari un reforç i un treball més explícit en el mateix desenvolupament de les sessions i a les sessions d'autoavaluació incidir específicament en aspectes que ajudin a reconèixer els aprenentatges i avenços que es van fent per poder arribar a incidir en un constructe complex com és l'autoconcepte matemàtic.

Tot seguit es dona resposta a la segona pregunta de la variable d'autoconcepte matemàtic, destacant els indicadors que han tingut poca presència i analitzant les possibles causes de la manca de millora de la variable, alhora que establint possibles línies de treball futures. Per fer-ho se centrarà la mirada en els indicadors específics de cada una de les categories del constructe.

Pregunta 2. *Quins són els elements que poden tenir influència en els canvis observats en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat tutor i tutorat? Estan relacionats amb la formació específica rebuda i poden ser els factors explicatius dels canvis en l'autoconcepte matemàtic?*

Es comença posant el focus als indicadors específics de cada una de les categories: *avaluar les estratègies discursives*, *reflexionar com a aprenents* i *contribuir a la gestió de les interaccions positives* per acabar de concretar quins elements poden haver influït en la manca de canvis de l'autoconcepte matemàtic en els diferents moments del desenvolupament del programa i si aquests poden estarr relacionats amb la formació específica rebuda.

La Taula III-38 ens mostra que durant el procés de resolució fan poques intervencions associades a l'*autoavaluació de les estratègies discursives*. Sí que es detecta, però, un lleuger augment d'aquest tipus d'intervencions de la S1 a la S2, encara que quasi imperceptible en la major part dels indicadors. Els tutors comencen a la S1 amb gairebé cap intervenció associada als quatre indicadors corresponents, i passen a la S2 a un màxim del voltant del 23% d'intervencions en la *valoració de la planificació*. En el cas dels tutorats, passen del 0% d'intervencions pels quatre indicadors i arribant a un màxim del 8.33% d'intervencions a la S2 en la *valoració de la formulació de preguntes*. Quan augmenten de manera clara les freqüències és en el moment de l'autoavaluació.

Taula III-38. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 1: autoavaluar les estratègies discursives activades

Indicadors	Tutors							
	S1		**S2**		**Autoavaluació**		**Total**	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.1.1. Valora la planificació.	0	0	5	22.73	17	77.27	22	100
2.1.2. Valora la formulació de preguntes.	0	0	0	0	20	100	20	100
2.1.3. Valora l'oferiment de pistes.	0	0	1	14.29	6	85.71	7	100
2.1.4. Valora la revisió.	1	6.25	0	0	15	93.75	16	100
Indicadors	**Tutorats**							
	S1		**S2**		**Autoavaluació**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.1.1. Valora la planificació.	0	0	1	5.56	17	94.44	18	100
2.1.2. Valora la formulació de preguntes.	0	0	1	8.33	11	91.67	12	100
2.1.3. Valora l'oferiment de pistes.	0	0	0	0	9	100	9	100
2.1.4. Valora la revisió.	0	0	0	0	19	100	19	100

Com ja s'ha exposat a l'apartat anterior, això s'explica per què és en aquest últim moment de la sessió que els alumnes completen una pauta d'autoavaluació en parella que, a més de preguntes de caràcter més general sobre el seu procés d'aprenentatge, planteja preguntes concretes referents a les estratègies treballades a la formació específica rebuda i demanant la valoració de: la planificació, la formulació de preguntes, l'oferiment de pistes i la revisió. En aquest espai d'autoreflexió els tutors i els tutorats tenen l'oportunitat de valorar quin ha estat l'ús de les estratègies específiques, però també de fer propostes de canvis i millores per a la següent quinzena de desenvolupament del programa. Així ho expressa una parella:

> Alumne tutor 3: *Recorda que ara hem de pensar què millorarem a les següents sessions del programa...*
> Alumna tutorada 4: *Ah si!!! Jo crec que cada vegada ho fem millor, però potser hauríem de dedicar una mica més de temps a la planificació i a la revisió.*
> Alumne tutor 3: *Vale, doncs apuntem-ho en aquest espai!*

Seguint amb l'anàlisi dels resultats anteriors, en la sessió d'autoavaluació veiem que la valoració de les estratègies de *planificació*, *formulació de preguntes* i *revisió* presenten freqüències semblants tant en el cas dels tutors com dels tutorats. En canvi, detectem que, per part dels dos rols, fan moltes menys intervencions associades a la valoració de l'*oferiment de pistes*.

Això es pot deure a la complexitat de donar bones pistes, probablement perquè no estan tan acostumats (entrenats) com, per exemple, a fer preguntes (que també és un procés complex, però més habitual a les aules). Respecte a la planificació, que també és força complexa, una raó per la qual hi pot haver més intervencions és perquè és una part del full d'activitats que han de completar i això els obliga una mica més a fixar-s'hi que no pas les altres estratègies que no tenen "obligatorietat".

A l'autoavaluació també es va fer molt èmfasi a la importància de *reflexionar sobre ells mateixos com a aprenents*. Com que és aquest moment el que es destina de manera explícita a aquest tipus de reflexions, altre cop veiem que hi ha una freqüència baixa d'intervencions durant el procés de resolució encara que amb un lleuger augment de la S1 a la S2 (Taula III-39).

Taula III-39. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 2: reflexionar sobre com són com a aprenents

Indicadors	Tutors							
	S1		S2		Autoavaluació		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.2.1. Valora el seu nivell de preparació/ implicació en el procés.	0	0	2	15.38	11	84.62	13	100
2.2.2. Valora la seva capacitat per resoldre els problemes.	0	0	3	5	57	95	60	100
2.2.3. Valora les seves dificultats.	0	0	0	0	6	100	6	100

Indicadors	Tutorats							
	S1		S2		Autoavaluació		Total	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.2.1. Valora el seu nivell de preparació /implicació en el procés.	0	0	1	10	9	90	10	100
2.2.2. Valora la seva capacitat per resoldre els problemes.	0	0	5	7.25	64	92.75	69	100
2.2.3. Valora les seves dificultats.	1	10	1	10	8	80	10	100

Veiem que en el moment de l'autoavaluació la gran majoria d'intervencions se centren a valorar la seva *capacitat per resoldre problemes* (amb 57 intervencions dels tutors i 64 dels tutorats). Els altres indicadors: *valora el seu nivell de preparació/implicació en el procés* i *valora les seves dificultats* mostren freqüències menors. Si els costa identificar les dificultats, després tampoc podran apreciar els avenços que vagin fent. Això ho pot explicar el comentari de la professora de matemàtiques a l'entrevista final:

> Docent 1: "*En el moment de l'autoavaluació estan molt més preparats per a valorar tot allò que ja fan bé, tots els aspectes positius... En canvi, els costa molt determinar quines dificultats d'aprenentatge tenen, com de preparats estan i fer autocrítiques reflexionades sobre què cal reforçar de cara a pròximes sessions. Per això hi ha algunes parelles que deixen aquest apartat de la pauta d'autoavaluació buit...*

A la Taula III-40, referent a la *contribució a la gestió de les interaccions positives*, veiem que les freqüències més altes les trobem a l'indicador: *regula les intervencions* en el cas dels tutors i, especialment, en la sessió 1. Això es podria explicar per què a l'inici de la intervenció els tutors tendeixen a ser força directius en el procés de resolució, estructurant les interaccions i els moments d'intervenció de cada membre de la parella, derivat del rol que fan. Això queda força compensat en la sessió 2 on veiem que hi ha una freqüència més equilibrada entre tutors i tutorats. Aquests resultats ens fan pensar que, probablement, estableixen una interacció cada vegada més simètrica on les aportacions d'un membre i l'altre membre de la parella estan cada vegada més compensades.

Taula III-40. Presentació dels resultats dels indicadors de la categoria 3: contribuir a la gestió de les interaccions positives

Indicadors	Tutors							
	S1		S2		Autoavaluació		Total	
	f	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.3.1. Utilitza expressions d'ànim i suport.	4	30.77	7	53.85	2	15.38	13	100
2.3.2. Regula les intervencions.	28	48.26	12	20.69	18	31.03	58	100
2.3.3. Verbalitza allò que han millorat.	1	16.67	3	50	2	33.33	6	100
2.3.4. Verbalitza allò que fan bé.	8	5.56	28	19.44	108	75	144	100
2.3.5. Verbalitza allò que encara poden millorar.	8	12.12	5	7.58	53	80.30	66	100
Indicadors	**Tutorats**							
	S1		**S2**		**Autoavaluació**		**Total**	
	f	% de f	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*	*f*	% de *f*
2.3.1. Utilitza expressions d'ànim i suport.	1	50	1	50	0	0	2	100
2.3.2. Regula les intervencions.	5	23.81	11	52.38	5	23.81	21	100
2.3.3. Verbalitza allò que han millorat.	0	0	0	0	1	100	1	100
2.3.4. Verbalitza allò que fan bé.	2	2.53	15	18.99	62	78.48	79	100

2.3.5. Verbalitza allò que encara poden millorar.	7	13.73	12	23.53	32	62.75	51	100

Seguint amb l'anàlisi dels resultats anteriors veiem que les freqüències referides a *utilitzar expressions d'ànim i suport* són considerablement baixes. Per tutors, però especialment per tutorats. Tenint en compte la importància d'aquests elements per a produir canvis i millores en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat podria ser una altra causa per la qual, en aquest estudi, no s'han pogut detectar canvis en aquesta variable. Així ho expressa una docent:

> Docent 2: *"Penso que la part del reforç positiu en la parella és molt important. Donar-se ànims i felicitar-se mútuament. Potser això és un dels aspectes que he vist menys al llarg del desenvolupament del programa... i crec que seria clau per millorar la seva predisposició per a resoldre més i millor els problemes de mates..."*

Finalment, com ja avançàvem, observem que tant tutors com tutorats acostumen a fer més intervencions associades a *verbalitzar allò que ja fan bé,* que *allò que encara poden millorar* i encara amb molta menys proporció *allò que han millorat*. Això es pot explicar per què l'alumnat no se centra o no dona massa importància, en moltes ocasions, a expressar allò que poden millorar o reforçar de cara a pròximes sessions del programa (a l'apartat corresponent de la pauta d'autoavaluació) i a reflexionar sobre els progressos que han fet al llarg del mateix desenvolupament del programa. Si no verbalitzen aquests aspectes, serà difícil que prenguin consciència dels seus avenços i que puguin millorar l'autoconcepte matemàtic.

Amb el repàs de tots els moments del procés de resolució s'ha pogut anar observant aquells indicadors i categories que s'observen amb més freqüència: *valora la planificació*, *valora la seva capacitat per resoldre els problemes*, *regula les intervencions,* especialment per tutors, o *verbalitza allò que fan bé*).

I també aquells que s'identifiquen amb menys freqüència (*valora l'oferiment de pistes*, *valora les seves dificultats*, les *expressions d'ànim i suport*, *verbalitza allò que han millorat* o *verbalitza allò que encara poden millorar*, en aquest cas tant per tutors com per tutorats. I així determinar els elements que més han influït en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat i aquells que han dificultat el seu desenvolupament.

Finalment, s'han pogut identificar aquells elements més relacionats amb la formació específica, que han aparegut en freqüències altes com la *valoració de l'estratègia de planificació* i, aquells que formaven part de la formació en estratègies específiques per reforçar l'autoconcepte matemàtic, com la *valoració del seu nivell de preparació/implicació en el procés* i *la valoració de les seves dificultats*, que han aparegut amb molta menys freqüència.

7. Conclusions

En aquest apartat es fa una revisió profunda de cada un dels objectius d'investigació plantejats per a cada constructe i s'examinen les hipòtesis i les preguntes de recerca per tal de fer balanç de tot el que s'ha anat evidenciant al llarg de l'estudi.

7.1. Competència en resolució de problemes matemàtics

El **primer objectiu general**, referit a la competència en resolució de problemes matemàtics, es proposava conèixer els canvis que es produeixen en la competència en resolució de problemes matemàtics per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella*, i en cas de detectar canvis significatius, esbrinar quins són els factors que podien ser els causants d'aquests canvis. Aquest objectiu general es desglossava en dos objectius específics, cada un d'ells referits a un dels dos grups d'investigació (GI 1 i GI 2).

L'**objectiu específic 1** es plantejava conèixer els canvis que es produeixen en la competència en resolució de problemes matemàtics per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella*.

La **hipòtesi 1** que feia referència a que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella*, tant tutors com tutorats, obtindrien millores estadísticament significatives entre les proves pretest i les proves posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta; ha quedat acceptada.

Aquest resultat inicial és important perquè dona força i sentit a l'estudi. A més, permet revisar i reafirmar les aportacions que es van fer durant la presentació del marc teòric. Amb l'ús de la metodologia de tutoria entre iguals en una àrea instrumental com les matemàtiques i centrant-nos en una competència clau com és la resolució de problemes, s'obtenen resultats satisfactoris d'aprenentatge (Rohim i Umam, 2019; Syarifuddin et al., 2020). Així doncs, les propostes pedagògiques d'aprenentatge entre iguals no només permeten treballar i millorar aspectes socioemocionals, sinó que també són útils per a facilitar l'aprenentatge en l'àmbit cognitiu (Carbonaro et al., 2020).

Els resultats obtinguts estan en consonància amb altres investigacions en l'àmbit nacional i internacional (Álvarez i González, 2005; Robinson et al., 2005) amb relació a les diferents propostes de tutoria entre iguals, tant en l'àmbit de les matemàtiques (Moliner i Alegre, 2022; Plaza-Chalco, 2023) com en altres àrees (Bayne, 2013; De Backer et al., 2012; Flores et al., 2024; Thurston et al., 2007)

En la **hipòtesi 1.1** es feia referència a l'alumnat participant en el programa en el GI 1 amb el rol de tutor. En aquest cas, s'ha acceptat la hipòtesi que plantejava que hi hauria millores estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta. L'aprenentatge dels tutors, i no únicament dels tutorats amb l'ús de la tutoria entre iguals també queda constatat per publicacions i recerques prèvies (Duran, 2014; Galbraith i Winterbottom, 2011; Roscoe i Chi, 2007).

En el cas dels tutors les millores es produeixen pel que alguns autors identifiquen amb el constructe d'*aprendre ensenyant* (Duran, 2014). També hi ha altres recerques que evidencien el potencial que representa pel procés d'aprenentatge fer de mediador, per l'activació de processos cognitius i metacognitius associats a l'explicació, la interrogació o l'argumentació (Montero i Mahecha, 2020; Ricardo-Fuentes et al., 2023; Rubio, 2019). Explicar el coneixement implica una menor elaboració del coneixement, però pot ser un pas previ per arribar a processos més complexos implicats en interrogar i argumentar com són la reestructuració dels esquemes mentals, la generació d'inferències i l'automonitoratge metacognitiu (Duran, 2014).

En aquesta mateixa direcció les investigacions d'Ali et al. (2015) i Fernández-Martín et al. (2022), plantegen l'alt nivell de reflexió que han d'activar els tutors per tal de formular preguntes per aprofundir en el pensament del tutorat, tot reforçant les seves habilitats d'interacció i el desenvolupament d'estratègies per a la resolució de problemes.

La **hipòtesi 1.2** es referia a l'alumnat participant en el programa en el GI 1 amb el rol de tutorat. En aquest cas, també s'ha acceptat la hipòtesi que plantejava que hi hauria millores estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta. L'aprenentatge dels tutorats, també queda avalat per recerques prèvies en l'àmbit de les matemàtiques i la resolució de problemes (Thurston et al., 2020, 2021; Zaldívar et al., 2018), així com en altres àrees (Roscoe i Chi, 2004; Tsuei, 2012).

Referent a l'evolució observada dels tutorats, també hi ha diversos estudis que aporten raons explicatives del seu aprenentatge (Duran, 2018; Robinson et al., 2005). La tutoria entre iguals beneficia el procés de construcció de coneixement de l'alumnat tutorat per l'atenció personalitzada, constant, directa i immediata que reben, junt amb la responsabilitat i els alts nivells de motivació i compromís que desenvolupen en el seu rol (Srivastava, 2018; Thurston et al., 2021).

Tenint en compte aquests resultats, s'evidencia, doncs, que en la participació en el programa *(En)Raonem en parella*, tant si es desenvolupa el rol de tutor com el de tutorat, s'obtenen millores en la competència en resolució de problemes matemàtics per a tots aquests alumnes.

Tots els aspectes apuntats, es complementen a més a més per la pròpia estructura de desenvolupament de les sessions que fomenta la interacció entre els membres de la parella i la seva implicació en la resolució dels problemes matemàtics que es plantegen. Així com també amb els materials que s'utilitzen en el programa per a la resolució de problemes matemàtics: els fulls d'activitats, la guia de rols i la pauta d'autoavaluació de la parella com a material mediador i regulador de l'activitat conjunta (estructurar la interacció, guiar el procés de resolució i propiciar reflexions metacognitives i sobre el propi funcionament dels rols de la parella). Totes les propostes i aportacions en el seu conjunt poden haver facilitat les millores evidenciades a nivell estadístic (Bastart i Flores, 2024).

L'**objectiu específic 2**, referit també a la competència en resolució de problemes matemàtics, es proposava conèixer els canvis que es produeixen en la competència en resolució de problemes matemàtics per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella* que ha rebut una formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics, i en cas de detectar canvis estadísticament significatius, indagar en els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

Per fer-ho, es revisen les hipòtesis d'investigació que es relacionen amb aquesta variable i grup d'alumnes.

Referent a la **hipòtesi 2** que feia referència a que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella* que han rebut una formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics, tant tutors com tutorats, millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics. Per això s'esperava obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i postest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; ha quedat acceptada.

Aquests resultats aporten validesa a les diferents propostes de millora i enriquiment del programa que es van fer arran de l'estudi pilot realitzat prèviament (Bastart i Flores, 2024). També permeten reafirmar els beneficis que el treball explícit d'estratègies en resolució de problemes matemàtics (en aquest cas, planificar, formular preguntes, donar pistes, posar exemples i activar processos de revisió) pot generar per a la millora d'aquesta competència, en consonància amb les aportacions d'estudis previs (Arteaga-Martínez et al., 2020; Meza-Bermeo, 2021; Moores et al., 2006; Moran et al., 2014).

En la **hipòtesi 2.1** es feia referència a l'alumnat participant en el programa en el GI 2 amb el rol de tutor. En aquest cas, queda acceptada també la hipòtesi que plantejava que els alumnes tutors participants en el programa (*En)Raonem en parella* que han rebut una formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics. Per això s'esperava obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

L'aprenentatge dels tutors, i no únicament dels tutorats amb l'ús de la metodologia utilitzada i amb el reforç de les seves tasques a través de la formació específica rebuda en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics: fer explicacions, posar exemples, donar pistes, etc., també queda constatada per altres recerques prèvies (Atkinson et al., 2003; Güner et al., 2021; Hunter i Hunter, 2018; Rodríguez et al., 2017; Webb et al., 2019).

La **hipòtesi 2.2** es referia a l'alumnat participant en el programa en el GI 2 en el rol de tutorat. En aquest cas, també queda acceptada la hipòtesi que plantejava que els alumnes tutorats participants en el programa (*En)Raonem en parella* que han rebut una formació específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics millorarien la seva competència en resolució de problemes matemàtics. Per això s'esperava obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i posttest de resolució de problemes matemàtics amb una mida d'efecte alta i amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

L'aprenentatge dels tutorats, també queda constatat en recerques, a nivell internacional, en l'àmbit de les matemàtiques i la resolució de problemes (O'Connor i Michaels, 2019; Ruthven i Hofmann, 2016). Com s'apuntava, el suport específic que reben i l'acompanyament en el procés de resolució ajuden a que la seva capacitat en l'ús d'estratègies per a resoldre problemes de matemàtiques vagi desenvolupant-se a mesura que avança el programa.

A continuació, es presenten les conclusions que resulten de l'anàlisi del procés, per tal de poder respondre a les preguntes inicialment formulades, que giraven entorn d'esbrinar les diferències entre el discurs matemàtic inicial i final de les parelles que han rebut una intervenció específica en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics i conèixer quines són aquestes diferències. Així com determinar si les diferències detectades estan en relació amb la formació específica realitzada i poden ser causants dels canvis ocorreguts en la resolució de problemes matemàtics de l'alumnat.

Respecte a les preguntes 1 i 2 de recerca, s'ha observat que, efectivament, es produeixen canvis referits al nombre d'intervencions i les freqüències associades al discurs matemàtic de l'inici al final de la implementació del programa *(En)Raonem en parella.*

A la S1 de desenvolupament del programa als centres educatius veiem un percentatge d'intervencions de l'alumnat tutor força més alt que el dels tutorats. Els percentatges d'intervencions dels tutorats augmenten en més mesura a l'última sessió (S2) de desenvolupament del programa, de tal manera que ambdues freqüències queden força igualades.

Això es pot explicar, com avançàvem a l'apartat de resultats, perquè a l'inici del programa, la relació entre tutors i tutorats és probable que sigui força directiva. Seguint un model més clàssic d'interacció, similar al que es produeix entre professor i alumne -inici-resposta-feedback-, (Berghmans et al., 2024; Graesser et al., 2009; Duran i Monereo, 2005). El tutor tendeix a gestionar la interacció i a marcar els temps de les intervencions, en definitiva, la relació entre els dos segueix un model més tradicional. A mesura que van avançant les sessions del programa i es va interioritzant i consolidant la formació específica rebuda, tant a nivell de rols, com d'estratègies específiques, la relació entre ambdós membres de la parella adquireix un caràcter que es pot associar a un model de caire més col·laboratiu (Duran i Monereo, 2005) o co-constructiu (Chi i Menekse, 2015), les intervencions són més simètriques, hi ha una cessió del control del tutor al tutorat i es produeixen situacions d'interacció en què es fa possible una interacció enriquida on afloren les estratègies discursives i es donen les condicions òptimes perquè ambdós membres de la parella participin en la construcció conjunta del coneixement.

A més, s'observa que els processos de resolució que presenten un canvi més gran des de la primera a l'última sessió són els de *determinar els passos a seguir* i *resoldre el problema*, especialment en el cas dels tutorats. Això es pot explicar, també, per l'augment del grau de participació per part d'aquest grup d'alumnes en la interacció i en el procés de resolució durant les sessions.

Aquests resultats es troben en consonància amb investigacions prèvies, que apunten els canvis i millores en el procés de resolució i la interacció en el cas dels tutors (Galbraith i Winterbottom, 2011; Johnson, 2019) amb l'ús de la tutoria entre iguals; però també en el cas dels tutorats. Ho veiem tant en estudis específics dels programes de tutoria entre iguals en el camp de les matemàtiques (Bastart i Flores, 2024); com en altres (Duran et al., 2018; Duran i Miquel, 2018; Duran i Monereo, 2005; Flores et al., 2024; Topping et al., 2004; Toulia et al., 2021), que fan referència de manera més específica als models d'interacció que es poden desenvolupar entre ambdós membres de la parella.

La segona part de les preguntes referent a la relació de les diferències detectades amb la formació específica rebuda per part de l'alumnat del GI 2, també la podem respondre afirmativament.

De fet, com s'avançava, molts dels canvis referents al discurs matemàtic els identifiquem en la categoria *resoldre el problema.* Dins la qual se situen els indicadors que es poden relacionar de manera més directa amb algunes de les estratègies treballades durant la formació específica, com són *formular preguntes* i *donar pistes i exemples*. Sembla, doncs, que el material específic, així com l'acompanyament de l'alumnat en el procés de presentació i desenvolupament de les estratègies treballades ha permès una millora en l'ús de la gran majoria d'elles i, per tant, ha enriquit els processos de resolució activats per l'alumnat.

Com s'ha fet palès en els resultats, també es produeix un augment destacable d'intervencions situades dins la categoria *determinar els passos a seguir,* la qual associem a l'estratègia de *planificació* que també es va treballar explícitament a la formació esmentada. Els canvis s'identifiquen en el cas dels tutors, especialment en les intervencions referents a *explicitar les operacions que faran* i en el cas dels tutorats, tant en les intervencions referides a les *operacions* com les referides a l'*explicitació del procés a seguir.* L'alumnat cada cop ha estat més capaç de determinar els processos adequats i necessaris (i de fer-ho de manera compartida amb la parella) per a poder resoldre els problemes matemàtics que se'ls plantejava.

Referent a l'estratègia de *revisió* veiem que no en tant grau com les altres estratègies, però també es produeixen canvis de l'inici al final del desenvolupament del programa que poden indicar certes millores en el seu ús per part de l'alumnat. La tutoria entre iguals és una opció metodològica òptima per a fer explícits els processos de metacognició, regulació de l'aprenentatge i consciència sobre els processos activats. I això pot explicar l'augment i millora en l'ús de totes les estratègies de resolució plantejades a l'alumnat al llarg del procés.

Aquests resultats es troben en la línia d'estudis previs que fan referència a la importància de formar adequadament l'alumnat en estratègies específiques enfocades a la planificació, revisió i altres estratègies metacognitives, per a facilitar el procés de resolució de problemes matemàtics (Mevarech i Kramarski, 2014; Narang i Saini, 2013; Sarah et al., 2021).

En conclusió, doncs, es pot afirmar que sí que es produeixen canvis de l'inici al final del desenvolupament del programa referents al discurs matemàtic per a la resolució de problemes matemàtics i que aquests estan en gran mesura lligats a la formació específica que es va oferir a un dels grups participants del programa *(En)Raonem en parella.*

Així doncs, aquesta recerca aporta noves dades, en la línia d'estudis previs (Bastart i Flores, 2024), a favor de l'ús de la tutoria entre iguals per a la millora de la competència en resolució de problemes matemàtics. Els resultats de l'anàlisi del procés permeten explicar els resultats quantitatius que es produeixen i aproximar la recerca als processos d'interacció de les parelles que permeten avançar en els aprenentatges, i a partir d'aquest coneixement que aporta l'estudi seguir avançant en la millora i consolidació de la tutoria entre iguals, concretament en el programa *(En)Raonem en parella*, com a eina per al desenvolupament de la resolució de problemes matemàtics.

7.2. Autoconcepte matemàtic

Es revisen, a continuació, els resultats obtinguts per a l'autoconcepte matemàtic, començant a examinar el segon objectiu general, els objectius específics i les hipòtesis relacionades. Seguidament, es farà una revisió de les evidències trobades en l'anàlisi del procés per poder donar resposta a les preguntes d'investigació.

El **segon objectiu general** apuntava a conèixer els canvis que es produeixen en l'autoconcepte matemàtic per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella* i esbrinar quins són els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

L'**objectiu específic 1** es plantejava conèixer els canvis que es produeixen en l'autoconcepte matemàtic per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella*. Es revisen, a continuació, les hipòtesis d'investigació plantejades referents a aquest objectiu.

La **hipòtesi 1** que feia referència a que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella*, tant tutors com tutorats, millorarien el seu autoconcepte matemàtic, esperant obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i les proves posttest d'autoconcepte matemàtic; no ha pogut ser acceptada.

En la **hipòtesi 1.1** es feia referència a l'alumnat participant en el programa en el GI 1 amb el rol de tutor. En aquest cas, no queda acceptada la hipòtesi que apuntava que els alumnes tutors participants en el programa (*En)Raonem en parella* millorarien l'autoconcepte matemàtic amb diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i les proves posttest d'autoconcepte matemàtic.

Tampoc s'ha pogut acceptar la **hipòtesi 1.2** que feia referència a que els alumnes tutorats participants en el programa (*En)Raonem en parella* en el GI 1 millorarien l'autoconcepte matemàtic amb diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i les proves posttest d'autoconcepte matemàtic.

Respecte d'aquests resultats, com avançàvem, hi ha recerques prèvies que apunten que l'autoconcepte matemàtic és un constructe complex, difícil de modificar i, per tant, de millorar (Möller et al., 2020). És, per tant, una part de la personalitat molt estable i difícil que canviï (Wolff et al., 2018; Zandi et al., 2022); això és especialment destacable en l'àrea de matemàtiques (Skaalvik i Skaalvik, 2006; Skaalvik i Valas, 2010).

Els estudis destaquen les dificultats per identificar millores en el constructe tant per tutors com per tutorats. L'alumnat tendeix a fer explícits processos de resolució que activa, però no tant la seva pròpia percepció sobre els processos d'aprenentatge que desenvolupa. És per això que tot el procés de reflexió metacognitiva és difícil de desenvolupar, i com a conseqüència, es fa complicat explicitar aspectes d'aprenentatge associats a l'autoconcepte de l'alumnat.

Un altre factor que pot haver influït en aquests resultats és el desenvolupament de les sessions del programa en un període relativament curt de temps (tres o quatre mesos), fet que, en principi discrepa d'algunes revisions d'estudis sobre aprenentatge cooperatiu que apunten que els canvis en aquesta variable requereixen intervencions més perllongades en el temps (Arens et al., 2017; Haas i vanDellen, 2020; Parker et al., 2012, 2018).

Finalment, cal reconèixer, també, les limitacions que poden tenir els qüestionaris per mesurar aquesta dimensió (Pulido et al., 2023). Cal valorar la variable com a dimensió estable i complexa de la personalitat i que és difícil utilitzar un instrument que pugui copsar la complexitat dels elements implicats en el constructe dels participants dels estudis.

De cara a línies d'investigació futures seria interessant considerar les aportacions d'autors que apunten la idea que la transició escolar a la secundària i l'augment de l'edat pot estar associat a un menor autoconcepte (Ramos-Díaz et al., 2017). Les dades de l'estudi van indicar que els alumnes de secundària, en comparació amb els de primària, mostraven resultats significativament més baixos en quasi totes les dimensions associades a l'autoconcepte (Onetti, 2019). Aquesta és una proposta d'investigació a explorar en futurs estudis, ja que podria ser una variable que, en aquest cas, no s'ha tingut en consideració i potser valdria la pena explicar-la.

També és cert, però, que en altres àmbits del coneixement, com pot ser la llengua i la comprensió lectora, s'ha vist que l'ús de metodologies com la tutoria entre iguals pot generar millores en l'autoconcepte lector, especialment en el cas dels tutors (Flores i Duran, 2013, 2016; Leung et al., 2005). En el cas de les matemàtiques els canvis i millores en el constructe semblen ser més difícils d'identificar (Hidalgo et al., 2004; Lárez-Villarroel, 2018). Per aquest motiu són necessàries altres actuacions pedagògiques enfocades més directament a la millora de l'autoconcepte i en aquesta línia, seguir treballant-hi.

Tot i les dificultats per identificar aquests canvis, existeixen altres investigacions dedicades a revisar la millora de l'autoconcepte matemàtic amb l'ús de la metodologia de tutoria entre iguals en el cas específic de l'àrea de matemàtiques i que també apunten millores estadísticament significatives en el constructe (Alegre i Moliner, 2017; Moliner i Alegre, 2020a; Timmerman et al., 2017; Zeneli et al., 2016).

L'**objectiu específic 2**, referit també a l'autoconcepte matemàtic es plantejava conèixer els canvis que es produeixen en l'autoconcepte matemàtic per part de l'alumnat que participa en el programa *(En)Raonem en parella* que ha rebut una formació en estratègies específiques per a reforçar l'autoconcepte matemàtic i indagar en els factors que poden ser els causants d'aquests canvis.

Respecte a la **hipòtesi 2** que feia referència a que tots els alumnes participants en el programa *(En)Raonem en parella* que han rebut una formació en estratègies específiques per a reforçar l'autoconcepte matemàtic, tant tutors com tutorats, millorarien el seu autoconcepte matemàtic, esperant obtenir diferències estadísticament significatives entre les proves pretest i les proves posttest d'autoconcepte matemàtic amb diferències estadísticament significatives, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica; no ha pogut ser acceptada.

En la **hipòtesi 2.1** es feia referència a l'alumnat participant en el programa en el GI 2 amb el rol de tutor. En aquest cas, no queda acceptada la hipòtesi que apuntava que els alumnes tutors participants en el programa (*En)Raonem en parella* que han rebut una formació en estratègies específiques per a reforçar l'autoconcepte matemàtic millorarien l'autoconcepte matemàtic amb diferències estadísticament significatives, entre el pretest i el posttest, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Tampoc podem acceptar la **hipòtesi 2.2** que feia referència a que els alumnes tutorats participants en el programa (*En)Raonem en parella* que han rebut una formació en estratègies específiques per a reforçar l'autoconcepte matemàtic millorarien l'autoconcepte matemàtic amb diferències estadísticament significatives, entre el pretest i el posttest, respecte dels alumnes que no han rebut la formació específica.

Tot i que en el present estudi no s'ha pogut detectar la millora del constructe de l'autoconcepte matemàtic amb la formació específica, els resultats favorables referents a l'autoconcepte en altres àrees del coneixement, disciplines o etapes educatives (Vasalampi et al., 2020; Molera, 2012), i en algunes recerques de l'àrea de matemàtiques i la resolució de problemes (Moliner i Alegre, 2020a; Shanley et al., 2019); ens permet tenir una visió positiva en aquest sentit.

Això ens porta a pensar que en intervencions més específiques, amb l'ús de més material de suport (González, 2023) o estratègies pedagògiques concretes (Simonsmeier et al., 2020) i, sobretot, més perllongades en el temps (Arco-Tirado et al., 2011) es podrien visualitzar aquests canvis, també, en el context del programa *(En)Raonem en parella*.

A continuació, es revisa com els resultats obtinguts de l'anàlisi qualitativa del procés donen pistes per a poder respondre a les preguntes 1 i 2 plantejades a l'inici de la investigació, que es referien a reconèixer els moments de la interacció dins de les parelles que permetessin identificar els elements responsables dels canvis en l'autoconcepte matemàtic, i seguidament, determinar quins elements podien tenir més influència en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat i si es podien relacionar amb la formació específica rebuda. Tot i que no s'han identificat les millores esperades, es realitza l'anàlisi per tal de poder identificar aspectes que permetin explicar-ne el perquè.

Tal com ens han mostrat els resultats de l'anàlisi del procés referents a aquesta variable, les intervencions que es poden associar més directament a promoure canvis en l'autoconcepte matemàtic s'han identificat, principalment, a la sessió d'autoavaluació de les parelles. Moment que la parella engega processos d'autoreflexió i revisió del seu procés d'aprenentatge durant un període específic (habitualment cada 4 sessions) de desenvolupament del programa.

Aquesta autoavaluació formula tant preguntes específiques dirigides a identificar els progressos en l'ús d'estratègies i en aspectes associats, precisament, al constructe d'autoconcepte matemàtic (com la valoració sobre la seva implicació durant el procés, les seves dificultats, les seves capacitats i l'evidència de les seves millores) i una part més general que requereix que la parella sigui capaç, a partir de l'anàlisi i reflexió feta, d'identificar un objectiu de millora del seu treball en parella, ja sigui enfocat en la pròpia interacció o d'algun element del procés de resolució, per tal que, de cara a la següent quinzena de desenvolupament del programa el puguin millorar.

Malgrat que s'observen processos d'autoreflexió, que s'esperava que fossin determinants per a la millora de l'autoconcepte, aquests finalment, no han estat rellevants ni significatius per a produir els canvis esperats en el constructe.

Veiem, altrament, que les intervencions més directament associades al constructe (verbalització de les seves capacitats, dificultats, millores, actuacions de reconeixement a la parella, regulació de les intervencions, etc.) es troben amb freqüències força baixes tant a la primera sessió de desenvolupament del programa com al final. En aquest sentit, s'identifica poca evolució en les interaccions relacionades amb la variable i tot sembla indicar que probablement es necessita un tractament explícit i conscient de totes les actuacions relacionades amb l'autoconcepte perquè la interacció entre la parella, realment tingui algun efecte en el constructe i pugui tenir influència a fer canvis cap a la millora, en consonància amb les aportacions de recerques prèvies (Barca-Lozano et al., 2013; Miñano et al., 2008).

Aquests resultats es troben en línia amb diferents estudis que apunten que l'autoconcepte és un constructe complex, que requereix intervencions específiques i perllongades en el temps per a poder detectar-hi canvis i millores reals (González, 2023; Quintero, 2020). I és aquest el camí que, probablement, cal seguir. Apostar per intervencions o formacions més completes, específiques, explícites i de llarga durada (mínim de 12 sessions) associades a l'autoconcepte matemàtic (Leung et al., 2005).

7.3. Aportacions a la pràctica educativa

Un cop presentades les conclusions associades als resultats dels objectius de recerca, en el present apartat se sintetitzen algunes de les aportacions pràctiques que es poden fer al programa *(En)Raonem en parella* a partir dels resultats obtinguts i que podrien contribuir a millorar els resultats que s'han presentat.

Abans d'abordar les consideracions específiques de possibles actuacions per a la pràctica, es destaquen alguns aspectes que deriven directament de la investigació:

- Efectes positius del programa educatiu *(En)Raonem en parella*, que es basa en la tutoria entre iguals, en el procés d'aprenentatge de l'alumnat en l'àrea de les matemàtiques i de manera específica en la dimensió de resolució de problemes matemàtics.
- Disseny i ús de material específic com a complement formatiu en estratègies discursives per a la resolució de problemes matemàtics que ha permès millorar, encara en major grau, la competència de l'alumnat: quatre càpsules formatives en format vídeo i un guió per a treballar una estratègia cada dues setmanes. Així doncs, es comença treballant la planificació durant dues setmanes, passant a la formulació de preguntes, l'oferiment de pistes i exemples i, finalment, la revisió. A l'Annex I es proposa una guia d'ús per a docents com a model per a poder reforçar l'estratègia que s'ha detectat que s'ha desenvolupat en menys mesura

al llarg de les sessions del programa, la de revisió, que podria ser utilitzada de cara a futurs processos d'implementació del programa.

- Disseny i ús de material específic com a complement formatiu en estratègies per al reforçament de l'autoconcepte matemàtic: pauta d'autoavaluació ajustada afegint ítems explícits per a fomentar l'autoreflexió associada a la preparació, implicació, capacitat, dificultats i millores de l'alumnat al llarg del procés. Com s'ha anat apuntant al llarg del treball, cal un reforçament o millora de la proposta perquè les futures intervencions puguin arribar a generar millores, també, en la variable d'autoconcepte matemàtic, ampliant la quantitat i varietat d'ítems associats al constructe inclosos en la pauta d'autoavaluació i fent un treball més explícit dels diferents elements que s'han associat a les possibles millores de l'autoconcepte matemàtic al llarg de les sessions de desenvolupament del programa.

Un cop fetes les consideracions prèvies derivades directament de la recerca realitzada, a continuació s'especifiquen algunes propostes que poden contribuir a la millora de la implementació del programa *(En)Raonem en parella* als centres que decideixin portar-lo a la pràctica.

Es posa l'atenció en el material regulador de l'activitat: 1) pauta d'autoavaluació ajustada i, 2) estratègies de suport.

1. La proposta de la pauta d'autoavaluació ajustada:

La pauta ajustada inclou: 1) ítems específics per avaluar l'ús de les estratègies treballades per a facilitar el procés de resolució de problemes matemàtics: la planificació, la formulació de preguntes, l'oferiment de pistes i exemples i la revisió i 2) ítems específics referits a aspectes associats directament a l'autoconcepte matemàtic com són: la percepció de l'alumnat respecte del seu nivell d'implicació en el procés de resolució, la seva capacitat per afrontar els problemes i les dificultats que poden tenir, entre altres.

Als annexos es presenta un exemple de la pauta ajustada a alumnat de cicle mitjà de primària i de secundària, que a més d'estar ajustades a l'edat inclou, com s'ha mencionat, ítems específics associats a la resolució de problemes matemàtics i a l'autoconcepte matemàtic. Caldria considerar-lo un instrument flexible que oferís l'oportunitat a cada centre i a cada docent de fer els ajustos necessaris en funció de l'edat de l'alumnat, així com les seves capacitats i preferències.

2. Estratègies de suport:

Tal com es presentava a l'apartat de procediment, les estratègies de suport es concreten en un material escrit específic i audiovisual -acompanyat de guions de suport-, que permet anar desenvolupant una formació permanent amb l'alumnat al llarg de les diferents sessions de desenvolupament del programa. Es proposa que es puguin anar visualitzant els vídeos associats a les quatre estratègies treballades de manera progressiva i completar la reflexió sobre el seu desenvolupament a través de les pautes d'autoavaluació ajustades.

Els resultats ens han indicat que l'estratègia de revisió és la que s'ha desenvolupat en menor mesura, així doncs caldria tenir present aquesta situació per a fer un reforçament, específicament d'aquesta estratègia, en futures implementacions del programa *(En)Raonem en parella.*

Caldria reforçar la formació associada a l'autoconcepte matemàtic (no només centrada a la sessió d'autoavaluació, sinó també present i continua a cada una de les sessions de desenvolupament del programa), com el cas de la formació en estratègies per a la resolució de problemes matemàtics.

7.4. Limitacions del treball i línies de futur

Com a últim apartat es destaquen algunes limitacions de la present investigació que poden haver afectat els resultats i que caldrà tenir en compte per futures recerques i estudis.

1. En relació amb el context de la investigació:
   La investigació ha estat desenvolupada a un context real d'aula. Aquests contextos representen una gran riquesa per a les investigacions de caràcter social i educatiu, però alhora es genera la dificultat per a controlar totes les variables: tipus de formació de l'alumnat, concepcions del professorat, etc. Cal tenir en compte aquest biaix, però en educació és aquest el context en el qual s'ha d'investigar.

2. En relació amb els instruments de mesura utilitzats:
   Tal com apunten Moeskær i Rasmus (2020), la recerca sobre com avaluar la competència en raonament i educació matemàtica és limitada. En el present estudi, no s'ha trobat una prova estandarditzada que mesuri la resolució de problemes matemàtics, i per això se'n fa servir una que és similar als fulls

d'activitat que es treballen en el programa i a més, es complementa la informació amb la prova BPR, per poder reforçar la fiabilitat dels resultats obtinguts.

S'ha detectat la dificultat d'obtenir informació fiable a través del qüestionari d'autoconcepte matemàtic -per la complexitat del constructe que es pretén analitzar-, (Ackerman i Wolman, 2007; Rinn i Cunningham, 2008). Per aquest motiu, cal considerar fins a quin punt el que responen els alumnes és la percepció real del seu autoconcepte o pot haver estat un biaix.

3. En relació amb la mida de la mostra:
   Hauria estat enriquidor per la recerca disposar d'una submostra d'alumnat que rep formació específica (GI 2) de cursos de primària i/o secundària més diversificats. També enriquiria l'estudi administrar la prova BPR a tota la mostra, i no únicament al GI 2. Caldria reduir al màxim la pèrdua de participants d'estudi que hi ha hagut durant el procés de recollida i anàlisi de dades i aconseguir una mostra més diversificada i més gran.

Tenint presents aquestes limitacions en futures recerques es tindran en compte per poder minimitzar-les i a poder ser, eliminar-les del tot.

Aquest treball d'investigació obre la porta a considerar i proposar noves línies de recerca que s'apunten breument:

Fer recerca d'intervencions futures en el marc del programa *(En)Raonem en parella* (participants que formen part actualment o formaran part de la xarxa) per:

- Aprofundir en la recerca en el camp de la resolució de problemes matemàtics valorant fer la proposta d'un instrument de recollida de dades específic pel programa que passi pel procés de validació, perquè pugui ser instaurat com a material propi de la investigació en el context del programa i, més endavant, en altres contextos.
- Ampliar la recerca de la variable d'autoconcepte matemàtic cercant i combinant els instruments més adequats i precisos per fer una recollida de dades més perllongada en el temps, i poder fer una anàlisi més sistèmica i completa en relació amb el constructe.

Queden, doncs, diversos aspectes de les dues variables principals del present estudi per seguir investigant i avançant en aquesta línia de recerca.

També resulta interessant i necessari continuar treballant per promoure la tutoria entre iguals, i l’aprenentatge entre iguals en general, com a pràctica ben instaurada als centres educatius per seguir desenvolupant la resolució de problemes matemàtics, així com altres competències i àrees i poder continuar enriquint les propostes i les pràctiques educatives de qualitat, tal com pot ajudar a fer el programa *(En)Raonem en parella*.

IV. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

8. Referències bibliogràfiques

Abidin, C., Amin, S. M., i Sulaiman, R. (2018, July). The Effect of Think-Pair-Share Learning with Contextual Approach on Junior High School Students' Mathematics Problem Solving Ability. In *Mathematics, Informatics, Science, and Education International Conference,* 31-34. DOI:10.2991/miseic-18.2018.8

Abrate, R., Pochulu, M., i Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Universidad Nacional de Villa María*. oai:biblio.unvm.edu.ar:11025

Ackerman, P.L., i Wolman, S.D. (2007). Determinants and validity of self-estimates of abilities and self-concept measures. *J Exp Psychol Appl. 13*(2), 57-78. DOI:10.1037/1076-898X.13.2.57. PMID: 17535132.

Adler, J., i Ronda, E. (2017). Mathematical Discourse in Instruction matters. A J. Adler i A. Sfard (eds.), *Research for educational change* (pp. 64-81). Routledge.

Ahmed, W., van der Werf, G., Kuyper, H., i Minnaert, A. (2013). Emotions, self-regulated learning, and achievement in mathematics: A growth curve analysis. *Journal of Educational Psychology, 105*(1), 150–161. https://doi.org/10.1037/a0030160

Aikins, M. S., i Duell, O. K. (2013). Creencias epistemológicas de dominio específico y general. Efectos sobre la habilidad matemática: Domain Specific and General Epistemological Beliefs. Their Effects on Mathematics. *Revista de investigación educativa, RIE*, *31*(2), 317-330. https://doi.org/10.6018/rie.31.2.170911

Akin, A., i Kurbanoglu, I. N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, *53*(3), 263-273.

Alegre, F., i Moliner, L. (2017). Emotional and cognitive effects of peer tutoring among secondary school mathematics students. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *48*(8), 1185-1205. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2017.1342284

IV. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Alegre, F., Moliner, L., Maroto, A., i Lorenzo-Valentin, G. (2019). Peer tutoring and mathematics in secondary education: literature review, effect sizes, moderators, and implications for practice. *Elsevier, 5*(9). https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02491

Alenezi, D. (2008). *A study of learning mathematics related to some cognitive factors and to attitudes.* [Tesi doctoral, University of Glasgow]. https://eleanor.lib.gla.ac.uk/record=b2632536

Ali, N., Anwer, M., i Jaffar, A. (2015). Impact of Peer Tutoring on Learning of Students (March 2015). *Journal for Studies in Management and Planning,1*(2), 61-64. https://ssrn.com/abstract=2599095

Almo, A., Rocha, M., Brennan, A., i Dondio, P. (2022). *Seven Spells and Peer Tutoring: A Collaborative Mathematics Game Experience*. Vol. 16 No. 1: Proceedings of the 16th European Conference on Games Based Learning. https://doi.org/10.34190/ecgbl.16.1.533

Álvarez, P. R., i González, M. C. (2005). La tutoría entre iguales y la orientación universitaria. Una experiencia de formación académica y profesional. Educar, 36, 107-128. https://doi.org/10.5565/rev/educar.200

Amalia, E., Surya, E., i Syahputra, E. (2017). The effectiveness of using problem-based learning (PBL) in mathematics problem solving ability for junior high school students. *International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education*, *3*(2), 3402-3406. 10.30595/alphamath.v8i2.15047

Annis, L.F. (1983). The processes and Effects of Peer Tutoring. *Human learning, 2*, 39-47.

Arco-Tirado, J.L., Fernández-Martín, F.D., i Fernández-Balboa, J.M. (2011). The impact of a peer-tutoring program on quality standards in higher education. *Higher Education, 62,* 773–788. https://doi.org/10.1007/s10734-011-9419-x

Arens, A. K., Marsh, H. W., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., Murayama, K., i vom Hofe, R. (2017). Math self-concept, grades, and achievement test scores: Long-term reciprocal effects across five waves and three achievement tracks. *Journal of Educational Psychology, 109*(5), 621–634. https://doi.org/10.1037/edu0000163

IV. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aronson, E., Blaney, N., Stephan, C., Sikes, J. i Snapp, M. (1978). *The jigsaw classroom*. Sage

Arteaga-Martínez B., i Macías, J. (2016). La representación en la resolución de problemas matemáticos como diagnóstico de estrategias metacognitivas. A F. España (ed.) XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (pp. 118-126). Cádiz, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. https://thales.cica.es/xviceam/ actas/pdf/actas.pdf

Arteaga-Martínez, B., Marcías, J., i Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, *34*(1), 263-280. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.15.

Atkinson, R. K., Renkl, A., i Merrill, M. M. (2003). Transitioning from studying examples to solving problems: Effects of self-explanation prompts and fading worked-out steps. *Journal of educational psychology*, *95*(4), 774-783. https://doi.org/10.1037/0022-0663.95.4.774

Austin, J. L., i Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational studies in mathematics*, *10*(2), 161-197. https://doi.org/10.1007/BF00230986

Azorín, C. M. (2018). El método de aprendizaje cooperativo y su aplicación en las aulas. *Perfiles educativos*, *40*(161), 181-194. https://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v40n161/0185-2698-peredu-40-161-181.pdf

Backer, L. de; Keer, H. van., i Valcke, M. (2016). Eliciting Reciprocal Peer Tutoring Groups' Metacognitive Regulation through Structuring and Problematizing Scaffolds. *The Journal of Experimental Education, 84* (4), 804-828. DOI: 10.1080/00220973.2015.1134419.

Baines, E., Blatchford, P., i Kutnick, P. (2008). Pupil grouping for learning: Developing a social pedagogy of the classroom. A R. M. Gillies, A. Ashman, i J. Terwel (Eds.). *The teacher's role in implementing cooperative learning in the classroom* (pp. 56–72). Springer.

Baker, L., i Brown, A. L. (1980). Metacognitive Skills and Reading. Technical Report No. 188. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED195932.pdf

Bakker, A., Smit, J., i Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: Introduction and review. *ZDM Mathematics Education, 47*(7), 1047-1065. http://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8

Bandura, A. (1986). Fearful expectations and avoidant actions as coeffects of perceived self-inefficacy. *American Psychologist, 41*(12)

Bandura, A. (1999). A sociocognitive analysis of substance abuse: An agentic perspective. *Psychological science*, *10*(3), 214-217. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00138

Barca-Lozano, A., Peralbo, M., Porto, A.M., Barca, E., i Santorum, R. (2013). Estrategias de aprendizaje, autoconcepto y rendimiento académico en la adolescencia. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 21*, 195-211

Barkley, E., Cross, P., i Howell, C. (2005). *Collaborative learning techniques*. John Wiley and Sons.

Barron, B. (2003). When smart groups fail. *The Journal of the Learning Sciences, 12*, 307–359. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1203_1

Barth, C. M., i Funke, J. (2010). Negative affective environments improve complex solving performance. *Cognition and Emotion, 24*(7), 1259–1268. https://doi.org/10.1080/02699930903223766

Bastart, C., i Flores, M. (2024). Un programa de tutoría entre iguales para la resolución de problemas matemáticos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 26*. https://doi.org/10.24320/redie.2024.26.of.5760

Battistich, V., i Watson, M. (2003). Fostering social development in preschool and the early elementary grades through co-operative classroom activities. A R. Gillies i A. Ashman (Eds.). *Co-operative learning: The social and intellectual outcomes of learning in groups* (pp. 19–35). RoutledgeFalmer.

Baudrit, A. (2000). *El tutor: procesos de tutela entre alumnos*. Paidós.

Bayne, G. U. (2013). Coteaching, peer tutoring and curriculum writing: lasting effects of involving students in talking about science. *Pedagogies: An International Journal*, *8*(4), 369–383. https://doi.org/10.1080/1554480X.2013.829275

Berghmans, I., Michiels, L., Salmon, S., Dochy, F., i Struyven, K. (2014). Directive versus facilitative peer tutoring? A view on students' appraisal, reported learning gains and experiences within two differently tutored learning environments. *Learning Environments Research, 17*(3), 437-459. DOI:10.1007/s10984-014-9168-8

Bertucci, A., Conte, S., Johnson, D. W., i Johnson, R. T. (2010). The impact of size of cooperative group on achievement, social support, and self-esteem. *The Journal of General Psychology, 137*(3), 256-272. https://doi.org/10.1080/00221309.2010.484448

Bielaczyc, K., i Collins, A. (2009). Learning communities in classrooms: A reconceptualization of educational practice. *Instructional design theories and models*, *2*, 269-291. file:///Users/clarabastartjane/Downloads/Learning_communities_in_classrooms_A_reconceptuali.pdf

Bills, L., i Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 77-79. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9147-z

Blanch, S., Corcelles, M., Duran, D., Dekhinet, R., i Topping, K. (2014). La escritura y corrección de textos en una tutoría entre iguales, recíproca y virtual, para la mejora en inglés y español. *Revista de Educación*, *363*, 309-333. DOI:10.4438/1988-592X-RE-2012-363-190

Blanch, S.; Duran, D.; Dekhinet, R., i Topping, K. (2010). Una experiencia de tutoría entre iguales virtual para el aprendizaje del castellano y el inglés. *Textos de Didáctica de la Lengua y la Literatura, 53,* 89-101. http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/tutoriaentreigualescastellaingles.pdf

Blanch, S., Duran, D., Valdebenito, V., i Flores, M. (2013). The effects and characteristics of family involvement on a peer tutoring programme to improve the reading comprehension competence. *European Journal of Psychology of Education*, *28*(1), 101-119. DOI:1007/s10212-012-0104-y

Blatchford, P., Baines, E., Rubie-Davies, C., Bassett, P., i Chowne, A. (2006). The effect of a new approach to group work on pupil-pupil and teacher-pupil interactions. *Journal of Educational Psychology, 98*(4), 750–765. DOI:10.1037/0022-0663.98.4.750

Bloom, B. S. (1974). Time and learning. *American Psychologist, 29*(9), 682–688. DOI:10.1037/h0037632

Boaler, J., i Dweck, C. S. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Booth, T., i Ainscow, M. (2002). *Index for inclusion: Developing learning and participation in schools*. Centre for Studies on Inclusive Education (CSIE), Rm 2S203 S Block, Frenchay Campus, Coldharbour Lane, Bristol, United Kingdom, England.

Boukafri, K. (2017). *Revoicing: Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas* [Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://ddd.uab.cat/record/189621

Bouzidi, L., i Jaillet, A. (2009). Can online peer assessment be trusted? *Educational Technology & Society, 12*(4), 257–268. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.12.4.257

Bowman-Perrott, L., Burke, M. D., Zhang, N., i Zaini, S. (2014). Direct and collateral effects of peer tutoring on social and behavioral outcomes: A meta-analysis of single-case research. *School Psychology Review, 43*(3), 260-285. DOI:10.1080/02796015.2014.12087427

Bozzano, P. E. (2016). Pedagogía de la cooperación en el Discurso Matemático Escolar. *Hilvanando Experiencias*, 22-27. https://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/63269/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Brandsford, J., i Stein, B. (1986). *Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.* Labor.

Britz, M., Dixon, J., i McLaughlin, T. (1989). The effects of peer tutoring on mathematics performance: A recent review. *B. C. Journal of Special Education, 13*(1), 17–33.

Bruffee, K. A. (1993). *Collaborative Learning: Higher education, interdependence, and the authority of knowledge.* Johns Hopkins University Press.

Buchs, C., Lehraus, K., i Crahay, M. (2012). Coopération y apprentissage. A M. Crahay (Ed.), *L'école peut-elle être juste et efficace*, pp. 421-454. De Boeck.

Bulu, S. T., i Yildirim, Z. (2008). Communication behaviors and trust in collaborative online teams. *Educational Technology & Society, 11*(1), 132–147. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.11.1.132

Buss, M., López, M. J., Rutz, A., Coelho, S., Oliveira, I. C. D., i Mikla, M. (2013). Grupo focal: una técnica de recogida de datos en investigaciones cualitativas. *Index de Enfermería*, *22*(1-2), 75-78. https://dx.doi.org/10.4321/S1132-12962013000100016

Camino, I., Goñi, E., Santamaría, I., i Zelaieta, E. (2019). La tutoría entre iguales: una experiencia de aprendizaje cooperativo entre el alumnado. A *Aprendizaje, Innovación y Cooperación como impulsores del cambio metodológico. Actas del V Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Cooperación* [Conferencia], Madrid, España. DOI:10.26754/CINAIC.2019.0152

Campit, J. B., i Garin, R. M. (2017). The effect of peer learning on students' attitude toward mathematics. *Asia Pacific Journal of Education, Arts and Sciences, 4*(4), 10-15.

Capar, G., i Tarim, K. (2015). Efficacy of the cooperative learning method on mathematics achievement and attitude: A meta-analysis research. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(2), 553-559. http://doi.org/10.12738/estp.2015.2.2098

Carbonaro, C. M., Zurru, A., Fanti, V., Tuveri, M., i Usai, G. (2020). Cooperative Problem Solving: an experience of high-school teaching updating. *arXiv preprint arXiv:2003.07731*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.07731

Castellaro, M., i Peralta, N.S. (2020). Pensar el conocimiento escolar desde el socioconstructivismo: interacción, construcción y contexto. *Perfiles educativos, 42*(168), 140-156. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.168.59439

Catalán, M. R., Figueroa, M. G., i Espinoza, R. M. (2023). Aprendizaje cooperativo, trascendiendo el aula convencional. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *7*(27), 87-98. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v7i27.499

Catalunya. Decret 150/2017, de 17 d'octubre, de l'atenció educativa a l'alumnat en el marc d'un sistema educatiu inclusiu. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 19 d'octubre de 2017, núm. 7477. https://portaljuridic.gencat.cat/eli/es-ct/d/2017/10/17/150

Catalunya. Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 29 de setembre, núm. 8762 https://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/8762/1928585.pdf

Catalunya. Llei 12/2009, de 10 de juliol, d'educació. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 16 de juliol de 2009, núm. 5422, pp. 56589-56682. https://portaljuridic.gencat.cat/eli/es-ct/l/2009/07/10/12

Chacón, I. M. G. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático* (Vol. 83). Narcea Ediciones.

Chacón, G. S. (2015). Aprendizaje entre iguales y aprendizaje cooperativo: principios psicopedagógicos y métodos de enseñanza. *Revista Ensayos Pedagógicos*, *10*(1), 103-123. DOI:10.15359/rep.10-1.5

Chang, C. C., i Tseng, K. H. (2009). Using a web-based portfolio assessment system to elevate project-based learning performances. *Interactive Learning Environments, 19*(3), 211–230. https://doi.org/10.1080/10494820902809063

Chang, C. C., Tseng, K. H., Chou, P.N., i Chen, Y.H. (2011). Reliability and validity of web-based portfolio peer assessment: A case study for a senior high school's students taking computer course. *Computers & Education, 57*(1), 1306–1316. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.01.014

Chávez, J. D., i Montes, J. A. (2015). Niveles de verbalización y resolución colaborativa de problemas poco estructurados. *Diversitas*, *11*(1), 51-66. http://hdl.handle.net/11634/40352

Chen, C. H. (2010). The implementation and evaluation of a mobile self- and peer-assessment system. *Computers & Education, 55*(1), 229–236. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.01.008

Chi, M. T. H., i Menekse, M. (2015). Dialogue patterns that promote learning. A L. B. Resnick, C. Asterhan, i S. N. Clarke (Eds.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (Ch. 21, pp. 263-274). AERA.

Chi, M. T., Roy, M., i Hausmann, R. G. (2008). Observing tutorial dialogues collaboratively: Insights about human tutoring effectiveness from vicarious learning. *Cognitive science*, *32*(2), 301-341. https://doi.org/10.1080/03640210701863396

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. [Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. http://hdl.handle.net/10803/284869

Chico, J., i Planas, N. (2018). Producción de la lengua de las matemáticas en clase durante la interacción en grupo. A L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García I A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 201-210). SEIEM.

Chitera, N. (2011). Language of learning and teaching in schools: An issue for research in mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 231-246. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9167-3

Chronaki, A., i Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: A move from language as representation to politics of representation. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 1101-1111. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0942-4

Chow, R. (2016). A pilot project of an online cross-age tutoring program: Crescent school virtual learning (vLearning). *International Journal of Adolescent Medicine and Health, 28*(4), 451-453. DOI:10.1515/ijamh-2015-0067

Chronaki, A., i Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: A move from language as representation to politics of representation. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 1101-1111. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0942-4

Chval, K. B., i Khisty, L. L. (2009). Bilingual Latino students, writing and mathematics: A case study of successful teaching and learning. In R. Barwell (Ed.), *Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives* (pp. 128-144). Multilingual Matters.

Civil, M. (2012). Opportunities to learn in mathematics education: Insights from research with non-dominant communities. A T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 43-59). PME.

Cohen, P. A., Kulik, J. A., i Kulik, C. C. (1982). Educational outcomes of tutoring: A meta-analysis of findings. *American Educational Research Journal, 19*(2), 237-248. https://doi.org/10.3102/00028312019002237

Cohen, E.G., Lotan, R.A., Whitcomb, J.A., Balderrama, M.V., Cossey, R., i Swanson, P.E. (1994). *Complex Instruction: Higher Order Thinking in Heterogeneous Classrooms.* A S. Sharan, Handbook of Cooperative Learning Methods. Praeger.

Coleoni, E., i Buteler, L. (2008). Recursos metacognitivos durante la resolución de un problema de Física. *Investigações em Ensino de Ciências, 13*(3), 371-383. https:// www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/ article/view/447/265

Coll, C. S. (1985). Acción, Interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas. Anuario de Psicología, 33(2). https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2943583

Coll, C. (2016). La personalización del aprendizaje escolar. El qué, el por qué y el cómo de un reto insoslayable. En J. M. Vilalta (Dr.). *Reptes de l'educació a Catalunya. Anuari d'Educació 2015* (pp. 43-104). Barcelona: Fundació Jaume Bofill. Traducción de Iris Merino. http://www.fbofill.cat/publicacions/la-personalitzacio-de-laprenentatge-escolar-un- repte-indefugible.

Cooke, B., i Buchholz, D. (2005). Mathematical communication in the classroom: A teacher makes a difference. *Early Childhood Education Journal, 32,* 365-369. DOI:10.1007/s10643-005-0007-5

Coronado, S. D. (2015). El papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. *Panorama, 9*(16), 32-42. DOI:10.15765/pnrm.v9i16.636

Cortese, C. (2005). Learning through teaching. *Management Learning, 36*(1), 87-115.

Creswell, J. W. (2015). *A concise introduction to mixed methods research.* Sage.

Cubero, M., i Rubio, D. (2005). Psicología histórico-cultural y naturaleza del psiquismo. En M. Cubero y J. Ramírez (comps.), *Vygotsky en la Psicología Contemporánea*. Miño y Dávila.

Cuseo, J. (2002). *Igniting student involvement, peer interaction and teamwork*. New Forums Press.

Damon, W., i Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research, 58*(2), 9-19. https://doi.org/10.1016/0883-0355(89)90013-X

De Backer, L., Van Keer, H., i Valcke, M. (2012). Exploring the potential impact of reciprocal peer tutoring on higher education students' metacognitive knowledge and regulation. *Instructional Science, 40,* 559–588. https://doi.org/10.1007/s11251-011-9190-5

De Guzmán, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Pirámide.

Desoete, A., i Ozsoy, G. (2009). Introduction: Metacognition, more than the Lognes Monster? *Online Submission*, *2*(1), 1-6. file:///Users/clarabastartjane/Downloads/Introduction_Metacognition_more_than_the_lognes_monster%20(1).pdf

Diani, R., Herliantari, H., Irwandani, I., Saregar, A., i Umam, R. (2019). The Effectiveness of SSCS Learning Model: Its Impact on the Students' Creative Problem-Solving Ability on the Concept of Substance pressure. *Jurnal Penelitian Fisikadan Aplikasinya (JPFA), 9*(1), 1-5. DOI:10.26740/jpfa.v9n1.p65-77

Díaz, V., i Aravena, M. (2021). Resolución de Tipos de Problemas y Niveles del Razonamiento Proporcional en Formación Inicial de Profesores de Matemática. *Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(3), 296-317. DOI:10.17583/redimat.7125

Díaz-Barriga, Á. (2014). Construcción de programas de estudio en la perspectiva del enfoque de desarrollo de competencias. *Perfiles educativos*, *36*(143), 142-162. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2014.143.44027

Díaz, Y. B., Fragozo, I. C., González, E. J., i Villanueva R. D. (2018). *Reflexión de la práctica docente a partir del texto expositivo como recurso pedagógico para la resolución de situaciones problema en las áreas de lenguaje y matemáticas de la institución educativa Silvestre Francisco Dangond Daza* [Treball de màster, Universitat de La Sabana]. http://hdl.handle.net/10818/35267

Dillenbourg, P., i Traum, D. (2006). Sharing solutions: Persistence and grounding in multimodal collaborative problem solving. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(1), 121-151. DOI:10.1207/s15327809jls1501_9

Domingo, J. (2008). El aprendizaje cooperativo. *Cuadernos de trabajo social*, *21*, 231-246. https://revistas.ucm.es/index.php/CUTS/article/view/CUTS0808110231A

Downes, S. (2019). Recent work in connectivism. *European Journal of Open, Distance and E-Learning (EURODL)*, *22*(2), 113-132. https://doi.org/10.2478/eurodl-2019-0014

Duncker, K., i Lees, L. S. (1945). On problem-solving. *Psychological monographs*, *58*(5).

Duran, D. (2003). *Tutoria entre iguals: Processos cognitivorelacionals i anàlisi de la interactivitat en tutories fixes i recíproques* [doctoral). Recuperada del dipòsit digital de documents de la Universitat Autònoma de Barcelona. https://ddd.uab.cat/record/36580?ln=ca

Duran, D. (2011). Aprender enseñando: un paradigma emergente. *Herramientas*, *110*, 4-12.

Duran, D. (2012). Utilizando el trabajo en equipo. Estructurar la interacción a través de métodos y técnicas. A J.C. Torrego i A. Negro (coords.). *Aprendizaje cooperativo en las aulas. Fundamentos y recursos para su implantación* (pp 139-166). Alianza Editorial.

Duran, D. (2014). *Aprenseñar: Evidencias e implicaciones educativas de aprender enseñando*. Narcea.

Duran, D. (2016). *Aprensenyar. Evidències i implicacions educatives d'aprendre ensenyant*. Horsori.

Duran, D. (2018). Evidencias sobre la efectividad del aprendizaje cooperativo: Síntesis de metaanálisis y relación con educación inclusiva. A J. C. Torrego, L. Rayón, Y. Muñoz i P. Gómez (Eds.), *Inclusión y mejora educativa* (pp. 122-130). Universidad de Alcalá.

Duran, D., Blanch, S., Corcelles, M., Flores, M., Merino, E., Oller, M., i Vidal, A. (2009). *Llegim en parella. Tutoria entre iguals, a l'aula i a casa, per a la millora de la competència lectora.* ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Duran, D., i Flores, M. (2013). Influencia de la tutoría entre iguales en el desarrollo de la comprensión y el autoconcepto lector. *Investigación en la Escuela, 81*, 67-78. http://hdl.handle.net/11441/59815

Duran, D., Flores, M., Oller, M., i Ramírez, M. (2018). Reading in Pairs, description and results of a peer tutoring program for English as a foreign language. *Innovation in Language Learning and Teaching*, *13*(4), 303–317. https://doi.org/10.1080/17501229.2018.1462370

Duran, D., Flores, M., i Valdebenito, V. (2015). Tutoría entre iguales: Concepto y práctica como metodología para la educación inclusiva. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 9*(2), 23-40.

Duran, D., i Monereo, C. (2005). Styles and sequences of cooperative interaction in fixed and reciprocal peer tutoring. *Learning and Instruction*, *15*, 179–199. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2005.04.002

Duran, D., i Monereo, C. (2008). The impact of peer tutoring on the improvement of linguistic competence, self-concept as a writer and pedagogical satisfaction. *School Psychology International, 29*(4), 481-499. https://doi.org/10.1177/0143034308096437

Duran, D., i Oller, M. (2017). El rol del profesorado en las aulas organizadas en aprendizaje cooperativo. *Aula de innovación educativa*, 261, 38-41.

Duran, D., Torró, J., i Vila, J. (2003). *Tutoria entre iguals: Un mètode d'aprenentatge cooperatiu per a la diversitat. De la teoria a la pràctica*. Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona. https://aplicacions.ensenyament.gencat.cat:443/epergam/web/fitxa.jsp?id=2032609

Duran, D., i Utset, M. (2014). Red Leemos en pareja: Un modelo de formación basado en el aprendizaje entre iguales para la sostenibilidad de la innovación educativa. *Cultura y Educación. Culture and Education,* *26*(2), 377-384. DOI:10.1080/11356405.2014.935109

Duran, D., i Valdebenito, V. (2014). Desarrollo de la competencia lectora a través de la tutoría entre iguales como respuesta a la diversidad del alumnado. *Revista Latinoamericana de educación inclusiva*, *8*(2), 141-160. https://www.rinace.net/rlei/numeros/vol8-num2/art7.pdf

Duran, D., i Vidal, V. (2004). *Tutoría entre iguales: De la teoría a la práctica. Un método de aprendizaje cooperativo para la diversidad en secundaria.* Graó.

Echeita, G. (1995). El aprendizaje cooperativo. Un análisis psicosocial de sus ventajas respecto a otras estructuras de aprendizaje. A P. Fernández i M.A. Melero (comps.), *La interacción social en contextos educativos.* Madrid: Ed. S. XXI.

Echeita, G. (2012) El aprendizaje cooperativo al servicio de una educación de calidad: cooperar para aprender y aprender a cooperar. A Torrego y Negro (coords.), *Aprendizaje cooperativo en las aulas. Fundamentos y recursos para su implantación* (pp.21-45). Alianza.

Edwards, V. (1993). La relación de los sujetos con el conocimiento. *Revista Colombiana de Educación*, (27). DOI:10.17227/01203916.5304

Ellis, S., i Gauvin, M. (1992). Social and Cultural influences on Children's collaborative interactions. A L. Winegar i J. Valsiner, *Children's development within social context*. Lawrence Elrbaum Associates.

Elosua, P., i Almeida, L.S. (2016). BPR. *Batería de Pruebas de Razonamiento*. TEA Ediciones

English, L. D., i Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. A L. D. English I D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (3rd ed., pp. 313–335). Taylor & Francis

Escudero, T., Rodríguez, L.M., i Fernández, R. (2000). La investigación sobre el aprendizaje colaborativo: Enfoques, métodos y resultados [Collaborative learning research: approaches, methods and results]. *Anuario de Pedagogía, 2*, 305-338.

Espanya. Llei orgànica 3/2020, de 29 de desembre. Boletín Oficial del Estado, de 30 de desembre de 2020, núm. 340, de 30 de desembre de 2020, pp. 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Espanya. Reial Decret 157/2022, d'1 de març, pel qual s'estableix l'ordenació i els ensenyaments mínims de l'educació primària. Boletín Oficial del Estado, 2 de març de 2022, núm. 52. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Espinoza, L. M. (2017). *Relación entre el desarrollo de habilidades lingüísticas y el aprendizaje matemático en educación infantil y educación primaria: Estudio longitudinal* [Tesi doctoral, Universitat de València]. http://hdl.handle.net/10550/59816

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* [Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://ddd.uab.cat/record/38525?ln=ca

European Agency for Special Needs and Inclusive Education. (2018). European Agency Statistics on Inclusive Education: Methodology Report – Updated 2018. (A. Lénárt, J. Ramberg and A. Watkins, eds.). Odense, Denmark: European Agency for Special Needs and Inclusive Education.

Fantuzzo, J. W., King, J. A., i Heller, L. R. (1992). Effects of reciprocal peer tutoring on mathematics and school children: A component analysis. *Journal of Educational Psychology, 84*(3), 331-339. https://doi.org/10.1037/0022-0663.84.3.331

Fernández, J. (2017). El ciclo del aprendizaje cooperativo: una guía para implementar de manera efectiva el aprendizaje cooperativo en educación física. *Retos. Nuevas Tendencias en Educación Física, 32.* https://doi.org/10.47197/retos.v0i32.51298

Fernández, G, i Huepp, F. (2014). Fu*ndamentos neuropsicológicos del lenguaje.* Editorial Pueblo y Educación.

Fernández-Martín, F. D., Arco-Tirado, J. L., i Hervás-Torres, M. (2022). Impacto de un programa de tutoría entre iguales para mejorar la autorregulación del aprendizaje. *Anales de Psicología, 38*(1), 110–118. https://doi.org/10.6018/analesps.483211

Fiorella, L., Yoon Yoon, So., Atit, K., Power, J.R., Panther, G., Sorby, S., Uttal, D., i Veurink, N. (2021). Validation of the Mathematics Motivation Questionnaire (MMQ) for secondary school students. *International Journal of STEM Education, 8*(52), 1-14. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00307-x

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. A L. B. Resnick (Ed.), The nature of intelligence (pp. 231-235). Erlbaum.

Flecha, R. (2000). *Sharing words: Theory and practice of dialogic learning.* Rowman & Littlefield.

Flores, M. (2012). *Llegim en parella: Influència de la tutoria entre iguals en la comprensió I l'autoconcepte lector* [Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://ddd.uab.cat/record/114308?ln=ca

Flores, M., Bravo, M., i Duran, D. (2017). Medir el autoconcepto en la resolución cooperativa de problemas. *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 86,* 11-18. https://webs.uab.cat/grai/wp-content/uploads/sites/353/2023/02/suma_autoconcepto_resolucion_coop_.pdf

Flores, M., i Duran, D. (2013). Effects of peer tutoring on reading self-concept. *International Journal of Educational Psychology, 2*(3), 297-324. https://doi.org/10.4471/ijep.2013.29

Flores, M., i Duran, D. (2016). Influence of a Catalan peer tutoring programme on reading comprehension and self-concept as a reader. *Journal of Research in Reading, 39*(3), 330-346. DOI:10.1111/1467-9817.12044

Flores, M., i Duran, D. (2017). Razonar en pareja. *Cuadernos de Pedagogía, 476*, 79-81.

Flores, M., Duran, D., i Albarracín, L. (2016). *(En)Raonem en parella: Tutoria entre iguals per a la resolució cooperativa de problemes quotidians.* Horsori.

Flores, M., Duran, D., i Albarracín, L. (2017). *(En)Raonem en parella*: Tutoria entre iguals per desenvolupar la resolució cooperativa de problemes. *Guix: Elements d'Acció Educativa, 439*, 69-73.

Flores, M., Ribosa, J., i Duran D. (2024). How does peer tutoring contribute to the development of reading comprehension? Evidence from ten years of practice, *Revista de Psicodidáctica* (English ed.). https://doi.org/10.1016/j.psicoe.2024.05.003

Forman, E. A., i Ansell, E. (2002). Orchestrating the multiple voices and inscriptions of a mathematics classroom. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(2-3), 251-274.

Froiland, J. M., i Davison, M. L. (2016). The longitudinal influences of peers, parents, motivation, and mathematics course-taking on high school math achievement. *Learning and Individual Differences*, *50*, 252-259. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.07.012

Fuchs, L., Fuchs, D., Hamlett, C., Phillips, N., Karns, K., i Dutka, S. (1997). Enhancing Students' Helping Behavior during Peer-Mediated Instruction with Conceptual Mathematical Explanations. *Elementary School Journal, 97*(3), 223-249. https://www.jstor.org/stable/1002198

Fuentes, J. P., Villavicencio, G., i Zamora, B. F. (2023). La educación escolar y su incidencia en el aprendizaje cooperativo. *Revista Cognosis. ISSN 2588-0578*, *8*(EE1), 159-172. https://doi.org/10.33936/cognosis.v8iEE1.5460

Fúneme-Mateus, C. C. (2019). El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. El caso de las aplicaciones de la derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (45), 159-174. https://revistas.upn.edu.co/index.php/TED/article/view/9840/7149

Galbraith, J., i Winterbottom, M. (2011). Peer-tutoring: what's in it for the tutor? *Educational Studies*, *37*(3), 321-332. https://doi.org/10.1080/03055698.2010.506330

Galton, M., i Hargreaves, L. (2009). Group work: Still a neglected art? *Cambridge Journal of Education, 39*(1), 1–6. https://doi.org/10.1080/03057640902726917

García, P.; San José, V., i Solaz-Portolés, J. J. (2015). Efectos de las características del problema, captación de su estructura y uso de analogías sobre el éxito de los estudiantes de secundaria en la resolución de problemas. Teoría de la Educación.

Revista Interuniversitaria, *27*(2), 221-244. https://doi.org/10.14201/teoredu2015272221244

Gazula, S., McKenna, L., Cooper, S., i Paliadelis, P. (2017). A systematic review of reciprocal peer tutoring within tertiary health profession educational programs. *Health professions education*, *3*(2), 64-78. https://doi.org/10.1016/j.hpe.2016.12.001

Gee, J. P. (2005). The new literacy studies: From "socially situated" to the work. *Situated literacies: Reading and writing in context*, *2*, 177-194. https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315717647.ch2

Generalitat de Catalunya. (2021). *Fer bones preguntes per provocar respostes productives.* Catalunya: Departament d'Educació.

Gilbertson, D., Witt, J. C., Singletary, L. L., i VanDerHeyden, A. (2007). Supporting teacher use of interventions: Effects of response dependent performance feedback on teacher implementation of a math intervention. *Journal of Behavioral Education*, *16*(4), 311-326. DOI:10.1007/s10864-007-9043-0

Gillies, R. M. (2003). Structuring cooperative group work in classrooms. International Journal of Educational Research, 39, 35–49. https://doi.org/10.1016/S0883-0355(03)00072-7

Gillies, R. M. (2004). The effects of communication training on teachers' and students' verbal behaviours during cooperative learning. *International Journal of Educational Research, 41*(3), 257–279. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2005.07.004

Gillies, R. M. (2014). Cooperative learning: Developments in research. *International Journal of Educational Psychology, 3*(2), 125–140. https://doi.org/10.4471/ijep.2014.08

Gillies, R. M., i Boyle, M. (2006). Ten Australian elementary teachers' discourse and reported pedagogical practices during cooperative learning. *The Elementary School Journal*, *106*(5), 429-452. https://doi.org/10.1086/505439

Giné, C., i Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *Bolema, 28*(48), 191-208. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a10

Ginsburg-Block, M., i Fantuzzo, J. (1997). Reciprocal peer tutoring: An analysis of "teacher" and "student" interactions as a function of training and experience. *School Psychology Quarterly, 12*(2), 134–149. https://doi.org/10.1037/h0088955

Ginsburg-Block, M. D., Rohrbeck, C. A., i Fantuzzo, J. W. (2006). A meta-analytic review of social, self-concept, and behavioral outcomes of peer-assisted learning. *Journal of Educational Psychology, 98*(4), 732-749. DOI:10.1037/0022-0663.98.4.732

Godino, J. D. (2023). Una mirada a la socioepistemología desde el enfoque ontosemiótico en didáctica de las matemáticas. *PädiUAQ*, *6*(11), 1-18. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/702

González, J. (2023). *Cómo mejorar el autoconcepto en el aula: una guía para docentes de Educación Primaria* [Tesi Doctoral, Universitat de Cantabria]. https://hdl.handle.net/10902/31763

González, N., García, R., i Ramírez, A. (2015). Aprendizaje cooperativo y tutoría entre iguales en entornos virtuales universitarios. Estudios Pedagógicos, 41 (1), 111-124. http://www.scielo.cl/pdf/estped/v41n1/art07.pdf

Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social: Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas* [Tesi doctoral, Universitat Complutense de Madrid]. https://eprints.ucm.es/2249/

Gottfried, A. E., Marcoulides, G. A., Gottfried, A. W., Oliver, P. H., i Guerin, D. W. (2007). Multivariate latent change modeling of developmental decline in academic intrinsic math motivation and achievement: Childhood through adolescence. *International Journal of Behavioral Development*, *31*(4), 317–327. https://doi.org/10.1177/0165025407077752

Gravini, M., i Iriarte, F.S. (2008). Procesos metacognitivos de estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje. *Psicología desde el Caribe, (22),*1-24. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=21311866002

Greeno, J. G. (1997). Theories and practices of thinking and learning to think. *American Journal of Education, 106*(1), 85–126. https://doi.org/10.1086/444177

Greenwood, C.R., Delquadri, J.C., i Hall, R.V. (1989). Longitudinal effects of classwide peer tutoring. *Journal of Educational Psychology, 81*(3), 371-383. DOI:10.1037/0022-0663.81.3.371

Güner, P., i Erbay, H. N. (2021). Metacognitive skills and problem-solving. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 7*(3), 715-734. https://doi.org/10.46328/ijres.1594

Haas, B.W., i vanDellen, M.R. (2020). Culture Is Associated with the Experience of Long-Term Self-Concept Changes. *Social Psychological and Personality Science*, *11*(8), 1047-1056. https://doi.org/10.1177/1948550619893966

Häkkinen, P., Järvelä, S., Mäkitalo-Siegl, K., Ahonen, A., Näykki, P., i Valtonen, T. (2017). Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP 21): a framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills. *Teachers and Teaching*, *23*(1), 25-41. DOI:10.1080/13540602.2016.1203772

Handal, B., i Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics education research journal*, *15*(1), 59-69. http://dx.doi.org/10.1007/BF03217369

Hashash, M., Abouchedid, K., i Abourjeily, S. (2018). Student–teacher interaction in public schools in Lebanon: a symbolic interactionist perspective in grade 6 classes. *SAGE Open*, *8*(2), 2158244018783039. https://doi.org/10.1177/2158244018783039

Hennessy, S., Rojas-Drummond, S., Higham, R., Márquez, A. M., Maine, F., Ríos, R. M., García-Carrión, R., Torreblanca, O., i Barrera, M. J. (2016). Developing a coding scheme for analysing classroom dialogue across educational contexts. *Learning, Culture and Social Interaction*, *9*, 16-44. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2015.12.001

Heredia, J., i Duran, D. (2017). Aprendizaje cooperativo en educación física para la inclusión de alumnado con rasgos autistas. *Revista de Educación Inclusiva*, *6*(3). file:///Users/clarabastartjane/Downloads/143-300-1-SM%20(1).pdf

Herrada, R. I., i Baños, R. (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas. *Espiral. Cuadernos del Profesorado*, 11(23), 99-108. https://doi.org/10.25115/ecp.v11i23.2131

Hidalgo, M. C., Carrasco-Velar, R., i Díaz, T. (2020). La tutoría entre iguales desde una nueva perspectiva. *Revista Cubana de Educación Superior*, *39*(1). https://revistas.uh.cu/rces/article/view/2224

Hidalgo, S., Maroto, A., i Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, *334*, 75-98. file:///Users/clarabastartjane/Downloads/re334_06.pdf

Hidalgo, S., Maroto, A., i Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. Educación matemática, 17(2), 89-116. DOI:10.24844/EM1702.04

Hidalgo, S., Maroto, A., Palacios, A., i Ortega, T. (2013). Atribuciones de afectividad hacia las Matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *35*, 93-113. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/775

Huda, S., Munifah, K., i Umam, R. (2020). Think Talk Write (TTW) Learning Model on Thinking Skills, Creativity, and Problem Solving. *Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi*, *7*(1), 22-31.

Huinker, D., i Laughlin, C., (1996). Talk your way into writing. A P. C. Elliot i M. J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics k-12 and beyond* (pp. 81-88). National Council of Teachers of Mathematics, Inc

Hunter, R., i Hunter, J. (2018). Opening the space for all students to engage in mathematical practices within collaborative inquiry and argumentation. A *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners* (pp. 1-21). Brill Sense.

Hwang, G.J., Hung, C.M., i Chen, N.S. (2014). Improving learning achievements, motivations and problem-solving skills through a peer assessment-based game development approach, *Educational Technology Research and Development, 62(2),* 129-145. DOI: 10.1007/s11423-013-9320-7

Ibernón, J. (2017). *Rendimiento académico y competencia matemática: Un estudio en educación secundaria* [Tesi doctoral, Universitat de Murcia]. https://digitum.um.es/digitum/handle/10201/55765

Imenda, S. (2014). Is there a conceptual difference between theoretical and conceptual frameworks? *Journal of Social Science, 38*(2),185-195. DOI:10.1080/09718923.2014.11893249

Johnson, J. A. (2019). *The effect of online cross-age peer tutoring on student self-efficacy in middle school STEM* (Doctoral dissertation, Rutgers University-Graduate School of Education). https://doi.org/doi:10.7282/t3-9s23-eh63

Johnson, D. W., i Johnson, R. T. (1981). Effects of cooperative and individualistic learning experiences on interethnic interaction. *Journal of Educational Psychology*, *73*(3), 444-449. https://doi.org/10.1037/0022-0663.73.3.444

Johnson, D. W., i Johnson, R. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Interaction Books.

Johnson, D.W., i Johnson, R. (1991). *Learning together and alone. Cooperative, competitive, and individualistic learning* (1a. Ed.). Ally & Bacon.

Johnson, D.W., i Johnson, R. (1994). Structuring Academic Controversy. A S. Sharan, *Handbook of Cooperative Learning Methods* (pp. 66-81). Greenwood Press.

Johnson, D. W., i Johnson, R. (2002). Cooperative learning and social interdependence theory. A *Theory and research on small groups* (pp. 9-35). Springer, Boston, MA.

Johnson, D. W., i Johnson, R. (2005). New Developments in Social Interdependence Theory. Genetic, Social, & General Psychology Monographs, 131(4), 285-358. https://doi.org/10.3200/MONO.131.4.285-358

Johnson, D. W., i Johnson, R. T. (2008). Social Interdependence Theory and Cooperative Learning: The Teacher's Role. In R. M. Gillies, A. Ashman i J. Terwel (Eds.), Teacher's Role in Implementing Cooperative Learning in the Classroom (pp. 9-37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70892-8_1

Johnson, D.W., i Johnson, R. (2009). An Educational Psychology Success Story: Social Interdependence Theory and Cooperative Learning. *Educational Researcher, 38*(5), 365-379. DOI:10.3102/0013189X09339057

Johnson, R. T., i Johnson, D. W. (2009). An overview of cooperative learning. A J. Thousand, A. Villa and A. Nevin (Eds), *Creativity and Collaborative Learning*. Brookes Press.

Johnson, D. W., i Johnson, R. T. (2014a). Cooperative Learning in 21st Century. *Anales de psicología, 30*(3), 841-851. DOI:10.6018/analesps.30.3.20124

Johnson, D.W., Johnson, R., i Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula.* Paidós.

Johnson, D.W., Johnson, R., i Holubec, E. (2013). *Cooperation in the Classroom*. Interaction Book Company.

Johnson, D.W., Johnson, R., i Smith, K. (1998). *Active learning: Cooperation in the college classroom.* Interaction Book Company.

Johnston, R. J. (1994). Geography journals for political scientists. *Political Studies*, *42*(2), 310-317. https://doi.org/10.1111/j.1467-9248.1994.tb01915.x

Juárez, M., Rasskin, I., i Mendo, S. (2019). El Aprendizaje Cooperativo, una metodología activa para la educación del siglo XXI: una revisión bibliográfica. *Revista Prisma Social, 26,* 200-210. https://revistaprismasocial.es/article/view/2693

Kagan, S. (1989). The structural approach to cooperative learning. *Educational leadership*, *47*(4), 12-15.

Kagan, S. (1992). *Cooperative Learning.* Kagan Cooperative Learning.

Kagan, S., i Kagan, M. (2009). *Kagan Cooperative Learning*. Kagan Publishing.

Karau, S. J., i Williams, K. D. (1993). Social loafing: A meta-analytic review and theoretical integration. *Journal of Personality and Social Psychology, 65*(4), 681. https://doi.org/10.1037/0022-3514.65.4.681

Karpen, S.C. (2028). The Social Psychology of Biased Self-Assessment. Am J Pharm Educ. 2018 Jun;82(5):6299. DOI:10.5688/ajpe6299. PMID: 30013244; PMCID: PMC6041499.

Kasayanond, A., Umam, R., i Jermsittiparsert, K. (2019). Environmental Sustainability and its Growth in Malaysia by Elaborating the Green Economy and Environmental Efficiency. *International Journal of Energy Economics and Policy*,*9*(5), 465-473. https://www.econjournals.com/index.php/ijeep/article/view/8310

Kaskens, J., Segers, E., Lin, S., Van Luit J.E.H., Verhoeven, L. (2020). Impact of Children's math self-concept, math self-efficacy, math anxiety, and teacher competencies on math development. *Elsevier, 94*, 103096. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103096

Khotimah, D. N. (2019). Implementasi Program Penguatan Pendidikan Karakter (PPK) Melalui Kegiatan 5s Di Sekolah Dasar. *INOPENDAS: Jurnal Ilmiah Kependidikan*, *2*(1). https://doi.org/10.24176/jino.v2i1.2928

Killen, R. (2007). *Effective Teaching Strategies: Lessons from Research and Practice* (4th ed.). Thompson Social Sciences Press.

Kim, C., i Pekrun, R. (2014). Emotions and motivation in learning and performance. *Handbook of research on educational communications and technology*, 65-75. DOI:10.1007/978-1-4614-3185-5_6

King, K. P. (2002). Educational technology professional development as transformative learning opportunities. *Computers & Education*, *39*(3), 283-297. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(02)00073-8

Kirschner, F., Paas, F., i Kirschner, P. A. (2011). Task complexity as a driver for collaborative learning efficiency: The collective working‐memory effect. *Applied Cognitive Psychology*, *25*(4), 615-624. https://doi.org/10.1002/acp.1730

Klinger, E. (2009). Daydreaming and fantasizing: Thought flow and motivation. A K. D. Markman, W. M. P. Klein, i J. A. Suhr (Eds.), *Handbook of imagination and mental simulation* (pp. 225–239). Psychology Press.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., i Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. Educational studies in mathematics, 49(2), 225-250. https://doi. org/10.1023/A:1016282811724

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion “learning-as-participation” in everyday situations of mathematics classes. *ZDM*, *43*(1), 81-90. DOI:10.1007/s11858-010-0294-1

Kutnick, P., Ota, C., i Berdondini, L. (2008). Improving the effects of group working in classrooms with young school-aged children: Facilitating attainment, interaction and classroom activity. *Learning and Instruction, 18*(1), 83–95. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.12.002

Kyndt, E., Raes, E., Lismont, B., Timmers, F., Cascallar, E., i Dochy, F. (2013). A meta-analysis of the effects of face-to-face cooperative learning. Do recent studies falsify or verify earlier findings? *Educational Research Review, 10*(2), 133–149. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.02.002

Lárez-Villarroel, J.D. (2018). Algunos obstáculos que imposibilitan el aprendizaje efectivo de la matemática. *Investigación y postgrado, 33*(1), 53-74. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:187713376

Lata, S., i Castro, M. M. (2015). El Aprendizaje Cooperativo, un camino hacia la inclusión educativa. *Revista complutense de Educación*, *27*(3), 1085-1101. DOI:10.5209/rev_RCED.2016.v27.n3.47441

Lave, J., i Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355

Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and individual differences*, *19*(3), 355-365. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.009

Lein, A. E., Jitendra, A. K., i Harwell, M. R. (2020). Effectiveness of mathematical word problem-solving interventions for students with learning disabilities and/or mathematics difficulties: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology, 112*(7), 1388–1408. https://doi.org/10.1037/edu0000453

Leon, B., Gozalo, M., i Polo, I. M. (2012). Aprendizaje cooperativo y acoso entre iguales. *Infancia y Aprendizaje*, *35*(1), 23-35. DOI:10.1174/021037012798977494

León-Mantero, C., Solano, N., Gómezescobar, A., i Fernández-César, R. (2020). Dominio afectivo y prácticas docentes en Educación Matemática: un estudio exploratorio en maestros. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *16*(58), 129-149. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/101

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *46*(1), 87-113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Lerman, S., i Zevenbergen, R. (2004). The Socio-Political Context of the Mathematics Classroom. A P. Valero, i R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology* (pp. 27-42). Kuwer Academic Publishers.

Lesh, R. i Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. A F. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Information Age Publishing.

Lester, F. K., i Charles, R. I. (1992). A framework for research on mathematical problem solving. A J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, i D. Fernandes (Eds.), *Issues in mathematical problem solving and new information technologies* (1-15). https://doi.org/10.1007/978-3-642-58142-7_1

Lester, F. K., i Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. A R. Lesh i H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-517). Lawrence Erlbaum Associates.

Leung, C. K. C., Marsh, H. W., i Craven, R. (2005). Are peer tutoring programs effective in promoting academic achievement and self-concept in educational settings: a meta-analytical review. *Australian association for Research in education 2005 Conference Papers*. http://www.aare.edu.au/05pap/abs05.htm

Lianghou, F., i Yan, Z. (2007). Representation of problem-solving procedures: A representative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 61-75. DOI:10.1007/s10649-006-9069-6

Lim, S. Y., i Chapman, E. (2013). Development of a Short Form of the Attitudes toward Mathematics Inventory. Educational Studies in Mathematics: An International Journal, 82, 145-164. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9414-x

Lippit, P. (1976). Learning Through Cross-Age Helping. Why and How. En V. Allen, *Children as Teachers: Theory and Research on Tutoring*. Academic Press.

Lobato, C. (1998). El trabajo en grupo: aprendizaje cooperativo en secundaria, Leioa, Servicio de Publicaciones de la Universidad del País Vasco.

López, O., Quintero, V., i Sanabria, L. (2006). Niveles de Complejidad en la Solución de Problemas. *Nuevas ideas en Informática Educativa*, 79-85.

López, P., i Ursini, S. (2007). Investigación en educación matemática y sus fundamentos filosóficos. *Educación matemática*, *19*(3), 91-113.

López-Martín, E., i Ardura-Martínez, D. (2022). El tamaño del efecto en la publicación científica [The effect size in scientific publication]. *Educación XXI, 26*(1), 9-17. https://doi.org/10.5944/educxx1.36276

Lozano, I. A., i Tejada, J. N. (2019). Modelo de resolución de problemas para el proceso educativo en el área de matemáticas. *Brazilian Journal of Development, 5*(6), 6045-6054. https://doi.org/10.34117/bjdv5n6-116

Lyman, F. (1992). Think-Pair-Share, Thinktrix, Thinklinks and weird facts: An interactive system for cooperative learning. A N. Davidson i T. Worsham (eds.), *Enhancing thinking through cooperative learning*. Teachers Collage Press.

Lyons, I. M., i Beilock, S. L. (2012). When math hurts: math anxiety predicts pain network activation in anticipation of doing math. *PLoS ONE*, *7*(10), e48076. DOI: 10.1371/journal.pone.0048076

Ma, R. (1999). Positive solutions for a nonlinear three-point boundary-value problem. *Electronic Journal of Differential Equations, 1999*(34), 1-8. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00141-4

Macagno, F., i Bigi, S. (2017). Analysing the pragmatic structure of dialogues. *Discourse*

Studies, *19*(2), 148-168. https://doi.org/10.1177/146144561769170

Madden, N., Slavin, R., i Stevens, R. (1986). *Cooperative Integrated Reading and Comparison: Teacher's Manual.* Baltimore: Johns Hopkins University, Center for Research on Elementary and Middle Schools.

Mäkitalo-Siegl, K., Stegmann, K., Frete, A., i Streng, S. (2012). Orchestrating technology enhanced collaborative learning: Effects of knowledge sharing and shared knowledge. A S. Abramovich (Eds.), *Computers and education* (pp. 75-91). Nova Science.

Mallart, A., i Deulofeu, J. (2017). Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(2), 193-222. http://doi.org/10.12802/relime.17.2023

Marsh, H. W., i O'Neill, R. (1984). Self-Description Questionnaire III: The construct validity of multidimensional self-concept ratings by late adolescents. *Journal of Educational Measurement, 21*(2), 153–174. https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.1984.tb00227.x

Marsh, H. W., Pekrun, R., Parker, P. D., Murayama, K., Guo, J., Dicke, T., i Arens, A. K. (2019). The murky distinction between self-concept and self-efficacy: Beware of lurking jingle-jangle fallacies. *Journal of educational psychology*, *111*(2), 331. https://doi.org/10.1037/edu0000281

Marsh, H. W., i Shavelson, R. (1985). Self-concept: Its multifaceted, hierarchical structure. *Educational psychologist*, *20*(3), 107-123. DOI:10.1207/s15326985ep2003_1

Marsh, H. W., i Yeung, A. S. (1997). Causal effects of academic self-concept on academic achievement: Structural equation models of longitudinal data. *Journal of Educational Psychology, 89*(1), 41–54. https://doi.org/10.1037/0022-0663.89.1.41

Martínez Lirola, M. (2013). La relación entre el aprendizaje cooperativo y la adquisición de competencias interpersonales en una clase de lengua inglesa. *Revista de investigación e innovación en la clase de idiomas, 22,* 73-83.

Mason, J., Burton, L., i Stacey, K. (1992). *Pensar Matemáticamente.* MEC-Labor.

Mastropieri, M. A., Scruggs, T. E., Spencer, V., i Fontana, J. (2003). Promo - ting Success in High School World History: Peer Tutoring versus Guided Notes. *Learning Disabilities, Research and Practice, 18*(1), 52-65. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00057

Mato-Vázquez, D., Espiñeira, E., i López-Chao, V. A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, *39*(158), 91-111. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2017.158.58759

McCrone, D. (2005). Cultural capital in an understated nation: the case of Scotland. *The British Journal of Sociology*, *56*(1), 65-82. DOI:10.1111/j.1468-4446.2005.00047.x

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. A D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Co, Inc.

McLuckie, J., i Topping, K. J. (2004). Transferable skills for online peer learning. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 29*(5), 563-584. https://doi.org/10.1080/02602930410001689144

Medina, S.M. (2021). El aprendizaje cooperativo y sus implicancias en el proceso educativo del siglo XXI. *INNOVA Research Journal, 6*(2), 62-76. https://doi.org/10.33890/innova.v6.n2.2021.1663

Melero, M., i Fernández, P. (1995). El aprendizaje entre iguales: El estado de la cuestión en Estados Unidos [Peer learning: the state of the art in USA]**.** A P. Fernández y M. Melero (Eds.), *La interacción social en contextos educativos* (pp. 35-98). Siglo XXI.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes: cómo usamos el lenguaje para pensar juntos* (Vol. 39). Grupo Planeta (GBS).

Mercer, N., Wegerif, R., i Dawes, L. (1999). Children's talk and the development of reasoning in the classroom. *British Educational Research Journal, 25*(1), 95–111. https://doi.org/10.1080/0141192990250107

Mevarech, Z. R., i Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American educational research journal*, *34*(2), 365-394. DOI:10.3102/00028312034002365

Mevarech, Z. R., i Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology, 73*(4), 449–471. https://doi.org/10.1348/000709903322591181

Mevarech, Z.R., i Kramarski, B. (2014). Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies. OECD publisher. DOI:10.1787/9789264223561-en

Meza-Bermeo, C. (2021). Enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *Polo de conocimiento, 6*(11), 89-103. DOI:10.23857/pc.v6i11.3256

Miller, D., Topping, K.J., i Thurston, A. (2010). Peer tutoring in reading: The effects of role and organization on two dimensions of self-esteem. *British Journal of Educational Psychology, 80*, 417-433. DOI:10.1348/000709909X481652

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español.* Catálogo de publicaciones del Ministerio: https://sede.educacion.gob.es/publiventa

Miñano, P., Cantero, M.P., i Castejón, J.L. (2008). Predicción del rendimiento escolar de los alumnos a partir de las aptitudes, el autoconcepto académico y las atribuciones causales. Horizontes educacionales, 13(2), 11-23. https://www.researchgate.net/publication/277259825

Miquel, E., i Duran, D. (2017). Peer Learning Network: Implementing and sustaining cooperative learning by teacher collaboration. Journal of Education for Teaching, 43(3), 349-360. DOI:10.1080/02607476.2017.1319509 (PDF)

Moeskær, D., i Rasmus, M. (2020). Developing a Validated Test to Measure Students' Progression in Mathematical Reasoning in Primary School*. International Journal on Social and Education Sciences, 2*(1), 20-33. https://www.ijonses.net/index.php/ijonses/article/view/26

Molera, J. (2012). ¿Existe relación en la educación primaria entre los factores afectivos en las Matemáticas y el rendimiento académico? *Estudios sobre Educación*, *23*, 141-155. https://hdl.handle.net/10171/27639

Moliner, L., i Alegre, F. (2020a). Effects of peer tutoring on middle school students' mathematics self-concepts. *PLoS ONE, 15*(4). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0231410

Moliner, L., i Alegre, F. (2020b). Peer Tutoring Effects on Students' Mathematics Anxiety: A Middle School Experience. *Front. Psychol., 11*(1610), 1-12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01610

Moliner, L., i Alegre, F. (2022). Peer tutoring in middle school mathematics: academic and psychological effects and moderators. *Educational Psychology, 42*(8), 1027–1044. https://doi.org/10.1080/01443410.2022.2112148

Molina, M., Benet, A., i Doménech, A. (2019). La tutoría entre iguales: un elemento clave en las aulas interculturales inclusivas. *Revista Complutense de Educación,* 30(1), 277-292. http://dx.doi.org/10.5209/RCED.57271

Moliner, L., Flores, M., i Duran, D. (2011). Efectos sobre la mejora de las competencias lingüísticas y la autoimagen lectora a través de un programa de tutoría entre iguales. *Revista de Investigación en Educación, 9*(2), 209-222. http://hdl.handle.net/10234/38243

Möller, J., Zitzmann, S., Helm, F., Machts, N., i Wolff, F. (2020). A Meta-Analysis of Relations Between Achievement and Self-Concept. *Review of Educational Research*, *90*(3), 376-419. https://doi.org/10.3102/0034654320919354

Monereo, C. i Duran, D. (2001). *Entramats. Mètodes d'aprenentatge cooperatiu i col·laboratiu.* Edebé.

Montero, L., i Mahecha, J. (2020). Comprensión y resolución de problemas matemáticos desde la macroestructura del texto. *Praxis & Saber, 11*(26). https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9862

Moores, T. T., Chang, J. C. J., i Smith, D. K. (2006). Clarifying the role of self-efficacy and metacognition as predictors of performance: Construct development and test. *ACM SIGMIS Database: the DATABASE for Advances in Information Systems*, *37*(2-3), 125-132. DOI:10.1145/1161345.1161360

Moran, A. S., Swanson, H. L., Gerber, M. M., i Fung, W. (2014). The effects of paraphrasing interventions on problem-solving accuracy for children at risk for math disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *29*(3), 97-105. DOI: 10.1111/ldrp.12035

Morgan, C., i Alshwaikh, J. (2010). Mathematical activity in a multi-semiotic environment. A V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne i F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 993-1002). Service des publications des Institut National de Recherche Pédagogique.

Morony, S., Kleitman, S., Lee, Y. P., i Stankov, L. (2013). Predicting achievement: Confidence vs self-efficacy, anxiety, and self-concept in Confucian and European countries. *International Journal of Educational Research*, *58*, 79-96. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2012.11.002

Morsanyi, K., Prado, J., i Richland, L. E. (2018). The role of reasoning in mathematical thinking. *Thinking & Reasoning*, *24*(2), 129-137. https://doi.org/10.1080/13546783.2018.1435425

Moschkovich, J.N. (1999). Supporting the participation of English language learners in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics, 19*(1), 11-19.

Moschkovich, J. N. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning,* *4*(2-3), 189-212. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_5

Murray, F. (1994). Why understanding the theoretical basis of cooperative learning enhances teaching success. A J. Thousand, R. Villa i A. Nevin, *Creativity and collaborative learning. A practical guide to empowering students and teachers.* Paul H. Brookes Publishing Co.

Musu-Gillette, L. E., Wigfield, A., Harring, J. R., i Eccles, J. S. (2015). Trajectories of change in students' self-concepts of ability and values in math and college major choice. *Educational Research and Evaluation*, *21*(4), 343-370. DOI:10.1080/13803611.2015.1057161

Narang, D., i Saini, S. (2013). Metacognition and academic performance of rural adolescents. *Studies on home and community science*, *7*(3), 167-175.

Nastasi, B. K., i Clements, D. H. (1991). Research on cooperative learning: Implications for practice. *School Psychology Review,* *20*(1), pp. 110-131. DOI:10.1080/02796015.1991.12085536

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics NCTM.* VA.

National Research Council (2011). *Assessing 21st century skills.* National Academies Press.

Nosek, B. A., i Smyth, F. L. (2011). Implicit Social Cognitions Predict Sex Differences in Math Engagement and Achievement. *American Educational Research Journal*, *48*(5), 1125–1156. https://doi.org/10.3102/0002831211410683

Oberto, T. M. (2014). El aprendizaje cooperativo como herramienta para la educación universitaria. *Revista educación en valores*, (21), 58-69.

O'Connor, C., i Michaels, S. (2019). Supporting teachers in taking up productive talk moves: The long road to professional learning at scale. *International Journal of Educational Research*, *97*, 166-175. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.11.003

O'Donnell, A. (1999). Structuring Dyadic Interaction Through Scripted Cooperation. A O'Donell i A. King (eds.). *Cognitive perspectives on peer learning.* Lawrence Erlbaum Associates.

Onetti, W., Fernández-García, J. C., i Castillo-Rodríguez, A. (2019). Transition to middle school: Self-concept changes. *PLoS* ONE, 14(2), e0212640. DOI:10.1371/journal.pone.0212640

Ontoria Peña, A. (2006). *Aprendizaje centrado en el alumno: metodología para una escuela abierta*. Narcea.

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2010). Taxation, innovation and the environment. https://www.oecd.org/greengrowth/tools-evaluation/taxationinnovationandtheenvironment.htm

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2013a). *PISA 2015: Draft collaborative problem-solving framework.* https://www.oecd.org/callsfortenders/Annex%20ID_PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

Organisation for Economic Cooperation and Development i OMC (2013 b). "OECD-WTO database on trade value-added - May 2013 release". Disponible a http://www.oecd.org/sti/ind/TIVA%20flyer%20FINAL.pdf.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2017). *Marco de evaluación y de análisis de PISA para el desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. Recuperat de https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Orlando, L., Barkan, S., i Brennan, K. (2019). Designing an evidence-based intervention for parents involved with child welfare. *Children and Youth Services Review*, *105*, 104429. DOI:10.1016/j.childyouth.2019.104429

Paenza, A. (2016). *Estrategias: La potencia de la matemática para resolver problemas de la vida cotidiana.* Penguin Random House.

Palincsar, A. S., i Herrenkohl, L. R. (1999). Designing collaborative contexts: Lessons from three research programs. A A.M. O'Donnell i A. King (Eds.), *Cognitive perspectives on peer learning* (151-177).

Palma-Villavicencio, M. M., Loor-Salmon, L. D. R., Saltos-Rodríguez, L. J., i Bolívar-Chávez, O. E. (2019). La tutoría entre iguales: Modalidad para promover el aprendizaje cooperativo a nivel superior. Polo de conocimiento: *revista científico-profesional*, *4*(5), 431-443. http://polodelconocimiento.com/ojs/index.php/es

Paridjo, P., i Waluya, S. B. (2017). Analysis Mathematical Communication Skills Students In The Matter Algebra Based NCTM. *IOSR Journal of Mathematics, 13*(I), 60–66. https://doi.org/10.9790/5728-1301056066

Parker, D.P., Marsh, H.W., Ciarrochi, J., Marshall, S., i Abduljabbar, A.S. (2012). Juxtaposing math self-efficacy and self-concept as predictors of long-term achievement outcomes. *Educational Psychology*, *34*(1), 29-48. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.797339

Parker, P. D., Marsh, H. W., Guo, J., Anders, J., Shure, N., i Dicke, T. (2018). An information distortion model of social class differences in math self-concept, intrinsic value, and utility value. *Journal of Educational Psychology, 110*(3), 445–463. https://doi.org/10.1037/edu0000215

Pedroza, E., López-Silva, L.S., Pedroza, M.J., Pérez, D.R., González, K.A., Flórez-Donado, J.P., i Torres-Salazar, P.L. (2020). Contribución de la enseñanza en los procesos metacognitivos y la resolución de problemas matemáticos. *Espacios, 41*(4), 27-35. https://repositorio.cuc.edu.co/bitstream/handle/11323/6048/Contribuci%c3%b3n%20de%20la%20ense%c3%b1anza%20en%20los%20procesos%20metacognitivos%20y%20la%20resoluci%c3%b3n%20de%20problemas%20matem%c3%a1ticos.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pennequin, V., Sorel, O., i Mainguy, M. (2010). Metacognition, executive functions and aging: The effect of training in the use of metacognitive skills to solve mathematical word problems. *Journal of Adult Development*, *17*(3), 168-176. DOI:10.1007/s10804-010-9098-3

Pérez, L.N., Farfán, J.F., Delgado, R., i Baylon, R.G. (2022) et al. El aprendizaje cooperativo en la educación básica: una revisión teórica. *Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas,* 5(1), 6-11. http://remca.umet.edu.ec/index.php/REMCA/article/view/462/478

Pérez, A. M., i Poveda, P. (2008). Efectos del aprendizaje cooperativo en la adaptación escolar. *Revista de Investigación educativa*, *26*(1), 73-94. https://revistas.um.es/rie/article/view/94121

Pérez, Y., i Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 169-194. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=376140388008

Piaget, J. (1979). Relations between psychology and other sciences. *Annual review of psychology*, *30*(1), 1-9.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula* (Vol. 15). Ediciones Morata.

Ping, Y., i Jitendra, AK. (1999). The effects of instruction in solving mathematical word problems for students with Learning Problems: A Meta-Analysis. *The Journal of Special Education*. 1999;32(4):207-225. DOI:10.1177/002246699903200402

Ping, Y., Jitendra, A. K., i Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem-solving instruction on middle school students with learning problems. *The Journal of Special Education*, *39*(3), 181–192. https://doi.org/10.1177/00224669050390030501

Pintrich, P. R. (2002). The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing. *Theory into practice*, *41*(4), 219-225. https://www.jstor.org/stable/1477406

Pintrich, P.R., i Schunk, D.H. (2006). *Motivación en contextos educativos*. Pearson.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., i Castro, E. (2016). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA, 13*(2), 104-129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

PISA (2018). *Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe Español.* Catálogo general de publicaciones oficiales. publicacionesoficiales.boe.es/

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemática. *Educación Matemática, 18*(1), 37-72. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9553-3

Planas, N. (2016). Research in mathematics education and language. *PNA, 11*(1), 1-4. https://doi.org/10.30827/pna.v11i1.6078

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 215-229. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Planas, N., Morgan, C., i Schütte, M. (2018). Mathematics and language: Lessons and directions from two decades of research. A T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger i K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Routledge.

Planas, N., i Schütte, M. (2018). Research frameworks for the study of language in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 965-974. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0997-2

Planas, N., i Setati-Phakeng, M. (2014). On the process of gaining language as a resource in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(6), 883-893. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0610-2

Planas, N., i Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. A Á. Gutiérrez, G. H. Leder i P. Boero (Eds.), The second handbook of the psychology of mathematics education. *The journey continues* (pp. 447–479). Sense Publishers.

Plaza-Chalco, J.L. (2023). Tutoría entre iguales: una alternativa didáctica enfocada en mejorar el rendimiento académico en Matemáticas. *Revista Iberoamericana De Investigación En Educación, 7,* 1-14. https://doi.org/10.58663/riied.vi7.122

Polo, L. E. (2020). La resolución de problemas: una mirada desde el constructivismo, el aprendizaje significativo y el conectivismo. *Acta Herediana*, *63*(1), 55-60. https://doi.org/10.20453/ah.v63i1.3702

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Poulou, M. (2007). Personal teaching efficacy and its sources: student teachers' perceptions. Educational Psychology, 27, 191-218. DOI:10.1080/01443410601066693

Pratiwi, V., i Muiz, A. (2016). Think-talk- write Strategy to Develop Fifth Grade Students' Mathematical Communication Ability in Comparison. *International Conference of Educatio*n, 926–936. DOI:10.12973/iji.2018.1136a

Pujolàs, P. (2003). *9 ideas clave: El aprendizaje cooperativo.* Graó.

Pujolàs, P. (2008). El aprendizaje cooperativo como recurso y como contenido. *Aula de Innovación Educativa, 170*, 37-41. https://cife-ei-caac.com/wp-content/uploads/2008/05/recurso_contenido.pdf

Pujolàs, P., Lago, J. R., i Naranjo, M. (2013). Aprendizaje cooperativo y apoyo a la mejora de las prácticas inclusivas. *Revista de investigación en educación*, *11*(3), 207-218. http://webs.uvigo.es/reined/

Pulido, E.G., Redondo, M.P., Lora, L.J., i Jiménez, L.K. (2023). Medición del autoconcepto: Una revisión. Psykhe, 32(1), 1-14. http://dx.doi.org/10.7764/psykhe.2020.22389

Quintero, K. T. (2020). Importancia del Autoconcepto para la Construcción del Conocimiento. *Revista Scientific*, *5*(16), 319-333. https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2020.5.16.17.319-333

Ramírez, A., i Polak, A. M. (2020). Estadística inferencial. Elección de una prueba estadística no paramétrica en investigación científica. *Horizonte de la Ciencia*, *10*(19), 191-208. https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.19.597

Ramos-Díaz, E., Rodríguez-Fernández, A., i Antonio-Agirre, I. (2017). El autoconcepto y el bienestar subjetivo en función del sexo y del nivel educativo en la adolescencia. *Psicología educativa, 23*(2), 89-94. https://doi.org/10.1016/j.pse.2017.05.005

Rasmussen, K., i Secher, M. C. (2022). Together in adidactic situations–student dialogue during reciprocal peer tutoring in mathematics. *International Journal of Educational Research Open*, *3*, 100126. https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2022.100126

Ribosa, J., Duran, D. (2021). Cuando la curiosidad científica se transforma en un videotutorial para aprender enseñando: conocimiento del contenido, elaboración de las explicaciones y complejidad de las preguntas. *Revista Iberoamericana de Educación, 87*(2), 85-101. https://doi.org/10.35362/rie8724572

Ricardo-Fuentes, E. L., Rojas-Morales, C. E., i Valdivieso-Miranda, M. A. (2023). Metacognición y resolución de problemas matemáticos. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (53), 82-101. http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n53/0121-3814-ted-53-82.pdf

Ricce, C. R., Díaz, B. M., i López, O. (2022). El aprendizaje colaborativo en la enseñanza de las matemáticas: revisión sistemática. *Acción y Reflexión Educativa*, (47), 1-23. https://doi.org/10.48204/j.are.n47.a2580

Riera, G. (2011). El aprendizaje cooperativo como metodología clave para dar respuesta a la diversidad del alumnado desde un enfoque inclusivo. *Revista Latinomericana de Educación Inclusiva, 5*(2), pp. 133-149. https://www.mlsjournals.com/MLS-Inclusion-Society/article/view/965

Rinn, A. N., i Cunningham, L. G. (2008). Using self-concept instruments with high-ability college students: Reliability and validity evidence. *Gifted child quarterly*, *52*(3), 232-242. https://doi.org/10.1177/0016986208319458

Robinson, D. R., Schofield, J., i Steers-Wentzell, K. L. (2005). Peer and cross-age tutoring in math: Outcomes and their design implications. *Educational Psychology Review, 17*(4), 327-362. https://doi.org/10.1007/s10648-005-8137-2

Rodríguez, M., i Domínguez, J. (2016). Dificultades del lenguaje que influyen en la resolución de problemas. *Dificultades del lenguaje que influyen en la resolución de problemas*, 17-42. https://doi.org/10.14201/et20163421742

Rodríguez, E., Fernández, A.S., Fernández, G., Garrido, L., Hernández, A., Montero, J. A., Moreno, D., Queralt, I. (2017). Tutor matemático: proyecto de tutoría entre iguales para la mejora de las competencias matemáticas. *Revista de innovación y experiencias educativas de los Centros de Profesores y Recursos de la Provincia de Cáceres, 16,* 38-43. http://hdl.handle.net/11162/168888

Rohim, S., i Umam, K. (2019). The Effect of Problem-Posing and Think-Pair-Share Learning Models on Students' Mathematical Problem-Solving Skills and Mathematical Communication Skills. *JETL (Journal of Education, Teaching and Learning)*, *4*(2), 287-291. DOI:10.26737/JETL.V4I2.8

Rohrbeck, C., Ginsburg-Block, M., Fantuzzo, J., i Miller, T. (2003). Peer-assisted learning interventions with elementary school students: A meta-analytic review. *Journal of Educational Psychology*, *95*(2), 240–257. DOI:10.1037/0022-0663.95.2.240

Roscoe, R., i Chi, M. (2004). The Influence of the Tutee in Learning by Peer Tutoring. *Learning research and development center,* 1179-1184. https://escholarship.org/content/qt3g30r749/qt3g30r749_noSplash_35e88586356ff666b6961cec13b1ad76.pdf?t=op2k3x

Roscoe, R., i Chi, M. (2007). Understanding Tutor Learning: Knowledge-Building and Knowledge-Telling in Peer Tutors' Explanations and Questions. *Review of Educational Research, 77*(4), 534-574. DOI:10.3102/0034654307309920.

Roscoe, R. D., i Chi, M. T. (2008). Tutor learning: The role of explaining and responding to questions. *Instructional science*, *36*(4), 321-350. https://doi.org/10.1007/s11251-007-9034-5

Roselli, N. D. (2016). El aprendizaje colaborativo: Bases teóricas y estrategias aplicables en la enseñanza universitaria. *Propósitos y representaciones, 4*(1), 219-280. https://repositorio.uca.edu.ar/handle/123456789/6195

Rosenberg, M. (1979). *Conceiving The Self.* Basic Books.

Roseth, C. J., Johnson, D. W., i Johnson, R. T. (2008). Promoting early adolescents'achievement and peer relationships: The effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures. *Psychological Bulletin, 134*(2), 223. DOI:10.1037/0033-2909.134.2.223

Rowland, T.; Huckstep, P., i Thwaites, A. (2003). Observing Subject Knowledge in Primary Mathematics Teaching. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23(1), 37-42. http://www.skima.maths-ed.org.uk/BSRLMNotts16Nov03.pdf

Rubio, G. (2019). *Incidencia de la comprensión lectora en la competencia de comunicación y la resolución de situaciones matemáticas cotidianas, en los estudiantes del grado sexto del Instituto Educativo Técnico Diversificado de Monterrey* [Tesi doctoral, Universitat Nacional de Colombia]. http://bdigital.unal.edu.co/72034/

Ruthven, K., i Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, *11*(1), 5-33. https://doi.org/10.30827/pna.v11i1.6079

Sáinz, M., i Upadyaya, K. (2016). Accuracy and bias in Spanish secondary school students' self-concept of math ability: The influence of gender and parental educational level. *International Journal of Educational Research*, *77*, 26-36. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.02.009

Salomon, G. (2001). Cogniciones distribuidas. *Consideraciones psicológicas y educativas.* Amorrortu.

Salovey, P., i Mayer, J.D. (1990) Emotional Intelligence. *Imagination, Cognition and Personality*. 1990;9(3):185-211. DOI:10.2190/DUGG-P24E-52WK-6CDG

Sánchez-Cano, M., i Gràcia, M. (2018). Llengua i comunicació a les matemàtiques. *Àmbits de Psicopedagogia i Orientació, 49*(3), 15-30.

Sanders, S. (2016). Critical and Creative Thinkers in Mathematics Classrooms. *Journal of Student Engagement: Education Matters, 6*(1), 19-27. https://ro.uow.edu.au/jseem/vol6/iss1/4

Santigosa, A. (2005). La noción de interiorización desde una visión cultural del desarrollo. En M. Cubero y J. Ramírez (comps.), *Vygotsky en la Psicología Contemporánea*. Miño y Dávila.

Santos, M. A., Lorenzo, M. D. M., i Priegue, D. (2009). Aprendizaje cooperativo: práctica pedagógica para el desarrollo escolar y cultural. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, *1*(2), 289-303. https://hdl.handle.net/20.500.12799/2687

Santos, M.A., i Slavin, R. (2002). La condición del éxito en la intervención pedagógica con niños en situación de riesgo: El programa" Success for all". *Revista de Investigación Educativa, 20*(1), 173-188. http://hdl.handle.net/10347/18568

Sarah, K., Mursalin, M., Muliana, M., Nuraina, N., i Rohantizani, R. (2021). The Influence of the Inside Outside Circle Cooperative Learning Model on Students' Mathematical Communication Ability. *International Journal for Educational and Vocational Studies*, *3*(3), 177-185. DOI:10.29103/ijevs.v3i3.4981

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*(2), 171-191.

Schraw, G. (2001). Promoting General Metacognitive Awareness. *Instructional Science*, 26(1), 113-125. DOI:10.1023/A:1003044231033

Schraw, G., i Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational psychology review*, *7*(4), 351-371. DOI:10.1007/BF02212307

Schunk, D. H., i Ertmer, P. A. (2000). Self-regulation and academic learning: Self-efficacy enhancing interventions. A *Handbook of self-regulation* (631-649). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50048-2

Schunk, D. H., i Zimmerman, B. J. (Eds.). (2008). *Motivation and self-regulated learning: Theory, research, and applications.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Sellet, M. (2020). El aprendizaje cooperativo y el desarrollo de las habilidades cognitivas. *Revista EDUCARE-UPEL-IPB-Segunda Nueva Etapa 2.0*, *24*(1), 51-74. https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i1.1226

Serra, T. (2016). Parlar de matemàtiques per aprendre'n. *Noubiaix, 39*, 77-97.

Setati, M., i Planas, N. (2012). Mathematics education across two different language contexts: A political perspective. A O. Skovsmose i B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 167-186). Sense.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A., Nescher, P., Streefland, L., Cobb, P., i Mason, J. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? For the Learning of Mathematics, 18(1), 41–51. Skemp, R. (1986). Twice five plus the wings of a bird [video]. BBC.

Shanley, L., Biancarosa, G., Clarke, B., i Goode, J. (2019). Relations between mathematics achievement growth and the development of mathematics self-concept in elementary and middle grades. *Elsevier, 59*, 101804. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.101804

Sharan, S. (2002). Differentiating methods of cooperative learning in research and practice. *Asia Pacific Journal of Education*, *22*, 106–116. https://doi.org/10.1080/0218879020220111

Sharan, S., Ackerman, Z., i Hertz-Lazarowitz, R. (1979). Academic achievement of elementary school children in small-group versus whole-class instruction. *The Journal of Experimental Education, 48*(2), 125–129. https://www.jstor.org/stable/20151328

Sharan, Y., i Sharan, S. (1994). Group Investigation in the Cooperative Classroom. A S. Sharan, *Handbook of Cooperative Learning Methods* (pp. 97-114). Greenwood Press.

Shavelson, R. J., Hubner, J. J., i Stanton, G. C. (1976). Self-concept: Validation of construct interpretations. *Review of educational research*, *46*(3), 407-441. https://doi.org/10.2307/1170010

Shuell, T. J. (1996). Teaching and learning in a classroom context. A D. C. Berliner i R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 726–764). Prentice Hall International.

Siemens, G. (2005). Connectivism: A learning theory for the digital age. International Journal of Instructional Technology & Distance Learning. Retrieved from http://www.itdl.org/Journal/Jan_05/article01.htm

Sierpinska, A., i Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop (Edit.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer, A.P.

Silberman, M. (1996). The use of pairs in cooperative learning. *Cooperative Learning and College Teaching, 7*(1), pp. 2-12.

Simonsmeier, B.A., Peiffer, H., Flaig, M., i Schneider, M. (2020). Peer Feedback Improves Students' Academic Self-Concept in Higher Education. *Research in Higher Education, 61,* 706–724 (2020). https://doi.org/10.1007/s11162-020-09591-y

Simpkins, S. D., Davis-Kean, P. E., i Eccles, J. S. (2006). Math and science motivation: A longitudinal examination of the links between choices and beliefs. *Developmental Psychology, 42*(1), 70–83. https://doi.org/10.1037/0012-1649.42.1.70

Skaalvik, E. M., i Skaalvik, S. (2006). Self-concept and self-efficacy in mathematics: Relation with mathematics motivation and achievement. *The concept of self in education, family and sports*, 51-74. https://repository.isls.org/bitstream/1/3579/1/709-715.pdf

Skaalvik, E.M., i Valas, H. (2010). Relations among Achievement, Self-Concept, and Motivation in Mathematics and Language Arts: A Longitudinal Study. *The journal of experimental education, 62*(2), 135-149. https://www.jstor.org/stable/20152589

Slavin, R. (1983). When does cooperative learning increase student achievement? *Psychological Bulletin, 94*, pp. 429-445. DOI:10.1037/0033-2909.94.3.429

Slavin, R. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice*. Allyn & Bacon.

Slavin, R. (1996). Research for the future. Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology, 21*(1), 43-69. DOI:10.1006/ceps.1996.0004

Slavin, R. (2000). *Educational Psychology: theory and practice* (6th Ed.). Allyn & Bacon.

Slavin, R. E. (2010). Co-operative learning: what makes groupwork work*?* A H. Dumont, D. Istance, i F. Benavides (Eds.), *The Nature of Learning: Using Research to Inspire Practice* (pp. 161–178). OECD.

Slavin, R. (2011). Instruction Based on Cooperative Learning. A R. E. Mayer I P. A. Alexander (Eds.), *Handbook of Research on Learning and Instruction* (pp. 344-360). Taylor & Francis.

Slavin, R., Hurley, E. A., i Chamberlain, A. (2003). Cooperative learning and achievement: Theory and research. In W. M. Reynolds, i G. E. Miller (Vol. Eds.), *Handbook of psychology: Educational psychology,* (pp. 177–198). Wiley.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. A Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Srivastava, R., i Rashid, M. (2018). Who Is at Edge – Tutors or Tutees? Academic, Social and Emotional Elevation Through Peer Tutoring (August 21, 2018). Arab World English Journal (AWEJ) Proceedings of 1st MEC TESOL Conference. https://ssrn.com/abstract=3235915

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. The Journal of Mathematical Behavior, 24(3-4), 341-350. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004

Stanic, G., i Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. A R. Charles y E. Silver (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem* (pp.1-22). Lawerance Erlbaum Associates.

Steen, L. A. (2001). Mathematics and numeracy: Two literacies, one language. *The Mathematics Educator,* 6(1), 1016. http://www.asclegg.co.uk/downloads/maths/pisa/Mathematics%2520and%2520Numeracy_Steen.pdf

Stein, M. K., i Smith, M. (2011). *Practices for orchestrating productive mathematics discussions.* National Council of Teachers of Mathematics.

Sticca, F., Goetz, T., Bieg, M., Hall, N. C., Eberle, F., i Haag, L. (2017). Examining the accuracy of students' self-reported academic grades from a correlational and a discrepancy perspective: Evidence from a longitudinal study. *PLoS ONE*, *12*(11), e0187367. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0187367

Strijbos, J., i Fischer, F. (2007). *Methodological challenges for collaborative Learning Research, 17*(4), 389-464. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.03.004

Swanson, H. L. (2015). Cognitive strategy interventions improve word problem solving and working memory in children with math disabilities. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1099. DOI: 10.3389/fpsyg.2015.01099

Syarifuddin, R., Rizki, S., Muhaji., Mubarok, H., i Yohannes, A. (2020). Collaborative Problem-based Learning: An analysis of problem-solving skills in vocational schools. *IJORER: International Journal of Recent Educational Research*, *1*(3), 209-217. https://doi.org/10.46245/ijorer.v1i3.62

Syukri, M., Murniati, S., Yanti, Y., i Halim, L. (2020). Students' ability in solving physics-analysis problem through the TAI type cooperative learning model. *Journal of Physics: Conference Series, 1460* (012109). DOI:10.1088/1742-6596/1460/1/012109

Szücs, D., i Mammarella, I.C. (2020). *Ansietat cap a les matemàtiques. Sèrie Pràctiques Educatives 31.* (D. Sanahuja., M. Ruiz., Trad.). Oficina Internacional d'Educació**.**

Tan, L. S., i Ang, K. C. (2016). A school-based professional development programme for teachers of mathematical modelling in Singapore. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(5), 399–432. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9305-z

Tesouro, M. (2005). La metacognición en la escuela: la importancia de enseñar a pensar, *Educar*, *35*, 135-144. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=342130824013

Thurston, A., Cockerill, M., i Chiang, T.H. (2021). Assessing the Differential Effects of Peer Tutoring for Tutors and Tutees. *Education Sciences,, 11*(3), 1-12. https://doi.org/10.3390/educsci11030097

Thurston. A., Duran, D., Cunningham, E., Blanch, S., i Topping, K. (2009). International on-line reciprocal peer tutoring to promote modern language development in primary schools. *Computers & Education, 53*, 462-472. DOI:10.1016/j.compedu.2009.03.005

Thurston, A., Keere, K. van de., Topping, K. J., Kosack, W., Gatt, S., Marchal, J., Mestdagh, N., Schmeinck, D., Sidor, W. i Donnert, K. (2007). Aprendizaje entre iguales en Ciencias Naturales de Educación Primaria: Perspectivas teóricas y sus implicaciones para la práctica en el aula. Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*. Electronic Journal of Research in Educational Psychology,5*(3), 477-496. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293121946002

Thurston, A., Roseth, C., Chiang, T.H., Burns, V., i Topping, K.J. (2020). The influence of social relationships on outcomes in mathematics when using peer tutoring in elementary school. International Journal of educational research open, *1*, 1000. https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2020.100004

Timmerman, H. L., Toll, S. W., i Van Luit, J. E. (2017). The relation between math self-concept, test and math anxiety, achievement motivation and math achievement in 12 to 14-year-old typically developing adolescents. *Psychology, Society, & Education*, *9*(1), 89-103.

file:///Users/clarabastartjane/Downloads/Dialnet-TheRelationBetweenMathSelfconceptTestAndMathAnxiet-6360210%20(3).pdf

Tindale, R. S., i Sheffey, S. (2002). Shared information, cognitive load, and group memory. *Group Processes & Intergroup Relations*, *5*(1), 5-18. https://doi.org/10.1177/1368430202005001535

Tint, S. S., i Nyunt, E. E. (2015). Collaborative Learning With Think-Pair-Share Technique. *Computer Applications: An International Journal (CAIJ),* *2*(1), 1–11. DOI:10.5121/caij.2015.2101

Tolmie, A. K., Topping, K. J., Christie, D., Donaldson, C., Howe, C., Jessiman, E., Thurston, A. (2010). Social effects of collaborative learning in primary schools. *Learning and Instruction, 20*(3), 177–191. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.01.005

Topping, K.J. (1996). *Effective Peer Tutoring in Further and Higher Education* (SEDA Paper 95). SEDA.

Topping, K.J. (1998). Paired learning and literacy. A K. Topping i S. Ehly (Eds.), *Peer-assisted learning* (pp. 45-66). Lawrence Erlbaum Associates.

Topping, K.J. (2000). *Tutoring.* International Academy of Education.

Topping, K. J., i Bryce, A. (2004). Cross-Age Peer Tutoring of Reading and Thinking: Influence on thinking skills. *Educational Psychology*, *24*(5), 595–621. https://doi.org/10.1080/0144341042000262935

Topping, K.J., Buchs, C., Duran, D., i Van Keer, H. (2017). *Effective peer learning: From principles to practical implementation*. Routledge.

Topping, K. J., Campbell, J., Douglas, W., i Smith, A. (2003). Cross-age peer tutoring in mathematics with seven- and 11-year-olds: Influence on mathematical vocabulary, strategic dialogue and self-concept. *Educational Research, 45*(3), 287-308. https://doi.org/10.1080/0013188032000137274

Topping, K.J., Duran, D., i Keer, H. Van. (2015). *Using Peer Tutoring to Improve Reading Skills.* Routledge

Topping, K.J., i Ehly, S. (2001). Peer assisted learning: A framework for consultation. *Journal of Educational and Psychological Consultation*, *12*(2), 113–132. https://doi.org/10.1207/S1532768XJEPC1202_03

Topping, K. J., Peter, C., Stephen, P., i Whale, M. (2004). Cross-age peer tutoring of science in the primary school: Influence on scientific language and thinking. *Educational Psychology, 24*(1), 57-75. https://doi.org/10.1080/0144341032000146449

Toulia, A., Strogilos, V., i Avramidis, E. (2021). Peer tutoring as a means to inclusion: a collaborative action research project. *Educational Action Research*, *31*(2), 213–229. https://doi.org/10.1080/09650792.2021.1911821

Tran, V. D. (2014). The effects of cooperative learning on the academic achievement and knowledge retention. *International journal of higher education*, *3*(2), 131-140. https://doi.org/10.5430/ijhe.v3n2p131

Tran, V. D., i Lewis, R. (2012). Effects of Cooperative Learning on Students at a Giang University in Vietnam. *International Education Studies,* *5*(1), 86-99. https://doi.org/10.5539/ies.v5n1p86

Tran, V. D., Nguyen, T. M. L., Van De, N., Soryaly, C., i Doan, M. N. (2019). Does Cooperative Learning May Enhance the Use of Students' Learning Strategies? *International Journal of Higher Education*, *8*(4), 79-88. https://doi.org/10.5430/ijhe.v8n4p79

Troncoso, O.M. (2013). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas, 2º Congreso Internacional de Educación Abrapalabra "Educación, emprendimiento y desarrollo humano", Ibagué, 19 al 21 de septiembre de 2013. www.cie.fundacionabrapalabra.org

Tsai, C. C., i Liang, J. C. (2009). The development of science activities via on-line peer assessment: The role of scientific epistemological views. *Instructional Science, 37*(3), 293–310. https://doi.org/10.1007/s11251-007-9047-0

Tsuei, M. (2012). Using synchronous peer tutoring system to promote elementary students' learning in mathematics. *Computers & Education, 58*(4), 1171-1182. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.11.025

Turner, J. C., Thorpe, P. K., i Meyer, D. K. (1998). Students' reports of motivation and negative affect: A theoretical and empirical analysis. *Journal of Educational Psychology, 90*(4), 758-771. https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.4.758

Ul Ain, Q., Thurston, A., MacKenzie, A., i Ozkaya, C. (2023). What does previous research tell us about the effects of peer tutoring on metacognition in primary and secondary schools?. *International Journal of Educational Research Open*, *4*, 100248. https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2023.100248

Ullah, I., Tabassum, R., i Kaleem, M. (2018). Effects of peer tutoring on the academic achievement of students in the subject of biology at secondary level. *Education Sciences*, *8*(3), 112. DOI:10.3390/educsci8030112

Umam, K. (2018). Peningkatan Kemampuan Berpikir Matematis Siswa melalui pembelajaran Reciprocal Teaching. *Jurnal Pendidikan Matematika Indonesia, 3*(2), 57–61. DOI:10.37249/as-salam.v3i2.129

Umam, K., i Kowiyah, K. (2018). The Effect of Non- Routine Geometry Problem On Elementary Students Belief In Mathematics: A Case Study. *Journal of Education, Teaching and Learning, 3*(1), 99–103. http://dx.doi.org/10.26737/jetl.v3i1.552

UNESCO (2015). *Rethinking education: Towards a global common good?* Paris: UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002325/232555e.pdf

Urdan, T., i Schoenfelder, E. (2006). Classroom effects on student motivation: Goal structures, social relationships, and competence beliefs. *Journal of School Psychology, 44*(5), 331–349. https://doi.org/10.1016/j.jsp.2006.04.003

Valdebenito, V., i Duran, D. (2013). La tutoría entre iguales como un potente recurso de aprendizaje entre alumnos: Efectos, fluidez y comprensión lectora. *Perspectiva Educacional, 52*(2), 154-176. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333328170008

Valdebenito, V., i Duran, D. (2015). Formas de interacción implicadas en la promoción de estrategias de comprensión lectora a través de un programa de tutoría entre iguales. *Revista Latinoamericana de Psicología, 47* (2), 75-85. http://www.elsevier.es/es-revistarevista-latinoamericana-psicologia-205-pdf-S0120053415000023

Valdebenito, V., i Duran, D. (2017). Cambio conceptual sobre la colaboración entre el profesorado y cooperación entre estudiantes. *Cuadernos de Pesquisa, 24*(3), 111-124. DOI:10.18764/2178-2229.v24n3p99-112

Van den Boom, G., Paas, F., i Van Merriënboer, J. G. (2007). Effects of elicited reflections combined with tutor or peer feedback on self-regulated learning and learning outcomes. *Learning and Instruction, 17*(5), 532–548. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.003

Vasalampi, K., Pakareinen, E., Torppa, M., Viljaranta, J., Lerkkanen, M.K., i Poikkeus, A.M. (2020). Classroom effect on primary school students' self-concept in literacy and mathematics. *European Journal of Psychology of Education, 35,* 625-646. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00439-3

Veenman, S., Kenter, B., i Post, K. (2000). Cooperative learning in Dutch primary classrooms. *Educational Studies, 26*(3), 281–302. https://doi.org/10.1080/03055690050137114

Veldman, M. A., Doolaard, S., Bosker, R. J., i Snijders, T. A. B. (2020). Young children working together. Cooperative learning effects on group work of children in Grade 1 of primary education. *Learning and Instruction*, *67*, 101308. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101308

Venet-Muñoz, R., i Calvas-Ojeda, M. G. (2022). El aprendizaje cooperativo en los Estudios *Sociales. Portal de la Ciencia, 3*(2), 85-97. https://doi.org/10.51247/pdlc.v3i2.314

Vila, A., i Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea. ISBN 84-277-1470-X

Villalonga, J. M. (2017). *La competencia matemática: Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria* [Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://ddd.uab.cat/record/187718?ln=ca

Villa-Ochoa, J. A., Rosa, M., i Gavarrete, M. E. (2018). Aproximaciones socioculturales a la modelación en Educación Matemática. Aportes de una comunidad latinoamericana. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(1), 4-12. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/aproximaciones-socioculturales-a-la-modelacion-en-educacion-matematica-aportes-de-una-comunidad-latinoamericana/

Villar, E., i Ros, C. (2011). El aprendizaje cooperativo: un proceso de inclusión en la ESO. A J. Navarro (Coord.), *Diversidad, calidad y equidad educativas* (pp. 1001-1006). Consejería de Educación, Formación y Empleo.

Villagra, C., i Valdebenito, V. (2019). Tutoría entre iguales como estrategia para la formación del profesorado. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *12*(24), 161-176. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-24.tief

Vizcaino, A. E., i Manzano, M. (2017). Análisis de las relaciones entre creencias epistemológicas sobre la matemática y rendimiento académico. *Psychology, Society & Education, 9*(1), 105-119. https://ojs.ual.es/ojs/index.php/psye/article/view/469/447

Vrikki, M., Kershner, R., Calcagni, E., Hennessy, S., Lee, L., Hernández, F., Estrada, N., i Ahmed, F. (2019). The teacher scheme for educational dialogue analysis (T-SEDA): developing a research-based observation tool for supporting teacher inquiry into pupils' participation in classroom dialogue. *International Journal of Research & Method in Education*, *42*(2), 185-203. https://doi.org/10.1080/1743727X.2018.1467890

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* (S. Furió, Trad.). Paidós.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*. A. Kozulin, (Ed. and Trans.). MIT Press.

Wang, M. J. (2004). A study on online peer feedback. *English Teaching & Learning, 29*(2), 63–77. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12273-8

Warfield, J., Wood, T., i Lehman, J. D. (2005). Autonomy, beliefs and the learning of elementary mathematics teachers. *Teaching and teacher education*, *21*(4), 439-456. https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.01.011

Watson, A., i Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.

Watt, H. M. (2006). The role of motivation in gendered educational and occupational trajectories related to maths. *Educational Research and Evaluation, 12*(4), 305–322. https://doi.org/10.1080/13803610600765562

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Turrou, A. C., Johnson, N. C., i Zimmerman, J. (2019). Teacher practices that promote productive dialogue and learning in mathematics classrooms. *International Journal of Educational Research*, *97*, 176-186. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.07.009

Wen, M. L., i Tsai, C. C. (2008). Online peer assessment in an inservice science and mathematics teacher education course. *Teaching in Higher Education, 13*(1), 55–67. https://doi.org/10.1080/13562510701794050

Wertsch, J. V. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Paidós.

Westphal, A., Kretschmann, J., Gronostaj, A., i Vock, M. (2018). More enjoyment, less anxiety and boredom: How achievement emotions relate to academic self-concept and teachers' diagnostic skills. *Learning and Individual Differences*, *62*, 108-117. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.01.016

Winne, P., i Hadwin, A.F. (1998). Studying as self-regulated learner. A D.J. Hacker i J. Dunlosky (Eds.), Metacognition in educational theory and practice (pp. 277-304). Erlbaum.

Wolff, F., Helm, F., Zimmermann, F., Nagy, G., i Möller, J. (2018). On the effects of social, temporal, and dimensional comparisons on academic self-concept. *Journal of Educational Psychology, 110*(7), 1005–1025. https://doi.org/10.1037/edu0000248

Worley, J., i Naresh, N. (2014). Heterogeneous peer tutoring: An intervention that fosters collaborations and empowers learners. *Middle School Journal, 46*(2), 26-32. https://doi.org/10.1080/00940771.2014.11461907

Wu, H., Guo, Y., Yang, Y., Zhao, L., i Guo, C. (2021). A Meta-analysis of the Longitudinal Relationship Between Academic Self-Concept and Academic Achievement. *Educ Psychol Rev*, *33*, 1749–1778 https://doi.org/10.1007/s10648-021-09600-1

Xiao, Y., i Lucking, R. (2008). The impact of two types of peer assessment on students' performance and satisfaction within a Wiki environment. *The Internet and Higher Education, 11*(3–4), 186–193. https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2008.06.005

Yackel, E., i Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 458-477. DOI:10.2307/749877

Yang, M., Badger, R., i Yu, Z. (2006). A comparative study of peer and teacher feedback in a Chinese EFL writing class. *Journal of Second Language Writing, 15*(3), 179–200. https://doi.org/10.1016/j.jslw.2006.09.004

Yáñez-Marquina, L., i Villardón-Gallego, L. (2016). Attitudes towards mathematics at secondary level: Development and structural validation of the Scale for Assessing Attitudes towards Mathematics in Secondary Education (SAT-MAS). *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(3), 557-581. http://doi.org/10.14204/ejrep.40.15163

Zaldívar, A., Nava, L., i Lizárraga, J. (2018). Influencia de la tutoría en el aprendizaje de matemáticas. Perspectiva del estudiante. *Revista Iberoamericana para la investigación y el desarrollo educativo, 8*(16). https://doi.org/10.23913/ride.v8i16.355

Zandi, N., Karwowski, M., Forthmann, B., i Holling, H. (2022). How stable is the creative self-concept? A latent state-trait analysis. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts.* Advance online publication. https://doi.org/10.1037/aca0000521

Zakaria, E., Chin, L. C., i Daud, Y. (2010). The Effects of Cooperative Learning on Students' Mathematics Achievement and Attitude toward Mathematics. Journal of Social Sciences, 6(2), 272-275. http://dx.doi.org/10.3844/jssp.2010.272.275

Zeneli, M., Tymms, P., i Bolden, D. (2016). The impact of interdependent cross-age peer tutoring on social and mathematics self-concepts. *International Journal of Psychology and Educational Studies, 3*(2), 1-13. DOI:10.17220/ijpes.2016.02.001

Zhang, D., i Ping, Y. (2012). A follow-up meta-analysis for word-problem-solving interventions for students with mathematics difficulties. *The Journal of educational research*, *105*(5), 303-318. DOI:10.1080/00220671.2011.627397

Zumbach, J., Schönemann, J., i Reimann, P. (2005). Analyzing and supporting collaboration in cooperative computer-mediated communication. Conference: The Next 10 Years! Proceedings of the 2005 Conference on Computer Support for Collaborative Learning, CSCL '05, Taipei, Taiwan, May 30 - June 4, 2005. DOI:10.3115/1149293.1149393

V. ANNEXOS

9. Annexos

Annex A. Material escrit específic per a la formació de les estratègies treballades: planificació, formulació de preguntes, oferiment de pistes i exemples i revisió

Annex B. Guions i vídeos explicatius de les estratègies treballades: planificació, formulació de preguntes, oferiment de pistes i exemples i revisió

Annex C. Exemples de la pauta d'autoavaluació ajustada del treball de les parelles (adaptada de Flores et al., 2016)

Annex D. Prova individual de resolució de problemes matemàtics inicials i finals (Flores et al., 2016)

Annex E. Rúbrica d'avaluació de la prova individual de resolució de problemes matemàtics (Flores et al., 2016)

Annex F. Exemple d'enunciats de la *bateria de proves de raonament matemàtic* (Elosua i Almeida, 2016)

Annex G. Qüestionari d'autoconcepte matemàtic (Campit i Garin, 2017)

Annex H. Guió entrevistes en profunditat (docents i alumnat)

Annex I. Proposta de guia d'ús per a docents de l'*estratègia de revisió*

9. Annexos

Annex A. Material escrit específic per a la formació de les estratègies treballades: planificació, formulació de preguntes, oferiment de pistes i exemples i revisió

- Estratègia de planificació

1. La planificació
Per a resoldre el problema els passos que hem de seguir són…
La informació clau o més important del problema és…
La primera dada que haurem d'utilitzar és… i la segona… i la tercera…
Crec que aquesta part del problema ens permetrà arribar a…
Quin creus que pot ser el resultat del problema?
Quines diferents opcions de resolució pot tenir el problema?

- Estratègia de formulació de preguntes

2. La formulació de preguntes
A què creus que ens ajudarà la planificació feta?
Creus que és correcte el que hem fet fins ara?
Hauríem de modificar algun pas seguit?
Podrem arribar a la resolució que havíem previst?
Quins passos és important que repassem?
Quines diferents opcions de resolució pot tenir el problema?

- Estratègia d'oferiment de pistes i exemples

3. L'oferiment de pistes i exemples
Pensa si hi ha altres maneres per arribar a aquest pas...
Reflexiona sobre els passos seguits... hi ha alguna cosa que ens ha passat per alt?
Estàs segur/a que és així? O potser seria millor...
Mira't bé aquesta operació... segur que és correcte del tot?
Pensa amb una situació semblant al plantejament del problema...
Imagina't que... què faries?

- Estratègia de revisió

4. La revisió
Els passos que hem seguit fins ara són... i ens han permès saber...
Pensem que els moments del procés de resolució que seria necessari repassar són...
Hem fet una bona planificació perquè ens ha permès...
El resultat obtingut concorda amb allò que havíem planificat?
Allò que més ens ha ajudat de la planificació és... i el que menys és...
El que podríem canviar o millorar dels passos seguits és...

Annex B. Guions i vídeos explicatius de les estratègies treballades: planificació, formulació de preguntes, oferiment de pistes i exemples i revisió

Càpsula 1: La planificació

L'explicació de l'estratègia està dividida en tres parts:

1. Per a què serveix? (utilitat).
2. Quins passos heu de seguir? (passos).
3. Quines orientacions us poden ser útils? (orientacions).

1. Per a què serveix?

    - Per decidir conjuntament què haureu de fer per a resoldre el problema i per **posar-vos d'acord amb els passos a seguir tutor/a i tutorat/da.**
    - Per **seguir cada un dels passos que hàgiu acordat de manera ordenada.** Així no us en deixeu cap, cometeu menys errors i arribeu a la resolució del problema d'una manera més senzilla.

2. Quins passos heu de seguir?

- Pensar com resoldríeu el problema i entre els dos membres de la parella decidir els **passos concrets** que seguireu per a resoldre'l. Primer ho podeu dir oralment per a començar a fer-vos-en una idea general.
- **Posar per escrit** mitjançant un petit guió, un esquema, un dibuix o de manera gràfica els passos que haureu de seguir i que, abans, ja heu parlat amb la parella i ja heu arribat a un acord.

3. Quines orientacions us poden ser útils?

- **Passos molt ben detallats**: incloent-hi les operacions que fareu i preveient on us podreu encallar o tenir més dificultats.
- **Posar-vos d'acord amb la parella:** si durant la planificació ja us heu posat d'acord, us serà molt més fàcil treballar conjuntament al llarg de tot el procés.

Vídeo:https://drive.google.com/file/d/1OSWPW0tBuF35Ue5wTtqvrwC1IhYCwWAV/view?usp=sharing

Càpsula 2: Formulació de preguntes

L'explicació de l'estratègia està dividida en tres parts:

1. Per a què serveix? (utilitat).
2. Quins passos heu de seguir? (passos).
3. Quines orientacions us poden ser útils? (orientacions).

1. Per a què serveix?

- **Assegurar la comprensió:** per assegurar que heu entès el problema i poder aclarir allò que no hàgiu acabat d'entendre igual.
- **Ajudar a pensar:** garantir que no doneu respostes directes al company o companya.
- **Saber fer preguntes** sobre les situacions que us trobeu en el dia a dia.
- **Arribar a acords conjunts:** per ajudar-vos mútuament a pensar, reflexionar i arribar a decisions conjuntes.

2. Quins passos heu de seguir?

- **Escoltar les intervencions de la parella** molt atentament.
- **Pensar una estona en possibles preguntes** que podrien ajudar al company o companya entendre millor el pas concret del problema.
- **Formular les preguntes** i respondre-les.

3. Quines orientacions us poden ser útils?

- **Ajuda al company/a:** no li dieu la resposta directa sinó que l'ajudeu a poder-se expressar amb les seves pròpies paraules (a través de preguntes).
- **Pauses**: al llarg del procés de resolució per fer comprovacions de què s'ha fet i assegurar-vos que les dues persones de la parella heu entès el mateix.
- **Possibles preguntes**: has pensat en...?, recordes algun problema semblant...?, Recordes alguna situació semblant...?

Vídeo: https://drive.google.com/file/d/1ytvigWqokciSuHt8RQyzUva2gzGeaenA/view?usp=sharing

Càpsula 3: Oferiment de pistes i exemples

L’explicació de l’estratègia està dividida en tres parts:

1. Per a què serveix? (utilitat).
2. Quins passos heu de seguir? (passos).
3. Quines orientacions us poden ser útils? (orientacions).

1. Per a què serveix?

    - Identificar i **relacionar el què ja sabeu amb la nova situació que cal resoldre.**
    - Davant un dubte: per **ajudar a la parella a aprendre i pensar per sí mateixa.** És important, doncs, trobar maneres per **evitar donar una resposta de manera directa.**
    - Per a tenir un espai on **pensar les millors paraules per ajudar a la parella a raonar i millorar el procés de resolució.**

2. Quins passos heu de seguir?

- Identificar quin és **el dubte que té la parella sobre allò que s’està treballant.**
- Pensar en **situacions semblants** que s’hagin resolt en altres ocasions.
- Compartir amb el company/a tutor o tutorat **possibles maneres de resolució que s’han trobat en aquestes situacions.**

3. Quines orientacions us poden ser útils?

- **Compartir els dubtes o allò que no es veu clar** i pensar en: altres problemes/situacions que heu resolt que us ajudin a orientar el procés de resolució.
- **Reflexió sobre els passos seguits:** pensar si us ha passat alguna cosa per alt.
- **Partir sempre del que ja sabeu i anar fent petits passos,** pensant en veu alta i conjuntament**.**

Vídeo: https://drive.google.com/file/d/1FjxqM2eg_XNKR7mmxKc6-JcmmfX-LtQO/view?usp=sharing

Càpsula 4: Revisió

L'explicació de l'estratègia està dividida en tres parts:

1. Per a què serveix? (utilitat).
2. Quins passos heu de seguir? (passos).
3. Quines orientacions us poden ser útils? (orientacions).

1. Per a què serveix?

    - Per comprovar si la resposta **donada és possible (real), coherent i té sentit (dona resposta)** amb la situació plantejada.
    - Per comprovar si **tots els passos seguits són els que havíeu planificat o si heu comès algun error.**
    - Per detectar en quins **moments del procés de resolució és possible que hi hagi algun error.**

2. Quins passos heu de seguir?

- Anar comprovant, al llarg de tot el procés, **si els resultats parcials que aneu obtenint tenen sentit i són reals; o identificar si cal ajustar el procés de resolució planificat** (en cas que veieu que hi pot haver alguna altra manera més senzilla de resoldre'l).
- Veure si el **resultat final obtingut és lògic o no** tenint en compte el context del problema.
- Determinar si realment **s'ha arribat a la solució esperada** i si no, **trobar mecanismes** (revisar cada pas, des de la comprensió de la situació i el que es demana, fins al final) **per afrontar la correcció.**

3. Quines orientacions us poden ser útils?

- **Durant la resolució:** anar revisant quins passos aneu seguint i què us permeten saber.
- **Al final de la resolució:** plantejar-vos què podríeu canviar o millorar del procés seguit.

Vídeo: https://drive.google.com/file/d/1YrDdnqWXMQvjIBdMR-ut6fEHl5YM9sXA/view?usp=sharing

Annex C. Exemples de la pauta d'autoavaluació ajustada del treball de les parelles (adaptada de Flores et al., 2016)

- Exemple de CM

***(En)RAONEM EN PARELLA* – PAUTA D'AUTOAVALUACIÓ DE LA PARELLA**

Quinzena del ___________ al _______________ Mes ___________________
Alumne/a tutorat/da:____
Alumne/a tutor/a:____

Abans de començar. Tots dos…	NM	B
Pensem de què anirà el problema		
Resolució del problema. El tutor/a…	NM	B
Llegeix el problema		
Fa preguntes, dona pistes per ajudar el tutorat/da		
Anima al tutorat/da		
Explica com resoldria el problema i ho argumenta		
Ajuda al tutorat/da a buscar la manera de resoldre el problema per sí mateix		
Resolució del problema. El tutorat/da….	NM	B
Respon a les preguntes que se li fan		
Sap explicar el problema amb les seves paraules		
Pensa sobre la possible solució del problema. Subratlla les preguntes		
Explica com resoldria el problema i ho argumenta		
Fa un esquema, resumeix les dades i/o representa gràficament el problema		
Revisió final. Tots dos	NM	B
Revisem tots dos els resultats del problema i comprovem si hem seguit la planificació inicial i si les respostes són adequades i reals		
De l'estratègia de PLANIFICACIÓ. Tots dos	NM	B
Decidim conjuntament els passos a seguir per resoldre el problema i els escrivim a l'apartat corresponent		
Usem habitualment la planificació		
Planificar bé ens ajuda a millorar la resolució dels problemes		
Ens ajudem per millorar la planificació		
Què en penso de mi? Tutor/a...	NM	B
Em preparo a fons els fulls de problemes per a poder ajudar el meu company/a		
Em sento capaç d'afrontar els problemes de l'assignatura de matemàtiques		
Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats		
Què en penso de mi? Tutorat/da...	NM	B
M'implico en resoldre els problemes de matemàtiques		
Em sento capaç d'afrontar els problemes de l'assignatura de matemàtiques		
Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats		
Tots dos. Observacions (objectius per a la propera quinzena, reptes, problemes…)		

NM - Necessitem Millorar B - Bé

- Exemple d’ESO

***(En)RAONEM EN PARELLA* – PAUTA D’AUTOAVALUACIÓ DE LA PARELLA**

Quinzena del ___________ al ______________ Mes __________________

Alumne/a tutorat/da:____

Alumne/a tutor/a:____

Abans de començar. Tots dos…	NM	B
Explorem les característiques del problema		
Fem prediccions sobre els continguts		
Resolució del problema. El tutor/a…	**NM**	**B**
Llegeix el problema		
Fa preguntes, dona pistes per ajudar el tutorat/da		
Anima al tutorat/da		
Explica com resoldria el problema i ho argumenta		
Guia el procés de resolució sense dictar		
Resolució del problema. El tutorat/da….	**NM**	**B**
Respon a les preguntes que se li fan		
Sap explicar el problema amb les seves paraules		
Fa hipòtesis sobre la possible solució del problema. Subratlla les preguntes		
Explica com resoldria el problema i ho argumenta		
Fa un esquema, resumeix les dades i/o representa gràficament el problema		
Revisió final. Tots dos	**NM**	**B**
Revisem tots dos els resultats del problema i comprovem si hem seguit la planificació inicial i si les respostes són adequades i reals		
De l’estratègia de PLANIFICACIÓ. Tots dos	**NM**	**B**
Decidim conjuntament els passos a seguir per resoldre el problema i els escrivim a l’apartat corresponent		
Usem habitualment la planificació		
Planificar bé ens ajuda a millorar la resolució dels problemes		
Ens ajudem per millorar la planificació		
Què en penso de mi? Tutor/a...	**NM**	**B**
Em preparo a fons els fulls de problemes per a poder ajudar el meu company/a		
Em sento capaç d’afrontar els problemes de l’assignatura de matemàtiques		
Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats		
Què en penso de mi? Tutorat/da...	**NM**	**B**
M’implico en resoldre els problemes de matemàtiques		
Em sento capaç d’afrontar els problemes de l’assignatura de matemàtiques		
Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats		
Tots dos. Observacions (objectius per a la propera quinzena, reptes, problemes…)		

NM - Necessitem Millorar B - Bé

Annex D. Prova individual de resolució de problemes matemàtics inicials i finals (Flores et al., 2016)

- Prova inicial

ABANS DE COMENÇAR…

Has preparat mai tot sol una recepta de cuina?

Com vas fer el càlcul dels ingredients necessaris?

QUÈ ENS DIU EL PROBLEMA?

Espagueti a la carbonara!

Dissabte vindran a dinar uns amics a casa i els pares ens han dit que haurem de preparar un àpat entre tots. Hem decidit que cuinarem espagueti a la carbonara.
El primer que cal fer és anar a comprar els ingredients necessaris per a poder-los cuinar.
La recepta, per a quatre persones, és la següent:

- 400 g d'espaguetis
- 6 talls de *bacon*
- 200 ml de crema de llet
- Un ou
- 100g de formatge ratllat emmental
- 750 ml d'aigua

Som 8 persones i cal calcular les quantitats necessàries de cada ingredient per poder elaborar la recepta. Fes la llista de la compra d'ingredients amb les quantitats necessàries de cada un.
Creus que caldrà canviar el temps de cocció? I les quantitats d'aigua?

DADES

PLANIFICACIÓ

RESOLUCIÓ

ELABORACIÓ DE RESPOSTES

REVISIÓ FINAL

Abans d'entregar el full, revisa els diferents apartats i comprova que has escrit correctament i de forma entenedora tot el procés que has seguit fins a arribar a la resposta final.

V. ANNEXOS

- Prova final

ABANS DE COMENÇAR…

Has consultat alguna vegada les previsions meteorològiques?

L'encerten els meteoròlegs? Sempre? Mai? De vegades?

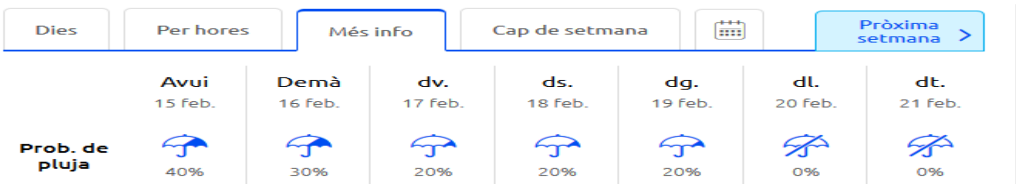
QUÈ ENS DIU EL PROBLEMA?

Quin temps farà?

Imatge del radar.

Mirem la previsió de les properes setmanes i veiem que cada dia ens indica quin temps farà. Què creus que vol dir aquesta dada? De què et pot servir?

Mira la previsió de pluja de la ciutat de Barcelona per a aquests dies:



Si haguessis de planificar una visita de dos dies (una nit) a la ciutat de Barcelona amb aquesta previsió de pluges per a la setmana que hi vols anar, quins dies triaries? Explica el perquè.

DADES

PLANIFICACIÓ

RESOLUCIÓ

ELABORACIÓ DE RESPOSTES

REVISIÓ FINAL

Abans d'entregar el full, revisa els diferents apartats i comprova que has escrit correctament i de forma entenedora tot el procés que has seguit fins a arribar a la resposta final.

Annex E. Rúbrica d'avaluació de la prova individual de resolució de problemes matemàtics (Flores et al., 2016)

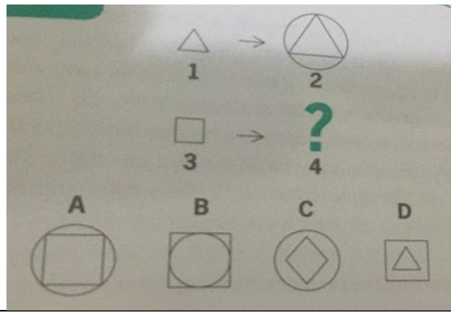
(En)RAONEM EN PARELLA **- RÚBRICA:** RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MATEMÀTICS. GRAI-UAB

		NIVELL 3	**NIVELL 2**	**NIVELL 1**	**NIVELL 0**
DADES	Analitza la informació referent a la situació del problema	Identifica la qüestió i discrimina adequadament les dades rellevants de les irrellevants.	Identifica la qüestió, discrimina amb alguna dificultat les dades rellevants de les irrellevants.	Identifica la qüestió, però comet algun error a l'hora d'assenyalar les dades rellevants.	Necessita l'ajut per continuar, no diferencia les dades necessàries de les irrellevants.
		Expressa les dades de forma sintètica, clara i coherent, explicant unitats i conceptes al qual fan referència.	Explicita la unitat i el concepte al qual fan referència les dades. Però la síntesi és poc clara i/o coherent.	Omet o s'equivoca en el concepte o en la unitat d'alguna dada.	Necessita ajuda, no reconeix els conceptes ni les unitats de les dades.
PLANIFICACIÓ	Representa la situació del problema	Representa visualment la situació de manera que s'identifiquen clarament la incògnita, les dades i les seves relacions, i es poden inferir clarament les accions de resolució.	Representa visualment la situació de manera que es poden apreciar clarament la incògnita i les dades i es poden inferir algunes relacions.	Representa visualment les dades. Potser també la incògnita, però no es mostren clarament les seves relacions.	La representació visual és del tot arbitrària o incorrecta. Utilitza dades irrellevants, o obvia clarament alguna dada rellevant.
RESOLUCIÓ	Desenvolupa estratègies de resolució	Explicita una estratègia de resolució pertinent de qualsevol tipus: matemàtica, manipulativa, gràfica, verbal o escrita.	Explicita una estratègia de resolució adequada qualsevol tipus: matemàtica, manipulativa, gràfica, verbal o escrita; amb poca concreció o amb algun error.	Explica parcialment una estratègia de resolució que s'apropa a la pertinença, però no acaba de ser correcta.	No explicita cap estratègia de resolució, o en fa constar una que és del tot arbitrària o allunyada de la correcta.
ELABORACIÓ DE RESPOSTES	Comunica la solució correcta	Comunica i argumenta la solució adequadament, acompanyada de les unitats i del concepte a què fa referència el context del problema.	Comunica la solució de forma incompleta: o bé falta la magnitud, o bé el concepte; o no està suficientment argumentada respecte de la demanda.	Comunica la solució de manera descontextualitzada, sense argumentar-la o fent referència a un concepte o magnitud erronis.	No comunica cap solució o n'expressa una que resulta del tot arbitrària, allunyada de la demanda realitzada.

	Justifica i argumenta les estratègies utilitzades i les respostes donades	Argumenta i justifica adequadament les estratègies emprades i la pertinència de les respostes donades d'acord amb el context.	Justifica les estratègies utilitzades i les respostes donades però de manera confosa o incorrecta.	Justifica el procés que ha utilitzat, explicant com ha resolt l'operació o operacions que ha fet.	No sap explicar el que ha fet ni argumentar les respostes. Necessita l'ajut d'una persona més experta.

Adaptació de l'Escola Pública BANÚS (2012)

Annex F. Exemple d'enunciats de la *bateria de proves de raonament matemàtic* (Elosua i Almeida, 2016)

Raonament abstracte (Ra)	En els següents exercicis, la figura 1 es transforma convertint-se en la figura 2. Hauràs de fer el mateix amb la figura 3 i veure quin dibuix (A, B, C o D) encaixa en el seu lloc. 
Raonament verbal (Rv)	Aquesta prova està formada per frases a les quals els falta l'última paraula. Escull l'opció correcta per a completar les frases. Observa el següent exemple: DIA és a NIT com PETIT és a... A. LLUM B. GRAN C. FORT D. NEN
Raonament numèric (Rn)	Aquesta prova consisteix a continuar una sèrie de nombres a la qual li falten els dos últims valors. En cada sèrie, els nombres segueixen una regla determinada. En primer lloc, has de descobrir quina és aquesta regla. Seguidament, has d'esbrinar els dos nombres que continuen la sèrie. Observa el següent exemple: 1,3,5,7,9,?,? Quins dos nombres són els que segueixen la seqüència en els dos llocs marcats amb el signe interrogant? Aquests nombres han d'aparèixer escrits en l'ordre correcte i han d'estar separats per una coma (,).
Raonament pràctic (Rp)	En aquesta prova es plantejaran una sèrie de problemes que has de resoldre. Si ho necessites pots usar un full a part per fer alguns càlculs o anotacions. Fixa't en l'exemple: La Joana i la Paula són dues amigues. Una té un gos i l'altra, un gat. El millor amic de la Paula és el seu gos. P1. Quin animal té la Joana? A. Un gos B. Un gat P2. Quin animal té la Paula? A. Un gos B. Un gat

Annex G. Qüestionari d'autoconcepte matemàtic (Campit i Garin, 2017)

Les matemàtiques estan molt presents en la nostra vida. Moltes activitats del dia a dia ens plantegen problemes matemàtics als quals hem de donar respostes reflexionades per poder prendre la millor decisió en cada situació. Pensa en els moments en què tu t'enfrontes a problemes matemàtics i respon. Fes-ho lliurement i de manera sincera, no hi ha cap resposta equivocada.

1. Informació bàsica de l'alumnat.

Nom i cognoms	
Escola/Institut i població	
Curs	
Quin Rol faig?	
Prova inicial o final?	

2. Marca amb una creu o un tic aquella opció amb la qual et sentis més identificat o identificada.

Ítems	Mai	A vegades	Quasi sempre	Sempre
1. Les matemàtiques són un repte per a mi.				
2. He de treballar molt per poder aprendre matemàtiques.				
3. M'ho passo bé fent matemàtiques.				
4. Crec que les matemàtiques són molt interessants.				
5. Em preparo a fons les proves de matemàtiques.				
6. Trec bones notes a matemàtiques.				
7. Em sento capaç d'afrontar l'assignatura de matemàtiques.				
8. Em sento a gust quan aprenc matemàtiques.				
9. Sé que puc fer-ho bé a matemàtiques.				
10. Em sento segur/a a la classe de matemàtiques.				
11. Crec que tinc facilitat a l'àrea de matemàtiques.				
12. Estic més content/a a la classe de matemàtiques que a qualsevol altra assignatura.				
13. Puc resoldre problemes matemàtics difícils.				
14. Voldria aprendre més matemàtiques que les que fem a l'escola.				
15. Puc resoldre problemes matemàtics sense massa dificultats.				

Annex H. Guió entrevistes en profunditat (docents i alumnat)

1. Als docents:

Preguntes prèvies	
Centre	
Tipus de tutoria	
Nombre de sessions de desenvolupament del programa	

Bloc 1: El programa.

- Com valores l'experiència i el procés d'aprenentatge de l'alumnat?
- Creus que el material proposat ha estat útil? Has fet adaptacions? Quines? De quina manera has atès a la diversitat?
- Com has fet les parelles? Com has organitzat les sessions?
- Quins suggeriments faries per millorar el programa?

Bloc 2: La resolució de problemes matemàtics.

- Creus que la resolució de problemes matemàtics en parella (usant la tutoria entre iguals) pot contribuir a la millora d'aquesta competència/dimensió més que si ho fessin individualment? Per què?
- En el cas que diguin que sí. Quins aspectes de la metodologia de tutoria entre iguals creus que contribueixen a la millora? Els podries enumerar?
- Creus que les interaccions han estat enriquidores? Què ha fet que ho siguin?
- Els fulls d'activitats ajuden a millorar la resolució de problemes? En quines parts has notat més millores?
- Creus que els alumnes han millorat en l'estratègia de planificació, formulació de preguntes, donar pistes i revisió (preguntar una per una)? Com ho has pogut veure?
- Podries explicar algunes experiències que mostrin els beneficis de la tutoria entre iguals pel procés d'aprenentatge de l'alumnat (en l'àmbit de la competència matemàtica)?

Bloc 3: El discurs matemàtic i com la tutoria entre iguals i el treball explícit d'estratègies específiques ajuda al seu desenvolupament.

Usar la tutoria entre iguals (o altres mètodes d'aprenentatge cooperatiu) de manera estratègica (i ajudar l'alumnat a activar estratègies explícites de resolució) pot contribuir a desenvolupar la seva capacitat discursiva: més fluïdesa a usar termes matemàtics, més capacitat d'interacció a l'hora de parlar sobre matemàtiques, entre altres.

En relació amb aquesta informació:

- Hi estàs d'acord?
- Has vist una millora en el discurs matemàtic dels alumnes en la teva experiència a les sessions del programa?
- Què t'ha permès veure aquesta millora?
- Podries posar-ne exemples?
- Creus que les estratègies que hem anat treballant han contribuït al desenvolupament d'aquest discurs? Per què?

Bloc 4: L'autoconcepte i com la tutoria entre iguals i la capacitat de reflexió sobre la seva evolució com a aprenents al llarg del procés ajuden a la seva millora.

Sabem que usar la tutoria entre iguals (o altres mètodes d'aprenentatge cooperatiu) de manera estratègica i funcional (i usar instruments o activar estratègies perquè els alumnes siguin cada vegada més conscients de com són ells com a aprenents i del seu procés d'aprenentatge) pot contribuir a millorar el seu autoconcepte: se senten més segurs i amb més capacitat, són més capaços de reflexionar sobre el seu procés d'aprenentatge, són més crítics en les seves actuacions i les dels companys i companyes, entre altres elements.

En relació amb aquesta informació:

- Hi estàs d'acord?
- Ho has tingut en compte al llarg del programa? Has fet alguna acció per millorar l'autoconcepte amb algun alumne, parelles o classe?
- Has vist millores en l'autoconcepte matemàtic de l'alumnat en la teva experiència a les sessions del programa?
- Què t'ha permès veure aquesta millora?
- Podries posar exemples?

2. Als alumnes.

Preguntes prèvies	
Centre	
Edat	
Tipus de tutoria	
Rol	

Bloc 1: El programa.

- Us han agradat les sessions d'*(En)Raonem en parella*?
- Què creieu que heu après al llarg de les sessions? Quins progressos creieu que heu fet?
- Creieu que els fulls d'activitats i el guió de rols han estat útils pel vostre treball? Com ho heu fet servir?
- Com t'has sentit en el teu rol com a tutor? I com has vist a la teva parella?
- Com t'has sentit en el teu rol com a tutorat? I com has vist a la teva parella?
- Creieu que heu anat millorant en resoldre els problemes que us hem proposat?
- Us ha estat útil utilitzar el material de suport que heu tingut?
- Què canviaríeu del programa?

Bloc 2: La resolució de problemes matemàtics.

- Us heu sentit còmodes treballant amb la parella?
- Creus que t'ha ajudat a millorar en la resolució de problemes? I tu l'has ajudat?
- Heu notat millores entre com resolíeu els problemes al principi i al final? Cada cop us heu sabut ajudar millor?

Bloc 3: El discurs matemàtic i com la tutoria entre iguals i el treball explícit d'estratègies específiques ajuda al seu desenvolupament.

- Creieu que parleu més i millor sobre matemàtiques ara que al principi?
- Com ha estat l'evolució? La podríeu explicar?
- En quins moments heu sentit que hi havia una millora en la manera de parlar amb el company o companya?
- El treball de les diferents estratègies (planificació, fer preguntes, donar pistes i revisió – preguntar una per una) us ha estat útil per a poder ajudar a la parella i millorar en resoldre els problemes?

Bloc 4: L'autoconcepte i com la tutoria entre iguals i la capacitat de reflexió sobre la seva evolució com a aprenents al llarg del procés ajuden a la seva millora.

- Creieu que us sentiu millor fent matemàtiques i problemes ara que al principi?
- Com ha canviat? Us sentiu més segurs? Us agrada més? Us costa menys?
- Creieu que treballar en parelles us ajuda a sentir-vos més preparats per afrontar-vos als problemes?
- Les pautes d'autoavaluació i reflexionar sobre com aneu aprenent i com us sentiu us ha ajudat a anar millorant els vostres sentiments sobre la resolució de problemes?
- Creieu que heu ajudat la vostra parella a sentir-se cada vegada millor resolent els problemes?

Annex I. Proposta de guia d'ús per a docents de l'estratègia de revisió