



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Estudio de la Modelización Matemática desde un Enfoque Semiótico-Cognitivo e Implicaciones en la Formación de Profesores

Carlos Andrés Ledezma Araya



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- NoComercial – Compartir Igual 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - NoComercial – Compartir Igual 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0. Spain License.**

TESIS DOCTORAL

Estudio de la Modelización Matemática desde
un Enfoque Semiótico-Cognitivo
e Implicaciones en la Formación de Profesores

*A Study on Mathematical Modelling from
a Semiotic-Cognitive Approach
and Implications on Teacher Education*

Carlos Ledezma



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

2024

Estudio de la Modelización Matemática
desde un Enfoque Semiótico-Cognitivo e
Implicaciones en la Formación de Profesores

*A Study on Mathematical Modelling from
a Semiotic-Cognitive Approach
and Implications on Teacher Education*

Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las
Lenguas, las Artes, y las Humanidades

Línea de investigación en Didáctica de las Ciencias
Experimentales y de la Matemática

Facultad de Educación

Tesis para optar al grado de Doctor por la Universidad de Barcelona

Doctorando: Carlos Ledezma

Director y Tutor: Vicenç Font

Reconocimientos/Acknowledgements

Este trabajo se desarrolló dentro de los siguientes proyectos de investigación:

This work was conducted within the following research projects:

(a) N.º 72200458 (financiado por/funded by ANID/PFCHA, Chile)

(b) PGC2018-098603-B-I00 (financiado por/funded by MCIU/AEI/FEDER, UE)

(c) PID2021-127104NB-I00 (financiado por/funded by

MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por/and by “FEDER Una manera de hacer Europa/ERDF A way of making Europe”).



Enunciado Ético/Ethical Statement

🇪🇸 Esta investigación doctoral se desarrolló siguiendo los protocolos establecidos por el Código Ético de Integridad y Buenas Prácticas de la Universidad de Barcelona (disponible en <http://hdl.handle.net/2445/137899>).

🇬🇧 This doctoral research was conducted by following the protocols established by the Code of Ethics on Integrity and Best Practices provided by the University of Barcelona (available at <http://hdl.handle.net/2445/137937>).

Nota de Lectura/Reading Note

🇪🇸 Debido a su presentación en dos idiomas, esta tesis doctoral se puede leer secuencialmente en español desde el Resumen (véase una explicación sobre el idioma de cada capítulo en la sección 1.3).

🇬🇧 Due to its presentation in two languages, English readers are recommended that, after the Abstract, follow the reading sequence of this doctoral thesis as follows: Annex 1 → Annex 2 → Chapters 3–7 → Annex 7 (see an explanation on the language of each chapter in section A1.3).

Índice de Contenidos –

Index of Contents

Listado de Abreviaturas – List of Abbreviations	xi
En Idioma Español	xi
In English Language.....	xi
Índice de Figuras – Index of Figures	xiii
En Idioma Español	xiii
In English Language.....	xiv
Índice de Tablas – Index of Tables	xvii
En Idioma Español	xvii
In English Language.....	xvii
Resumen	xxi
Abstract	xxiii
Capítulo 1: Introducción – Chapter 1: Introduction	1
1.1. Motivación del Estudio.....	1
1.1.1. Primeros acercamientos a la modelización matemática	1
1.1.2. Visión en retrospectiva	2
1.1.3. Repercusiones en la investigación doctoral.....	3
1.2. Antecedentes de la Investigación	4
1.2.1. Evolución histórica de la investigación en modelización.....	4
1.2.1.1. Primera mitad del siglo XX	5
1.2.1.2. Segunda mitad del siglo XX	5
1.2.1.3. Siglo XXI	11
1.2.2. Clarificaciones terminológicas	15
1.2.2.1. Problema	15
1.2.2.2. Resolución de problemas	15
1.2.2.3. Modelización.....	16
1.2.2.4. Problema de modelización	17

1.2.2.5. Modelo matemático.....	19
1.2.2.6. Ciclo de modelización.....	22
1.2.2.7. Competencia (o competencias) en modelización.....	31
1.2.2.8. Perspectivas de modelización	36
1.2.3. Investigaciones en modelización matemática	48
1.2.3.1. Reflexiones sobre los ciclos de modelización.....	49
1.2.3.2. Modelización en la educación de profesores	53
1.2.3.3. Competencias profesionales y procesos matemáticos en la modelización.....	64
1.3. Estructura de la Tesis Doctoral.....	68
1.3.1. Capítulos e idiomas	68
1.3.2. Nota terminológica	70
Capítulo 2: Problema, Preguntas, y Objetivos de Investigación – Chapter 2:	
Research Problem, Questions, and Objectives	73
2.1. Planteamiento del Problema de Investigación.....	73
2.2. Primera Pregunta y Objetivo de Investigación.....	73
2.3. Segunda Pregunta y Objetivo de Investigación.....	75
2.4. Tercera Pregunta y Objetivo de Investigación	76
2.5. Cuarta Pregunta y Objetivo de Investigación	77
2.6. Síntesis de Preguntas y Objetivos de Investigación	78
Capítulo 3: Primer Artículo – Chapter 3: First Article.....	81
3.1. Abstract and Keywords – Resumen y Palabras Clave.....	83
3.1.1. English language	83
3.1.2. Idioma español.....	83
3.2. Introduction	84
3.3. Theoretical Framework	86
3.3.1. Mathematical modelling.....	86
3.3.2. Example of a modelling problem and analysis of its solving using the MMCCP.....	88
3.3.3. Onto-Semiotic Approach.....	89
3.3.4. Example of a modelling problem and analysis of its solving using the OSA	91

3.4. Methodology.....	95
3.4.1. Networking of Theories.....	96
3.4.2. Implementation stage.....	97
3.5. Results	98
3.5.1. Concordances and differences between theoretical frameworks.....	98
3.5.1.1. Specific cognitive versus broad approaches	98
3.5.1.2. Concordance of principles	98
3.5.1.3. On the modelling process.....	100
3.5.1.4. Concordance of methods.....	100
3.5.1.5. Concordance of research questions.....	100
3.5.2. Analysis of the modelling processes using both frameworks	101
3.5.2.1. Mathematical model: Estimation of measurements (type-A strategy)	102
3.5.2.2. Mathematical model: Trigonometric ratios (type-B strategy)	108
3.5.3. Comments on the implementation stage.....	111
3.5.4. Theoretical discussion	113
3.6. Conclusions	115
3.7. Commentary on the First Article	117
Capítulo 4: Segundo Artículo – Chapter 4: Second Article	121
4.1. Abstract and Keywords – Resumen y Palabras Clave.....	123
4.1.1. English language	123
4.1.2. Idioma español.....	123
4.2. Introduction	124
4.3. Theoretical Framework	126
4.3.1. Mathematical modelling.....	126
4.3.2. Mathematical modelling in teacher education.....	128
4.3.3. Didactic suitability criteria	129
4.4. Methodological Aspects	131
4.4.1. Research context.....	132
4.4.2. Structure of a master’s degree final project.....	133
4.4.3. Content analysis.....	133
4.5. Presentation and Analysis of Results	137

4.5.1. Classification of the MFPs according to the levels of reference to modelling	137
4.5.2. Classification of the comments of the MFPs according to the DSC components	139
4.5.3. On the MFPs with references to mathematical modelling	139
4.5.4. On the evaluative comments about mathematical modelling.....	141
4.6. Discussion and Conclusions	145
4.7. Commentary on the Second Article.....	149
Data availability statement	151
Capítulo 5: Tercer Artículo – Chapter 5: Third Article.....	153
5.1. Resumen y Palabras Clave – Abstract and Keywords.....	155
5.1.1. Idioma español.....	155
5.1.2. English language	155
5.2. Introducción.....	156
5.3. Marco Teórico	158
5.3.1. Modelización matemática.....	158
5.3.2. Modelización matemática en la educación de profesores	160
5.3.3. Criterios de idoneidad didáctica	161
5.4. Metodología.....	164
5.4.1. Contexto de la investigación	164
5.4.2. Estructura de un trabajo final de máster	165
5.4.3. Análisis de contenido	166
5.5. Presentación y Análisis de Resultados	170
5.5.1. Clasificación de los TFMs según los niveles de referencia a la modelización	170
5.5.2. Clasificación de los comentarios de los TFMs según los componentes de los CID.....	171
5.5.3. Sobre los TFMs con referencias a la modelización matemática	172
5.5.4. Sobre los comentarios valorativos acerca de la modelización matemática .	174
5.6. Discusión y Conclusiones.....	180
5.7. Comentario sobre el Tercer Artículo	184
Enunciado de disponibilidad de datos	186

Capítulo 6: Capítulo de Libro – Chapter 6: Book Chapter.....	187
6.1. Abstract – Resumen.....	189
6.1.1. English language	189
6.1.2. Idioma español.....	189
6.2. Introduction	189
6.3. Theoretical References	191
6.3.1. Characteristics of a modelling problem.....	191
6.3.2. Classification of modelling tasks.....	191
6.4. Methodological Aspects	192
6.4.1. Research context.....	193
6.4.2. Selection, characterisation, and classification of tasks.....	194
6.5. Presentation and Analysis of Results	195
6.5.1. Modelling problems.....	195
6.5.2. Other types of tasks	196
6.5.3. Classification of the tasks.....	198
6.6. Discussion and Conclusions	198
6.7. Commentary on the Book Chapter	200
Data availability statement	202
Capítulo 7: Cuarto Artículo – Chapter 7: Fourth Article	203
7.1. Extended Abstract and Keywords – Resumen Ampliado y Palabras Clave.....	205
7.1.1. English language	205
7.1.2. Idioma español.....	206
7.2. Introduction	207
7.3. Theoretical Framework	208
7.3.1. Onto-Semiotic Approach.....	208
7.3.2. Extended Theory of Mathematical Connections	211
7.3.3. Mathematical Modelling Process	212
7.3.4. ETMC-OSA and MOD-OSA articulations	213
7.3.5. Research Objectives	214
7.4. Methodology.....	214
7.5. Analysis of the Expert Solving of a Modelling Problem	214
7.5.1. Mathematical narrative.....	215

7.5.2. Mathematical practices	217
7.5.3. Epistemic configuration of primary objects	217
7.5.4. Plot of semiotic functions	218
7.5.5. Mathematical processes.....	220
7.5.6. Mathematical connections	220
7.5.7. Relation with the MMCCP	221
7.6. Discussion of Results	231
7.6.1. On the semiotic functions.....	231
7.6.2. On the mathematical connections.....	231
7.6.3. On the modelling cycle.....	234
7.7. Conclusions	234
7.8. Commentary on the Fourth Article.....	236
Capítulo 8: Conclusiones – Chapter 8: Conclusions	239
8.1. Propuesta de Refinamiento del Ciclo de Modelización.....	239
8.1.1. Presentación y descripción de un ciclo de modelización	240
8.1.2. Representaciones en el CMMSC.....	242
8.1.3. Implicaciones didácticas.....	243
8.2. Presencia de la Modelización en las Propuestas Didácticas de los Futuros	
Profesores	244
8.2.1. Sobre los criterios y componentes de los CID priorizados en la reflexión .	244
8.2.2. Sobre los contenidos matemáticos en que se implementó la modelización	246
8.2.3. Conclusiones sobre las comparaciones	246
8.3. Limitaciones de esta Investigación Doctoral.....	247
8.4. Futuras Proyecciones de esta Investigación Doctoral	248
8.4.1. Futuros desarrollos del CMMSC y del Modelo de Análisis Semiótico- Cognitivo.....	249
8.4.2. Futuros desarrollos de la reflexión y educación docente en modelización .	249
8.4.3. Otras proyecciones	250
8.5. Publicaciones Derivadas de la Tesis Doctoral.....	251
8.5.1. Artículos	251
8.5.2. Actas de congresos	252
8.5.3. Seminarios, conferencias, y otras instancias de divulgación.....	253

Referencias – References.....	255
Índice de Anexos – Index of Annexes	305
Annex 1: English Translation for Chapter 1 – Introduction.....	309
Annex 2: English Translation for Chapter 2 – Research Problem, Questions, and Objectives.....	375
Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo – Annex 3: Database of MFPs from the Second Article	383
Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo – Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article.....	391
Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo – Annex 5: Database of MFPs from the Third Article	503
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo – Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article.....	511
Annex 7: English Translation for Chapter 8 – Conclusions.....	595

Listado de Abreviaturas –

List of Abbreviations

En Idioma Español

- ABP : Aprendizaje Basado en Problemas.
- APOE : Acción-Proceso-Objeto-Esquema (referido a la Teoría APOE).
- CID : Criterios de Idoneidad Didáctica.
- CCDM : Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (referido al Modelo CCDM).
- CMMPC : Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva.
- CMMSC : Ciclo de Modelización Matemática Semiótico-Cognitivo.
- EOS : Enfoque Onto-Semiótico.
- ESO : Educación Secundaria Obligatoria.
- ETM : Espacios de Trabajo Matemático.
- TAC : Tecnologías del Aprendizaje y la Comunicación.
- TIC : Tecnologías de la Información y la Comunicación.
- TFM : Trabajo Final de Máster (pluralizado como TFMs).
- UD : Unidad Didáctica.

In English Language

- APOS : Action-Process-Object-Schema (referred to APOS Theory).
- CSE : Compulsory Secondary Education.
- DMKC : Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (referred to DMKC Model).
- DSC : Didactic Suitability Criteria.
- DU : Didactic Unit.
- ETMC : Extended Theory of Mathematical Connections.
- ICMI : International Commission on Mathematical Instruction.
- ICT : Information and Technology Tools.
- ICTMA : Internacional Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.
- LEMA : Learning and Education in and through Modelling and Applications.

- LKT : Learning and Knowledge Technologies.
- MEAs : Model-Eliciting Activities.
- MFP : Master's Degree Final Project (pluralised as MFPs).
- MKT : Mathematical Knowledge for Teaching.
- MMCCP : Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective.
- MWS : Mathematical Working Spaces.
- NCTM : National Council of Teachers of Mathematics.
- OECD : Organisation for Economic Co-Operation and Development.
- OSA : Onto-Semiotic Approach.
- PCK : Pedagogical Content Knowledge.
- PK : (General) Pedagogical Knowledge.
- PISA : Programme for International Student Assessment.
- PBL : Problem-Based Learning.
- SCMMC : Semiotic-Cognitive Mathematical Modelling Cycle.
- SF : Semiotic Function (pluralised as SFs).
- STE(A)M : Science, Technology, Engineering, (Arts) and Mathematics.

Índice de Figuras –

Index of Figures

En Idioma Español

Figura 1. Representación de los procesos aplicaciones matemáticas y modelización. ..	16
Figura 2. Problema Pan de Azúcar.	18
Figura 3. Clasificación de modelos matemáticos.	21
Figura 4. Ciclo de las matemáticas aplicadas.	23
Figura 5. Ciclo para abordar matemáticamente un problema real.	24
Figura 6. Ciclo de modelización de Blum/Kaiser-Messmer.	26
Figura 7. (a) Diagrama esquemático del proceso de modelización; (b) una visión elaborada del proceso de modelización.	27
Figura 8. Modelo gráfico de un proceso de modelización.	29
Figura 9. Ciclos de modelización derivados de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer.	30
Figura 10. Ciclo de modelización ampliado con herramientas digitales.	31
Figura 11. Diagrama del proceso de modelización propuesto por Zbiek y Conner (2006).	44
Figura 12. Ciclo de modelización propuesto por Lesh y Doerr (2003b).	44
Figura 13. Diagrama del proceso de modelización propuesto por Galbraith y Stillman (2006).	49
Figura 14. Uso de herramientas digitales en el ciclo de modelización.	51
Figura 15. (a) Logo de la <i>Revista BOLEMA</i> ; (b) primera página del artículo.	154
Figura 16. Ciclo de modelización matemática.	159
Figura 17. Representación de los Criterios de Idoneidad Didáctica.	185
Figura 18. Ciclo de modelización matemática semiótico-cognitivo.	241
Figura 19. Representaciones en el CMMSC.	242
Figura 20. Comparación de criterios y componentes de los CID en ambos estudios. ...	245
Figura 21. Comparación de los contenidos matemáticos que implementaron modelización en ambos estudios.	246

In English Language

Figure 1. (a) <i>Mathematics Education Research Journal</i> cover; (b) first page of the article.	82
Figure 2. Mathematical modelling cycle from a cognitive perspective.	87
Figure 3. The <i>Bales of Straw Problem</i>	88
Figure 4. Representations of the situation through (a) a diagram of rows, and (b) with the lengths of the diameters of each row.	92
Figure 5. Production of the solving procedure in three steps (a), (b), and (c) using trigonometric ratios.	108
Figure 6. A landscape of strategies for connecting theoretical approaches.....	118
Figure 7. The iceberg metaphor for modelling.....	119
Figure 8. (a) <i>International Journal of Science and Mathematics Education</i> cover; (b) first page of the article.....	122
Figure 9. Mathematical modelling cycle.	127
Figure 10. Modelling problem implemented in the didactic unit of MFP #024.....	145
Figure 11. Representation of the Didactic Suitability Criteria.	150
Figure 12. (a) <i>Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times</i> cover; (b) first page of the author proof.	188
Figure 13. (a) <i>AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática</i> logo; (b) first page of the article.	204
Figure 14. Onto-semiotic representation of mathematical knowledge.....	210
Figure 15. Mathematical modelling cycle from a cognitive perspective.	213
Figure 16. Bales of Straw Problem.....	215
Figure 17. (a) Initial sketch, (b) comparison between the height of the woman and of one bale of straw, (c) real model, and (d) mathematical model.	216
Figure 18. Plot of semiotic functions.	219
Figure 19. Proposal of a typology for mathematical connections.	236
Figure 20. The iceberg metaphor for mathematical modelling and connections.	238
Figure 21. Representation of the processes of mathematical applications and modelling.	323
Figure 22. Sugarloaf Problem.....	324
Figure 23. Classification of mathematical models.	328

Figure 24. Cycle of applied mathematics.	329
Figure 25. Cycle to tackle a real problem mathematically.	331
Figure 26. Modelling cycle by Blum/Kaiser-Messmer.	332
Figure 27. (a) Schematic diagram of the modelling process; (b) an elaborated view of the modelling process.	333
Figure 28. A graphic model of a modelling process.	335
Figure 29. Modelling cycles derived from the Blum/Kaiser-Messmer’s proposal.	336
Figure 30. Modelling cycle expanded with digital tools.	337
Figure 31. Modelling process diagram proposed by Zbiek and Conner (2006).	349
Figure 32. Modelling cycle proposed by Lesh and Doerr (2003b).	350
Figure 33. Modelling process chart proposed by Galbraith and Stillman (2006).	355
Figure 34. Use of digital tools in the modelling cycle.	356
Figure 35. Semiotic-cognitive mathematical modelling cycle.	596
Figure 36. Representations in the SCMMC.	598
Figure 37. Comparison of DSC criteria and components in both studies.	601
Figure 38. Comparison of the mathematical contents that implemented modelling in both studies.	602

Índice de Tablas –

Index of Tables

En Idioma Español

Tabla 1. Cambio de focos sobre aplicaciones matemáticas y modelización.	9
Tabla 2. Subcompetencias en modelización matemática.	36
Tabla 3. Clasificación de perspectivas de modelización según Kaiser y Sriraman (2006).	37
Tabla 4. Clasificación de perspectivas de modelización según Abassian y colaboradores (2020).	41
Tabla 5. Síntesis de la revisión de la literatura de Preciado y colaboradores (2023).	47
Tabla 6. Fragmento del marco para identificar bloqueos de los estudiantes durante las transiciones en el proceso de modelización.....	50
Tabla 7. Definiciones de modelación, modelado, modelaje, y modelamiento.....	70
Tabla 8. Síntesis de las preguntas y los objetivos de investigación.	80
Tabla 9. Datos de identificación del tercer artículo.....	153
Tabla 10. Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes.....	162
Tabla 11. Capítulos que estructuran un TFM.....	166
Tabla 12. Niveles de referencia a la modelización matemática.	167
Tabla 13. Ejemplos de análisis de contenido con los TFMs #004, #035, #062, y #100.	169
Tabla 14. Número de TFMs según los niveles de referencia a la modelización matemática.....	171
Tabla 15. Número de comentarios sobre modelización matemática según los componentes de los CID.....	172
Tabla 16. Contenidos matemáticos y niveles educativos en que se implementó (o no) la modelización.....	173
Tabla 17. Definiciones de modelización matemática encontradas en los TFMs #010, #026, y #039.	175

In English Language

Table 1. Identification data of the first article.	81
---------------------------------------------------------	----

Table 2. Analysis of the <i>Bales of Straw Problem</i> using the MMCCP.	88
Table 3. Analysis of the <i>Bales of Straw Problem</i> using the OSA.	93
Table 4. Initial production and transcription of the solving procedure using estimation of measurements.	102
Table 5. Final production and transcription of the solving procedure using estimation of measurements.	103
Table 6. Analysis of the <i>Bales of Straw Problem</i> using both frameworks for the type-A strategy.	104
Table 7. Analysis of the <i>Bales of Straw Problem</i> using both frameworks for the type-B strategy.	109
Table 8. Identification data of the second article.....	121
Table 9. Didactic suitability criteria and their components.....	130
Table 10. Chapters that structure an MFP.	134
Table 11. Levels of reference to mathematical modelling identified in the MFPs.	135
Table 12. Examples of the content analysis on MFPs #005, #042, #060, and #076. ...	136
Table 13. Number of MFPs according to the levels of reference to mathematical modelling.....	138
Table 14. Number of comments about mathematical modelling according to the DSC components.....	139
Table 15. Mathematical contents and student educational level where modelling was (or not) implemented.....	140
Table 16. Definitions of mathematical modelling found in MFPs #002, #028, and #115.	141
Table 17. Identification data of the book chapter.....	187
Table 18. Classification scheme for modelling tasks.	192
Table 19. Classification scheme for the six tasks.....	198
Table 20. General classifications for tasks.....	201
Table 21. Identification data of the fourth article.....	203
Table 22. Epistemic configuration of primary objects.	222
Table 23. Change of focus on mathematical applications and modelling.....	316
Table 24. Mathematical modelling sub-competencies.	341

Table 25. Classification of modelling perspectives according to Kaiser and Sriraman (2006).	343
Table 26. Classification of modelling perspectives according to Abassian and collaborators (2020).	347
Table 27. Synthesis of the literature review conducted by Preciado and collaborators (2023).	352
Table 28. Excerpt of the framework to identify student blockages during the transitions of the modelling process.	355
Table 29. Synthesis of research questions and objectives.	381

Resumen

En los últimos 50 años, la modelización matemática ha ido ganando un espacio importante en la investigación en Didáctica de la Matemática y en los currículos educativos internacionales. Esta tesis doctoral se elaboró en la modalidad de compendio de publicaciones, pues esta investigación se desarrolló mediante estudios que tienen como eje central la modelización y que atienden individualmente a los objetivos propuestos. Además, cada capítulo está escrito en español o inglés, según el idioma utilizado en cada publicación, para cumplir con los requisitos de la mención internacional.

El primer estudio (Capítulo 3) es un artículo elaborado a partir del interés por profundizar en un ciclo de modelización desde la perspectiva de un marco teórico de la Didáctica de la Matemática. Para ello, se desarrolló una articulación teórica entre el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva y el Enfoque Onto-Semiótico. Este estudio dio como resultado la propuesta de un modelo de análisis semiótico-cognitivo para el proceso de modelización.

El segundo y tercer estudio (Capítulos 4 y 5) son dos artículos elaborados a partir del interés por profundizar en la inclusión de la modelización y la reflexión sobre su implementación en la educación de profesores. Para ello, se desarrolló un análisis de contenido de los Trabajos Finales de Máster elaborados por futuros profesores de educación secundaria y bachillerato, quienes utilizaron la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica para reflexionar sobre la implementación de propuestas didácticas durante sus prácticas educativas, algunas de las cuales incluyeron la modelización. Estos estudios dieron como resultado la identificación de los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que los futuros profesores relacionaron con la modelización cuando reflexionaron sobre su implementación.

El cuarto estudio (Capítulo 6) es un capítulo de libro elaborado a partir del interés por profundizar en las tareas propuestas por futuros profesores para trabajar la modelización durante sus prácticas educativas. Para ello, se caracterizaron y clasificaron las tareas propuestas por futuros profesores que consideraron como tareas de modelización, utilizando una síntesis de atributos para este tipo de tareas y un esquema teórico para clasificarlas. Este estudio evidenció que una mínima porción de las tareas propuestas por los futuros profesores para trabajar la modelización cumple con las características para ser clasificadas como tareas de modelización.

El quinto estudio (Capítulo 7) es un artículo elaborado a partir del interés por profundizar en la modelización desde la perspectiva de otros procesos de la actividad matemática. Para ello, se realizó una profundización teórica sobre el papel de las conexiones extra-matemáticas en el proceso de modelización, tomando como base la articulación desarrollada en el primer estudio y la propuesta de la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas. Este estudio dio como resultado la propuesta de una nueva tipología de conexiones matemáticas y el refinamiento del modelo de análisis semiótico-cognitivo para el proceso de modelización.

Las conclusiones de esta tesis (Capítulo 8) destacan dos aspectos: la propuesta de un ciclo de modelización semiótico-cognitivo y la síntesis de los estudios sobre este proceso en la educación inicial de profesores.

Abstract

In the last 50 years, mathematical modelling has been gaining an important space in Mathematics Education research and in international educational curricula. This doctoral thesis was prepared in the form of a compendium of publications, since this research was conducted through studies that have modelling as their central axis and individually address the objectives proposed. Furthermore, each chapter is written in Spanish or English, depending on the language used in each publication, to fulfil the requirements of the international PhD mention.

The first study (Chapter 3) is an article prepared from the interest in delving into a modelling cycle from the perspective of a theoretical framework of Mathematics Education. To this end, a theoretical articulation between the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive perspective and the Onto-Semiotic Approach was developed. This study resulted in the proposal of a semiotic-cognitive analysis model for the modelling process.

The second and third studies (Chapters 4 and 5) are two articles prepared from the interest in delving into the inclusion of modelling and the reflection on its implementation in teacher education. To this end, a content analysis on the Master's Degree Final Projects prepared by prospective secondary and baccalaureate education teachers was conducted, who used the Didactic Suitability Criteria tool to reflect on the implementation of didactic proposals during their educational internship experiences, some of which included modelling. These studies resulted in the identification of the aspects of the mathematical teaching and learning process that the prospective teachers related to modelling when they reflected on its implementation.

The fourth study (Chapter 6) is a book chapter prepared from the interest in delving into the tasks proposed by prospective teachers to work on modelling during their educational internship experiences. To this end, the tasks proposed by prospective teachers that they considered as modelling tasks were characterised and classified using a synthesis of attributes for this type of tasks and a theoretical scheme to classify them. This study made evident that a minimum portion of the tasks proposed by the prospective teachers to work on modelling meet the characteristics to be classified as modelling tasks.

The fifth study (Chapter 7) is an article prepared from the interest in delving into modelling from the perspective of other processes of mathematical activity. To this end,

a theoretical deepening on the role played by extra-mathematical connections in the modelling process was conducted, taking as a basis the articulation developed in the first study and the proposal of the Extended Theory of Mathematical Connections. This study resulted in the proposal of a new typology of mathematical connections and the refinement of the semiotic-cognitive analysis model for the modelling process.

The conclusions of this thesis (Chapter 8) highlight two aspects: the proposal of a semiotic-cognitive modelling cycle and the synthesis of the studies about this process in initial teacher education.

Capítulo 1: Introducción –

Chapter 1: Introduction

En este capítulo¹, se introduce la presente tesis doctoral. En la [primera sección](#), se explica la motivación que posibilitó a llevar a cabo esta investigación; en la [segunda sección](#), se presentan los antecedentes de justifican esta investigación; y en la [tercera sección](#), se describe la estructura de esta tesis doctoral.

1.1. Motivación del Estudio

La finalidad de esta primera sección es presentar una mirada general, desde la perspectiva personal del doctorando, sobre su trabajo previo a los estudios doctorales y que lo motivaron a realizar esta investigación. En esta sección, se explican sus primeros acercamientos al estudio de la modelización ([subsección 1.1.1](#)), la visión en retrospectiva de sus primeros trabajos de investigación ([subsección 1.1.2](#)), y las repercusiones en el desarrollo de su trabajo de investigación doctoral ([subsección 1.1.3](#)).

1.1.1. Primeros acercamientos a la modelización matemática

Este estudio se origina por el interés del doctorando en la investigación en el proceso de modelización matemática, fundamentalmente, a raíz del trabajo desarrollado durante sus estudios en el programa de postgrado Magíster en Didáctica de la Matemática del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (IMA-PUCV, Chile), durante los años 2016 y 2017. En esos dos años, el doctorando se introdujo al estudio de la modelización desde una perspectiva más pedagógica que de investigación, ello debido al carácter profesionalizante del programa de postgrado. De acuerdo con los lineamientos de este programa, se solicitaba a los estudiantes centrarse en un contenido matemático enseñado en un determinado nivel educativo para elaborar una propuesta didáctica, la cual, a su vez, debía incorporar elementos propios de algún referente teórico de la Didáctica de la Matemática² (enseñados a lo largo del programa de magíster) para su implementación y posterior análisis.

¹ The translation of this chapter into English language can be found at [Annex 1](#).

² En esta tesis se utilizan, dependiendo del contexto, los términos «Didáctica de la Matemática» (en idioma español) y «Educación Matemática» (en idioma inglés) como afines para nombrar esta disciplina de estudio.

En este contexto, el doctorando analizó los textos de estudio y los documentos curriculares para profundizar en el abordaje de la modelización en el aula, centrándose en el objeto matemático función exponencial que se enseñaba (hasta el año 2017) en el nivel educativo segundo año medio (estudiantes de 15–16 años), con lo cual elaboró su propuesta didáctica enmarcada en la metodología del IMA-PUCV para este programa de postgrado basada en el Estudio de Clases (véase Isoda et al., [2012](#)). La elección tanto del objeto matemático como del nivel educativo se justificó en las labores profesionales del doctorando durante dicho periodo de tiempo. Del mismo modo, el diseño didáctico implementado con los estudiantes de este nivel consideró el ciclo de modelización propuesto por Blomhøj y Højgaard ([2003](#))³ y algunos elementos de la Teoría APOE (Arnon et al., [2014](#)), pues fueron los referentes teóricos que el doctorando consideró más idóneos para sus necesidades y las de los resultados esperables en su investigación.

Como resultado de este trabajo, se elaboró la tesis titulada *Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Højgaard* (Ledezma, [2017](#)), la cual consiste, por una parte, de una propuesta didáctica para la enseñanza de la función exponencial mediante la modelización para el curso segundo año medio y, por otra parte, en el análisis de las producciones de algunos estudiantes que dieron muestras de construcciones mentales incipientes de la función exponencial hasta el nivel de proceso (en términos de la Teoría APOE). A partir de esta tesis de magíster, el doctorando sólo publicó un breve artículo en que sintetiza los principales hallazgos de su estudio (véase Ledezma, [2018](#)), presentó algunos resultados de su investigación en dos eventos académicos (uno nacional y otro internacional), y parcialmente contribuyó en el diseño de una descomposición genética para la función exponencial (véase Rodríguez et al., [2021](#)).

1.1.2. Visión en retrospectiva

Si bien el trabajo realizado por el doctorando durante sus estudios de postgrado no cuenta con la rigurosidad teórico-metodológica requerida para la elaboración de una tesis de magíster basada exclusivamente en investigación, igualmente, sentó las bases para que el doctorando se interesara por seguir profundizando en el estudio de la modelización. Más

³ Esta referencia también aparece como «Blomhøj y Jensen (2003)» en algunos trabajos; sin embargo, en esta tesis se adopta la referencia como «Blomhøj y Højgaard (2003)».

en concreto, se consideran tres aspectos cuestionables para el estado actual de la investigación en modelización, que se detallan a continuación.

En primer lugar, la elección del ciclo de Blomhøj y Højgaard (2003; a su vez, complementado con el trabajo de Blomhøj, 2004) no sería la más adecuada en la actualidad. Si bien estos autores han desarrollado un aporte a la investigación reconocido, mayormente, en el contexto danés (por ejemplo, Blomhøj, 1993; Blomhøj et al., 2001; Blomhøj y Kjeldsen, 2006, 2009, 2018; Gregersen y Højgaard, 1998; entre otros), y el ciclo propuesto por estos autores se ha ido complementando con otras perspectivas educativas (véase Sala-Sebastià et al., 2021, para la Educación Matemática Basada en la Indagación), en términos generales, este ciclo no ha sido ampliamente trabajado por la comunidad de investigación en modelización y ha sido desplazado por otros ciclos para caracterizar este proceso (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.6](#)).

En segundo lugar, el uso del término «modelación» para hacer referencia a la perspectiva educativa del proceso de modelización, entra en una profunda contradicción con la postura y el consenso alcanzado por la comunidad de investigación en modelización en la actualidad (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.3.2](#)).

Finalmente, la interpretación reduccionista del proceso de modelización, que lo limita fundamentalmente a la matematización de enunciados que no necesariamente cumplen las características consensuadas para un problema de modelización (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2](#)), es otro error conceptual de este trabajo.

Estos tres aspectos cuestionables, entre otros de menor relevancia para la investigación, hicieron que el doctorando se replanteara el trabajo previamente realizado durante sus estudios de postgrado y, una vez éstos concluyeron, continuara profundizando, por cuenta propia, en el estudio de la modelización desde una perspectiva que trascendiera su enseñanza a nivel escolar.

1.1.3. Repercusiones en la investigación doctoral

A pesar de los tres aspectos cuestionables que se mencionaron en la [subsección anterior](#), se destaca que, el hecho de haber analizado la modelización, aunque de manera incipiente, con un referente teórico de la Didáctica de la Matemática como la Teoría APOE, permitió al doctorando ampliar su mirada en torno a este proceso. Más en concreto, fue este hecho el que motivó al doctorando a continuar profundizando en el estudio de la modelización,

no sólo considerándola como un proceso relevante de la actividad matemática desde la perspectiva educativa, sino que también complementando su comprensión con otros enfoques teóricos, como es el caso de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM; Kuzniak et al., [2016](#)) o del Enfoque Onto-Semiótico (Godino et al., [2007](#)), este último plasmado en esta tesis. Finalmente, se remarca que, la autocrítica realizada por el doctorando a sus primeros trabajos de investigación en modelización no tiene por objeto menoscabar o invalidar sus resultados y logros académicos hasta antes de iniciar su trabajo doctoral, sino que pretende ser una evidencia de su crecimiento y desarrollo como profesional investigador de la Didáctica de la Matemática.

1.2. Antecedentes de la Investigación

La finalidad de esta segunda sección es presentar el marco teórico de referencia que se elaboró para esta investigación pues, por razones de espacio en la presentación de las publicaciones, no se puede profundizar con la suficiente claridad sobre los antecedentes que respaldan el trabajo de investigación reportado en esta tesis doctoral. En esta sección, se comienza por la evolución histórica del campo de investigación en modelización ([subsección 1.2.1](#)), se continúa con algunas clarificaciones terminológicas que se utilizan en este trabajo ([subsección 1.2.2](#)), y se finaliza con una síntesis de las principales investigaciones desarrolladas en modelización, especialmente, desde comienzos del siglo XXI ([subsección 1.2.3](#)).

1.2.1. Evolución histórica de la investigación en modelización

Los primeros atisbos por incluir problemas con un cierto contexto en la educación matemática escolar se remontan hacia el siglo XIX, específicamente, en los concerniente a la enseñanza de la aritmética y la geometría (Kaiser et al., [2015](#)). Dicho de otro modo, no es nueva la idea de aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones cotidianas en la enseñanza de la asignatura (Niss, [1987](#)). En las subsecciones siguientes, se presenta un breve recorrido histórico sobre los puntos importantes de la investigación en modelización desde comienzos del siglo XX hasta la actualidad.

1.2.1.1. Primera mitad del siglo XX

A comienzos del siglo XX, el término modelo se asociaba, fundamentalmente, con objetos materiales tridimensionales y, en el caso particular de los modelos matemáticos, su relación era exclusivamente con aspectos geométricos (Friedman y Krauthausen, 2022) (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.5](#)). Durante esta época, el matemático y educador alemán Félix Klein (1849–1925) elaboró un programa de estudios que integró las aplicaciones matemáticas a la enseñanza de sus cursos de matemática pura (véase Klein, 2016a, 2016b, 2016c). La propuesta de Klein se enmarcaba en los debates curriculares con enfoque *utilitarista*, donde se consideraba que la razón de ser de la matemática era su utilidad en las ciencias y en la sociedad (Niss, 1987). De este modo, la enseñanza escolar empezó a incluir problemas de la vida cotidiana, que no siempre guardaban relación con la realidad, pero que buscaban establecer algún tipo de relación entre lo intra y lo extra-matemático. Por su parte, la educación universitaria de ese entonces, restringida a determinadas minorías sociales, principalmente, contaba con un espectro bastante limitado de aplicaciones de la matemática en áreas como física, ingeniería, astronomía, y algunas disciplinas del ámbito económico. Si bien la propuesta de Klein fue innovadora para su época, la enseñanza de la matemática a nivel mundial seguía estando, principalmente, basada en la realización de cálculos descontextualizados de la realidad.

1.2.1.2. Segunda mitad del siglo XX

La Organización para la Cooperación Económica Europea organizó el *Seminario Royaumont* en Asnières-sur-Oise (Francia) 23 noviembre–5 diciembre de 1959 (de Bock y Vanpaemel, 2015), considerado como el evento en que se inició oficialmente la *Reforma de las Matemáticas Modernas* (Bourbaki, 1984/2007) como una forma de subsanar la brecha entre la matemática escolar y la universitaria (Niss, 1987). A pesar de tener una fuerte orientación teórica, esta Reforma pretendía aportar un sustento ideal para abordar cuestiones extra-matemáticas donde se aplicase la matemática (Niss, 2008), es decir, se planteó la necesidad de reformar los currículos de educación matemática desde una perspectiva aplicada e interdisciplinaria. Sin embargo, la posición dominante fue la de la escuela estructuralista francesa, donde las matemáticas puras fueron los fundamentos

teóricos para enseñar las preguntas de las matemáticas aplicadas (Organisation for European Economic Co-Operation, [1961](#)).

Durante la década de 1960, el papel de las situaciones extra-matemáticas en las *Matemáticas Modernas* se puede ejemplificar con la siguiente distinción de Hilton ([1973](#)) entre *ilustración* y *aplicación*:

Una situación, dentro o fuera de la matemática, es una *ilustración* de una teoría matemática si y sólo si esa situación clarifica la teoría. Una situación es una *aplicación* de una teoría matemática si y sólo si esa situación es clarificada por la teoría. (de Bock y Zwaneveld, [2020](#), p. 411, traducción del autor)

En este sentido, no había *aplicaciones* de las estructuras matemáticas de orden superior (grupos, campos, espacios vectoriales) que se enseñaban a los estudiantes de las etapas escolares, y estas estructuras sólo se podían *ilustrar* mediante instanciaciones concretas, como materiales o juegos creados para ello (de Bock y Zwaneveld, [2020](#)).

Durante esta época se empieza a utilizar el término *modelo* en la enseñanza de la matemática, aunque relacionado, principalmente, con la física, ello debido a que era la disciplina con la que, mayormente, se asociaba este término (Niss, [1987](#)). Sin embargo, esta Reforma no tuvo los resultados esperados⁴, entre otras razones, debido a la desconexión con el contexto de los estudiantes y el exceso de formalismo en la enseñanza de la matemática, situación que comenzó a cambiar a finales de la década de 1960.

Un evento académico en particular que masificó los cuestionamientos curriculares sobre la enseñanza de la matemática fue el coloquio internacional *Por Qué Enseñar Matemática para que Sea Útil*, celebrado en Utrecht (Países Bajos) 21–25 de agosto de 1967 (de Bock y Zwaneveld, [2020](#)). Este coloquio se considera como el primer evento en el que se discutieron las diferentes posturas sobre el uso de la matemática (la Bastide-van Gemert, [2015](#)), y sus actas se publicaron en el primer número de la revista *Educational Studies in Mathematics* de mayo de 1968, donde se destacan dos conferencias.

En primer lugar, la conferencia del matemático neerlandés Hans Freudenthal ([1968](#)), quien comienza cuestionando dos posiciones extremas para enseñar matemática: por una parte, la enseñanza que no se enfoca en el uso de la matemática, pues se espera que sean

⁴ Véase una discusión más amplia sobre la *Reforma de las Matemáticas Modernas* y su implementación internacional en de Bock ([2023](#)).

los estudiantes quienes la utilicen cuando la necesiten; por otra parte, la enseñanza de una matemática útil. En términos de este autor, la primera posición demostró haber fracasado debido a los bajos resultados de los estudiantes en su capacidad de aplicación, mientras que la segunda posición, si bien no se ha intentado muy a menudo, es útil sólo cuando el contexto de aplicación no cambia mucho. Finalmente, este autor insta a que la enseñanza de la matemática sea enfocada, principalmente, como una actividad de matematización en vez de como un sistema cerrado, pues de no ser así, sería el fin de la educación matemática.

En segundo lugar, la conferencia del matemático austro-americano Henry O. Pollak (1968), quien comienza planteando cinco concepciones erróneas sobre las aplicaciones de la matemática: (1) sólo las matemáticas avanzadas son matemáticas aplicadas; (2) sólo la física clásica lleva a aplicaciones importantes y ‘reales’ de la matemática; (3) el uso del vocabulario de otra disciplina en un problema matemático motiva las aplicaciones matemáticas en otra disciplina; (4) las matemáticas aplicadas son muy diferentes de las matemáticas puras y requieren distintos tipos de enseñanza; (5) las matemáticas aplicadas son un campo muy denso, profundo, y difícil de comprender. Para rebatir estas cinco concepciones erróneas, este autor da algunos ejemplos de aplicaciones matemáticas y destaca algunas iniciativas académicas de la época que apuntan en esa dirección, desde la perspectiva educativa, para diferentes áreas del conocimiento. Finalmente, si bien este autor recalca las dificultades de los profesores para implementar ejemplos de aplicaciones matemáticas en el aula, insta a que se continúe la búsqueda de más ejemplos de este tipo, no sólo para la matemática universitaria, sino también para la matemática escolar.

Si bien en estas dos conferencias no se habla explícitamente de modelización, sino que sólo de aplicaciones matemáticas, sí que se dan atisbos de los primeros focos de investigación que, años más tarde, darían paso a una formalización teórica sobre la modelización matemática. En su trabajo doctoral⁵, Kaiser-Messmer (1986) distingue entre dos corrientes de discusión que emergieron a partir del debate que plantean estos autores hasta la década de 1980. Por una parte, una perspectiva pragmática enfocada en el uso de la matemática para resolver problemas prácticos, liderada por el trabajo y reflexiones de Pollak (1968, 1969). Por otra parte, una perspectiva científico-humanista

⁵ Véase un resumen de esta tesis en Kaiser-Messmer (1988).

enfocada en las interacciones entre la matemática y la realidad, donde la teoría se desarrolle desde la realidad experimentada por los estudiantes, liderada por el trabajo y reflexiones de Freudenthal ([1968](#), [1969](#)). Más en concreto, las contribuciones de Pollak dotaron de una estructura circular a las representaciones idealizadas del proceso de modelización, y las contribuciones de Freudenthal permitieron profundizar en las interacciones entre la matemática y el mundo real mediante la matematización horizontal/vertical (Kaiser et al., [2015](#)).

Durante los 20 años posteriores al coloquio de 1967, se empieza a producir una separación entre los términos *aplicaciones matemáticas* y *modelización matemática*. En julio de 1983, los matemáticos John Berry, David N. Burghes, Ian Huntley, Glynn James, y Alfredo Moscardini organizaron la primera *Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática* en la Universidad de Exeter, Inglaterra (Berry et al., [1984](#)). Este evento en particular dio inicio a la conformación de la *Comunidad Internacional de Profesores de Modelización y Aplicaciones Matemáticas* (ICTMA, por su acrónimo en inglés) que, hasta la actualidad, realiza conferencias internacionales cada dos años para abordar los temas de educación en modelización y aplicaciones matemáticas. De este modo, la discusión sobre el foco de los currículos educativos en cuanto a la integración de estos dos términos fue evolucionando, en términos de Niss ([1987](#)), de la forma que se muestra en la Tabla 1.

Este cambio gradual sobre las aplicaciones matemáticas y la modelización, sobre todo desde finales de la década de 1980, provocó que el foco se trasladara a responder tres preguntas fundamentales sobre su enseñanza en el aula: *por qué* se deben enseñar, *qué* se debe enseñar, y *cómo* se debe enseñar. Ante estas interrogantes, los trabajos del matemático alemán Werner Blum y del matemático danés Mogens Niss (Blum, [1991](#); Blum y Niss, [1989](#), [1991](#); Niss, [1989](#)) aportan luces para darles respuesta.

En primer lugar, estos autores plantean cinco argumentos (A) que justifican *por qué* se deben enseñar las aplicaciones matemáticas y la modelización:

- (A1) Argumento *formativo*: Permiten el desarrollo en los estudiantes de competencias para la resolución de problemas, junto con la creatividad, exploración, amplitud de mente, autosuficiencia, y autoconfianza al enfrentar este tipo de situaciones-problema.

Tabla 1. Cambio de focos sobre aplicaciones matemáticas y modelización.

Criterios	Foco desde	→	Foco hacia
Propósito	Las aplicaciones en el currículo tienen el propósito de defender la matemática contra las críticas y la disminución de estudiantes.		El interés en introducir las aplicaciones y la modelización en el currículo es independiente, que va más allá del alcance de la matemática y la educación matemática.
Objetivos	Aportar motivación o mejorar la adquisición de conceptos, teorías, y métodos matemáticos de los estudiantes.		Mejorar la activación de la matemática en situaciones y problemas fuera del mundo matemático.
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Temas <i>internos</i> y <i>clásicos</i>. • Temas <i>aplicados/aplicables</i> o que se están aplicando. 		<ul style="list-style-type: none"> • Temas <i>aplicados/aplicables</i>, incluyendo ‘los nuevos’. • <i>Aplicaciones</i>.
Problemas	<ul style="list-style-type: none"> • Situaciones-problema destinadas a <i>iluminar la matemática</i>. • <i>Bien definidos</i>. • <i>Construidos</i>. • Trabajo <i>dentro del modelo</i> enfocado en sus propiedades matemáticas. 		<ul style="list-style-type: none"> • <i>Situaciones-problema</i> que requieren de la aplicación de la matemática. • Situaciones-problema destinadas a <i>iluminar los aspectos del mundo extra-matemático</i>. • <i>Abiertos</i>. • <i>Reales</i>. • Trabajo con el <i>modelo completo</i>, incluyendo sus aspectos no-matemáticos.
Organización	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Cursos separados</i> en aplicaciones y modelización. • <i>Independencia</i> de otras asignaturas. • <i>Secuencias breves</i> de aplicaciones y de modelización. 		<ul style="list-style-type: none"> • <i>Integración</i> en el programa general de matemática. • <i>Cooperación interdisciplinaria</i>. • <i>Secuencias largas</i> de aplicaciones y de modelización.
Métodos	La iniciativa es del <i>profesor</i> , quien dirige el curso de los acontecimientos.		Los <i>estudiantes</i> trabajan de manera independiente, a menudo en grupos, bajo la guía del profesor.

Nota: *Cursivas* del texto original. Fuente: Adaptado desde Niss ([1987](#), p. 500, traducción del autor).

(A2) Argumento de la *competencia crítica*: Permiten generar, desarrollar, y refinar un pensamiento crítico en los estudiantes para observar y juzgar el uso (o mal uso) de la matemática en la sociedad para atender a los problemas del mundo real.

- (A3) Argumento de *utilidad*: Permiten relacionar los conocimientos matemáticos de los estudiantes con otras asignaturas del currículo, otras disciplinas del conocimiento, o la vida cotidiana, ya sea en un momento presente o futuro de los individuos.
- (A4) Argumento de la *imagen de la matemática*: Permiten dotar a la matemática de una imagen que resalta su importancia como ciencia, como herramienta en la sociedad, y como parte del desarrollo cultural de la humanidad.
- (A5) Argumento de la *promoción del aprendizaje matemático*: Permiten una mejor adquisición, comprensión, y retención de conceptos, nociones, métodos, y resultados matemáticos, así como motivar y promover el estudio matemático.

Estos argumentos tienen distintos focos dentro de la educación matemática, es decir, los argumentos (A1) y (A5) se enfocan en la perspectiva individual del estudiante y su aprendizaje y desarrollo; el argumento (A2) se enfoca en la perspectiva social; el argumento (A3) se enfoca en la relación del estudiante con la sociedad; y el argumento (A4) se enfoca en la perspectiva de la matemática (Lingefjärd, [2006](#)).

En segundo lugar, estos autores plantean tres modos de hacer objetos de estudio y actividades educativas a (*qué* [Q] enseñar de) las aplicaciones matemáticas y la modelización:

- (Q1) Conocer los modelos y aplicaciones de la matemática existentes, y las características del proceso de modelización.
- (Q2) Realizar modelizaciones, ya sea aplicando/modificando modelos conocidos o construyendo nuevos.
- (Q3) Analizar y evaluar críticamente los modelos matemáticos según sus propiedades matemáticas y su capacidad para representar la realidad modelizada.

Finalmente, estos autores no plantean explícitamente las respuestas a la pregunta sobre *cómo* enseñar aplicaciones matemáticas y modelización, aunque, por una parte, sugieren que la investigación en Didáctica de la Matemática profundice en este tema y, por otra parte, reconocen la existencia de seis enfoques (E) en que se organiza la enseñanza de las aplicaciones matemáticas y la modelización (véase Lesh et al., [1986](#)):

- (E1) Enfoque *separado*: Enseñanza de estos temas en dos cursos separados, es decir, uno para las *matemáticas puras* y otro para las *matemáticas aplicadas*.

- (E2) Enfoque *bicompartimental*: Enseñanza de estos temas en un mismo curso, donde la primera parte se destina a las *matemáticas puras* y la segunda parte a las *matemáticas aplicadas* (aplicables a partir de lo aprendido en la primera parte).
- (E3) Enfoque *aislado*: Enseñanza de estos temas en un mismo curso, dividido en varios segmentos como en (E2), es decir, cada tema de *matemáticas puras* enseñado se trabaja luego desde las *matemáticas aplicadas* antes de pasar al siguiente tema.
- (E4) Enfoque *mixto*: Enseñanza de conceptos, métodos, y resultados matemáticos que apuntan hacia las aplicaciones matemáticas y la modelización, donde la matemática necesaria para su resolución está dada desde un principio.
- (E5) Enfoque *curricularmente integrado*: La enseñanza comienza con el planteamiento de problemas (matemáticos o de aplicación) y luego se enseña la matemática necesaria para resolverlos. Los problemas apuntan sólo a la matemática establecida por el currículo.
- (E6) Enfoque *interdisciplinariamente integrado*: Enfoque muy similar a (E5), pero que opera en un marco totalmente integrado con temas intra- y extra-matemáticos, donde la matemática no está organizada como una asignatura separada.

Estas reflexiones dieron paso a que, sobre todo desde finales de la década de 1990, comenzaran a introducirse más formalmente las aplicaciones matemáticas y la modelización en los currículos educativos internacionales.

1.2.1.3. Siglo XXI

El cambio de siglo trajo consigo, entre otros, tres grandes avances en cuanto a las aplicaciones matemáticas y la modelización: primero, un reconocimiento generalizado de la importancia de estos procesos para la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos, materializado en su inclusión curricular a nivel internacional (Lingefjård, [2006](#)); segundo, un notorio aumento en el interés por investigar sobre estos temas; y tercero, un refinamiento conceptual para definir y distinguir ambos términos (Blum, [2002](#)). Sin quitarle importancia al tercer avance (abordado más ampliamente en la [subsección 1.2.2](#)), en esta subsección se tratarán el primer y segundo avance.

En términos curriculares, se destaca el planteamiento que hace el *Concilio Nacional de Profesores de Matemática* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], [2000](#)) sobre la modelización en tres de sus seis principios:

- Curricular: “el currículo debería ofrecer experiencias que permitan a los estudiantes ver que la matemática tiene poderosos usos en la modelización y predicción de fenómenos del mundo real” (pp. 15–16, traducción del autor).
- Aprendizaje: “se le puede dar más atención a comprender los conceptos del número y los procedimientos de modelización usados en resolver problemas” (p. 20, traducción del autor).
- Tecnología: “La capacidad computacional de las herramientas tecnológicas amplía el rango de problemas accesibles a los estudiantes y también les permite ejecutar procedimientos rutinarios de manera rápida y precisa, permitiendo así más tiempo para conceptualizar y modelizar” (p. 25, traducción del autor).

De este mismo modo, la propuesta curricular del NCTM ([2000](#)) explicita que la modelización esté presente en los estándares de contenido (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, y Análisis de datos y probabilidad) y de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones, y Representación). Esta postura fue replicada por distintos países, donde la inclusión curricular de la modelización requirió del diseño y elaboración de materiales de apoyo para su implementación en el aula, como guías, manuales, y libros de texto (por ejemplo, Borromeo Ferri et al., [2013](#); Garfunkel y Montgomery, [2019](#); Gould et al., [2012](#); Henn y Meyer, [2014](#); J. Maaß et al., [2018](#); J. Maaß y Siller, [2014](#); entre otros). En otras palabras, el hecho de que la modelización fuera considerada como parte de los principios que orientan la enseñanza matemática, la hizo parte del contenido y los medios para lograr el aprendizaje matemático.

Como consecuencia de esta inclusión curricular, la modelización también empezó a formar parte de mediciones internacionales, como en el caso de la prueba PISA, en el dominio de la alfabetización matemática (Turner, [2007](#)). Más específicamente, desde que se implementa la evaluación PISA que la modelización es considerada como una de las ocho competencias matemáticas que se evalúan en este dominio (Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD], [2005](#)) hasta la actualidad, aunque con ligeras variaciones conceptuales (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.3](#)).

De forma paralela al avance curricular, la modelización también fue atrayendo el interés de más investigadores en Didáctica de la Matemática de manera más notoria que otras

formas de aplicaciones matemáticas, en el sentido que predice una aparente reconciliación entre lo intra- y lo extra-matemático (Pollak, [2003](#)), además de abrir la puerta a una educación matemática más significativa (Stillman et al., [2020](#)). Más específicamente, desde el año 2005, se hizo evidente un crecimiento sustantivo en cuanto a la producción científica en torno a la modelización (Kutluca y Kaya, [2023](#)), lo cual se materializó en, por ejemplo, la publicación de números especiales de revistas dedicados a este tema, donde se destacan los siguientes:

- En 2006, la revista *ZDM – Mathematics Education* (entonces conocida como *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*) publicó dos números especiales titulados «Investigación en Modelización Matemática (Parte A y B)» (vol. 38, nro. 2: Kaiser et al., [2006](#); vol. 38, nro. 3: Sriraman et al., [2006](#)).
- En 2007, la revista *Technology, Knowledge and Learning* (entonces conocida como *International Journal of Computers for Mathematical Learning*) publicó un número especial titulado «Modelización como Aplicación versus Modelización como una Forma de Crear Matemática» (vol. 12, nro. 3: Lesh y Caylor, [2007](#)).
- En 2010, la revista *Journal für Mathematik-Didaktik* publicó un número especial titulado «Investigación Empírica en Modelización Matemática» (vol. 31, nro. 1: Biehler y Leiss, [2010](#)).
- En 2010, la revista *Mathematics Education Research Journal* publicó un número especial titulado «Investigación en Aplicaciones y Modelización Matemática en el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática» (vol. 22, nro. 2: Stillman et al., [2010](#)).
- En 2015, la revista *Mathematics Teaching in the Middle School* publicó un número especial con actividades de modelización matemática (vol. 20, nro. 6: Klein y McDonald, [2015](#)).
- En 2018, la revista *ZDM – Mathematics Education* publicó un número especial titulado «Investigación Empírica en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Modelización Matemática» (vol. 50, nos. 1–2: Kaiser et al., [2018](#)).
- En 2021, la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* publicó un número especial titulado «Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Modelización Matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis» (vol. 17: Barquero, [2021](#)).

- En 2021, la revista *Quadrante* publicó dos números especiales titulados «Modelización Matemática en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática (Parte 1 y 2)» (vol. 30, nos. 1, 2: Carreira y Blum, [2021a](#), [2021b](#)).
- En 2022, la revista *Educational Studies in Mathematics* publicó un número especial titulado «Innovaciones en la Medición y el Fomento de las Competencias en Modelización» (vol. 109, nro. 2: Kaiser y Schukajlow, [2022](#)).
- En 2023, la revista *Mathematical Thinking and Learning* publicó un número especial titulado «Modelización desde una Perspectiva Cognitiva» (vol. 25, nro. 3: Schukajlow et al., [2023](#)).
- En 2024, la revista *Frontiers in Education* publicó un número temático titulado «Modelización Matemática mediante y con Recursos Digitales» (vol. 9: Greefrath y Siller, [2024](#)).

Junto con los números especiales antes mencionados, desde 2011 que se edita la serie de libros *Perspectivas Internacionales sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Modelización Matemáticas* (véase Kaiser, Blum et al., [2011](#); Lesh et al., [2013](#); Stillman et al., [2013](#); entre otros). En esta serie de libros, se abordan diferentes perspectivas teóricas en torno a la modelización, su enseñanza en los distintos niveles educativos (escolar y universitario), y se publican las actas de las conferencias ICTMA. De la mano de este crecimiento y desarrollo teórico en torno a la modelización, diversos eventos académicos internacionales han incluido grupos temáticos dedicados a su discusión, como es el caso del *Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática* (CERME, por su acrónimo en inglés, véase CERME 13 en Drijvers et al., [2023](#); CERME 12 en Hodgen et al., [2022](#); CERME 11 en Jankvist et al., [2019](#); entre otros) o la *Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática* (PME, por su acrónimo en inglés, véase PME 46 en Ayalon et al., [2023](#); PME 45 en Fernández et al., [2022](#); PME 44 en Inprasitha et al., [2021](#); entre otros).

Finalmente, en la actualidad, la investigación en modelización no sólo considera el estudio particularizado de este proceso, sino que también su articulación/concatenación con otros procesos relevantes de la actividad matemática, desde una perspectiva competencial, y en distintos contextos educativos (estudiantes y profesores), como se mostrará en detalle en la [subsección 1.2.3](#).

1.2.2. Clarificaciones terminológicas

A lo largo de los años de investigación en modelización, las definiciones en torno a este proceso han ido variando, ello debido no sólo a los avances de la investigación en Didáctica de la Matemática, sino también al uso y consideración de la modelización en distintos ámbitos (educativo, científico, social) (Frejd y Vos, [2024](#)). Por lo tanto, se considera relevante establecer las definiciones que se adoptan para esta investigación en torno a los términos que forman parte fundamental de la modelización matemática, las cuales se abordan en esta subsección.

1.2.2.1. Problema

El primer término para definir es *problema*, entendido como una situación que se desarrolla con una pregunta abierta y que representa un desafío intelectual para quien lo enfrenta, pues el resolutor no conoce los métodos, procedimientos, o algoritmos involucrados en su resolución (véase también Schoenfeld, [1994](#)). En particular, los *problemas* pueden ser (a) *matemáticos aplicados*, donde la situación y la(s) pregunta(s) pertenecen a algún segmento del *mundo real* (resto del mundo fuera de la matemática, como otras disciplinas, la cotidianeidad, etc.) y se involucran algunos conceptos, métodos, y resultados matemáticos; (b) *puramente matemáticos*, donde la situación y la(s) pregunta(s) se encuentran totalmente inmersas en un universo matemático, y si bien pueden emerger de los *problemas aplicados*, una vez que dejan el contexto extra-matemático, dejan de ser *aplicados* (Blum y Niss, [1991](#)).

1.2.2.2. Resolución de problemas

El segundo término para definir es *resolución de problemas*, entendido como el proceso de abordar un *problema* e intentar resolverlo. A su vez, este proceso se puede descomponer en la *resolución de problemas matemáticos aplicados* y *puramente matemáticos* (Blum y Niss, [1991](#)), por lo que esta clarificación se centrará en el primer tipo donde se incluyen los *problemas de modelización*, para así continuar el hilo de las siguientes definiciones.

1.2.2.3. Modelización

El tercer término para definir es *modelización*, aunque se requieren algunas consideraciones previas. En primer lugar, para definir qué es la *modelización*, este término requiere diferenciarse de las *aplicaciones*. Esto se debe a que, como se presentó en la [subsección 1.2.1.2](#), las *aplicaciones matemáticas* y la *modelización* eran tratadas como un solo término y, posteriormente, se fueron individualizando. Blum (2002) plantea que tanto las *aplicaciones* como la *modelización* permiten denotar todo tipo de relaciones establecidas entre el «mundo real» y la «matemática», lo cual presupone la existencia de dos *mundos* separados como parte fundamental de estos procesos (véase Blum, 1985). Ahora bien, al asumir la existencia de estos dos *mundos*, Niss y colaboradores (2007) plantean que la *modelización* se enfoca en la transición desde el «mundo real» hacia la «matemática», centrándose principalmente en el proceso de *matematización* de la realidad; mientras que las *aplicaciones* se enfocan en la transición desde la «matemática» hacia el «mundo real», centrándose principalmente en el objeto matemático involucrado. Ambos procesos son bidireccionales, de la forma «mundo real» ↔ «matemática» (Wess et al., 2021), aunque difieren en el punto de partida y en el contexto en que se valida cada proceso. En la Figura 1, se representan los procesos de *aplicaciones matemáticas* y *modelización* a partir de la diferenciación antes establecida.

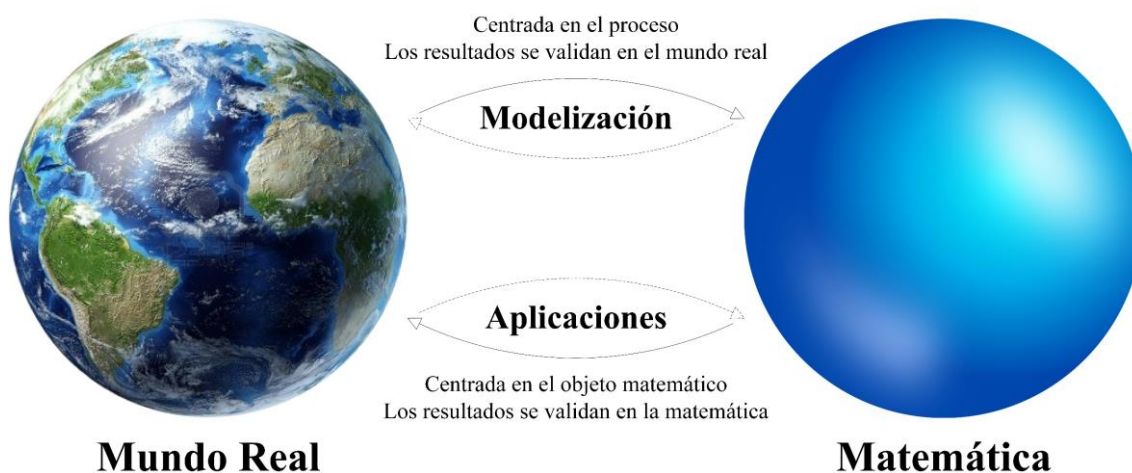


Figura 1. Representación de los procesos aplicaciones matemáticas y modelización.
Fuente: Elaboración del autor, a partir de las definiciones de Blum (2002) y Niss et al. (2007).

En segundo lugar, para definir qué es *modelización*, se debe considerar que no existe una única definición para este término. Esto se debe a que, a lo largo de la construcción del corpus teórico sobre este proceso, han emergido distintas posturas sobre el mismo,

conocidas como *perspectivas de modelización* (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.8](#)). No obstante, una definición genérica sobre este término es la que aporta Pollak (2007), quien plantea que la *modelización matemática* es el proceso que comienza con una situación fuera de la matemática que se plantea como un problema que se intenta (o se espera) entender matemáticamente hasta formar una imagen que permitirá al resolutor obtener algunas respuestas. En síntesis, la *modelización* es la actividad matemática en que se lleva a cabo un *proceso de modelización*. En otras ocasiones, la *modelización* se define por las fases que componen este *proceso*, como en el caso del marco teórico de la prueba PISA⁶:

Estructurar el campo o situación que se quiere [modelizar]; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar los modelos matemáticos en términos de “realidad”; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos. (OECD, 2005, p. 41)

Si bien esta definición es utilizada como parte del sustento teórico para la prueba PISA hasta la actualidad (véase OECD, 2023), guarda más relación con el *ciclo de modelización* que con el proceso mismo (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.6](#)).

1.2.2.4. Problema de modelización

El cuarto término para definir es *problema de modelización*, entendido como una situación-problema que cumple con determinadas características para ser considerado como tal (véase Borromeo Ferri, 2018; K. Maaß, 2007). Para ejemplificar estas características, se utiliza el *Problema Pan de Azúcar* (ver Figura 2), propuesto por Blum y Leiß (2007a).

El problema de la Figura 2 se caracteriza por ser *abierto*, lo que significa que la situación que se presenta no está limitada a una respuesta y/o procedimiento específico; también, la situación es *compleja*, pues el resolutor debe intentar comprender el contexto en que se

⁶ En la versión en español del marco teórico de la prueba PISA, el término en inglés *modelling* es traducido como *construcción de modelos* y no como *modelización*.

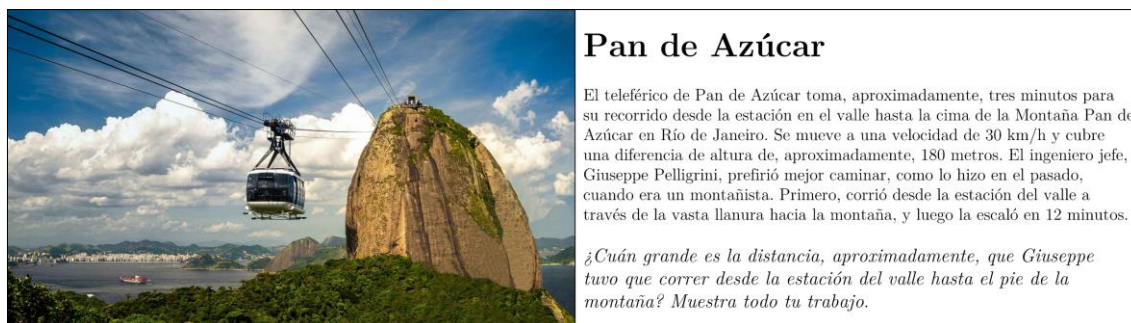


Figura 2. Problema Pan de Azúcar.

Fuente: Adaptado desde Blum y Leiß (2007a, p. 225, traducción del autor).

plantea y buscar los datos relevantes para su resolución. El enunciado de este problema describe una situación *realista*, ya que se utilizan elementos del mundo real (el teleférico, la Montaña Pan de Azúcar), y también es una situación *auténtica*. Con respecto a la autenticidad de una tarea, existe más de una postura al respecto: por ejemplo, para Palm (2007), una tarea es *auténtica* cuando la situación que se describe en su enunciado es plausible de haber ocurrido en el pasado, de estar ocurriendo en el presente, o de ocurrir en un futuro cercano; mientras que para Vos (2011), una tarea es *auténtica* cuando los elementos del mundo real que se consideran, y que no fueron creados con propósitos educativos, se utilizan con tales fines. En el caso del problema de la Figura 2, se presentan ambas características: por una parte, la Montaña Pan de Azúcar efectivamente existe, se ubica en Río de Janeiro (Brasil), y cuenta con un teleférico para visitarlo; por otra parte, la montaña es una formación natural y el teleférico fue creado con fines turísticos, es decir, sus elementos no tienen un propósito educativo. Un *problema de modelización* es, esencialmente, un *problema matemático* que no puede ser resuelto mediante la aplicación de algoritmos conocidos o procedimientos rutinarios (Schoenfeld, 1994), pero que sí requiere de estrategias para su resolución (Lesh y Doerr, 2003b). Finalmente, un *problema de modelización* debe ser *solucionable mediante el proceso de modelización*, lo que implica que se utilicen todas las fases de un *ciclo de modelización* para su resolución (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.6](#)).

De forma complementaria a las seis características anteriormente ejemplificadas, en la literatura se han propuesto algunos criterios adicionales para considerar cuando se implementan *problemas de modelización* en el aula (Borromeo Ferri, 2018; Borromeo Ferri y Lesh, 2013):

- Significancia de la tarea: Los estudiantes deben ser capaces de realizar la tarea y les debe hacer sentido trabajar con ella.
- Contexto realista basado en la edad: La tarea debe tomar en cuenta los intereses del grupo etario al que va dirigida.
- Provocadora de más preguntas: La tarea debe dar la oportunidad a los estudiantes de plantear nuevas preguntas, tanto de nivel matemático como del contexto de la situación-problema.
- Estimuladora de formas holísticas de aprendizaje: Las tareas de modelización más complejas se pueden resolver utilizando diversas estrategias de aprendizaje e, incluso, fuera del aula.
- Nivel de lenguaje apropiado: Las tareas de modelización deben tener un lenguaje adecuado al nivel educativo de los estudiantes para que las puedan comprender, sin espacio a ambigüedades que afecten una buena imagen mental de la situación-problema.

1.2.2.5. Modelo matemático

El quinto término para definir es *modelo matemático*, aunque se requieren algunas consideraciones previas. En primer lugar, para definir qué es un *modelo matemático*, se debe considerar la evolución histórica del término *modelo*. Como se mencionó en la [subsección 1.2.1.1](#), a comienzos del siglo XX, el término *modelo* se asociaba, fundamentalmente, con objetos materiales tridimensionales. Más concretamente, el físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844–1906) definía lo siguiente en la *Encyclopædia Britannica* de 1902: “El término modelo denota una representación tangible, ya sea de tamaño igual, mayor, o menor, de un objeto que realmente existe o que debe construirse de hecho o en el pensamiento” (Boltzmann, 1902, citado en Friedman y Krauthausen, [2022](#), p. 7, traducción del autor). Luego de realizar una clasificación de los distintos *modelos* utilizados en la época (estacionarios, en movimiento, de trabajo, experimentales, etc.), se centra en los de tipo instrumental-matemático utilizados en la física, definiendo qué es un *modelo matemático* de la siguiente manera: “En matemáticas puras, especialmente en geometría, los modelos contruidos en papel maché y yeso se emplean principalmente para presentar a los sentidos la forma precisa de figuras, superficies, y curvas geométricas” (Boltzmann, 1902, citado en Friedman y Krauthausen, [2022](#), p. 7,

traducción del autor). En este sentido, Boltzmann considera a los *modelos matemáticos* como representaciones tridimensionales precisas de figuras geométricas, con el objetivo de servir para la enseñanza y la investigación (Friedman y Krauthausen, [2022](#)). Esta idea de *modelo* fue evolucionando y, particularmente en la matemática, se fue desprendiendo de las consideraciones de la física. Por ejemplo, el matemático polaco-estadounidense Alfred Tarski (1901–1983) dota al término *modelo matemático* de un carácter lógico-formal para expresar una correspondencia entre ciertas fórmulas lógicas y una determinada estructura matemática, en la forma de una ‘instanciación’ de un sistema axiomático formal (Tarski, 1936, citado en Friedman y Krauthausen, [2022](#)). Durante el resto del siglo XX, los *modelos matemáticos* fueron adquiriendo un carácter lógico, no concreto (ya no son representaciones materiales tridimensionales), temporal (pueden cambiar), y fragmentario (reducen la complejidad de una porción de la realidad) (Friedman y Krauthausen, [2022](#)). Finalmente, el filósofo alemán Herbert Stachowiak (1921–2004) describe tres características para los *modelos* (Stachowiak, [1973](#)):

- Mapeo: Los *modelos* siempre representan otro ‘algo’, de origen natural o artificial que, incluso, ya pueden ser *modelos*.
- Reducción: Los *modelos* describen sólo una parte, considerada como relevante, de los atributos de la representación original.
- Pragmatismo: Los *modelos* no se asignan a un original de manera permanente, sino que tienen un propósito específico por un determinado tiempo.

En segundo lugar, para definir qué es un *modelo matemático*, se debe considerar que – al igual que con la *modelización* (ver [subsección 1.2.2.3](#)) – no existe una única definición para este término. Esto también se debe a las distintas posturas sobre el proceso de *modelización* y a qué se le considera como *modelo matemático* en cada perspectiva (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.8](#)). No obstante, una definición genérica sobre este término es la que aportan Niss y colaboradores ([2007](#)), quienes plantean que un *modelo matemático* consiste en una triada entre un dominio extra-matemático (D), un dominio matemático (M), y una regla de mapeo desde D a M (f), de la forma (D, M, f) (ver Figura 1). En otras palabras, un *modelo matemático* consiste en objetos matemáticos (funciones, vectores, ecuaciones, etc.) definidos como esenciales para explicar las relaciones entre la situación-problema del mundo real (*modelo real*) y entre los objetos

que representan estas relaciones (Wess et al., 2021). Por lo tanto, la construcción o uso de un *modelo matemático* es un paso característico del *proceso de modelización*.

Finalmente, en la literatura se han estudiado los tipos de *modelos matemáticos*, considerando como base la caracterización de Stachowiak (1973), y se han clasificado de la forma que se muestra en la Figura 3.

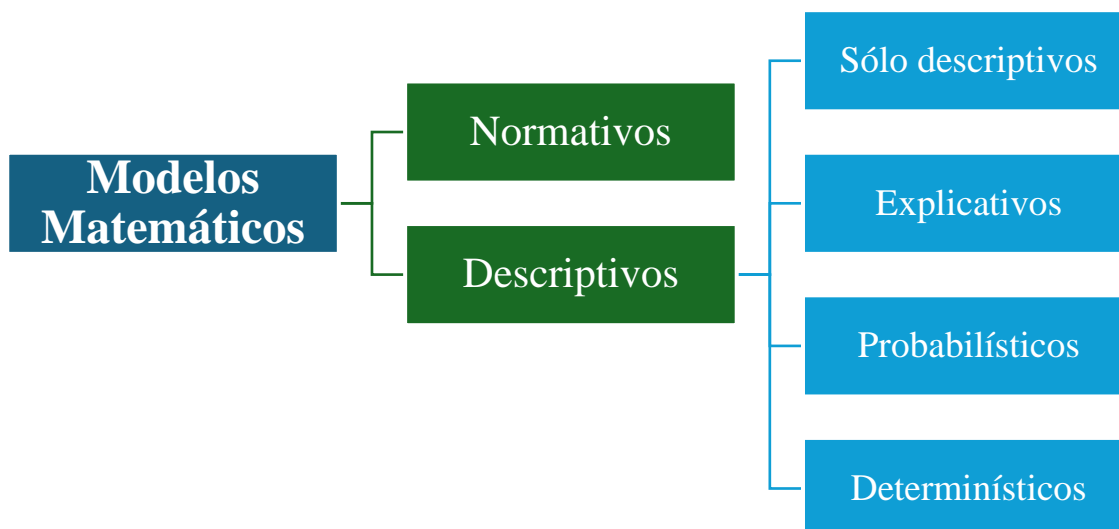


Figura 3. Clasificación de modelos matemáticos.

Fuente: Adaptado desde Greefrath y Vorhölter (2016, p. 9, traducción del autor).

Los *modelos normativos*⁷ son aquéllos que vienen dados de manera prescriptiva como, por ejemplo, para calcular algún impuesto, para datar una pieza arqueológica con carbono 14, la caída de un cuerpo en el área de la física y otras ciencias exactas, etc. Los *modelos descriptivos*⁸ son utilizados como imágenes y se caracterizan por ser descripciones y/o predicciones (Freudenthal, 1978) que también permiten comprender la coherencia interna de la porción de realidad que representan (Greefrath y Volhölter, 2016): los *modelos descriptivos-explicativos* aportan una explicación sobre los datos y hechos, dando significado a, por ejemplo, las relaciones entre ellos; los *modelos descriptivos-probabilísticos* realizan predicciones; y los *modelos descriptivos-determinísticos* realizan predicciones concretas (Wess et al., 2021). En términos educativos, las tareas que abordan los dos principales tipos de *modelos matemáticos* tienen diferentes enfoques: por una parte, las tareas con *modelos matemáticos normativos* se enfocan en la toma de decisiones

⁷ En términos de Burkhardt (1981), también se conocen como *modelos estándar*.

⁸ En términos de Burkhardt (1981), también se conocen como *modelos de nuevas situaciones*.

en determinadas situaciones⁹; por otra parte, las tareas con *modelos matemáticos descriptivos* se enfocan en la descripción y resolución de problemas de la vida real¹⁰ (Greefrath y Vorhölter, [2016](#)).

1.2.2.6. Ciclo de modelización

El sexto término para definir es *ciclo de modelización*, aunque se requiere una diferenciación previa de los términos *modelización* y *proceso de modelización*. Mientras que la *modelización* es la actividad matemática en que se lleva a cabo un *proceso de modelización* (ver [subsección 1.2.2.3](#)), el *ciclo de modelización* es la representación ideal del *proceso de modelización*. En otras palabras, el *ciclo de modelización* es un *modelo* del *proceso de modelización* (Greefrath y Volhölter, [2016](#)).

En la literatura, se ha reportado el diseño diferentes ciclos para explicar el *proceso de modelización*, ello debido a los diferentes enfoques en torno a su comprensión y el tipo de tareas que su estructura pretende describir (Borromeo Ferri, [2006](#)). En un comienzo de la discusión sobre las formas de representar el *proceso de modelización*, estas secuencias tenían un carácter lineal para desarrollar las actividades, donde la «matemática» y el «mundo real» tendía a ser estática (Kaiser et al., [2015](#)). Por ejemplo, una de las primeras representaciones ampliamente aceptadas para explicar las relaciones entre las *matemáticas aplicadas* y el *resto del mundo* es la propuesta por Pollak ([1979](#)), conocida en la actualidad como el Ciclo de las Matemáticas Aplicadas (ver Figura 4). Este esquema es la representación de las siguientes cuatro definiciones¹¹ que da el autor sobre las *matemáticas aplicadas* (Pollak, [1979](#)):

- (1) *Matemáticas aplicadas* significa las *matemáticas aplicadas clásicas*; es decir, las ramas clásicas del análisis (cálculo, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones integrales, teoría de funciones, y otras áreas relacionadas) y la matemática de educación secundaria que sirve como prerrequisito para el cálculo (álgebra, trigonometría, y geometría). Si bien estas ramas de la matemática

⁹ Un ejemplo de tarea que utiliza *modelos matemáticos normativos* es la propuesta por J. Maaß ([2007](#)) para distribuir el costo de la calefacción en una casa con varias habitaciones.

¹⁰ Un ejemplo de tarea que utiliza *modelos matemáticos descriptivos* es el *Problema Pan de Azúcar* (ver Figura 2).

¹¹ Pollak ([1979](#)) también reconoce la existencia de otra clasificación contemporánea, que es la propuesta por Browder ([1976](#)).

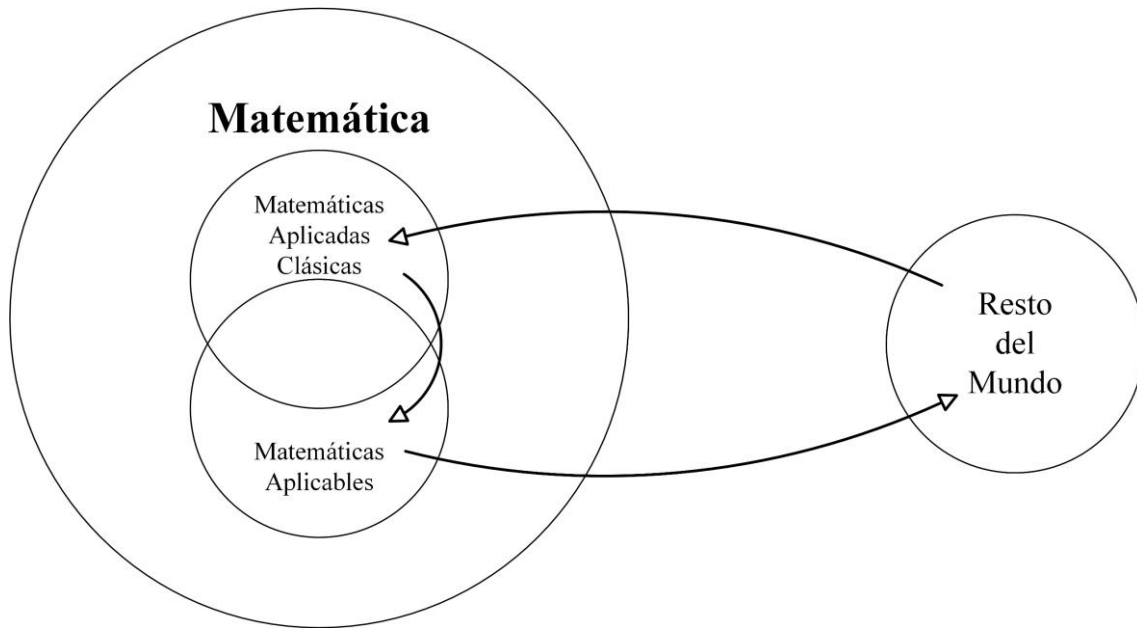


Figura 4. Ciclo de las matemáticas aplicadas.
Fuente: Adaptado desde Pollak (1979, p. 232, traducción del autor).

son mayormente aplicables a la física, no implican conexiones con problemas físicos.

- (2) *Matemáticas aplicadas significa toda la matemática que tiene aplicaciones prácticas significativas.* Esto incluye todas las ramas en (1), además de los temas matemáticos enseñados en la educación primaria y secundaria (conjuntos y lógica, funciones, desigualdades, álgebra lineal, álgebra moderna, probabilidad, estadísticas, y calculatoria) y gran parte de los enseñados en educación universitaria y postgrados. Sus campos de aplicación potencial trascienden de la física.
- (3) *Matemáticas aplicadas significa comenzar con una situación en algún otro campo o en la vida real, hacer una interpretación o modelo matemático, hacer un trabajo matemático dentro del modelo, y aplicar los resultados a la situación original.* Sus campos de aplicación abarcan las ciencias biológicas, sociales, y de administración, así como muchas otras más que en (1) y (2).
- (4) *Matemáticas aplicadas significa lo que realmente hacen las personas que aplican la matemática en su medio de vida.* Si bien esta postura es similar a (3), usualmente implica un tránsito constante entre el «resto del mundo» y la «matemática».

En el esquema de la Figura 4, Pollak (1979) considera que las *matemáticas aplicadas clásicas* corresponden a la definición (1), mientras que las *matemáticas aplicables* corresponden a la definición (2). El hecho de que (2) no contenga a (1) se debe a que existe una matemática teórica que (para su época aún) no es aplicable. Dado que el «resto del mundo» incluye a todas las disciplinas del conocimiento humano y a la vida cotidiana, la diferencia entre las definiciones (3) y (4) radica en que, mientras (3) involucra un tránsito de la forma «resto del mundo» → «matemática» → «resto del mundo», (4) involucra un tránsito constante de la forma «resto del mundo» ↔ «matemática».

Otra de las representaciones ampliamente aceptadas para explicar cómo abordar matemáticamente un problema real es la propuesta por Burkhardt (1981), en donde el autor describe una aproximación a los elementos esenciales para describir dicho abordaje (ver Figura 5).

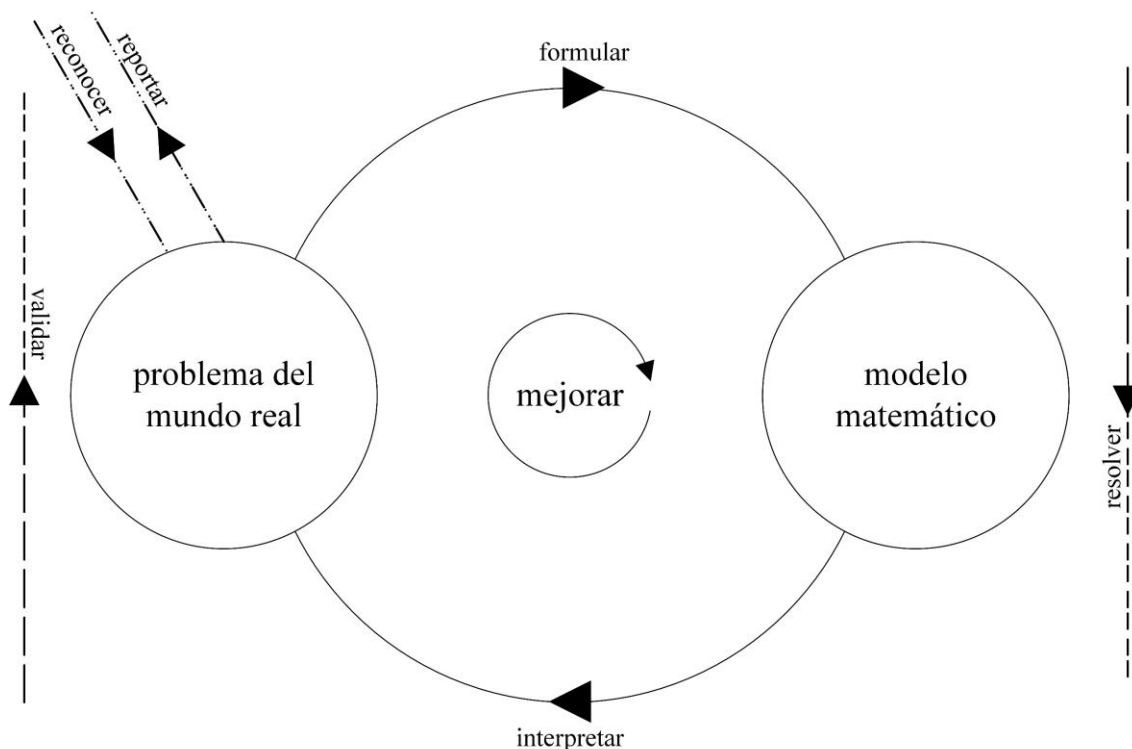


Figura 5. Ciclo para abordar matemáticamente un problema real.
Fuente: Adaptado desde Burkhardt (1981, p. 3, traducción del autor).

En la descripción de este ciclo, Burkhardt (1981) plantea lo siguiente:

Comenzaremos por la izquierda, que representa el problema en el mundo fuera de la matemática, entonces, de alguna manera, *formulamos* un modelo más o menos matemático que refleje, al menos, algunos aspectos del problema. Reorganizamos o

resolvemos el modelo y luego volvemos al mundo real al *interpretar* la respuesta. En la práctica, también tenemos que *validar* el modelo al comprobar si las respuestas describen la situación lo suficientemente bien. Usualmente, es necesario recorrer varias veces los procesos mostrados [en la Figura 5], *mejorando* o extendiendo el modelo. También, tenemos que entrar y salir de estos procesos de modelización. Lo primero involucra el *reconocimiento* de que hay un problema que merece pensarse, lo segundo la comunicación de las conclusiones incluyendo el proceso de clarificación que requiere la exposición (*reportamos*). (pp. 3–4, *cursivas* del texto original, traducción del autor)

Tanto en la propuesta de Pollak (1979) como en la de Burkhardt (1981), se observan los principios que regirán el diseño de las representaciones ideales posteriores del *proceso de modelización*, como lo son una estructura que separa entre el «mundo real» y la «matemática» – o entre lo intra- y lo extra-matemático – y un comportamiento cíclico para describirlo. Sin embargo, hasta este momento del desarrollo histórico de la investigación en modelización, los ciclos propuestos se suelen solapar entre *aplicaciones matemáticas y modelización*.

La propuesta de los investigadores alemanes Werner Blum (1985) y Gabriele Kaiser-Messmer (1986) es la primera que se puede considerar, en estricto rigor, como un *ciclo de modelización*. Este ciclo refinó la estructura mencionada en el párrafo anterior, añadiendo mayor claridad sobre las fases y transiciones por las que transitaría un individuo para resolver un *problema de modelización* (ver Figura 6), tomando como base los estudios desarrollados hasta ese entonces (por ejemplo, Burghes et al., 1982; Burkhardt, 1981; Fischer y Malle, 1984; Pollak, 1979; Steiner, 1976).

El *ciclo de modelización* de la Figura 6, entendido como una representación idealizada del *proceso de modelización*, se puede describir de la siguiente manera: el punto de partida es una *situación real* que se simplifica en un *modelo real* (esto lleva a hacer suposiciones y a descubrir los principales factores influyentes); para diseñar un *modelo matemático*, se debe ‘traducir’ el *modelo real* hacia la matemática (la distinción entre *modelo real* y *modelo matemático* no siempre es clara, ya que sus procesos de desarrollo

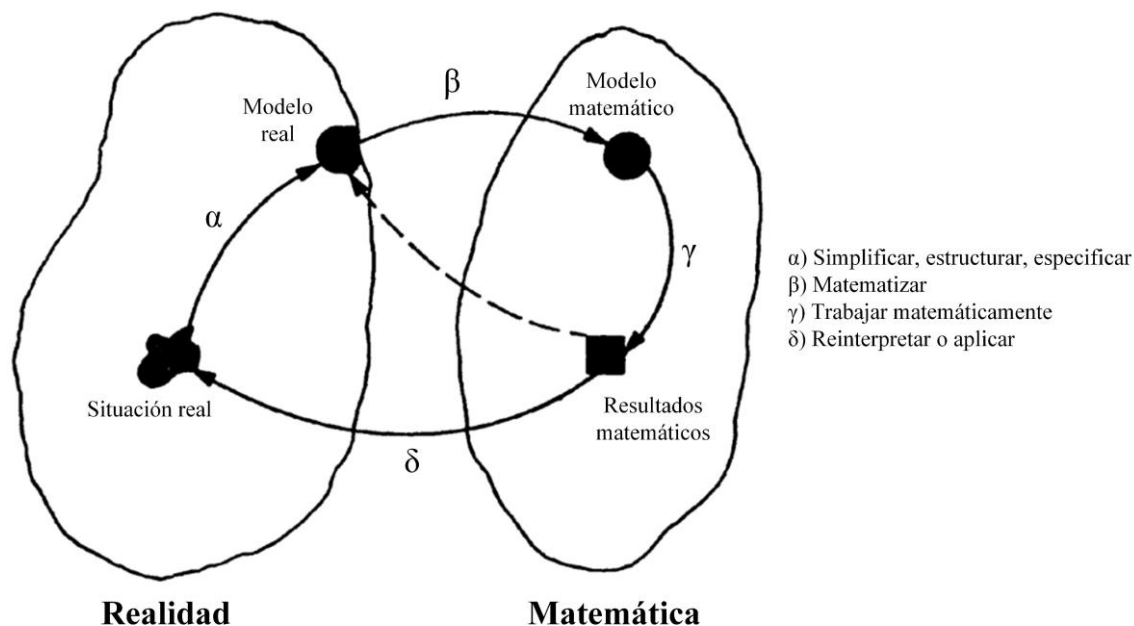
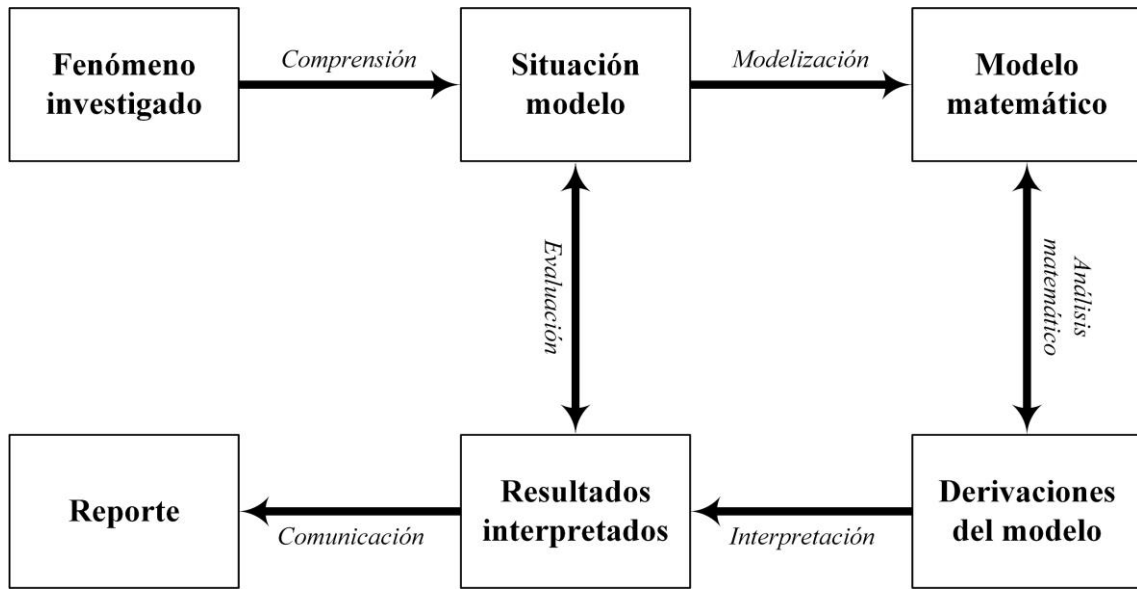


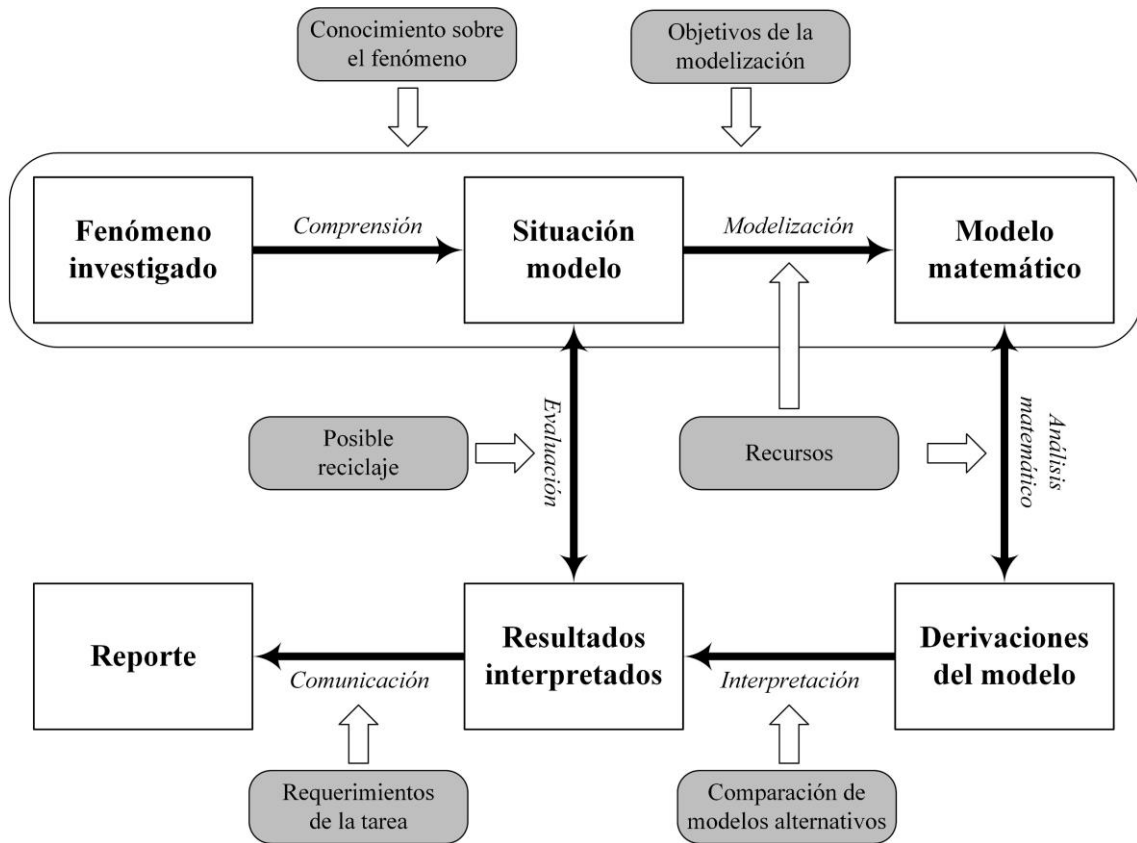
Figura 6. Ciclo de modelización de Blum/Kaiser-Messmer.
Fuente: Adaptado desde Blum (1985, p. 200, traducción del autor).

están entrelazados, entre otras causas, por el conocimiento matemático del modelizador); los *resultados matemáticos* se elaboran con la ayuda del *modelo matemático*, y tales *resultados* se deben interpretar (en el contexto de la *situación real*); finalmente, tanto las soluciones reales como el *proceso de modelización* en su totalidad, se deben validar (en el contexto de la *situación real*) y, de ser necesario, pueda que algunas partes del *ciclo de modelización* se deban procesar nuevamente (Kaiser et al., 2015).

Los desarrollos teóricos posteriores y la amplitud en la mirada sobre el *proceso de modelización* permitieron la emergencia de otros *ciclos* durante los años siguientes (por ejemplo, Galbraith y Haines, 1997; Haines et al., 2001; Schupp, 1989; Zbiek y Conner, 2006; entre otros). Un caso particular es el trabajo de Verschaffel y colaboradores (2000), quienes proponen un diagrama para explicar el *proceso de modelización* desde la perspectiva de la *resolución de problemas verbales* (ver Figura 7). A diferencia de los *ciclos de modelización* de la Figura 4, Figura 5, y Figura 6, la propuesta de estos autores no establece una separación visible entre dos mundos y considera a los *problemas de modelización* como “un tipo especial de problema de aplicación presentado en un formato particular (es decir, verbal o, al menos, predominantemente verbal) en un contexto particular (es decir, instruccional)” (Verschaffel et al., 2000, p. xii, traducción del autor). Sin embargo, dados los intereses de este estudio, no se abordarán estos *ciclos*.



(a)



(b)

Figura 7. (a) Diagrama esquemático del proceso de modelización;
(b) una visión elaborada del proceso de modelización.
Fuente: Adaptado desde Verschaffel et al. (2000, pp. xii, 168, traducción del autor).

Durante finales de la década de 1980 y comienzos de la de 1990, un término importante que se refinó fue el de *matematización*. Si bien, a grandes rasgos, este término es entendido como la traducción de una situación extra-matemática al lenguaje matemático, Treffers (1987) plantea las ideas de *matematización horizontal* y *vertical*. La primera se refiere a hacer que una situación-problema sea accesible para un tratamiento matemático (en el sentido más formal de la palabra); mientras que la segunda se refiere al procesamiento matemático más o menos formal. Posteriormente, Freudenthal (1991) refina esta distinción de la siguiente manera:

La *matematización horizontal* va desde el mundo de *la vida* al mundo de *los símbolos*. En el mundo de la vida, uno vive, actúa (y sufre); en el otro, los símbolos son moldeados, remodelados, y manipulados, de manera mecánica, comprensiva, y reflexiva; esto es la *matematización vertical*. (pp. 41–42, *cursivas* del texto original, traducción del autor).

Es importante destacar que todo *proceso de modelización* involucra ambos tipos de *matematización*; sin embargo, la *matematización* per se no implica, necesariamente, el desarrollo de un *proceso de modelización*.

Tal como se mencionó en la [subsección 1.2.1.3](#), el siglo XXI trajo consigo un interés creciente por la investigación en modelización y, en línea con los desarrollos teóricos y la amplitud en la mirada sobre este proceso, nuevas propuestas (por ejemplo, Ortlieb, 2004) y refinamientos de *ciclos de modelización*. Un caso particular de este periodo es el trabajo de los investigadores daneses Morten Blomhøj y Tomas Højgaard, quienes proponen un modelo gráfico para explicar el *proceso de modelización* (ver Figura 8) que da mayor énfasis a lo que estos autores denominan *subprocesos de modelización* y que considera aspectos de indagación (Blomhøj, 2004; Blomhøj y Højgaard, 2003).

A diferencia del *ciclo de modelización* presentado en la Figura 6, la propuesta de la Figura 8 explica el *proceso de modelización* mediante seis *subprocesos* que puede desarrollar un resolutor (Blomhøj y Højgaard, 2003):

- (a) *Formulación del problema*: Se formula una tarea, más o menos explícita, que guíe al resolutor a identificar las características del fragmento de realidad que se pretende modelizar.

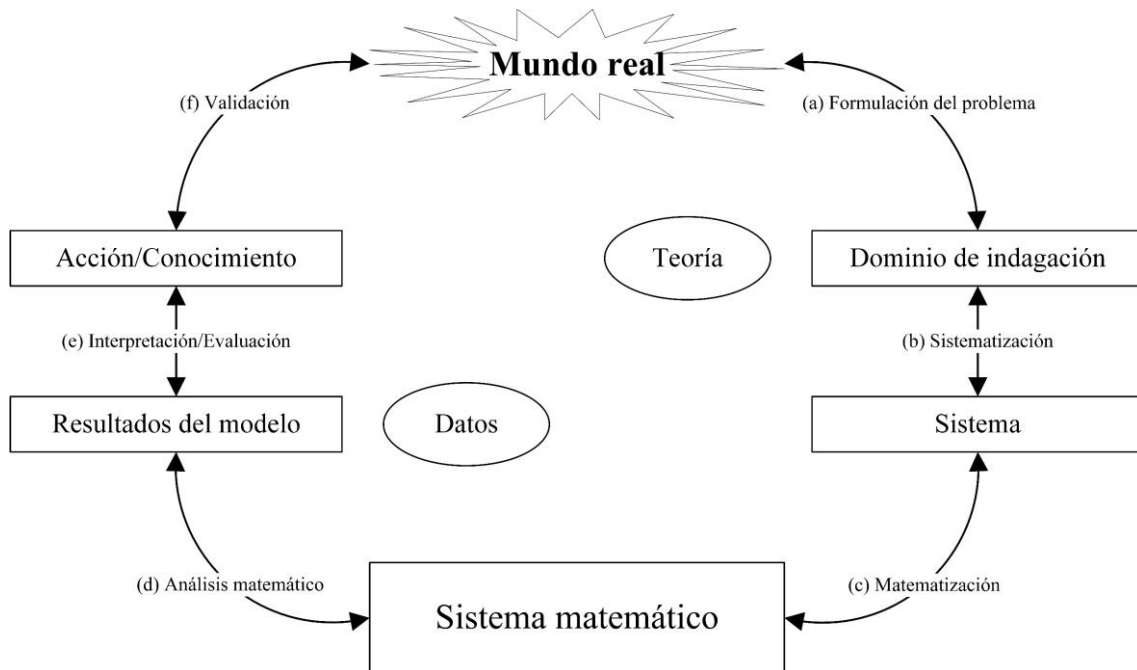


Figura 8. Modelo gráfico de un proceso de modelización.
Fuente: Adaptado desde Blomhøj (2004, p. 148, traducción del autor).

- (b) *Sistematización*: Se seleccionan los objetos y/o relaciones relevantes del dominio de indagación resultante y se idealizan para posibilitar una representación matemática.
- (c) *Matematización*: Se traducen estos objetos y/o relaciones desde su aspecto original hacia la matemática.
- (d) *Análisis matemático*: Se utilizan métodos matemáticos para obtener resultados y conclusiones matemáticas.
- (e) *Interpretación/Evaluación*: Se interpretan estos resultados y conclusiones matemáticas con respecto al dominio de investigación inicial.
- (f) *Validación*: Se evalúa la validez del modelo mediante su comparación con los datos y el conocimiento del fragmento de realidad modelizado.

En todo este *ciclo* intervienen dos elementos basales para su desarrollo: la *Teoría* (conocimientos teóricos, compartidos, o basados en experiencias personales del resolutor) y los *Datos* (observados, predichos, preexistentes, o recolectados), los cuales corresponden al dominio de indagación que se produce tras formular un problema (Blomhøj, 2004). También, en su trabajo se comienza a hablar más explícitamente de las *competencias en modelización* (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.7](#)).

De forma paralela a los desarrollos teóricos, también hubo refinamientos a los *ciclos de modelización*, específicamente, a la propuesta desarrollada por Blum (1985)/Kaiser-Messmer (1986). En particular, se destacan dos propuestas: un *ciclo de modelización* de siete fases (Blum y Leiß, 2007a en la Figura 9a) y otro desde una perspectiva cognitiva (Borromeo Ferri, 2006 en la Figura 9b). Ambas propuestas son trabajadas en profundidad en capítulos posteriores, por lo que no se detallan aquí¹².

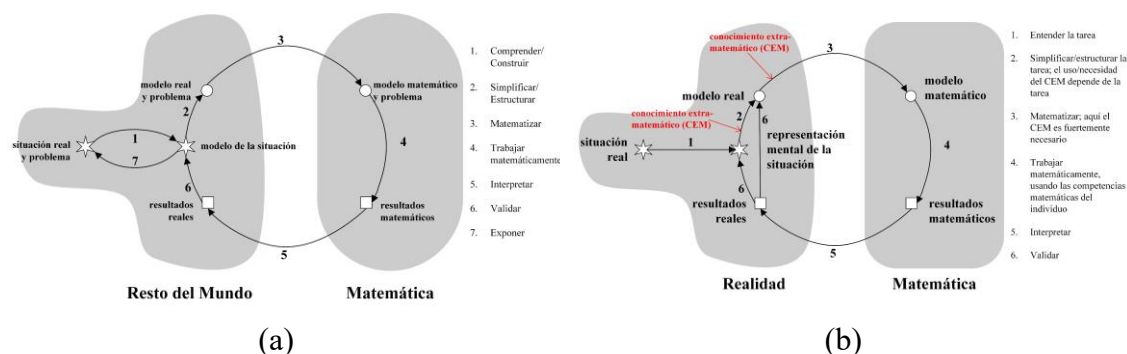


Figura 9. Ciclos de modelización derivados de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer.
Fuente: Adaptado desde (a) Blum y Leiß (2007a); (b) Borromeo Ferri (2018, p. 15).

Además de los *ciclos de modelización* de la Figura 9, hubo otras propuestas basadas en esta estructura (por ejemplo, Greefrath, 2011; Kaiser y Stender, 2013; Ludwig y Reit, 2013; K. Maaß, 2005; entre otros), las cuales tienen sus fortalezas y debilidades según sus propósitos y el tipo de tareas que promueven resolver (Blum, 2015). Por ejemplo, la propuesta de Greefrath (2011, ampliada en Greefrath y Vorhölter, 2016) extiende el *ciclo de modelización* para integrar el uso de herramientas digitales (ver Figura 10).

En la actualidad, se ha alcanzado un amplio consenso en cuanto a la estructura fundamental de un *proceso de modelización*, ello debido a los diferentes *ciclos* que se han diseñado a lo largo de los años para explicar este *proceso*, conviniéndose la siguiente descripción:

se identifican las características esenciales de un problema en el mundo real; el problema real se simplifica para desarrollar un modelo trabajable; se hacen suposiciones justificables para acomodar la información faltante; la situación real se traduce en un modelo matemático idealizado (matematización); se genera una solución inicial a partir del modelo matemático; las

¹² El ciclo de la Figura 9a se aborda ampliamente en los Capítulos 4 y 5; el ciclo de la Figura 9b se aborda ampliamente en los Capítulos 3 y 7.

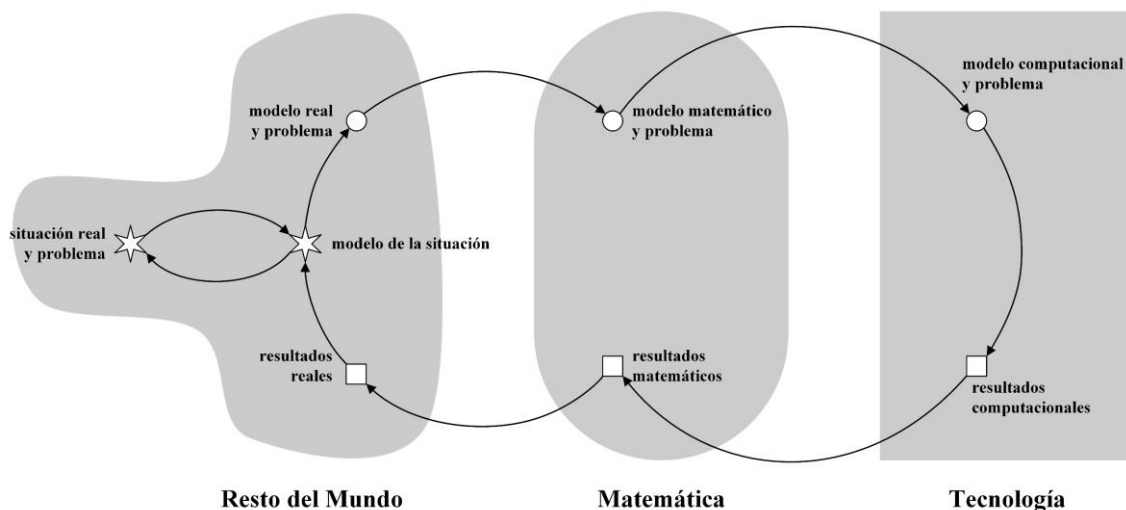


Figura 10. Ciclo de modelización ampliado con herramientas digitales.
Fuente: Adaptado desde Greefrath y Vorhölter (2016, p. 23, traducción del autor).

soluciones resultantes vuelven a ponerse de relieve frente a la situación inicial del mundo real; se considera la validez de una solución potencial; y se revisa el proceso hasta que se establece una solución aceptable. (Geiger et al., 2018, p. 218, traducción del autor)

Finalmente, para desarrollar un *proceso de modelización*, el resolutor necesita *competencias en modelización*, las cuales son abordadas en la siguiente subsección.

1.2.2.7. Competencia (o competencias) en modelización

El séptimo término para definir es *competencia (o competencias) en modelización*, aunque se requieren algunas consideraciones previas. En primer lugar, para definir qué es la *competencia en modelización*, se debe considerar la evolución histórica de este tema¹³. En la primera Conferencia ICTMA de 1983, Burghes (1984) enfatizó en la importancia de experimentar la *modelización* para ser proficiente en su uso; sin embargo, no se profundizó en temas como ‘habilidades en’ o ‘destrezas en modelización’ (Kaiser y Brand, 2015), así como tampoco en ICTMA 2 y 3, donde el foco estaba en la creación de cursos de *modelización* (véase Berry et al., 1984, 1986, 1987; Blum et al., 1989). En las ediciones posteriores de este evento académico, comenzó a emerger la discusión sobre

¹³ Nótese que, a diferencia de los términos anteriores, aquí se refiere a ‘tema’, ya que la *competencia (o competencias) en modelización* no se puede circunscribir a definirla como un único término.

la evaluación de la *modelización*, más en concreto, el qué y el cómo evaluar, a partir de la visión general aportada por Niss (1993); también, se fue consolidando la importancia de la metacognición en la *modelización*, a partir del trabajo de Tanner y Jones (1993, 1995); y emergió la noción de *competencia matemática* y su relación con el metaconocimiento en el trabajo de Stillman (1998, con soporte en el trabajo de Matos y Carreira, 1995). No obstante, en la década del 2000 es cuando se afianza el término *competencia en modelización*.

En segundo lugar, para definir qué es la *competencia (o competencias) en modelización*, se debe considerar que – al igual que con algunos de los términos anteriores – no existe un único enfoque sobre este tema (Kaiser y Brand, 2015). A comienzos de la década del 2000, Niss (2003) reporta los resultados del Proyecto KOM (acrónimo danés para ‘Competencias y Aprendizaje de la Matemática’), donde se propone que poseer una *competencia*¹⁴, es decir, ser competente, en algún dominio de la vida personal, profesional, o social significa dominar (en un sentido justo, dependiendo de las circunstancias y condiciones) los aspectos esenciales de dicho dominio. A partir de esto, el autor define la *competencia matemática* como “la habilidad de comprender, juzgar, hacer, y usar la matemática en una variedad de contextos y situaciones intra- y extra-matemáticos en los que la matemática desempeña o podría desempeñar un papel” (Niss, 2003, p. 120, traducción del autor), y dentro de esta *competencia* se encuentra la de *modelizar matemáticamente*, la cual consiste en:

- *analizar* los fundamentos y propiedades de los *modelos existentes*, incluyendo valorar su rango y validez;
- *decodificar* los modelos existentes, es decir, traducir e interpretar elementos del modelo en términos de la ‘realidad’ modelizada;
- *realizar una modelización activa* en un contexto dado: estructurar el campo; matematizar; trabajar con[en] en el modelo, incluyendo resolver los problemas que genera; validar el modelo interna y externamente; analizar y criticar el modelo, en sí mismo y frente a posibles alternativas; comunicar sobre el modelo y sus

¹⁴ En inglés, existe una diferenciación entre los términos *competence* y *competency*: la primera se refiere a la habilidad de hacer algo bien, y la segunda se refiere a una habilidad importante que se necesita para un trabajo. En otras palabras, *competence* es una habilidad o destreza general, mientras que *competency* es mucho más específica. Esta diferencia no existe en español.

resultados; monitorear y controlar el proceso de modelización en su totalidad. (Niss, [2003](#), p. 120, *cursivas* del texto original, traducción del autor)

A partir de este trabajo, y encontrándose en una etapa mucho más avanzada del Proyecto KOM, Blomhøj y Højgaard ([2007](#)) refinan la definición de *competencia* y plantean que es “la disposición perspicaz de un individuo para actuar en respuesta a los desafíos de una situación determinada” (p. 47, traducción del autor). Como consecuencia de esta definición, por una parte, se determina que la *competencia* está orientada a la acción y no se basa en conocimientos o destrezas y, por otra parte, que el desarrollo de *competencias* es un proceso continuo (Blomhøj y Højgaard, [2007](#)). Siguiendo esta línea, los autores definen la *competencia matemática* como:

la disposición perspicaz de un individuo para actuar en respuesta a un *determinado tipo de desafío matemático* de una situación dada, y luego identificar, formular explícitamente, y ejemplificar un conjunto de competencias matemáticas que pueden acordarse como dimensiones independientes en el ámbito de la competencia matemática. (Blomhøj y Højgaard, [2007](#), p. 47, *cursivas* del texto original, traducción del autor)

Así, estos autores definen la *competencia en modelización matemática* como “la disposición perspicaz de un individuo para llevar a cabo todas las partes de un proceso de modelización matemática en un determinado contexto” (Blomhøj y Højgaard, [2007](#), p. 48, traducción del autor), tomando como base el *ciclo de modelización* propuesto en estudios anteriores (ver Figura 8) para caracterizar dicho *proceso*. Finalmente, Blomhøj y Højgaard ([2007](#)) proponen dos enfoques para el desarrollo de la *competencia en modelización*: uno holístico (que abarque el desarrollo del *ciclo de modelización* completo) y otro atomista (que se enfoque, especialmente, en la matematización y el trabajo con el modelo matemático).

Un desarrollo teórico paralelo es el de K. Maaß ([2006](#)) quien, basándose (entre otros) en el trabajo de Niss ([2003](#)), propone una clasificación más detallada de *competencias* y *subcompetencias en modelización*. Para ello, esta autora toma como base su adaptación del *ciclo de modelización* de la Figura 6 (véase K. Maaß, [2005](#)) y realiza un desglose de seis *competencias en modelización*:

- A. Subcompetencias para llevar a cabo los pasos individuales del proceso de modelización: Para comprender el problema real y para configurar un modelo basado en la realidad; para configurar un modelo matemático a partir del modelo real; para resolver cuestiones matemáticas dentro del modelo matemático; para interpretar los resultados matemáticos en una situación real; para validar la solución.
- B. Competencias metacognitivas en modelización: Importancia de la metacognición como forma de pensar sobre el pensamiento propio y de controlar los procesos de pensamiento propios (a partir de la postura de Sjøvold, [2003](#)).
- C. Competencias para estructurar problemas del mundo real y para trabajar con un sentido de dirección para encontrar una solución: Los resolutores deben guiarse hacia objetivos concretos durante el proceso de modelización, pues las fases del ciclo de modelización no son suficientes.
- D. Competencias para discutir con relación al proceso de modelización y para anotar esta argumentación: Importancia de la argumentación sobre los procedimientos realizados a lo largo del proceso de modelización.
- E. Competencias para ver las posibilidades que ofrece la matemática para la solución de problemas del mundo real y para considerar estas posibilidades como positivas: Se distinguen cuatro tipos de modelizadores, a saber, el *distante de la realidad*, el *distante de la matemática*, el *reflexivo*, y el *desinteresado*.

Con respecto a las *subcompetencias en modelización* propuestas en A, se pueden sintetizar como las *subcompetencias* necesarias para desarrollar un *proceso de modelización* como los representados en los *ciclos* de la Figura 9, mientras que las *competencias en modelización* propuestas en B–E, se pueden sintetizar como los procesos relevantes de la actividad matemática que se suceden junto con el *proceso de modelización* (véase una discusión más amplia en el [Capítulo 3](#)).

Siguiendo la línea de las *subcompetencias en modelización* propuestas en A, años más tarde, K. Maaß ([2010](#)) diseña un esquema para clasificar tareas de modelización que apuntan al desarrollo de este *proceso* en el aula, tanto de manera puntual (porciones del *proceso de modelización*) como global (el *proceso de modelización* completo). Este esquema se trabaja ampliamente en el [Capítulo 6](#).

En la actualidad, asumiendo la existencia de otras posturas (como las curriculares, por ejemplo, Turner et al., [2013](#)) y tomando en cuenta el trabajo de otros investigadores (por ejemplo, Galbraith et al., [2007](#); Greer y Verschaffel, [2007](#); Ikeda et al., [2007](#); Jiang et al., [2007](#); entre otros), la comunidad de investigación en modelización ha convergido en el planteamiento de dos grandes definiciones sobre *competencias en modelización*. Por una parte, se ha convenido una definición general (similar al enfoque holístico de Blomhøj y Højgaard, [2007](#)), propuesta por Niss y Højgaard ([2019](#)), que se denomina *Competencia en modelización matemática – análisis y construcción de modelos de contextos y situaciones extra-matemáticos*, y es la que se adopta en esta tesis doctoral como referente para la *competencia en modelización*:

Esta competencia se enfoca en los modelos matemáticos y en la modelización, es decir, en el uso de la matemática para abordar cuestiones, contextos, y situaciones extra-matemáticas. El núcleo de esta competencia es ser capaz de construir dichos modelos matemáticos, así como también analizar y evaluar críticamente los modelos existentes o propuestos, teniendo en cuenta los propósitos, datos, hechos, características, y propiedades del dominio extra-matemático que se está modelizando. Implica relacionarse con y navegar dentro y a través de los procesos clave del ‘ciclo de modelización’ en sus diversas manifestaciones. (p. 16, traducción del autor)

En esta definición, los autores hacen hincapié en que trabajar con situaciones-problema con alto contenido matemático que se sitúan en un contexto extra-matemático, pero sin considerar lo suficiente dicho contexto, no necesariamente implica la *competencia en modelización*, sino más bien la *competencia en el manejo de problemas matemáticos* (referida al planteamiento y resolución de problemas matemáticos).

Por otra parte, se han convenido definiciones particulares (similares al enfoque atomista de Blomhøj y Højgaard, [2007](#)) para las distintas *competencias en modelización*. En esta postura, se destaca el trabajo de Kaiser ([2007](#)), quien diferencia entre *habilidades en modelización* y *competencias en modelización* de la siguiente manera: “Las competencias en modelización incluyen, a diferencia de las habilidades en modelización, no sólo la habilidad sino también la voluntad de resolver problemas, con aspectos matemáticos

tomados de la realidad, mediante la modelización matemática” (p. 110, traducción del autor). De este modo, las *competencias en modelización* (que corresponden a las fases del *ciclo de modelización*, como en A por K. Maaß, [2006](#)) se entienden mediante *subcompetencias* para cada una (Kaiser y Brand, [2015](#)). Como forma de sintetizar la propuesta de Kaiser ([2007](#)), en la Tabla 2 se presenta la propuesta de Greefrath y colaboradores (Greefrath, [2015](#); Greefrath et al., [2013](#); Greefrath y Vorhölter, [2016](#)), y que es la que se adopta en esta tesis doctoral como referente para las *subcompetencias en modelización*.

Tabla 2. Subcompetencias en modelización matemática.

Subcompetencias	Indicadores
Construir	Construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formulan una comprensión de su problema.
Simplificar	Identifican información relevante e irrelevante de un problema real.
Matematizar	Traducen situaciones reales específicas y simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas, y funciones).
Interpretar	Relacionan los resultados obtenidos a partir de la manipulación dentro del modelo con la situación real para así obtener resultados reales.
Validar	Juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad.
Exponer	Relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con la situación real, y así obtienen una respuesta al problema.

Nota: Trabajar matemáticamente (trabajar con métodos matemáticos en el modelo matemático para obtener soluciones matemáticas) no aparece en esta tabla, ya que no se considera como una subcompetencia específica del proceso de modelización. Fuente: Adaptado desde Greefrath y Vorhölter ([2016](#), p. 19, traducción del autor).

1.2.2.8. *Perspectivas de modelización*

El octavo y último tema para abordar son las *perspectivas de modelización*, entendidas como la forma en que se define, aborda, y caracteriza el *proceso de modelización*. Para tratar este tema, se toman como referentes los estudios realizados por Kaiser y Sriraman ([2006](#)) y Abassian y colaboradores ([2020](#)).

Como se mencionó en la [subsección 1.2.1.2](#), en su trabajo doctoral, Kaiser-Messmer ([1986](#)) identifica dos *perspectivas sobre aplicaciones matemáticas y modelización* que se destacaban en la década de 1980:

- Una *perspectiva pragmática* enfocada en objetivos utilitaristas, como aplicar la matemática para resolver problemas prácticos, liderada por el trabajo y reflexiones de Pollak (1968, 1969).
- Una *perspectiva científico-humanista* enfocada en la matemática como ciencia y en los ideales humanistas de la educación, como la habilidad de crear relaciones entre la matemática y la realidad, liderada por el trabajo y reflexiones de Freudenthal (1968, 1969).

Kaiser y Sriraman (2006) reconocen que, de forma paralela a estas dos *perspectivas*, se empezaron a desarrollar otras, como la *perspectiva epistemológica* (centrada en el desarrollo de la teoría matemática en la matematización; véase Steiner, 1968), la *perspectiva emancipadora* (centrada en un enfoque sociocrítico de la educación; véase Gellert et al., 2001), y la *perspectiva integradora* (desarrolla un enfoque integrador entre los propósitos científicos, matemáticos, y pragmáticos; véase Blum y Niss, 1991). Tomando como base las *perspectivas* antes mencionadas, Kaiser y Sriraman (2006) proponen una primera categorización, como se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. Clasificación de perspectivas de modelización según Kaiser y Sriraman (2006).

Perspectivas	Objetivos	Relaciones*	Antecedentes
Realista o aplicada	Objetivos utilitaristas y pragmáticos, como resolver problemas del mundo real, entender el mundo real, y promover competencias en modelización.	Perspectiva pragmática de Pollak.	Pragmatismo anglosajón y matemáticas aplicadas.
Contextual	Objetivos psicológicos y relacionados con la asignatura, como resolver problemas verbales.	Enfoques de procesamiento de información que conducen a enfoques de sistemas.	Debate estadounidense sobre resolución de problemas, práctica escolar cotidiana, y experimentos psicológicos de laboratorio.
Educativa: (a) didáctica (b) conceptual	Objetivos pedagógicos y relacionados con la asignatura, como (a) estructurar y promover procesos de aprendizaje y (b) introducir y desarrollar conceptos.	Perspectiva integradora de Blum y Niss, y desarrollos posteriores del enfoque científico-humanista.	Teorías didácticas y del aprendizaje.

Perspectivas	Objetivos	Relaciones*	Antecedentes
Sociocrítica	Objetivos pedagógicos, como comprender críticamente el mundo que nos rodea.	Perspectiva emancipadora.	Enfoques sociocríticos en la sociología política.
Epistemológica o teórica	Objetivos orientados a la teoría, como promover el desarrollo teórico.	Perspectiva científico-humanista de los primeros trabajos de Freudenthal.	Epistemología romana.

Nota (*): Esta columna se refiere a las relaciones de cada perspectiva con otra anterior. Fuente: Adaptado desde Kaiser y Sriraman (2006, p. 304, traducción del autor).

Con respecto a la *perspectiva contextual*, Kaiser y Sriraman (2006) la relacionan con el ámbito estadounidense, donde se desarrolla la teoría de actividades generadoras de modelos (véase Lesh y Doerr, 2003b; Lesh y Sriraman, 2005), también conocida como *perspectiva de modelos y modelización*. Entre las premisas sobre las que se basa esta *perspectiva* se encuentran: (a) el carácter social de los sistemas conceptuales; (b) la diversidad de medios de representación de dichos sistemas; (c) el conocimiento se organiza en torno a experiencias y abstracciones, y que el conocimiento para la toma de decisiones debe provenir de diferentes disciplinas; (d) los ‘mundos de experiencias’ son producto de la creatividad humana, son cambiantes, y el conocimiento para entenderlos también. Sin embargo, dados los intereses de este estudio, no se abordará esta *perspectiva*.

Con respecto a la *perspectiva educativa*, Kaiser y Sriraman (2006) la relacionan con el trabajo iniciado por Freudenthal (1968, 1969) y continuado por de Lange (1987) y Treffers (1987) desde la *perspectiva científico-humanista*, donde los ejemplos del mundo real y sus interrelaciones con la matemática son consideradas como el núcleo para estructurar la enseñanza y el aprendizaje matemático. Los desarrollos posteriores de esta *perspectiva* la dotan de un carácter *integrador*, con los trabajos de Blum y Niss (1989, 1991, entre otros), referentes importantes dentro de esta investigación.

Con respecto a la *perspectiva sociocrítica*, Kaiser y Sriraman (2006) la consideran como una continuación de la *perspectiva emancipadora*, enfocándose en las dimensiones socioculturales de la matemática. Una vertiente de esta *perspectiva* es la etno-matemática, desarrollada (entre otros) por D’Ambrosio (1999), quien enfatiza en el rol social de la matemática, de los *modelos matemáticos*, y de la *modelización*; también, destacan los trabajos de Barbosa (2006), quien aborda la discriminación entre la *modelización*

matemática desarrollada por profesionales y la desarrollada en la escuela. En términos pedagógicos, el foco se encuentra en la promoción del pensamiento crítico en los estudiantes, sin embargo, dados los intereses de este estudio, no se abordará esta *perspectiva*.

En la clasificación de la Tabla 3, se encuentran dos *perspectivas* casi completamente opuestas. Por una parte, la *perspectiva realista*, derivada de la *perspectiva pragmática*, donde la *modelización* se entiende como la actividad de resolver problemas auténticos, principalmente de la industria y las ciencias, tal como lo haría un modelizador profesional, y se busca llevar a cabo este *proceso* en su totalidad para desarrollar *competencias en modelización* (esta *perspectiva* es ampliamente abordada a lo largo de esta tesis). Por otra parte, la *perspectiva epistemológica*, derivada (entre otros) de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1992) o de la idea de ‘contrato didáctico’ de Brousseau (2002), donde no se presta gran atención a los aspectos de realidad en los problemas, y toda actividad matemática es entendida como *modelización*, por lo que este *proceso* no estaría limitado por la matematización (dados los intereses de este estudio, no se abordará esta última *perspectiva*).

Más allá de la clasificación de la Tabla 3, Kaiser y Sriraman (2006) reconocen la existencia de una *meta-perspectiva* de carácter *cognitivo* que, en ese tiempo, era considerada como la más reciente para el análisis del *proceso de modelización* (véase Borromeo Ferri, 2006). En esta *meta-perspectiva*, los objetivos se dividen en dos grupos: por una parte, los objetivos de investigación, como analizar y comprender los procesos cognitivos que tienen lugar durante el *proceso de modelización*; por otra parte, los objetivos psicológicos, como promover los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de *modelos* como imágenes mentales o físicas, o mediante el énfasis en la *modelización* como un *proceso* mental (abstracción o generalización). Esta *meta-perspectiva* es ampliamente abordada a lo largo de esta tesis.

Finalmente, Kaiser y Sriraman (2006) señalan que esta clasificación no debe ser entendida en términos taxativos y que su intención es, por una parte, demostrar el estado actual del avance de la investigación en *modelización* y, por otra parte, que estos avances provienen de la evolución de tradiciones ya existentes. De hecho, la clasificación de estos autores fue utilizada, por ejemplo, para categorizar las contribuciones de los investigadores a los

eventos académicos (por ejemplo, Blomhøj, [2009](#); Kaiser et al., [2007](#)), aunque principalmente dibujó líneas para futuras investigaciones y desarrollos teóricos.

Como se mencionó en la [subsección 1.2.1.3](#), el cambio de siglo trajo consigo, entre otros, un reconocimiento generalizado de la importancia de la *modelización* para la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos y un notorio aumento en el interés por investigar sobre este tema. No obstante, las dificultades para implementar curricularmente la *modelización* se justificaban parcialmente por la diversidad de enfoques teóricos en torno a este *proceso* (Borromeo Ferri, [2013](#); Lesh y Fennewald, [2013](#)).

En su revisión de la literatura, Abassian y colaboradores ([2020](#)), más que proponer una nueva clasificación de *perspectivas de modelización*, refinan notablemente la propuesta de Kaiser y Sriraman ([2006](#)). Estos autores se basan en las dos metas principales que se plantean para la *modelización*:

- La primera es facilitar el aprendizaje de la matemática mediante el uso de situaciones contextuales. Esta meta también se conoce como “modelización para el aprendizaje de la matemática” (Niss et al., [2007](#), p. 6, traducción del autor) o “modelización como un vehículo” (Julie y Mudaly, [2007](#), p. 504, traducción del autor).
- La segunda es explorar escenarios extra-matemáticos usando la matemática como herramienta, cuyo fin no es, necesariamente, el aprendizaje matemático, sino más bien el del *proceso de modelización*. Esta meta también se conoce como la aplicación de la matemática para la resolución de problemas (Niss et al., [2007](#)) o “modelización como un contenido” (Julie y Mudaly, [2007](#), p. 504, traducción del autor).

Estas metas no deben ser entendidas en términos dicotómicos, sino más bien duales, ya que es posible trabajar distintos niveles de cada meta al mismo tiempo. En la Tabla 4, se sintetiza la clasificación de *perspectivas de modelización* que proponen Abassian y colaboradores ([2020](#)) a partir de su revisión de la literatura, en la que consideran cinco aspectos para cada *perspectiva*: sus metas (primera columna), su definición para *modelo matemático* (segunda columna), su descripción para el *ciclo de modelización* (tercera columna) y para el diseño de *problemas de modelización* (cuarta columna), y su foco de investigación (quinta columna).

Tabla 4. Clasificación de perspectivas de modelización según Abassian y colaboradores (2020).

Perspectivas	Metas	Modelo matemático	Ciclo de modelización	Problema de modelización	Foco de investigación
Realista	Desarrollar destrezas para modelizar y comprender escenarios del mundo real auténticos.	Objetos matemáticos que explican el escenario del mundo real dado.	Un proceso cíclico de muchos pasos que comienza en el mundo real, se matematiza en el mundo matemático, y termina en el mundo real.	Tareas de la vida real (auténticas y desordenadas) que requieren el uso del ciclo de modelización.	Competencias en modelización matemática.
Educativa	Desarrollar destrezas para modelizar y comprender la matemática.	Objetos matemáticos que tienen una relación con el escenario del mundo real dado.	Un proceso cíclico de muchos pasos que comienza en el mundo real, se matematiza, y termina en el mundo real.	Tareas auténticas que pueden simplificarse para revelar metas matemáticas específicas.	Matemática en la modelización matemática y modelización matemática en el currículo.
Modelos y Modelización	Desarrollar una comprensión profunda de la matemática mediante un contexto de modelización.	Un sistema conceptual que mapea las características estructurales de un sistema relevante.	Un ciclo que comienza en el mundo real, luego, una vez que se desarrolla un modelo, vuelve al mundo real, y se repite tantas veces como sea necesario.	Actividades generadoras de modelos diseñadas para desarrollar un concepto matemático específico en el contexto de un problema del mundo real.	El uso de las actividades generadoras de modelos para enseñar matemática.

Tabla 4. Clasificación de perspectivas de modelización según Abassian y colaboradores (2020). (cont.)

Perspectivas	Metas	Modelo matemático	Ciclo de modelización	Problema de modelización	Foco de investigación
Sociocrítica	Desarrollar destrezas en modelización para tomar decisiones en la sociedad.	Representación matemática de un escenario relevante.	Todos los aspectos de la participación del modelizador en la exploración de un problema del mundo real utilizando la matemática.	Tareas en un contexto societal que también se enfocan en el desarrollo de conceptos matemáticos específicos.	Uso de los estudiantes de la matemática para comprender críticamente la sociedad.
Epistemológica	Desarrollar el razonamiento matemático formal.	El resultado de una actividad basada en situaciones y conceptos matemáticos.	Actividades de cuatro etapas, donde los modelos de y los modelos para se crean para desarrollar el razonamiento matemático formal.	Sin requisitos establecidos.	Enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos específicos.

Nota: La clasificación propuesta originalmente por Abassian et al. (2020) incluye los principales investigadores de cada perspectiva, sin embargo, aquí no se incluyen. Fuente: Adaptado desde Abassian et al. (2020, p. 56, traducción del autor).

Como se mencionó anteriormente, la propuesta de Abassian y colaboradores (2020) es, principalmente, un refinamiento notable de la de Kaiser y Sriraman (2006). Por lo tanto, en los párrafos siguientes, se destacan las novedades de la clasificación de la Tabla 4 con relación a la de la Tabla 3.

Con respecto a la *perspectiva realista*, Abassian y colaboradores (2020) especifican que su foco se encuentra, principalmente, en el valor de resolver problemas del mundo real más que en el desarrollo de algún objeto matemático específico (véase Kaiser, Schwarz, y Buchholtz, 2011). Dicho de otro modo, esta *perspectiva* se enfoca en el desarrollo y promoción de *competencias en modelización*, donde el *ciclo de modelización* propuesto por Blum y Leiß (2007a) y sus derivaciones (ver Figura 9) se destacan como los referentes para caracterizar el *proceso de modelización* bajo esta *perspectiva*. El *problema* de la Figura 2 es un ejemplo paradigmático para esta *perspectiva*.

Con respecto a la *perspectiva educativa*, Abassian y colaboradores (2020) especifican que, si bien guarda algunas similitudes con la *perspectiva realista*, sobre todo, en lo que respecta a la descripción del *ciclo de modelización* y las características de estos *problemas*, la diferencia radica en que la *perspectiva educativa* busca el equilibrio entre el aprendizaje de las *competencias en modelización* y de los contenidos matemáticos involucrados. Dicho de otro modo, esta *perspectiva* considera a la *modelización* como un contenido y como un vehículo (en términos de Julie y Mudaly, 2007), donde el *ciclo de modelización* propuesto por Zbiek y Conner (2006) (así como aquéllos derivados del trabajo de Blum/Kaiser- Messmer) se destaca como uno de los referentes para caracterizar el *proceso de modelización* bajo esta *perspectiva* (ver Figura 11), pues el interés también se coloca en la actividad matemática subyacente.

Con respecto a la *perspectiva de modelos y modelización*, Abassian y colaboradores (2020) la establecen como una evolución de la *perspectiva contextual* que proponen Kaiser y Sriraman (2006). Esta *perspectiva* se fundamenta en los trabajos desarrollados por Lesh y colaboradores (véase Lesh y Doerr, 2003a; Lesh et al., 2000; Lesh y Sriraman, 2005; entre otros), a su vez, influenciados por los trabajos desarrollados por Piaget (manifestado en su definición de *modelo matemático*). Si bien la *perspectiva de modelos y modelización* comparte el interés por el uso y comprensión de los conceptos matemáticos con la *perspectiva educativa*, la diferencia radica en el énfasis que se da a las actividades generadoras de *modelos* (MEAs, por su acrónimo en inglés). Las MEAs

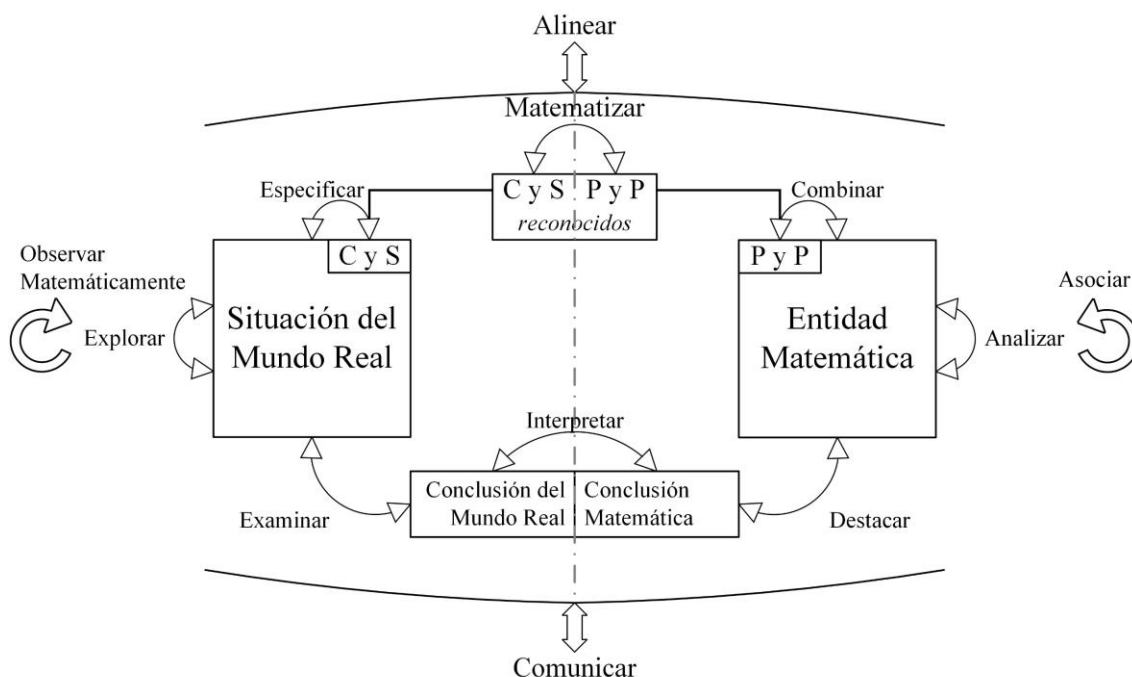


Figura 11. Diagrama del proceso de modelización propuesto por Zbiek y Conner (2006).
Nota: C y S significan *condiciones y suposiciones*; P y P significan *propiedades y parámetros*.
Fuente: Adaptado desde Zbiek y Conner (2006, p. 98, traducción del autor).

son tareas del mundo real que se diseñan para promover el desarrollo matemático, siguiendo seis principios: (1) construcción del modelo, (2) realidad, (3) autoevaluación, (4) documentación del modelo, (5) generalización, y (6) prototipo efectivo (Lesh y Doerr, 2003b, traducción del autor). Las MEAs también se utilizan para investigar el pensamiento matemático de los estudiantes (véase Doerr y Lesh, 2011), mediante el desarrollo del *ciclo de modelización* que se presenta en la Figura 12.

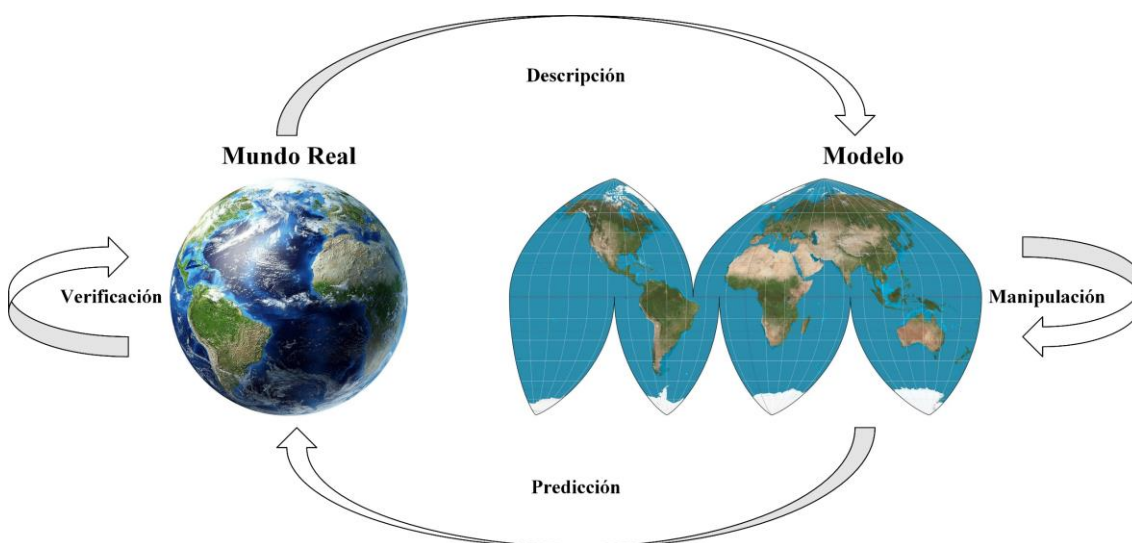


Figura 12. Ciclo de modelización propuesto por Lesh y Doerr (2003b).
Fuente: Adaptado desde Lesh y Doerr (2003b, p. 17, traducción del autor).

Con respecto a la *perspectiva sociocrítica*, Abassian y colaboradores (2020) amplían sus fundamentos con los trabajos de Skovsmose y colaboradores (véase Skovsmose, 1994; Skovsmose y Borba, 2004; entre otros) en el campo de la pedagogía crítica. Esta *perspectiva* parte de la idea de que, si la matemática es utilizada en la sociedad para tomar decisiones, por ejemplo, mediante la *modelización*, entonces, los modelizadores que crean los *modelos matemáticos* y son capaces de criticarlos tienen cierto poder sobre la sociedad. Esta *perspectiva* difiere en gran medida de las tres anteriores en el sentido que, por una parte, no enfatiza en el desarrollo de *competencias en modelización* (como las *perspectivas realista y educativa*) y, por otra parte, no se enfoca en la comprensión matemática (como las *perspectivas educativa y de modelos y modelización*), sino que su propósito es formar modelizadores críticos capaces de reconocer el poder de los *modelos matemáticos* y de la matemática en la sociedad (Barbosa, 2006, 2007).

Con respecto a la *perspectiva epistemológica*, Abassian y colaboradores (2020) amplían sus fundamentos con los trabajos de Gravemeijer y colaboradores (véase Gravemeijer, 1999, 2002, 2007; Gravemeijer y Doorman, 1999; entre otros) en el campo de la Educación Matemática Realista. Dado que el objetivo de esta *perspectiva* es desarrollar la comprensión matemática, a diferencia de las anteriores, no requiere un problema del mundo real para modelizar, pues toda tarea matemática es considerada como una *tarea de modelización*. Gravemeijer (2002, 2007) describe que el *proceso de modelización* en esta *perspectiva* consiste en cuatro etapas: (1) actividad en el establecimiento de la tarea, (2) actividad referencial, (3) actividad general, y (4) razonamiento matemático formal.

Finalmente, la propuesta de Abassian y colaboradores (2020) no contempla la *meta-perspectiva cognitiva* del mismo modo que lo hacen Kaiser y Sriraman (2006), sino más bien, la incluyen dentro de las *perspectivas realista* y, parcialmente, de la *educativa*.

Además de las dos revisiones de la literatura antes descritas sobre *perspectivas de modelización*, también se han reportado otras revisiones sobre temas más específicos en torno a la investigación en *modelización*. Por ejemplo, English y colaboradores (2016) realizan una revisión de las actas de los eventos PME entre 2005 y 2015, para así identificar las tendencias de investigación en *modelización*; también, Cevikbas y colaboradores (2022) realizan una revisión sistemática de la literatura sobre los desarrollos conceptuales en torno a las *competencias en modelización* entre 2003 y 2021;

mientras que Frejd (2013) presenta una revisión crítica de la literatura sobre investigación en evaluación en *modelización*, revelando también los criterios que se suelen privilegiar dependiendo del enfoque de *competencias en modelización* (holístico o atomista). Una característica común de estos estudios es que consideran las distintas *perspectivas de modelización* para organizar sus resultados.

Una última revisión de la literatura que se destaca es la que realizan Preciado y colaboradores (2023) privilegiando el atributo geográfico en la distribución de la investigación en *modelización*. En el contexto de la elaboración de esta tesis doctoral, el trabajo de estos autores se considera como una de las revisiones de la literatura de investigación en *modelización* más recientes, lo cual permite aportar una mirada actualizada del estado del arte en esta materia¹⁵. En su trabajo, estos autores consideran como fuentes: (a) los capítulos de seis libros emanados de las Conferencias ICTMA y de dos de los Congresos ICME (acrónimo en inglés de *Comisión Internacional de Instrucción Matemática*); y (b) 98 artículos (publicados hasta 2020) provenientes de nueve revistas de investigación en Didáctica de la Matemática (a partir de las clasificaciones de Toerner y Arzarello, 2012; Williams y Leatham, 2017). En la Tabla 5 se sintetizan los resultados de la revisión de la literatura realizada por Preciado y colaboradores (2023) considerando los siguientes atributos: países con mayor número de publicaciones (segunda fila), *perspectiva de modelización* privilegiada en cada país (tercera fila), contenido privilegiado en cada país (cuarta fila), y nivel educativo privilegiado en cada país (quinta fila).

La síntesis de la Tabla 5 muestra que los tres países con más producción académica en la comunidad ICTMA son Alemania, Estados Unidos, y Australia, con casi la mitad del total de publicaciones (249 de 500). Si bien a nivel internacional existe una tendencia a trabajar la *perspectiva educativa* de modelización, en Estados Unidos prevalece una preferencia por los estudios bajo la *perspectiva modelos y modelización*, así como en Brasil se sucede lo mismo con la *perspectiva sociocrítica*. En ambos países, esta tendencia se debe al origen de las *perspectivas*, convirtiéndolas en tendencias locales de investigación. En esta tesis doctoral, se asume principalmente la *perspectiva de modelización realista* con algunos ribetes teóricos de la *perspectiva educativa*.

¹⁵ Para una revisión de la literatura en el contexto hispanoamericano, véase Peña et al. (2023).

Tabla 5. Síntesis de la revisión de la literatura de Preciado y colaboradores (2023).

Atributos		Datos					
Países (*)	Alemania (104)	Estados Unidos (79)	Australia (66)	Brasil (37)	Japón (22)	Reino Unido (18)	Otros (174)
Perspectiva	Educativa	Contextual/ Modelos y modelización	Educativa	Sociocrítica	Educativa	Educativa	Educativa
Contenido	Competencias en modelización	Contenidos matemáticos específicos	Competencias en modelización	Contenidos matemáticos específicos	Contenidos matemáticos específicos/ Competencias en modelización	Contenidos matemáticos específicos	Contenidos matemáticos específicos
Nivel educativo	Escolar (educación secundaria)	Escolar (educación secundaria)	Escolar (educación secundaria)	Universitaria (pregrado)	Escolar (educación secundaria)	Escolar (educación secundaria)	Escolar (educación secundaria)

Nota (*): Esta fila incluye el número de publicaciones entre paréntesis. Fuente: Adaptado desde Preciado et al. (2023, traducción del autor).

Esta síntesis también muestra que los principales temas de estas investigaciones son el desarrollo de las *competencias en modelización* y el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos por los estudiantes. Esto quiere decir que, si bien se enfatiza en los conocimientos sobre determinados contenidos matemáticos y el desarrollo de *competencias en modelización*, no se abordan mayoritariamente las grandes áreas del conocimiento matemático (álgebra, cálculo, geometría, etc.) de manera global. Además, la mayoría de las investigaciones se centran en el nivel educativo escolar, principalmente, en educación secundaria (con excepción de Brasil). En esta tesis doctoral, el contenido de la investigación, por una parte, es fundamentalmente teórico-reflexivo y, por otra parte, no está limitado a un determinado contenido o área del conocimiento matemático específicos; del mismo modo, el nivel educativo en el que se desarrolló parte de esta investigación fue el de postgrado, debido al contexto de educación de profesores en España. En otras palabras, esta tesis doctoral busca investigar en campos del conocimiento en Didáctica de la Matemática que no han sido suficientemente explorados.

1.2.3. Investigaciones en modelización matemática

Como se pudo apreciar en la [subsección 1.2.1](#), la investigación en modelización matemática ha ido evolucionando desde, sobre todo, la segunda mitad del siglo XX. Particularmente, 1973 es considerado como el año en que la modelización comenzó a formar parte integral de la investigación en Didáctica de la Matemática, ello debido a que fue el año en que se publicó el Informe McLone, donde se resaltaba el rendimiento de los estudiantes para resolver problemas, pero también la poca capacidad de formularlos (Frejd y Vos, [2024](#)). Durante estos 50 años, las investigaciones en modelización permitieron un refinamiento conceptual y su caracterización como un proceso relevante de la actividad matemática, como se pudo apreciar en la [subsección 1.2.2](#). No obstante, estos avances en investigación fueron posibles por el hecho de considerar a la modelización como un tema de estudio relevante dentro de la Didáctica de la Matemática.

Tomando en consideración que la producción académica de estos últimos 50 años ha sido cuantiosa, en esta subsección se destacan tres áreas de interés que se abordan en esta tesis doctoral durante los años transcurridos del siglo XXI, considerando como referente principal mas no exclusivo el trabajo desarrollado por la comunidad ICTMA: las

reflexiones sobre la estructura y usos de los ciclos de modelización ([subsección 1.2.3.1](#)), el papel de la modelización en la formación de profesores ([subsección 1.2.3.2](#)), y la articulación de la modelización con otras competencias profesionales y procesos relevantes de la actividad matemática ([subsección 1.2.3.3](#)).

1.2.3.1. Reflexiones sobre los ciclos de modelización

Tal como se declaró en la [subsección 1.2.2.6](#), el ciclo de modelización es una representación idealizada del proceso de modelización, por lo que constituye no sólo una herramienta descriptiva del tránsito del modelizador entre el mundo real y la matemática, sino también una herramienta de análisis de la actividad matemática subyacente al proceso de modelización. En esta subsección, se destacan algunos estudios en los que se amplía la utilidad del ciclo de modelización para analizar otros aspectos que trascienden a las fases y transiciones del proceso de modelización.

Galbraith y Stillman ([2006](#); también en Galbraith et al., [2007](#)) elaboran un marco para identificar los bloqueos que puedan experimentar los estudiantes durante las transiciones del proceso de modelización. Para ello, estos autores se basan en su adaptación del ciclo propuesto por Blum ([1985](#)) y Kaiser-Messmer ([1986](#)) en la Figura 13.

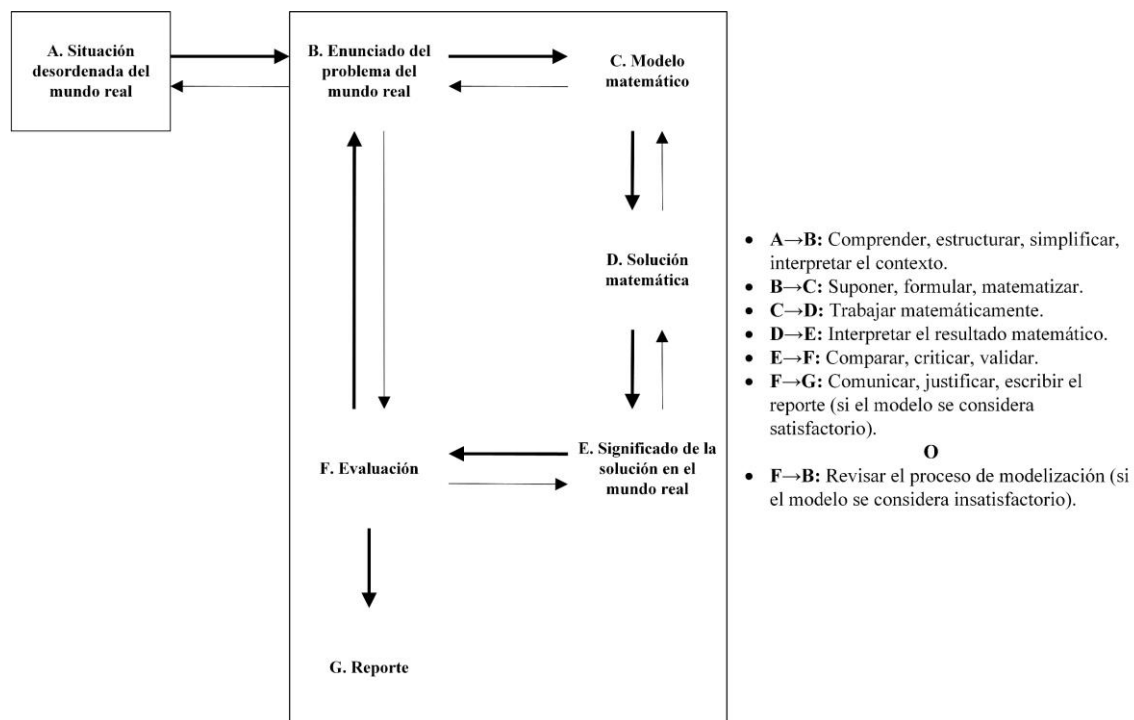


Figura 13. Diagrama del proceso de modelización propuesto por Galbraith y Stillman ([2006](#)).
Fuente: Adaptado desde Galbraith y Stillman ([2006](#), p. 144, traducción del autor).

El objetivo de este trabajo es profundizar en los aspectos críticos en el proceso de modelización, enfocándose en las transiciones $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow E$, $E \rightarrow F \rightarrow [B-G]$ del ciclo de la Figura 13. El contexto de implementación es RITEMATHS, un proyecto de investigación desarrollado por dos universidades australianas en seis escuelas, y cuyo foco es promover las interacciones entre modelización, contenidos matemáticos, y tecnología. Los participantes fueron estudiantes de educación secundaria (grados 8–10; estudiantes de 13–16 años) a quienes se les aplicaron tres problemas de modelización. Si bien estos autores ya contaban con un marco emergente (véase un fragmento en la Tabla 6), las producciones recolectadas les permitieron refinarlo para futuras implementaciones.

Tabla 6. Fragmento del marco para identificar bloqueos de los estudiantes durante las transiciones en el proceso de modelización.

Transiciones	Bloqueos
$A \rightarrow B$	<ul style="list-style-type: none"> • Aclarar el contexto del problema. • Hacer suposiciones simplificadas. • Identificar entidades estratégicas. • Especificar los elementos correctos de las entidades estratégicas.
$B \rightarrow C$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar las variables dependiente e independiente para su inclusión en el modelo algebraico. • Notar que la variable independiente debe ser definida únicamente. • Representar los elementos matemáticamente para poder aplicar las fórmulas. • Hacer suposiciones relevantes. [...]
$C \rightarrow D$	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicar la fórmula apropiada. • Aplicar procesos de simplificación algebraica a fórmulas simbólicas para producir funciones más sofisticadas. • Usar la tecnología/las tablas matemáticas para realizar cálculos. • Usar la tecnología para automatizar la extensión de la aplicación de fórmulas a múltiples casos. [...]
$D \rightarrow E$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar los resultados matemáticos con su contraparte en el mundo real. • Contextualizar los resultados matemáticos provisionales y finales en términos de la situación del mundo real. • Integrar argumentos para justificar las interpretaciones. • Reducir las restricciones previas para producir los resultados necesarios que respalden una nueva interpretación. [...]
$E \rightarrow F$	<ul style="list-style-type: none"> • Conciliar los resultados provisionales inesperados con la situación real. • Considerar las implicaciones del mundo real de los resultados matemáticos. • Reconciliar los aspectos matemáticos y del mundo real del problema. • Notar que existe un límite para la reducción de restricciones que es aceptable para una solución válida [...].

Fuente: Adaptado desde Galbraith y Stillman (2006, p. 147, traducción del autor).

Finalmente, los autores proponen el uso de este marco no sólo para fines investigativos, sino también para el diseño y evaluación de distintos problemas de modelización. Otro trabajo destacado en esta línea es el que desarrollan Greefrath y colaboradores (véase Greefrath, [2011](#); Greefrath y Siller, [2018](#); Greefrath y Vorhölter, [2016](#); entre otros), quienes incorporan el uso de herramientas digitales en el proceso de modelización. Para ello, estos autores se basan en su adaptación del ciclo propuesto por Blum y Leiß ([2007a](#)) en la Figura 14.

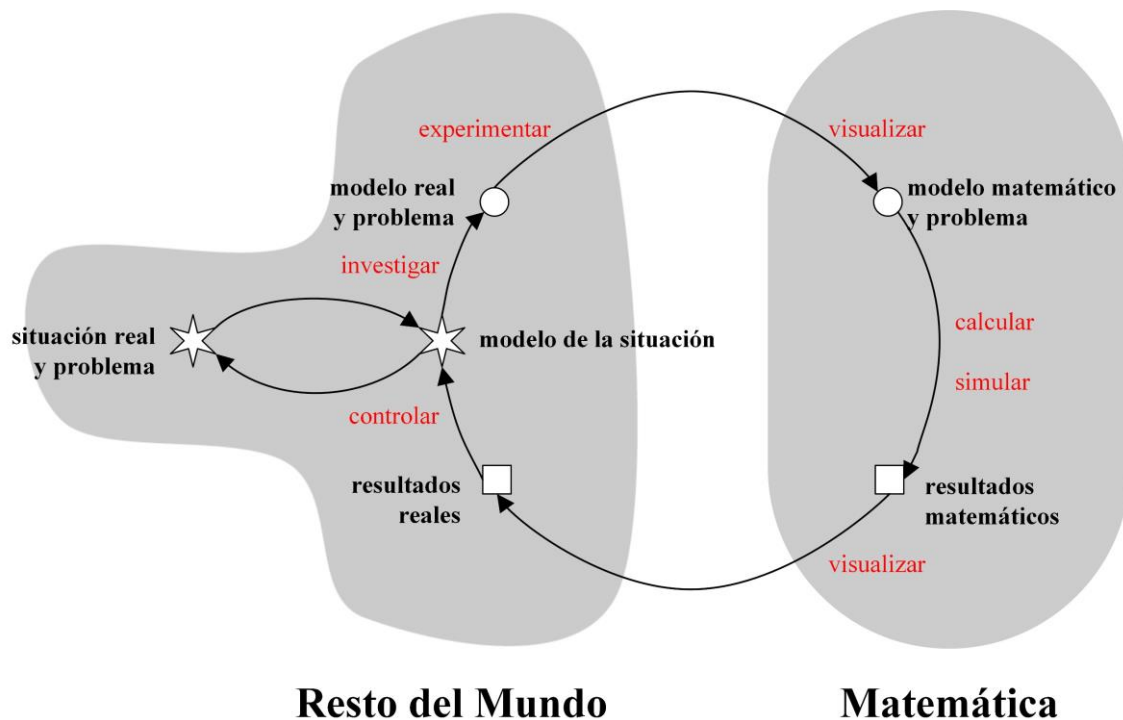


Figura 14. Uso de herramientas digitales en el ciclo de modelización.
Fuente: Adaptado desde Greefrath y Siller ([2018](#), p. 12, traducción del autor).

El ciclo de la Figura 14 muestra los posibles usos de las herramientas digitales a lo largo del proceso de modelización, donde se requieren dos procesos de traducción: primero, desde el mundo real a la matemática, y segundo, desde la matemática hacia el lenguaje de la herramienta digital (Greefrath y Vorhölter, [2016](#)). Esto requiere de un ciclo extendido, como el que se presenta en la Figura 10. Los estudios desarrollados en esta línea de investigación profundizan en el papel de las herramientas digitales en las distintas transiciones del ciclo de modelización, especialmente, para la interpretación y validación de resultados (Geiger, [2011](#)); la evaluación en modelización mediante el uso de tecnologías (Stacey y Wiliam, [2013](#); Williams y Goos, [2013](#)); los procesos de simulación que ocurren en la modelización (Hankeln, [2018](#)); los conocimientos didácticos para la

enseñanza de la modelización y de la simulación con herramientas digitales (Gerber et al., [2023](#)); entre otros temas¹⁶.

Por último, se mencionan tres estudios que proponen una interpretación del proceso de modelización utilizando las herramientas de un marco teórico de la Didáctica de la Matemática para su comprensión más profunda. El primer estudio es el de Ärlebäck y Frejd ([2013](#)), quienes exploran un marco emergente para analizar los modelos matemáticos y el proceso de modelización desde la comognición. Este marco teórico, propuesto por Sfard ([2008](#)), permite el análisis de la comunicación intra- e interpersonal de los individuos que resuelven un problema de modelización, abordando los aspectos sociales y cognitivos de este proceso. En términos metodológicos, se trata de un estudio de caso en que se analiza la resolución de tres grupos de estudiantes de educación secundaria a una tarea de modelización, poniendo el foco en los discursos donde se utilizan, crean, desarrollan, y modifican los modelos matemáticos. En este estudio, los investigadores analizan el proceso de modelización de los estudiantes aplicando las herramientas comognitivas; sin embargo, no se puede hablar de una articulación teórica entre ambos marcos (modelización y comognición) dado que es un estudio pionero en su tipo¹⁷.

El segundo estudio¹⁸ es el de Cosmes y Montoya-Delgadillo ([2021](#)), quienes investigan sobre el desarrollo de la competencia en modelización en el contexto de la educación de ingenieros. Este estudio toma como referente teórico el ciclo de modelización propuesto por Borromeo Ferri ([2006](#)) y complementan el análisis de este proceso con la Teoría ETM (Kuzniak et al., [2016](#)), específicamente, con la versión extendida de este modelo para el área de la ingeniería (véase Moutet, [2016](#)). En términos metodológicos, se trata de un estudio de caso con futuros ingenieros civiles de una universidad chilena, en que los estudiantes resolvieron problemas de análisis estructural durante un semestre académico. Los resultados de este estudio muestran el papel de la modelización dentro de la ingeniería, denominándola modelización matemática ingenieril; no obstante, la Teoría

¹⁶ Véase una síntesis de los estudios desarrollados en esta línea de investigación en Siller, Geiger, y Greefrath ([2023](#)).

¹⁷ Véase la articulación de la Teoría Comognitiva con otros marcos en los trabajos de Sandoval-Troncoso y colaboradores (Sandoval-Troncoso, [2021](#); Sandoval-Troncoso y Ledezma, [2021](#)).

¹⁸ Véase una extensión de este estudio en Cosmes ([2020](#)).

ETM sólo se limita a analizar la subcompetencia de trabajo matemático con el modelo y no interviene con elementos del mundo real.

El tercer estudio es el de Verdugo-Hernández y colaboradores (2022), quienes proponen una articulación entre el ciclo de modelización propuesto por Blomhøj y Højgaard (2003) y la Teoría ETM. En términos metodológicos, se trata de un estudio de caso con futuros ingenieros civiles informáticos de una universidad chilena, en que los estudiantes resolvieron una tarea de modelización diseñada a partir de la articulación propuesta. Si bien los autores reconocen que no pretenden ajustar el ciclo de Blomhøj y Højgaard a la Teoría ETM, sí identifican algunas complementariedades entre ambos referentes teóricos. No obstante, dado que los elementos de la Teoría ETM sólo abarcan aspectos matemáticos, este marco no es suficiente para abarcar la totalidad del ciclo de modelización considerado, por lo que la articulación que proponen estos autores resulta ser parcial y limitada.

A diferencia de los estudios referenciados en esta subsección, uno de los objetivos de esta tesis doctoral apunta hacia una articulación teórica profunda entre un ciclo de modelización y un marco teórico de la Didáctica de la Matemática. Por lo tanto, si bien se reconocen como antecedentes importantes, sobre todo, los estudios de Galbraith y Stillman (2006) y de Cosmes y Montoya-Delgadillo (2021), en esta investigación se va un paso más allá con el uso de la metodología *Articulación de Teorías* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010, 2014), tema que se abordará ampliamente en el [Capítulo 3](#).

1.2.3.2. Modelización en la educación de profesores

Tal como se declaró en la [subsección 1.2.1.3](#), el cambio de siglo trajo consigo, entre otros, un reconocimiento generalizado de la importancia de la modelización para la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos, materializado en su inclusión curricular a nivel internacional, en la diseño y elaboración de materiales de apoyo, y en la implementación cursos para profesores en formación y en servicio. En esta subsección, se destacan algunos estudios en los que se aborda la enseñanza y el aprendizaje de la modelización en la educación de profesores.

A comienzos del siglo XXI, uno de los grupos que dio especial énfasis a la investigación sobre modelización en la educación de profesores fue el de la *perspectiva modelos y modelización* en Estados Unidos (véase Doerr, 2006; Doerr y Lesh, 2003; Koellner-Clark

y Lesh, [2003](#); Schorr y Koellner-Clark, [2003](#); Schorr y Lesh, [2003](#); entre otros). En sus trabajos, estos autores investigan el desarrollo de conocimientos y habilidades de los profesores en servicio mediante la implementación de actividades de desarrollo profesional en sus aulas. De este modo, la aplicación de actividades generadoras de modelos permite a los profesores conocer las formas de pensamiento de sus estudiantes desde un enfoque basado en la instrucción guiada cognitivamente (Lesh y Lehrer, [2003](#)).

Otro estudio en esta línea de investigación es el realizado por Blomhøj y Kjeldsen ([2006](#)), quienes reportan una experiencia con profesores de educación secundaria daneses en servicio (grados 10–12; estudiantes de 15–18 años), en el contexto de un curso orientado a problemas de modelización basados en proyectos¹⁹. El objetivo de este curso es dar soporte para desarrollar, implementar en sus aulas, evaluar, y reportar este tipo de proyectos. Entre los problemas para implementar este curso se encontraba que, en el contexto temporal del estudio, los profesores daneses no contaban con una formación en modelización derivada de su educación universitaria, pues este proceso aún no estaba integrado en el currículo universitario para la educación de profesores. Los resultados del estudio llevan a los autores a la reflexión sobre tres dilemas sobre la enseñanza de la modelización en el aula:

- Entender la competencia en modelización desde un punto de vista global (enfoque holístico) o como un compilado de subcompetencias (enfoque atomista).
- Considerar la modelización como un fin educativo en sí mismo o como un medio para motivar y dar soporte al aprendizaje matemático.
- La enseñanza de la autonomía dirigida (véase Blomhøj y Højgaard, [2007](#)).

Hasta ese momento, la investigación sobre modelización en la educación de profesores se centra, principalmente, en la implementación de cursos y actividades para profesores en servicio, ello debido a que la incorporación curricular de la modelización a nivel internacional estaba en pleno apogeo. Una reflexión interesante al respecto es la que realiza Lingefjärd ([2007](#)), quien aborda lo difícil que fue crear, mantener, y dar soporte a los cursos de modelización en la educación de profesores del contexto sueco, ello debido a la competición con las asignaturas propias de la matemática que, en ese entonces, se

¹⁹ Las ampliaciones interdisciplinarias de este trabajo se pueden encontrar en Blomhøj y Kjeldsen ([2009](#), [2018](#)).

consideraban más útiles de incluir en los cursos formativos que la enseñanza de la modelización para los futuros profesores. Por lo tanto, se fue generando una nueva veta que explorar y la investigación en este tema se fue ampliando para abarcar otras aristas, estudiando tanto profesores en formación como en servicio.

Uno de los enfoques de investigación sobre modelización en la educación de profesores es el de conocimientos y competencias en este proceso. Por ejemplo, Carrejo y Marshall (2007) estudian la construcción, desarrollo, y uso de modelos matemáticos que realizan un grupo de futuros profesores de matemática y física para el estudio del movimiento en un curso de física. Mediante el uso de un marco sobre tensiones en modelización, los autores exploran la capacidad de los futuros profesores para establecer conexiones entre los modelos abstractos de ambas disciplinas.

En el contexto alemán, Kaiser (2007) reporta los resultados de un seminario sobre modelización para futuros profesores de educación secundaria, en el que participaron académicos de los departamentos de matemática y de didáctica de la matemática, futuros profesores, y estudiantes de educación secundaria (16–18 años). El curso consistió en que los futuros profesores supervisaban el trabajo de grupos de estudiantes mientras resolvían problemas de modelización; de forma paralela, los futuros profesores asistían a su curso universitario correspondiente, donde discutían el trabajo realizado por sus estudiantes. Los resultados de este estudio dieron paso a reflexiones sobre los tiempos necesarios para adquirir competencias en modelización y cómo estos profesores deberían organizar la enseñanza de este proceso en el aula en su práctica futura. Otro estudio de similares características es el que reportan Ortiz y colaboradores (2007), quienes se enfocan en el conocimiento didáctico que evidencian futuros profesores durante la implementación de un curso para promover la competencia en modelización y el uso de la calculadora gráfica para el desarrollo de actividades algebraicas.

En el contexto australiano, Stillman y Brown (2011) estudian los conocimientos y competencias profesionales de futuros profesores de educación secundaria sobre la enseñanza de la modelización y las aplicaciones en el mundo real. Los 73 profesores participantes provenían de dos sistemas de educación distintos: programas de un año (postgrados profesionalizantes de educación habilitantes para ejercer docencia) o programas de cuatro años (formación en matemática y educación durante el pregrado). Los resultados muestran las diferencias y similitudes entre ambos sistemas de educación

de profesores respecto a la adecuación de tareas a ciertos niveles educativos, la habilidad de analizar las respuestas de los estudiantes, y las creencias sobre la naturaleza de la matemática y sus usos.

Una reflexión interesante sobre este tipo de conocimientos es la que desarrolla Wake (2011) en el contexto inglés pues, con los años, estos estudios fueron adoptando modelos de conocimientos y competencias más formales. Más en concreto, entre los modelos más utilizados para desarrollar estos estudios se encuentran el propuesto por Shulman (1986) sobre el conocimiento del profesor, y por Hill y colaboradores (2008) sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por su acrónimo en inglés). Otra reflexión interesante es la que plantea Borromeo Ferri (2021), quien cuestiona los conocimientos que adquieren y las competencias que desarrollan los futuros profesores una vez que la modelización se haya vuelto parte de los currículos educativos.

En el contexto alemán, Kaiser y colaboradores (2013) reportan los resultados parciales de un proyecto de investigación internacional, centrándose en un estudio de caso sobre el conocimiento profesional de futuros profesores en torno a la modelización. Los resultados aportan evidencia sobre tres tipos de conocimientos del modelo MKT: conocimiento del contenido matemático, del contenido pedagógico, y pedagógico general. De estos tipos, el que más se destacó fue el conocimiento del contenido pedagógico, lo que llevó a una reflexión de los autores sobre cómo articular estos tres tipos de conocimiento en torno a la modelización. Un estudio más reciente en esta línea es el que reportan Greefrath y colaboradores (2022), quienes se enfocan en el conocimiento del contenido pedagógico (PCK, por su acrónimo en inglés) de futuros profesores de educación secundaria. Los resultados muestran un alto grado de desarrollo de algunas facetas del PCK en modelización de los futuros profesores que participaron de un seminario especialmente diseñado para estos fines, en comparación con aquéllos que asistieron a cursos regulares en didáctica de la matemática, destacando la importancia de que sean los futuros profesores quienes diseñen y resuelvan sus propios problemas de modelización.

En el contexto austríaco, Kuntze y colaboradores (2013) se enfocan en el PCK de profesores en formación y en servicio sobre modelización, con el objetivo de explorar cómo estos profesores perciben su conocimiento para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de este proceso y cómo consideran que es/fue su formación universitaria en modelización. Los resultados del estudio muestran una percepción negativa de ambos

grupos de profesores sobre su PCK en modelización, lo que hace evidente una necesidad de un mayor desarrollo profesional en este proceso que abarque, por ejemplo, experiencias positivas de modelización en el aula y soporte para el uso de tecnología durante este proceso, destinadas tanto a profesores en formación como en servicio.

En el contexto singapurense, Tan y Ang (2013) reportan un estudio de caso sobre el conocimiento en modelización de un grupo de futuros profesores de educación secundaria a partir de sus experiencias individuales, es decir, de forma contraria a otros estudios, aquí los futuros profesores resolvieron dos problemas de modelización de manera individual y no grupal. Los resultados muestran una tendencia a privilegiar los aspectos matemáticos de la resolución en desmedro de las competencias en modelización, ello debido a su nula experiencia con la implementación de este tipo de problemas en el aula. En el contexto alemán, Besser y colaboradores (2015) reportan los resultados de un curso para profesores en servicio sobre cómo promover el PCK y el conocimiento pedagógico general (PK, por su acrónimo en inglés) sobre evaluación en modelización. En este curso participaron 67 profesores y tuvo una duración de 10 meses, donde los profesores implementaron durante 10 semanas los conocimientos y competencias adquiridos durante el curso. Los resultados evidencian la mejora de estos profesores en la calidad de su evaluación formativa en modelización y en su capacidad de retroalimentación.

En el contexto turco, Yilmaz y Tekin-Dede (2016) estudian la subcompetencia en matematización de cinco futuros profesores de educación primaria durante un curso universitario en su último año académico. Dado que no se incluye un curso en modelización individualizado a lo largo de su carrera, se decidió implementar este curso de nueve semanas. Los resultados muestran la evolución de los futuros profesores en el desarrollo de la subcompetencia en matematización (examinando su capacidad de identificar suposiciones y variables, y de construir modelos matemáticos), mostrando una mejora entre el antes y el después del curso. Otros estudios de similares características, también desarrollados en el contexto turco, son el que reportan Sen Zeytun y colaboradores (2017), aunque enfocándose en el proceso de modelización en su totalidad que desarrollan futuros profesores de educación primaria; Sevinc y Lesh (2018), quienes se enfocan en las habilidades de futuros profesores de educación secundaria para escribir, revisar, y refinar problemas de modelización (véase una continuación de este estudio en Sevinc y Lesh, 2022), así como Faith (2020) se enfoca en sus habilidades para diseñar

tareas de modelización; Didiş Kabar y Erbaş (2021), quienes se enfocan en la capacidad de estos profesores para identificar el pensamiento, anticiparse a los errores, y analizar el trabajo de estudiantes ante problemas de modelización.

En el contexto estadounidense, Park (2017) estudia el conocimiento del contenido de tres futuros profesores de educación secundaria sobre modelización desde un enfoque comognitivo. Utilizando el marco propuesto por Galbraith y Stillman (2006), se examinaron los procesos de modelización de los tres estudiantes que cursaron un módulo sobre educación en ciencia, tecnología, ingeniería, y matemática (STEM, por su acrónimo en inglés). Debido al carácter acotado del estudio, los resultados sugieren que el discurso de los futuros profesores manifestó una perspectiva pragmática de modelización (véase [subsección 1.2.2.8](#)) y que sus conocimientos sobre este proceso les permitió verificar matemáticamente el modelo propuesto y reflexionar críticamente sobre las soluciones. También en el contexto estadounidense, Tidwell y colaboradores (2023) reportan un estudio sobre el crecimiento y desarrollo de competencias en modelización de futuros profesores de educación primaria. Mediante la resolución de tareas de modelización, la presentación de pósteres, reportes, y la aplicación de un cuestionario antes y después de la intervención, los resultados mostraron la capacidad de los futuros profesores de llevar a la práctica el ciclo de modelización y de desarrollar una concepción apropiada de este proceso, especialmente, sobre sus beneficios para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En el contexto sudafricano, Durandt y Lautenbach (2020) estudian la comprensión de futuros profesores de educación secundaria sobre el ciclo de modelización y el desarrollo de competencias en este proceso cuando asumen el papel de modelizadores y profesores de modelización. En términos metodológicos, se trata de una investigación basada en el diseño con 49 futuros profesores donde, en una primera iteración, desarrollaron competencias matemáticas como modelizadores, mientras que, en una segunda iteración, desarrollaron competencias en modelización como profesores. Estos resultados se evidenciaron en los pósteres que los futuros profesores presentaron al término de su proyecto.

En el contexto chino, Wang (2021) estudia la competencia en modelización de futuros profesores de educación secundaria y su relación con las experiencias en competencias de modelización. El estudio contó con la participación de 285 profesores participantes,

quienes respondieron un cuestionario que incluía un problema de modelización, de los cuales se consideraron 273 como válidos. Los resultados muestran las diferencias de los futuros profesores según el tipo de universidad en que estudian, su género, y si participaron o no en competencias de modelización.

Otro de los enfoques de investigación sobre modelización en la educación de profesores es sobre las estrategias de enseñanza y evaluación. Por ejemplo, Antonius y colaboradores (2007) reflexionan sobre el papel que debe desempeñar el profesor en el aula, donde los aspectos importantes que debe promover son: la formulación de preguntas estratégicas (indicaciones metacognitivas, enfocadas en estrategias de resolución específicas, y con pocas guías detalladas); la idea de que la matemática es una herramienta dentro de la modelización y no el objetivo del proceso; la introducción de temas matemáticos cuando la situación lo requiera; emplear una pedagogía activa, centrada en el estudiante, y contextualizada. Otra reflexión en esta línea es la que realizan Lingefjärd y Meier (2010), quienes abordan la brecha entre lo que es la modelización y lo que se enseña en el aula de matemática, con el objetivo de establecer un marco para que los profesores puedan ser gestores del proceso de modelización en sus clases. Finalmente, Schukajlow y Blum (2023) realizan una revisión de la literatura en que identificaron un enfoque de instrucción guiada y una visión constructivista sobre la enseñanza de la modelización, de los cuales se derivan diferentes principios que guían esta enseñanza.

También, estudios como el de K. Maaß y Gurlitt (2011) reportan que el Proyecto LEMA (acrónimo en inglés de *Aprendizaje y Educación en y a través de la Modelización y las Aplicaciones*), si bien no tuvo efectos en las creencias de los profesores participantes, sí los tuvo en sus conocimientos y capacidad de gestión en el aula cuando implementaron la modelización con sus estudiantes. Sin embargo, a pesar de estos esfuerzos, estudios como el de Schmidt (2011) aportan evidencia de que aún existen obstáculos para implementar la modelización en el aula, desde la perspectiva de profesores en formación (en sus prácticas educativas) y en servicio (en su práctica cotidiana), como la falta de tiempo y de materiales, y las dificultades para su evaluación.

En el contexto brasileño, Araújo y Campos (2015) reportan las estrategias de negociación de una profesora universitaria con una futura profesora para utilizar la matemática en un proyecto de modelización. Los resultados de este estudio revelan la importancia de que el profesor maneje estrategias de negociación en el aula cuando se enfrenta a este tipo de

problemas. En el contexto turco, Aydogan y colaboradores (2017) reportan un estudio sobre la generación de criterios de evaluación para la competencia en modelización que desarrollan cuatro profesores de educación secundaria en servicio siguiendo la metodología de estudio de clases. El contexto de implementación fue un programa de desarrollo profesional que incluyó la introducción, resolución, e implementación de actividades generadoras de modelos para profesores. Los resultados del estudio evidenciaron un cambio en la estrategia evaluadora de los profesores, desde suponer que cada actividad de modelización debía tener diferentes criterios a crear pautas unificadas personales para aplicar a cualquier actividad de este tipo. Una continuación del trabajo realizado por estos autores se enfoca en las estrategias de 10 profesores de educación secundaria en servicio para el planteamiento de preguntas durante la resolución de tareas de modelización (véase Aydogan et al., 2018). También en el contexto turco, Cakmak Gurel y Bekdemir (2022) estudian las estrategias para intervenir y cuestionar la validez de un modelo matemático de 47 futuros profesores de educación secundaria. Entre los resultados destaca el tipo de intervenciones y su efecto como, por ejemplo, las explicaciones insuficientes, los errores de los estudiantes, y el avance en el proceso de modelización.

En el contexto estadounidense, Manouchehri (2017) reporta los esfuerzos por asistir a un grupo de profesores de matemática en servicio para desarrollar conocimientos sobre modelización y su implementación con base en lo estipulado en el currículo escolar. El estudio se enmarcó en un curso de 25 horas de desarrollo profesional, donde 85 profesores trabajaron en tareas de modelización y discutieron sobre su implementación. En este estudio se reportan los resultados de 25 de los profesores que participaron del curso, donde se evidenció un crecimiento en su conocimiento sobre modelización a partir de los desafíos matemáticos (construcción y trabajo con el modelo matemático), pedagógicos (estrategias para desarrollar este proceso en el aula), y epistemológicos (obstáculos durante el proceso de modelización) que debieron enfrentar.

En el contexto japonés, Saeki y colaboradores (2023) estudian las estrategias de un grupo de profesores en servicio para transformar tareas matematizadas en tareas de modelización, en el contexto de un curso de desarrollo profesional docente de cuatro módulos para profesores nóveles. Los resultados del estudio muestran cómo los profesores modificaron las tareas matematizadas cumpliendo con distintos criterios de

una tarea de modelización y que éstas fueron mejorando tras sus implementaciones según la metodología del estudio de clases. En el contexto alemán, Siller, Greefrath y colaboradores (2023) estudian las creencias sobre autoeficacia²⁰ de futuros profesores sobre modelización, en el contexto de un seminario universitario de un semestre. Los resultados se hicieron más evidentes cuando los profesores participantes implementaron las tareas de modelización que crearon con estudiantes de grado noveno (14–15 años).

Otro de los enfoques de investigación sobre modelización en la educación de profesores es sobre sus creencias y concepciones en torno a este proceso. Por ejemplo, Chapman (2007) investiga las concepciones sobre la matemática, los problemas verbales, y la resolución de problemas que impliquen la necesidad de modelizar en el aula. En términos metodológicos, se trata de un estudio de caso con seis profesores de educación secundaria en servicio, a quienes se les aplicaron entrevistas, observaciones de sus clases, y escenarios de juego de rol para capturar la naturaleza de su pensamiento sobre los temas de interés. Los resultados de este estudio muestran las estrategias que utilizan los profesores participantes para promover la modelización en sus clases, concluyéndose que el pensamiento de las creencias y concepciones de los profesores son factores importantes para crear una cultura que dé soporte a la modelización en el aula.

En el contexto singapurense, Ng (2010) reporta un estudio preliminar con profesores de educación primaria en servicio con el objetivo de conocer sus concepciones sobre tareas de modelización y su inclusión en el aula. En términos metodológicos, este estudio se realizó con 48 profesores, quienes resolvieron una tarea generadora de modelos (*Juegos Olímpicos de la Juventud*, adaptada desde English, 2013) y reflexionaron sobre los procedimientos de resolución y la plausibilidad de implementarla en sus clases. Una continuación de esta investigación es la reportada en Ng (2013), en que la autora compara los resultados del primer estudio con los de un grupo de 57 futuros profesores de educación primaria en el contexto de un curso de formación de pregrado, evidenciando las similitudes y diferencias entre ambos grupos de profesores al resolver la misma tarea generadora de modelos, y sugiriendo un método de trabajo para el contexto singapurense

²⁰ Estos autores asumen la definición para autoeficacia de Tschannen-Moran y Woolfolk Hoy (2001): “La creencia de eficacia de un profesor es un juicio de sus capacidades para lograr los resultados esperados de la participación y el aprendizaje de los estudiantes, incluso entre aquellos estudiantes que puedan ser complicados o estar desmotivados” (p. 783, traducción del autor).

que incluya a profesores en formación y en servicio al momento de abordar la enseñanza de la modelización en el aula (véase Ng et al., [2019](#)).

En el contexto italiano, Fazio y colaboradores ([2012](#)) estudian las concepciones de futuros profesores de educación primaria sobre modelización y el uso de modelos en un curso de física y matemática. Los resultados del cuestionario aplicado a los profesores participantes permitieron inferir sus enfoques de conocimiento (conductista, cognitivista, y constructivista) con referencia a la modelización. En el contexto alemán, Förster ([2011](#)) reporta un estudio de caso con ocho profesores de educación secundaria en servicio, con el objetivo de profundizar en sus creencias sobre aplicaciones y modelización. Los resultados del estudio evidencian los efectos de los cursos de desarrollo profesional en los profesores con más experiencia docente, la contradicción entre encontrar necesario hacer aplicaciones en física, pero no en matemática, y la necesidad de promover una actitud positiva y la preparación en conocimientos para la enseñanza de la modelización en el aula. Un estudio de similares características es el reportado por Girnat y Eichler ([2011](#)) para las creencias sobre modelización en geometría y probabilidades.

En el contexto taiwanés, Yu y Chang ([2011](#)) reportan las percepciones de 16 profesores de educación secundaria en servicio (estudiantes de un programa de máster profesionalizante) sobre las actividades generadoras de modelos. Si bien los resultados muestran una valoración positiva de este tipo de actividades, los profesores participantes también declararon los obstáculos para su implementación en el aula, así como sólo algunos aspectos superficiales de su resolución debido a una falta de bagaje teórico en la perspectiva de modelos y modelización. Un estudio de similares características es el reportado por Thomas y Hart ([2013](#)) con futuros profesores de educación primaria estadounidenses. En el contexto alemán, Kuntze ([2011](#)) reporta los resultados de la aplicación de un cuestionario sobre tareas con baja o alta demanda de modelización a dos muestras: una de 230 profesores en formación y otra de 79 profesores en servicio. Los resultados sugieren una necesidad de incluir un trabajo sobre tipos de tareas de modelización en la educación de profesores, pues se reveló una tendencia de los futuros profesores a considerar incompatible la aplicación de tareas de modelización con la enseñanza de contenidos matemáticos, mientras que los profesores en servicio sí vieron oportunidades de aprendizaje valiosos en este tipo de tareas.

En el contexto estadounidense, Anhalt y Cortez (2016) reportan la evolución de 11 futuros profesores de educación secundaria que cursaron por primera vez un módulo sobre modelización. Este módulo consistió en un curso de seis semanas de duración basado en las disposiciones curriculares de la *Iniciativa de Estándares Estatales Básicos Comunes* (Common Core State Standards Initiative, 2010), donde la modelización se define como “el proceso de elegir y usar la matemática y estadística apropiadas para analizar situaciones empíricas, entenderlas mejor, y mejorar las decisiones” (p. 72, traducción del autor). Los resultados evidencian que, si bien los futuros profesores fueron capaces de poner en práctica un ciclo de modelización, la conexión entre el mundo real y la matemática les tomó más tiempo y este factor se debe considerar con especial cuidado en los cursos de formación en pregrado. Un estudio de similares características es el reportado por Cetinkaya y colaboradores (2016) en el contexto turco, quienes se enfocan en los principios pedagógicos que consideran futuros profesores como necesarios para enseñar matemática mediante la modelización.

Otras temáticas abordadas en la investigación sobre modelización en la educación de profesores abarcan, entre otros:

- el análisis de los cursos de desarrollo en pregrado (por ejemplo, Abramovich, 2013; Asempapa y Sastry, 2021; Bal y Doğanay, 2014; Çıltaş e Işık, 2013; Deniz Yılmaz e Incesu, 2022; Durandt y Jacobs, 2017; Hagen, 2015; Hansen, 2021; Koç y Elçi, 2022; Villarreal et al., 2015; Winter y Venkat, 2013; entre otros);
- el análisis de los cursos y experiencias profesionalizantes de postgrado (por ejemplo, Ärleback, 2020; Escalante, 2013; Gallart et al., 2015; García y Ruiz-Higueras, 2011; Ikeda y Stephens, 2021; Maass y Engeln, 2018; Psycharis y Potari, 2017; Shahbari y Tabach, 2016; Zbiek et al., 2024; entre otros);
- los cursos a distancia (por ejemplo, Biembengut y Faria, 2011; Deniz Yılmaz et al., 2023; Geiger et al., 2018; Orey y Rosa, 2018; Stohlmann y Yang, 2023; entre otros);
- comparaciones de desempeño entre países (por ejemplo, Cabassut y Ferrando, 2017; Kacerja et al., 2021; Yang et al., 2022; entre otros).

A diferencia de los estudios referenciados en esta subsección, uno de los objetivos de esta tesis doctoral apunta hacia la reflexión sobre la práctica de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos.

Por lo tanto, si bien se reconoce la existencia de antecedentes que abordan este tema (véase Borromeo Ferri, [2017](#); Tekin Dede y Bukova, [2023](#)), en esta investigación se va un paso más allá con el uso de la herramienta *Criterios de Idoneidad Didáctica* (Godino, [2013](#)) para reflexionar sobre la propia práctica, tema que se abordará ampliamente en los Capítulos [4](#) y [5](#).

1.2.3.3. Competencias profesionales y procesos matemáticos en la modelización

Tal como se declaró en la [subsección 1.2.1.3](#), el cambio de siglo trajo consigo, entre otros, un notorio aumento el interés por investigar sobre la modelización, no sólo considerando el estudio particularizado de este proceso, sino que también su análisis desde otros procesos relevantes de la actividad matemática y desde una perspectiva competencial. En esta subsección, se destacan algunos estudios en los que se aborda la modelización en conjunto con otras competencias profesionales y procesos matemáticos.

Una de las competencias profesionales en modelización que deben desarrollar los profesores es la capacidad de identificar las dificultades que conlleva este proceso, para así ser capaces de intervenir antes de que se produzcan errores. En este sentido, Sen Zeytun y colaboradores ([2024](#)) investigan el origen de las dificultades que futuros profesores de distintos niveles educativos (pregrado y postgrado) experimentaron durante un curso optativo sobre modelización. Los 19 profesores participantes se agruparon en equipos de tres o cuatro integrantes y trabajaron durante el semestre de duración del curso. Los participantes ya contaban con conocimientos matemáticos de los cursos previos (cálculo, matemática discreta, estructuras algebraicas, etc.) según su área de especialización en la enseñanza; sin embargo, ninguno declaró haber tomado un curso especializado en modelización. Los profesores participantes resolvieron colaborativamente 12 tareas de modelización con diferentes estructuras y niveles de complejidad, aunque también las resolvieron individualmente y las discutieron con el grupo clase. Los resultados del estudio mostraron dos tipos de dificultades que conlleva la resolución de problemas de modelización:

- Factores individuales: Falta de comprensión matemática conceptual, dificultades para conectar el mundo real con el mundo matemático, estar más enfocados en obtener un resultado que en desarrollar un proceso, y llevar a cabo un trabajo desorganizado a lo largo del proceso de modelización.

- Factores contextuales: Falta de experiencias previas con la resolución de tareas de modelización y falta de tiempo para resolverlas.

En esta línea de investigación, también se considera que la complejidad del proceso de modelización se debe, entre otros factores, a la variedad de enfoques que pueden tomar los estudiantes para resolver un problema de modelización. Por esta razón, otra de las competencias profesionales en modelización que deben desarrollar los profesores es la competencia de observación o competencias en *noticing* (por su término original en inglés, van Es y Sherin, [2002](#)). De este modo, el proceso de modelización se analiza desde la perspectiva del profesor que busca en qué momento y forma debe intervenir cuando sus estudiantes resuelven problemas de este tipo.

Alwast y Vorhölter ([2022](#)) proponen un instrumento basado en video para medir las competencias en *noticing*, conceptualizándolas a partir de la caracterización de competencia como un continuo (véase Blömeke et al., [2015](#)). Para ello, los autores desarrollaron tres estudios para validar este instrumento. El primer estudio evaluó la validez del contenido y que todos estos contenidos estuviesen cubiertos por el instrumento, es decir, que los videos presentados, las preguntas planteadas, y la habilidad de los participantes para percibir los incidentes pretendidos estuviesen en consonancia. El segundo estudio evaluó la validez elemental y que el razonamiento de los participantes estuviese en línea con los niveles de interpretación, es decir, que las interpretaciones de los participantes fuesen posibles de categorizar en uno u otro nivel. El tercer estudio evaluó la validez del constructo, es decir, que la escala describiese adecuadamente los resultados de la aplicación del instrumento. En un estudio posterior de estos autores, este instrumento se utiliza para evaluar las competencias en *noticing* de futuros profesores, en el contexto de un seminario de postgrado con foco en modelización (véase Alwast y Vorhölter, [2023](#)).

Otro estudio que aborda las competencias en *noticing* es el que reportan Cai y colaboradores ([2022](#)), quienes examinan cómo profesores en formación y en servicio resolvieron tareas de modelización, así como también analizaron las respuestas de estudiantes a tales tareas. Los resultados mostraron que, cuando se examinaron el trabajo de estudiantes, ambos grupos de profesores interpretaron aspectos positivos en las soluciones de los estudiantes y aportaron retroalimentaciones, aunque respondieron de maneras diferentes: casi todos los profesores en servicio respondieron con el

planteamiento de preguntas; una porción de los profesores en formación corrigió directamente los errores de los estudiantes; y otra porción de ellos sólo señaló los errores sin corregirlos.

De forma paralela a las competencias en *noticing*, los profesores deben desarrollar estrategias metacognitivas que ayuden a los estudiantes a evitar o superar barreras cognitivas durante el proceso de modelización. Por ejemplo, Wendt y colaboradores (2020) estudian el caso de una profesora que mostró una amplitud en su percepción del uso de la metacognición, por parte de sus estudiantes, mientras desarrollaban procesos de modelización. En términos metodológicos, el estudio consistió en que la profesora debía implementar seis tareas de modelización en un periodo de ocho meses, lo que implicó que ella explicara el ciclo propuesto por Kaiser y Stender (2013) y cada una de sus fases con determinadas tareas diseñadas para ello, y así poder desarrollar un conocimiento metacognitivo sobre las características de estas tareas. Los resultados del estudio muestran que la profesora amplió sus percepciones al momento de planificar tareas de modelización con sus estudiantes, integrando habilidades metacognitivas al momento de planificar, monitorear, y evaluar desempeños. Tomando en cuenta la necesidad de desarrollar un instrumento para medir el conocimiento metacognitivo de la modelización, Frenken (2021) propone uno a partir de la definición teórica de lo que es el conocimiento metacognitivo²¹. En este sentido, la autora define al conocimiento metacognitivo de la modelización como “parte de una competencia que incluye memorizar hechos sobre diferentes estrategias [y] propiedades de la modelización y las dificultades potenciales durante el proceso” (Frenken, 2021, p. 218, traducción del autor).

Una de las características del proceso de modelización es que incluye la realización de otros procesos relevantes de la actividad matemática en su desarrollo, lo cual ha llevado a que los investigadores centren su atención en el comportamiento de estos últimos. En este sentido, Tekin (2019) estudia los argumentos que construyen cuatro futuros profesores de educación primaria cuando resuelven una tarea de modelización. Para ello, la autora utiliza el esquema de argumentación de Toulmin (1954/2003) y el ciclo de

²¹ En este estudio, el conocimiento metacognitivo “es usado como un término genérico para el conocimiento verificable de un dominio específico sobre los factores que afectan los procesos cognitivos, los que se pueden considerar como relacionados al conocimiento sobre la(s) persona(s) involucrada(s), sobre las tareas para resolver y sobre las estrategias apropiadas, incluyendo sus fines y objetivos” (Frenken, 2021, p. 217, traducción del autor)

modelización propuesto por Blum y Leiß (2007a) para examinar la argumentación colectiva (véase Krummheuer, 1995) de los profesores participantes. Los resultados muestran la emergencia de los elementos del esquema de Toulmin (afirmaciones, datos, garantías, respaldos, calificadores, y refutaciones) en las distintas transiciones del ciclo de modelización. Otro estudio desarrollado en esta línea es el que reportan Ledezma, Sol y colaboradores (2022), quienes se enfocan en la argumentación que realiza un futuro profesor de educación secundaria en su trabajo final de máster para justificar la inclusión de la modelización durante su práctica educativa. Para ello, los autores analizan una porción de los datos desde la perspectiva pragma-dialéctica (van Eemeren y Grootendorst, 2004) para el análisis de las sesiones de reflexión con el futuro profesor; y otra porción de los datos utilizando la técnica de diagramación (Guevara, 2011) para su reflexión escrita. Los resultados del estudio muestran que el futuro profesor evidencia distintos tipos de conocimientos, como parte de un conglomerado formado por valores, creencias, y orientaciones para la acción.

Otro de los procesos matemáticos que se han considerado para investigar junto con la modelización es el de indagación. En su estudio, Falcó-Solsona y colaboradores (2024) reportan una experiencia escolar, en que los estudiantes deben resolver una situación-problema de contexto arqueológico y donde se evidencia la emergencia de subprocesos de indagación y modelización durante su resolución. La contribución más destacada de este estudio es la propuesta de un ciclo articulado entre ambos procesos en que, si bien se destaca la indagación por sobre la modelización, muestra la necesidad de utilizar ambos procesos para dar respuestas plausibles y coherentes a la situación-problema planteada inicialmente.

El proceso de representación también ha sido foco de atención para los investigadores de la modelización. Estudios como el de Shahbari y Tabach (2020), Rellensmann y colaboradores (2022), y Jablonski (2023) muestran la importancia del uso, necesidad, y modificación de distintas representaciones para el desarrollo del proceso de modelización. Finalmente, las investigaciones que han abordado la modelización desde perspectivas complementarias incluyen el papel de la creatividad²² (por ejemplo, Govender, 2020; Jung y Lee, 2021; Lu y Kaiser, 2022; entre otros), del pensamiento

²² Véase un estudio en detalle sobre creatividad en la educación de profesores en Sánchez (2021).

computacional (por ejemplo, Ang, [2021](#)), y el que juega la modelización en la Educación STEM/STEAM (por ejemplo, Lantau et al., [2020](#); Turner et al., [2024](#); Wiegand y Borromeo Ferri, [2023](#); entre otros).

De forma similar a los estudios referenciados en esta subsección, uno de los objetivos de esta tesis doctoral apunta hacia la profundización y reflexión teórica sobre la dialéctica de los análisis de tipo general y específico para el proceso de modelización, a saber, considerando otros procesos relevantes de la actividad matemática. Por lo tanto, en esta investigación se explora una nueva vertiente con el análisis de las conexiones matemáticas en el proceso de modelización, tema que se abordará ampliamente en el [Capítulo 7](#).

1.3. Estructura de la Tesis Doctoral

La finalidad de esta tercera sección es describir la estructura de esta tesis doctoral y presentar una breve nota sobre la terminología utilizada.

1.3.1. Capítulos e idiomas

Esta tesis doctoral se elaboró en la modalidad de compendio de publicaciones, lo cual significa que esta investigación se desarrolló mediante publicaciones que tienen como eje central el estudio de la modelización y que atienden, de forma individual, a los objetivos propuestos. Por esta razón, su estructura difiere de una memoria de tesis tradicional de la forma: Introducción, Marco teórico, Metodología, Resultados, y Discusión/Conclusiones. Otro elemento diferenciador es el idioma utilizado a lo largo de la tesis doctoral, pues cada capítulo está escrito en español o inglés, según el idioma utilizado en cada publicación, para cumplir con los requisitos de la mención internacional. Esto tiene repercusión en la numeración de las Figuras y Tablas en idioma español, y de las Figures y Tables en idioma inglés, la cual es independiente según el idioma (véase [Índice de Figuras – Index of Figures](#) e [Índice de Tablas – Index of Tables](#)). De este modo, la presente tesis doctoral se estructura y escribe de la siguiente manera:

- [Capítulo 1: Introducción – Chapter 1: Introduction](#) (capítulo escrito íntegramente en idioma español con su respectiva traducción al idioma inglés en [Annex 1: English Translation for Chapter 1 – Introduction](#)).

- [Capítulo 2: Problema, Preguntas, y Objetivos de Investigación – Chapter 2: Research Problem, Questions, and Objectives](#) (capítulo escrito íntegramente en idioma español con su respectiva traducción al idioma inglés en [Annex 2: English Translation for Chapter 2 – Research Problem, Question, and Objectives](#)).
- [Capítulo 3: Primer Artículo – Chapter 3: First Article](#) (publicación y comentarios escritos en idioma inglés).
- [Capítulo 4: Segundo Artículo – Chapter 4: Second Article](#) (publicación y comentarios escritos en idioma inglés).
- [Capítulo 5: Tercer Artículo – Chapter 5: Third Article](#) (publicación y comentarios escritos en idioma español).
- [Capítulo 6: Capítulo de Libro – Chapter 6: Book Chapter](#) (publicación y comentarios escritos en idioma inglés).
- [Capítulo 7: Cuarto Artículo – Chapter 7: Fourth Article](#) (publicación y comentarios escritos en idioma inglés).
- [Capítulo 8: Conclusiones – Chapter 8: Conclusions](#) (capítulo escrito íntegramente en idioma español con su respectiva traducción al idioma inglés en [Annex 7: English Translation for Chapter 8 – Conclusions](#)).

Con respecto a los Capítulos 3–7, en cada uno se incluye:

- Los datos identificativos del trabajo (título, autores, afiliaciones, etc.), la evidencia de su publicación (portada o logo de la revista/portada del libro, y primera página del trabajo), y los datos de indexación de la revista (para los Capítulos 3, 4, 5, y 7) o información sobre el libro (para el Capítulo 6).
- El resumen y las palabras clave de cada publicación (en idioma español e inglés).
- El texto íntegro de cada publicación (en el idioma original de publicación).
- Comentarios adicionales para cada publicación donde se explica, entre otros aspectos, su relación con los objetivos de esta tesis doctoral.

Con respecto a la presentación de las publicaciones, se trató de lograr un equilibrio entre el diseño original de cada publicación y los requisitos formales de esta tesis doctoral. Por ejemplo, se sigue una numeración correlativa para las Figuras/Figures y Tablas/Tables en idioma español/inglés, además de maximizar sus tamaños y reubicarlas (de ser necesario) para su mejor lectura y comprensión (sobre todo para Tablas/Tables de gran extensión).

En síntesis, la estructura de esta tesis doctoral permite que la mayor parte de su contenido pueda ser leído tanto en idioma español como inglés.

1.3.2. Nota terminológica

En la literatura sobre modelización publicada en idioma español, también se utilizan otros cuatro términos para referirse a este proceso, a saber, *modelación*, *modelado*, *modelamiento*, y *modelaje* (todos seguidos del adjetivo *matemático/a*).

Con respecto al término *modelación*, utilizado principalmente en el contexto hispanoamericano, Bassanezi y Biembengut (1997) lo definen como “el método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares” (p. 14), añadiendo que “la palabra Modelación es una ‘contracción’ de los términos Modelización y Educación. Modelación = Modelización + Educación” (p. 14). La definición que proponen estos autores sugiere una separación entre el proceso de modelización utilizado por los matemáticos profesionales y la enseñanza de este proceso con fines educativos. No obstante, esta definición entra en contradicción con la postura consensuada por la comunidad de investigación en modelización, en donde se han planteado distintas perspectivas sobre este proceso en Didáctica de la Matemática, todas con un propósito educativo de por medio (véase una discusión más amplia en la [subsección 1.2.2.8](#)). Por lo tanto, la postura de Bassanezi y Biembengut (1997) no se considera válida en esta tesis doctoral.

En la Tabla 7 se presentan las definiciones propuestas por el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (RAE) para los cuatro términos en cuestión.

Tabla 7. Definiciones de modelación, modelado, modelaje, y modelamiento.

Modelación*	Modelado**	Modelaje***	Modelamiento
Acción o efecto de modelar (sinónimo: modelado).	Acción o efecto de modelar (sinónimo: modelación).	1. Acción de modelar; 2. Profesión de los modelos que exhiben prendas de vestir.	Sin definición.

Nota (*): Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelaci%C3%B3n>; Nota (**): Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelado>; Nota (***): Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelaje>.

De las definiciones presentadas en la Tabla 7, se excluyen de esta reflexión los términos *modelaje* (por no relacionarse estrictamente con el tema de esta tesis doctoral) y *modelamiento* (por no ser definido en el diccionario de la RAE), teniendo así que los

términos *modelación* y *modelado* se relacionan con el término *modelar*²³, definido de la siguiente manera:

1. Formar de cera, barro u otra materia blanda una figura o adorno (sinónimos: moldear, formar, esculpir);
2. Configurar o conformar algo (sinónimos: configurar, conformar, moldear, crear, componer, ajustar, organizar);
3. (en pintura) Presentar con exactitud la imagen de las figuras;
4. (en América) Exhibir en una pasarela o en una sesión fotográfica diseños de moda;
5. Ajustarse a un modelo.

De la definición anterior, la acepción más cercana al contexto de esta investigación es “5. Ajustarse a un modelo”. Sin embargo, las clarificaciones terminológicas desarrolladas en la [subsección 1.2.2](#) no establecen en ningún momento que el proceso de modelización consista en ajustarse a modelos, pues este hecho se vuelve contradictorio con la definición misma que se ha consensuado para el proceso de modelización. En cambio, el diccionario de la RAE define el término *modelización*²⁴ como “acción o efecto de modelizar”, y el término *modelizar*²⁵ como “Construir el modelo o esquema teórico de algo”. En este caso, las clarificaciones terminológicas desarrolladas en la [subsección 1.2.2](#) sí explicitan que el proceso de modelización conlleva la construcción de un modelo, tanto en idioma español como inglés. Por lo tanto, utilizar los términos *modelación* o *modelado* para referirse al proceso de modelización, o el término *modelar* para referirse a la actividad que se desarrolla durante el proceso de modelización, no se considera correcto en esta tesis doctoral ni en el lenguaje en general.

²³ Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelar>

²⁴ Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelizaci%C3%B3n>

²⁵ Definición extraída desde <https://dle.rae.es/modelizar>

Capítulo 2: Problema, Preguntas, y Objetivos de Investigación –

Chapter 2: Research Problem, Questions, and Objectives

En este capítulo²⁶, se presentan el problema, las preguntas, y los objetivos de esta investigación. En la [primera sección](#), se plantea el problema de investigación y, en las siguientes secciones, se van desglosando las preguntas de investigación que emergen de este problema y su articulación con los objetivos que permiten dar respuesta a cada una de estas preguntas de investigación.

2.1. Planteamiento del Problema de Investigación

La presente tesis doctoral se centra en el estudio de la modelización matemática, considerada como un proceso relevante de la actividad matemática y como una competencia matemática. Tal como se presentó en la [sección 1.2](#), la modelización ha ido ganando un espacio importante en la investigación en Didáctica de la Matemática y, por ende, en los currículos internacionales en distintos niveles educativos. Dicho de otro modo, la modelización es un tema de investigación relevante para la Didáctica de la Matemática que merece seguir siendo estudiado y profundizado. Ahora bien, la revisión de la literatura realizada en la [sección 1.2](#) da cuenta de que, si bien han transcurrido alrededor de 50 años desde que se empezó a investigar en modelización, siguen habiendo vetas por investigar sobre este proceso y competencia matemáticos, como articulaciones con otros marcos teóricos de la Didáctica de la Matemática, diferentes enfoques para abordar en la educación de profesores, y otros procesos matemáticos desde los que analizar la modelización, entre otras. Es por esto por lo que, en esta tesis doctoral, se atienden a estos tres focos de investigación que aún quedan pendientes de explorar, y que se detallan en las siguientes secciones.

2.2. Primera Pregunta y Objetivo de Investigación

En primer lugar, se plantea un interés por profundizar en un ciclo de modelización desde la perspectiva de un marco teórico de la Didáctica de la Matemática, con el propósito de

²⁶ The translation of this chapter into English language can be found at [Annex 2](#).

generar una comprensión más detallada de la actividad matemática subyacente al proceso de modelización. Esto lleva a considerar dos referentes teóricos de distinto nivel, a saber, un marco teórico específico de modelización y un marco teórico general de la Didáctica de la Matemática. De este modo, la primera pregunta de investigación se plantea de la siguiente manera:

¿En qué medida, la aplicación de las herramientas onto-semióticas, complementa el análisis desde una perspectiva cognitiva de un proceso de modelización matemática?

Para responder esta pregunta, se propone el siguiente objetivo de investigación:

Realizar una profundización teórica sobre el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva, bajo el lente del Enfoque Onto-Semiótico, a fin de encontrar complementariedades entre ambos referentes.

En este estudio, se reconoce la existencia de diferentes ciclos y perspectivas de modelización que se han ido desarrollando a lo largo de la construcción del corpus teórico sobre este proceso, tal como se presentó en las subsecciones [1.2.2.6](#) y [1.2.2.8](#), respectivamente. No obstante, también se reconoce la prevalencia de los ciclos presentados en la Figura 9 (derivados de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer) y de la perspectiva educativa por sobre otros ciclos y perspectivas de modelización en la investigación en Didáctica de la Matemática a nivel internacional. Por esta razón, para dar cumplimiento a este objetivo y así respuesta a la primera pregunta de investigación, se adopta el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva (propuesto en los trabajos de Borromeo Ferri, [2006](#), [2011](#), [2018](#)) como el referente teórico específico de modelización y, a su vez, se asume la perspectiva realista/educativa de este proceso, en la cual se enmarca este ciclo.

Del mismo modo, es un hecho que existe una amplia variedad de marcos teóricos desarrollados en la Didáctica de la Matemática (véase Sriraman y English, [2005](#)) para analizar la actividad matemática que desarrollan los individuos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. No obstante, se reconoce la ventaja de algunos marcos teóricos sobre otros en cuanto al nivel de detalle en el análisis de esta actividad matemática. Por esta razón, para dar cumplimiento a este objetivo y así respuesta a la primera pregunta de investigación, se adopta el Enfoque Onto-Semiótico (propuesto en

los trabajos de Godino et al., [2007](#), [2019](#), [2020](#)) como el referente teórico general de la Didáctica de la Matemática y que corresponde al marco principal utilizado por el grupo de investigación en que se elaboró esta tesis doctoral.

El periodo en que se desarrolla la concreción de este objetivo de investigación corresponde a los dos primeros años académicos de los estudios de doctorado, es decir, a los cursos 2019–2020 y 2020–2021. La concreción de este objetivo se detalla en el [Capítulo 3](#), en la forma de un estudio de carácter teórico-reflexivo.

2.3. Segunda Pregunta y Objetivo de Investigación

En segundo lugar, se plantea un interés por profundizar en la inclusión e implementación de la modelización en la educación de futuros profesores, específicamente, durante el periodo de prácticas educativas y la posterior reflexión sobre la práctica docente, con el propósito de identificar los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que se priorizan al trabajar con la modelización. Esto lleva a considerar, además de un ciclo de modelización, una herramienta para pautar esta reflexión sobre la práctica docente. De este modo, la segunda pregunta de investigación se plantea de la siguiente manera:

¿Qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático relacionan futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la modelización en sus reflexiones sobre la inclusión de este proceso durante sus prácticas educativas?

Para responder esta pregunta, se propone el siguiente objetivo de investigación:

Analizar en qué medida se encuentra presente la modelización en las propuestas didácticas y los Trabajos Finales de Máster elaborados por futuros profesores de matemática de educación secundaria y bachillerato.

En este estudio, se reconoce la existencia de diferentes compilaciones de criterios para guiar la práctica del profesor de matemática para que sea de calidad (véase Praetorius y Charalambous, [2018](#); Prediger et al., [2022](#); entre otros). No obstante, también se reconoce que, derivado del marco teórico general de la Didáctica de la Matemática utilizado en esta investigación, el Enfoque Onto-Semiótico aporta una herramienta para pautar la reflexión

sobre la práctica docente. Por esta razón, para dar cumplimiento a este objetivo y así respuesta a la segunda pregunta de investigación, se adopta la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (propuesta en los trabajos de Breda et al., [2017](#); Godino, [2013](#); Godino et al., [2023](#)) como el referente teórico para pautar la reflexión sobre la práctica docente. Del mismo modo, en línea con el reconocimiento de la existencia de diferentes ciclos de modelización, se adopta el Ciclo de Modelización propuesto por Blum y Leiß ([2007a](#)) como el referente teórico de este proceso. La elección de ambos constructos se justifica en que son enseñados a los futuros profesores en el contexto en que se desarrolla esta investigación.

El periodo en que se desarrolla la concreción de este objetivo de investigación corresponde a tres años académicos de los estudios de doctorado, es decir, a los cursos 2020–2021, 2021–2022, y 2022–2023. La concreción de este objetivo se detalla en los Capítulos [4](#) y [5](#), en la forma de dos estudios desarrollados en un programa de máster profesionalizante para profesores de educación secundaria y bachillerato en el contexto español, en el que se reportan los resultados de los años académicos 2020–2021 y 2021–2022.

2.4. Tercera Pregunta y Objetivo de Investigación

En tercer lugar, derivado de la segunda pregunta y objetivo de investigación, se plantea un interés por profundizar en el tipo de tareas que proponen futuros profesores, también, durante el periodo de prácticas educativas, con un propósito doble: primero, conocer las tareas que proponen los futuros profesores para trabajar la modelización y, segundo, identificar si estas tareas cumplen con las características para ser consideradas como tareas de modelización. Esto lleva a considerar una caracterización consensuada sobre los atributos que debe tener una tarea de modelización para ser considerada como tal y un esquema teórico que clasifique este tipo de tareas. De este modo, la tercera pregunta de investigación se plantea de la siguiente manera:

¿Qué tareas de modelización proponen futuros profesores? ¿Son éstas realmente tareas de modelización según las características consensuadas para este tipo de problemas por la comunidad de investigación en modelización?

Para responder esta pregunta, se propone el siguiente objetivo de investigación:

Caracterizar y clasificar las tareas propuestas por futuros profesores en sus Trabajos Finales de Máster que consideren como tareas de modelización.

Dado que esta pregunta y objetivo de investigación se derivan del cumplimiento y respuesta a lo propuesto en la [sección 2.3](#), se toman como base algunos de los resultados del cumplimiento y respuesta del segundo objetivo y pregunta de investigación. Además, dado que en este estudio se asume la perspectiva de modelización realista/educativa, por consiguiente, se consideran las características consensuadas y la clasificación correspondiente para las tareas de modelización que se enmarcan en esta perspectiva. Por esta razón, para dar cumplimiento a este objetivo y así respuesta a la tercera pregunta de investigación, se adopta la síntesis de Borromeo Ferri (2018) para caracterizar los problemas de modelización y el esquema propuesto por K. Maaß (2010) para clasificar este tipo de tareas. A diferencia de los demás objetivos de esta tesis doctoral, aquí no se recurre a la utilización de un marco teórico general de la Didáctica de la Matemática para su cumplimiento, sino que exclusivamente a referentes de la investigación en modelización.

El periodo en que se desarrolla la concreción de este objetivo de investigación corresponde, al igual que para lo propuesto en la [sección 2.3](#), a los cursos 2020–2021, 2021–2022, y 2022–2023. La concreción de este objetivo se detalla en el [Capítulo 6](#), en la forma de un estudio desarrollado en un programa de máster profesionalizante para profesores de educación secundaria y bachillerato en el contexto español, en el que se reportan los resultados de los tres años académicos antes mencionados.

2.5. Cuarta Pregunta y Objetivo de Investigación

En cuarto lugar, derivado de la primera pregunta y objetivo de investigación, se plantea un interés por profundizar en el marco teórico específico de modelización desde la perspectiva de otros procesos relevantes de la actividad matemática. Esto lleva a considerar dos referentes teóricos de igual nivel, a saber, un marco teórico específico de modelización y uno de otro proceso matemático, con la condición de que ambos marcos ya hayan sido analizados desde la perspectiva de un marco teórico general de la Didáctica de la Matemática. De este modo, la cuarta pregunta de investigación se plantea de la siguiente manera:

¿Cuál es el papel de otros procesos relevantes de la actividad matemática en el proceso de modelización?

Para responder esta pregunta, se propone el siguiente objetivo de investigación:

Realizar una profundización teórica y una reflexión sobre la dialéctica de los análisis de la actividad matemática general y los análisis específicos para el proceso de modelización.

Dado que este objetivo y pregunta de investigación se derivan del cumplimiento y respuesta a lo propuesto en la [sección 2.2](#), se toma como base la articulación teórica resultante del cumplimiento y respuesta del primer objetivo y pregunta de investigación. Además, dado que en este estudio se adopta el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva como el referente teórico específico de modelización y el Enfoque Onto-Semiótico como el referente teórico general de la Didáctica de la Matemática, por consiguiente, se considera otro proceso relevante de la actividad matemática que haya sido analizado desde esta misma perspectiva. Por esta razón, para dar cumplimiento a este objetivo y así respuesta a la cuarta pregunta de investigación, se adoptan las articulaciones entre Modelización y Enfoque Onto-Semiótico (propuesta en el trabajo de Ledezma, Font, y Sala, [2023](#)) y entre Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas y Enfoque Onto-Semiótico (propuesta en el trabajo de Rodríguez-Nieto et al., [2023](#)) como referentes teóricos.

El periodo en que se desarrolla la concreción de este objetivo de investigación corresponde al último año académico de los estudios de doctorado, es decir, al curso 2023–2024. La concreción de este objetivo se detalla en el [Capítulo 7](#), en la forma de un estudio de carácter teórico-reflexivo.

2.6. Síntesis de Preguntas y Objetivos de Investigación

En la Tabla 8, se realiza una síntesis en la que se presentan las cuatro preguntas y objetivos de investigación (segunda y tercera columna), el periodo en que se desarrolla la concreción de cada objetivo (cuarta columna), el capítulo en que se encuentran los estudios que permiten darles cumplimiento y respuesta (quinta columna), y la relación entre las distintas preguntas y objetivos (sexta columna). Con respecto a esto último, la presentación y explicación de las preguntas y objetivos de investigación a lo largo de este capítulo dan cuenta de que existe una relación entre ellos. Más específicamente, el

cumplimiento del primer objetivo y la consiguiente respuesta a la primera pregunta de investigación es la base para el cumplimiento del cuarto objetivo y la consiguiente respuesta a la cuarta pregunta de investigación (identificados en color verde), misma situación que ocurre con el cumplimiento y respuesta del segundo y tercer objetivo y pregunta de investigación (identificados en color azul).

Finalmente, se remarca que, para el desarrollo de esta investigación, el doctorando siguió los protocolos establecidos por el Código Ético de Integridad y Buenas Prácticas de la Universidad de Barcelona²⁷.

²⁷ Disponible en <http://hdl.handle.net/2445/137899>.

Tabla 8. Síntesis de las preguntas y los objetivos de investigación.

N.º	Preguntas	Objetivos	Periodo	Estudios	Relación
1º	¿En qué medida, la aplicación de las herramientas onto-semióticas, complementa el análisis desde una perspectiva cognitiva de un proceso de modelización matemática?	Realizar una profundización teórica sobre el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva, bajo el lente del Enfoque Onto-Semiótico, a fin de encontrar complementariedades entre ambos referentes.	2019–2020 2020–2021	Capítulo 3	
2º	¿Qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático relacionan futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la modelización en sus reflexiones sobre la inclusión de este proceso durante sus prácticas educativas?	Analizar en qué medida se encuentra presente la modelización matemática en las propuestas didácticas y los Trabajos Finales de Máster de futuros profesores de matemática de educación secundaria y bachillerato.	2020–2021 2021–2022 2022–2023	Capítulo 4 Capítulo 5	
3º	¿Qué tareas de modelización proponen futuros profesores? ¿Son éstas realmente tareas de modelización según las características consensuadas para este tipo de problemas por la comunidad de investigación en modelización?	Caracterizar y clasificar las tareas propuestas por futuros profesores en sus Trabajos Finales de Máster que consideren como tareas de modelización.	2020–2021 2021–2022 2022–2023	Capítulo 6	
4º	¿Cuál es el papel de otros procesos relevantes de la actividad matemática en el proceso de modelización?	Realizar una profundización teórica y una reflexión sobre la dialéctica de los análisis de la actividad matemática general y los análisis específicos para el proceso de modelización matemática.	2023–2024	Capítulo 7	

Fuente: Elaboración del autor.

Capítulo 3: Primer Artículo –

Chapter 3: First Article

This chapter presents the first article published to fulfil the requirements of this doctoral thesis. Table 1 presents the identification data of this first article.

Table 1. Identification data of the first article.

Criteria	Data
Title	Analysing the modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives.
Author(s)	Carlos Ledezma, Vicenç Font, Gemma Sala.
Affiliation(s)	Department of Linguistic and Literature Education, and of Didactics of Experimental Sciences and Mathematics, Faculty of Education, University of Barcelona (Spain).
Journal	Mathematics Education Research Journal.
Volume	35.
Issue	4 (December 2023).
Pages	715–741.
DOI	10.1007/s13394-022-00411-3
Online publication date	16 th February 2022.
Submission date	28 th June 2021.
Acceptance date	16 th January 2022.
Accesses	3573 times.
Cross Reference ²⁸	8 citations.
Web of Science ²⁹	2 citations.
ResearchGate ³⁰	16 citations.
Reference entry	Ledezma, C., Font, V., & Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. <i>Mathematics Education Research Journal</i> , 35(4), 715–741. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Source: Author's elaboration based on the information accessed on 31st March 2024 at <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-022-00411-3>.

This journal was founded in 1989 and is currently published by Springer Nature. The editor-in-chief is Vincent Geiger (Australian Catholic University, Australia). This journal is abstracted and indexed in 24 databases, including EBSCO, ESCI, ERIC, Google Scholar, ProQuest, SCImago, SCOPUS, among others.

²⁸ Information available at <https://citations.springernature.com/item?doi=10.1007/s13394-022-00411-3>.

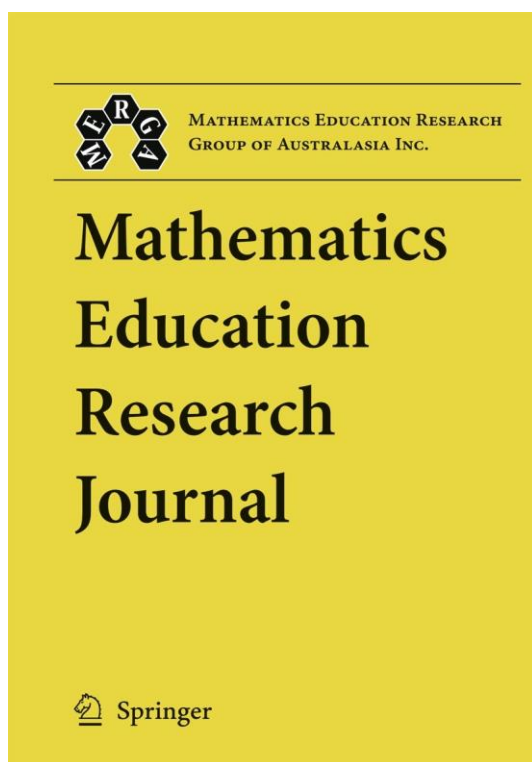
²⁹ Information available at <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000756345400001?SID=EUW1ED0F89YzY3784ppdXCjer3UT1>.

³⁰ Information available at https://www.researchgate.net/publication/358638650_Analysing_the_mathematical_activity_in_a_modelling_process_from_the_cognitive_and_onto-semiotic_perspectives.

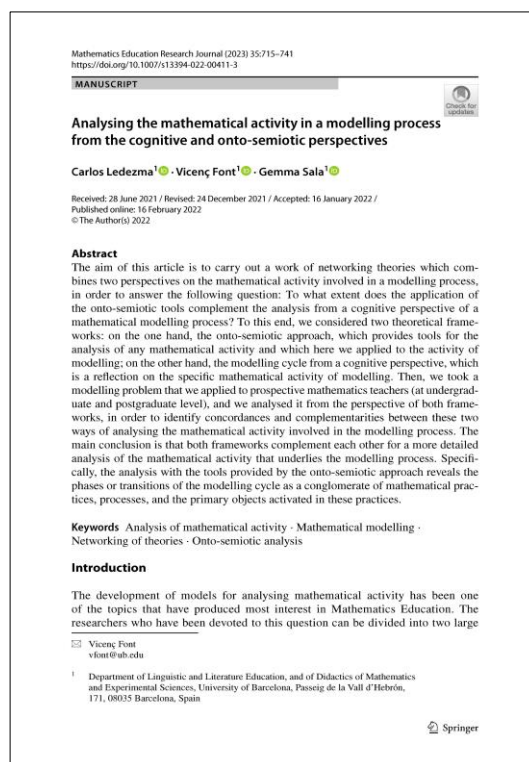
According to the information available at the Master Journal List of Web of Science (WoS)³¹, this journal is indexed in the Emerging Sources Citation Index (ESCI), within the categories Education and Scientific Disciplines, with a Journal Citation Indicator in 2022 of 0.73.

According to the information available at Scopus³², this journal is indexed within the categories Mathematics/General Mathematics (rank #42/387, 89th percentile) and Social Sciences/Education (rank #353/1469, 76th percentile), with a CiteScore in 2022 of 3.7 and a CiteScore Tracker in 2023 of 4.8.

According to the information available at Scimago Journal & Country Rank (SJR)³³, this journal is indexed within the categories Mathematics/Miscellaneous and Social Sciences/Education, its H-Index is 41 and SJR 2023 is 0.86 (Q1 in Education).



(a)



(b)

Figure 1. (a) *Mathematics Education Research Journal* cover; (b) first page of the article.

Source: Journal's website (<https://link.springer.com/journal/13394>).

³¹ Information available at <https://mjl.clarivate.com/search-results?issn=1033-2170>.

³² Information available at <https://www.scopus.com/sourceid/19400158816>.

³³ Information available at <https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=19400158816&tip=sid&clean=0>.

3.1. Abstract and Keywords –

Resumen y Palabras Clave

3.1.1. English language

Abstract: The aim of this article is to carry out a work of networking theories which combines two perspectives on the mathematical activity involved in a modelling process, in order to answer the following question: To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process? To this end, we considered two theoretical frameworks: on one hand, the Onto-Semiotic Approach, which provides tools for the analysis of any mathematical activity and which here we applied to the activity of modelling; on the other hand, the Modelling Cycle from a Cognitive Perspective, which is a reflection on the specific mathematical activity of modelling. Then, we took a modelling problem that we applied to prospective mathematics teachers (at undergraduate and postgraduate level), and we analysed it from the perspective of both frameworks, in order to identify concordances and complementarities between these two ways of analysing the mathematical activity involved in the modelling process. The main conclusion is that both frameworks complement each other for a more detailed analysis of the mathematical activity that underlies the modelling process. Specifically, the analysis with the tools provided by the Onto-Semiotic Approach reveals the phases or transitions of the modelling cycle as a conglomerate of mathematical practices, processes, and the primary objects activated in these practices.

Keywords: Analysis of mathematical activity; Mathematical modelling; Networking of theories; Onto-semiotic analysis.

3.1.2. Idioma español

Resumen: El objetivo de este artículo es realizar un trabajo de articulación de teorías que combina dos perspectivas sobre la actividad matemática involucrada en un proceso de modelización, con el propósito de responder la siguiente pregunta: ¿en qué medida, la aplicación de las herramientas onto-semióticas, complementa el análisis desde una perspectiva cognitiva de un proceso de modelización matemática? Para ello, se consideraron dos marcos teóricos: por una parte, el Enfoque Onto-Semiótico, el cual aporta herramientas para el análisis de cualquier actividad matemática y que aquí se aplicó

a la actividad de modelización; por otra parte, el Ciclo de Modelización desde una Perspectiva Cognitiva, el cual es una reflexión sobre la actividad matemática específica de modelización. Luego, se tomó un problema de modelización que se aplicó a futuros profesores de matemática (a nivel de pregrado y postgrado), y se analizó desde la perspectiva de ambos marcos, con el propósito de identificar concordancias y complementariedades entre estas dos maneras de analizar la actividad matemática involucrada en el proceso de modelización. La principal conclusión es que ambos marcos se complementan mutuamente para un análisis más detallado de la actividad matemática que subyace al proceso de modelización. Específicamente, el análisis con las herramientas del Enfoque Onto-Semiótico revela las fases y transiciones del ciclo de modelización como un conglomerado de prácticas matemáticas, procesos, y objetos primarios activados en estas prácticas.

Palabras clave: Análisis de la actividad matemática; Análisis onto-semiótico; Articulación de teorías; Modelización matemática.

3.2. Introduction

The development of models for analysing mathematical activity has been one of the topics that have produced most interest in Mathematics Education. The researchers who have been devoted to this question can be divided into two large groups: those who have proposed general models for the analysis of mathematical activity, and those who have chosen to propose models for a specific type of mathematical activity. In the first group, there are those who develop theoretical constructs to analyse mathematical activity within the framework of the theories of Mathematics Education (e.g., Brousseau, [2002](#); Chevallard, [1992](#); Kuzniak, [2011](#); among others). In the second group, we find those who focus on specific activities, such as the use of semiotic representations (Duval, [2017](#)), problem solving (Liljedahl & Santos-Trigo, [2019](#)), visualisation (Presmeg, [2006](#)), and also mathematical modelling. On the last of these, the specialised literature has included research on the different ways of structuring modelling cycles (see Borromeo Ferri, [2006](#)), as well as the different perspectives on this process in the teaching and learning of mathematics (see Abassian et al., [2020](#)).

Although some research into *networking* between a general theoretical framework and a theoretical model focused on the analysis of a specific type of mathematical activity has

been carried out (see Pino-Fan et al., [2017](#), for the process of representation; Campo-Meneses & García-García, [2021](#); and Rodríguez-Nieto, [2021](#), for the process of connection), it is interesting to extend the study of how these different types of analysis of mathematical activity (i.e., general and specific frameworks) may complement each other. In the present study, a general theoretical framework of mathematical activity and a specific framework for the mathematical modelling process are complemented. Therefore, this research is relevant to the field and addresses a *networking* of two theories which, as far as we know, has not previously been proposed with these specific theoretical frameworks.

Currently there is a broad consensus on the importance of including mathematical modelling in school curricula, and on the development of competencies linked to this process (Kaiser, [2020](#)). It is considered that this incorporation helps students to improve their understanding of mathematics, providing real contexts for its learning, and therefore contributing to the development of different mathematical competencies, among other benefits (Blum, [2011](#)). However, what has not yet been agreed upon is specifically how to incorporate mathematical modelling into the curriculum, since there is no consensus on the objectives of the process and the theoretical justification for the design and implementation of its teaching. This situation stems from the diversity of approaches to mathematical modelling that have been proposed (Borromeo Ferri, [2013](#)).

Among the specific frameworks for the analysis of mathematical activity in modelling, one of the remarkable approaches within the educational community is the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective (MMCCP), proposed by Borromeo Ferri ([2007a](#)). As regards general frameworks for the analysis of mathematical activity, one key reference is the Onto-Semiotic Approach (OSA) (Godino, [2002](#); Godino et al., [2007](#)), a theoretical model of mathematical cognition and instruction that provides conceptual and methodological tools to pose and deal with research problems in Mathematics Education. While de MMCCP has an impact in the European research community and has also been worked by Hispanic researchers (see Borromeo Ferri, [2018](#)), the OSA, in addition to its European impact, has a substantial impact in the Hispanic academic

world³⁴, and has also been worked in the Australasian context (see, Claudia et al., [2021](#); Rudi et al., [2020](#); among others).

Taking into consideration the impact of the theoretical frameworks mentioned above, and the authors' expertise in their use (since the first and third authors have experience in using the MMCCP, and the second and third authors in the use of the OSA), in this article we address the following research question: To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process? In order to address this issue, we used the tools provided by the OSA to analyse the complexity of the mathematical activity involved in the MMCCP, and we followed a methodology that is very similar to that used in the *Networking of Theories* (Bikner-Ahsbabs & Prediger, [2010](#), [2014](#)) to understand the potential complementarities between the analyses performed with the two theoretical frameworks considered in this study.

We consider that answering this question is relevant for Mathematics Education research in two scopes: on one hand, because it will allow both a better understanding and refinement of the MMCCP, and the theoretical development of the OSA through a connection between the modelling process and the tools provided by this framework; on the other hand, because it is related to the current interest of reflecting on the *networking of theories* – in this case, between a general and a specific framework – and it is in line with the work developed by Vergel and collaborators ([2023](#)).

3.3. Theoretical Framework

In this section, we describe the two theoretical frameworks considered for this study.

3.3.1. Mathematical modelling

Despite differences with respect to the positions on mathematical modelling, there is a relative consensus that this process consists of a transition between the real world and the mathematical world, when solving real-context problems. Although different models have been proposed for this transition, here we choose the MMCCP proposed by Borromeo Ferri ([2007a](#)), as shown in Figure 2. This cycle, based on that developed by

³⁴ The studies where the OSA is widely explained and applied are available at <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>

Blum and Leiß (2007a), explains the phases that an individual goes through in order to solve a modelling problem.

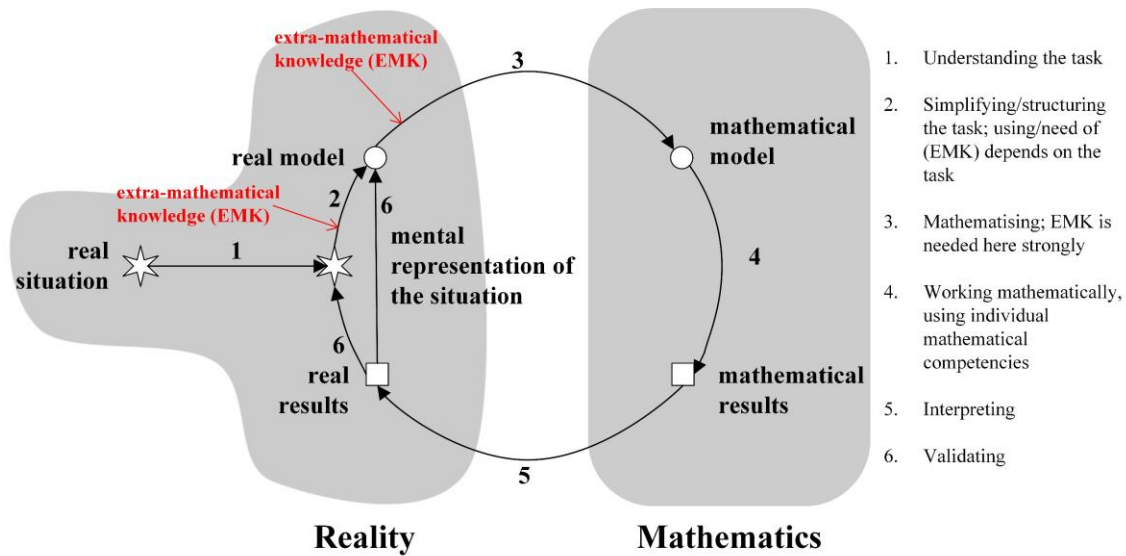


Figure 2. Mathematical modelling cycle from a cognitive perspective.
 Source: Adapted from Borromeo Ferri (2018, p. 15).

In terms of what is described by Borromeo Ferri (2011, 2018), the *real situation* is understood as a problem taken from reality, and that may be represented in written form (textual statement), visual form (pictures), or a mixture of the two (text and pictures). The *mental representation of the situation* is generated from understanding of the task, mental reconstruction of the problem, and the associations the individual makes with the proposed situation. To obtain a *real model*, the mental image the individual has formed based on the problem must be simplified and structured, and it may include external representations (diagrams, figures, etc.). As in a modelling problem not all the data necessary for its solving are always given, the individual's *extra-mathematical knowledge* plays an important role when working with the available information, adding some considerations to the context of the situation according to personal experience. The *mathematical model* takes into consideration the mathematical objects which allow the *real situation* presented to be explained (Abassian et al., 2020), and it will be the product of the mathematisation (translation into mathematical language) of the *real model* and the contributions of the individual's *extra-mathematical knowledge*. From the mathematical work with the *mathematical model*, *mathematical results* are obtained that, after being interpreted in the *real situation* context, will allow *real results* to be obtained. Finally, the validation of the *real results* – comparison of the triad *real results* ↔ *mental*

representation of the situation ↔ *real model* – should lead to an adequate answer to the proposed problem.

The *mathematical modelling competency* is present throughout this entire cycle. It consists of being able to work (construct, critically analyse, evaluate) with mathematical models and to take into consideration adequately elements from the extra-mathematical domain, as the phases of the modelling cycle progress (Niss & Højgaard, 2019). This competency is carried out through different *mathematical modelling sub-competencies* (numbered on the right side of Figure 2), which enable transition between these phases (see K. Maaß, 2006).

3.3.2. Example of a modelling problem and analysis of its solving using the MMCCP

In the *Bales of Straw Problem* (proposed by Blum and Leiß, 2007b), students are required to calculate the height of a mountain of bales of straw from a picture (see Figure 3). This problem has been used by Borromeo Ferri (2011, 2018) to exemplify the MMCCP. We chose this problem for analysis in this study precisely because it is a paradigmatic example used to illustrate this modelling cycle.

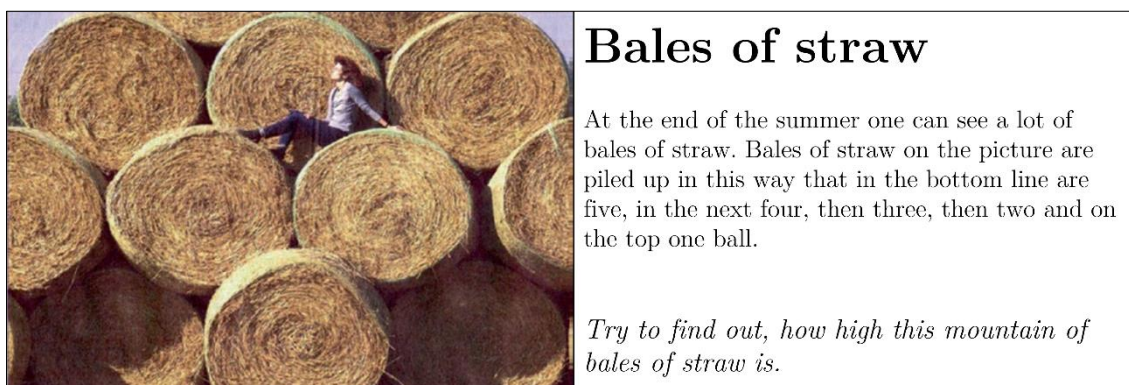


Figure 3. The *Bales of Straw Problem*.
Source: Adapted from Borromeo Ferri (2007b, p. 2084).

Table 2 presents the analysis of the solving procedure for the *Bales of Straw Problem* from the perspective of the MMCCP.

Table 2. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using the MMCCP.

Phases of the cycle	Modelling activity
<i>Real situation</i>	Representation of the problem through the picture (Figure 3).
<i>Mental representation of the situation</i>	Think about moments related to summer and one's own experiences with bales of straw (<i>Extra-Mathematical</i>

Phases of the cycle	Modelling activity
	<i>Knowledge</i>); understand that the height of the mountain of bales of straw must be determined.
<i>Real model</i>	Think of circles instead of bales of straw; draw the situation; simplify the woman as a segment; suppose that the height of the woman is 1.7 m*.
<i>Mathematical model</i>	Model 1: Multiple addition of the height of the woman. Model 2: Use of the Pythagorean theorem.
<i>Mathematical results</i>	The result of the <i>mathematical model</i> would be approximately 7.
<i>Real results</i>	The height of the mountain of bales of straw is 7 m.

Note (*): An element from the *extra-mathematical knowledge* that must be taken into consideration is that this problem was originally applied in the German context, which explains why the height of the woman is estimated as 1.7 m. Source: Adapted from Borromeo Ferri (2011, 2018).

3.3.3. Onto-Semiotic Approach

The OSA considers that mathematical activity aims to solve problems. As a result of a *process* of problematisation, an individual or institution assumes the task of solving a problem (proposed by someone else or created by oneself), through carrying out *mathematical practices* – any action or manifestation, linguistic or otherwise, carried out by somebody to solve mathematical problems, to communicate the solution to other people, or to validate and generalise that solution to other contexts and problems (Godino & Batanero, 1998). In order to carry out them and to interpret whether their results are satisfactory, it is necessary, in addition to considering the problem itself, to bring into operation other *mathematical objects*, which emerge from these *mathematical practices*. Indeed, in the solving of a problem, it is necessary to use different languages (verbal, symbolic, etc.), which are the ostensive part of a series of definitions, propositions, and procedures that intervene in the elaboration of arguments that allow the problem to be solved. Consequently, when an individual performs and evaluates a sequence of *mathematical practices*, he activates a cluster made up of problem-situations, languages, definitions, propositions, procedures, and arguments articulated in what the OSA terms a *configuration of primary objects* (Font et al., 2013). These networks of *objects* that intervene and emerge are called *epistemic configurations* when they are considered from an institutional perspective, and *cognitive configurations* when they are considered from a personal perspective.

The *mathematical objects* that intervene in the *mathematical practices* and those that emerge from them may be considered from the perspective of the following ways of

being/existing, which are grouped into facets or dual dimensions (see Font & Contreras, [2008](#); Font et al., [2013](#)): *extensive–intensive*, *expression–content*, *personal–institutional*, *ostensive–non-ostensive*, and *unitary–systemic*.

Problem solving is achieved through the articulation of sequences of *practices*. Such sequences take place in time and are often considered as *processes*. Particularly, the use and/or emergence of the *primary objects* of the *configuration* (problem-situations, languages, definitions, propositions, procedures, and arguments) takes place through the respective *mathematical processes* of communication, problematisation, definition, enunciation, elaboration of procedures (algorithmicising, routinisation, etc.), and argumentation (by applying the *process–product* duality). Meanwhile, the dualities described above give rise to the following *processes*: institutionalisation – personalisation, generalisation – particularisation, analysis/decomposition – synthesis/reification, materialisation/concretion – idealisation/abstraction, expression/representation – meaning.

This list of *processes*, derived from the typology of *primary objects* and dual facets used as tools to analyse mathematical activity in the OSA, although contemplates some of the *processes* considered as important in mathematical activity, is not intended to include all the *processes* involved in that activity. This is because, among other reasons, some of the most important *processes*, such as problem solving and mathematical modelling, are *hyper* or *mega processes* rather than just mere *processes* (Godino et al., [2007](#)), since they involve more elementary *processes*, such as representation, argumentation, idealisation, and generalisation.

The OSA considers that both *mathematical practices* and the teaching and learning process are regulated, among other things, by *epistemic norms* (which regulate *mathematical practices* and contents, in correspondence with the mathematical discourse that can be developed in an institution), *mediational norms* (which regulate the resources – time or artefacts – used in *practices*), *interactional norms* (which regulate the modes of interaction between the individuals involved in *mathematical practices* or the teaching and learning process), and *ecological norms* (external aspects – curricular guidelines, educational policies, etc. – which condition *practices* in lessons) (Godino et al., [2009](#)). In this study, we focused on *epistemic norms*, particularly the meta-mathematical ones, which regulate the *practices* carried out in a modelling process.

The theoretical tools just described allow for analysis of mathematical activity in which, firstly, a temporal analysis of the *mathematical practices* carried out to solve a certain problem is performed; secondly, the *configuration of primary objects* that intervene in those *practices* is analysed (which provides information on the elements or parts of this mathematical activity), and finally, an analysis in terms of *processes* is carried out again to complete the analysis in terms of *practices* (which provides information on the temporal dynamics of mathematical activity). Meanwhile, the normative analysis allows us to describe the *norms* that regulate this mathematical activity. In the next subsection, we illustrate this way of analysing the mathematical activity by using the solving of the *Bales of Straw Problem*. Due to a lack of space, other types of analysis (by applying other tools provided by the OSA) are excluded; for instance, plotting the semiotic functions that interlink the *primary objects* which intervene in *mathematical practices* (e.g., Breda et al., [2021](#)), or the *metacognitive configurations* (e.g., Gusmão, [2006](#)).

3.3.4. Example of a modelling problem and analysis of its solving using the OSA

The following analysis only considers the first *mathematical model* mentioned in Table 2 (due to a lack of space), that is, the multiple addition of heights. Firstly, we describe our solving of the problem as a mathematical narrative. The solver began by reading the problem, which requires the calculation of the height of a mountain of bales of straw. To this end, presumably, he estimated the height of a woman (1.7 m, approximately), then visually compared this height with the diameter of a bale, concluding that it would be somewhat smaller than the woman (1.5 m, approximately). By looking at the picture, he noticed that there are five rows of bales in total, of which the even rows are smaller in size (three quarters of the calculated diameter) than the odd rows, due to the way the bales are stacked and fit together. To calculate the total height of the mountain, he could have represented the situation as a diagram where the five rows are shown (Figure 4a), and assigned lengths to the diameters of each row (Figure 4b). Thus, the total height of the mountain of bales of straw would be equal to the sum of each row of bales (6.75 m).

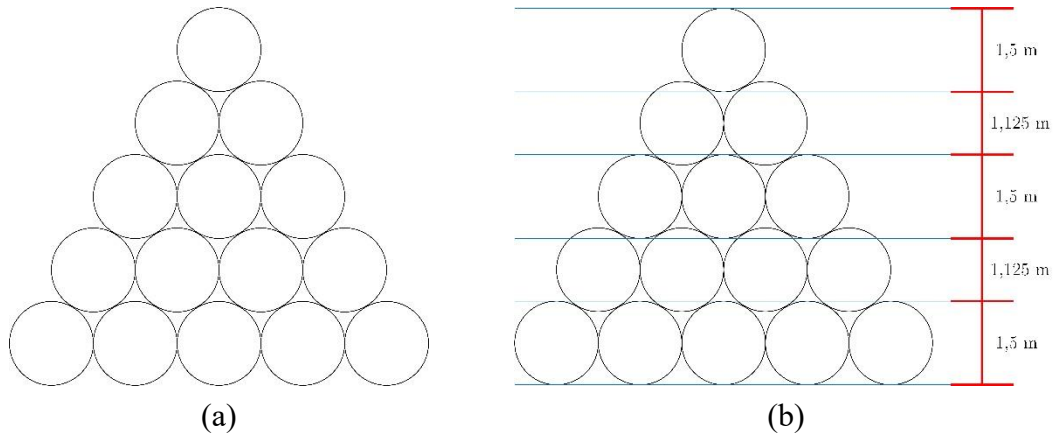


Figure 4. Representations of the situation through (a) a diagram of rows, and (b) with the lengths of the diameters of each row.

Source: Authors' elaboration.

Secondly, based on the mathematical narrative described above, we identify the following *mathematical practices* (P) that can be performed to solve this problem:

- P1: Read the task.
- P2: Estimate the height of the woman.
- P3: Make a visual comparison between the height of the woman and that of the bale, to estimate its diameter.
- P4: Make an iconic representation of the situation.
- P5: Calculate the portion of the height of the even rows that does not fit with the height of the odd rows, by using a visual comparison.
- P6: Perform the calculations to arrive at the total height of the mountain.
- P7: Assess whether the solution makes sense in the context of the problem.

Thirdly, since mathematical modelling is considered within the OSA as a *mega process*, we identify the *processes* involved in each of the *practices* listed above, and the *objects* that emerge from these *practices*. As a result, Table 3 presents the analysis of the *Bales of Straw Problem* using the tools provided by the OSA, including the *mathematical practices* (first column), *processes* (second column), and *objects* (third column) that intervene to solve the problem.

Table 3. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using the OSA.

Practices	Processes	Objects
P1: Read the task.	<ul style="list-style-type: none"> - Meaning/Understanding. - Problematisation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Problem: <i>Determine the height of the mountain of bales of straw.</i>
P2: Estimate the height of the woman.	<ul style="list-style-type: none"> - Subprocess of problem solving: <i>Draw up a plan.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimation (procedure). - Arithmetic mean (implicit definition). - Mathematical proposition: <i>The average height of (German) women is 1.7 m.</i>
P3: Make a visual comparison between the height of the woman and that of the bale, to estimate its diameter.	<ul style="list-style-type: none"> - Simplification/Idealisation: <i>Convert the woman into a line segment and the bales of straw into cylinders; consider only the shape of the woman and of the bale, ignore its other attributes.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - Visual comparison (procedure). - Cylinder, base, circumference, diameter (implicit definitions). - Monotonic property of measurement $(\mu(A) \leq \mu(B))$. - Mathematical proposition: <i>The diameter of one bale of straw is 1.5 m.</i>
P4: Make an iconic representation of the situation.	<ul style="list-style-type: none"> - Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Representation (Figure 4a).
P5: Calculate the portion of the height of the even rows that does not fit with the height of the odd rows, by using a visual comparison.	<ul style="list-style-type: none"> - Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Visual comparison of lengths (procedure). - Mathematical proposition: <i>The height of the even rows that overlap with the height of the odd rows is $\frac{3}{4}$ of diameter of the circumference.</i> - Monotonic property of the measurement. - Representation (Figure 4b).

Table 3. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using the OSA. (cont.)

Practices	Processes	Objects
<p>P6: <i>Perform the calculations to arrive at the total height of the mountain.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - Argumentation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Additive property of measuring lengths $\{m A \cup B = m A + m B \}$. - Indirect measurement (procedure). - Proposition (argument thesis): <i>The total height is 6.75 m, approximately.</i> - Arguments (reasons): <i>By applying the estimation procedure we get:</i> <ol style="list-style-type: none"> a) <i>The diameter of the bale of straw is less than the height of the woman; since the woman is 1.7 m tall, the bale is 1.5 m in diameter, approximately.</i> b) <i>The height of the even rows that overlap with the odd ones is $\frac{3}{4}$ of the diameter of the circumference, approximately.</i> c) <i>The total height of the mountain is the sum of the heights of the odd rows plus those of the even rows.</i>
<p>P7: <i>Assess whether the solution makes sense in the context of the problem.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - Subprocess of problem solving: <i>Examine the solution.</i> - Validation of the solution, bearing in mind the context. 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimation (procedure). - Validation proposition: <i>The height of the woman fits almost four times into the total height of the mountain.</i> - Proposition (argument thesis): <i>The result (6.75 m) is plausible in the real world.</i> - Argument (reason): <i>Bearing in mind the result of the estimation procedure (less than $4 \times 1.7 = 6.8$), the result is very close to this.</i>

The result for the height of the mountain of bales of straw is 6.75 metres*, approximately.

Note (*): The result obtained with these procedures is coherent with the 7 metres suggested in Table 2. Source: Authors' elaboration.

Fourthly, from the analysis in Table 3, we identify that some *epistemic* (meta-mathematical) *norms* that govern the modelling activity also emerge. They are listed below, according to the *mathematical practice* to which they are related.

- Norm 1: Minimise the amount of information, replacing it with signs and figures (principle of simplification) [Practice 4].
- Norm 2: Make a representation that maintains the structure of the problem statement (iconic representation, diagram), and the information needed to solve it [Practice 4].
- Norm 3: The representation can be drawn by hand or using a graphic software [Practice 4].
- Norm 4: The problem may have approximate, non-exact solutions [Practice 5].
- Norm 5: The solution must make sense in the real world, as it is a real-context problem [Practice 7].

Concerning the last *norm*, two considerations must be made: (a) the results must exist in reality (for example, a negative height should be discarded in this context), and (b) the results must be reasonable, as determined by triangulating with other contextual information (for example, a height of 250 m or 30 cm would not be reasonable), or by searching for it on the internet or in other sources.

If there are different solving procedures for the problem (with different *mathematical practices, processes, and objects*), a sixth *norm* appears, which consists of assessing which solution is best suited to answering the problem, considering some questions such as: For what do I need the answer? Is it consistent with the context of the problem? What are the mathematical aspects involved in? (among others).

3.4. Methodology

The study we developed is mainly reflective on theory and is aimed at comparing analyses of mathematical activity from the perspective of the two theoretical frameworks described in the [previous section](#), in order to understand how the onto-semiotic tools complement the MMCCP. To this end, we followed a methodology that is very similar to that used in the *Networking of Theories*, particularly that used in works of *networking* between a general theoretical framework and a theoretical model focused on the analysis of a specific type of mathematical activity (e.g., for the process of representation, see Pino-

Fan et al., [2017](#); and for the process of connection, see Campo-Meneses & García-García, [2021](#); and Rodríguez-Nieto, [2021](#)).

3.4.1. Networking of Theories

In a *first step*, we explained the two theoretical frameworks to each other, in order to ensure that all three of us have a good understanding of both. The way in which the two frameworks understand both the specific mathematical activity of modelling and in general was explained above (see [subsection 3.3](#)).

Various authors have shown an interest in determining the aspects that characterise a theory, in order to clarify it and compare it to others (see Bikner-Ahsbabs & Prediger, [2010](#), [2014](#)). According to Radford ([2008](#)), the essential elements of a theory include paradigmatic principles, methods, and research questions. The principles of each theory imply that a position is (either explicitly or implicitly) adopted on the nature of mathematical objects. The *second step* allowed us to find concordances and differences between the theoretical frameworks, and provided a first general idea on how they could be coordinated. This *second step* was essential in order to be able to continue to the following *steps*, since on one hand, an initial comparison between the constructs used in the two approaches to analyse mathematical activity made certain concordances evident and, on the other hand, we conclude that the different positions concerning the nature of mathematical objects were not so decisive as to make it pointless to continue seeking for connections between them (see [subsection 3.5.1](#)).

Once we made this first comparison between the two theoretical frameworks, we applied one of the basic principles of the *Networking of Theories*: ensuring that the work of establishing connections is as accurate as possible. In accordance with this principle, since modelling should clearly be the topic, the *third step* was to select a specific task from this type of mathematical activity, thus we chose a paradigmatic task which is used as an example to illustrate the MMCCP (the *Bales of Straw Problem* in Figure 3). Since we took its expert solution and analysis from Borromeo Ferri ([2011](#), [2018](#)), we made our own expert solution to the problem and then applied the tools provided by the OSA for its analysis (as we described in [subsection 3.3.4](#)).

In a *fourth step*, we posed the problem in question to two groups of prospective mathematics teachers to solve it, in order to use their mathematical strategies and *models*

which could emerge from their solving procedures to illustrate – in the following *steps* – how the analysis tools of both frameworks (MMCCP and OSA) are applied to a real protocol of a modelling task. Therefore, in the *fifth step*, we grouped together the different solving procedures obtained and analysed them using the two approaches as follows: the first and third authors conducted the analyses in accordance with the MMCCP, while the second and third authors complemented and deepened those analysis using the tools provided by the OSA (as mentioned in the *third step*). Finally, the *sixth step*, which was carried out jointly by all of us, focused on determining the contributions made by the analysis of modelling activity using the tools provided by the OSA to that of the MMCCP, and vice versa.

3.4.2. Implementation stage

At this stage, we posed the *Bales of Straw Problem* to two groups of prospective mathematics teachers from two universities in Barcelona (Spain). These were intentional samples (according to our access possibilities and their willingness to participate) in different educational contexts. The first group consisted of 60 prospective primary education teachers (at undergraduate level) in the context of a problem-solving module. The second group consisted of 20 prospective secondary education teachers (taking a professionalising master's degree) in the context of a mathematical modelling submodule.

The dynamics with the two groups of prospective teachers was as follows: first, they were introduced to general aspects of mathematical modelling; second, the problem was posed to them to solve it in groups, and they were asked to write down all their solving procedures; third, they presented their results to the whole group, and then discussed the strategies used by each team; and finally, the MMCCP was presented to them, exemplifying it with the solving procedure from Table 2. In line with what Blum (2011) proposes, the teacher in charge of this activity (the first author) tried to intervene as little as possible with the participating prospective teachers during the modelling task. Their written productions were collected, and their explanations of the solving procedures were audio recorded.

3.5. Results

In this section, we detail the results of the comparison between the two theoretical frameworks and of their application to the analysis of the modelling problem.

3.5.1. Concordances and differences between theoretical frameworks

As mentioned in the *second step* of the methodology, we conducted a first analysis on the concordances and differences between the MMCCP and the OSA. We organised this comparison around the essential elements of a theory according to Radford (2008), as mentioned in [subsection 3.4.1](#).

3.5.1.1. Specific cognitive versus broad approaches

On one hand, the MMCCP is situated on cognitive bases and is aimed at studying the mental processes that occur in the specific mathematical activity of modelling (Borromeo Ferri, 2018). On the other hand, the OSA assumes a broad conception of Didactics as a discipline, considering that the descriptive, explanatory, and predictive questions that belong to scientific knowledge must be addressed, as too must the prescriptive and evaluative questions which belong to technological knowledge. According to the OSA, Didactics must provide results that allow the suitable action of a portion of reality, namely, teaching and learning mathematics in different contexts in which these actions take place. To this end, the following types of problematic areas and their interactions must be considered: epistemological, ontological, semiotic-cognitive, educational-instructional, ecological, and optimisation of teaching and learning processes. Some of the tools developed to respond to these problematic areas are those used in [subsection 3.3.4](#).

3.5.1.2. Concordance of principles

Regarding the nature of mathematical objects, although there is not a clear position in the MMCCP, we can infer a realistic-empiricist type of position, which considers that mathematics describes (i.e., models) the true structure of reality. The principle assumed by the MMCCP is that the importance of mathematics must be presented to students within a teaching and learning process that encourages authentic problem solving (Kaiser-

Messmer, [1993](#)) which involves a modelling process, since mathematics is not a rigid formula and it is used daily in almost all professional areas (Borromeo Ferri, [2011](#)).

In contrast, the OSA assumes a constructivist-conventionalist position, which is opposed to realist theses in the philosophy of mathematics, that is, mathematical statements do not describe any kind of (either ideal or natural) reality that exists prior to the constructive activity of a mathematician (Font et al., [2013](#)). The type of existence of definition-concepts, propositions, and procedures of *epistemic configurations* is that which conventional rules have, because they are used as such, despite being presented as descriptions of mathematical objects whose existence is independent of people.

In the OSA, the *didactic suitability* of a teaching and learning process is understood as the degree to which it (or a part of it) meets certain characteristics that allow it to be qualified as suitable (optimal or adequate) in order to achieve an adaptation between the *personal meanings* achieved by students (learning) and the intended or implemented *institutional meanings* (teaching), taking into account the circumstances and available resources (environment). Thus, it is a multidimensional construct divided into partial suitability types (*epistemic, cognitive, interactional, mediational, affective, and ecological suitability*) and each of these into components and indicators (Breda, [2020](#); Breda & Lima, [2016](#)). One of the components of the *epistemic suitability* is the «Richness of processes», understood in the sense that the teaching and learning process must propose a sequence of tasks that encourage students to carry out relevant *processes* of mathematical activity (problem solving, modelling, connections, argumentation, etc.). Furthermore, one of the components of the *ecological suitability* is the «Intra- and interdisciplinary connections», that is, the sequence of tasks encourages the contents to be related to other mathematical contents (connecting advanced mathematics to mathematics of the curriculum and/or between different mathematical contents included in the curriculum), and/or with contents from other disciplines (extra-mathematical context and/or with contents from other subjects of the educational stage). Hence, enhancing modelling is considered in the OSA as an aspect that improves the *suitability* of mathematical teaching and learning process (Sala et al., [2017](#)). Therefore, both theoretical approaches coincide with the importance of incorporating modelling into the teaching and learning of mathematics.

3.5.1.3. On the modelling process

The MMCCP has a very specific and well-developed proposal to analyse the modelling process (as explained in [subsection 3.3.1](#)). In contrast, although the OSA considers modelling as a *hyper* or *mega process*, it does not have a detailed proposal to describe the *subprocesses* that conform it.

3.5.1.4. Concordance of methods

The method used by the MMCCP analyses the mathematical activity performed by an individual during the modelling process and, in this way, identifies the phases of the cycle that he goes through (or not). Now, this mathematical activity is analysed from the position of an observer who knows the mathematical rules that regulate the mathematical practice and, therefore, can give a meaning (or not) to the observed student behaviour. So, this way of analysing mathematical activity by the MMCCP partially coincides with the methods used by the OSA for the same purpose. In other words, what is actually applied in the modelling cycle is a semiotic-cognitive perspective rather than just a mere cognitive perspective. This concordance in the way of analysing the mathematical activity in modelling is what allows the complementarity of both theoretical approaches.

3.5.1.5. Concordance of research questions

The research questions posed by the studies on the teaching and learning of mathematical modelling from the teacher's point of view have mainly been focused on the following two aspects:

- Effective or adequate teaching of mathematical modelling in the classroom or laboratory.
- The development, optimisation, and evaluation of mathematical modelling in initial and continuous teacher education (Borromeo Ferri, [2018](#)).

More specifically, the following are some of the questions posed to research from the MMCCP:

- What influence do mathematical thinking styles have on the modelling process in mathematics classes where sequences of extra-mathematical context tasks are posed? (Borromeo Ferri, [2007a](#)).

- What phases or stages can be reconstructed in the individual modelling processes? What modelling patterns or preferences can be identified on the part of the students? Are there preferences for certain phases, stages, or procedures on the part of the teachers? (Borromeo Ferri, [2011](#)).

The following types of problems are intended to be answered by the OSA (Godino et al., [2019](#)):

- Epistemological problem: How does mathematics emerge and develop?
- Ontological problem: What is a mathematical object? What types of objects are involved in mathematical activity?
- Semiotic-cognitive problem: What does it mean to know a mathematical object? What does the object O mean to an individual, at a certain moment and in certain circumstances?
- Educational-instructional problem: What is mathematical teaching? What is mathematical learning? How are they related?
- Ecological problem: What factors and norms condition and support the development of mathematical teaching and learning processes?
- Learning optimisation problem (*Didactic Suitability Criteria*): What kind of actions and resources should be implemented in mathematical teaching and learning processes to optimise mathematical learning?

We conclude that the research questions posed from the MMCCP can be framed within some of the problematic areas addressed by the OSA or in the intersection of some of these areas. In other words, the tools developed by the OSA to resolve these problematic areas can also be very useful in answering the questions posed from the MMCCP.

3.5.2. Analysis of the modelling processes using both frameworks

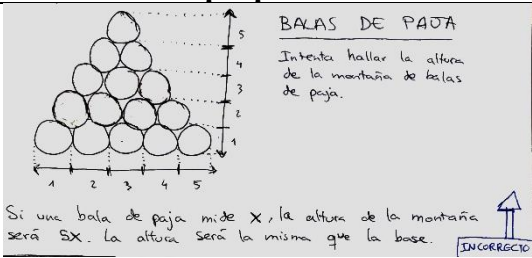
In this subsection, we present the analyses on the implementation of a modelling task with prospective mathematics teachers, from the perspective of the two theoretical frameworks considered in this study. After both implementations, we collected the productions and chose two of them (based on the authors' criteria) to analyse them, based on (a) the clarity in the solving of the problem and (b) the use of different *mathematical models* in their solving procedures (estimation of measurements and trigonometric ratios). We conducted

these analyses in accordance with the theoretical dispositions of each framework for the analysis of mathematical activity (as described in subsections [3.3.2](#) and [3.3.4](#)).

3.5.2.1. Mathematical model: Estimation of measurements (type-A strategy)

The subjects were three prospective primary education teachers, who initially worked on their *real model* (see Table 4), by assigning an undetermined height (x) to each bale of straw, and determining the total height of the mountain as the product of the number of rows and the height of each bale ($5x$).

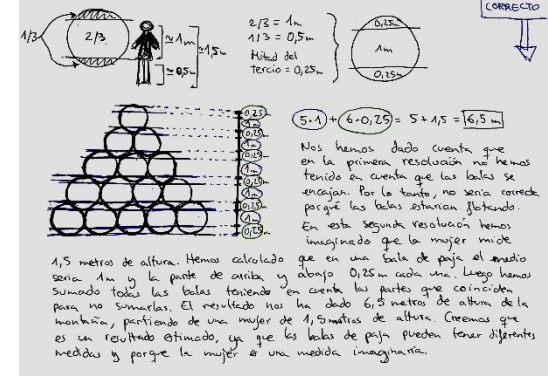
Table 4. Initial production and transcription of the solving procedure using estimation of measurements.

Group's production	Transcription
 <p>BAJAS DE PAJA</p> <p>Intenta hallar la altura de la montaña de bales de paja.</p> <p>Si una bala de paja mide x, la altura de la montaña será $5x$. La altura será la misma que la base.</p> <p>INCORRECTO</p>	<p>BALES OF STRAW</p> <p>Try to find out how high this mountain of bales of straw is.</p> <p>If the height of one bale is x, the height of the mountain will be $5x$. The height will be the same as the base.</p> <p>(Incorrect)</p>

Source: Authors' archive.

This group assumed that this answer may be quite obvious, and then discussed its plausibility. Then, they considered this first answer incorrect, as seen on their production (see Table 4). On reflection, they considered the relevance of taking into consideration that the bales are stacked, and not just balanced on each other, in addition to the fact that the height of the mountain should be given by a numerical result. Thus, they reformulated their solving (see Table 5) and estimated the height of each bale as 1.5 m, making it equals to the height they estimated for the woman, with a total of one-third of each bale fitting into the rows below and above (0.25 m per side). In this way, they determined the total height of the mountain as the sum of the four rows of stacked bales (4×1.25 m) plus the last complete ball of straw (1.5 m). Now, this group considered their solution as correct.

Table 5. Final production and transcription of the solving procedure using estimation of measurements.

Group's production	Transcription
 <p>Handwritten student work showing a diagram of a woman and a bale, a diagram of a pyramid of bales, and calculations. The text explains the solution, mentioning a woman 1.5m tall and a bale with a middle section of 1m and top/bottom sections of 0.25m. The final calculation is $5 \cdot 1 + 6 \cdot 0,25 = 6,5 \text{ m}$. A 'CORRECTO' stamp is visible.</p>	<p>We realised that, in our first solution, we did not consider that the bales are stacked. Therefore, it is not correct, because the bales would be floating above each other. In this second solution, we have imagined the woman to be 1.5 metres tall. We have calculated that the middle section of a bale of straw is 1 m high and its top and bottom are 0.25 m high each. Then, we have added all the bales, by considering the overlapped parts to avoid summing them. The result we have is that the mountain is 6.5 metres high, by beginning from a 1.5-metre-tall woman. We believe that this is an estimated result, because the bales of straw may have different sizes and because the woman is an imaginary measurement.</p>

Source: Authors' archive.

Table 6 presents the analysis of the modelling process, applying both theoretical frameworks, for the solving of the *Bales of Straw Problem* according to the *mathematical model* of estimation of measurements (type-A strategy).

Table 6. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-A strategy.

Practices	Processes	Objects
	<i>Real situation (state*)</i>	
	<i>Real situation → Mental representation of the situation → Real model</i>	
Read the task.	<ul style="list-style-type: none"> – Meaning/Understanding. – Problematisation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Problem: <i>Determine the height of the mountain of bales of straw.</i>
	<i>Real model (state)</i>	
Make an iconic representation of the situation.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Representation (Table 4).
	<i>Real model → Mathematical model → Mathematical results</i>	
Assign an undetermined height (x) to each bale of straw.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Representation (Table 4). – Mathematical proposition: <i>The height of the bale of straw is x.</i>
Calculate the total height of the mountain of bales of straw.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. – Argumentation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Monotonic and additive properties of measurement. – Proposition (argument thesis): <i>The height of the mountain of bales of straw is five times each row ($5x$).</i> – Arguments (reasons): <ul style="list-style-type: none"> a) <i>The diameter of one bale is x.</i> b) <i>The height of the mountain is equals to the length of its base.</i> c) <i>The total height of the mountain is the sum of the heights of each row of bales.</i>
	<i>Mathematical model → Mathematical results</i>	

Table 6. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-A strategy. (cont.)

Practices	Processes	Objects
Discuss the plausibility of the result.	<ul style="list-style-type: none"> - Subprocess of problem solving: <i>Examine the solution.</i> - Validation of the solution, bearing in mind the context. 	<ul style="list-style-type: none"> - Mathematical proposition (initial solution): <i>The height of the mountain is $5x$.</i> - Argument (reason): <i>The result ($5x$) is not plausible in the real world; for the value of the height of the mountain to be the same as the length of the base, the rows should be floating and not overlapping, one on top of another (their real model does not fit with reality).</i>
<i>Real situation → Mental representation of the situation → Real model</i>		
Estimate the height of the woman.	<ul style="list-style-type: none"> - Subprocess of problem solving: <i>Draw up a plan.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - Estimation (procedure). - Arithmetic mean (implicit definition). - Mathematical proposition: <i>The height of the pictured woman is 1.5 m.</i>
Make a visual comparison between the height of the woman and that of the bale, to estimate its diameter.	<ul style="list-style-type: none"> - Simplification/Idealisation: <i>Convert the bales of straw into cylinders; consider only the shape of the bale, ignore its other attributes.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - Visual comparison (procedure). - Cylinder, base, circumference, diameter (implicit definitions). - Monotonic property of measurement (implicit definition). - Mathematical proposition: <i>The diameter of the bale of straw is 1.5 m.</i>
<i>Real model (state)</i>		

Table 6. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-A strategy. (cont.)

Practices	Processes	Objects
Reformulate the <i>real model</i> of the situation, considering the overlapping of the rows of bales of straw.	– Representation.	– Representation (Table 5).
<i>Real model → Mathematical model → Mathematical results</i>		
Calculate the part of the height of the rows of bales that overlaps with those of the row above, via visual comparison.	– Representation.	– Estimation (procedure). – Visual comparison of lengths (procedure). – Mathematical proposition: <i>The height of each bale is 1.5 m, with an overlap of 1/3 of the upper edge with the next row.</i> – Monotonic property of measurement. – Representation (Table 5).
Calculate the total height of the mountain of bales of straw.	– Argumentation.	– Additive property of measurement. – Indirect measurement (procedure). – Proposition (argument thesis): <i>The total height of the mountain is 6.5 m, approximately.</i> – Arguments (reasons): <i>By applying the estimation procedure they get:</i> a) <i>The diameter of the bale of straw is equals to the height of the woman (1.5 m).</i> b) <i>The part of the rows that overlaps with the row above is 1/3 of the diameter, approximately.</i> c) <i>The total height of the mountain is the sum of the heights that do not overlap each other, plus the ball of straw on the top.</i>

Table 6. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-A strategy. (cont.)

Practices	Processes	Objects
	<p><i>Mathematical results (state)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Mathematical proposition (final solution): <i>The height of the mountain of bales of straw is 6.5 m.</i> 	
<p>Discuss the plausibility of the new results.</p>	<p><i>Mathematical results → Real results</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Subprocess of problem solving: <i>Examine the solution.</i> - Validation of the solution, bearing in mind the context. 	<ul style="list-style-type: none"> - Validation proposition: <i>The solution is valid, but approximate (non-exact).</i> - Argument (reason): <i>They have corrected the mistakes that committed on the representation (real model) for the first solution.</i> - Argumentation (implicit reason): <i>The group does not question this second result as they did with the first one.</i>
	<p><i>Real results (state)</i></p>	<p>The result for the height of the mountain of bales of straw is 6.5 m, approximately.</p>

Note (*): By *state*, we mean the phase of the modelling cycle that represents an input to/output of a portion of mathematical activity which is analysed.
 Source: Authors' elaboration.

3.5.2.2. *Mathematical model: Trigonometric ratios (type-B strategy)*

The subject was a prospective secondary education teacher, who simplified the mountain of bales of straw as an equilateral triangle whose vertices were at the centre of the circumferences at the edges of the figure, and then assigned four diameters ($4d$) of length to each side of the triangle (Figure 5a). Then, she traced the height of the triangle and extracted a right-angle triangle from the figure, assigned values to its interior angles (Figure 5b), and determined that the value of that height could be calculated by applying the cosine (Figure 5c).

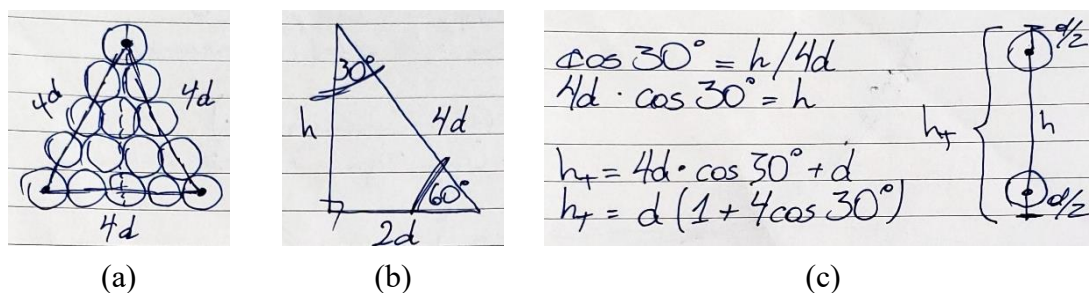


Figure 5. Production of the solving procedure in three steps (a), (b), and (c) using trigonometric ratios.
Source: Authors' archive.

Table 7 presents the analysis of the modelling process, applying both theoretical frameworks, for the solving of the *Bales of Straw Problem* according to the *mathematical model* of trigonometric ratios (type-B strategy).

Table 7. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-B strategy.

Practices	Processes	Objects
	<i>Real situation (state*)</i>	
	<i>Real situation → Mental representation of the situation → Real model</i>	
Read the task.	<ul style="list-style-type: none"> – Meaning/Understanding. – Problematisation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Problem: <i>Determine the height of the mountain of bales of straw.</i>
Make assumptions on the situation.	<ul style="list-style-type: none"> – Simplification/Idealisation: <i>Convert the bales of straw into cylinders; consider only the shape of the bale, ignore its other attributes.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> – Cylinder, base, circumference, diameter (implicit definitions).
	<i>Real model (state)</i>	
Make an iconic representation of the situation.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Representation (Figure 5a).
	<i>Real model → Mathematical model → Mathematical results</i>	
Form an equilateral triangle whose vertices are located at the centre of the three circumferences at the edges of the figure and assign four diameters ($4d$) of length to each side.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Equilateral triangle (definition). – Representation (Figure 5a). – Mathematical proposition: <i>The segments joining the centres of the three circumferences form an equilateral triangle whose sides are $4d$ long.</i>

Table 7. Analysis of the *Bales of Straw Problem* using both frameworks for the type-B strategy. (cont.)

Practices	Processes	Objects
Form a right-angle triangle and assign values to its interior angles to calculate its height.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Right-angle triangle (definition). – Representation (Figure 5b). – Trigonometric ratio (definition). – Mathematical proposition: <i>The height of the right-angle triangle is $4d \times \cos(30^\circ)$.</i>
Calculate the total height of the triangle.	<ul style="list-style-type: none"> – Representation. 	<ul style="list-style-type: none"> – Representation (Figure 5c). – Monotonic and additive properties of measurement. – Mathematical proposition: <i>The total height of the mountain of bales of straw is the sum of the height of the equilateral triangle drawn plus the remaining two half-diameters.</i>
<i>Mathematical results (state)</i>		
$h_T = d(1 + 4 \cos(30^\circ))$.		

Source: Authors' elaboration.

3.5.3. Comments on the implementation stage

Regarding the intervention with the prospective primary education teachers, who organised themselves into groups of three to five members each, they basically solved the problem according to the *mathematical models* described in Table 2. Most of them used the estimation and addition of heights procedure (or a variant of this) and, although there were attempts to solve it using the Pythagorean theorem by some groups, this did not materialise in their written productions. However, when the subjects asked for ideas on how to approach the problem, it was made clear to them that there may be more than one way to solve it. In our interpretation, this fact represents the introduction of a new *epistemic norm* (in addition to the six *norms* detailed in [subsection 3.3.4](#)): The problem does not have one single solution. A common mistake that we made in these groups evident was related to the transition between the *mental representation of the situation* ↔ *real model* ↔ *mathematical model* phases. In terms of the MMCCP, this refers to the *simplifying* and subsequent *mathematising* sub-competencies, which was manifested by not considering the stacking of the bales of straw to be a determining factor to obtain the height of the mountain. Regarding the answers of the groups, the *real results* for the height of the mountain of bales of straw varied between 4.8 and 8.5 metres, which depended on the height they estimated for the pictured woman, which varied between 1.5 and 1.7 metres (*extra-mathematical knowledge*). In this case, the estimation procedure was an essential element for them to solve this problem. During the discussion with these groups, the different results were compared, although the participants did not question the characteristics of the task presented, assuming that it was a real problem.

Regarding the intervention with the prospective secondary education teachers, who worked individually or in pairs, they took into consideration both the estimation and Pythagorean *models*, in addition to that based on the use of trigonometric ratios. Unlike the previous group, the stacking of the bales of straw was not an inconvenience when moving from the *mental representation of the situation* to the *mathematical model* phases since, as they worked with the Pythagorean and trigonometric *models*, they only considered the sections of the *real model* which do not fit between the rows. However, their productions included algebraic expressions to represent the height of the mountain of bales of straw, using a function of the radius or diameter of each bale as a variable, and they did not provide a real numerical quantity. In this sense, the *interpreting* sub-

competency to become *mathematical results* into *real results* was not in evidence. This was due, in part, to the fact that they did not consider the estimation procedure for the height of the pictured woman or for the diameter of each bale of straw, in order to express a specific numerical result. During the discussion with these groups, there were participants who questioned the wording of the problem and its realistic quality, in terms of that the statement did not oblige in-depth contemplation of the plausibility of the results, due to the multiplicity of answers that can be obtained from the problem. That is, only if the result is very small or large, the need to study its plausibility will appear, but if the result is, for example, 7, 8, or 9 metres for the height of the mountain, the task does not require an analysis of its plausibility. In other words, the wording of the problem does not make it easy to follow *Norm 5* (see [subsection 3.3.4](#)), but in their opinion, a change in the problem such as ‘establish if the bales can be placed into a barn of x dimensions’ would actually force compliance with this *norm*.

It seems reasonable for us to conclude that the level of the subjects’ mathematical knowledge determined the solving strategies to be used (choice of a certain *mathematical model*) and the results obtained (*mathematical results* \rightarrow *real results*). Although all the participants – due to their previous school education – should have had sufficient mathematical knowledge to solve the problem using the three *models* mentioned (estimation of measurements, Pythagorean theorem, and trigonometric ratios), the prospective primary education teachers mainly opted for the estimation of measurements, while the prospective secondary education teachers considered the three *models*, particularly that based on trigonometric ratios, which was not considered within the analysis from the perspective of the MMCCP (see Table 2).

The lower level of mathematical knowledge on the part of the prospective primary education teachers was also evident, as stated above, in the difficulties they had in *simplifying the mental representation of the situation* to construct a *real model* and its subsequent *mathematisation* into a *mathematical model*. Now, a question that arises is whether only the subjects’ mathematical knowledge was the determining factor to choose a strategy (*mathematical model*) for solving a problem. We could argue that these prospective primary education teachers were mentally placed (either as teachers or students) into a primary school classroom, that is, in a context where only the estimation procedure would make sense.

Regarding the results of the problem, the prospective primary education teachers answered it with *real results* (with greater or lesser success), while the prospective secondary education teachers did not offer any *interpretation* of the *mathematical results* – obtained from the work with the *mathematical model* – in terms of *real results*, in order to give a specific answer to the problem. One possible explanation for this discrepancy in the answers provided by both groups of prospective teachers is that those of primary education live in a world of more elementary mathematics, where the processes of abstraction and generalisation are not as deep as those that are present in those of secondary education, who live a more advanced mathematics, where the processes of abstraction and generalisation may have several levels of depth.

This kind of findings is consistent with some of the ones reported by Verschaffel and collaborators in studies with primary and secondary education mathematics teachers (see Chen et al., [2011](#); van Dooren et al., [2002](#), [2003](#); Verschaffel et al., [1997](#); among others). However, our opinion beyond the explanations mentioned above, we consider as plausible to suppose that the wording of the problem does not oblige the solver to find *real results*, just as the prospective secondary education teachers stated in their discussion on the problem.

3.5.4. Theoretical discussion

We can now answer the research question posed in this article: To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process? Our main conclusion is that we have identified some concordances and complementarities between these two ways of analysing the mathematical activity involved in the modelling process, which we detail below.

In Table 6 and Table 7, the columns summarise the analysis of the mathematical activity performed by the prospective mathematics teachers with the tools provided by the OSA (as in Table 3), whereas the shaded rows correspond to the phases (as in Table 2) and transitions (see Figure 2) of the MMCCP. While the level of detail in the two methods differ, Table 6 and Table 7 make it clear that they are complementary methods. This complementarity is due to the fact that, the more detailed analysis conducted with the tools provided by the OSA, allows us to zoom in on the mathematical activity that

underlies the phases and transitions of the MMCCP. This zoom in allows us to see these phases and transitions as an iceberg formed by a conglomerate of *mathematical practices* and *processes, norms*, and *primary objects* (activated in these *practices*). In turn, the phases and transitions of the MMCCP provide an initial structure (scheme) for the analysis conducted by following the OSA model (as seen in Table 6 and Table 7), and allows us to group together (in fact, to encapsulate) the *mathematical practices* (along with the *processes* and *primary objects* activated in them) performed in each of the phases and transitions of the MMCCP.

The analysis conducted by following the OSA model highlights an important aspect, that is, the plot of *norms* that regulate the modelling process. It is important since, in order to make students proficient in modelling, a teacher must be aware of the existence of these *norms* and must ensure that they are established in the mathematical teaching and learning processes involving modelling. This significant role of the *epistemic* (mathematical and meta-mathematical) *norms* in the modelling process is not, to our knowledge, explicitly included as part of the MMCCP.

Another relevant element is that this more detailed analysis allows the explanation of why a specific transition of the MMCCP cannot be performed by a solver of this task (as occurred with some groups during the implementation stage).

Although the application of the tools provided by the OSA allows to discover the plot of mathematical activity that underlies the modelling process, we consider that there are to aspects to take into consideration when applying a general theoretical framework for the analysis of mathematical activity.

The first aspect is that, since there is no agreement or paradigm in Mathematics Education on how to make an analysis of mathematical activity, we consider as plausible to think that, perhaps, another theoretical framework could complement the MMCCP even more. As stated in the [introduction section](#), the particular choice of the MMCCP and the OSA is justified by our expertise in their use. Thereby, one aspect to be discussed is whether the answer we give to our research question ‘To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process?’ is a more relevant contribution than that obtained by analysing the same modelling cycle from another general theoretical framework of mathematical activity (e.g., Cosmes & Montoya-Delgadillo, [2021](#), from the MWS

theory). Another discussion within this first aspect is the comparison between the results of our research with the analyses of the modelling process conducted from the perspective of other frameworks that have used modelling cycles other than the MMCCP, and which have enriched them with analysis tools of mathematical activity that go beyond the modelling activity. For instance, the analysis conducted by Niss and Blum (2020), or the research developed by Galbraith and Stillman (2006) which presents a framework for identifying students' blockages during transition in the modelling process, based on a more detailed analysis of mathematical and metacognitive activity in such transitions. This first aspect is part of a theoretical discussion that we are working on, but that would require a specific article to be deepened.

The second aspect is that, once a general theoretical framework has been selected, its theoretical constructs should be useful to capture the complexity of mathematical activity, and also reasonably easy to apply. For instance, if the theoretical framework distinguishes between the constructs «proposition» and «procedure», it should be easy to identify when we are meaning a 'proposition' or a 'procedure'. In other words, a researcher who masters the tools provided by the OSA could be able to make analyses quite similar to those presented in Table 6 and Table 7. However, our experience in applying these tools on the analyses de mathematical activity has made us evident that it is not always an easy task. On this fact, several reflections have made within the OSA, and the conclusion is that the constructs developed for the analysis of mathematical activity (e.g., procedure, proposition, norm, etc.) are not the problem itself, but rather it is in the philosophy of mathematics, in the sense that mathematics is presented as a descriptive discourse of a certain (whether Platonic or empiricist) reality when, in terms of the OSA, its deep nature is to be conventional. This would explain why, for example, a 'proposition' becomes a 'procedure' (e.g., the derivatives product rule) or vice versa, as appropriate (see a deeper discussion in Font et al., 2013).

3.6. Conclusions

The analysis of the modelling process, expanded with the tools provided by the OSA, is important because it can help us to design didactic proposals to implement modelling in the classroom. According to the analyses presented in previous sections (see Table 3, Table 6, and Table 7), we did not make *mathematical processes*, such generalisation of

patterns, evident, which could be achieved if the specification that there are five rows was omitted in the wording of the task, and only the picture (see Figure 3) was presented with the three rows visible, so that a student could conclude the formation pattern of the rows in the mountain of bales of straw. Another *process* to which this analysis can contribute is that of validation (in Practice 7 from Table 3), where the details show – regardless of the result for the height of the mountain of bales of straw (either 7, 8, or 9 metres) – the process in question would be the same, since it is only determined by the verification of the solving method (*mathematical model* → *mathematical results*). When identifying the *primary objects* involved in the validation *process*, especially the procedure and the argument, we observe that the discussion on the reasonableness of the result (*mathematical results* → *real results*) is only mediated by the choice of an estimated height in the real context and does not play a determining role in answering this particular problem. Due to the problematisation *process* being closely linked to validation of the results, the richness of this last *process* could be improved by modifying the context of the situation, for example, if the height of the mountain is required to store the bales of straw in a barn of specific dimensions.

Following this line of helping to improve didactic designs, the analysis conducted with the tools provided by the OSA allows us to see the *configuration of primary objects* that intervene in the solving process. The analysis of these *configurations* provides information concerning the anatomy of the solving process for a problem posed (see Badillo et al., [2015](#); Malaspina & Font, [2010](#); Malaspina et al., [2019](#)), in addition to making it possible to create new problems, among other aspects, though variations of those initially proposed or directly in such a way that a certain (or several) *primary object(s)* must be used in their solution.

The detailed analysis provided by the OSA can also be very useful for the development and evaluation of modelling sub-competencies, as mentioned when we commented on the prospective mathematics teachers' productions analysed. Indeed, this analysis can be used to specify which *mathematical practice, process, or object* is (or is not) evidence of the sub-competency that is intended to be developed or evaluated, and it can be particularly useful to offer detailed feedback to students.

Finally, we stress that this article is also a contribution to the *Networking of Theories*, because it illustrates how a *networking* can be made between two theories at different

levels – in this case, a general theory for the analysis of mathematical activity as the OSA, and a theoretical framework for the analysis of the specific mathematical activity of modelling as the MMCCP. This approach results in an integrated proposal of the two theories for the analysis of the mathematical activity of interest to the specific theory, in this case, the modelling process.

3.7. Commentary on the First Article

This article was prepared to fulfil the first objective and answer the first research question of this doctoral thesis. The first aspect to highlight in this article is that an articulation between two theoretical frameworks of different levels is proposed, as had not been done previously in the literature, to analyse the mathematical activity underlying the modelling process, by considering the contributions of a specific theoretical framework for modelling (MMCCP) and a general theoretical framework for Mathematics Education (OSA). More specifically, this proposal – latter called *Semiotic-Cognitive Analysis Model for the Mathematical Modelling Process* – considers the mathematical practices performed by an individual to solve a modelling problem, the primary mathematical objects emerging from such practices, the intervening mathematical processes, and the epistemic norms that govern the mathematical activity of modelling, all this circumscribed by the phases and transitions through which this solver-individual goes.

The second aspect to highlight in this article is the use of the *Networking of Theories* methodology (proposed in the works of Bikner-Ahsbabs & Prediger, [2010](#), [2014](#)) for the case of modelling. This methodology arises as a response to criticism about the lack of focus, divergent theoretical perspectives, and a continuous identity crisis in Mathematics Education (Steen, [1999](#)), to which Bikner-Ahsbabs and Prediger ([2006](#)) propose considering this theoretical diversity as a scientific necessity, although they recommend that these theories not be isolated from each other, without any connection between them. In this way, Prediger and collaborators ([2008](#)) propose the *networking strategies* (see Figure 6) to connect theories, which are located between two extreme positions: ignoring the existence of other theories and unifying them globally.

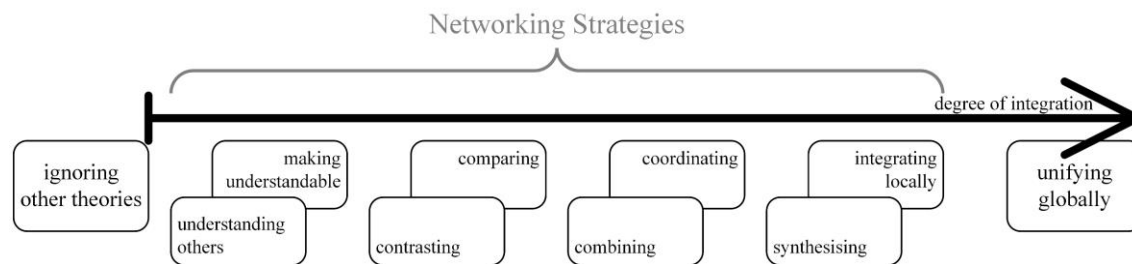


Figure 6. A landscape of strategies for connecting theoretical approaches.
Source: Adapted from Bikner-Ahsbabs & Prediger (2010, p. 492).

In the context of this article, this methodology is what allowed establishing the articulation between the specific theoretical framework for modelling (MMCCP) and the general theoretical framework for Mathematics Education (OSA), more specifically, achieving coordination/combination between both theoretical approaches and making it possible to answer the first research question of this doctoral thesis.

The third aspect to highlight in this article is that the *Semiotic-Cognitive Analysis Model* proposed in this study allows a mutual enrichment between both theoretical references considered. On one hand, the MMCCP draws on the tools provided by the OSA to analyse the mathematical activity underlying the modelling process and, on the other hand, the OSA draws on the structure of the MMCCP to describe a modelling process and not only consider it as a hyper or mega process. The above is due to the fact that in this work of articulation the aim is not to superimpose one theoretical framework on the other, but rather to perform a coordination and combination of the tools provided by each framework.

Finally, the fourth aspect to highlight in this article is the introduction of the iceberg metaphor, as a result of this theoretical articulation, in the case of modelling (see Figure 7). With this metaphor, it is intended to illustrate that the phases and transitions of the modelling cycle, observable when an individual solves this type of problems (top of the iceberg), require a conglomerate of mathematical practices, primary objects, and processes so that a modelling process can be carried out (bottom of the iceberg). In turn, this entire iceberg is governed by a set of epistemic norms that regulate the entire modelling process.

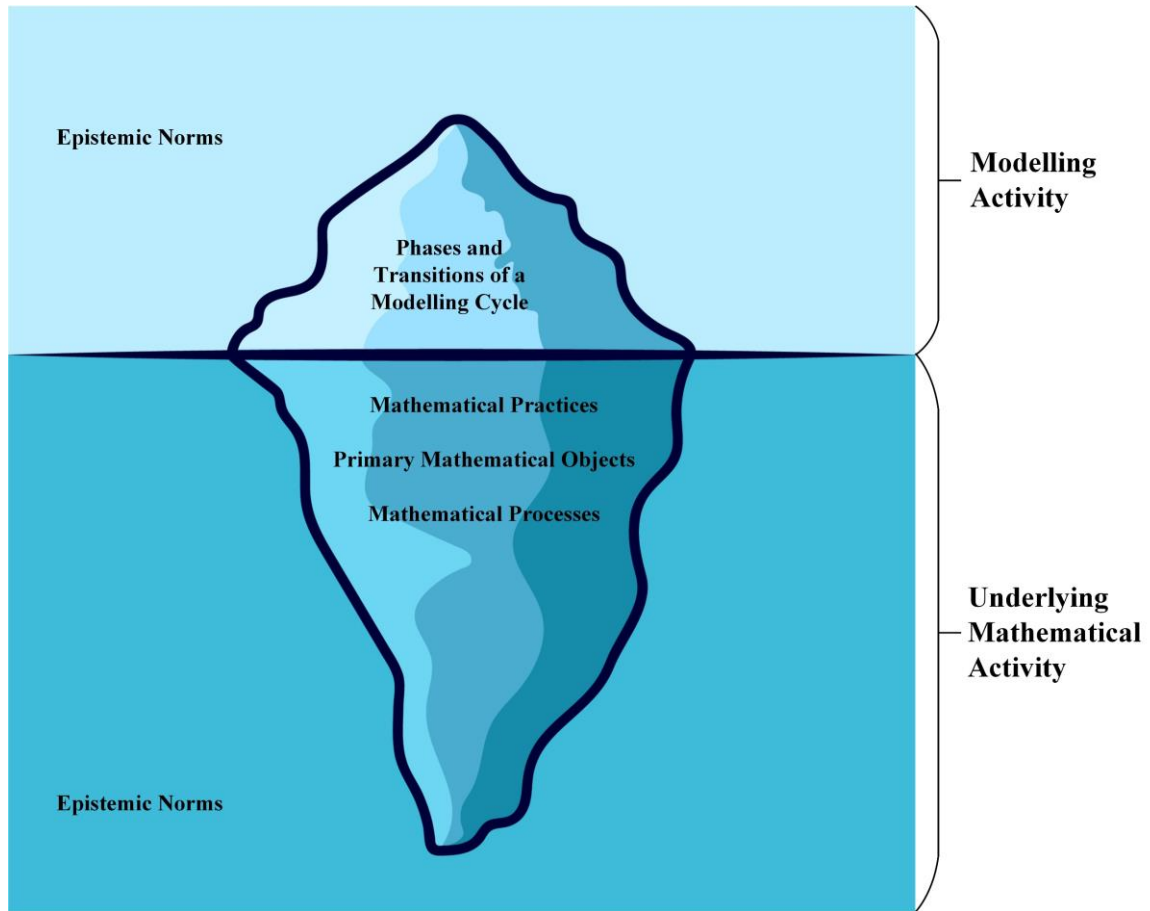


Figure 7. The iceberg metaphor for modelling.
Source: Authors' elaboration.

As a consequence of this article, taking into consideration the proposed theoretical articulation and the iceberg metaphor, the fulfilment of the first objective and the answer to the first research question of this doctoral thesis gave way to the development of the study presented in [Chapter 7](#).

Capítulo 3: Primer Artículo

Chapter 3: First Article

Analysing the mathematical activity in a modelling process...

Capítulo 4: Segundo Artículo –

Chapter 4: Second Article

This chapter presents the second article published to fulfil the requirements of this doctoral thesis. Table 8 presents the identification data of this second article.

Table 8. Identification data of the second article.

Criteria	Data
Title	Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts.
Author(s)	Carlos Ledezma, Adriana Breda, Vicenç Font.
Affiliation(s)	Department of Linguistic, Scientific, and Mathematics Education, Faculty of Education, University of Barcelona (Spain).
Journal	International Journal of Science and Mathematics Education.
Volume	No volume number assigned (advance online publication).
Issue	No issue number assigned (advance online publication).
Pages	1–25.
DOI	10.1007/s10763-023-10412-8
Online publication date	23 rd August 2023.
Submission date	15 th July 2022.
Acceptance date	6 th August 2023.
Accesses	916 times.
Cross Reference ³⁵	3 citations.
ResearchGate ³⁶	5 citations.
Reference entry	Ledezma, C., Breda, A., & Font, V. (2023). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. <i>International Journal of Science and Mathematics Education</i> . Advance online publication. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8

Source: Author's elaboration based on the information accessed on 31st March 2024 at <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-023-10412-8>.

This journal was founded in 2003 and is currently published by Springer Nature. The editor-in-chief is Hsin-Kai Wu (National Taiwan Normal University, Taiwan, ROC). This journal is abstracted and indexed in 25 databases, including EBSCO, ERIC, Google Scholar, ProQuest, SCImago, SCOPUS, Social Science Citation Index, among others.

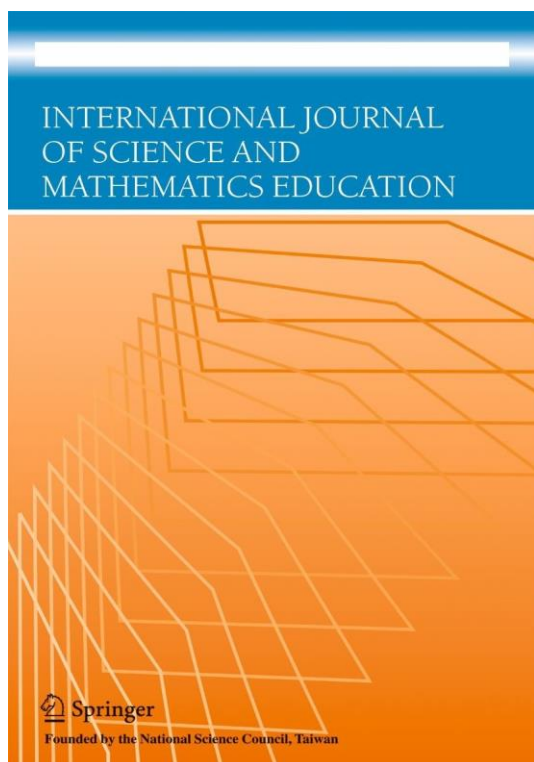
³⁵ Information available at <https://citations.springernature.com/item?doi=10.1007/s10763-023-10412-8>.

³⁶ Information available at https://www.researchgate.net/publication/373331346_Prospective_teachers'_reflections_on_the_inclusion_of_mathematical_modelling_during_the_transition_period_between_the_face-to-face_and_virtual_teaching_contexts.

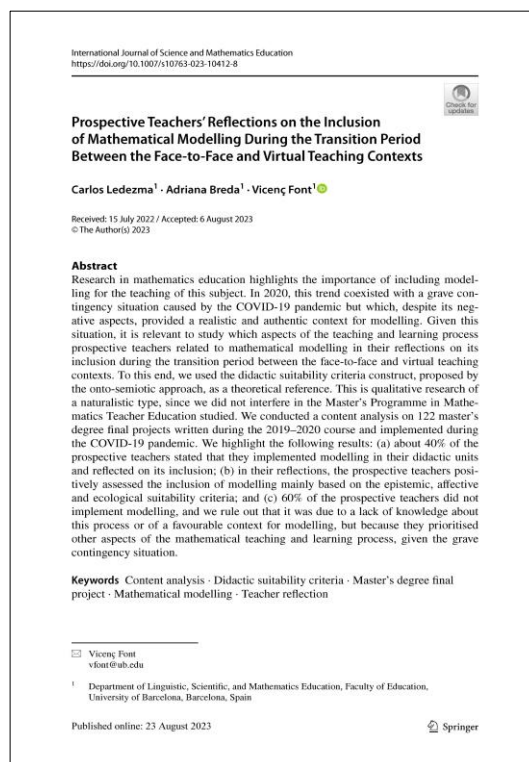
According to the information available at the Master Journal List of Web of Science (WoS)³⁷, this journal is indexed in the Social Sciences Citation Index (SSCI), Social and Behavioral Sciences, and Essential Science Indicators, within the categories Education and Educational Research, Education, and Social Sciences/General, respectively, with a Journal Citation Indicator in 2022 of 1.11.

According to the information available at Scopus³⁸, this journal is indexed within the categories Mathematics/General Mathematics (rank #25/387, 93rd percentile) and Social Sciences/Education (rank #220/1469, 85th percentile), with a CiteScore in 2022 of 4.8 and a CiteScore Tracker in 2023 of 5.1.

According to the information available at Scimago Journal & Country Rank (SJR)³⁹, this journal is indexed within the categories Mathematics/Miscellaneous and Social Sciences/Education, its H-Index is 56 and SJR 2023 is 1.04 (Q1 in Education).



(a)



(b)

Figure 8. (a) *International Journal of Science and Mathematics Education* cover; (b) first page of the article.

Source: Journal's website (<https://link.springer.com/journal/10763>).

³⁷ Information available at <https://mjl.clarivate.com/search-results?issn=1571-0068>.

³⁸ Information available at <https://www.scopus.com/sourceid/144837>.

³⁹ Information available at <https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=144837&tip=sid&clean=0>.

4.1. Abstract and Keywords –

Resumen y Palabras Clave

4.1.1. English language

Abstract: Research in Mathematics Education highlights the importance of including modelling for the teaching of this subject. In 2020, this trend coexisted with a grave contingency situation caused by the COVID-19 pandemic but which, despite its negative aspects, provided a realistic and authentic context for modelling. Given this situation, it is relevant to study which aspects of the teaching and learning process prospective teachers related to mathematical modelling in their reflections on its inclusion during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. To this end, we used the Didactic Suitability Criteria construct, proposed by the Onto-Semiotic Approach, as a theoretical reference. This is qualitative research of a naturalistic type, since we did not interfere in the Master's Programme in Mathematics Teacher Education studied. We conducted a content analysis on 122 Master's Degree Final Projects written during the 2019–2020 course and implemented during the COVID-19 pandemic. We highlight the following results: (a) about 40% of the prospective teachers stated that they implemented modelling in their didactic units and reflected on its inclusion; (b) in their reflections, the prospective teachers positively assessed the inclusion of modelling mainly based on the epistemic, affective, and ecological suitability criteria; (c) 60% of the prospective teachers did not implement modelling, and we rule out that it was due to a lack of knowledge about this process or of a favourable context for modelling, but because they prioritised other aspects of the mathematical teaching and learning process, given the grave contingency situation.

Keywords: Content analysis; Didactic suitability criteria; Master's degree final project; Mathematical modelling; Teacher reflection.

4.1.2. Idioma español

Resumen: La investigación en Didáctica de la Matemática destaca la importancia de incluir la modelización para la enseñanza de esta asignatura. En 2020, esta tendencia coexistió con una grave situación de contingencia causada por la pandemia por COVID-19 pero que, a pesar de sus aspectos negativos, aportó un contexto realista y auténtico para la modelización. Dada esta situación, es relevante estudiar qué aspectos del proceso

de enseñanza y aprendizaje relacionaron futuros profesores con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante el periodo de transición entre los contextos de enseñanza presencial y virtual. Para ello, se utilizó el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico, como referente teórico. Este estudio es de tipo naturalista, dado que no se interfirió en el Programa de Máster en Educación de Profesores de Matemática estudiado. Se realizó un análisis de contenido de 122 Trabajos Finales de Máster elaborados durante el curso 2019–2020 e implementados durante la pandemia por COVID-19. Se destacan los siguientes resultados: (a) alrededor del 40% de los futuros profesores declaró que implementaron la modelización en sus unidades didácticas y reflexionaron sobre su inclusión; (b) en sus reflexiones, los futuros profesores valoraron positivamente la inclusión de la modelización, principalmente, basados en los criterios de idoneidad epistémica, afectiva, y ecológica; (c) el 60% de los futuros profesores no implementó la modelización, y se descarta que fue debido a la falta de conocimientos sobre este proceso o de un contexto favorable para la modelización, sino porque priorizaron otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, dada la grave situación de contingencia.

Palabras clave: Análisis de contenido; Criterios de idoneidad didáctica; Modelización matemática; Reflexión docente; Trabajo final de máster.

4.2. Introduction

There is a worldwide consensus on the development of competencies that involve the use of mathematics to solve real-world problems, among which the mathematical modelling competency stands out (Kaiser, [2020](#); Niss & Højgaard, [2019](#)). On one hand, modelling is considered as a central aspect of the PISA international assessment for problem solving (OECD, [2019](#)); and, on the other hand, it is agreed that working with modelling has a series of benefits for learning mathematics (Blum, [2011](#)), in addition to being indispensable for educating individuals to be capable of linking their mathematical knowledge to contemporary needs and demands (Maass et al., [2022](#)). Therefore, in order to teach modelling skills to students, teachers need to be prepared and educated in teaching strategies associated with modelling so they can implement it in the classroom (Blum & Borromeo Ferri, [2009](#)).

Various studies on the role of modelling in mathematics teacher education have been reported in the literature of the last decades by addressing the teaching and learning of this process (see further details in [subsection 4.3.2](#)). Although such studies are in line with K. Maaß's (2007) idea that it is not enough to educate teachers in modelling, but they also need to experience it, the study reported in this article focuses on the prospective teachers' reflections on the inclusion of this process in their Master's Degree Final Projects (MFPs). In the Spanish context, prospective teachers must obtain a master's degree to teach mathematics at secondary and baccalaureate education levels (students aged 12–18). To do this, they must prepare an MFP, an original, autonomous, and individual work, which allows the prospective teachers to show the formative content they have received, and the general competencies acquired during the master's programme in an integrated way. In the MFP, they also must reflect and go deeper into analysing their own practice, as well as to propose elements for its improvement. The prospective teachers prepare their MFPs after an internship period in educational centres, where they must design and implement a didactic unit that, depending on certain factors (see further details in [subsection 4.4.1](#)), can include working with modelling.

Therefore, due to the importance of modelling in mathematics teacher education, we consider it relevant to deepen the reflections that prospective teachers made on the inclusion of this process during their educational internship experiences in a particular context of implementation where a grave contingency occurred. During the year 2020, we lived through complex moments worldwide due to the COVID-19 pandemic which affected, among many other aspects, education at all levels (see a broader discussion in Engelbrecht et al., 2023). Given this situation, prospective teachers also saw their educational processes affected, as in the case of their internship experiences, many of which were carried out during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts due to lockdowns. In this context, our study aims to show the importance (or not) of modelling for prospective teachers in a grave contingency situation, where some aspects of the mathematical teaching and learning process considered as relevant were prioritised and other aspects were relegated to a background (or suppressed). In this way, the gravity of the contingency made the relevance of modelling for prospective teachers evident.

This study raises the question: What aspects of the teaching and learning process did prospective secondary and baccalaureate education teachers relate to mathematical modelling in their reflections on its inclusion during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts? To answer this, we analysed the prospective teachers' reflections in their MFPs on the design of their didactic units, which were implemented in their educational internship experiences during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts due to the COVID-19 pandemic. We analysed these reflections using the Didactic Suitability Criteria, which is one of the tools proposed by the Onto-Semiotic Approach (Godino et al., [2007](#)), and which was the same tool used by the prospective teachers to guide their reflections on their own educational practice. Specifically, our focus was on analysing the MFPs whose didactic units included working with modelling.

4.3. Theoretical Framework

In this section, we describe the theoretical references considered for this study.

4.3.1. Mathematical modelling

In general terms, the modelling process is understood as a transition between the real world and mathematics for solving a problem-situation taken from reality. This process should not be understood in linear terms, since both the context of the problem and the mathematical aspects involved in the situation affect the mathematical model that is generated (Blomhøj, [2004](#); Borromeo Ferri, [2007b](#)). At the theoretical level, different cycles have been designed to explain this process (Borromeo Ferri, [2006](#)), and different perspectives on implementing modelling in the classroom have emerged (Abassian et al., [2020](#)). Although these differences are mainly due to the diversity of positions on modelling (Borromeo Ferri, [2013](#)); the proposed cycles all tend to have certain phases in common (see Geiger et al., [2018](#)). For this study, we consider the modelling cycle proposed by Blum and Leiß ([2007a](#)) (see Figure 9), since this is the cycle taught to prospective teachers in the master's programme in which we conducted this research. Along with this, we consider some consensual attributes that characterise working with modelling in the classroom.

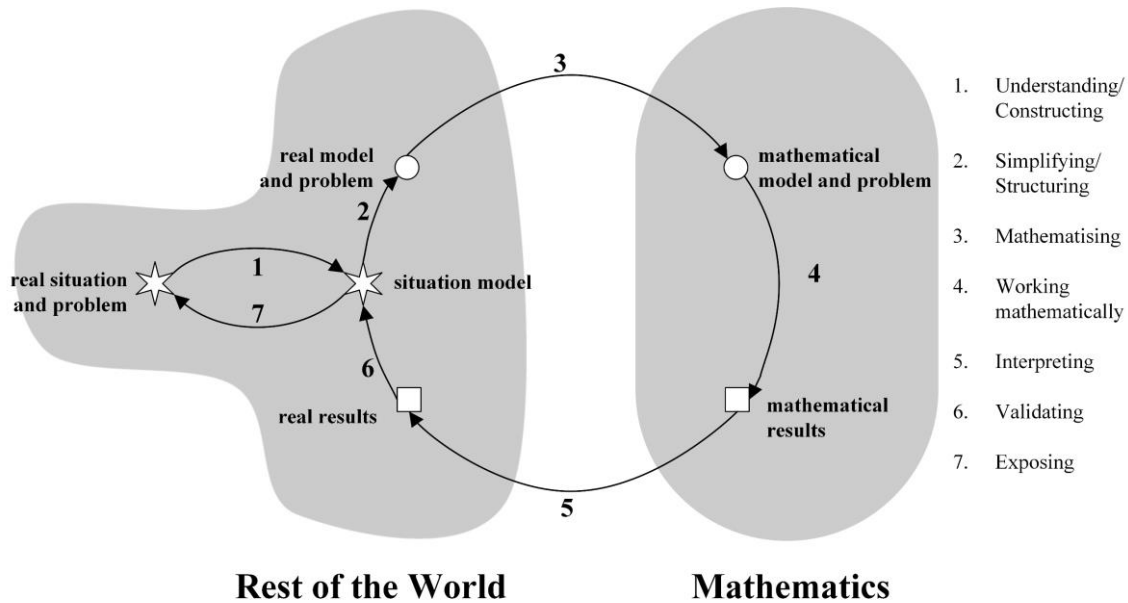


Figure 9. Mathematical modelling cycle.
Source: Adapted from Blum & Leiß (2007a, p. 225).

This modelling cycle, of a didactic-cognitive nature, has its roots in the theories developed by Reusser (1998) and Verschaffel and colleagues (2000), and is focused on the individual who solves this type of problems. In terms of what is described by Blum and Leiß (2007a), the *real situation and problem* are given by the wording of the problem, which must be understood to build a *situation model*. Then, this situation must be simplified and structured to form a *real model* of it. As a product of the mathematisation (translation into mathematical language) of the *real model*, the latter will be transformed into a *mathematical model* which, by working with it, will allow obtaining *mathematical results*. These results must be interpreted in the context of the problem to obtain *real results* that must be validated in real-world terms. Finally, the solver exposes the answer obtained for the problem (an illustrative example of the use of this cycle can be found in Blum & Leiß, 2007a, pp. 225–227). The transit between the phases of the cycle is carried out through transitions or, in terms of K. Maaß (2006), *mathematical modelling sub-competencies* (numbered to the right of Figure 9).

The work with modelling in the classroom is usually carried out in small groups of students. They are generally presented with a real-world problem-situation that they must mathematise (Doerr & English, 2003; Shahbari & Tabach, 2019). Modelling tasks involve a cyclical process, with different ways for obtaining a plausible solution that is consistent with the context of the situation posed (English, 2003; Lesh & Doerr, 2003b). This

situation, known as *modelling problem*, must meet certain consensual characteristics (Borromeo Ferri, [2018](#)): it must be *open* and *complex*, in which its solving is not limited to a specific answer or procedure, and where students must search for relevant data; it must be *realistic* and *authentic*, adding elements from the real world and showing a situation consistent with an event that has occurred or may occur in reality (Palm, [2007](#)); and finally, it must be a *problem* (Schoenfeld, [1994](#)) that can be *solved through a modelling cycle*, which implies the use of all the phases that make up this cycle.

4.3.2. Mathematical modelling in teacher education

As mentioned above, literature of the last decades in Mathematics Education has broadly addressed the teaching and learning of modelling in teacher education.

In the Austrian context, Kuntze and collaborators ([2013](#)) study the teachers' self-perceptions about their *pedagogical content knowledge* (PCK) related to modelling, considering both the PCK necessary to help their students during the modelling process in the classroom and what they think of their own professional development at university level. The results made a need for professional development that not only address the PCK on modelling evident, but also the teaching of teacher strategies for pedagogical self-efficiency when implementing this process, for example, by using technological tools. In this same research line, a more recent study is that reported by Greefrath and collaborators ([2022](#)) in the German context, who propose the creation of their own problems as a strategy to develop of the modelling competency in prospective teachers. In the American context, Manouchehri ([2017](#)) reports the efforts to assist a group of practising mathematics teachers to develop knowledge about modelling and its implementation in school curriculum. This study reports the results of 25 of the 85 teachers involved in a course for professional development, making an increase of their knowledge on modelling evident through mathematical (construction and work with the mathematical model), pedagogical (strategies to develop this process in the classroom), and epistemological (obstacles during the modelling process) challenges that they had to face.

More recent studies have broadened the perspective on the role of modelling in teacher education, adding complementary mathematical tools and processes. For example, Alwast and Vorhölter ([2022](#)) focus on the noticing competencies, by examining the

indicators for different kinds of validity (content, elemental, and construct validity) of a video-based instrument to measure the prospective teachers' noticing competencies framed in modelling. Among the contributions of this instrument, it is worth noting that it makes it possible to measure the effects of interventions, to investigate learning trajectories of noticing, and evaluating the efficiency of teacher training courses related to noticing competencies for the teaching of modelling. In the Turkish context, Tekin (2019) focuses on the arguments constructed by prospective primary education teachers during the solving of a modelling task, using the Toulmin's (1954/2003) argumentation schema. Findings revealed the relationships between the components of the arguments constructed by the prospective teachers and the transitions of the modelling cycle.

Although these studies provide guidelines for the inclusion of modelling in mathematics teacher education, our article focuses on the reflection made by prospective teachers in their didactic proposals during their educational internship experiences, by using a tool that provides criteria to reflect on the improvement of teaching and which, as far as we know, has not been applied to the modelling process before.

4.3.3. Didactic suitability criteria

In Mathematics Education, different researchers have made attempts to compile criteria to guide the mathematics teacher's practice so that it is of quality (see Hill et al., 2008; Praetorius & Charalambous, 2018; Prediger et al., 2022; among others). The Onto-Semiotic Approach (OSA) is one of the theoretical frameworks that has developed this research line, defining the notion of didactic suitability (Godino, 2013). The didactic suitability of a teaching and learning process is understood as the degree to which it (or a part of it) meets certain characteristics that allow it to be qualified as suitable (optimal or adequate) in order to achieve an adaptation between the *personal meanings* achieved by students (learning) and the intended or implemented *institutional meanings* (teaching), taking into account the circumstances and available resources (environment).

This multidimensional construct consists of six suitability criteria, each one focused on a specific aspect of the teaching and learning process. Each of the Didactic Suitability Criteria (DSC) has its respective components and their use requires defining a set of observable indicators for assessing the degree of suitability of each of the facets of the teaching and learning process. Table 9 presents the components of each DSC with the

codes used in this research to label them, based on the guideline by Breda and collaborators (2017).

Table 9. Didactic suitability criteria and their components.

Criteria	Description	Components
Epistemic	For assessing whether the mathematics that is taught is «good mathematics».	<ul style="list-style-type: none"> – Errors (ES1). – Ambiguities (ES2). – Richness of processes (ES3). – Representativeness of the complexity of the mathematical object (ES4).
Cognitive	For assessing, before starting the teaching and learning process, whether what is intended to be taught is at a reasonable distance from what students know; and after, whether students learnt what was intended to be taught.	<ul style="list-style-type: none"> – Prior knowledge (CS1). – Curricular adaptation (CS2). – Learning (CS3). – High cognitive demand (CS4).
Interactional	For assessing whether the interaction solves the students' doubts and difficulties.	<ul style="list-style-type: none"> – Teacher–student interaction (IS1). – Student interaction (IS2). – Autonomy (IS3). – Formative assessment (IS4).
Mediational	For assessing the adequacy of material resources and time used in the teaching and learning process.	<ul style="list-style-type: none"> – Material resources (MS1). – Number of students, class schedule and conditions (MS2). – Time (MS3).
Affective	For assessing the students' involvement (interest, motivation) in the teaching and learning process.	<ul style="list-style-type: none"> – Interests and needs (AS1). – Attitudes (AS2). – Emotions (AS3).
Ecological	For assessing the adaptation of the teaching and learning process to the school's educational project, the curricular guidelines, the conditions of the social and professional environment, etc.	<ul style="list-style-type: none"> – Adaptation to curriculum (EcS1). – Intra and interdisciplinary connections (EcS2). – Social and labour usefulness (EcS3). – Didactic innovation (EcS4).

Source: Adapted from Breda et al. (2017).

The DSC represent a rubric (with *criteria*, *components*, and *indicators*) to help mathematics teachers assess their practice and then guide a redesign to improve it. However, the DSC are very different from the teaching guides whose purpose is to help teachers shape the teaching and learning processes, guiding their actions and decision-making (Remillard, 2018), as those included in textbooks. As an example, when this tool is taught to the prospective teachers in the master's programme where our study is

contextualised, the importance of developing a mathematical activity rich in mathematical processes (such as problem solving, modelling, argumentation, connections, etc.) is stressed, so it is expected that they be able to include most or, at least, some of these processes in their didactic units. In the same way, it is explained that this mathematical activity requires that the proposed tasks/problems have a high cognitive demand, considering the work of many researchers in Mathematics Education that highlight this aspect as a theoretical support (e.g., Stein & Smith, [1998](#)). Therefore, it is expected that the prospective teachers include, among others, the modelling process in their didactic units with tasks/problems that promote a high cognitive demand, and also, because of their reflection, that they give a special weight in their redesign proposal to those processes less developed. In addition, from the DSC perspective, the «Richness of processes» (from the *epistemic criterion*) and «High cognitive demand» (from the *cognitive criterion*) components, two of the aspects that the prospective teachers must assess of their implemented didactic unit, reaffirm the importance of including relevant processes of mathematical activity.

The theoretical framework OSA (from which the DSC emerge) provides tools for analysing both the mathematical activity underlying the modelling process (see Ledezma, Font, & Sala, [2023](#)) and the mathematics teacher's knowledge and competencies to develop mathematical teaching and learning processes (see Pino-Fan et al., [2023](#)). Finally, the OSA considers that enhancing modelling is an aspect that improves the didactic suitability of mathematical teaching and learning processes (Ledezma, Sol et al., [2022](#)).

4.4. Methodological Aspects

We followed a qualitative research methodology of a naturalistic type (since we did not interfere in the research context) from an interpretative paradigm (Cohen et al., [2018](#)), which consists of a content analysis (Schreier, [2012](#)) conducted on a sample of 122 MFPs prepared by the prospective teachers of the 2019–2020 academic year at the end of their education in a master's programme, who had to develop their educational internship experiences, either partially or totally, in a virtual teaching context due to the COVID-19 pandemic. Based on the indirectly provided information in the MFPs, these prospective teachers did not have special problems of digital competency to face virtual teaching.

4.4.1. Research context

This research was conducted in the context of the Master's Programme in Teacher Education for Secondary and Baccalaureate Education (specialised in mathematics), taught by the public universities of Catalonia (Spain), during the 2019–2020 academic year.

The master's study programme includes, within the «Complements of Disciplinary Formation» module, a submodule on modelling. This submodule consists of four sessions (one per week) and its (mainly expository) methodology is as follows: in the first session, the prospective teachers are introduced to what is meant by modelling and the cycle proposed by Blum and Leiß (2007a) is presented to them; during the second and third sessions a series of examples of modelling problems are presented and the prospective teachers have to solve some of them in class; and in the fourth session, the prospective teachers must expose the final task of the submodule in front of the class. This task consists of presenting a modelling problem that includes the wording and solving of the problem, and the curricular location of the mathematical contents necessary for its solving.

The master's study programme also involves, within the «Internships» module, carrying out educational internship experiences in collaboration with various institutions established through university agreements, and which are recognised as internship centres. The internship period consists of two phases: an observation (during two weeks of November) and an intervention (during six weeks from February) phase, both developed under the supervision of a mentor teacher from the internship centre. In the intervention phase, the prospective teachers must implement a didactic unit previously designed by them, which is determined by the internship centre, the student educational level, and the time of the school year in which they carry out their intervention. Given this situation, even though the prospective teachers are expected to include modelling, among other mathematical processes, in the implementation of their didactic units, the available margin to do it is subject to the factors mentioned above, but this is not the case of the redesigns proposed in their MFPs.

4.4.2. Structure of a master's degree final project

To obtain the Master's Degree in Mathematics Teacher Education for Secondary and Baccalaureate Education, prospective teachers must prepare an MFP, which must be an original, autonomous, and individual work. This master's programme offers the prospective teachers two modalities to prepare an MFP. The first modality consists of a written reflection on educational practice during the internship experiences, with a professionalising orientation, and where the level of research skills required is lower than for a research-oriented master's thesis. The second modality is oriented towards educational research (master's thesis). At the beginning of the master's programme, the prospective teachers must decide which of the two modalities they want to develop during the course, in agreement with their tutor professor. For this research we considered the MFPs of the first modality mentioned above.

The DSC and the modified version of the guidelines to these criteria, components, and descriptors (see Breda et al., [2017](#)) are presented to the prospective teachers so they can apply them in the elaboration of this type of MFPs. It is suggested that the prospective teachers use these tools to assess the didactic unit that they implemented in their MFPs with the aim that they can propose changes that can help improve the suitability of the teaching and learning process. Table 10 describes the five chapters that structure an MFP.

Although prospective teachers are encouraged to justify the improvements of their redesigned didactic units with the results of research in Mathematics Education on the topic of their educational internship experiences, in general, few references are cited in the MFPs of the modality considered for this study.

4.4.3. Content analysis

For this study, we considered 122 MFPs, corresponding to the 2019–2020 academic year. For their qualitative analysis, we followed *steps* like those used by Sánchez ([2021](#)), which are described below.

In a *first step*, according to specialised literature and our knowledge on the topic, we drew up a list of keywords related to modelling (*context, model, problem, real*) to search for in the MFPs. These terms allowed us to identify the references to modelling in the evaluative comments made by the prospective teachers in their MFPs.

Table 10. Chapters that structure an MFP.

Chapters	Description
Introduction	In which the context of the educational centre where the internship experience was carried out and the curricular aspects of the implemented didactic unit are presented.
Implementation analysis	In which the didactic suitability of the implemented teaching and learning process is assessed using the DSC as a tool. This chapter ends with the overall assessment of didactic suitability, using a hexagonal radial graph based on the assessments assigned to each DSC (see an example in Ledezma, Sala et al., 2021 , pp. 200–201).
Redesign proposal	In which a reformulation of the implemented didactic unit is proposed to improve its didactic suitability, based on the reflections made in the previous chapter.
Competency self-assessment	In which prospective teachers must compare their level for each competency (based on the proposal by Font et al., 2012), considering the level they had when they started the master's programme and the level that they achieved at the end of their educational process.
Annexes	In which evidence of the implementation, the planning of the implemented didactic unit, the cited references, among others, can be included.

Source: Authors' elaboration.

In a *second step*, we recorded the data (author, title, educational level, mathematical content) of each MFP. We organised the mathematical contents based on the curricular guidelines for secondary (Departament d'Educació, [2019](#)) and baccalaureate education (Departament d'Ensenyament, [2008](#)) in Catalonia (Spain), which we grouped into seven thematic areas: Algebra, Functions, Geometry, Numbers, Probability, Statistics, and Trigonometry. This *second step* allowed us to obtain an organised database⁴⁰ that we could consult for each MFP, and therefore, we could keep an initial record of which MFPs included the keywords from the *first step*.

When reviewing the database obtained in the *second step*, we were able to observe a regularity in the distribution of the keywords within the MFPs. That is, we found MFPs that did not include the keywords; MFPs that included the keywords mainly in the *Implementation analysis* and/or *Redesign proposal* chapters; and MFPs that included the keywords throughout the entire document. Given this situation, we decided, in a *third step*, to classify the MFPs according to four levels of reference to modelling that we could identify in these documents, as described in Table 11.

⁴⁰ La base de datos elaborada para este artículo se presenta en el/The database prepared for this article is presented in [Anexo 3 – Annex 3](#).

Table 11. Levels of reference to mathematical modelling identified in the MFPs.

Levels	Description
Level 0 (L ₀)	Corresponds to the MFPs that did not refer to the terms related to modelling; that is, that did not consider working with this process in the implemented didactic units, or MFPs that included some of the established keywords, but without these being directly related to modelling.
Level 1 (L ₁)	Corresponds to the MFPs that, although they did not consider working with modelling in the implemented didactic units, they proposed including modelling in the redesign proposal. More specifically, at this level, we considered the MFPs that only included comments about modelling in the <i>Redesign proposal</i> chapter.
Level 2 (L ₂)	Corresponds to the MFPs that included modelling problems in the implemented didactic units, reflecting on their implementation; however, they did not propose improvements to enhance this process. More specifically, at this level, we considered the MFPs that only included evaluative comments about modelling (using the DSC) in the <i>Implementation analysis</i> chapter, but that did not propose concrete changes for improving this process in the <i>Redesign proposal</i> chapter.
Level 3 (L ₃)	Corresponds to the MFPs like those classified as L ₂ , but which did propose improvements in their redesign to enhance modelling. More specifically, at this level, we considered the MFPs that included evaluative comments about modelling (using the DSC) in the <i>Implementation analysis</i> chapter, and that also proposed concrete changes (in addition to comments) for improving this process in the <i>Redesign proposal</i> chapter.

Source: Authors' elaboration.

During this *third step*, once we established the four levels of reference to modelling in Table 11, we conducted a triangulation in the following way: firstly, each author classified the MFPs according to these levels; secondly, we compared our classifications, achieving an agreement percentage of 96% among the three of us; and finally, we discussed our differences of classification and achieved a consensus, due to our experience in this type of analysis.

In a *fourth step*, we used the DSC to categorise the comments that referred to modelling. Various studies have addressed the topic of teacher reflection in mathematics teacher education processes (see Breda, [2020](#), for didactic analysis; Hidalgo-Moncada et al., [2023](#), for self-regulation practices; Sánchez et al., [2022](#), for the development of creativity; among others), using a content analysis methodology to make the use of the DSC components evident. In this research, we considered these components as a priori categories (Schreier, [2012](#)), in order to identify the aspects of the teaching and learning process that the prospective teachers related to modelling. For the purposes of the content analysis of the MFPs, in this *fourth step*, we considered the evaluative comments in the

Implementation analysis chapter from the documents classified at levels L₂ and L₃, since they contain the prospective teachers' reflections on modelling in their implementation. Due to the agreement that we achieved during the *third step*, we conducted this *fourth step* with no discrepancies, since the assessment of a certain component of the DSC in each MFP containing (or not) an evaluative comment on modelling is an objective fact. Table 12 exemplifies how we applied the four content analysis *steps* to the MFPs #005, #042, #060, and #076. The choice of these documents is justified by the fact that we classified each of them at a different level of reference to modelling.

Table 12. Examples of the content analysis on MFPs #005, #042, #060, and #076.

Content analysis	Analysed content
MFP #005	
<i>First step</i>	We identified the keywords «model» and «context».
<i>Second step</i>	It is a didactic proposal for teaching statistics in the third grade of secondary education (students aged 14–15).
<i>Third step</i>	The references to the identified keywords are related to the «educational model of the centre» and the «implementation context of the didactic unit». The redesign does not consider the inclusion of modelling. Therefore, this MFP was classified at L ₀ .
<i>Fourth step</i>	–
MFP #042	
<i>First step</i>	We identified the keywords «modelling» and «problem».
<i>Second step</i>	It is a didactic proposal for teaching geometry in the first grade of secondary education (students aged 12–13).
<i>Third step</i>	We did not find evaluative comments about modelling (using the DSC) in the <i>Implementation analysis</i> chapter. We found the following comment in the <i>Redesign proposal</i> chapter: “this would be a good problem for initiating students in modelling and can be proposed as a challenge for those students who successfully solved the first problem” (p. 24). Therefore, this MFP was classified at L ₁ .
<i>Fourth step</i>	–
MFP #060	
<i>First step</i>	We identified the keywords «model» and «contextualised».
<i>Second step</i>	It is a didactic proposal for teaching geometry in the third grade of secondary education (students aged 14–15).
<i>Third step</i>	We found evaluative comments about modelling in the assessment of the DSC in the <i>Implementation analysis</i> chapter. We found the following comment in the <i>Redesign proposal</i> chapter: “we work focusing on contextualised problems” (p. 25), but no improvements are proposed. Therefore, this MFP was classified at L ₂ .
<i>Fourth step</i>	Among many others, we found the following comment in the assessment of the ES3 component: “in the first case, contextualised in the pandemic situation that we had at that time, the student will be

Content analysis	Analysed content
<i>Fourth step (cont.)</i>	asked to model a bit [sic] to be able to see the existence of two right triangles” (p. 11).
MFP #076	
<i>First step</i>	We identified the keywords «modelling» and «real».
<i>Second step</i>	It is a didactic proposal for teaching functions in the third grade of secondary education (students aged 14–15).
<i>Third step</i>	We found evaluative comments about modelling in the assessment of the DSC in the <i>Implementation analysis</i> chapter. We found the proposal of a dossier with new contextualised problems in the <i>Redesign proposal</i> chapter. Therefore, this MFP was classified at L ₃ .
<i>Fourth step</i>	Among many others, we found the following comment within the assessment of the CS4 component: “tasks with a certain cognitive demand, which are those that have allowed modelling to be carried out” (p. 14). In addition, we found the following comment in the assessment of the AS1 component: “mathematics linked to the real world awakened the students’ motivation” (p. 14).

Source: Authors’ elaboration.

Regarding the *fourth step* of content analysis, we consider it important to clarify that an MFP can include more than one phrase/sentence with references to the terms related to modelling in the assessment of a particular DSC component. For example, in the assessment of the «Richness of processes» (ES3) component we could find the definitions of the «modelling», «contextualisation», and «problem solving» processes distributed differently: either in three cells within a table, in three different sentences within a single paragraph, or in three disjointed paragraphs within the assessment of this component. Given this situation, we decided to consider the set of these phrases/sentences that included terms related to modelling as «one comment» in the assessment of each DSC.

4.5. Presentation and Analysis of Results

In this section, we present (subsections [4.5.1](#) and [4.5.2](#)) and analyse (subsections [4.5.3](#) and [4.5.4](#)) the main results from the content analysis conducted on the MFPs.

4.5.1. Classification of the MFPs according to the levels of reference to modelling

Based on the search for keywords in the 122 MFPs (*first step* of content analysis), as a first result, we found terms related to modelling in 86 of these MFPs. After recording each MFP (*second step* of content analysis), we proceeded to classify them according to

the levels of reference to modelling (*third step* of content analysis), and thus, we obtained the results presented in Table 13.

Table 13. Number of MFPs according to the levels of reference to mathematical modelling.

Levels of reference	Number of MFPs	Percentages*
L ₀	36	29.5%
L ₁	41	33.6%
L ₂	21	17.2%
L ₃	24	19.7%
Total	122	100%

Note (*): Percentages rounded to the first decimal place. Source: Authors' elaboration.

Table 13 presents a notion on the use of the terms related to modelling in the MFPs analysed and on the importance that the prospective teachers gave to this process within their didactic units. In this sense, 36 MFPs did not include references directly related to modelling (MFPs classified as L₀), and 41 MFPs, although they did not include this process in the implemented didactic units, they considered it for their redesign proposals (MFPs classified as L₁). We did not consider these 77 MFPs in the subsequent analyses since they were not in line with the objectives of our study.

The *first step* of content analysis also allowed us to identify that three MFPs (#033, #061, and #064) were presented as a master's thesis (as described in [subsection 4.4.2](#)). We classified these three MFPs at the L₀ level, and we did not consider them for the subsequent analyses of our study.

The *third step* of content analysis also allowed us to identify that three other MFPs (#031, #057, and #083) did not make explicit references to modelling in the *Implementation analysis* chapter, but they did mention activities that, in their extended description within the *Redesign proposal* and *Annexes* chapters, referred to modelling and even proposed improvements to work on this process. We classified these three MFPs at L₃, although we did not consider them in the *fourth step* of content analysis because their reflections did not refer to any particular DSC.

Based on the considerations mentioned above, we obtained as a second result that, in 45 of the 122 MFPs, the prospective teachers reflected on the implementation of modelling in their didactic units (corresponding to the levels of reference L₂ and L₃). The results that we present in the following subsection (*fourth step* of content analysis) include the analysis of 42 of these 45 MFPs (excluding the three MFPs mentioned in the previous paragraph).

4.5.2. Classification of the comments of the MFPs according to the DSC components

Based on the classification presented in Table 13 (*third step* of content analysis), we proceeded to categorise the evaluative comments⁴¹ related to modelling according to the DSC component on which the prospective teacher was reflecting when made the comment (*fourth step* of content analysis). We obtained the results presented in Table 14.

Table 14. Number of comments about mathematical modelling according to the DSC components.

Components	No. of comments	Components	No. of comments	Components	No. of comments	Components	No. of comments	Components	No. of comments	Components	No. of comments
ES1	1	CS1	5	IS1	3	MS1	4	AS1	32	EcS1	2
ES2	2	CS2	1	IS2	4	MS2	0	AS2	3	EcS2	14
ES3	40	CS3	1	IS3	1	MS3	4	AS3	5	EcS3	20
ES4	11	CS4	12	IS4	0					EcS4	4
Total	54	Total	19	Total	8	Total	8	Total	40	Total	40

Note: The codes of the DSC components from Table 9 were used. Source: Authors' elaboration.

Based on the categorisation in Table 14 (*fourth step* of content analysis), we obtained two results. First, we identified 169 comments explicitly or implicitly referring to modelling in the 42 MFPs considered in this analysis. Regarding this aspect, we did not consider it relevant to attribute a fixed number of comments identified to each MFP since, for example, one document could include comments related to modelling in eight different DSC components and other could include comments in only three components. Since this type of data refinement did not add richness to our study, we have excluded it from the analyses performed. Second, we identified that the largest number of comments were made on the *epistemic criterion*, followed by the *affective* and *ecological criteria*. We analyse these results in the next two subsections.

4.5.3. On the MFPs with references to mathematical modelling

From the database generated during the *second step*, and the classification of comments made during the *third step*, Table 15 shows: (a) the mathematical contents addressed by the didactic units in the MFPs; (b) the number of MFPs which implemented modelling,

⁴¹ Los comentarios valorativos analizados en este artículo se presentan en el/The evaluative comments analysed in this article are presented in [Anexo 4 – Annex 4](#).

according to the mathematical content and educational level in which the internship experiences were carried out; (c) the number of MFPs which did not implement this process; and (d) the total number of didactic units for each mathematical content. (Table 15 does not consider the three MFPs presented as master’s thesis).

Table 15. Mathematical contents and student educational level where modelling was (or not) implemented.

Mathematical contents	Secondary Ed.				Baccalaureate Ed.		N/impl.	Total
	1 st	2 nd	3 rd	4 th	1 st	2 nd		
Algebra	0	1	2	1	0	0	10	14
Functions	0	2	7	6	3	1	9	28
Geometry	3	4	1	1	1	0	31	41
Numbers	1	0	0	1	0	0	15	17
Probability	0	0	0	1	0	0	4	5
Statistics	2	0	1	1	0	0	3	7
Trigonometry	0	0	0	5	0	0	2	7
Total	6	7	11	16	4	0	74	119

Note: No/impl. = No implementation of modelling. Source: Authors’ elaboration.

As mentioned in [subsection 4.4.1](#), among the determining factors for the development of educational internship experiences are the student educational level and the time of the school year in which the prospective teachers carry out their intervention; that is, both factors determined the mathematical content of the didactic units and its choice did not depend on the prospective teachers. Regarding the student educational level, Table 15 shows that, at all educational levels, to a greater or lesser extent, the prospective teachers implemented modelling in their didactic units, focusing on the 3rd (students aged 14–15) and 4th (students aged 15–16) grades of secondary education. Regarding the time of the school year, in the context of our study, the educational internship experiences were carried out during six weeks from February 2020 (period from February to April, approximately).

Table 15 also shows that the most used mathematical content to implement modelling was Functions, followed by Geometry. This tendency of the prospective teachers to use modelling for teaching functions is in line with the Michelsen’s (2006) position, who highlights the role of this mathematical content as a tool for developing the modelling process in the classroom. Regarding the Geometry content, we realised that, compared to the total number of didactic units that addressed it (41), only about a quarter of them (10) implemented modelling for its teaching. This result is partially consistent with the Girnat and Eichler’s (2011) findings, that teachers tend not to consider the teaching of geometry linked to modelling.

4.5.4. On the evaluative comments about mathematical modelling

The *fourth step* of content analysis revealed the DSC components in which the prospective teachers made their reflections on the implementation of modelling through evaluative comments. As mentioned in [subsection 4.4.2](#), the prospective teachers assess the didactic suitability of the implemented teaching and learning process in the *Implementation analysis* chapter of the MFP, using the DSC for this. More specifically, the prospective teachers write evaluative comments in each DSC component, where they reflect, among other aspects, on the implementation of modelling in their didactic units. Therefore, we identified that the 45 MFPs (see L₃ and L₄ levels in Table 13) that included modelling in their didactic units concentrated the largest number of comments in the *epistemic*, *affective*, and *ecological criteria*. In this subsection, we analyse these evaluative comments since they are evidence of the prospective teachers' reflection on the implementation of this process in their didactic units.

In the *epistemic criterion* there is the «Richness of processes» (ES3) component, which indicates that the sequence of tasks considers relevant processes in mathematical activity (modelling, argumentation, problem solving, connections, etc.) (Breda et al., [2017](#)), and it was the component that had the largest number of comments about modelling. This is because the mathematical processes worked on during the implemented didactic unit are defined and exemplified in this component. In the assessment of this component, we found important differences between the definitions of the modelling process in the analysed MFPs, which are shown in Table 16 with three representative examples.

Table 16. Definitions of mathematical modelling found in MFPs #002, #028, and #115.

MFP	Definition or comment
#002	Contextualisation (modelling): Use of real-world problems. (p. 9)
#028	Modelling: Includes structuring the situation to be modelled; translating 'reality' into a mathematical structure; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing, and criticising a model and its results; communicating effectively about the model and its results (including limitations); and monitoring and controlling the modelling process. (pp. 9–10)
#115	Capability to transform a non-mathematical situation into a mathematical object/model. [...]. In my didactic unit, modelling was one of the central processes. We worked on this process a lot, above all, by transforming a purely written statement into a mathematical situation that can be represented with a drawn model of a right triangle (or a set of them). (pp. 10–11)

Source: Authors' elaboration, based on MFPs #002, #028, and #115.

MFP #002 is representative of a common situation in some documents, in which the definitions of and comments on the «problem solving», «modelling», and «contextualisation» processes were slightly differentiated. More specifically, in some MFPs, it was stated that, if a statement was posed within the mathematical world, then «problem solving» was carried out; however, if it was posed in the real world, then «modelling» was carried out; or, if a problem developed «contextualisation», then it was a «modelling» problem. MFP #028 is also representative of another common situation, in which more detailed definitions of the modelling process were given (like that provided by Geiger et al., [2018](#)), but without citing the source of the definition. This is because, since an MFP is not oriented towards research, but rather towards reflection on their own practice, the prospective teachers do not always respect the rules of citing or making a reference list in their works. Finally, MFP #115 is representative of another common situation, in which modelling was commented on as if this process consisted only in translating the wording of a problem from natural language to a mathematical representation, which suggests a double interpretation. On one hand, some prospective teachers tended to reduce the modelling process to the idea of *horizontal mathematisation* (in terms of Freudenthal, [1991](#)), without considering the other phases of the modelling cycle. According to the classification proposed by K. Maaß ([2010](#)), this type of tasks can be considered as those focused only on the development of the mathematisation sub-competency, but not on the development of the complete modelling process. On the other hand, we interpret that some prospective teachers tended to overlap the modelling process with treating and converting registers of semiotic representation (in terms of Duval, [2017](#)) of the mathematical objects involved in this type of problems.

In the *affective criterion* there is the «Interests and needs» (AS1) component, which indicates that the selection of tasks is interesting for students, and the situations presented enable them to evaluate the practicality of mathematics in everyday situations and professional life (Breda et al., [2017](#)). This component was the second one with the largest number of comments about modelling, which pointed out that these types of problems, being «contextualised» and «realistic», caught (or were intended to catch) the students' attention, because many of them took advantage of the context of COVID-19 and lockdown as central topics in their wordings. For example, we found the following comment in one of the assessments of this component:

Regarding the context in which the didactic unit was carried out, I consider that the fact that all the activities were contextualised around COVID-19 managed to [...] motivate them [the students].

(MFP #118, p. 21, authors' translation)

This use of problems with wordings related to COVID-19 to work on modelling occurred with different mathematical contents. In this sense, COVID-19 as a contingent issue encouraged modelling where it was not commonly done, for example, in the case of trigonometry (see Ledezma, Font, & Sala, [2021](#)). In addition, in the assessment of this component we highlight that the implementation of modelling problems was intended to arouse the students' interest about daily life decisions, as made evident by the following two comments:

The activities proposed [...] were contextualised in possible situations or close to the students' daily life. In this way, their interest was caught, and importance was given to the need interest was also caught on their part and importance was given to the need to take and introduce these new mathematical concepts in real and professional life. (MFP #024, p. 16, authors' translation)

An example was the decision-making activity, in which it was necessary to choose the best electricity supply option based on real criteria, such as cost, payback period, sustainability, or reliability of supply. (MFP #035, p. 15, authors' translation)

In the *ecological criterion* there are the «Intra and interdisciplinary connections» (EcS2) and «Social and labour usefulness» (EcS3) components. The EcS2 component indicates that the taught contents are related to other mathematical topics (more advanced or of the same educational level), or to the contents from other disciplines (extra-mathematical contexts or from other subjects of the same educational level); and the EcS3 component indicates that the contents are useful for social and professional insertion (Breda et al., [2017](#)). Both components included comments referring to modelling as a tool for relating mathematics both to the curricular contents from other subjects (especially physics and history) and to the students' context (contextualised problems in their social and work

environment). For example, we found the following comments in the assessments of these two components:

The only interdisciplinary incursion has been with the study of profitability to connect, in a certain way, with economy, making calculations to find out the profitability by identifying costs and income and comparisons with the minimum interprofessional salary explained on the first day as the objective of this problem. (Assessment of the EcS2 component; MFP #052, p. 11, authors' translation)

Surely, contextualisation is the only way of social utility of the DU [Didactic Unit]. Since the [internship] centre is specialised in artistic education, we can say that contextualisation in this field can serve as a work utility. (Assessment of the EcS3 component; MFP #106, p. 13, authors' translation)

We need to make a special mention to the *cognitive criterion*, where there is the «High cognitive demand» (CS4) component, which indicates that relevant cognitive processes are activated in mathematical activity (generalisation, intra-mathematical connections, changes of representation, conjectures, etc.) and metacognitive processes are promoted (Breda et al., [2017](#)). The comments in this component highlighted that the implemented modelling problems made it possible to work on other relevant mathematical processes. For example, we found the following comment in one of the assessments of this component:

From the beginning, we tried that, throughout the entire DU [Didactic Unit], there were activities and sessions that came out of formal and traditional teaching, and that were more competent to work on cognitive and mathematical processes, such as communication of concepts, mathematical reasoning and argumentation, abstraction to imagine and reason fictitious situations, modelling and problem solving. (MFP #024, pp. 12–13, authors' translation)

In the assessment of the CS4 component, the author of MFP #024 referred to a particular modelling problem (see) as an example of task with a high cognitive demand.


<p>SESSIÓ 9 i 10 - PROBLEMA: HEM PERDUT LA T-16!</p> <p>Hem perdut la T-16!</p>  <p>L'Alex ha perdut la T-16 i haurà de finançar-ho amb els seus estalvis. Sabem que la nova T-16 trigarà 45 dies a arribar a casa i volem calcular quin bitllet li convé més i quants diners li costarà en total.</p>	<p>We have lost the T-16!</p> <p>Alex has lost a T-16 and he will have to pay it with his savings. We know that the new T-16 will take 45 days to arrive home and we want to calculate which ticket is best for him and how much money it will cost him.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figure 10. Modelling problem implemented in the didactic unit of MFP #024.
 Source: MFP #024 (p. 48, authors' translation).

The statement of the *We Have Lost the T-16! Task* is contextualised in the loss of the T-16 card (intended for children and adolescents to have free trips on the Barcelona Metropolitan Transport system), with the aim of calculating which other travel card would be the best option. This statement is characterised by being *open* and *complex*, since it requires the students to find out the prices of the other public transport cards and compare their costs; it is also *realistic* and *complex* because, in addition to being situated in a context close to the students (the city of Barcelona), it presents a situation that can happen in reality (in fact, the students use the T-16 card). Since this statement is in line with the characteristics mentioned in [subsection 4.3.1](#), it can be considered as a *problem that is solvable through a modelling cycle*.

Finally, the *interactional* and *mediational criteria* included the fewest comments on modelling. Due to the virtual teaching context, the prospective teachers commented that they had a lot of difficulties getting their students to carry out collaborative work, as suggested for modelling activities (in terms of Doerr & English, [2003](#); Shahbari & Tabach, [2019](#)), which clearly affected the *interactional criterion*. Similarly, we only found some references to the use of the GeoGebra software or manipulative resources for solving problems posed to students, but without specifically delving into modelling.

4.6. Discussion and Conclusions

The content analysis carried out on the 122 MFPs from the 2019–2020 academic year, in the context of a master's degree programme for mathematics teacher education, allowed us to make evident the decisions made by the prospective teachers, both during their educational internship period and in the proposals for improvement derived from the reflection made in their MFPs on the inclusion of modelling in their didactic units.

The first aspect to highlight of these results is that about 60% of these prospective teachers did not include modelling as a relevant process in their didactic units (see L₀ and L₁ levels in Table 13). We discard the explanation that they did not have knowledge about modelling and its inclusion in the mathematical teaching and learning process, since the master's programme in which our study is contextualised dedicates a submodule specifically to teaching this process. We also discard the fact that the COVID-19 pandemic was a context that did not encouraged modelling as an explanation, since the media included information that made it possible to design modelling tasks/problems, as well as models to represent the evolution of the pandemic, which made modelling acquire relevant social value. However, a plausible explanation is that, in terms of the DSC, a teacher must try *a priori* that these *criteria* are met as much as possible; however, the implementation context forces him to make decisions about what aspects to prioritise, push to the background, or simply skip. In the case of our study, although one of the *indicators* from the «Richness of processes» component gives importance to the development of the modelling process in the classroom, the grave contingency that the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts implied, made these prospective teachers prioritised other aspects of the mathematical teaching and learning process, such as the availability of time, the diversity of students, the work system of the internship centre, other relevant processes of mathematical activity, etc. These results are consistent with other studies that have revealed the difficulties of including modelling in the classroom (e.g., Niss, [2001](#)), given the complexity of the aspects that must be taken into consideration by a teacher when implementing a lesson.

The second aspect to highlight concerns the remaining almost 40% of these prospective teachers. Even though this master's programme includes a submodule on modelling in which the cycle proposed by Blum and Leiß ([2007a](#)) is presented, we did not find references in the MFPs to the use of this cycle (or any other) to perform analyses on the implemented problems or those proposed in the redesign and that were considered as *modelling problems*. That is, the prospective teachers stated that they had implemented modelling in their didactic units, although in their reflections they did not rely on a modelling cycle to justify this affirmation. A plausible explanation is that, in addition to the grave contingency previously commented, since an MFP is an autonomous work, the

reflection on modelling, whether from a theoretical perspective or not, is a decision made by the author of the MFP in agreement with his/her tutor professor and that, surely, takes into account, among other aspects, the page and time constrictions for its preparation. Furthermore, as we mentioned in [subsection 4.4.2](#), the purpose of an MFP is for the prospective teachers to reflect on their own practice, which does not compulsorily imply a reflection from a purely theoretical perspective.

The third aspect to highlight is that, based on the evidence from the analysed MFPs, for most of these prospective teachers, given a mathematical or extra-mathematical situation, finding a mathematical object of which the situation is an instantiation was considered modelling. In this sense, this process was understood as the relationship between a general mathematical object and a particular case, which may or may not be an extra-mathematical situation. On the other hand, there were also cases in which *modelling* was considered as a *change of representation model*, in semiotic terms. A plausible explanation is that the master's programme, where our study is contextualised, did not make a general reflection on the notion of mathematical process, its different types, and the relationships and differences between them, because this master's programme only prioritised a specific work with modelling and problem solving in the respective submodules. On one hand, this situation contradicts Rubio's (2012) position, who justifies the importance of carrying out general work with mathematical processes and not on specific processes. On the other hand, these results partially coincide with the study by Villa-Ochoa (2015), in the sense that teachers tend to make statements, considered as *modelling problems*, that only evaluate students' skills to register, through a symbolic expression, a mathematical relationship wrapped up in a relatively realistic word-problem. This particular aspect reinforces the study by Kuntze and collaborators (2013), regarding the emphasis of teacher professional development on modelling to improve its implementation in the classroom.

The fourth aspect to highlight is that we made evident, in the process of reviewing the reflection carried out by the prospective teachers, that their tutor professors did not make them realise that, in order to state that the modelling process was implemented in a didactic unit, as a minimum, it is necessary that the problem posed to the students meets the characteristics described in [subsection 4.3.1](#), as in the case of the problem in Figure 10. This weakness in feedback was made evident, for example, in some MFPs that

adopted a definition of modelling closer to that of contextualisation or word-problem solving (as in the case of MFP #002 in Table 16), where the prospective teachers stated that they had implemented modelling by posing this type of problems (contextualisation or word problems) but not modelling problems as such. Therefore, the feedback process to prepare an MFP would be an aspect that the master's programme where we conducted our study could improve, considering the results of our research.

Finally, we found some MFPs in which the prospective teachers had to reduce the duration of the time allocated for their lessons and even eliminate some sessions. This was due to the abrupt interruption of face-to-face lessons and the difficulties of some educational centres to implement the virtual teaching system with their students. A paradigmatic example of this situation was MFP #052, where the prospective teacher planned to develop a modelling project during six sessions, but he had to reduce then to only two sessions, dispensing with the modelling process, and only focusing on solving specific tasks within the project (see a detailed analysis of this MFP in Ledezma, Sala et al., [2021](#)). In terms of the DSC, this fifth aspect is somewhat related to the first one that we highlighted, with the difference that here the prospective teachers did consider *a priori* the inclusion of modelling in their didactic units. However, since this process was finally suppressed or reduced to its minimum expression, this importance of modelling may have been less than other aspects, such as the conceptual contents included in the curriculum.

Resuming our research question on what aspects of the teaching and learning process prospective secondary and baccalaureate education teachers related to mathematical modelling when they reflected on its inclusion during the transition period between the face-to-face and virtual teaching context, we found that the *epistemic*, *affective*, and *ecological* (and, to a lesser extent, the *cognitive*) *criteria* were the aspects of the teaching and learning process that they mostly related to modelling in the context of our study. In general terms, the results of our study showed that the COVID-19 pandemic influenced these prospective teachers on mainly two aspects. On one hand, COVID-19 provided a realistic and authentic context to pose modelling tasks/problems close to the students; although on the other hand, represented a worldwide change in the way of developing teaching and learning processes (Engelbrecht et al., [2023](#)) by affecting, for example, the student interaction. In other words, these results showed how the prospective teachers had

to decide which *criteria* and *components* of the DSC to give more or less relevance to when implementing their lessons, forced by the serious contingency situation. Although the prospective teachers who included modelling in their didactic units commented on the, especially, pedagogical challenges to implement this process in the classroom (similar to those reported by Manouchehri, [2017](#)), they did assess the inclusion of modelling, by using arguments similar to those given in the literature to justify its use in mathematical teaching and learning processes (see Blum, [2011](#); Blum & Niss, [1991](#); among others).

4.7. Commentary on the Second Article

This article was prepared to fulfil the second objective and answer the second research question of this doctoral thesis. The first aspect to highlight in this article is that it addresses the issue of teaching reflection around the inclusion and implementation of modelling during the educational internship experiences carried out by prospective teachers in a virtual teaching context. Although the research question and objective were originally posed to analyse the MFPs derived from the development of educational internship experiences in the usual way stipulated by the professionalising master's programme considered as a field of study (that is, with attendance to internship centres to develop face-to-face teaching), the COVID-19 pandemic declared in March 2020 caused slight modifications to the development of this research. This means that the interest in the prospective teachers' reflection on the inclusion and implementation of modelling during their educational internship experiences was mediated by the grave contingency situation caused by the pandemic, which added a more interesting context to explore. In any case, what was not affected was the naturalistic principle of the study, since at no time was the direct participation of the doctoral candidate in the field of study considered, nor was the content analysis methodology used (adapted from Sánchez, [2021](#)).

The second aspect to highlight in this article is the use of the DSC tool (see Figure 11) to guide this reflection, addressing the issue of modelling as it had not been done previously in the literature.

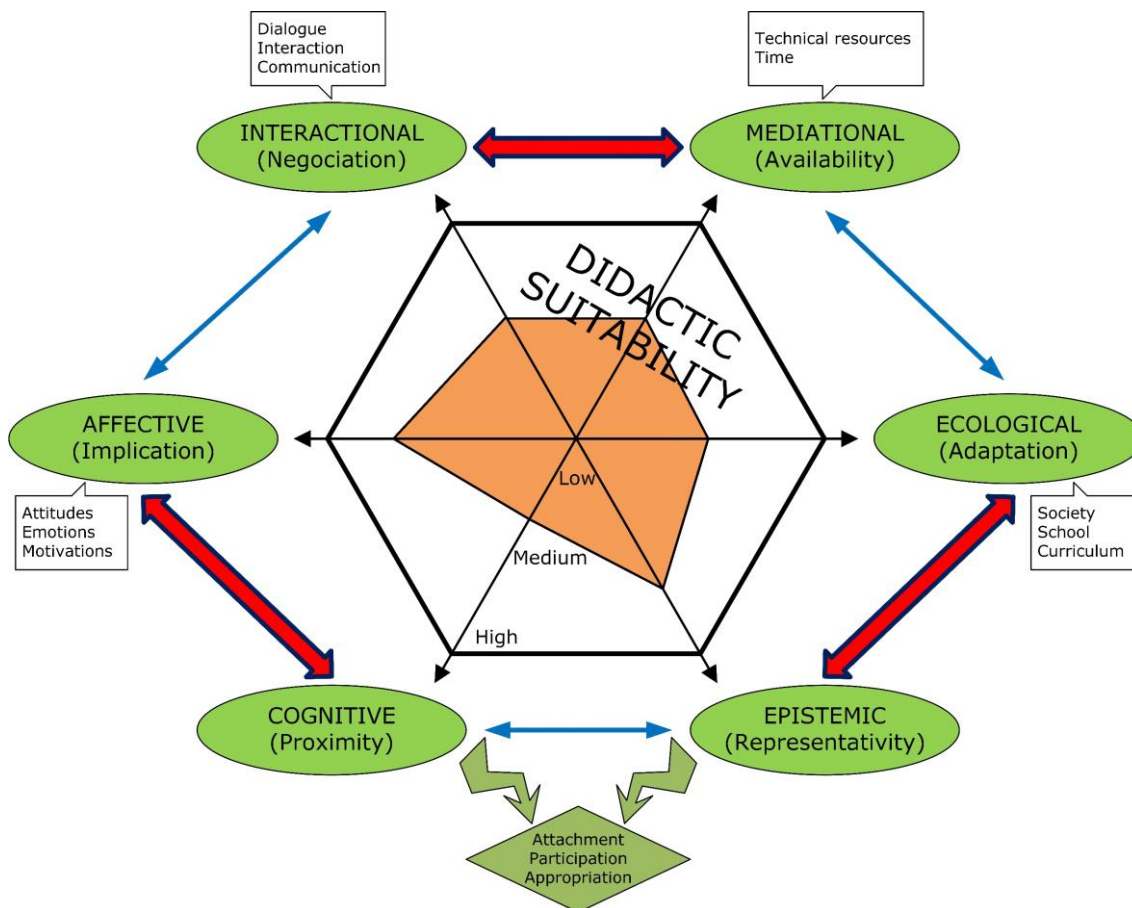


Figure 11. Representation of the Didactic Suitability Criteria.
 Source: Adapted from Godino (2013, p. 116, author’s translation).

When a (prospective or practising) teacher reflects on his practice using the DSC, he is also attributing specific importance to each of the elements that are object of his reflection. In the context of this study, when a prospective teacher reflected on modelling in a certain criterion and component of the DSC guideline, he was relating this process to a certain aspect of the mathematical teaching and learning process where he considered that modelling had importance. For this reason, some aspects (criteria) were prioritised over others, taking into consideration the context in which each prospective teacher implemented his didactic unit, in addition to the grave contingency situation caused by the COVID-19 pandemic that forced internship centres to implement virtual teaching. Finally, the third aspect to highlight in this article is the value of the content analysis methodology for the development of this study, since it is what allowed it to extract and organise a large volume of data from the MFPs prepared during the 2019–2020 academic year, more specifically, managing to identify the aspects of the mathematical teaching and learning process that the prospective teachers related to modelling and making it

possible to answer the second research question of this doctoral thesis. The content analysis methodology used in this study corresponds to an adaptation of that used by Sánchez (2021, and improved in Sánchez et al., 2022) for her studies on the use of creativity by prospective teachers, also using the DSC tool. Therefore, in the case of this article, although the content analysis considered the same initial steps for defining/searching for keywords and creating a database, not only were the following steps adapted to the topic of modelling, but new categories (levels of reference to modelling) were also created, all of which was previously refined and validated through presentations of the progress of this study in academic dissemination events (congresses and seminars). In fact, the content analysis allowed it to obtain a large volume of data that was not possible to include it its entirety in this second article. As a summary, [section 8.2](#) presents a comparison between the results of the two studies conducted to realise the second research objective.

As a consequence of this article, taking into consideration the database prepared and the identification of the modelling tasks proposed by the prospective teachers, the fulfilment of the second objective and the answer to the second research question of this doctoral thesis gave way to the development of the study presented in [Chapter 6](#).

Data availability statement

MFPs are public documents, but they are not available on the internet. They are kept in the Autonomous University of Barcelona (Plaça Cívica, Campus de la UAB, 08193, Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Spain). If someone wants to revise the MFPs analysed in this study, he/she can ask for it to the authors.

Capítulo 4: Segundo Artículo

Chapter 4: Second Article

Reflections on the inclusion of mathematical modelling...

Capítulo 5: Tercer Artículo –

Chapter 5: Third Article

En este capítulo se presenta el tercer artículo publicado para cumplir los requisitos de esta tesis doctoral. En la Tabla 9 se presentan los datos de identificación de este tercer artículo.

Tabla 9. Datos de identificación del tercer artículo.

Criterios	Datos
Título	Reflexiones de futuros profesores sobre la implementación de la modelización matemática en el retorno a la enseñanza presencial.
Autor(es)	Carlos Ledezma, Alicia Sánchez, Diana Hidalgo-Moncada.
Afiliación(es)	Departamento de Educación Lingüística, Científica, y Matemática, Facultad de Educación, Universidad de Barcelona (España).
Revista	BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.
Volumen	38.
Número de artículo	e230170
Páginas	1–29.
DOI	10.1590/1980-4415v38a230170
Fecha de publicación	08 de abril de 2024.
Fecha de envío	31 de julio de 2023.
Fecha de aceptación	01 de septiembre de 2023.
Referencia	Ledezma, C., Sánchez, A., e Hidalgo-Moncada, D. (2024). Reflexiones de futuros profesores sobre la implementación de la modelización matemática en el retorno a la enseñanza presencial. <i>BOLEMA: Boletim de Educação Matemática</i> , 38, Artículo e230170. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

Nota: Dado que el artículo no ha sido publicado al 31 de marzo de 2024, no se tiene información sobre su impacto. Fuente: Elaboración del autor a partir de la información disponible en <https://www.scielo.br/j/bolema/a/kL8V7NkBTXxKvqVBKvYfwLS/?lang=es>.

Esta revista se fundó en 1985 y se publica por BOLEMA Departamento de Matemática. Los editores en jefe son Marcus Vinicius Maltempi y Roger Miarka (Universidad Estadual Paulista, Brasil). Esta revista está indexada en ocho bases de datos, incluyendo Google Académico, SciELO, SCOPUS, SSCI, entre otras.

De acuerdo con la información disponible en Scopus⁴², esta revista está indexada en las categorías Matemática/Misceláneo (rango #51/74, 31° percentil) y Ciencias Sociales/Educación (rango #1170/1469, 20° percentil), con un CiteScore en 2022 de 0.7 y un CiteScore Tracker en 2023 de 1.0.

⁴² Información disponible en <https://www.scopus.com/sourceid/19900191880>.

De acuerdo con la información disponible en Scimago Journal & Country Rank (SJR)⁴³, esta revista está indexada en las categorías Matemática/Misceláneo y Ciencias Sociales/Educación, su Índice H es 15 y el SJR 2023 es 0.27 (Q3 en Educación).



(a)



(b)

Figura 15. (a) Logo de la Revista *BOLEMA*; (b) primera página del artículo.

Fuente: Sitio web de la revista (<https://www.scielo.br/j/bolema/>).

⁴³ Información disponible en <https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=19900191880&tip=sid&clean=0>.

5.1. Resumen y Palabras Clave –

Abstract and Keywords

5.1.1. Idioma español

Resumen: La investigación en Didáctica de la Matemática ha realzado la importancia de incluir la modelización para la enseñanza de esta materia. En 2021, esta tendencia convivió con el retorno a la enseñanza presencial, suspendida por la pandemia de COVID-19. Dada esta situación, resulta relevante estudiar qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron los futuros profesores con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza. Para ello, se utilizó como referente teórico el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico. Se trata de una investigación cualitativa de tipo naturalista, ya que no se interfirió en el Máster de Formación de Profesores de Matemática estudiado. Se realizó un análisis de contenido sobre 117 Trabajos Finales de Máster, elaborados durante el año académico 2020–2021, e implementados durante el retorno a la enseñanza presencial. Se destacan los siguientes resultados: (a) alrededor del 35% de los futuros profesores afirmaron que implementaron la modelización en sus unidades didácticas y reflexionaron sobre su inclusión; (b) en sus reflexiones, los futuros profesores valoraron positivamente la inclusión de la modelización con base en los criterios de idoneidad epistémico y ecológico; (c) el casi 65% de los futuros profesores no implementó la modelización, y se descarta que haya sido por falta de conocimientos sobre este proceso o de un contexto propicio para modelizar, sino porque priorizaron otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, debido al retorno a la enseñanza presencial.

Palabras clave: Análisis de contenido; Criterios de idoneidad didáctica; Modelización matemática; Reflexión docente; Trabajo final de máster.

5.1.2. English language

Abstract: Research in Mathematics Education has highlighted the importance of including modelling for the teaching of this subject. In 2021, this trend coexisted with the return to face-to-face teaching, suspended by the COVID-19 pandemic. Given this situation, it is relevant to study which aspects of the teaching and learning process prospective teachers related to mathematical modelling in their reflections on its inclusion during the transition

period between the virtual and face-to-face teaching contexts. To this end, we used the Didactic Suitability Criteria construct, proposed by the Onto-Semiotic Approach. This is qualitative research of a naturalistic type, since we did not interfere in the Master's Programme for Mathematics Teacher Education in study. We conducted a content analysis on 117 Master's Degree Final Projects submitted during the 2020–2021 academic year and implemented during the return to face-to-face teaching. We highlight the following results: (a) about 35% of the future teachers stated that they implemented modelling in their didactic units and reflected on its inclusion; (b) on their reflections, the future teachers positively assessed the inclusion of modelling based on the epistemic and ecological suitability criteria; (c) almost 65% of the future teachers did not implement modelling, and we rule out that it was due to a lack of knowledge about this process or of a favourable context for modelling, but because they prioritised other aspects of the mathematical teaching and learning process, due to the return to face-to-face teaching.

Keywords: Content analysis; Didactic suitability criteria; Master's degree final project; Mathematical modelling; Teacher reflection.

5.2. Introducción

Existe un amplio consenso sobre la importancia de desarrollar competencias que impliquen el uso de la matemática para resolver problemas del mundo real, entre las que se destaca la competencia en modelización matemática (Kaiser, [2020](#); Niss y Højgaard, [2019](#)). Esta competencia se considera como un aspecto central para la resolución de problemas en la evaluación PISA (OECD, [2019](#)), un proceso que trae consigo beneficios para el aprendizaje de la matemática (Blum, [2011](#)), y como un elemento indispensable para educar a individuos competentes ante las necesidades y exigencias contemporáneas (Maass et al., [2022](#)). Por lo tanto, para educar a estudiantes competentes en modelización, se requiere preparar a los profesores en el manejo de estrategias de enseñanza asociadas a su implementación en el aula (Blum y Borromeo Ferri, [2009](#)).

En la literatura de las últimas décadas, se han reportado diversos estudios sobre el rol de la modelización en la educación de profesores de matemática, abordando la enseñanza y aprendizaje de este proceso (véase más detalles en la [subsección 5.3.2](#)). Si bien tales estudios se encuentran en consonancia con la postura de K. Maaß ([2007](#)) de que no sólo basta con educar a los profesores en modelización, sino que también deben

experimentarla, el que se reporta en este artículo centra su atención en la reflexión de futuros profesores sobre la inclusión de este proceso en sus Trabajos Finales de Máster (TFMs). En el contexto español, los futuros profesores deben obtener un grado de máster para impartir clases de matemática en educación secundaria y bachillerato (estudiantes de 12–18 años). Para ello, deben elaborar un TFM, un trabajo original, autónomo, e individual, que permita al futuro profesor mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias generales del programa de máster. En el TFM, también deben reflexionar y profundizar en el análisis de su propia práctica, posibilitando proponer elementos para su mejora. Los futuros profesores elaboran su TFM luego de un período de prácticas en los centros educativos, donde deben diseñar e implementar una unidad didáctica que, dependiendo de ciertos factores (véase más detalles en la [subsección 5.4.1](#)), puede incluir el trabajo con modelización.

De este modo, dada la importancia de la modelización en el marco de la educación de profesores de matemática, se considera relevante profundizar en las reflexiones que futuros profesores realizaron sobre la inclusión de este proceso durante sus prácticas educativas en un contexto particular de implementación, luego de una situación de contingencia grave. Durante el año 2020, se vivieron momentos complejos a nivel mundial debido a la pandemia por COVID-19, lo cual afectó, entre muchos otros aspectos, a la educación en todos sus niveles (véase una discusión más amplia en Engelbrecht et al., [2023](#)). Ante esta situación, los futuros profesores también vieron afectados sus procesos educativos, como en el caso de sus prácticas, muchas de las cuales se desarrollaron en un contexto de enseñanza virtual a causa de los confinamientos. No obstante, esta situación empezó a cambiar durante el año 2021 en que, paulatinamente, se produjo un retorno a la enseñanza presencial. En este contexto, este estudio pretende mostrar la importancia que tuvo (o no) la modelización para los futuros profesores después de una situación de contingencia grave, donde se priorizaron unos aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que se consideraron relevantes y se relegaron a un segundo plano (o bien, suprimieron) otros aspectos. De esta manera, la gravedad de la contingencia puso de manifiesto la relevancia de la modelización para los futuros profesores.

Este estudio se plantea la pregunta: ¿Qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la

modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza? Para responderla, se analizó la reflexión realizada por futuros profesores en sus TFMs sobre el diseño e implementación de sus unidades didácticas, las cuales implementaron en sus prácticas educativas desarrolladas durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza debido a la pandemia por COVID-19. Esta reflexión se analizó utilizando el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, que es una de las herramientas propuestas por el Enfoque Onto-Semiótico (Godino et al., [2007](#)), y que fue la misma utilizada por los futuros profesores para pautar la reflexión sobre su propia práctica educativa. Específicamente, el foco de análisis estuvo en los TFMs cuyas unidades didácticas incluyeron el trabajo con modelización.

5.3. Marco Teórico

En esta sección se presentan los referentes teóricos para este estudio.

5.3.1. Modelización matemática

En términos generales, el proceso de modelización es entendido como una transición entre el «mundo real» y la «matemática» para la resolución de una situación-problema tomada desde la realidad. Este proceso no debe ser entendido en términos lineales pues, tanto el contexto del problema como los aspectos matemáticos involucrados en la situación, van afectando el modelo matemático definido (Blomhøj, [2004](#)). En el plano teórico se han diseñado diferentes ciclos para explicar este proceso (Borromeo Ferri, [2006](#)), así como también han emergido distintas perspectivas sobre su implementación en el aula (Abassian et al., [2020](#)). Si bien estas diferencias se deben, principalmente, a la diversidad de posturas en torno a la modelización (Borromeo Ferri, [2013](#)), los ciclos propuestos tienden a converger en ciertas fases afines (Geiger et al., [2018](#)). Para este estudio se considera el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß ([2007a](#)) (ver Figura 16), ello porque es el ciclo que se enseña a los futuros profesores en el programa de máster en que se desarrolló esta investigación. Junto con ello, se consideran algunos atributos consensuados que caracterizan el trabajo con modelización en el aula.

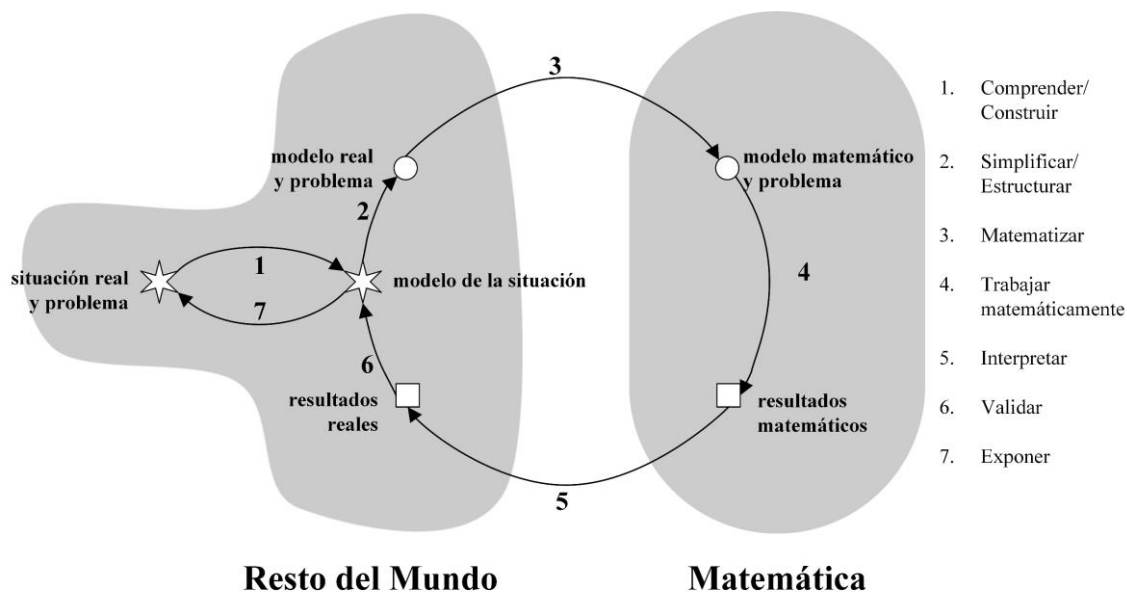


Figura 16. Ciclo de modelización matemática.
 Fuente: Adaptado desde Blum y Leiß (2007a, p. 225).

Un ejemplo ilustrativo de este ciclo se puede encontrar en Blum y Leiß (2007a, pp. 225–227). El tránsito entre las fases del ciclo se desarrolla mediante transiciones o, en términos de K. Maaß (2006), sub-competencias de modelización (numeradas a la derecha de la Figura 16). El trabajo con modelización en el aula se suele desarrollar en pequeños grupos de estudiantes, a quienes se les plantea una situación-problema del mundo real que deben matematizar (Shahbari y Tabach, 2019). Las tareas de modelización involucran un proceso cíclico, con diversos caminos para obtener una solución plausible y coherente con el contexto de la situación planteada (English, 2003). Esta situación, conocida como problema de modelización, debe cumplir con ciertas características consensuadas (Borromeo Ferri, 2018): debe ser *abierta y compleja*, en que su resolución no se limite a una respuesta o procedimiento específicos, y donde los estudiantes deban buscar los datos relevantes; debe ser *realista y auténtica*, incorporando elementos del mundo real y presentando una situación coherente con un hecho que ha ocurrido o que pueda ocurrir en la realidad (Palm, 2007); finalmente, debe ser un *problema* (Schoenfeld, 1994) que se pueda *resolver a través de un proceso de modelización*, lo que implica el uso de todas las fases que componen un ciclo de modelización.

5.3.2. Modelización matemática en la educación de profesores

Como se mencionó anteriormente, la literatura en Didáctica de la Matemática de las últimas décadas ha abordado ampliamente la enseñanza y aprendizaje de la modelización en la educación de profesores.

En el contexto austríaco, Kuntze y colaboradores (2013) estudian las autopercepciones de profesores sobre su *conocimiento del contenido pedagógico* (PCK, por su acrónimo en inglés) relacionado con la modelización, considerando tanto el PCK necesario para ayudar a sus estudiantes durante el proceso de modelización en el aula, como lo que piensan sobre su propio desarrollo profesional a nivel universitario. Los resultados evidenciaron una necesidad de un desarrollo profesional que no sólo abarque el PCK sobre modelización, sino también la enseñanza de estrategias para la autoeficacia pedagógica de los profesores al implementar este proceso, por ejemplo, utilizando herramientas tecnológicas.

En esta misma línea de investigación, un estudio más reciente lo reportan Greefrath y colaboradores (2022) en el contexto alemán, quienes plantean la creación de problemas propios como una estrategia para desarrollar la competencia en modelización en futuros profesores. En el contexto estadounidense, Manouchehri (2017) reporta los esfuerzos por asistir a un grupo de profesores de matemática en servicio para desarrollar conocimientos sobre modelización y su implementación en el currículo escolar. En este estudio se reportan los resultados de 25 de los 85 profesores que participaron de un curso de desarrollo profesional, evidenciando un crecimiento en su conocimiento sobre modelización a partir de los desafíos matemáticos (construcción y trabajo con el modelo matemático), pedagógicos (estrategias para desarrollar este proceso en el aula), y epistemológicos (obstáculos durante el proceso de modelización) que debieron enfrentar en su práctica docente.

Estudios más recientes han ampliado la mirada sobre el rol de la modelización en la educación de profesores, añadiendo herramientas y procesos matemáticos complementarios. Por ejemplo, Albarracín y Ärlebäck (2022) caracterizan las posibles resoluciones a un problema de Fermi a partir de los Esquemas de Resolución de Problemas de Fermi (ERPF), concluyendo que los ERPF pueden ser herramientas que ayuden a los profesores de matemática en el diseño de tareas que promuevan los procesos de resolución de problemas y modelización. En esta misma línea de problemas, Ferrando

y colaboradores (2017) analizan los modelos matemáticos que emergen de la resolución de Problemas de Estimación de Grandes Cantidades, como herramientas para introducir la modelización en educación secundaria.

Otra línea de desarrollo reciente es aquella que integra a la modelización como parte importante de la Educación STEAM. En este contexto, Wiegand y Borromeo Ferri (2023) desarrollan un enfoque integrado para trabajar STEAM con la Educación para un Desarrollo Sostenible, utilizando a la modelización como medio para lograr esta integración. Estas autoras analizan el trabajo desarrollado en un seminario de educación de futuros profesores de educación secundaria, donde enfatizan en el rol de la modelización, discuten sobre las condiciones de entrada (currículo nacional, educadores, y educandos), su influencia en las competencias, objetivos, y contenidos educativos, y cómo este proceso puede contribuir a la Educación para un Desarrollo Sostenible.

Si bien en estos estudios se dan orientaciones para la inclusión de la modelización en la educación de profesores de matemática, junto con la importancia de este proceso para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos, este artículo se centra en la reflexión que realizaron futuros profesores en sus propuestas didácticas durante sus prácticas educativas, utilizando una herramienta que proporciona criterios para reflexionar sobre la mejora de la enseñanza y que, hasta ahora, no ha sido ampliamente aplicada al proceso de modelización.

5.3.3. Criterios de idoneidad didáctica

En la Didáctica de la Matemática, diferentes investigadores han hecho intentos de compilar criterios para guiar la práctica del profesor de matemática para que sea de calidad (véase Hill et al., 2008; Praetorius y Charalambous, 2018; Prediger et al., 2022; entre otros). El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) es uno de los marcos teóricos que ha desarrollado esta línea de investigación, definiendo la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013). Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Este constructo multidimensional se descompone en seis criterios de idoneidad didáctica (CID), cada uno de los cuales cuenta con sus respectivos componentes, y su operatividad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permiten valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso de enseñanza y aprendizaje. En la Tabla 10 se presentan los componentes de los CID con los códigos utilizados en esta investigación para rotularlos, con base en la pauta de Breda y colaboradores (2017).

Tabla 10. Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes.

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la matemática que se enseña es una «buena matemática».	<ul style="list-style-type: none"> – Errores (IE1). – Ambigüedades (IE2). – Riqueza de procesos (IE3). – Representatividad de la complejidad del objeto matemático (IE4).
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes; y después, si los estudiantes aprendieron lo que se pretendía.	<ul style="list-style-type: none"> – Conocimientos previos (IC1). – Adaptación curricular a las diferencias individuales (IC2). – Aprendizaje (IC3). – Alta demanda cognitiva (IC4).
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"> – Interacción docente–discente (II1). – Interacción entre discentes (II2). – Autonomía (II3). – Evaluación formativa (II4).
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	<ul style="list-style-type: none"> – Recursos materiales (IM1). – Número de estudiantes, horario, y condiciones del aula (IM2). – Tiempo (IM3).
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	<ul style="list-style-type: none"> – Intereses y necesidades (IA1). – Actitudes (IA2). – Emociones (IA3).
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	<ul style="list-style-type: none"> – Adaptación al currículo (IEc1). – Conexiones intra e interdisciplinarias (IEc2). – Utilidad sociolaboral (IEc3). – Innovación didáctica (IEc4).

Fuente: Adaptado desde Breda et al. (2017).

Los CID representan una rúbrica (con criterios, componentes, e indicadores) para ayudar a los profesores de matemática a valorar su práctica y guiar un rediseño para la mejora. Sin embargo, los CID son muy diferentes a las guías docentes, cuyo propósito es ayudar a los profesores a dar forma a los procesos de enseñanza y aprendizaje, guiando su acción y toma de decisiones (Remillard, [2018](#)), como aquéllas que acompañan a los textos escolares. A modo de ejemplo, cuando se enseñan los CID a los futuros profesores en el programa de máster en que se contextualiza este estudio, se destaca la importancia de desarrollar una actividad matemática rica en procesos matemáticos (como resolución de problemas, modelización, argumentación, etc.), de manera que se espera logren incluir la mayoría o, al menos, algunos de estos procesos en sus unidades didácticas.

Del mismo modo, se explica que esta actividad matemática requiere que las tareas/problemas propuestos tengan una alta demanda cognitiva, tomando como sustento teórico el trabajo de investigadores en Didáctica de la Matemática que realzan este aspecto (por ejemplo, Stein y Smith, [1998](#)). Por lo tanto, se espera que los futuros profesores incluyan, entre otros, el proceso de modelización en sus unidades didácticas con tareas/problemas que promuevan una alta demanda cognitiva y que, también, como consecuencia de su reflexión, otorguen un peso especial en su propuesta de rediseño a aquellos procesos menos desarrollados. Además, desde la perspectiva de los CID, los componentes «Riqueza de procesos» (del *criterio epistémico*) y «Alta demanda cognitiva» (del *criterio cognitivo*), dos de los aspectos que los futuros profesores deben valorar de su unidad didáctica implementada, reafirman la importancia de incluir procesos relevantes de la actividad matemática.

Los CID son ampliamente utilizados como herramienta teórico-metodológica con diversas finalidades. En primer lugar, para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos diseñados, implementados, y rediseñados por profesores con la finalidad de conseguir una mejora en la enseñanza de la matemática (por ejemplo, Breda, [2020](#); Morales-López y Font, [2019](#); Sousa et al., [2020](#); entre otros). En segundo lugar, para organizar la reflexión de profesores, en formación o en servicio, sobre su propia práctica en programas de formación inicial o continua (por ejemplo, Esqué y Breda, [2021](#); García-Marimón et al., [2021](#); Giacomone et al., [2018](#); entre otros), con la finalidad de estructurar, de forma sistemática, la reflexión de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y los factores implicados en su estudio. Finalmente,

para analizar y valorar las lecciones incluidas en los libros de texto (por ejemplo, Burgos et al., [2020](#)).

El marco teórico del EOS, del cual emergen los CID, aporta herramientas para el análisis, tanto de la actividad matemática subyacente al proceso de modelización (véase Ledezma, Font, y Sala, [2023](#)), como de los conocimientos y competencias del profesor de matemática para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase Pino-Fan et al., [2023](#)). Finalmente, en el EOS se considera que potenciar la modelización es un aspecto que mejora la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (Ledezma, Sol et al., [2022](#)).

5.4. Metodología

En este estudio se siguió una metodología de investigación cualitativa de tipo naturalista (pues no se interfirió en el contexto de investigación) desde un paradigma interpretativo (Cohen et al., [2018](#)), que consiste en un análisis de contenido (Schreier, [2012](#)). En esta sección se explican los aspectos metodológicos del estudio.

5.4.1. Contexto de la investigación

Esta investigación se desarrolló en el contexto del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de matemática), impartido por las universidades públicas de Cataluña (España), durante el año académico 2020–2021.

El programa de estudios del Máster incluye, en el módulo «Complementos de Formación Disciplinar», un submódulo sobre modelización. Este submódulo consta de cuatro sesiones (una por semana) y su metodología, principalmente expositiva, es la siguiente: en la primera sesión se introduce a los futuros profesores en lo que se entiende por modelización y se les presenta el ciclo propuesto por Blum y Leiß ([2007a](#)); durante la segunda y tercera sesión se presentan una serie de ejemplos de problemas de modelización y los futuros profesores deben resolver algunos de éstos en clases; en la cuarta sesión, los futuros profesores deben exponer la tarea final del submódulo frente al curso. Esta tarea consiste en presentar un problema de modelización que incluya el enunciado y la resolución del problema, y la ubicación curricular de los contenidos matemáticos necesarios para su resolución.

Este programa también prescribe, en el módulo «Prácticas», la realización de prácticas educativas en colaboración con las instituciones establecidas mediante convenios con las universidades, y que se encuentren reconocidas como centros de prácticas. El período de prácticas consta de dos fases: una de observación (durante dos semanas de noviembre) y otra de intervención (durante seis semanas desde febrero), ambas desarrolladas bajo la supervisión de un profesor mentor del centro de prácticas. En la fase de intervención, los futuros profesores deben implementar una unidad didáctica que diseñaron previamente, la cual está determinada por el centro de prácticas, el nivel educativo de los estudiantes, y el momento del año escolar en que realicen su intervención. Dada esta situación, si bien se espera que los futuros profesores puedan incluir la modelización, entre otros procesos matemáticos, en la implementación de su unidad didáctica, el margen que tienen para hacerlo está condicionado por los factores antes mencionados, no así en el rediseño que propongan en sus TFM.

Debido al contexto de la pandemia por COVID-19, los futuros profesores del curso 2020–2021 implementaron sus unidades didácticas durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza, por lo que se encontraban expuestos a situaciones como: cierre temporal de los centros educativos y retorno a la enseñanza virtual, a causa de la detección de casos positivos de contagio; formato híbrido de enseñanza (virtual y presencial), para así cumplir con el aforo permitido de estudiantes en sala; formato presencial con grupos reducidos de estudiantes.

5.4.2. Estructura de un trabajo final de máster

Para la obtención del grado de Máster en Formación del Profesorado de Matemática en Educación Secundaria y Bachillerato, los futuros profesores deben elaborar un TFM, el cual debe ser un trabajo original, autónomo, e individual. Para su elaboración se presentan los CID a los futuros profesores, junto con la versión modificada de la pauta de componentes y descriptores de dichos criterios que permite aplicarlos (véase Breda et al., [2017](#)). Con estas herramientas, se les sugiere que valoren en sus TFMs la unidad didáctica que implementaron para que, de este modo, propongan cambios que puedan ayudar a mejorar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. En la Tabla 11 se describen los cinco capítulos que estructuran un TFM.

Tabla 11. Capítulos que estructuran un TFM.

Capítulos	Descripción
Introducción	Presentación del contexto del centro educativo en que se realizó la práctica y los aspectos curriculares de la unidad didáctica implementada.
Análisis de la implementación	Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado, utilizando los CID como herramienta de reflexión sobre la propia práctica. Este capítulo finaliza con la valoración global de la idoneidad didáctica, mediante un gráfico radial de forma hexagonal que se construye a partir de las valoraciones asignadas a cada CID (véase un ejemplo en Ledezma, Breda, y Sánchez, 2021 , p. 237).
Propuesta de rediseño	Propuesta de una reformulación de la unidad didáctica para mejorar su idoneidad didáctica, con base en la reflexión realizada en el capítulo anterior.
Autoevaluación competencial	Autoevaluación de cada competencia de la propuesta de Font y colaboradores (2012), y comparación entre el nivel que cada futuro profesor tenía al comenzar el Máster con el que alcanzó al culminar su proceso educativo.
Anexos	Puede incluir las evidencias de la implementación, la planificación de la unidad didáctica implementada, las referencias citadas, entre otros elementos.

Fuente: Elaboración de los autores.

Aunque un TFM es más que sólo una reflexión escrita sobre la propia práctica educativa, el nivel de habilidades de investigación requeridas es menor que para elaborar una tesis de máster orientada a la investigación. Si bien se alienta a los futuros profesores a justificar las mejoras de sus unidades didácticas rediseñadas con los resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el tema desarrollado en sus prácticas educativas, en general, se citan pocas referencias en los TFMs.

5.4.3. Análisis de contenido

Para este estudio se consideraron 117 TFMs elaborados durante el año académico 2020–2021 y, para su análisis cualitativo, se siguieron unos *pasos* similares a los utilizados por Sánchez ([2021](#)), que se describen a continuación.

En un *primer paso*, de acuerdo con la literatura especializada y el conocimiento de los autores en el tema, se elaboró una lista de palabras clave relacionadas con la modelización (*context, model, problema, real*) para buscar en los TFMs. Estos términos permitieron identificar las referencias sobre modelización en los comentarios valorativos realizados por los futuros profesores en sus TFMs.

En un *segundo paso* se registraron los datos (autor, título, nivel educativo, contenido matemático) de cada TFM. La organización de los contenidos matemáticos se realizó con base en las directrices curriculares para educación secundaria (Departament d’Educació, 2019) y bachillerato (Departament d’Ensenyament, 2008) de Cataluña (España), los cuales se agruparon en siete áreas temáticas: Álgebra, Estadística, Funciones, Geometría, Números, Probabilidades, y Trigonometría. Este *segundo paso* permitió contar con una base de datos⁴⁴ ordenada para consultar los TFMs y, de este modo, llevar un primer registro de cuáles incluyeron las palabras clave definidas en el *primer paso*.

Al revisar la base de datos elaborada en el *segundo paso*, se pudo observar una regularidad en la distribución de las palabras clave dentro de los TFMs. Es decir, se encontraron TFMs que no incluían las palabras clave; TFMs que incluían las palabras clave, principalmente, en los capítulos *Análisis de la implementación y/o Propuesta de rediseño*; y TFMs que incluían las palabras clave a lo largo de todo el documento. Dada esta situación se decidió, en un *tercer paso*, clasificar los TFMs de acuerdo con cuatro niveles de referencia a la modelización que se pudieron identificar en estos documentos, como se describe en la Tabla 12.

Tabla 12. Niveles de referencia a la modelización matemática.

Niveles	Descripción
Nivel 0 (N ₀)	Incluye los TFMs que no hicieron referencia a los términos relacionados con la modelización, es decir, que no consideraron el trabajo con este proceso en las unidades didácticas implementadas, o que incluyeron algunas de las palabras clave establecidas, pero sin relacionarse directamente con la modelización.
Nivel 1 (N ₁)	Incluye los TFMs que, aunque no consideraron el trabajo con modelización en las unidades didácticas implementadas, sí plantearon su inclusión en la propuesta de rediseño. Concretamente, en N ₁ se incluyeron los TFMs que sólo contenían comentarios sobre modelización en el capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> .
Nivel 2 (N ₂)	Incluye los TFMs que plantearon problemas de modelización en las unidades didácticas implementadas, a la vez que reflexionaron sobre la implementación de estos problemas, pero que no propusieron mejoras en su rediseño para potenciar este proceso. Concretamente, en N ₂ se incluyeron los TFMs que sólo contenían comentarios valorativos sobre modelización (utilizando los CID) en el capítulo <i>Análisis de la implementación</i> , pero que no propusieron cambios concretos para mejorar este proceso en el capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> .

⁴⁴ La base de datos elaborada para este artículo se presenta en el/The database prepared for this article is presented in [Anexo 5 – Annex 5](#).

Niveles	Descripción
Nivel 3 (N ₃)	Incluye los TFMs similares a los clasificados en N ₂ , pero que sí plantearon mejoras en su rediseño para potenciar la modelización. Concretamente, en N ₃ se incluyeron los TFMs que contenían comentarios valorativos sobre modelización (utilizando los CID) en el capítulo <i>Análisis de la implementación</i> , y que también propusieron cambios concretos (además de comentarios) para mejorar este proceso en el capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> .

Fuente: Elaboración de los autores.

Durante este *tercer paso*, una vez establecidos los cuatro niveles de referencia a la modelización en la Tabla 12, los autores realizaron una triangulación de la siguiente manera: primero, cada autor clasificó los TFMs según estos niveles; segundo, se compararon las clasificaciones realizadas por cada autor, logrando un porcentaje de acuerdo del 98% entre los tres; finalmente, se discutieron las diferencias de clasificación y se logró un consenso, dada la experiencia de los autores en este tipo de análisis.

En un *cuarto paso* se categorizaron los comentarios referidos a la modelización utilizando los CID. Diversos estudios han abordado el tema de la reflexión docente en los procesos de educación de profesores de matemática – por ejemplo, Breda (2020), desde el análisis didáctico; Hidalgo-Moncada y colaboradores (2023), desde el aprendizaje autorregulado; Sánchez y colaboradores (2022), desde el desarrollo de la creatividad; entre otros – utilizando una metodología de análisis de contenido para evidenciar el uso de los componentes de los CID. En esta investigación, estos componentes se consideraron como categorías apriorísticas (Schreier, 2012), para así identificar los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que los futuros profesores relacionaron con la modelización. Para efectos del análisis de contenido de los TFMs, en este *cuarto paso* se consideraron los comentarios valorativos del capítulo *Análisis de la implementación* de los documentos clasificados en los niveles N₂ y N₃, puesto que son los que contienen reflexiones de los futuros profesores sobre modelización en su implementación. Debido al acuerdo alcanzado por los autores durante el *tercer paso*, este *cuarto paso* se condujo sin discrepancias, ya que es un hecho objetivo que la valoración de un determinado componente de los CID en cada TFM contenga (o no) un comentario valorativo sobre modelización.

En la Tabla 13 se ejemplifica cómo se aplicaron los cuatro *pasos* del análisis de contenido a los TFMs #004, #035, #062, y #100. La elección de estos cuatro TFMs se justifica en que cada uno fue clasificado en un nivel distinto de referencia a la modelización.

Tabla 13. Ejemplos de análisis de contenido con los TFM #004, #035, #062, y #100.

Análisis de contenido	Contenido analizado
TFM #004	
<i>Primer paso</i>	No se identificaron las palabras clave en el documento.
<i>Segundo paso</i>	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de la medida en el primer curso de educación secundaria (estudiantes de 12–13 años).
<i>Tercer paso</i>	No se identificaron comentarios valorativos sobre modelización ni referencias a las palabras clave definidas. Por lo tanto, este TFM se clasificó en N ₀ .
<i>Cuarto paso</i>	–
TFM #035	
<i>Primer paso</i>	Se identificaron las palabras clave «modelizar» y «problemas».
<i>Segundo paso</i>	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría vectorial en el segundo curso de bachillerato (estudiantes de 17–18 años).
<i>Tercer paso</i>	No se encontraron comentarios valorativos sobre modelización (usando los CID) dentro del capítulo <i>Análisis de la implementación</i> . Se encontró el siguiente comentario dentro del capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> : “Con esto pretendo que los alumnos profundicen en su autonomía, sean capaces de modelizar los problemas en el lenguaje matemático, y/o hagan representaciones matemáticas” (p. 24). Por lo tanto, este TFM se clasificó en N ₁ .
<i>Cuarto paso</i>	–
TFM #062	
<i>Primer paso</i>	Se identificaron las palabras clave «modelizar», «contexto», y «real».
<i>Segundo paso</i>	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en el tercer curso de educación secundaria (estudiantes de 14–15 años).
<i>Tercer paso</i>	Se encontraron comentarios sobre modelización en la valoración de los CID dentro del capítulo <i>Análisis de la implementación</i> . No se encontraron comentarios para mejorar el trabajo con modelización en el capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> . Por lo tanto, este TFM se clasificó en N ₂ .
<i>Cuarto paso</i>	Entre otros, se encontró el siguiente comentario dentro de la valoración del componente IEc2: “las actividades realizadas requerían entender e interpretar un problema en un contexto real, demostrando la utilidad en la vida diaria” (p. 24).
TFM #100	
<i>Primer paso</i>	Se identificaron las palabras clave «modelización» y «contexto».
<i>Segundo paso</i>	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en el cuarto curso de educación secundaria (estudiantes de 15–16 años).
<i>Tercer paso</i>	Se encontraron comentarios sobre modelización en la valoración de los CID dentro del capítulo <i>Análisis de la implementación</i> . Se encontró una propuesta de nuevos problemas de modelización dentro del capítulo <i>Propuesta de rediseño</i> . Por lo tanto, este TFM se clasificó en N ₃ .

Análisis de contenido	Contenido analizado
<i>Cuarto paso</i>	Entre muchos otros, se encontró el siguiente comentario en la valoración del componente IC4: “Respecto a la activación de procesos cognitivos relevantes, [...], las diferentes actividades de la unidad se han propuesto para trabajar ciertos procesos matemáticos complejos, como los cambios de representación, [...], la modelización, la argumentación, [...], etc.” (p. 10). También, se encontró el siguiente comentario dentro de la valoración del componente IM1: “Finalmente, en cuanto a los recursos manipulativos, éstos estuvieron presentes en la actividad final de modelización, donde se aprovecharon los termómetros electrónicos del instituto para tomar datos de temperatura de diferentes objetos y realizar la tabla de valores” (p. 14).

Fuente: Elaboración de los autores.

Con respecto al *cuarto paso* del análisis de contenido, se considera importante aclarar que un TFM puede incluir más de una frase/oración con referencias a los términos relacionados con la modelización dentro de la valoración de un componente específico de los CID. Por ejemplo, en la valoración del componente «Riqueza de procesos» (IE3) se pudieron encontrar las definiciones de los procesos «modelización» y «resolución de problemas» distribuidas, ya sea en dos celdas dentro de una tabla, en dos oraciones distintas dentro de un mismo párrafo, o en dos párrafos disjuntos dentro de la valoración de este componente. A raíz de esta situación, se decidió considerar como «un comentario» al conjunto de estas frases/oraciones que incluyeron términos relacionados con la modelización en la valoración de cada CID.

5.5. Presentación y Análisis de Resultados

En esta sección se presentan (subsecciones [5.5.1](#) y [5.5.2](#)) y analizan (subsecciones [5.5.3](#) y [5.5.4](#)) los principales resultados del análisis de contenido realizado sobre los TFMs.

5.5.1. Clasificación de los TFMs según los niveles de referencia a la modelización

A partir de la búsqueda de palabras clave en los 117 TFMs (*primer paso* del análisis de contenido), un primer resultado es que se encontraron términos afines con la modelización en 87 de estos TFMs. Luego de registrar cada TFM (*segundo paso* del análisis de contenido) se procedió a su clasificación según los niveles de referencia a la modelización (*tercer paso* del análisis de contenido), y así se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 14.

Tabla 14. Número de TFMs según los niveles de referencia a la modelización matemática.

Niveles de referencia	Número de TFMs	Porcentajes*
N ₀	30	25,6%
N ₁	47	40,2%
N ₂	24	20,5%
N ₃	16	13,7%
Total	117	100%

Nota (*): Porcentajes redondeados a la primera cifra decimal. Fuente: Elaboración de los autores.

La Tabla 14 presenta una noción sobre el uso de los términos afines con la modelización en los TFMs analizados y la importancia que los futuros profesores le dieron a este proceso dentro de sus unidades didácticas. En este sentido, 30 TFMs no incluyeron referencias directamente relacionadas con la modelización (TFMs clasificados en N₀), y 47 TFMs, si bien no incluyeron este proceso en las unidades didácticas implementadas, sí lo consideraron para sus propuestas de rediseño (TFMs clasificados en N₁). Estos 77 TFMs no fueron considerados en los análisis posteriores, ya que no se encontraban en consonancia con los objetivos de este estudio.

De este modo, un segundo resultado es que 40 de los 117 TFMs contenían la reflexión de los futuros profesores sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas (correspondientes a los niveles de referencia N₂ y N₃). Los resultados que se presentan en la siguiente subsección (*cuarto paso* del análisis de contenido) incluyen el análisis de estos 40 TFMs.

5.5.2. Clasificación de los comentarios de los TFMs según los componentes de los CID

A partir de la clasificación presentada en la Tabla 14 (*tercer paso* del análisis de contenido), se procedió a categorizar los comentarios valorativos⁴⁵ relacionados con la modelización de acuerdo con el componente de los CID sobre el que los futuros profesores reflexionaron cuando hicieron el comentario (*cuarto paso* del análisis de contenido). De este modo, se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 15.

⁴⁵ Los comentarios valorativos analizados en este artículo se presentan en el/The evaluative comments analysed in this article are presented in [Anexo 6 – Annex 6](#).

Tabla 15. Número de comentarios sobre modelización matemática según los componentes de los CID.

Componentes	Nro. de comentarios	Componentes	Nro. de comentarios	Componentes	Nro. de comentarios	Componentes	Nro. de comentarios	Componentes	Nro. de comentarios	Componentes	Nro. de comentarios
IE1	0	IC1	4	II1	0	IM1	8	IA1	23	IEc1	3
IE2	2	IC2	2	II2	3	IM2	0	IA2	1	IEc2	13
IE3	38	IC3	4	II3	3	IM3	1	IA3	0	IEc3	17
IE4	8	IC4	10	II4	1					IEc4	7
Total	48	Total	20	Total	7	Total	9	Total	24	Total	40

Nota: Se utilizaron los códigos de los componentes de la Tabla 10. Fuente: Elaboración de los autores.

A partir de la categorización de la Tabla 15 (*cuarto paso* del análisis de contenido) se tienen dos resultados. En primer lugar, se identificaron 148 comentarios referidos explícita o implícitamente a la modelización en los 40 TFMs considerados en este análisis. Sobre este aspecto, no se considera relevante atribuir un número fijo de comentarios identificados a cada TFM ya que, por ejemplo, un documento podía incluir comentarios relacionados con la modelización en diez componentes de los CID diferentes y otro podía incluir comentarios en sólo tres componentes. Dado que este tipo de refinamiento de datos no aportaba riqueza al estudio, ha sido excluido de los análisis realizados. En segundo lugar, en cuanto a los CID privilegiados en la reflexión de los futuros profesores, se identificó una mayor concentración de comentarios en el *criterio epistémico*, seguido por el *criterio ecológico*. Estos resultados se analizan en las dos subsecciones siguientes.

5.5.3. Sobre los TFMs con referencias a la modelización matemática

A partir de la base de datos generada en el *segundo paso*, y de la clasificación de los comentarios realizada en el *tercer paso*, en la Tabla 16 se presentan: (a) los contenidos matemáticos abordados por las unidades didácticas de los TFMs; (b) el número de TFMs que implementaron la modelización, según el contenido matemático y el nivel educativo en que se desarrollaron las prácticas educativas; (c) el número de TFMs que no implementaron este proceso; y (d) el total de unidades didácticas para cada contenido matemático.

Tabla 16. Contenidos matemáticos y niveles educativos en que se implementó (o no) la modelización.

Contenidos matemáticos	Ed. Secundaria				Bachillerato		S/impl.	Total
	1º	2º	3º	4º	1º	2º		
Álgebra	1	2	2	3	0	0	14	22
Estadística	0	0	0	0	1	0	9	10
Funciones	0	0	6	3	1	0	6	16
Geometría	1	4	6	0	0	0	26	37
Números	1	0	0	0	1	0	13	15
Probabilidades	0	0	1	1	0	0	2	4
Trigonometría	0	0	0	6	0	0	7	13
Total	3	6	15	13	3	0	77	117

Nota: S/impl. = Sin implementación de la modelización. Fuente: Elaboración de los autores.

Como se mencionó en la [subsección 5.4.1](#), entre los factores determinantes para el desarrollo de las prácticas educativas se encuentra el nivel educativo de los estudiantes y el momento del año escolar en que los futuros profesores realicen su intervención en las instituciones educativas; es decir, ambos factores determinaron el contenido matemático de las unidades didácticas y su elección no dependía de los futuros profesores. Sobre el nivel educativo de los estudiantes, la Tabla 16 muestra que, en casi todos los niveles educativos, en mayor o menor medida, los futuros profesores implementaron la modelización en sus unidades didácticas, centrándose en los cursos 3º (estudiantes de 14–15 años) y 4º (estudiantes de 15–16 años) de educación secundaria. Sobre el momento del año escolar, en el contexto de este estudio, las prácticas educativas se desarrollaron durante seis semanas desde febrero de 2021 (período febrero–abril, aproximadamente).

La Tabla 16 también muestra que los contenidos matemáticos más utilizados para implementar la modelización, en casi igual número, fueron Geometría y Funciones, seguidos por Álgebra y Trigonometría. Sobre el contenido Geometría es evidente que, en comparación con el número total de unidades didácticas que lo abordaron (37), menos de un tercio de éstas (11) implementó la modelización para su enseñanza. Este resultado se condice parcialmente con los hallazgos de Girnat y Eichler (2011), en el sentido que los profesores tienden a no considerar la enseñanza de la geometría como un contenido ligado a la modelización. Por el contrario, se evidenció una tendencia a utilizar la modelización para la enseñanza del contenido Funciones por parte de los futuros profesores. Concretamente, en comparación con el número total de unidades didácticas que abordaron este contenido (16), en alrededor de dos tercios de éstas (10) se implementó la modelización. Este resultado se condice con la postura de Michelsen (2006), quien

destaca el rol de las funciones como una herramienta para desarrollar la modelización en el aula.

5.5.4. Sobre los comentarios valorativos acerca de la modelización matemática

El *cuarto paso* del análisis de contenido evidenció los componentes de los CID en que los futuros profesores hicieron explícitas sus reflexiones sobre la implementación de la modelización mediante comentarios evaluativos. Como se mencionó en la [subsección 5.4.2](#), los futuros profesores valoran la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado en el capítulo *Análisis de la implementación* del TFM, utilizando para ello los CID. Más específicamente, los futuros profesores realizan comentarios valorativos en cada componente de los CID, en donde reflexionan, entre otros aspectos, sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas. De este modo, se identificó que los 40 TFMs (véase los niveles N₃ y N₄ en la Tabla 14) que incluyeron la modelización en sus unidades didácticas concentraron el mayor número de comentarios en los *criterios epistémico* y *ecológico*. En esta subsección se analizan estos comentarios valorativos, pues son evidencia de la reflexión de los futuros profesores sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas.

En el *criterio epistémico* se encuentra el componente «Riqueza de procesos⁴⁶» (IE3), el cual fue el que reunió el mayor número de comentarios sobre modelización. Esto se debió a que fue el componente donde se definieron y ejemplificaron los procesos trabajados durante la unidad didáctica implementada. Un aspecto que llama la atención en la valoración de este componente es la diversidad de definiciones sobre este proceso que se encontraron en los TFMs analizados, como se muestra en la Tabla 17 con tres ejemplos representativos.

El TFM #010⁴⁷ es representativo de una situación minoritaria de algunos documentos, en que se utilizó un referente teórico concreto para justificar la inclusión de la modelización en la unidad didáctica como, en este caso, la *matematización horizontal* de Freudenthal (1991). Este concepto se define como la traducción del lenguaje natural al matemático (matematización) que “va desde el mundo de la *vida* al mundo de los *símbolos*”

⁴⁶ La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes de la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.) (Breda et al., 2017).

⁴⁷ Véase un análisis en extenso del TFM #010 en Ledezma, Breda, y Sánchez (2021).

Tabla 17. Definiciones de modelización matemática encontradas en los TFM #010, #026, y #039.

TFM	Definición o comentario
#010	Modelización (matematización horizontal de Freudenthal, 1991): Usar representaciones matemáticas para modelizar e interpretar situaciones. (p. 9)
#026	Razonamiento y prueba (dimensión) – Modelar (proceso): Traducir la realidad en un modelo matemático y viceversa. Muchos de los problemas que hemos realizado son modelizaciones. (p. 8)
#039	Representar y modelar: Incluye estructurar la situación que se ha de modelar; traducir la “realidad” en una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados. (p. 10)

Fuente: Elaboración de los autores.

(Freudenthal, [1991](#), p. 41, traducción de los autores). No obstante, la anexión de un referente teórico adicional para justificar la inclusión de la modelización no tuvo mayor influencia en los análisis de las implementaciones de las unidades didácticas.

También el TFM #026 es representativo de otra situación común, en que se comentó sobre la modelización como si este proceso consistiera sólo en la traducción de un enunciado desde el lenguaje natural a una representación matemática, lo cual sugiere una doble interpretación. Por una parte, que algunos futuros profesores tendieron a reducir el proceso de modelización a la idea de *matematización horizontal* de Freudenthal ([1991](#)), sin considerar las demás fases del ciclo de modelización. De acuerdo con la clasificación propuesta por K. Maaß ([2010](#)), este tipo de tareas se puede considerar como aquéllas enfocadas sólo en el desarrollo de la sub-competencia de matematización (véase Figura 16, nro. 3), pero no en el desarrollo del proceso de modelización en su totalidad. Por otra parte, se interpreta que algunos futuros profesores tendieron a superponer el proceso de modelización con el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica (en términos de Duval, [2017](#)) de los objetos matemáticos involucrados en este tipo de problemas.

Finalmente, el TFM #039 es representativo de otra situación común, en que se aportaron definiciones más detalladas del proceso de modelización (similar a la de Geiger et al., [2018](#)), pero sin citar la fuente desde donde se extrajo la definición. Esto se debe a que, dado que un TFM no se orienta a la investigación, sino a la reflexión sobre la propia práctica, los futuros profesores no siempre cumplen con las normas de citado o de elaboración de una lista de referencias en sus trabajos.

En el *criterio ecológico* se encuentran los componentes «Conexiones intra e interdisciplinarias⁴⁸» (IEc2) y «Utilidad sociolaboral⁴⁹» (IEc3), los cuales también reunieron varios comentarios sobre modelización. Esto se debió a que los futuros profesores tendieron a superponer el contenido de las valoraciones de ambos componentes cuando se refirieron a dotar de utilidad a la matemática en un contexto extra-matemático. En este sentido, los comentarios apuntaron hacia la modelización como una herramienta para relacionar la matemática, tanto con los contenidos curriculares de otras asignaturas (especialmente, física, y biología) como con el contexto de los estudiantes (problemas de su entorno sociolaboral). Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en las valoraciones de ambos componentes:

A lo largo de la UD [Unidad Didáctica] se ha intentado conectar las actividades con las matemáticas y otras disciplinas; las actividades realizadas propiciaban entender e interpretar un problema en un contexto real, demostrando la utilidad [de la matemática] en la vida diaria. (valoración del componente IEc2; TFM #062, p. 24, traducción de los autores)

Con la actividad L3, donde el alumnado tenía que calcular la tarifa telefónica más justa, se intentó fomentar una matemática crítica, que sirviese para resolver problemas reales. Ahora bien, al final se les pidió que reflexionaran sobre si era tan sencillo como lo habían modelizado o si había otros factores para tener en cuenta (tarifas de datos, SMS, segundas líneas...), y si todo era cuantificable de forma universal (¿cuánto estamos dispuestos a pagar por tener una buena cobertura?, ¿y por una buena atención al cliente?) [...]. La mayoría del alumnado respondió positivamente a la reflexión de esta actividad, proponiendo muchos aspectos para tener en cuenta. (valoración del componente IEc3; TFM #075, p. 17, traducción de los autores)

⁴⁸ Los contenidos enseñados se relacionan con otros temas matemáticos (más avanzados o del mismo nivel educativo), o bien con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemático o de otras asignaturas del mismo nivel educativo) (Breda et al., [2017](#)).

⁴⁹ Los contenidos son útiles para la inserción sociolaboral (Breda et al., [2017](#)).

Si bien los *criterios epistémico y ecológico* concentraron la mayor cantidad de comentarios relacionados con la modelización, también se debe hacer una mención especial a los *criterios afectivo y cognitivo*, que se ubicaron en un segundo plano.

En el *criterio afectivo* se encuentra el componente «Intereses y necesidades⁵⁰» (IA1), donde los comentarios destacaron que los problemas de modelización, al estar *contextualizados* y ser *realistas*, captaron (o intentaron captar) la atención de los estudiantes, debido a que algunos de éstos aprovecharon el contexto del COVID-19 como tema central de sus enunciados. Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en la valoración de este componente:

Las actividades propuestas durante la unidad didáctica estaban pensadas para motivar al alumnado y despertar su interés, ya que buscaban trabajar las matemáticas en contextos reales, para que le encontraran utilidad tanto en la vida cotidiana como en el mundo profesional. Sin embargo, considero que podría haber contextualizado más algunas de las actividades o proponerlas más enfocadas en aplicaciones reales, o para una realidad de adolescentes de 14–15 años. (TFM #053, p. 22, traducción de los autores)

Algunas de las actividades incluidas, como “Modelización de la pandemia” [...], tenían una relación directa con la realidad inmediata de los estudiantes. Creemos que eso los ayudó a establecer relaciones entre los conceptos trabajados y la vida cotidiana. (TFM #094, p. 14, traducción de los autores)

En el *criterio cognitivo* se encuentra el componente «Alta demanda cognitiva⁵¹» (IC4), donde los comentarios destacaron que los problemas de modelización implementados posibilitaron trabajar otros procesos relevantes de la actividad matemática. Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en la valoración de este componente:

⁵⁰ La selección de tareas es de interés para los estudiantes y se proponen situaciones que permiten valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional (Breda et al., 2017).

⁵¹ Se activan procesos cognitivos relevantes en la actividad matemática (generalización, conexiones intramatemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) y se promueven procesos metacognitivos (Breda et al., 2017).

La demanda cognitiva, sin embargo, va condicionada por la vertebración de la unidad didáctica con problemas basados en procesos de modelización. Es en estos problemas donde la demanda cognitiva al estudiante es más alta. [...]. Más allá de la conversión, los problemas de modelización permiten proponer al estudiante resolver situaciones concretas, de forma que tienen que plantear diferentes situaciones o tesis y comprobarlas a partir del modelo (argumentación matemática). [...]. También es importante notar que en el proceso de modelización se tiene un primer par de generalización y abstracción al construir y expresar el modelo, pero también un ejercicio de concreción cuando deben interpretarse los resultados matemáticos para sacar conclusiones en el contexto del problema (contextualización). [...]. Es entonces, gracias a los problemas de modelización, que se puede presentar esta riqueza de matices en la definición de la función y poder ejemplificar por qué sirve tenerlos en cuenta. Este proceso requiere una demanda cognitiva alta. (TFM #033, pp. 9–10, traducción de los autores)

La exigencia en cuanto a procesos cognitivos y de razonamiento de esta secuencia didáctica está directamente relacionada, sobre todo, con el ámbito de la resolución de problemas. En este sentido, toma especial importancia el concepto de modelización. (TFM #041, p. 14, traducción de los autores)

Dentro de la valoración del componente IC4, el autor del TFM #033 se refirió al siguiente problema de modelización como ejemplo de tarea con una alta demanda cognitiva:

Imagina que quieres ir de tu casa a la playa más cercana para pasar el fin de semana. Mira qué distancia separa tu casa de esa playa y anótala, adjuntando una captura de pantalla o fotografía del mapa que te permitió medir la distancia. Suponiendo que te encuentras con retenciones en la carretera que duran tres horas, ¿cuál es el consumo de combustible para que vayas de tu casa a la playa y

cuánto dinero te costará? (TFM #033, p. 79, traducción de los autores)

El enunciado anterior corresponde al rediseño de una tarea de modelización contextualizada en el consumo de combustible de un automóvil durante un viaje familiar a la playa, dentro de una propuesta interdisciplinaria entre matemática y física. Si bien los estudiantes contaban con las fórmulas de consumo de combustible en diferentes contextos (consumo estándar, en ralentí, y en movimiento), este enunciado se caracteriza por ser *abierto* y *complejo*, dado que requiere que los estudiantes formulen sus propios datos para poder resolver la tarea; también, es *realista* y *auténtico*, pues la apertura del problema permite que la información se adecúe al contexto de cada estudiante, con variables como el precio por litro de combustible en su ciudad, los datos de consumo del vehículo familiar, la distancia desde su hogar hasta una playa de libre elección. Dado que este enunciado se condice con las características mencionadas en la [subsección 5.3.1](#), se puede considerar como un *problema que es solucionable mediante un ciclo de modelización*.

Finalmente, los *criterios interaccional* y *mediacional* fueron los que menos comentarios incluyeron sobre modelización. Debido a las medidas sanitarias de distanciamiento social y aforo limitado de las salas de clase, los futuros profesores comentaron que no privilegiaron el trabajo colaborativo entre sus estudiantes, como se sugiere para las actividades de modelización (véase [subsección 5.3.1](#)) lo que, claramente, afectó al *criterio interaccional*. Los escasos comentarios valorativos en este *criterio* apuntaron, principalmente, a que las actividades de modelización propiciaron un ambiente de interacción entre los estudiantes (componente «Interacción entre discentes⁵²» [II2]) junto con la autonomía de su trabajo (componente «Autonomía⁵³» [II3]).

Por su parte, los comentarios sobre modelización encontrados en el *criterio mediacional* se centraron, casi en su totalidad, en la valoración del componente «Recursos materiales⁵⁴» (IM1), en que destacaron el uso de softwares de geometría dinámica

⁵² Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión (Breda et al., 2017).

⁵³ Se contemplan momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación, y validación) (Breda et al., 2017).

⁵⁴ Uso de materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, y argumentaciones, todos éstos adaptados al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas, usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones (Breda et al., 2017).

(GeoGebra, Desmos, Transum, etc.) para el trabajo con modelización. Este último resultado coincide, parcialmente, con los hallazgos de Chan y Leung (2014), quienes destacan el uso del software de geometría dinámica para el aprendizaje de la matemática, aunque las reflexiones de los futuros profesores no le atribuyeron un rol más que como un medio de soporte para la modelización.

5.6. Discusión y Conclusiones

El análisis de contenido realizado a los 117 TFMs del año académico 2020–2021, en el contexto de un programa de máster para la educación de profesores de matemática, permitió evidenciar las decisiones que los futuros profesores tomaron, tanto durante su período de prácticas educativas como en las propuestas de mejora derivadas de la reflexión realizada en sus TFMs sobre la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas.

El primer aspecto para destacar de estos resultados es que alrededor de un 65% de estos futuros profesores no incluyeron la modelización como un proceso relevante en sus unidades didácticas (véase los niveles N_0 y N_1 en la Tabla 14). Se descarta la explicación de que ellos no tenían los conocimientos sobre modelización y su inclusión en el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, dado que el programa de máster en que se contextualiza este estudio dedica un submódulo específicamente a la enseñanza de este proceso (véase [subsección 5.4.1](#)). También, se descarta como explicación el hecho que la pandemia por COVID-19 haya sido un contexto que no propiciara la modelización, pues los medios de comunicación incluyeron información que permitía diseñar tareas/problemas de modelización, así como modelos para representar la evolución de la pandemia, lo cual hizo que la modelización adquiriera un valor social relevante.

No obstante, una explicación plausible es que, en términos de los CID, un profesor debe procurar *a priori* que se cumplan al máximo estos *criterios*; sin embargo, el contexto de implementación le obliga a tomar decisiones sobre qué aspectos debe priorizar, relegar a un segundo plano o, simplemente, omitir. En el caso de este estudio, si bien uno de los indicadores del componente «Riqueza de procesos» da importancia al desarrollo del proceso de modelización en el aula, el retorno a la enseñanza presencial hizo que estos futuros profesores priorizaran otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático como, por ejemplo, el sistema de trabajo del centro de prácticas (recuperación

de contenidos tras el período de confinamientos), el tiempo del que disponían, otros procesos relevantes de la actividad matemática, etc. Estos resultados son coherentes con otras investigaciones que han puesto de manifiesto las dificultades para incluir la modelización en el aula (por ejemplo, Niss, [2001](#)), dada la complejidad de los aspectos que un profesor debe tomar en consideración al implementar una clase.

El segundo aspecto para destacar concierne al casi 35% restante de estos futuros profesores. A pesar de que este programa de máster incluye un submódulo sobre modelización en que se presenta el ciclo propuesto por Blum y Leiß ([2007a](#)), no se hallaron referencias en los TFM sobre el uso de este ciclo (ni de ningún otro) para efectuar análisis sobre los problemas implementados o propuestos en el rediseño, y que se consideraron como *problemas de modelización*. Es decir, los futuros profesores afirmaban que habían implementado la modelización en sus unidades didácticas, aunque en sus reflexiones no se apoyaban en un ciclo de modelización para justificar tal afirmación.

Una explicación plausible es que, además del retorno a la enseñanza presencial que se comentó anteriormente, dado que un TFM es un trabajo autónomo, la reflexión sobre la modelización, desde una perspectiva teórica o no, es una decisión que toma el autor del TFM en acuerdo con su tutor y que, seguramente, tiene en consideración, entre otros aspectos, las restricciones de tiempo y número de páginas para su elaboración. Además, como se mencionó en la [subsección 5.4.2](#), el TFM tiene por finalidad que el futuro profesor reflexione sobre su propia práctica, lo cual no implica, obligatoriamente, una reflexión desde una perspectiva netamente teórica.

El tercer aspecto para destacar es que, con base en la evidencia de los TFM analizados, para la mayoría de estos futuros profesores, dada una situación matemática o extra-matemática, encontrar un objeto matemático del cual la situación sea una instanciación, fue considerado como modelización. En este sentido, este proceso se entendió como la relación entre un objeto matemático general y un caso particular, que pudo ser o no una situación extra-matemática. Por otra parte, también hubo casos en los que *modelizar* se consideró como un *cambio de modelo de representación*, en términos semióticos. Una explicación plausible es que, en el programa de máster en que se contextualiza este estudio, no se realizó una reflexión general sobre la noción de proceso matemático, sus diferentes tipos, y las relaciones y diferencias entre ellos, ya que sólo se priorizó un

trabajo específico con la modelización y la resolución de problemas en los submódulos respectivos.

Por una parte, esta situación se contradice con la postura de Font y Rubio (2016), quienes justifican la importancia de realizar un trabajo general con los procesos matemáticos y no sobre procesos específicos. Por otra parte, estos resultados se condicen parcialmente con el estudio de Villa-Ochoa (2015), en el sentido que los profesores tienden a plantear enunciados, considerados como *problemas de modelización*, que sólo evalúan las habilidades de los estudiantes para registrar, mediante una expresión simbólica, una relación matemática revestida en un problema verbal relativamente realista. Este aspecto, en particular, refuerza el estudio de Kuntze y colaboradores (2013) en cuanto al énfasis de un desarrollo profesional docente en modelización para mejorar su implementación en el aula.

El cuarto aspecto para destacar es que se evidenció, en el proceso de revisión de la reflexión que hicieron los futuros profesores, que sus tutores no les hicieron darse cuenta de que, para afirmar que se implementó el proceso de modelización en una unidad didáctica, como mínimo, es necesario que el problema planteado a los estudiantes cumpla con las características descritas en la [subsección 5.3.1](#), como el caso del problema presentado en la [subsección 5.5.4](#). Esta debilidad en la retroalimentación se manifestó, por ejemplo, en algunos TFMs que adoptaron una definición de modelización más cercana a la de matematización (como el caso del TFM #026 en la Tabla 17), donde los futuros profesores declararon que habían implementado la modelización al plantear problemas de este tipo que no son de modelización como tal. Por lo tanto, el proceso de retroalimentación para elaborar un TFM sería un aspecto que el programa de máster donde se desarrolló este estudio podría mejorar, teniendo en cuenta los resultados de esta investigación.

Finalmente, se encontraron algunos TFMs en que los futuros profesores debieron reducir la duración de los tiempos destinados para una actividad de modelización e, incluso, eliminar algunas sesiones. Esto se debió, en gran parte, a limitantes puestas por los centros de prácticas, como la recuperación de contenidos no abordados durante el período de confinamiento, recomendaciones de los profesores mentores sobre la complejidad de estos problemas, o actividades extracurriculares. Un ejemplo paradigmático de esta situación fue el TFM #033, donde el futuro profesor tenía previsto desarrollar una

actividad de modelización durante una hora de taller práctico, pero que debió desplazar para otra sesión de su unidad didáctica y, además, reducir su calidad matemática por recomendaciones de su profesora mentora⁵⁵.

En términos de los CID, este quinto aspecto guarda cierta relación con el primero que se destacó, con la diferencia que aquí los futuros profesores sí consideraron *a priori* la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas. Sin embargo, dado que al final este proceso se suprimió o redujo a su mínima expresión, esta importancia de la modelización puede haber sido menor que otros aspectos como, por ejemplo, explicar los contenidos conceptuales que estaban previstos en el currículo.

Retomando la pregunta de investigación sobre qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza, la principal conclusión es que ellos relacionaron los aspectos *epistémico* y *ecológico* (y, en menor medida, el *cognitivo* y el *afectivo*) al trabajo con este proceso en el contexto de este estudio.

En términos generales, los resultados de este estudio evidenciaron que el retorno a la enseñanza presencial influyó, principalmente, en dos aspectos sobre estos futuros profesores. Por una parte, el COVID-19 aportó un contexto realista y auténtico para plantear tareas/problemas de modelización cercanos a los estudiantes; aunque, por otra parte, representó un cambio a nivel mundial en la forma de retomar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Engelbrecht et al., [2023](#)) afectando, por ejemplo, la interacción de los estudiantes. En otras palabras, estos resultados muestran cómo los futuros profesores debieron decidir a qué criterios y componentes de los CID dar mayor o menor relevancia al momento de implementar sus clases, forzados por el retorno a la enseñanza presencial.

Si bien los futuros profesores que incluyeron la modelización en sus unidades didácticas comentaron sobre los desafíos, sobre todo pedagógicos, para implementar este proceso en el aula, similares a los reportados por Manouchehri ([2017](#)), sí valoraron positivamente la inclusión de modelización, utilizando argumentos similares a los que se suelen dar en la literatura para justificar su inclusión en los procesos de enseñanza y aprendizaje

⁵⁵ Véase un análisis detallado de este TFM en Ledezma, Sol et al. (2022).

matemáticos (véase Blum, [2011](#)). Finalmente se destaca, como una contribución de este estudio, la aplicación de una herramienta que estructura, de forma sistemática, la reflexión de los profesores sobre su práctica educativa, como son los CID, al caso específico del proceso de modelización, sentando las bases para una pauta de *criterios*, *componentes*, e *indicadores* específicos para trabajar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase un avance en Ledezma, Font et al., [2022](#)).

5.7. Comentario sobre el Tercer Artículo

Este artículo se elaboró para dar cumplimiento al segundo objetivo y respuesta a la segunda pregunta de investigación de esta tesis doctoral. El primer aspecto para destacar de este artículo es que se aborda el tema de la reflexión docente en torno a la inclusión e implementación de la modelización durante las prácticas educativas desarrolladas por futuros profesores en un contexto de enseñanza híbrido. Este artículo corresponde a la continuación del estudio presentado en el [Capítulo 4](#), por lo que considera como campo de estudio al mismo programa de máster profesionalizante y sigue la misma metodología de análisis de contenido con su respectivo principio naturalista. No obstante, un cambio fundamental en este estudio es el contexto en que los futuros profesores desarrollaron sus prácticas educativas, es decir, se pasó de la enseñanza virtual (curso 2019–2020) a la híbrida (curso 2020–2021), ello debido a la reducción de restricciones sanitarias derivadas de la pandemia por COVID-19 y a la necesaria reapertura de los centros educativos. Por lo tanto, ahora el interés de la reflexión de los futuros profesores sobre la inclusión e implementación de la modelización durante sus prácticas educativas se encontraba mediado por el contexto de enseñanza híbrida en que, bajo ciertas condiciones sanitarias, existía la probabilidad temporal de volver a la enseñanza virtual o de mantener la enseñanza presencial con un menor número de estudiantes por sala de clases, lo cual añadió un contexto más interesante para explorar.

El segundo aspecto para destacar de este artículo es el uso de la herramienta CID (ver Figura 17) para pautar esta reflexión, abordando el tema de la modelización como sólo se había hecho anteriormente en el artículo presentado en el [Capítulo 4](#).

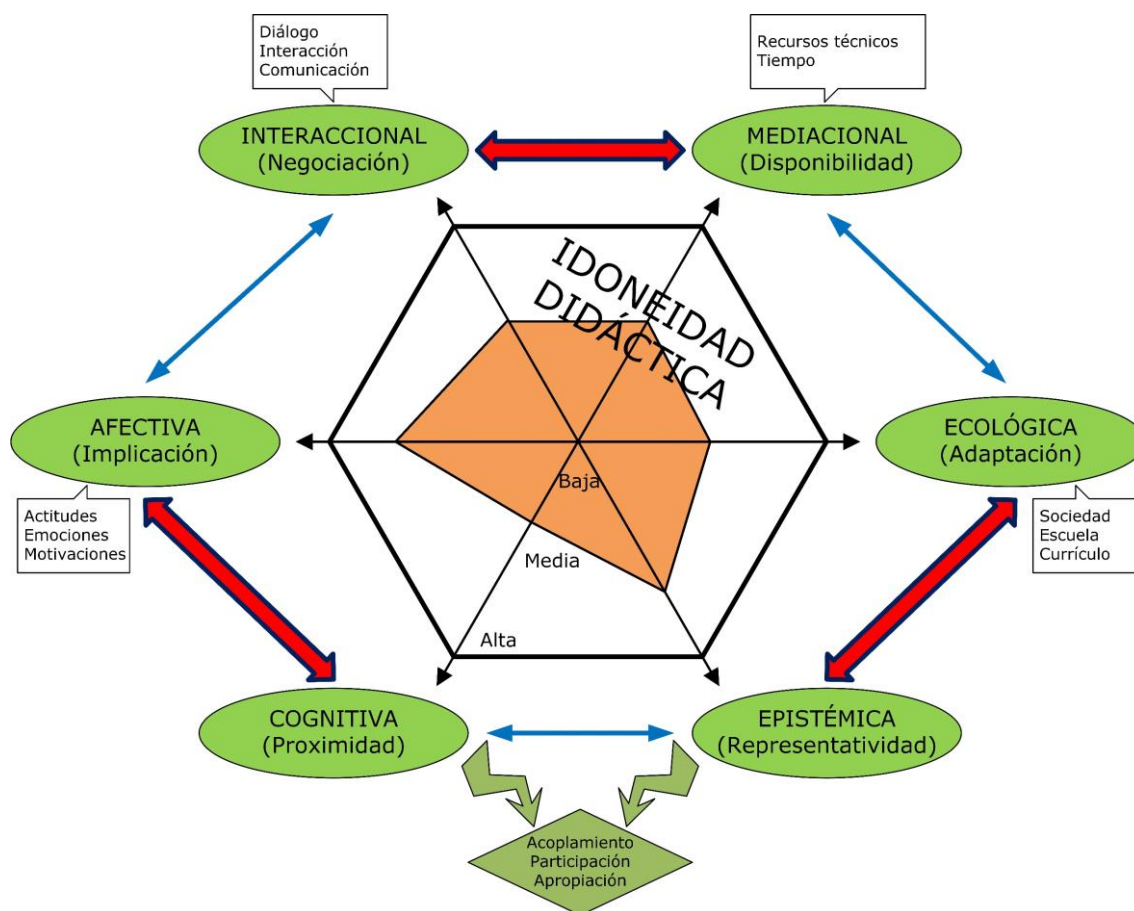


Figura 17. Representación de los Criterios de Idoneidad Didáctica.
 Fuente: Adaptado desde Godino (2013, p. 116).

Cuando un profesor (en formación o en servicio) reflexiona sobre su práctica utilizando los CID, también está atribuyendo una importancia específica a cada uno de los elementos que son objeto de su reflexión. En el contexto de este estudio, cuando un futuro profesor reflexionaba sobre la modelización en un cierto criterio y componente de la pauta de los CID, estaba relacionando este proceso con un determinado aspecto del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático donde consideró que la modelización tenía una importancia. Por esta razón es que se priorizaron algunos aspectos (criterios) por sobre otros, tomando en cuenta el contexto en que cada futuro profesor implementó su unidad didáctica, además de la situación de contingencia grave provocada por la pandemia por COVID-19 que obligó a los centros de práctica a implementar la enseñanza híbrida. Finalmente, el tercer aspecto para destacar de este artículo es el valor de la metodología de análisis de contenido para el desarrollo de este estudio, pues es la que permitió extraer un gran volumen de datos de los TFMs elaborados durante el curso 2020–2021, más concretamente, logrando identificar los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje

matemático que los futuros profesores relacionaron con la modelización y posibilitando aportar más evidencia para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación de esta tesis doctoral. La metodología de análisis de contenido utilizada en este estudio corresponde a una adaptación de la utilizada por Sánchez (2021, y mejorada en Sánchez et al., 2022) para sus estudios sobre el uso de la creatividad por parte de futuros profesores, también utilizando la herramienta de los CID. Por lo tanto, para el caso de este artículo, si bien el análisis de contenido consideró los mismos pasos iniciales para la definición/búsqueda de palabras clave y la elaboración de una base de datos, no sólo se adaptaron los pasos siguientes al tema de la modelización, sino que también se crearon nuevas categorías (niveles de referencia a la modelización), todo lo cual fue previamente refinado y validado mediante presentaciones de los avances de este estudio en instancias académicas de divulgación (congresos y seminarios). De hecho, al igual que lo sucedido con el estudio presentado en el [Capítulo 4](#), el análisis de contenido permitió obtener un gran volumen de datos que no fue posible incluir en su totalidad en este tercer artículo. A modo de síntesis, en la [sección 8.2](#) se presenta una comparación entre los resultados de los dos estudios realizados para concretar el segundo objetivo de investigación.

Como consecuencia de este artículo, tomando en cuenta las bases de datos elaboradas y la identificación de las tareas de modelización propuestas por los futuros profesores, es que el cumplimiento del segundo objetivo y la respuesta a la segunda pregunta de investigación de esta tesis doctoral dio paso a la elaboración del estudio que se presenta en el [Capítulo 6](#).

Enunciado de disponibilidad de datos

Los TFMs son documentos públicos, pero no están disponibles en internet, sino que se almacenan en la Universidad Autónoma de Barcelona (Plaza Cívica, Campus de la UAB, 08193, Sardañola del Vallés, Barcelona, España). Si alguien desea revisar los TFMs analizados en este estudio, lo puede solicitar a los autores.

Capítulo 6: Capítulo de Libro –

Chapter 6: Book Chapter

This chapter presents a book chapter to fulfil the requirements of this doctoral thesis.

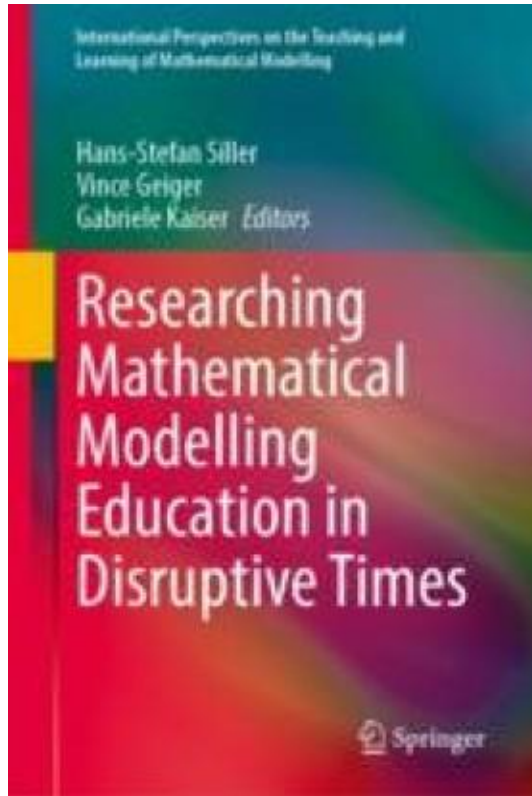
Table 17 presents the identification data of this book chapter.

Table 17. Identification data of the book chapter.

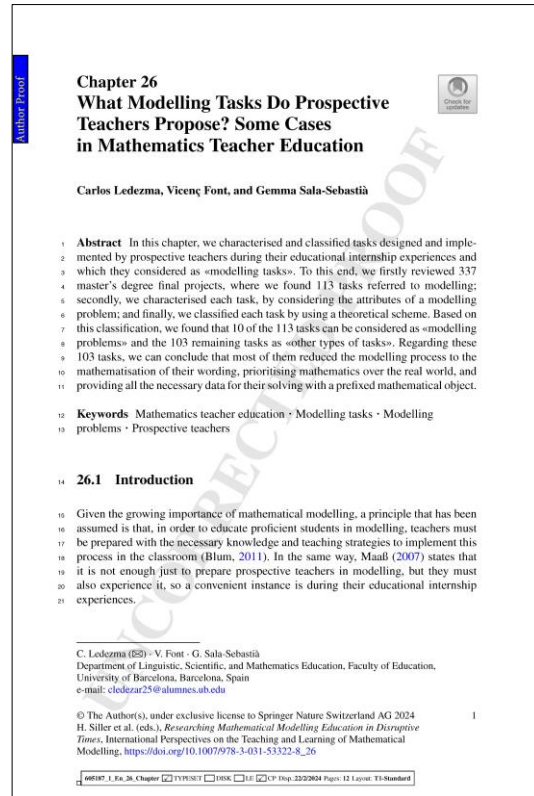
Criteria	Data
Title	What modelling tasks do prospective teachers propose? Some cases in mathematics teacher education.
Author(s)	Carlos Ledezma, Vicenç Font, Gemma Sala-Sebastià.
Affiliation(s)	Department of Linguistic, Scientific, and Mathematics Education, Faculty of Education, University of Barcelona (Spain).
Book	Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times.
Editor(s)	Hans-Stefan Siller, Gabriele Kaiser, Vince Geiger.
Publisher	Springer.
Pages	Not assigned yet.
DOI	10.1007/978-3-031-53322-8_26
Publication date	25 th May 2024.
Submission date	6 th November 2022.
Acceptance date	9 th November 2023.
Reference entry	Ledezma, C., Font, V., & Sala-Sebastià, G. (2024). What modelling tasks do prospective teachers propose? Some cases in mathematics teacher education. In H.-S. Siller, G. Kaiser, & V. Geiger (Eds.), <i>Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times</i> . Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_26

Note: Since this book chapter has not been published as of 31st March 2024, there is no information about its impact. Source: Author's elaboration based on the information available at the acceptance letter.

Regarding the aim of the book, this edited volume documents research on mathematical modelling education, before, during, and after the Covid 19 pandemic; it is focused on research on mathematical modelling education and its implementation at school and tertiary level. The editors of this book are Hans-Stefan Siller (Würzburg University, Germany), Vince Geiger (Australian Catholic University, Australia), and Gabriele Kaiser (Hamburg University, Germany), members of the International Community of Teachers of Mathematical Modelling, the peak research body for the teaching and learning of mathematical modelling. This book is part of the series International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling published by Springer.



(a)



(b)

Figure 12. (a) *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times* cover; (b) first page of the author proof.

Source: Book's website (<https://link.springer.com/book/9783031533211>).

6.1. Abstract –

Resumen

6.1.1. English language

Abstract: In this chapter, we characterised and classified tasks designed and implemented by prospective teachers during their educational internship experiences and which they considered as «modelling tasks». To this end, we firstly reviewed 337 master's degree final projects, where we found 113 tasks referred to modelling; secondly, we characterised each task, by considering the attributes of a modelling problem; and finally, we classified each task by using a theoretical scheme. Based on this classification, we found that 10 of the 113 tasks can be considered as «modelling problems» and the 103 remaining tasks as «other types of tasks». Regarding these 103 tasks, we can conclude that most of them reduced the modelling process to the mathematisation of their wording, prioritising mathematics over the real world, and providing all the necessary data for their solving with a prefixed mathematical object.

6.1.2. Idioma español

Resumen: En este capítulo, se caracterizan y clasifican tareas diseñadas e implementadas por futuros profesores durante sus prácticas educativas y que ellos consideraron como «tareas de modelización». Para ello, en primer lugar, se revisaron 337 trabajos finales de máster, donde se encontraron 113 tareas referidas como de modelización; en segundo lugar, se caracterizó cada tarea considerando los atributos de un problema de modelización; y finalmente, se clasificó cada tarea usando un esquema teórico. A partir de esta clasificación, se encontró que 10 de las 113 tareas se pueden considerar como «problemas de modelización» y las 103 restantes como «otros tipos de tareas». Con respecto a estas 103 tareas, se puede concluir que la mayoría de ellas redujo el proceso de modelización a la matematización de sus enunciados, priorizando la matemática sobre el mundo real, y aportando todos los datos necesarios para su resolución con un objeto matemático prefijado.

6.2. Introduction

Given the growing importance of mathematical modelling, a principle that has been assumed is that, in order to educate proficient students in modelling, teachers must be

prepared with the necessary knowledge and teaching strategies to implement this process in the classroom (Blum, [2011](#)). In the same way, K. Maaß ([2007](#)) states that it is not enough just to prepare prospective teachers in modelling, but they must also experience it, so a convenient instance is during their educational internship experiences.

Several studies have been conducted in different scenarios of teacher education, especially those of the ICTMA community (see [section 6.6](#)), addressing mathematical modelling as a central topic. In the Spanish context, a research focus has been placed on the reflections written by prospective teachers in their master's degree final projects (MFPs) about, among other aspects, the inclusion of modelling during their educational internship experiences (see Ledezma, Sol et al., [2022](#)). Specifically in this context, Spanish prospective teachers must take a professionalising master's degree to teach mathematics at secondary and baccalaureate education levels (to educate students aged 12–18). To obtain their degree, they must prepare an MFP, which consists of an original, autonomous, and individual work that demonstrates both the formative contents received and competencies acquired during the course, as well as their skills to reflect on, analyse, and improve their own practice. In the MFP, the prospective teachers must describe the didactic unit that they designed and implemented during their educational internship experiences, as well as reflect on it to propose improvements for its redesign. In some of these didactic units, the prospective teachers designed and implemented tasks that they considered as «modelling tasks», which are the focus of our study.

In this study, we addressed the design of this type of tasks during the educational internship experiences carried out by prospective teachers who took a professionalising master's programme in the Spanish context. We intend to answer the following research questions: What modelling tasks do prospective teachers propose? Are these actual modelling tasks according to the characteristics agreed upon for this type of problems by the modelling research community? To answer them, we characterised and classified the tasks proposed by prospective teachers in their MFPs, which they considered as «modelling tasks». We conducted this characterisation by considering the attributes of a modelling problem; and we used a theoretical scheme to classify these tasks, both explained in [section 6.3](#). Our starting hypothesis is that, although the prospective teachers claim to have designed modelling tasks, most of these tasks cannot be considered as such. The relevance of our study lies on the fact that, since we present the results of three

academic years (from 2019–2020 to 2021–2022), we can provide a broad view on the design of modelling tasks in this master’s programme.

6.3. Theoretical References

Although different perspectives have emerged in the specialised literature on modelling (see Preciado et al., [2023](#)), there is a broad consensus on the characterisation of a modelling problem and the typology of tasks to work on this process. In this section, we detail these two aspects, according to the theoretical references considered.

6.3.1. Characteristics of a modelling problem

The work with modelling in the classroom is usually carried out in small groups of students who are presented with a problem-situation that they must mathematise, and which must meet certain characteristics to be considered as a «modelling problem». In this study we adopt the Borromeo Ferri’s ([2018](#)) synthesis to characterise this type of problems: it must be *open* and *complex*, whose solving is not limited to a specific answer or procedure, and where the solvers need to search for the relevant data; also, it must be *realistic* and *authentic*, in the sense that it incorporates real-world elements and presents a context consistent with an event that has occurred or may occur in reality; finally, it must be a *problem* that can be *solvable through a modelling cycle*, which implies the realisation of all the phases and transitions that make up the modelling process. For the purposes of our study, this synthesis allowed us to identify whether the tasks considered by the prospective teachers as «modelling tasks» met or not these characteristics to be classified as such.

6.3.2. Classification of modelling tasks

In this study, we adopt the classification scheme proposed by K. Maaß ([2010](#)), which considers aspects such as: (a) the objectives that are intended to be developed with the application of a task; (b) the type of individuals who the task will be applied to; and (c) the characteristics of the task itself. Table 18 presents the scheme with the six classifications proposed for the reality-related and modelling tasks (first column) and the categories that make up each classification (second column). The six classifications were designed to address the purposes of the tasks: classifications I and II are for tasks aimed

at developing modelling sub-competencies; classifications III–V and (partially) VI are for tasks aimed at preparing students for later life.

Table 18. Classification scheme for modelling tasks.

Name of the classification	Categories of the classification
I. Focus on modelling activity	(a) Whole process. (b) Understanding the situation. (c) Setting up the real model. (d) Mathematizing. (e) Working mathematically. (f) Interpreting. (g) Validating.
II. Data	(a) Superfluous. (b) Missing. (c) Superfluous and missing. (d) Inconsistent. (e) Matching.
III. Nature of the relationship to reality	(a) Authentic. (b) Close to reality. (c) Embedded. (d) Intentionally artificial. (e) Fantasy.
IV. Situation	(a) Personal. (b) Occupational. (c) Public. (d) Scientific.
V. Type of model	(a) Descriptive. (b) Normative.
VI. Type of representation	(a) Text. (b) Picture. (c) Text and picture. (d) Material. (e) Situation.

Note: To read Table 18, just one category must be selected from each classification. The complete scheme proposes a second typology of classifications that were not specifically designed for modelling tasks, so we did not consider it in our study. Source: Adapted from K. Maaß (2010, p. 296).

6.4. Methodological Aspects

We followed a qualitative research methodology from an interpretative paradigm, since we analysed and classified tasks proposed by prospective teachers in their MFPs and which they considered as «modelling tasks»; and from a naturalistic approach, since we (as researchers) did not intervene on the design and/or implementation of these tasks (Cohen et al., 2018).

6.4.1. Research context

We conducted this research during three academic years (2019–2020, 2020–2021, and 2021–2022) of a professionalising master’s programme for secondary and baccalaureate education mathematics teachers (to educate students aged 12–18) taught by the public universities of Catalonia (Spain). This master’s programme is structured into three modules: Generic formation, Complements of disciplinary formation, and Internships.

Within the «Complements of disciplinary formation» module, a submodule on mathematical modelling is included, which consists of four sessions and its dynamics is as follows: in the first session, the prospective teachers are introduced to what is meant by modelling and to the Blum and Leiß’s (2007a) cycle; during the second and third sessions, a series of examples of modelling problems are presented, some of which must be solved by the prospective teachers during the sessions; in the fourth session, the prospective teachers must expose the final task of the submodule, which consists of presenting a modelling problem (wording of the task, solving process, and curricular location of the mathematical contents).

Within the «Internships» module, the prospective teachers must carry out their educational internship experiences in institutions recognised as internship centres, under the supervision of a mentor teacher. In this period, the prospective teachers must design and implement a didactic unit which is determined by certain restrictions of the institutional context (time of the school year, educational level of the students, and work system of the internship centre). Given this situation, even though the prospective teachers are expected to include modelling, among other mathematical processes, in their didactic units, they cannot design a didactic unit only focused on modelling, but only propose tasks to work on this process.

After their educational internships, the prospective teachers must prepare an MFP in which they, on one hand, reflect on the implemented didactic unit (see an example in Ledezma, Sol et al., 2022) and, on the other hand, propose changes for its redesign. Within this written reflection, the prospective teachers comment, among other aspects, on the mathematical processes (argumentation, problem solving, modelling, etc.) that they worked on in their didactic units, including the tasks that they designed and implemented, and relating each task with one or more of these processes. Among these tasks, we found

some that the prospective teachers considered as «modelling tasks», which are the focus of our study.

6.4.2. Selection, characterisation, and classification of tasks

For this study, we considered 337 MFPs submitted during the 2019–2020, 2020–2021, and 2021–2022 academic years of the master’s programme described above. For the selection of tasks, we reused the databases generated in two previous studies conducted by the authors: one with 122 MFPs of the 2019–2020 course (see Ledezma, Breda, & Font., [2023](#)) and another with 117 MFPs of the 2020–2021 course (see Ledezma, Sánchez, & Hidalgo-Moncada, [2024](#)). In both studies, we analysed the aspects of the teaching and learning process that prospective teachers prioritised when they reflected in their MFPs on the implementation of modelling during their educational internship experiences. Regarding the data of the 98 MFPs of the 2021–2022 course, we generated a new database like those used in the two studies mentioned above. The three databases allowed us to know which of the 337 MFPs contained references to modelling in the prospective teachers’ reflections on the implementation of their didactic units. In this way, we identified 113 MFPs with references to and tasks aimed at working on modelling.

Our selection criteria for these tasks were based on the guidelines of the master’s programme for the preparation of MFPs, which establishes that each prospective teacher must describe in detail only one task per mathematical process worked (without prejudice to adding more than one evidence of tasks), so we selected only one «modelling task» per MFP. Then, we characterised each task based on the Borromeo Ferri’s ([2018](#)) synthesis on the attributes of a modelling problem, in order to identify which characteristics each task met. In this step, we conducted a triangulation in the following way: firstly, each author characterised the tasks individually; secondly, we compared our characterisations, achieving an agreement percentage of 93% among the three of us; and thirdly, we discussed our differences of characterisation and achieved a consensus, due to our experience in this type of analysis. Finally, we jointly classified each task by using the classification scheme proposed by K. Maaß ([2010](#)), with no major differences in our classification criteria.

6.5. Presentation and Analysis of Results

In this section, we present six representative tasks of those found in the MFPs, which we grouped into two types: «modelling problems» and «other types of tasks». At the end of the section, we present the corresponding classification for these tasks.

6.5.1. Modelling problems

Within the reviewed MFPs, we found 10 tasks that we classified as «modelling problems» since, on one hand, they met the characteristics to be considered as such and, on the other hand, the description of their design and implementation fit in the classification scheme of this type of tasks. We highlight three tasks of this first group, one per academic year.

The first is the *Pizzas and Salads for Everyone! Task*, extracted from MFP #003 of the 2019–2020 course, which was part of a didactic unit to teach algebra in the third grade of secondary education (students aged 14–15). The wording of the task is as follows:

Pizzas and Salads for Everyone! Task

Three friends met to watch a game and, since we do not want to cook, we bought three pizzas and two salads from the MenjaSA Company – one of the three did not want a salad. We realised that we only have the total price of this purchase, which was €19.90.

The wording of the *Pizzas and Salads for Everyone! Task* presents an *open, complex, realistic, and authentic* situation. In the description of its implementation, the prospective teacher stated that he posed this task as a challenge for the students as part of a formative evaluation of the didactic unit to assess their modelling skills. In this way, we consider it as a *problem* that can be *solvable through a modelling cycle*.

The second is the *A Family Trip to the Beach Task*, extracted from MFP #033 of the 2020–2021 course, which was part of a didactic unit to teach functions in the third grade of secondary education (students aged 14–15). The wording of the task is as follows:

A Family Trip to the Beach Task

Let us imagine you want to go from your house to the nearest beach to spend the weekend. See how far your house is from that beach and write it down, attaching a screenshot or picture of the map that allowed you to measure the distance. Assuming that you encounter traffic jams that last three hours, what is the fuel consumption for you to go from your house to the beach and how much money will it cost to you?

The characteristics of a modelling problem are also met in the *A Family Trip to the Beach Task*. For its solving, the students had the mathematical formulas for calculating fuel consumption in different contexts (standard, idle, and in-movement consumption), since the task was part of an interdisciplinary context with the physics subject.

The third is the *Let Us Make Sandwiches Task*, extracted from MFP #030 of the 2021–2022 course, which was part of a didactic unit to teach geometry in the second grade of secondary education (students aged 13–14). The wording of the task is as follows:

Let Us Make Sandwiches Task

We want to make triangular sandwiches to sell, but the bread is sold in the form you see below. [picture of a square-sliced bread]. If we want to prepare 244 sandwiches with this shape, how many units of this type of bread do we need? How big is each sandwich?

The characteristics of a modelling problem are also met in the *Let Us Make Sandwiches Task*. In the description of the task, the prospective teacher stated that he was unable to implement it due to a teachers' strike at the school. Nevertheless, he also proposed a redesign of the task in which he added the price of the bread as a variable to take into consideration.

6.5.2. Other types of tasks

Within the revised MFPs, we found 103 tasks that we classified as «other types of tasks» since, despite they were considered as «modelling tasks» or were described as tasks intended to work on modelling by the prospective teachers who designed and implemented them, these tasks did not meet the characteristics to be considered as «modelling problems» and the description of their design and implementation was not in line with the classification scheme of this type of tasks. We highlight three tasks of this second group, one per academic year.

The first is the *Videogame Task*, extracted from MFP #021 of the 2019–2020 course, which was part of a didactic unit to teach probability and combinatorics in the fourth grade of secondary education (students aged 15–16). The wording of the task is as follows:

Videogame Task

The designers of a videogame are creating the combat system. Each battle will involve three characters that the player can choose. If they want there to be a minimum of 12 possible character combinations, how many characters should the game have?

The *Videogame Task*, considered by its author as a «modelling task», is contextualised in an interesting situation for the students as videogames. All the necessary data and the procedure to solve the task were given, since it was part of a work guide about combinatorics. This task is similar to an *application exercise*, where the student just needs to locate the data provided by the wording of the task in a prefixed mathematical object for its solving.

The second is *The Zipline Problem Task*, extracted from MFP #036 of the 2020–2021 course, which was part of a didactic unit to teach geometry in the second grade of secondary education (students aged 13–14). The wording of the task is as follows:

The Zipline Problem Task

We want to make a zipline between two buildings, one is 35 metres, and the other is 25 metres high, and they are separated by a distance of 25 metres. If we want to make a zipline from the highest point of one building to the highest point of the other building, how many metres of rope will we need?

The Zipline Problem Task is considered by its author as a «modelling task» because it is situated in a non-mathematical context. We found that it was the most common type of reason used by the prospective teachers to justify whether a task was designed to work on the modelling or problem-solving processes. The task only required the application of the Pythagorean theorem to be solved, just like in an *application exercise*.

The third is the *Chessboard Task*, extracted from MFP #043 of the 2021–2022 course, which was part of a didactic unit to teach algebra in the second grade of secondary education (students aged 13–14). The wording of the task is as follows:

Chessboard Task

There are 64 squares (8×8) on a chessboard. If we put one grain of rice on the first square, two grains on the second, four grains on the third, eight grains on the fourth, etc., so that we square the grains we put before on, how many grains of rice will we need to cover the entire board?

The *Chessboard Task* is justified by its author as a «modelling task» because it implies the searching for and the application of a model to solve it. Nevertheless, that model is actually a pattern based on powers of 2, that is, $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{63}$, and whose sum answers the question posed. Regarding the realism and authenticity of the task, how big should the chessboard be to be covered with so many grains of rice?

6.5.3. Classification of the tasks

Table 19 presents the corresponding classification of the six tasks analysed above.

Table 19. Classification scheme for the six tasks.

Tasks	Classifications					
	I	II	III	IV	V	VI
<i>Tasks classified as «modelling problems»</i>						
Pizzas and Salads for Everyone!	(a)	(b)	(a)	(a)	(a)	(c)
A Family Trip to the Beach	(a)	(b)	(a)	(a)	(b)	(a)
Let Us Make Sandwiches	(a)	(b)	(a)	(a)	(a)	(c)
<i>Tasks classified as «other types of tasks»</i>						
Videogame	(e)	(e)	(d)	(b)	(b)	(a)
The Zipline Problem	(e)	(e)	(d)	(b)	(b)	(c)
Chessboard	(e)	(e)	(e)	(a)	(a)	(c)

Note: Table 19 uses the categories of the classification presented in Table 18. Source: Authors' elaboration.

6.6. Discussion and Conclusions

Regarding the tasks that we grouped as «modelling problems», it is noticeable their reduced number compared to the total of tasks reviewed (10 of 113), which confirm our starting hypothesis. As shown in Table 19, the wording of these three representative tasks met the characteristics of a modelling problem, with open and authentic situations which were contextualised in an environment close to the students, and whose solving procedure involved the realisation of a modelling cycle. This result highlights the Greefrath and collaborators' (2022) position on the importance of prospective teachers creating and solving their own modelling problems. However, some prospective teachers mentioned the difficulties for implementing this type of tasks, such as students lacking both experiences in modelling and knowledge of a modelling cycle, mentor teachers suggesting the simplification of the wording of these tasks, curricular times, among others, similar to those reported by Borromeo Ferri and collaborators (2023).

Regarding the tasks that we grouped as «other types of tasks», a first aspect to highlight of the three representative tasks presented in Table 19 is that the prospective teachers

considered them as «modelling tasks» mainly using two reasons: on one hand, because the wording of the tasks included a (relatively) realistic and extra-mathematical context; on the other hand, because the solving of these tasks required the translation of their wording into mathematical language using a certain mathematical object, and in which the data provided by the tasks comfortably fitted in such object. Derived from the latter, a second aspect to highlight of these tasks is that the prospective teachers prioritised mathematical aspects over the real-world elements that characterise modelling tasks and aimed at specific responses that did not require interpretation or validation of the results in the real context of the situation. A possible explanation for this situation is that the master's programme of these prospective teachers does not perform a deep reflection on the different processes of mathematical activity, by only focusing on modelling and problem solving in very reduced times for each submodule. These results are partially coincident with those reported by Wijaya and collaborators (2015) in the Indonesian context, where the mathematical procedures used in some tasks aimed at solving context-based problems are more or less given, as in the case of the tasks classified in our study as «other types of tasks».

Resuming our first research question, on what modelling tasks prospective teachers propose, we made evident a low presence of tasks that we classified as «modelling problems». However, in the case of prospective teachers receiving a specialised preparation in modelling, as those mentioned in this chapter, the context in which they implemented their tasks led them to make decisions that prioritised other aspects of the teaching and learning process to the detriment of modelling. Resuming our second research question, on whether these tasks are actual modelling tasks according to the characteristics agreed upon for this type of problems by the research community in modelling, we found 10 «modelling problems» and 103 «other types of tasks». Regarding the latter tasks, they can be characterised as statements that added mathematical elements to their wording and whose solving process only required the application of a prefixed mathematical object with all the necessary data provided by the task. In other words, the prospective teachers reduced the modelling process to the mathematisation of their statements.

6.7. Commentary on the Book Chapter

This book chapter was prepared to fulfil the third objective and answer the third research question of this doctoral thesis. The first aspect to highlight in this book chapter is that it addresses the issue of design and implementation of modelling tasks during the educational internship experiences carried out by prospective teachers in different teaching contexts: virtual, hybrid, and face-to-face contexts. Although this book chapter is not a continuation of the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#), but was developed in parallel to them, it does consider the same professionalising master's programme as a field of study and (implicitly) follows the same content analysis methodology with its respective naturalistic principle. In fact, the content analysis conducted in the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#) allowed it to obtain a large volume of data that this book chapter is the product of said excess, although, even so, it was not possible to report more tasks of each type (modelling and other tasks). However, the focus of this study is more limited, since only the design and implementation of tasks considered by the prospective teachers as modelling tasks are considered, leaving aside the issue of teaching reflection on practice. The above brings with it an initial hypothesis, in which it is assumed that not all the tasks proposed by the prospective teachers to work on modelling in their educational internship experiences meet the characteristics to be considered as modelling tasks/problems. This hypothesis emerges from the results of the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#), where definitions of modelling were hinted at that had, in some cases, no relation to what this process really is, regardless of the perspective that the prospective teachers adopted (see further discussion in [subsection 1.2.2](#)). Although for this book chapter the same databases of MFPs created in the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#) are used, an additional academic year is considered, which led to the creation of a new database for the MFPs of the 2021–2022 academic year. This is justified by the need to provide more evidence from the study context to justify or refute the initial hypothesis.

The second aspect to highlight in this book chapter is that, although the issue of design and implementation of modelling tasks by prospective teachers is not new, the consideration of three contexts of implementation of these tasks during the educational internship period is novel: the virtual, hybrid, and face-to-face teaching contexts. Despite this situation, the results of this study did not show differences in the characterisation of

the tasks proposed by the prospective teachers to work on modelling; however, the hypothesis that not all of these tasks met the characterisation agreed upon by the modelling research community to be considered as such was confirmed. Therefore, this study sheds light on the need to improve some aspects of the professionalising master's programme considered as a field of study, such as better conceptual clarity about what is taught about modelling and the feedback that the prospective teachers receive when they design and implement this type of tasks in their educational internship experiences.

Finally, the third aspect to highlight in this book chapter is the value of the theoretical scheme proposed by Maaß (2010) for the development of this study, since it is what allowed the classification of the tasks proposed by the prospective teachers to work on modelling, more specifically, managing to characterise these tasks to identify whether they met the attributes of a modelling task and classify them accordingly (if they met the consensual characteristics for this), thus making it possible to answer the third research question of this doctoral thesis. The complete scheme of Maaß (2010) proposes a second typology of classifications for tasks in general (see Table 20), that is, they were not specifically designed for modelling tasks.

More than for modelling tasks, the typology of classifications in Table 20 would have been useful for tasks classified as «other tasks»; however, this was not possible since the interests of the study and the limited space available to develop this book chapter would have been exceeded.

Table 20. General classifications for tasks.

Name of the classification	Categories of the classification
VII. Openness of a task	(a) Solved example. (b) Ascertaining task. (c) Reversal task (d) Complex problem. (e) Complex reversal problem. (f) Finding a situation. (g) Open problem.
VIII. Cognitive demand	(a) Extra-mathematical modelling. (b) Inner-mathematical working.
VIII. Cognitive demand (cont.)	(c) Grundvorstellungen*. (d) Dealing with texts containing mathematics. (e) Reasoning mathematically. (f) Dealing with mathematical representations.
IX. Mathematical content	– Mathematical area. – School level.

Note (*): See a discussion on the meaning of this term in Mathematics Education in vom Hofe & Blum (2016). Source: Adapted from K. Maaß (2010, p. 296).

Data availability statement

MFPs are public documents, but they are not available on the internet. They are kept in the Autonomous University of Barcelona (Plaça Cívica, Campus de la UAB, 08193, Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Spain). If someone wants to revise the MFPs from which the tasks were extracted, he/she can ask for it to the authors.

Capítulo 7: Cuarto Artículo –

Chapter 7: Fourth Article

This chapter presents the fourth article published to fulfil the requirements of this doctoral thesis. Table 21 presents the identification data of this fourth article.

Table 21. Identification data of the fourth article.

Criteria	Data
Title	The role played by extra-mathematical connections in the modelling process.
Author(s)	Carlos Ledezma*, Camilo Rodríguez-Nieto**, Vicenç Font*.
Affiliation(s)	* Department of Linguistic and Literature Education, and of Didactics of Experimental Sciences and Mathematics, Faculty of Education, University of Barcelona (Spain). ** Faculty of Natural and Exact Sciences, University of the Coast (Colombia).
Journal	AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática.
Volume	25.
Pages	Not assigned yet.
DOI	10.35763/aiem25.6363
Publication date	May 2024.
Submission date	21 st November 2023.
Acceptance date	20 th February 2024.
Reference entry	Ledezma, C., Rodríguez-Nieto, C. A., & Font, V. (2024). The role played by extra-mathematical connections in the modelling process. <i>AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática</i> , 25. https://doi.org/10.35763/aiem25.6363

Note: Since this article has not been published as of 31st March 2024, there is no information about its impact. Source: Author's elaboration based on the information available at the acceptance letter.

This journal was founded in 2012 and is currently published by the Spanish Society of Research in Mathematics Education. The editor-in-chief is Ceneida Fernández (University of Alicante, Spain). This journal is abstracted and indexed in 18 databases, including Dialnet, EBSCO, ESCI, Latindex, SCImago, SCOPUS, among others.

According to the information available at the Master Journal List of Web of Science (WoS)⁵⁶, this journal is indexed in the Emerging Sources Citation Index (ESCI), within the categories Education and Educational Research, with a Journal Citation Indicator in 2022 of 0.16.

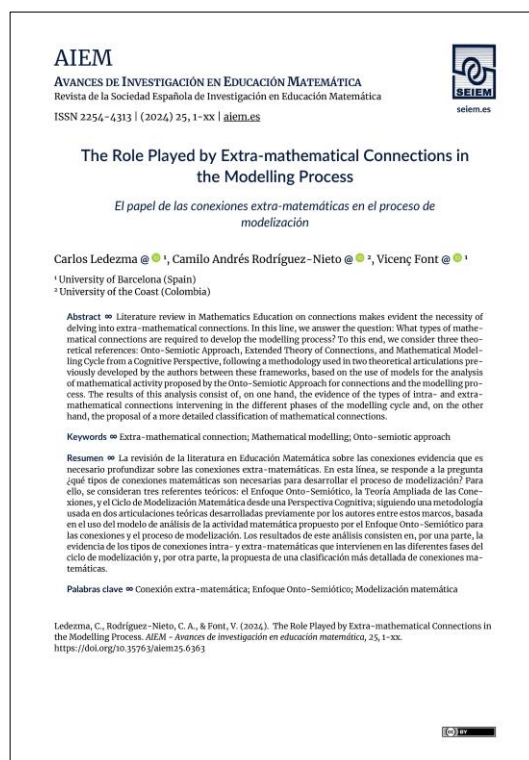
⁵⁶ Information available at <https://mjl.clarivate.com/search-results?issn=2254-4313>.

According to the information available at Scopus⁵⁷, this journal is indexed within the categories Mathematics/General Mathematics (rank #267/387, 31st percentile) and Social Sciences/Education (rank #1042/1469, 29th percentile), with a CiteScore in 2022 of 0.9 and a CiteScore Tracker in 2023 of 1.4.

According to the information available at Scimago Journal & Country Rank (SJR)⁵⁸, this journal is indexed within the categories Mathematics/Miscellaneous and Social Sciences/Education, its H-Index is 7 and SJR 2023 is 0.42 (Q2 in Education).



(a)



(b)

Figure 13. (a) *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática* logo; (b) first page of the article.

Source: Journal's website (<https://aiem.es/index>).

⁵⁷ Information available at <https://www.scopus.com/sourceid/21100904317>.

⁵⁸ Information available at <https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=21100904317&tip=sid&clean=0>.

7.1. Extended Abstract and Keywords –

Resumen Ampliado y Palabras Clave

7.1.1. English language

Abstract: Research in Mathematics Education considers the study of mathematical connections to be important, because of their role played in mathematical teaching and learning processes. However, literature review on connections makes evident the necessity of delving into extra-mathematical connections since most of the investigations are focused on the study of intra-mathematical connections. Another trend in Mathematics Education is the inclusion of modelling because it allows relating the students' knowledge and competencies with real-world problem solving. In addition to be a relevant process of mathematical activity, modelling is considered, in literature about connections, as the paradigmatic example of extra-mathematical connection. In this line, this article seeks to answer the question: What types of mathematical connections are required to develop the modelling process? To this end, we consider three theoretical references: Onto-Semiotic Approach (OSA), Extended Theory of Mathematical Connections (ETMC), and Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective (MMCCP). This study follows a methodology like that used in two theoretical articulations previously developed by the authors, based on the use of models for the analysis of mathematical activity proposed by the OSA. In this context, we firstly took a paradigmatic modelling problem and made mathematical narrative (considered as an expert-solving protocol); secondly, we identified the *mathematical practices* in this narrative; thirdly, we identified the *primary mathematical objects* emerging from these *practices*; fourthly, we established the plot of *semiotic functions* between these *objects*; fifthly, we identified the *mathematical processes* involved in these *practices*; sixthly, we related the *mathematical practices*, *primary mathematical objects*, *semiotic functions*, and *mathematical processes* with the intra- and extra-mathematical connections proposed by the ETMC, and finally, we related all these analyses with the phases of the MMCCP. The results of this analysis allowed to make evident the types of intra- and extra-mathematical connections intervening in the different phases of the modelling cycle when a problem of this type is solved, as well as the necessity of considering new types of connections not contemplated by the ETMC. Finally, we propose a more detailed classification of connections, which consists of, on one hand, refining the extra-mathematical connection

of «Modelling» type in two types: «Modelling» and «Applications»; and on the other hand, the new connection of «Idealising» type.

Keywords: Extra-mathematical connection; Mathematical modelling; Onto-semiotic approach.

7.1.2. Idioma español

Resumen: La investigación en Educación Matemática considera importante el estudio de las conexiones matemáticas dado su papel en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Sin embargo, la revisión de la literatura sobre las conexiones evidencia que es necesario profundizar sobre las conexiones extra-matemáticas, pues la mayoría de las investigaciones se enfocan en el estudio de las conexiones intra-matemáticas. Otra tendencia en Educación Matemática es la inclusión de la modelización, ya que permite relacionar los conocimientos y competencias de los estudiantes con la resolución de problemas del mundo real. Además de ser un proceso relevante de la actividad matemática, la modelización es considerada, en la literatura sobre las conexiones, como el ejemplo paradigmático de conexión extra-matemática. En esta línea, en este artículo se busca responder a la pregunta ¿qué tipos de conexiones matemáticas son necesarias para desarrollar el proceso de modelización? Para ello, se consideran tres referentes teóricos: el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TACM), y el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva (CMMPC). En este estudio se sigue una metodología similar a la utilizada en dos articulaciones teóricas previamente desarrolladas por los autores basadas en el uso del modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS. En este contexto, primero, se tomó un problema de modelización paradigmático y se elaboró una narrativa matemática (considerada como el protocolo de resolución experta); segundo, se identificaron las *prácticas matemáticas* en esta narrativa; tercero, se identificaron los *objetos matemáticos primarios* emergentes en estas *prácticas*; cuarto, se estableció la trama de *funciones semióticas* entre estos *objetos*; quinto, se identificaron los *procesos matemáticos* intervinientes en las *prácticas*; sexto, se relacionaron las *prácticas matemáticas*, los *objetos matemáticos primarios*, las *funciones semióticas*, y los *procesos matemáticos* con las conexiones intra- y extra-matemáticas que propone la TACM y, finalmente, todos estos análisis se relacionaron con las fases del CMMPC. Los resultados

de este análisis permitieron evidenciar los tipos de conexiones intra- y extra-matemáticas que intervienen en las diferentes fases del ciclo de modelización cuando se resuelve un problema de este tipo, así como la necesidad de considerar nuevos tipos de conexiones no contemplados por la TACM. Finalmente, se propone una clasificación más detallada de conexiones, la cual consiste, por una parte, en refinar la conexión extra-matemática de tipo «Modelado» en dos tipos: «Modelización» y «Aplicaciones»; y, por otra parte, en la nueva conexión de tipo «Idealizadora».

Palabras clave: Conexión extra-matemática; Enfoque Onto-Semiótico; Modelización matemática.

7.2. Introduction

Various investigations in Mathematics Education consider the study of mathematical connections to be important. The focus of these investigations has been mainly on intra-mathematical connections; however, little has been delved into the role played by extra-mathematical connections.

Another trend focused on relating students' mathematical knowledge and competencies with the solving of real-world problems is mathematical modelling (Kaiser, [2020](#)). Usually, from research in connections, that of «Modelling» type is considered as the paradigmatic example of extra-mathematical connection.

In this line, we consider it relevant to pose the following question: What types of mathematical connections are required to develop the modelling process? To answer it, we take into consideration the theoretical articulations proposed in literature between the Onto-Semiotic Approach (OSA), the Extended Theory of Mathematical Connections (ETMC; see Rodríguez-Nieto et al., [2023](#)), and the mathematical modelling process (MOD; see Ledezma, Font, & Sala, [2023](#)). In these articulations, we made evident that a conglomerate – formed by *mathematical practices*, *primary mathematical objects* (activated in such *practices*), *semiotic functions* (linking these *primary objects*), and other *mathematical processes* – is necessary for mathematical connections to be activated and for the modelling process to be developed. Therefore, in this study, we take as a base the importance of analysing this conglomerate underlying both processes to delve deeper into the relationship between mathematical connections (particularly, extra-mathematical ones) and modelling.

In the theoretical articulations mentioned above, a combination of two references is handled (ETMC-OSA and MOD-OSA), thus, because of the complexity of the mathematical activity underlying the modelling process, in this article, we use the three theoretical references aiming a more detailed analysis of modelling. Finally, we refine some of the theoretical references used, based on the results emerging from the analyses performed.

7.3. Theoretical Framework

Subsections [7.3.1](#), [7.3.2](#), and [7.3.3](#) synthesise the three theoretical references considered in our investigation, and subsection [7.3.4](#) synthesises the articulation developed among them.

7.3.1. Onto-Semiotic Approach

The OSA considers that, to describe mathematical activity, it is essential to take into consideration the *objects* involved in such activity and the semiotic relationships between them (Font et al., [2013](#)). Mathematical activity is modelled in terms of *practices*, a *configuration of primary objects*, and *processes* that are activated by the *practices*. In this theory, a *mathematical practice* is considered as a sequence of actions regulated by institutionally established norms and guided towards an objective (usually, solving a problem). In the OSA ontology, the term *object* is used in a broad sense to refer to any entity that is, in some way, involved in a *mathematical practice* and that can be isolated from the rest of the mathematical activity and identified as a unit. In the OSA terminology, a distinction is made between *primary* and *secondary objects* (Font et al., [2013](#)); however, when in this article we use the term *object*, we are referring to *primary mathematical objects*. For example, when carrying out and evaluating a problem-solving *practice*, we can identify the use of different languages (verbal, graphical, symbolic, etc.), which are the ostensible part of a series of definitions, propositions, and procedures that are involved in the argumentation of the solution of a problem. Problems, languages, definitions, propositions, procedures, and arguments are considered as the six *primary mathematical objects* which jointly form the *configuration of primary objects*. The term *configuration* is used to designate a heterogeneous set or system of *objects* that are interrelated. Every *configuration of primary objects* can be viewed from both a personal and institutional

perspective, which leads to the distinction between *cognitive* (personal) and *epistemic* (institutional) *configurations of primary objects*.

Mathematical objects that intervene in *mathematical practices* and those that emerge from them can be considered from the perspective of the following ways of being present in mathematical activity, which are grouped into facets or dual dimensions (Font & Contreras, [2008](#); Font et al., [2013](#)):

- Extensive/Intensive: Intensive *objects* correspond to those collections or sets of entities, of any nature, which are produced either extensively (by enumerating the elements when possible) or intensively (by formulating the rule or property that characterises the membership of a class or type of *objects*).
- Expression/Content: *Objects* can be participating as representations or as represented *objects*.
- Personal/Institutional: Institutional *objects* emerge from systems of shared *practices* within an institution, while personal *objects* emerge from specific *practices* of an individual.
- Ostensive/Non-ostensive: Something that can be shown directly to another person, versus something that cannot be directly shown on its own and must, therefore, be complemented by another something that can be directly shown.
- Unitary/Systemic: *Objects* can participate in *mathematical practices* as unitary *objects* or as a system.

The use and/or emergence of the *primary objects* of the *configuration* (problems, languages, definitions, propositions, procedures, and arguments) takes place through the respective *mathematical processes* of communication, problematisation, definition, enunciation, elaboration of procedures (algorithmicising, routinisation, etc.), and argumentation (by applying the process-product duality). Meanwhile, the dualities described above give rise to the following *processes* (Font et al., [2013](#)): institutionalisation – personalisation; generalisation – particularisation; analysis/decomposition – synthesis/reification; materialisation/concretion – idealisation/abstraction; expression/representation – signification (see Figure 14).

This list of *processes* is derived from the typology of *primary objects* and dual facets used as tools to analyse mathematical activity in the OSA. Although some of the *processes* considered as important in mathematical activity are contemplated, it is not intended to

include all the *processes* involved in such activity. This is because, among other reasons, some of the most important *processes*, such as problem solving and mathematical modelling, are *macroprocesses* that involve more elementary *processes*, such as representation, argumentation, idealisation, etc.

The notion of *semiotic function* allows *practices* to be related to the *primary objects* that are activated in them. A *semiotic function* is a triadic relationship between an antecedent (initial expression/object) and a consequent (final content/object) established by a subject (person or institution) according to certain criterion or correspondence code.

The theoretical tools described above allow us to analyse mathematical activity through different types of didactic analyses (see Breda et al., [2021](#)), which we describe in greater detail in [subsection 7.4](#).

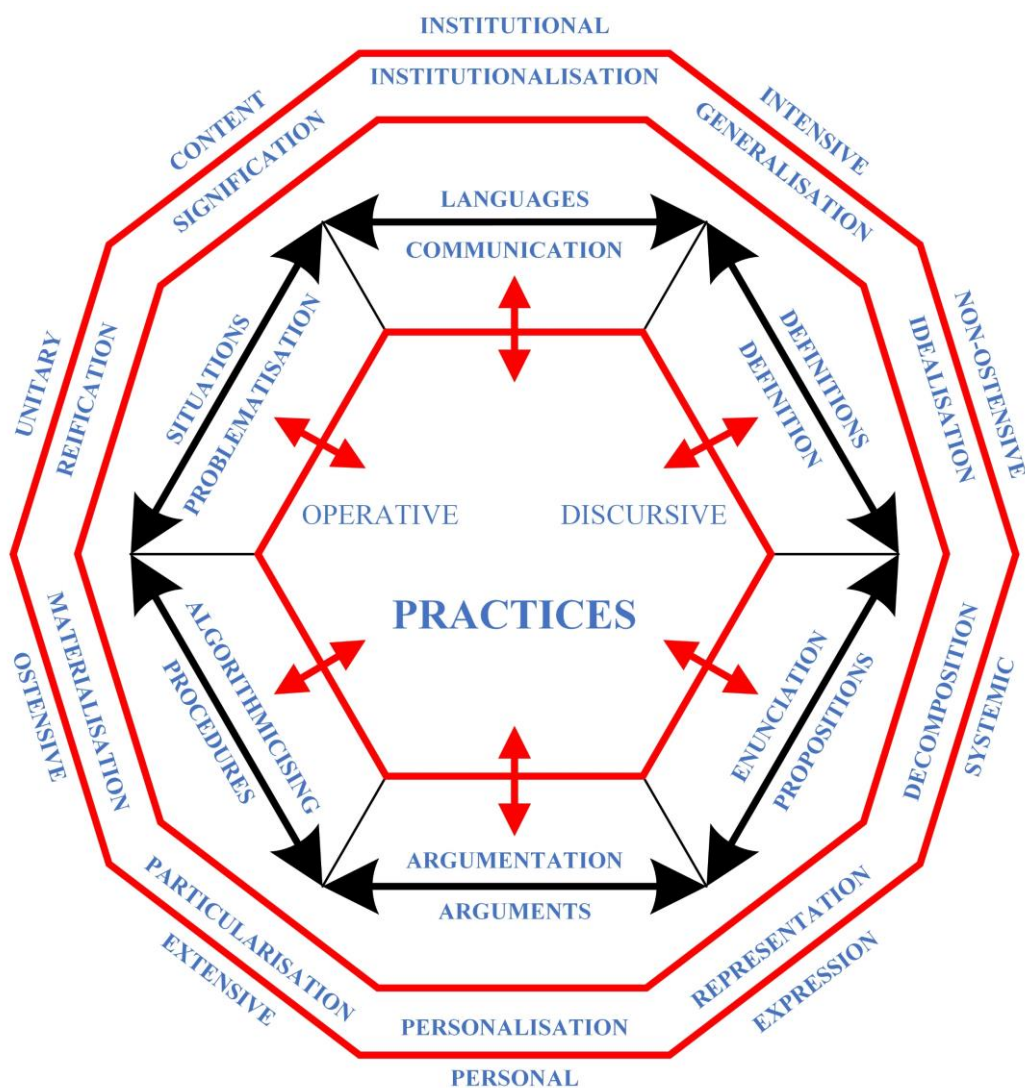


Figure 14. Onto-semiotic representation of mathematical knowledge.
Source: Adapted from Font & Contreras ([2008](#), p. 35).

7.3.2. Extended Theory of Mathematical Connections

The ETMC considers the following 10 types of mathematical connections that have emerged from the results of different research on this topic:

- *Instruction-oriented*: A concept C is connected with previous concepts (Businskas, [2008](#)).
- *Modelling*: This connection corresponds to the relationships between mathematics and real life and is made evident when an individual solves non-mathematical or application problems where he must propose a mathematical model or expression (Evitts, [2004](#)).
- *Procedural*: This connection is identified when an individual uses rules, algorithms, or formulas to solve a mathematical concept. This connection is of the form A is a procedure to work a concept B (García-García & Dolores-Flores, [2021a](#)).
- *Different representations*: This connection is identified when an individual represents mathematical objects using equivalent (from the same register) or alternative (from different registers) representations (Businskas, [2008](#)).
- *Part-whole*: This connection occurs when logical relationships are established in two ways. The first refers to the generalisation relation of the form A is a generalisation of B , and B is a particular case of A ; the second is that the inclusion relation is given when a mathematical concept is contained in another (Businskas, [2008](#)).
- *Feature*: This connection is identified when an individual expresses some characteristics of concepts or described their properties in terms of other concepts that make them different or similar to others (Eli et al., [2011](#)).
- *Reversibility*: This connection occurs when an individual starts from a concept A to obtain a concept B and reverses the process, starting from concept B to return to concept A (García-García & Dolores-Flores, [2021a](#)).
- *Meaning*: This connection is identified when an individual attributes meaning to a mathematical concept or uses it in solving a problem (García-García & Dolores-Flores, [2021b](#)).
- *Implication*: This connection is identified when a concept A leads to another concept B through a logical relationship (Businskas, [2008](#)).

- *Metaphorical*: This connection is understood as the projection of properties, characteristics, etc., of a known domain to structure another, less known domain (Rodríguez-Nieto et al., [2022](#)).

We must stress that these connections can be intra-mathematical, identified when “they are established between ideas, concepts, procedures, theorems, representations, and mathematical meanings among themselves” (Dolores-Flores & García-García, [2017](#), p. 160, authors’ translation); and extra-mathematical, identified when “a mathematical concept or model is related to an application or in-context problem or vice versa. They include the connections between mathematical contents with other curricular disciplines and with daily-life situations” (Dolores-Flores & García-García, [2017](#), p. 161, authors’ translation). For example, in the case of a connection of «Metaphorical» type, if it is a *grounding metaphor*, it is extra-mathematical, and if it is a *linking metaphor*, it is intra-mathematical.

7.3.3. Mathematical Modelling Process

Mathematical modelling is a process that describes the translation of a problem from a real context into mathematics and its subsequent return to reality. In the literature on modelling, different cycles have been designed to explain this process (Borromeo Ferri, [2006](#)), and different perspectives have emerged on its implementation in the classroom (Preciado et al., [2023](#)). In the work of Ledezma, Font, and Sala ([2023](#)), the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective (MMCCP), proposed by Borromeo Ferri ([2018](#)), is adopted, which allows explaining the phases and transitions that an individual goes through to solve a modelling problem (see Figure 15).

In Borromeo Ferri ([2018](#)), the cycle in Figure 15 is described as follows: the *real situation* is a problem taken from reality and represented in any form (through texts and/or pictures) to the solver; the *mental representation of the situation* is generated from the understanding and mental reconstruction of the task, establishing associations of the individual with the *real situation*; the *real model* is the simplification and structuration of the mental image, which requires external representations (diagrams, figures, etc.); the individual’s *extra-mathematical knowledge* adds some considerations to the context of the real situation according to personal experience and additional information that can be obtained; the *mathematical model* takes into consideration the mathematical objects that

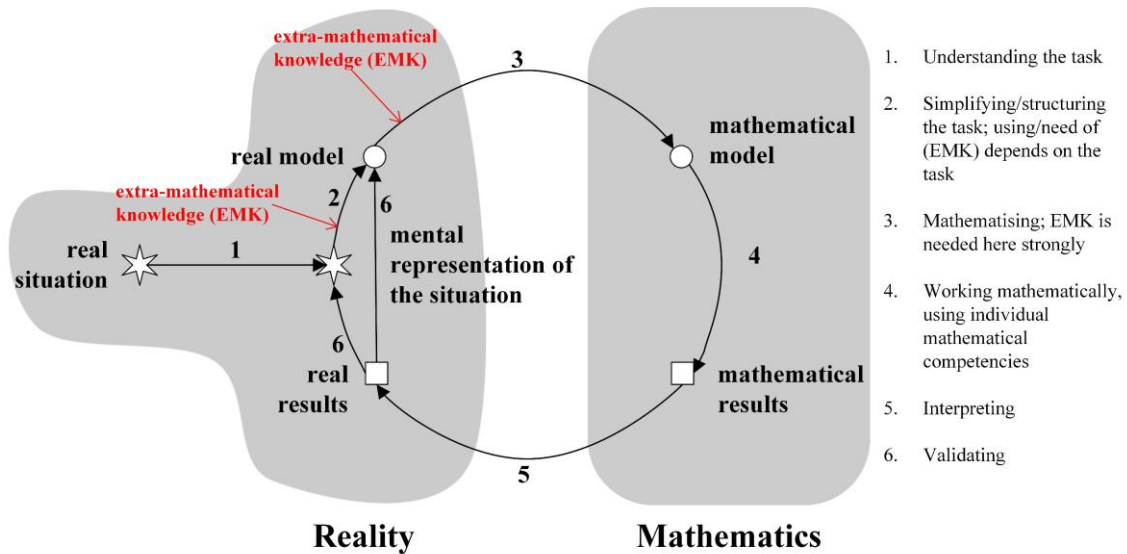


Figure 15. Mathematical modelling cycle from a cognitive perspective.
Source: Adapted from Borromeo Ferri (2018, p. 15).

allow the *real situation* to be explained (Abassian et al., 2020), and is the result of the mathematisation of the *real model* and the contributions of the individual’s *extra-mathematical knowledge*; by working with the *mathematical model*, *mathematical results* will be obtained that must be interpreted in the context of the *real situation* to obtain *real results*.

7.3.4. ETMC-OSA and MOD-OSA articulations

In this study, we considered as references two theoretical articulations previously conducted by the authors based on the OSA: one using the Extended Theory of Connections Mathematical (ETMC-OSA; e.g., Rodríguez-Nieto et al., 2023) and another using the mathematical modelling process (MOD-OSA; see Ledezma, Font, & Sala, 2023). Both studies followed the *Networking of Theories* methodology.

In both theoretical articulations, we integrated a type of analysis designed for any mathematical activity (proposed by the OSA) with analysis tools for a specific type of mathematical activity (connections and modelling). In metaphorical terms, we can say that, as a result of both articulations, both the connection and the modelling process can be understood as an iceberg where, to explain how an individual performs a modelling process and establishes connections, we need to take into consideration the submerged part of the iceberg, which consists of a conglomerate of *mathematical practices*, *primary mathematical objects* activated in them, *semiotic functions* that relate these *primary*

objects, and other *mathematical processes*. In both articulations, we made evident the necessity of this conglomerate both for mathematical connections to be activated and for the modelling process to be developed.

7.3.5. Research Objectives

We pose the following objectives to answer the research question:

1. To jointly use the theoretical references OSA, ETMC, and MOD to explain the complexity of the mathematical activity underlying the modelling process.
2. To refine the constructs of the theoretical references used as a consequence of the results of the analyses performed.

7.4. Methodology

In methodological terms, this is a reflective-on-theory study, based on the analysis of the expert solving of a modelling problem. To do this, we initially developed a mathematical narrative about this expert solving, to which we applied the analysis model of mathematical activity proposed by the OSA, which consists of the following types of didactic analysis: 1) Identification of the *mathematical practices* in this narrative; 2) Identification of the *primary mathematical objects* activated in these *practices*; 3) Establishment of the plot of *semiotic functions* between the *mathematical objects*; and 4) Identification of the *mathematical processes* involved in these *practices*. After these four analyses, 5) we related the *practices*, *primary mathematical objects*, *semiotic functions*, and *processes* with the intra- and extra-mathematical connections, using the categories of connections proposed by the ETMC and, finally, 6) we related all this analysis to the phases of the MMCCP. In summary, we tried to jointly conduct analyses similar to those reported in Rodríguez-Nieto et al. (2023) for connections and in Ledezma, Font, and Sala (2023) for modelling.

7.5. Analysis of the Expert Solving of a Modelling Problem

For this study, we considered the *Bales of Straw Problem* (see Figure 16) as a context for reflection, whose choice is justified because it is considered a paradigmatic example to explain the MMCCP (see Borromeo Ferri, 2018, pp. 15–17).

In the description of Borromeo Ferri (2018, p. 16), two *mathematical models* are proposed to solve the problem in Figure 16: estimation of height and Pythagorean theorem. Since the first *mathematical model* was already used by the authors to develop the MOD-OSA articulation (Ledezma, Font, & Sala, 2023), we used the Pythagorean theorem to solve the problem in this article. Hence, this solving protocol developed by the authors was

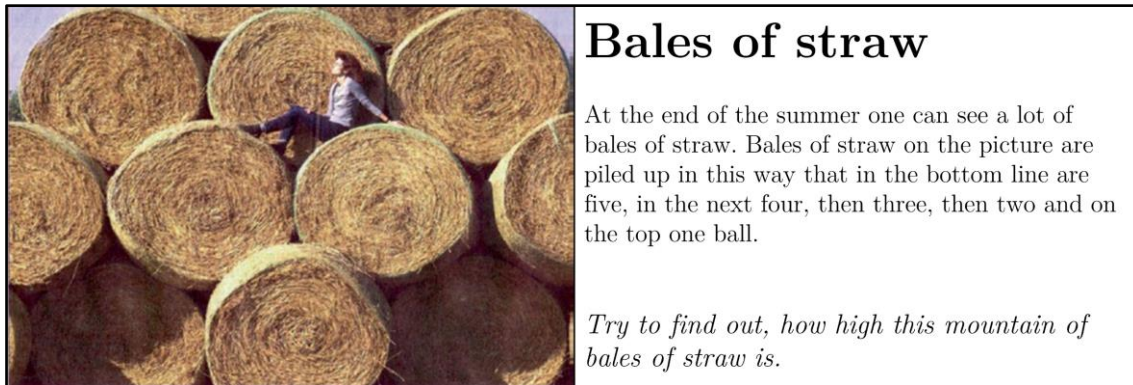


Figure 16. Bales of Straw Problem.

Source: Adapted from Borromeo Ferri (2018, p. 14).

considered as the expert and, therefore, institutional solving. In the following subsections, we detail how we applied the mathematical activity analysis model proposed by the OSA (described in [subsection 7.4](#)) for this solving.

7.5.1. Mathematical narrative

Firstly, we developed a mathematical narrative about the expert solving of the problem. The solver began by reading the wording of the problem, which requires calculating the height of a mountain of bales of straw. To do this, he created a sketch based on the description of the situation, representing the mountain as a diagram showing the five rows of bales of straw (see Figure 17a). Then, using graphing software, he made a more idealised representation of the situation, in which he converted the bales into cylinders and only considered a basal face; next, he estimated the height of the woman in the picture, attributing an approximate value of 1.7 metres due to the fact that she is German, and visually compared this height to the diameter of one bale of straw (see Figure 17b). In this way, the solver concluded that the height of the bale may be a little less than that of the woman, attributing to it an approximate diameter of 1.5 metres and adding this value to the second representation of the situation (see Figure 17c) on which he continued working. With these initial estimates, he determined that a plausibly realistic result would

be a total height of slightly less than five diameters (< 7.5 metres). Next, the solver drew a right triangle on the representation of the situation, whose vertices were: in the centre of the ball of straw at the top, in the centre of the central bale at the base, and in the centre of the bale from one of the ends of the base (see Figure 17d). In this way, he formed a right triangle in the representation of the situation and considered that the height of the mountain of bales of straw could be solved by applying the Pythagorean theorem.

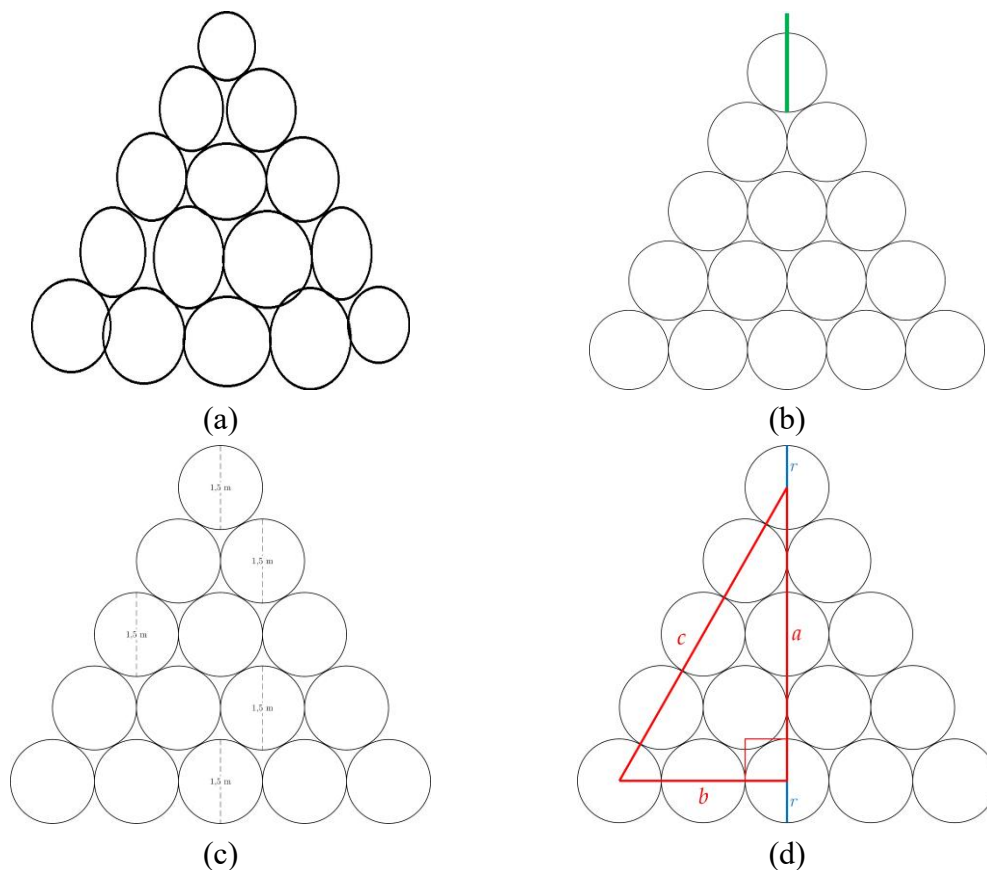


Figure 17. (a) Initial sketch, (b) comparison between the height of the woman and of one bale of straw, (c) real model, and (d) mathematical model.

Source: Authors' elaboration.

To obtain the unknown height of the right triangle (a), he determined that, if the shortest leg (b) is 2 diameters long ($2d$) and the hypotenuse (c) is 4 diameters long, by applying the Pythagorean theorem, he obtained:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= c^2 - b^2 \\
 a^2 &= (4d)^2 - (2d)^2 \\
 a^2 &= 16d^2 - 4d^2 \\
 a^2 &= 12d^2 \\
 a &= \sqrt{12d^2}
 \end{aligned}$$

$$a = 2\sqrt{3}d$$

Thus, the solver determined that, to calculate the total height of the mountain of bales of straw, he had to add the two remaining radii (or one diameter) of the upper and lower bales of the mountain to the value of the largest leg (a), thus obtaining a height $h = 2\sqrt{3}d + d$. Since the solver had estimated the diameter (d) of each bale of straw to be 1.5 metres, he substituted this numerical value into the mathematical result for the height of the mountain, so that, if $d = 1.5$, then:

$$h = 2\sqrt{3}(1.5) + 1.5$$

$$h = 3\sqrt{3} + 1.5$$

Thus, the solver obtained a total height of approximately 6.7 metres for the mountain of bales of straw. Finally, he compared the result obtained (6.7 metres) with the estimation initially proposed for the total height of the mountain (< 7.5 metres), concluding that the final result was plausible and that there was no error in the calculations. We presented this expert solving to three mathematicians who validated it as a correct solution to the problem.

7.5.2. Mathematical practices

Mathematical practices happen over time, therefore, a good way to infer them is by narrating what happened (Font et al., [2013](#)). In fact, the narration of *mathematical practices* is the discourse that a teacher uses when he wants to explain to others what he has done in his lessons. The narrative of the [previous subsection](#) introduces a temporal order of mathematical actions that is almost a list of *mathematical practices*. Therefore, secondly, we identified the *mathematical practices* that can be performed to solve the *Bales of Straw Problem*, based on the mathematical narrative above, which are presented in the first column of Table 22.

7.5.3. Epistemic configuration of primary objects

When the narrative is made, a series of temporally ordered actions appear from which *mathematical practices* are inferred. Now, in this narrative, the «main characters of the mathematical story» (problems, representations, propositions, etc.) also appear, which are the *primary mathematical objects*. To obtain the *configuration of primary objects*, we need to complete the list with the «secondary or supporting characters» who are also

present, but who may not appear in the narrative. Therefore, thirdly, we identified the *primary mathematical objects* activated in the *mathematical practices*, which are presented in the second column of Table 22.

7.5.4. Plot of semiotic functions

Primary mathematical objects activated in *mathematical practices* do not intervene in isolation but are interrelated. Fourthly, we established the plot of *semiotic functions* between the *primary mathematical objects* involved in the expert solving of the problem, which is presented in the third column of Table 22 and in greater detail in Figure 18. This plot is derived from the narrative and the first and second columns of Table 22, although we only selected those that we considered most relevant.

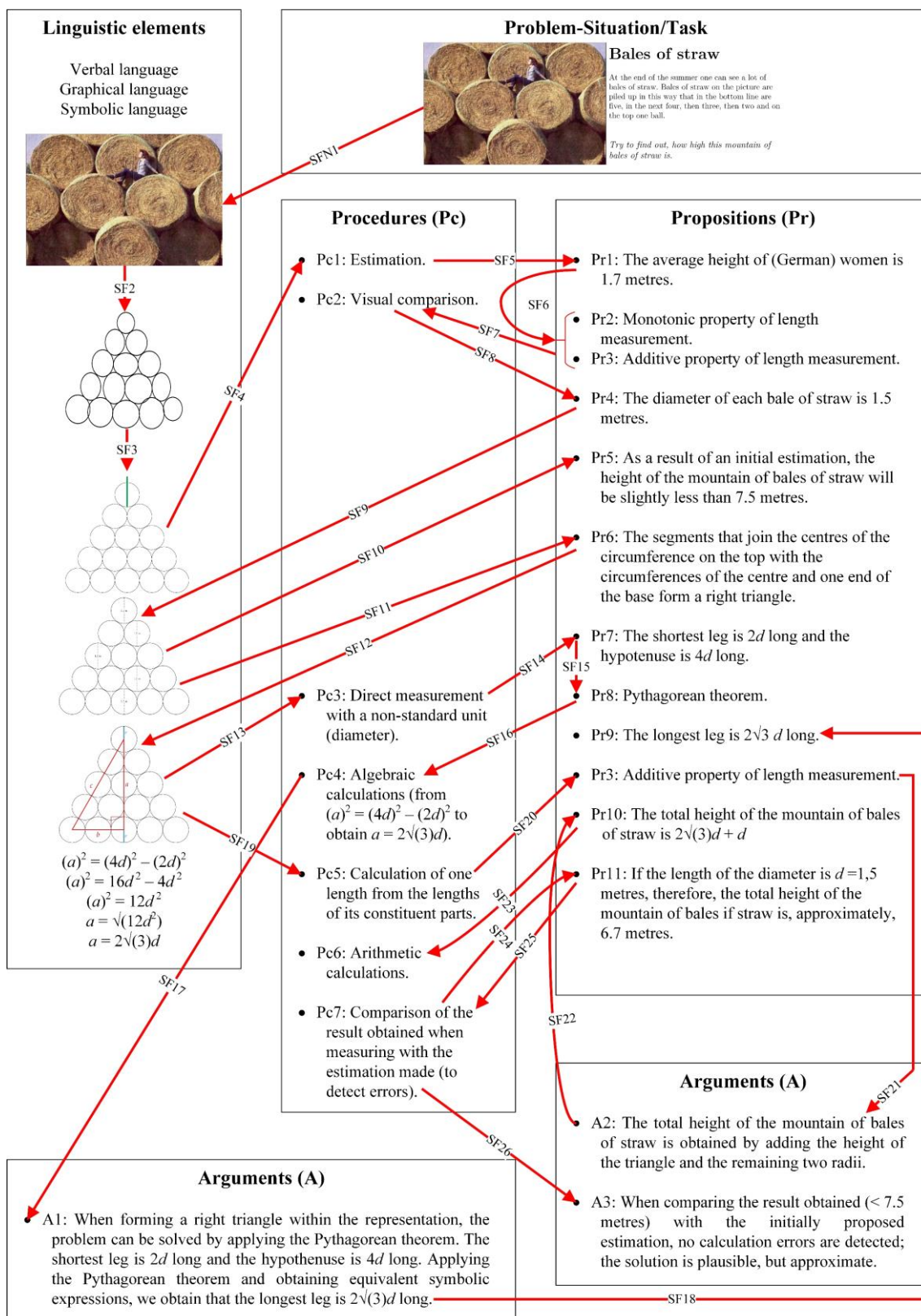


Figure 18. Plot of semiotic functions.
 Source: Authors' elaboration.

7.5.5. Mathematical processes

We can talk about a *process* as a sequence of *practices*, cognitive/metacognitive processes, instructional processes, social processes, etc. Also, we can say that a *practice*, being a sequence of actions, is a *process*, etc. In the OSA, since there is a certain overlap between the notions of *practice* and *process*, it has been decided to differentiate between *practice* (sequence of actions performed subject to mathematical rules), procedure (*primary object* that is a rule that indicates the steps to be followed), and *process* (which involves the time factor and that each member of the sequence takes part in determining the next one). Given this overlap, in the narrative made and in the list of *practices* that has been derived, some *processes* are already found, which can be complemented by applying the process-product duality to the *primary objects* and, finally, adding other *processes* that do not easily appear in the discourse of *practices* in the first phase (for example, *processes* of generalisation, instantiation, signification, etc.). This description of *processes* begins by establishing the *semiotic functions* (uncategorised connection *processes*) that relate the *primary objects* of the *configurations* and is completed with the *processes* in the fourth column of Table 22. To do this, it is important to understand, in addition to the establishment of a *semiotic function* can be considered as a connection *process*, the fact that *semiotic functions* are situated in the expression/content duality since, depending on the antecedent and the consequent, the establishment of a *semiotic function* can also be interpreted as another *process*. For example, if we ask a student what the term «derivative» means to him, the *semiotic function* that is established between «derivative» and his «response» can be understood as a signification *process*, which later allows us to consider this connection as one of «Meaning» type.

7.5.6. Mathematical connections

The *semiotic functions* described in the third column of Table 22 are connection *processes* between *primary mathematical objects* that are not categorised, but the other *process* that intervenes allows it to be typified (enclosed in a category or type of connection). The next step is to categorise them according to the typology of connections proposed by the ETMC. Furthermore, we classified these connections as intra- (when the two ends of the connection are considered as *mathematical objects*) or extra-mathematical (when one of

the two *objects* is considered extra-mathematical). These connections are presented in the fifth column of Table 22.

7.5.7. Relation with the MMCCP

Finally, we related the conglomerate of *practices, primary objects, semiotic functions, processes*, and connections with the phases and transitions of the MMCCP, as shown in the last column of Table 22. We stress that, in some phases of the MMCCP, we used the term «state» to individualise them, which is because they correspond to an input/output of a portion of mathematical activity within the modelling process (Ledezma, Font, & Sala, [2023](#)).

Table 22. Epistemic configuration of primary objects.

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
	– Problem.				Real situation (state).
P1: Reads the task.	– Problem: <i>Determine the height of the mountain of bales of straw.</i>	SFN1 (plot of semiotic functions that allow understanding the problem and give meaning to each of the mathematical terms – not detailed).	– Signification/ Understanding/ Communication. – Problematisation.	– Meaning (EM). – Different representations (the picture is related to the text; EM).	Real situation → Mental representation of the situation.
P2: Makes simplified representations on the situation.	– Representation (R) R1: <i>Figure 17a.</i>	SF2	– Representation (graphical). – Simplification/ Idealisation: <i>Consider the bales first, ignoring their other attributes.</i> <i>Convert the bales of straw into cylinders, consider only one basal face (circle), and then the circumference.</i>	– Different representations (EM). – Part-whole (eliminative abstraction; EM).	Real situation → Mental representation of the situation → Real model.

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P2: <i>Makes simplified representations on the situation.</i>	– R2: <i>Figure 17b.</i>	SF3	... <i>Consider only the shape of the woman and the bales, ignoring their other attributes. Convert the woman into a line segment.</i> – Representation (graphical).	– Idealising (dematerialises; EM). – Different representations (EM).	Real situation → Mental representation of the situation → Real model.
P3: <i>Makes estimations on the situation (height of the woman, diameter of the bales of straw, total height of the mountain).</i>	– Procedure (Pc) Pc1: <i>Estimation.</i> – Definition (D) D1: <i>Arithmetic mean (implicit definition).</i> – Proposition (Pr) Pr1: <i>The average height of (German) women is 1.7 metres.</i>	SF4	– Algorithmicising (Pc1 is almost automatic).	– Procedural (IM).	– Enunciation. – Feature (EM).

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P3: <i>Makes estimations on the situation (height of the woman, diameter of the bales of straw, total height of the mountain).</i>	<ul style="list-style-type: none"> – Pr2: <i>Monotonic property of length measurements (implicit definition).</i> – Pr3: <i>Additive property of length measurement (implicit definition).</i> 	SF6		– Implication (IM).	Real situation → Mental representation of the situation → Real model.
	<ul style="list-style-type: none"> – Pc2: <i>Visual comparison.</i> – D2: <i>Cylinder, base, circumference, diameter (implicit definitions).</i> 	SF7	– Algorithmicising (Pc2 is almost automatic).	– Procedural (EM).	
	<ul style="list-style-type: none"> – Pr4: <i>The diameter of each bale of straw is 1.5 metres, approximately.</i> 	SF8	– Enunciation.	– Feature (EM).	
	<ul style="list-style-type: none"> – R3: <i>Figure 17c.</i> 	SF9	– Representation (graphical and symbolic).	– Different representations (IM).	

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P3: <i>Makes estimations on the situation (height of the woman, diameter of the bales of straw, total height of the mountain).</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Pr5: <i>As a result of an initial estimation, the height of the mountain of bales of straw will be slightly less than 7.5 metres.</i> 	SF10	<ul style="list-style-type: none"> - Enunciation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Feature (EM). 	<ul style="list-style-type: none"> Real situation → Mental representation of the situation → Real model.
- R3.					
P4: <i>Joints the centres of three circumferences forming a right triangle on the graphical representation of the situation.</i>	<ul style="list-style-type: none"> - D3: <i>Right triangle.</i> - Pr6: <i>The segments that join the centres of the circumference on the top with the circumferences of the centre and one end of the base form a right triangle.</i> 	SF11	<ul style="list-style-type: none"> - Instantiation. - Enunciation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Part-whole (IM). - Feature (IM). 	<ul style="list-style-type: none"> Real model (state). Real model → Mathematical model.

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P4: Joins the centres of three circumferences forming a right triangle on the graphical representation of the situation.	– R4: Figure 17d.	SF12	– Representation (graphical and symbolic).	– Different representations (IM).	Real model → Mathematical model.
P5: Calculates the lengths of the right triangle applying the Pythagorean theorem.	– Pc3: Direct measurement with a non-standard unit (diameter). – Pr7: The shortest leg is $2d$ long and the hypotenuse is $4d$ long.	SF13	– Algorithmicising (Pc3 is almost automatic).	– Procedural (IM).	Mathematical model → Mathematical results.
	– Pr8: The Pythagorean theorem.	SF14	– Representation (symbolic). – Generalisation. – Enunciation.	– Different representations (IM). – Feature (IM).	
	– Pc4: Algebraic calculations (from $a^2 = (4d)^2 - (2d)^2$ to obtain $a = 2\sqrt{3d}$).	SF15	– Instantiation. – Enunciation.	– Part-whole (IM). – Feature (IM).	
		SF16	– Algorithmicising (Pc4 is almost automatic).	– Procedural (IM). – Different representations (IM).	

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P5: <i>Calculates the lengths of the right triangle applying the Pythagorean theorem.</i>	– Argument (A) A1: <i>When forming a right triangle within the representation, the problem can be solved by applying the Pythagorean theorem. The shortest leg is $2d$ long and the hypotenuse is $4d$ long. Applying the Pythagorean theorem and obtaining equivalent symbolic expressions, we obtain that the longest leg is $\sqrt{2^2 + 3^2}d$ long.</i>	SF17	– Argumentation.	– Implication (IM).	Mathematical model → Mathematical results.
	– Pr9: <i>The longest leg is $2\sqrt{3}d$ long.</i>	SF18	– Enunciation.	– Feature (IM).	

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P6: <i>Makes calculations to obtain the total height of the mountain of bales of straw.</i>	– Pc5: <i>Calculation of one length from the lengths of its constituent parts.</i>	SF19	– Algorithmicising (Pc5 is almost automatic).	– Procedural (IM).	Mathematical model → Mathematical results.
	– Pr3: <i>Additive property of length measurement (implicit proposition).</i>	SF20		– Part-whole (IM).	
	– A2: <i>The total height of the mountain of bales of straw is obtained by adding the height of the triangle and the remaining two radii.</i>	SF21	– Argumentation.	– Implication (IM).	
	– Pr10: <i>The total height of the mountain of bales of straw is $2\sqrt{3d + d}$.</i>	SF22	– Representation (symbolic). – Enunciation.	– Feature (IM).	
	– Pr10.				Mathematical results (state).

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P7: Assigns real values to the total height of the mountain of bales of straw and assesses whether the solution makes sense in the context of the problem.	<ul style="list-style-type: none"> - Pr6: Arithmetic calculations. 	SF23.	<ul style="list-style-type: none"> - Algorithmicising (Pc6 is almost automatic). - Instantiation ($d=1.5$ m). 	<ul style="list-style-type: none"> - Procedural (IM). - Part-whole (IM). 	<ul style="list-style-type: none"> Mathematical results → Real results.
	<ul style="list-style-type: none"> - Pr11: If the length of the diameter is $d=1.5$ metres, therefore, the total height of the mountain of bales of straw is 6.7 metres, approximately. 	SF24.	<ul style="list-style-type: none"> - Enunciation. 	<ul style="list-style-type: none"> - Feature (IM). 	
	<ul style="list-style-type: none"> - Pc7: Comparison of the result obtained when measuring with the estimation made (to detect errors). 	SF25.	<ul style="list-style-type: none"> - Algorithmicising (Pc7 is almost automatic). 	<ul style="list-style-type: none"> - Procedural (IM). 	

Table 22. Epistemic configuration of primary objects. (cont.)

Practices	Objects	Semiotic Functions	Processes	Connections*	Phases of the MMCCP
P7: <i>Assigns real values to the total height of the mountain of bales of straw and assesses whether the solution makes sense in the context of the problem.</i>	– A3: <i>When comparing the result obtained (< 7.5 metres) with the initially proposed estimation, no calculation errors are detected; the solution is plausible, but approximate.</i>	SF26.	– Argumentation (validation of the solution, taking into consideration the context).	– Implication (EM).	Mathematical results → Real results.
– Pr10.					Real results (state).

Note (*): IM = intra-mathematical connection; EM = extra-mathematical connection.

7.6. Discussion of Results

Table 22 is the result of applying the types of didactic analyses described in [subsection 7.5](#). In this section, since the interest of our study is in the relationship between extra-mathematical connections and the modelling process, we will emphasise on discussing the analysis of the uncategorised connections (third column of Table 22), in their typification (fifth column), and in the modelling cycle (sixth column).

7.6.1. On the semiotic functions

A first aspect to highlight is that, although in the third column of Table 22 we emphasised on the *semiotic functions* (SFs) that relate the *primary objects*, these are not restricted only to this type of *mathematical objects*. For this reason, we began by considering a plot of SFs (SFN1) that allows the solver to understand the problem, relate it to an external physical situation that can be mathematised, and also focus on the term «height» (verbal language) and on the picture of the wording of the task (graphical language) as starting points for its solving. However, we did not detail this plot given its complexity.

A second aspect to highlight is that, although SF2 is presented in Figure 18 as a SF between representations, it could also be understood as a SF that relates the problem to a schematic representation. Finally, in some cases, the *primary object* intervenes implicitly and with little awareness for the solver, so perhaps it would not be necessary to consider a certain SF. An example of this is SF20 where, although the solver applies the additive property of lengths measurement (Pr3), he is surely not aware that he is doing it.

7.6.2. On the mathematical connections

Mathematical connections can be applied as a set of connections (for example, when considering that the entire last column of Table 22 is an extra-mathematical connection of «Modelling» type) or as a single connection (for example, when considering that SF3 falls under the category of connection between different representations). In fact, the concrete connection is described by a SF in the third column and is typified in the fifth column according to the 10 types of connections proposed by the ETMC. As it is a typology of connections given *a priori*, some problems appear when it is applied to a particular connection, that is, to a SF. Just like in Rodríguez-Nieto et al. (2023), we chose, from the outset, to apply the previous typology of the ETMC and, if this was not possible,

to generate a new type of connection. Below, we discuss some of the problems we had when applying the 10 types of connections proposed by the ETMC, which we resolved by expanding the field of application of some of these connections, and we only chose to generate a new type of connection.

A first problematic connection is that of «Different representations» type, which seems to have been defined with the different representations of the mathematical object function as a paradigmatic example. SF3 fits easily with this typology (different equivalent representations of the same object), although there is already some problem, because it is not clear that the object represented (Figure 17a) is a *mathematical object*, unless it is considered that the ostensive/non-ostensive duality of the OSA also acts, which converts this representation into that of an ideal *mathematical object*. Therefore, in this analysis, when we applied this type of connection, we have dispensed with the requirement that the object represented be mathematical, since we have considered that this duality also operates. In other words, in the case of SF3, it is not enough to consider the expression/content duality of the OSA and limit ourselves to considering that there is a connection between representations, but it is necessary to consider that the ostensive/non-ostensive duality that enables, in both cases, but especially in Figure 17b, that the circles/circumferences are considered dematerialised ideal circles/circumferences, which leads to considering a new type of connection, as we detail in [subsection 7.7](#).

Another problem with this type of connection is that it relates two different representations, which raises an important philosophical problem about the relationship between the mathematical object and its representation. With no intention to delve into this philosophical problem, we have a physical, external, and structured situation, which we can describe mathematically or see as a concretisation of mathematical ideas, and this situation, thanks to a verbal and graphical language, allows the problem to be posed. But, let us suppose that in the proposed problem there is no picture and that we only have a verbal description of the *mathematical object* problem, in this case, part of the wording of the task could be considered as a verbal representation of the situation, which could be connected with a geometric representation (in this case, connections between alternate representations). In other words, when the SF relates a *primary object* that is not a representation (a problem, a procedure, a definition, a proposition, or an argument) with

a representation, since the *primary object* is made ostensive through a certain language, we consider that this SF falls under the connection of «Different representations» type, as in the case of SF12. This type of connection is a good example of how, even a connection considered punctual, is a conglomerate of *mathematical practices*, *primary objects*, *semiotic functions*, and *processes*. Indeed, the connection of «Different representations» type implies, at a minimum, a *process* of representation of the second representation, and a *process* of signification of the first representation. Being a type, it is made concrete in a particular SF which related *primary objects* activated in some *practice*.

A second problematic connection is that of «Part-whole» type, described by the ETMC in two ways: first, as the particular-general relationship and, second, as that the inclusion relation is given when a mathematical concept is contained in another. In this case, we have SFs that we considered as connections of «Part-whole» type in which one of these two interpretations was not clearly given. For example, in the procedure Pc5: Calculation of one length from the lengths of its constituent parts, the additive property of lengths measurement is implicitly used (SF20), in this case there is a relationship between the parts and the whole that cannot be considered the particular-general relationship not is it clear that it is when one mathematical concept is contained in another. Therefore, in accordance with the extensive/intensive duality of the OSA, we applied the connection of «Part-whole» type to the SFs that relate an intensive to an extensive or vice versa.

A third problematic connection is that of «Feature» type, which seems inspired by the classical conception of concept formation. According to this conception, a concept is made up of a series of necessary and sufficient attributes, in such a way that all examples of the concept have common attributes and no counterexample has them all. In other words, concepts would have the structure of logical classes of the form $C = R(x, y, \dots)$, where C would be the concept, (x, y) its attributes, and R the relationship between such attributes. The connection of «Feature» type seems intended for one established between a concept and one of its necessary attributes. Now, in the analysis of the connections involved in solving the problem, we have expanded this perspective by categorising this type of connection, in many cases, those in which the final end is a proposition.

Finally, we highlight that we did not find connections of the «Instruction oriented» (since it is assumed that the solver of the problem has all the prior knowledge necessary for its solving), «Reversibility», nor «Metaphorical» types.

7.6.3. On the modelling cycle

As mentioned at the beginning of [subsection 7.5](#), the choice of the *Bales of Straw Problem* is justified because it is considered a paradigmatic example to explain the MMCCP. In other words, it would be a problem that adjusts to the MMCCP to make it operational, so in our study there were no difficulties in identifying and/or determining the phases and transitions that an individual goes through for its solving. However, the representation of the cycle (see Figure 15), with set characteristics (similar to a Venn diagram), suggests a strict separation between «real world» and «mathematics» that we did not appreciate as such in the expert solving of the problem. In the mathematical narrative described in [subsection 7.5.1](#), the R3 representation (Figure 17c) is considered, in terms of the MMCCP, as the *real model* of the situation that, in turn, would be part of the «real world»; however, R3 could also be considered within «mathematics», since it includes idealised dematerialised circumferences and segments.

7.7. Conclusions

The first conclusion of our study is related to the paradigmatic extra-mathematical connection proposed by the ETMC, namely, that of «Modelling» type. In this sense, we propose to rethink it in two types of connections: «Modelling» and «Application of models». This new proposal for types of connections is justified by the difference established by Blum ([2002](#)) between both processes, which, although they represent relationships between the intra- and extra-mathematical, have different foci. On one hand, modelling focuses from the extra- to the intra-mathematical, emphasising the mathematisation of the extra-mathematical context, which is where this process is validated. On the other hand, applications focus from the intra- to the extra-mathematical, emphasising the mathematical object involved, and are validated based on intra-mathematical considerations. A *mathematical model* intervenes in both processes which, from a didactic point of view, may or may not be preestablished in a mathematical teaching and learning process.

The second conclusion of our study is that an extra-mathematical connection can be established in a unitary or systemic way. When we say that the connection of «Modelling» type is extra-mathematical, we are establishing it as a macro-connection (unitary), in which many elements intervene to establish it (systematic). In turn, if some of the transitions of the modelling cycle are seen from a unitary perspective, they can also be considered as extra-mathematical connections.

The third conclusion of our study is that a systemic look at the connections makes it evident that they are based on a conglomerate of *mathematical practices, primary objects, semiotic functions, and processes*. Now, Table 22 shows that, even when we look at the connections in a unitary way, we also must consider this conglomerate. For its part, a more unitary look at the connections (third and fifth columns) allows us to see that their typology can also be intra- or extra-mathematical, depending on whether the origin or the end is considered extra-mathematical. However, unlike what happens in systemic connections, in unitary connections this characterisation is, in some cases, problematic. For example, the distinction of the antecedent (or the consequent) as extra- or intra-mathematical is very clear in the case of connections of «Metaphorical» type, depending on whether it is a *grounding or linking metaphor* type. Now, there are cases in which it is considered to be an extra-mathematical connection, where the starting (or final) point is not so clear that it is extra-mathematical. For example, SF3 is considered extra-mathematical because the starting point is a schematic representation of an extra-mathematical situation.

Finally, regarding the 10 types of connections proposed in the ETMC, the results of our study allowed us to develop two proposals. On one hand, we propose to extend the connection of «Feature» type to include propositions, by making the following modification to the name and definition of this type of connection:

- *Feature/Proposition*: This connection is identified when an individual expresses some characteristics of concepts or described their properties in terms of other concepts that make them different or similar to others (Eli et al., [2011](#)), *or states/uses a proposition in which such concept has a determining role*.

On the other hand, we propose a new type of connection, namely, the «Idealising» type. In the rows of P2: Makes simplified representations on the situation, in Table 22, we can see that an eliminative abstraction intervenes, considered under the category of the

connection of «Part-whole» type, and idealisation. From the OSA perspective, this last connection is not located in the extensive/intensive duality (which would allow it to be included in the connection of «Part-whole» type), but is located in the ostensive/non-ostensive duality, which justifies a new type of connection that we describe as follows:

- *Idealising*: This connection relates an ostensive to a non-ostensive. Its function is to dematerialise the ostensive and turn it into an ideal mathematical object (for example, the rounded drawings in Figure 17a are considered circles/circumferences).

Taking into consideration these conclusions and the [previous section](#), Figure 19 presents our proposal of a typology for mathematical connections.

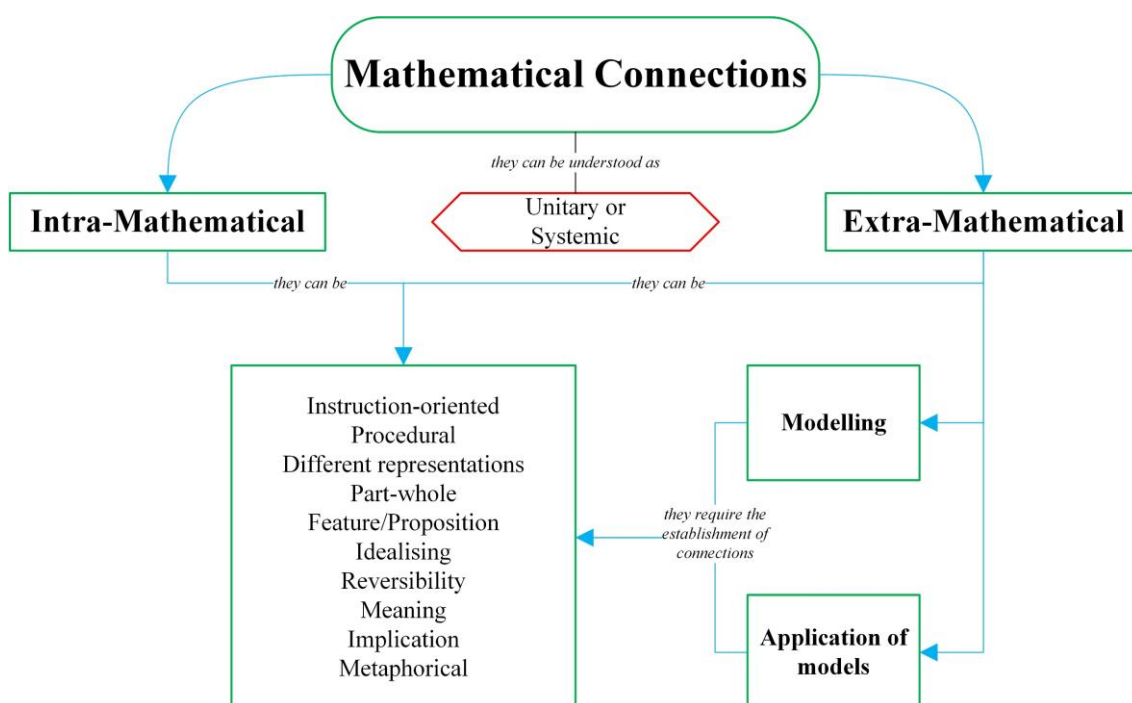


Figure 19. Proposal of a typology for mathematical connections.
Source: Authors' elaboration.

7.8. Commentary on the Fourth Article

This article was prepared to fulfil the fourth objective and answer the fourth research question of this doctoral thesis. The first aspect to highlight in this article is that an articulation between the specific theoretical frameworks of two relevant processes of mathematical activity is proposed: mathematical modelling and connections, as had not been done previously in the literature. This article corresponds to the continuation of the study presented in [Chapter 3](#), so it considers the same modelling problem as a context of

reflection and follows the same *Networking of Theories* methodology from a reflective-on-theory approach. However, a fundamental change in this study is the refinement of the *Semiotic-Cognitive Analysis Model for the Mathematical Modelling Process* proposed in the study presented in [Chapter 3](#), since it not only adds the analysis of the SFs established between the emerging and intervening primary mathematical objects in the mathematical activity of modelling, but also, it adds the intra- and extra-mathematical connections that an individual establishes when solving a modelling problem. Therefore, the analysis of the modelling process, by combining the tools provided by the MMCCP, OSA, and ETMC, becomes much more detailed and in-depth about the mathematical activity underlying this process.

The second aspect to highlight in this article is the contribution to the typology of mathematical connections proposed by the ETMC where, on one hand, the connection of «Modelling» type is specified and, on the other hand, the new connection of «Idealising» type is proposed. Regarding the connection of «Modelling» type, this study specifies its definition, since the ETMC originally proposes one that mixes the terms «modelling» and «mathematical applications», and whose differentiation was already established since the beginning of the twenty-first century (see Blum, [2002](#)). In this way, a separation between the extra-mathematical connections of «Modelling» and «Application of models» types is proposed, thus respecting the sense of the mathematical activity that each of these processes represents, that is, from the extra- to the intra-mathematical (for modelling) and vice versa (for mathematical applications). This proposal aims to remedy the lack of research on extra-mathematical connections in the literature. Regarding the connection of «Idealising» type, this study proposes this new connection as a result of the analysis of the mathematical activity of a modelling process, where the transition between the *mental representation of the situation* and *real model* phases requires that the *real situation* be dematerialised to become an ideal object on which later work in mathematical terms.

The third aspect to highlight in this article is the value of the *Networking of Theories* methodology, where two specific theoretical frameworks (MMCCP and ETMC), each dedicated to analysing a certain process of mathematical activity (mathematical modelling and connections) and previously and independently articulated with a general theoretical framework for Mathematics Education (OSA), coordinate/combine again for

the analysis of a modelling problem, thus making it possible to answer the fourth research question of this doctoral thesis.

Finally, the fourth aspect to highlight in this article is the expansion of the iceberg metaphor, as a result of this theoretical articulation, in the case of mathematical modelling and connections (see Figure 20).

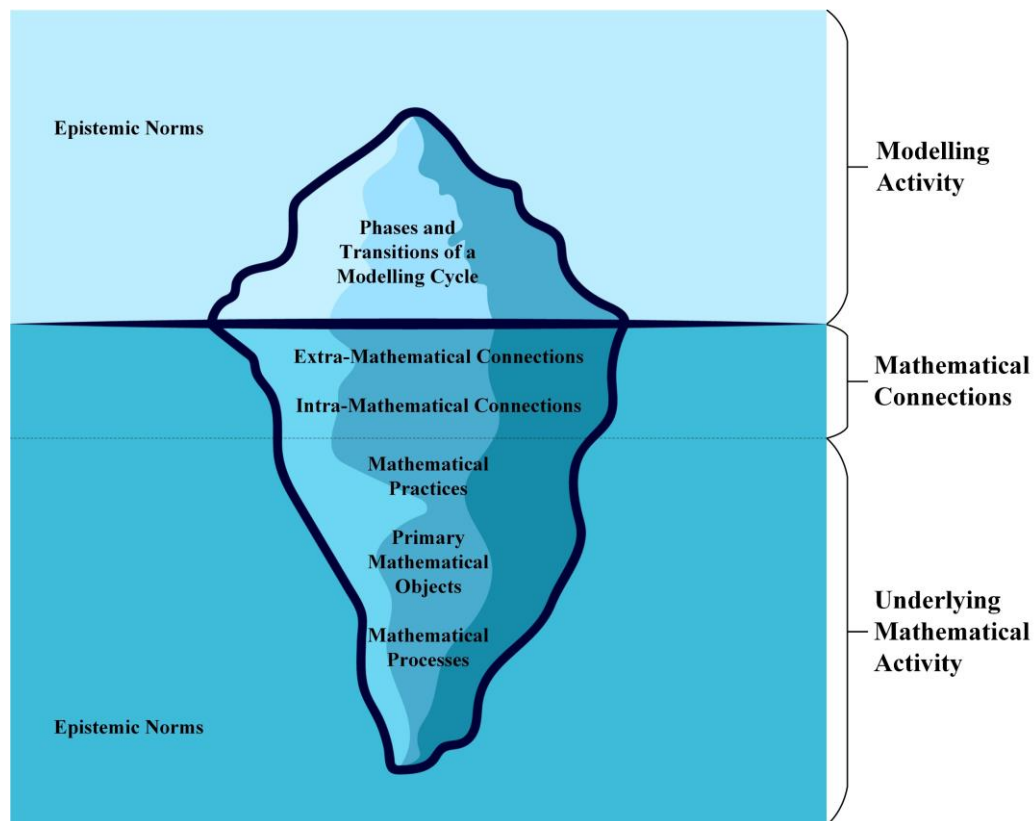


Figure 20. The iceberg metaphor for mathematical modelling and connections.
Source: Authors' elaboration.

With this expanded version of the metaphor presented in [section 3.7](#), it is intended to illustrate that the phases and transitions of the modelling cycle, observable when an individual solves this type of problems (top of the iceberg), require the realisation of a set of intra- and extra-mathematical connections (middle part of the iceberg), all of which requires a conglomerate of mathematical practices, primary objects, and processes so that a modelling process can be carried out (bottom of the iceberg). In turn, this entire iceberg is governed by a set of epistemic norms that regulate the entire modelling process.

As a consequence of this article, taking into consideration the reflections on the processes of mathematical modelling and connections, the fulfilment of the fourth objective and the answer to the fourth research question of this doctoral thesis gave way to the proposal for the refinement of a modelling cycle presented in [section 8.1](#).

Capítulo 8: Conclusiones –

Chapter 8: Conclusions

En este capítulo⁵⁹, se presentan las conclusiones de esta tesis doctoral. Tomando en cuenta que los estudios presentados en los Capítulos 3–7 ya desarrollan discusiones específicas, las cuales se complementan con los comentarios adicionales después de cada publicación, en este capítulo no se desarrollan nuevas discusiones sobre los resultados ya presentados, sino más bien, se desarrolla una meta-conclusión sobre esta investigación. En la [primera sección](#), se presenta una propuesta de refinamiento del ciclo de modelización; en la [segunda sección](#), se presenta un panorama general sobre la presencia de la modelización en las propuestas didácticas de futuros profesores; en la [tercera sección](#), se explican las limitaciones de esta investigación; en la [cuarta sección](#), se proponen las futuras proyecciones de esta investigación; y en la [quinta sección](#), se listan las publicaciones derivadas de esta tesis doctoral.

8.1. Propuesta de Refinamiento del Ciclo de Modelización

En los estudios presentados en los Capítulos [3](#) y [7](#), se consideró como referente teórico específico de modelización al Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva (CMMPC), el cual se utilizó como herramienta de análisis de la actividad de modelización en tales estudios. En esta sección, se pretende ir un paso más allá en la reflexión sobre este ciclo y proponer una perspectiva propia sobre su estructura.

En el estudio presentado en el [Capítulo 3](#), se destacan la estructura de fases y transiciones que propone el CMMPC para explicar la actividad de modelización y su coordinación con el EOS para describir la actividad matemática subyacente al proceso de modelización. Por su parte, en el estudio presentado en el [Capítulo 7](#), se profundiza aún más en el comportamiento del CMMPC, no sólo al añadir el análisis en términos de conexiones matemáticas, sino que al reflexionar sobre su estructura. Más en concreto, en la [subsección 7.6.3](#), se plantea que la representación del CMMPC tiene características conjuntistas (similar a un diagrama de Venn), donde se sugiere una separación estricta entre el «mundo real» y la «matemática» que no se apreció como tal en las resoluciones expertas del *Problema Balas de Paja* desarrolladas en los estudios presentados en los

⁵⁹ The translation of this chapter into English language can be found at [Annex 7](#).

Capítulos [3](#) y [7](#). Del mismo modo, las descripciones del CMMPC que se presentan en las subsecciones [3.3.1](#) y [7.3.3](#) utilizan un registro de lenguaje natural, acompañadas de la representación gráfica del ciclo con una región blanca que rodea al «mundo real» y la «matemática», suscitando así un cierto cuestionamiento sobre su significado. En otras palabras, se crean dos mundos explícitos (el «mundo real» y la «matemática») y un tercer mundo implícito (la región blanca).

Ante esta situación, se pueden asumir, principalmente, dos posturas (véase Font, [2003](#)). Por una parte, una postura empirista, en que el pensamiento matemático es una determinada forma de pensar sobre el «mundo de las cosas» con el cual tienen mutua dependencia. Por otra parte, una postura platónica, en que la «matemática» forma parte de un mundo diferente al «mundo de las cosas», donde los símbolos y otras representaciones matemáticas son la parte ostensiva de una serie de objetos matemáticos que tienen una existencia idealizada e independiente de los individuos en un «mundo matemático». La revisión de la literatura realizada en la [sección 1.2](#) demostró que, históricamente, el desarrollo de la investigación en modelización asumió la existencia de dos mundos desde un principio, en que los objetos del «mundo matemático» permiten explicar (y dar solución a) una situación del «mundo real», por lo que la propuesta que se presenta en la siguiente subsección asume esta misma postura platónica.

8.1.1. Presentación y descripción de un ciclo de modelización

En este estudio, en consonancia con los ciclos de modelización adoptados como referentes teóricos específicos de modelización, y que derivan de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer, se asume la existencia de estos dos mundos: el mundo real y el matemático. No obstante, se cuestiona la existencia de la región blanca en las representaciones utilizadas por los ciclos de modelización que establecen esta separación entre dos (o tres) mundos. Por lo tanto, se propone la representación de un *Ciclo de Modelización Matemática Semiótico-Cognitivo* (CMMSC) que se muestra en la Figura 18.

El CMMSC toma como base una estructura de seis fases y siete transiciones para explicar el proceso de modelización a partir de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer y sus desarrollos teóricos posteriores. Del mismo modo, refina las transiciones a partir de los análisis de la actividad matemática subyacente al proceso de modelización desarrollados en los estudios presentados en los Capítulos [3](#) y [7](#), respaldándolas en las subcompetencias

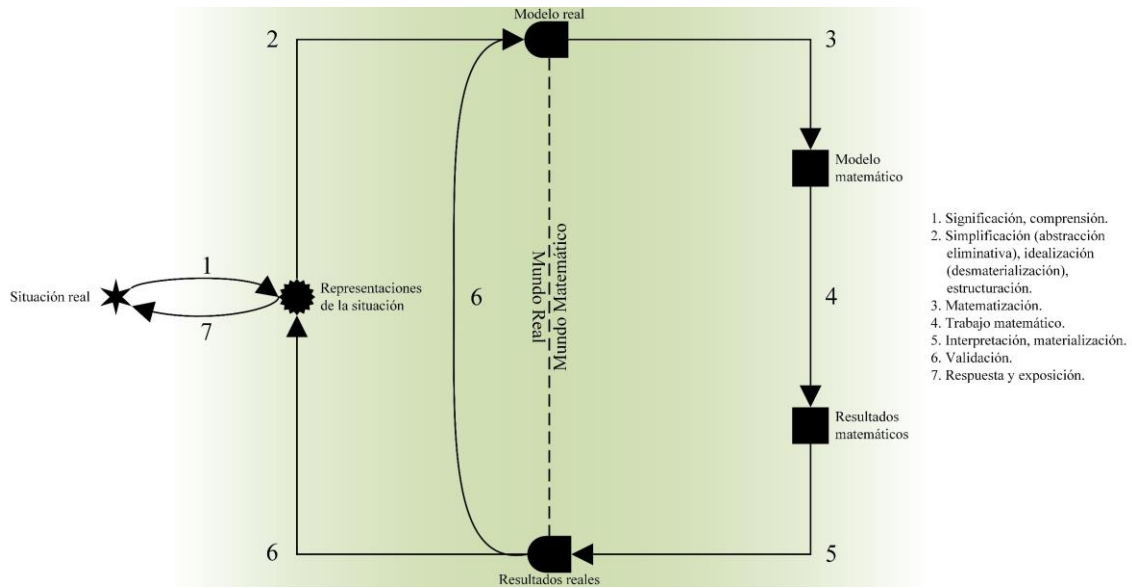


Figura 18. Ciclo de modelización matemática semiótico-cognitivo.
Fuente: Elaboración del autor.

de modelización y refinando la terminología de algunas de ellas. De este modo, el CMMSC se describe de la siguiente manera:

El individuo comienza con una *situación real* (SR), que corresponde a una situación con un contexto realista y auténtico, que puede utilizar distintos tipos de representaciones, y que ya viene problematizada. Luego, el individuo genera sus *representaciones de la situación* (RS) a partir de la comprensión de la SR, tomando en cuenta sus experiencias previas, lo que solicita en la SR que se resuelva, y cómo se podría resolver. Para construir un *modelo real* (MR), el individuo debe simplificar (realizar abstracciones eliminativas) e idealizar (desmaterializar) las RS, tomando en cuenta las condiciones y características del contexto de la SR, y estructurarla en una representación sobre la cual, posteriormente, poder trabajar en términos matemáticos. El *modelo matemático* (MM) toma en cuenta los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de modelización que permiten explicar la SR mediante la matematización del MR. A partir del trabajo matemático con el MM es que emergen los *resultados matemáticos* (RM), los cuales se deben interpretar y materializar en el contexto de la SR para tener *resultados reales* (RR). Finalmente, la validación de los RR se producirá por una comparación de la triada $RR \leftrightarrow RS \leftrightarrow MR$, lo cual llevará al planteamiento y exposición de una respuesta plausible.

8.1.2. Representaciones en el CMMSC

Una de las críticas didácticas a la postura platónica se hace sobre la poca importancia que les atribuye a las representaciones ostensivas (véase Font y Peraire, 2001); sin embargo, en la propuesta del CMMSC se quiere atender esta cuestión. A diferencia de la propuesta de Blum/Kaiser-Messmer y sus desarrollos teóricos posteriores, la representación gráfica del CMMSC en la Figura 18 no separa de manera conjuntista los mundos «real» y «matemático», sino que establece una frontera entre ambos. Por lo tanto, se pretende aportar al refinamiento en la caracterización de las representaciones utilizadas en el tránsito de las fases $SR \rightarrow RS \rightarrow MR \rightarrow MM$, como se muestra en la Figura 19.

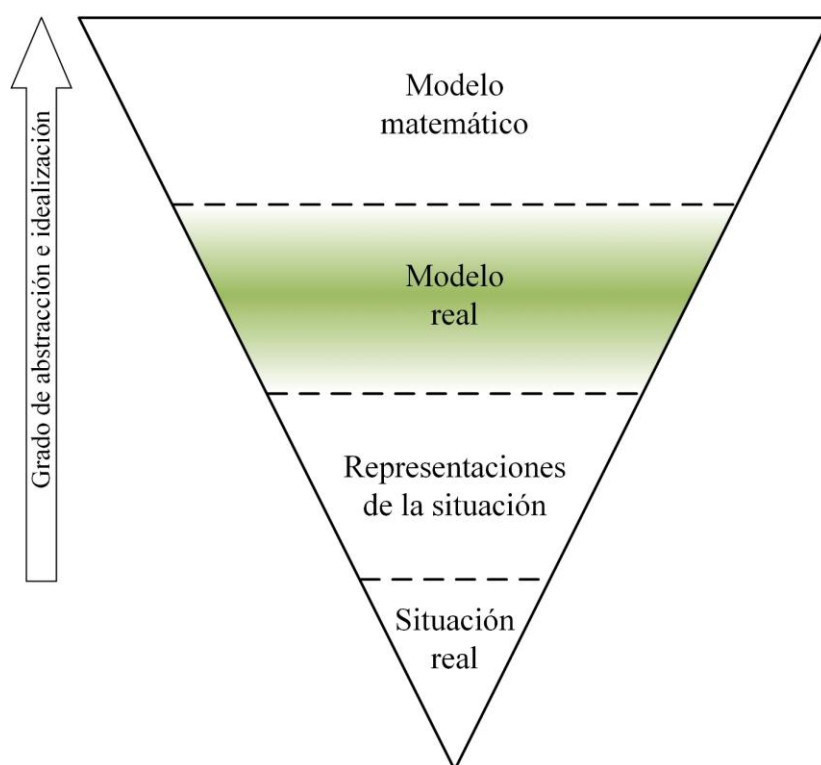


Figura 19. Representaciones en el CMMSC.
Fuente: Elaboración del autor.

La *situación real* es el punto de partida de la actividad de modelización, la cual puede utilizar distintos tipos de representaciones que incluyen desde experimentar la situación hasta trabajar con una representación material, un enunciado con texto e imagen, con sólo una imagen, o con sólo texto. Estas diferentes representaciones son de carácter horizontal, pues se sitúan en el mismo «mundo real», además de ser vicarias, es decir, cada una puede actuar en representación de las otras. Por ejemplo, si el problema consiste en calcular la altura de una montaña, existen diferentes opciones para plantear la *situación real*, como visitar la montaña (experimentar la situación), trabajar con un modelo a escala, como una

maqueta (representación material), o con una fotografía del escenario de la montaña (enunciado con texto y/o imagen).

Ahora bien, la comprensión de la *situación real* es un proceso muy complejo que requiere de la articulación de muchos elementos cognitivos para darle significado y, de este modo, generar *representaciones de la situación*. No obstante, estas *representaciones* (imágenes mentales, bosquejos, etc.) ya son algo más generales y abstractas respecto de la *situación real*, pero particulares respecto del *modelo real*, razón por la cual son entendidas como una fase intermedia necesaria entre la *situación real* y el *modelo real*.

La construcción del *modelo real* captura los elementos esenciales de la *situación real* (simplificación, abstracción eliminativa) y los idealiza (desmaterializa) para posibilitar su posterior trabajo con un *modelo matemático*. La estructuración del *modelo real* se debe hacer en una representación conveniente para tales fines matemáticos. En otras palabras, si bien el *modelo real* contiene elementos de la *situación real*, ya es una representación mucho más simplificada e idealizada (representación vertical), por lo que no se puede situar completamente en un mundo u otro, sino que en la frontera entre ambos⁶⁰. Por ejemplo, si el problema consiste en calcular la altura de una montaña, el *modelo real* simplificaría algunas irregularidades en el relieve de la montaña y la idealizaría como un triángulo o un conjunto de polígonos que posibiliten posteriormente calcular su altura, estructurando todo esto en algún dibujo hecho a mano o con un software gráfico.

Finalmente, el *modelo matemático* es el (o el conjunto de) objeto(s) matemático(s) que permite explicar la *situación real* (ubicada en el «mundo real») en el lenguaje y sistema del «mundo matemático» y que corresponde a una representación totalmente simplificada e idealizada de la *situación real* (representación vertical). Por ejemplo, si el problema consiste en calcular la altura de una montaña, el *modelo matemático* correspondería a los objetos matemáticos que permitan calcularla.

8.1.3. Implicaciones didácticas

Las dos herramientas que se proponen en esta tesis doctoral para el análisis del proceso de modelización, a saber, el CMMSC y el *Modelo de Análisis Semiótico Cognitivo del Proceso de Modelización Matemática*, de forma complementaria, cumplen con las

⁶⁰ Algo similar ocurre con los *resultados reales* que, si bien se derivan de la interpretación y materialización de los *resultados matemáticos* en el contexto de la *situación real*, aún contienen elementos matemáticos.

características para situarse en la perspectiva educativa de modelización. Esto se justifica en que, por una parte, el CMMSC aporta una estructura de fases y transiciones que permite describir el proceso de modelización para así identificar el desarrollo de las subcompetencias de este proceso y, por otra parte, el *Modelo de Análisis Semiótico-Cognitivo* aporta las herramientas que permiten describir la actividad matemática subyacente al proceso de modelización para así identificar el desarrollo del conocimiento matemático en este proceso.

8.2. Presencia de la Modelización en las Propuestas Didácticas de los Futuros Profesores

En los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#), se consideró como referente teórico, además de un ciclo de modelización, a los CID, los cuales se utilizaron como herramienta para pautar la reflexión de los futuros profesores sobre su práctica docente durante el periodo de prácticas educativas. Metodológicamente, se realizó un análisis de contenido sobre 239 TFM's elaborados durante los años académicos 2019–2020 y 2020–2021 de un programa de máster profesionalizante. Tal como se menciona en las subsecciones [4.7](#) y [5.7](#), el análisis de contenido permitió obtener un gran volumen de datos que no fue posible incluir en su totalidad en ambos artículos. Por esta razón, sólo se destacaron los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático (criterios y componentes) que los futuros profesores priorizaron en sus reflexiones sobre modelización y con qué contenidos matemáticos decidieron implementar la modelización. En esta sección, se realiza una síntesis de los resultados de ambos estudios destacando estos dos aspectos.

8.2.1. Sobre los criterios y componentes de los CID priorizados en la reflexión

El cuarto paso del análisis de contenido desarrollado en los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#) consistió en categorizar los comentarios valorativos relacionados con la modelización de acuerdo con los componentes de los CID en que los futuros profesores reflexionaron cuando elaboraron cada comentario. Esto llevó a identificar 317 comentarios valorativos en los 82 TFM's que cumplieron con las condiciones para ser considerados para este análisis. En la Figura 20 se presentan una serie de gráficos que compara, entre ambos años académicos analizados, el panorama general de criterios y la visión específica sobre cada componente de los CID.

Comparación Global de Criterios



Figura 20. Comparación de criterios y componentes de los CID en ambos estudios.
Fuente: Elaboración del autor a partir de los resultados de los estudios presentados en los Capítulos 4 y 5.

8.2.2. Sobre los contenidos matemáticos en que se implementó la modelización

El segundo paso del análisis de contenido desarrollado en los estudios presentados en los Capítulos 4 y 5 consistió en elaborar una base de datos con los TFMs de cada año académico donde uno de los datos identificativos era el contenido matemático que se abordaba en cada TFM. De este modo, una vez se desarrolló la clasificación de los TFMs de acuerdo con los cuatro niveles de referencia a la modelización, se identificaron los contenidos matemáticos con los que los futuros profesores implementaron la modelización. En la Figura 21 se presenta un gráfico que compara, entre ambos años académicos analizados, el panorama general de los contenidos matemáticos con los que se implementó este proceso, a partir de la organización curricular vigente en el contexto de este estudio.

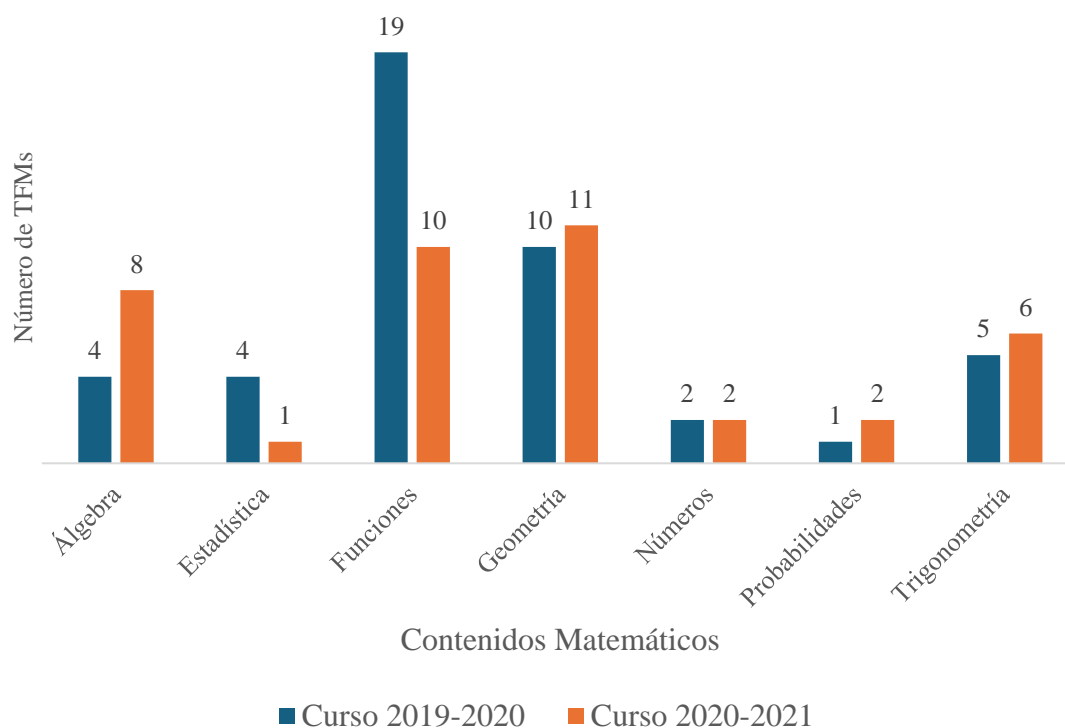


Figura 21. Comparación de los contenidos matemáticos que implementaron modelización en ambos estudios.

Fuente: Elaboración del autor a partir de los resultados de los estudios presentados en los Capítulos 4 y 5.

8.2.3. Conclusiones sobre las comparaciones

Los resultados de los estudios presentados en los Capítulos 4 y 5 muestran similitudes en los dos aspectos que se destacaron en esta investigación. En cuanto a los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático (criterios y componentes de los CID), en ambos estudios se observó una priorización de los criterios epistémico y ecológico en las

reflexiones de los futuros profesores sobre modelización, así como también una escasa consideración de los criterios interaccional y mediacional en sus reflexiones. En cuanto a los contenidos matemáticos, en ambos estudios se observó una tendencia a implementar la modelización con los temas de funciones y geometría, así como también una escasa consideración de los temas de estadística, números, y probabilidades.

En esta sección, no se elaboraron discusiones o conclusiones adicionales sobre los resultados de los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#), sino que se presentó un panorama general que compara los resultados de ambos estudios. Esto se debe a que cada artículo ya contiene sus discusiones y conclusiones específicas y las secciones [4.7](#) y [5.7](#) realizan un comentario que las amplía y sintetiza. Lo que sí es relevante de abordar son las limitaciones de estos estudios, las cuales se discuten en la siguiente sección.

8.3. Limitaciones de esta Investigación Doctoral

En esta sección, se presentan algunas limitaciones de esta investigación, fundamentalmente, de carácter metodológico. Los estudios presentados en los Capítulos [3](#) y [7](#) son de carácter teórico-reflexivo y se elaboraron siguiendo la metodología de *Articulación de Teorías*. En cambio, los estudios presentados en los Capítulos [4](#), [5](#), y [6](#) son de carácter interpretativo y se elaboraron siguiendo la metodología de análisis de contenido. Con excepción del primer artículo, los cuatro estudios restantes siguen un principio naturalista, es decir, los investigadores no interfirieron directamente en el campo de estudio, pues el segundo y tercer artículo se dedicaron al análisis de los TFMs de los futuros profesores, el capítulo de libro al análisis de las tareas de modelización propuestas en estos TFMs, y el cuarto artículo (al igual que el primero) es una reflexión teórica entre expertos.

Aunque los estudios presentados en los Capítulos [3](#) y [7](#) no tuvieron necesidad de implementaciones en un campo de estudio determinado⁶¹, dado su foco teórico-reflexivo, los estudios presentados en los Capítulos [4](#), [5](#), y [6](#) podrían haber tenido diferentes resultados si los investigadores se hubieran involucrado en el campo de estudio. La revisión de la literatura presentada en las subsecciones [1.2.3.2](#) y [1.2.3.3](#) incluye, en su

⁶¹ Para el caso del primer artículo, este estudio contó con una etapa de implementación acotada a la resolución de un problema de modelización en el contexto de una instancia educativa ad-hoc para ello, que no fue especialmente diseñada para tales fines.

mayoría, estudios empíricos en que los investigadores aprovecharon ampliamente las instancias educativas en modelización para futuros profesores establecidas institucionalmente (seminarios de pregrado, talleres de educación continua, experiencias de postgrado) o crearon escenarios para posibilitar estas instancias educativas (cursos especiales en modelización). Esta situación no pudo ser posible con los estudios presentados en los Capítulos [4](#), [5](#), y [6](#) puesto que, a pesar de haber considerado en el proyecto doctoral inicial la observación de clases y, de ser posible, la intervención directa del doctorando en el submódulo sobre modelización incluido en el programa de máster, existieron limitaciones que provocaron que este objetivo se descartara, tales como la duración del programa de máster (un año académico), la reducida duración de cuatro sesiones del submódulo sobre modelización y su metodología de trabajo principalmente expositiva, la pandemia por COVID-19 (que llevó a darle un enfoque más enriquecedor a estos estudios), las limitaciones propias de los centros de práctica con los futuros profesores, entre otras. En otras palabras, hubiese sido interesante haber intervenido directamente en el submódulo de modelización o en cualquier otra instancia creada para posibilitar la enseñanza de este proceso a los futuros profesores.

No obstante, lo expuesto en esta sección no pretende, bajo ningún punto de vista, ser una crítica a los enfoques metodológicos utilizados ni a los resultados de los estudios presentados en esta tesis doctoral, sino más bien, ofrece una mirada que justifica porque se optó por una metodología y no por otra, y se plantea un escenario hipotético que, más que una limitación, es considerado en retrospectiva como una instancia para futuras proyecciones de esta investigación, tema que se abordará en la siguiente sección.

8.4. Futuras Proyecciones de esta Investigación Doctoral

En esta sección, se presentan algunas proyecciones para continuar con esta investigación en diferentes planos. En la [primera subsección](#), se plantean futuros desarrollos para el ciclo de modelización y el modelo de análisis para este proceso propuestos en esta tesis doctoral; en la [segunda subsección](#), se plantean futuros desarrollos para la reflexión y educación docente en modelización; y en la [tercera subsección](#), se plantean futuros desarrollos que trascienden de los resultados presentados hasta ahora.

8.4.1. Futuros desarrollos del CMMSC y del Modelo de Análisis Semiótico-Cognitivo

Esta primera línea de desarrollo consiste en poner a prueba, tanto el CMMSC como el *Modelo de Análisis Semiótico-Cognitivo*, en estudios de carácter empírico. Esto se justifica en la necesidad de validar ambas herramientas no sólo en el plano de los estudios teóricos que se han desarrollado hasta el momento en los Capítulos [3](#) y [7](#), sino también en distintos contextos de implementación y niveles educativos.

Una línea interesante sería la articulación del CMMSC con otros procesos relevantes de la actividad matemática, como la argumentación y la representación, esta última con el objetivo de refinar la propuesta de representaciones de la Figura 19. Al mismo tiempo, esto permitiría enriquecer el *Modelo de Análisis Semiótico-Cognitivo* al hacerlo más fino y detallado en el análisis de la actividad matemática subyacente a este proceso.

Otra línea interesante sería el estudio de las subcompetencias de modelización en el CMMSC con el objetivo de refinar (de ser necesario) las transiciones del ciclo e identificar los posibles bloqueos o errores que puedan experimentar los individuos cuando resuelven problemas de modelización. Al mismo tiempo, esto permitiría refinar la capacidad del CMMSC para modelizar la actividad de modelización.

8.4.2. Futuros desarrollos de la reflexión y educación docente en modelización

Esta segunda línea de desarrollo consiste en aportar herramientas para la reflexión, tanto para profesores en formación como en servicio, sobre la implementación de la modelización, así como también en refinar el desarrollo de competencias profesionales asociadas con este proceso. Esto se justifica en la necesidad de ampliar la mirada sobre la modelización más allá de la educación inicial de profesores.

Una línea interesante sería la propuesta de una pauta de criterios, componentes, e indicadores de los CID específicamente diseñada para la implementación de la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. En los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#), se destaca el valor de los CID como principios de la Didáctica de la Matemática, mientras que en la [subsección 1.2.1.2](#), se destacan las reflexiones sobre los argumentos que justifican la inclusión de la modelización en la educación matemática. Con estos dos elementos, se realizó una reflexión preliminar sobre los argumentos que justifican y los principios que orientan la inclusión de la modelización

en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase Ledezma, Font et al., [2022](#)), con el objetivo de sentar las bases para crear una pauta de CID específicamente diseñada para la implementación de la modelización.

Otra línea interesante sería la propuesta de conocimientos y competencias profesionales específicos para la modelización, a partir del Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del Profesor (propuesto en los trabajos de Godino et al., [2017](#); Pino-Fan et al., [2023](#); entre otros) que emerge del EOS. Si bien el tema de los conocimientos y competencias profesionales en modelización ya ha sido ampliamente abordado en la literatura, la incorporación del CCDM a esta discusión aportaría una mirada diferente que, además, sería complementaria tanto con la propuesta de una pauta de CID para la modelización como con el *Modelo de Análisis Semiótico-Cognitivo*.

Finalmente, tal como se menciona en la [sección 6.7](#), si bien el capítulo de libro presentado en esta tesis doctoral utilizó las mismas bases de datos de TFMs creadas en los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#), se consideró un año académico adicional. Esto llevó a la creación de una nueva base de datos para los TFMs del año académico 2021–2022, lo cual requirió que nuevamente se desarrollara un análisis de contenido con los 98 TFMs del curso correspondiente. No obstante, los resultados de este último análisis de contenido no se incluyeron en esta tesis doctoral dado que no formaron parte de ninguna publicación del compendio planificado. Aun así, se proyecta hacer una síntesis de los resultados de los estudios presentados en los Capítulos [4](#) y [5](#) para aportar una mirada más amplia de la reflexión de futuros profesores sobre la implementación de la modelización en tres contextos de enseñanza: virtual (curso 2019–2020), híbrido (curso 2020–2021), y presencial (curso 2021–2022).

8.4.3. Otras proyecciones

Finalmente, se proponen algunas líneas de desarrollo que trascienden de los resultados presentados en esta tesis doctoral. Una línea interesante sería el estudio del papel de las competencias transversales en el proceso de modelización, como en el caso de la creatividad o del aprendizaje autorregulado⁶². Otra línea interesante sería el diseño e implementación de propuestas didácticas que involucren el uso de herramientas

⁶² Una propuesta sobre esta línea de desarrollo se presenta en Ledezma, Hidalgo-Moncada, y Sánchez ([2024](#)).

tecnológicas avanzadas para la resolución de problemas de modelización con el CMMSC, como inteligencia artificial, realidad aumentada y/o virtual, y también aproximaciones con la Educación STEAM.

8.5. Publicaciones Derivadas de la Tesis Doctoral

Además de las publicaciones presentadas en los Capítulos 3–7, a lo largo de esta investigación doctoral, se elaboraron otros estudios que se encontraban en consonancia con el proyecto doctoral trazado. Las publicaciones listadas en las subsecciones [8.5.1](#) y [8.5.2](#) tuvieron la intención de presentar avances del trabajo desarrollado, permitir validaciones metodológicas, o simplemente, se derivaron de los análisis de contenido realizados. En la [subsección 8.5.3](#), se presentan las instancias académicas en las que el doctorando fue invitado a exponer su trabajo.

8.5.1. Artículos

Los siguientes dos artículos se derivan de los análisis de dos TFMs (de los años académicos 2019–2020 y 2020–2021, respectivamente), en donde se puso a prueba la metodología de análisis de contenido con el uso de los CID⁶³:

Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2021). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría. *PARADIGMA*, XLII(Extra 2), 290–312. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043>

Ledezma, C., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Reflexão de uma futura professora sobre o ensino de álgebra através da modelagem matemática. *INTERMATHS*, 2(2), 227–244. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.9644>

El siguiente artículo se deriva del análisis de un TFM en términos de la argumentación realizada por su autor en la reflexión sobre el diseño e implementación de un problema de modelización durante su práctica educativa:

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher

⁶³ Estos artículos no se incluyeron en esta tesis doctoral ya que no alcanzan a cubrir totalmente el cumplimiento del segundo objetivo de investigación.

when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics*, 10(18), Artículo 3339. <https://doi.org/10.3390/math10183339>

8.5.2. Actas de congresos

Las siguientes publicaciones corresponden a participaciones en eventos académicos donde se presentaron avances del primer objetivo de investigación:

Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367–375). SEIEM.

Ledezma, C., Font, V., y Sala-Sebastià, G. (2023). Modelización matemática desde una articulación teórica entre los enfoques cognitivo y onto-semiótico. En S. Caviedes, J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, y A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp. 129–137). Universidad de Los Lagos.

Las siguientes publicaciones corresponden a participaciones en eventos académicos donde se presentaron avances del segundo objetivo de investigación:

Ledezma, C., Font, V., y Llanes, A. (2021). Importancia de la modelización en las propuestas didácticas de futuros profesores de matemática. En A. Figueroa, G. Meza, M. Moya, S. Navarrete, M. Silva, y A. Quiroz (Eds.), *Actas XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 325–329). SOCHIEM, EEMIE-UCSH.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri, y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195–204). PME.

Ledezma, C., Breda, A., Sánchez, A., y Sala, G. (2022). Didactic suitability criteria related to reflection on the implementation of mathematical modelling in a virtual context. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3634–3641). Free University of Bozen-Bolzano, ERME.

Ledezma, C., Font, V., Sánchez, A., y Montoya-Delgadillo, E. (2023). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling in two transitional teaching contexts. En M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 386). PME.

Ledezma, C., Hidalgo-Moncada, D., Vargas, J. P., y Font, V. (2023). Reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática en los contextos de enseñanza virtual y presencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. Magreñán, E. Badillo, y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 315–322). SEIEM.

La siguiente publicación corresponde a la participación en un evento académico donde se presentó una proyección del segundo objetivo de investigación:

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G., y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.

La siguiente publicación corresponde a la participación en un evento académico donde se presentó un avance del tercer objetivo de investigación:

Ledezma, C., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). ¿Qué tipos de tareas proponen los futuros profesores para trabajar la modelización matemática? En G. Morales-Ramírez, J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, S. Caviedes, S. Retamal, y M. Márquez (Eds.), *Actas XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 451–456). SOCHIEM; Universidad de Los Lagos.

8.5.3. Seminarios, conferencias, y otras instancias de divulgación

En primer lugar, se listan los seminarios del grupo de investigación en la Universidad de Barcelona donde el doctorando presentó los avances de su investigación:

- Una mirada general vs una mirada específica sobre la actividad matemática de la modelización (27/febrero/2020).
- Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría (17/noviembre/2020).

- Criterios de idoneidad didáctica relacionados a la reflexión sobre la implementación de la modelización matemática en un contexto virtual (03/diciembre/2021).
- Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica (08/abril/2022).
- El papel de las conexiones extra-matemáticas en el proceso de modelización (01/marzo/2024).

En segundo lugar, se listan las conferencias en que se invitó al doctorando a exponer en calidad de experto en modelización:

- Modelización matemática: Interrogantes, perspectivas y un nuevo enfoque (Universidad de La Frontera, Chile, 11/septiembre/2020).
- Modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo (Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras, 11/agosto/2021).
- Modelización matemática (Universidad de Panamá, 25/junio/2022).
- Modelización matemática (Universidad de San Carlos de Guatemala, 12/julio/2022).
- La matemática y su relación con otras áreas – Modelización matemática (Universidad de San Carlos de Guatemala, 18/agosto/2022).
- Un enfoque para la modelización matemática (Universidad de Panamá, 28/octubre/2023).

En tercer lugar, se listan las presentaciones especiales del doctorando en otras instancias académicas:

- Una mirada a la modelización matemática desde un networking entre la perspectiva cognitiva y el EOS (Grupo de discusión del EOS en RELME 35, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, 06/julio/2022).
- A view on mathematical modelling from theoretical frameworks of Mathematics Education (Coloquio de investigación, Universidad de Kassel, Alemania, 27/abril/2023).

Referencias –

References

A

- Abassian, A., Safi, F., Bush, S., y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53–65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>
- Abramovich, S. (2013). Modeling as isomorphism: The case of teacher education. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp 501–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_43
- Albarracín, L., y Ärlebäck, J. B. (2022). Esquemas de resolución de problemas de Fermi como herramienta de diseño y gestión para el profesor. *Educación Matemática*, 34(2), 289–309. <https://doi.org/10.24844/EM3402.11>
- Alwast, A., y Vorhölter, K. (2022). Measuring pre-service teachers' noticing competencies within a mathematical modeling context – An analysis of an instrument. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 263–285. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8>
- Alwast, A., y Vorhölter, K. (2023). Pre-service teachers' knowledge and noticing competencies for teaching mathematical modelling regarding students' use of metacognitive strategies. En G. Greefrath, S. Carreira, y G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 207–222). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_13
- Ang, K. C. (2021). Computational thinking and mathematical modelling. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 19–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_2
- Anhalt, C. O., y Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(6), 523–545. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9309-8>
- Antonius, S., Haines, C., Højgaard, T., y Niss, M. (con Burkhardt, H.). (2007). Classroom activities and the teacher. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss

- (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 295–308). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_31
- Araújo, J. d. L., y Campos, I. d. S. (2015). Negotiating the use of mathematics in a mathematical modelling project. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 283–293). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_23
- Ärlebäck, J. B. (2020). A case study of tensions and challenges arising as a Swedish upper secondary teacher designs and implements a model development sequence on statistics. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 139–150). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_13
- Ärlebäck, J. B., y Frejd, P. (2013). Modelling from the perspective of commognition – An emerging framework. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 47–56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_3
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Asempapa, R. S., y Sastry, A. M. (2021). Examining preservice teachers' (PSTs') familiarity and experiences with mathematical modeling practices. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(3), 214–229. <https://doi.org/10.1080/19477503.2021.1936987>
- Ayalon, M., Koichu, B., Leikin, R., Rubel, L., y Tabach, M. (Eds.). (2023). *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vols. 1–4). PME.
- Aydogan, A., Erbas, A. K., Cakiroglu, E., Alacaci, C., y Cetinkaya, B. (2017). Developing teachers' models for assessing students' competence in mathematical modelling through lesson study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(6), 895–912. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1298854>

Aydogan, A., Erbas, A. K., Cakiroglu, E., Cetinkaya, B., y Alacaci, C. (2018). Mathematics teachers' knowledge and skills about questioning in the context of modeling activities. *Teacher Development: An International Journal of Teachers' Professional Development*, 22(4), 497–518. <https://doi.org/10.1080/13664530.2017.1338198>

B

Badillo, E., Font, V., y Edo, M. (2015). Analyzing the responses of 7-8 year olds when solving partitioning problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 811–836. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9495-8>

Bal, A. P., y Doğanay, A. (2014). Improving primary school prospective teachers' understanding of the mathematics modeling process. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 14(4), 1375–1384.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 293–301. <https://doi.org/10.1007/BF02652812>

Barbosa, J. C. (2007). Mathematical modelling and parallel discussions. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2101–2109). University of Cyprus; ERME.

Barquero, B. (Ed.). (2021). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis [Número especial]. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17>

Bassanezi, R. C., y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13–25.

Berry, J. S., Burghes, D. N., Huntley, I. D., James, D. J. G, y Moscardini, A. O. (Eds.). (1984). *Teaching and Applying Mathematical Modelling*. Ellis Horwood.

Berry, J. S., Burghes, D. N., Huntley, I. D., James, D. J. G, y Moscardini, A. O. (Eds.). (1986). *Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros*. Ellis Horwood.

- Berry, J. S., Burghes, D. N., Huntley, I. D., James, D. J. G., y Moscardini, A. O. (Eds.). (1987). *Mathematical Modelling Courses*. Ellis Horwood.
- Besser, M., Blum, W., y Leiss, D. (2015). How to support teachers to give feedback to modelling tasks effectively? Results from a teacher-training-study in the Co²CA Project. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 151–160). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_11
- Biehler, R., y Leiss, D. (2010). Empirical research on mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 5–8. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0004-0>
- Biembengut, M. S., y Faria, T. M. B. (2011). Mathematical modelling in a distance course for teachers. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 269–278). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_27
- Bikner-Ahsbabs, A., y Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education - How can we deal with it? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(1), 52–57. <https://doi.org/10.1007/BF02655905>
- Bikner-Ahsbabs, A., y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 489–506). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_46
- Bikner-Ahsbabs, A., y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., y Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194>
- Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *Nordisk matematikdidaktik*, 1(1), 18–39.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. En B. A. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. Lester, A. Wallby,

- y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145–159). National Center for Mathematics Education.
- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning of mathematical modelling – Categorising the TSG21 papers. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey, Mexico, July 6–13, 2008* (Reporte Nro. 461, pp. 1–17). Tekster fra IMFUFA, Roskilde Universitet. <http://thiele.ruc.dk/imfufatekster/pdf/461.pdf>
- Blomhøj, M., y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 22(3), 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blomhøj, M., y Højgaard, T. (2007). What’s all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 45–56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3
- Blomhøj, M., Højgaard, T., Kjeldsen, T. H., y Ottesen, J. (2001). *Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse: udvikling af et kursus* (Reporte Nro. 402). Tekster fra IMFUFA, Roskilde Universitet. <http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/402.pdf>
- Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 163–177. <https://doi.org/10.1007/bf02655887>
- Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. H. (2009). Project organised science studies at university level: exemplarity and interdisciplinarity. *ZDM – Mathematics Education*, 41(1–2), 183–198. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0102-3>
- Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. H. (2018). Interdisciplinary problem-oriented project work – A learning environment for mathematical modelling. En S. Schukajlow y W.

- Blum (Eds.), *Evaluerte Lernumgebungen zum Modellieren* (pp. 11–29). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-20325-2_2
- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), 195–232.
<http://www.urn.fi/urn:nbn:de:hebis:34-2009061728274>
- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – A review of arguments and instructional aspects. En M. Niss, W. Blum, y I. Huntley (Eds.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 10–29). Ellis Horwood.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1–2), 149–171.
<https://doi.org/10.1023/a:1022435827400>
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15–30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W., Berry, J. S., Biehler, R., Huntley, I. D., Kaiser-Messmer, G., y Profke, L. (Eds.). (1989). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. Ellis Horwood.
- Blum, W., y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., y Leiß, D. (2007a). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W., y Leiß, D. (2007b). Investigating quality mathematics teaching – The DISUM project. En C. Bergsten y B. Grevholm (Eds.), *Developing and Researching*

- Quality in Mathematics Teaching and Learning: Proceedings of MADIF 5* (pp. 3–16). SMDF.
- Blum, W., y Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. En W. Blum, M. Niss, e I. Huntley (Eds.), *Modelling, Applications and Applied Problem Solving: Teaching Mathematics in a Real Context* (pp. 1–21). Ellis Horwood.
- Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. <https://doi.org/10.1007/bf00302716>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86–95. <https://doi.org/10.1007/bf02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2007a). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 260–270). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260>
- Borromeo Ferri, R. (2007b). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080–2089). University of Cyprus, ERME.
- Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9784-8>
- Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 18–24.
- Borromeo Ferri, R. (2017). Pre-service teachers' levels of reflectivity after mathematical modelling activities with high school students. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and*

- Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 201–210). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_17
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Borromeo Ferri, R. (2021). Mandatory mathematical modelling in school: What do we want the teachers to know? En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 103–117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_9
- Borromeo Ferri, R., Greefrath, G., y Kaiser, G. (Eds.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0>
- Borromeo Ferri, R., Kaiser, G., y Paquet, M. (2023). Meeting the challenge of heterogeneity through the self-differentiation potential of mathematical modeling problems. En R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All* (pp. 409–429). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_22
- Borromeo Ferri, R., y Lesh, R. (2013). Should interpretation systems be considered to be models if they only function implicitly? En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 57–66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_4
- Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'Histoire des Mathématiques*. Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1984). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-33981-6>
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 69–88. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04>
- Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S., y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología Estudio de Clases. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 263–288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>
- Breda, A., y Lima, V. M. d. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio.

- REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74–103.
<https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1955>
- Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y V. Warfield, Trads.). Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Browder, F. E. (1976). The relevance of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 83(3), 249–254. <https://doi.org/10.2307/2318212>
- Burghes, D. N. (1984). Prologue. En J. S. Berry, D. N. Burghes, I. D. Huntley, D. J. G. James, y A. O. Moscardini (Eds.), *Teaching and Applying Mathematical Modelling* (pp. xi–xiv). Ellis Horwood.
- Burghes, D. N., Huntley, I., y McDonald, J. (1982). *Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling*. Ellis Horwood.
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40–68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics*. Blackie.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral, Simon Fraser University]. Aurora: LAC's Library Catalogue. <https://bac-lac.on.worldcat.org/oclc/755208445>

C

- Cabassut, R., y Ferrando, I. (2017). Difficulties in teaching modelling: A French-Spanish exploration. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in*

- Mathematics Education* (pp. 223–232). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_19
- Cai, J., LaRochelle, R., Hwang, S., y Kaiser, G. (2022). Expert and preservice secondary teachers' competencies for noticing student thinking about modelling. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 431–453. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10071-y>
- Cakmak Gurel, Z., y Bekdemir, M. (2022). The teacher and peer intervention for pre-service mathematics teachers on the validity of mathematical models. *Pedagogical Research*, 7(2), Artículo em0120. <https://doi.org/10.29333/pr/11800>
- Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: Una mirada desde las conexiones matemáticas y el enfoque onto-semiótico. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 16(1), 25–56. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817>
- Carreira, S., y Blum, W. (Eds.). (2021a). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 1 [Número especial]. *Quadrante*, 30(1).
- Carreira, S., y Blum, W. (Eds.). (2021b). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 1 [Número especial]. *Quadrante*, 30(2).
- Carrejo, D. J., y Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect mathematics to the study of motion. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 45–76. <https://doi.org/10.1007/BF03217449>
- Cetinkaya, B., Kertil, M., Erbas, A. K., Korkmaz, H., Alacaci, C., y Cakiroglu, E. (2016). Pre-service teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(4), 287–314. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219932>
- Cevikbas, M., Kaiser, G., y Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 205–236. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6>

- Chan, K. K., y Leung, S. W. (2014). Dynamic geometry software improves mathematical achievement: Systematic review and meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research*, 51(3), 311–325. <https://doi.org/10.2190/EC.51.3.c>
- Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: Teachers' thinking and practice. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 325–332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_34
- Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q., y Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(4), 919–948. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9259-7>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Çıltaş, A., e Işık, A. (2013). The effect of instruction through mathematical modelling on modelling skills of prospective elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 13(2), 1187–1192.
- Claudia, L. F., Kusmayadi, T. A., y Fitriana, L. (2021). Semiotic analysis of mathematics problems-solving: Configure mathematical objects viewed from high mathematical disposition. *Journal of Physics: Conference Series*, 1808, Artículo 012048. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1808/1/012048>
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8ª ed.). Routledge.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Autor.
- Cosmes, S. (2020). *La Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. El Caso de Ingeniería Civil* [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Repositorio Institucional PUCV. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0500/UCB0533_01.pdf
- Cosmes, S., y Montoya-Delgadillo, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling – The case of training civil engineers in a course of structural analysis. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G.

Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 527–537). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_44

D

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technocracy: A trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 131–153. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_3

de Bock, D., y Vanpaemel, G. (2015). Modern mathematics at the 1959 OEEC Seminar at Royaumont. En K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. Prytz, y G. Schubring (Eds.), *“Dig Where You Stand” 3. Proceedings of the third International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 151–168). Uppsala University, Department of Education.

de Bock, D. (Ed.). (2023). *Modern Mathematics: An International Movement?* Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2>

de Bock, D., y Zwaneveld, B. (2020). From Royaumont to Lyon: Applications and modelling during the 1960s. En G. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 407–417). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_35

de Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning: Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences*. Rijksuniversiteit Utrecht.

Deniz Yilmaz, D., Çakmak Gürel, Z., y Özturan Sağirli, M. (2023). Comparing the learning environments related to mathematical modelling through distance education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 24(1), 17–39. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v24i1.459>

Deniz-Yilmaz, D., e Incesu, M. (2022). Introducing prospective mathematics teachers to the dual modelling cycle. *International Online Journal of Educational Sciences*, 14(1), 232–253.

Departament d'Educació. (2019). *Currículum Educació Secundària Obligatòria*. Generalitat de Catalunya.

Departament d'Ensenyament. (2008). *Currículum Batxillerat*. Generalitat de Catalunya.

Didiş Kabar, M. G., y Erbaş, A. K. (2021). Pre-service secondary mathematics teachers' anticipation and identification of students' thinking in the context of modelling

- problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 208–236. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670368>
- Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 255–268. <https://doi.org/10.1007/BF02652809>
- Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110–136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- Doerr, H. M., y Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 125–140). Lawrence Erlbaum.
- Doerr, H. M., y Lesh, R. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 247–268). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_26
- Dolores-Flores, C., y García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 158–180. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08>
- Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K., y E. Kónya. (Eds.). (2023). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.
- Durandt, R., y Jacobs, G. J. (2017). Mathematical modelling strategies and attitudes of third year pre-service teachers. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 243–253). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_21
- Durandt, R., y Lautenbach, G. V. (2020). Pre-service teachers' sense-making of mathematical modelling through a design-based research strategy. En G. A.

Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 431–441). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_37

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>

E

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297–319. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0>

Engelbrecht, J., Borba, M. C., y Kaiser, G. (2023). Will we ever teach mathematics again in the way we used to before the pandemic? *ZDM – Mathematics Education*, 55(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01460-5>

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. En S. J. Lamon, W. A. Parker, y K. Houston (Eds.), *Mathematical Modelling: A Way of Life – ICTMA 11* (pp. 3–17). Horwood Publishing.

English, L. D. (2013). Modeling with complex data in the primary school. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp. 287–299). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_25

English, L. D., Ärlebäck, J. B., y Mousoulides, N. (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. En Á. Gutiérrez, C. G. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 383–413). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_11

Escalante, C. C. (2013). Secondary teachers learn and refine their knowledge during modeling activities in a learning community environment. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp. 459–469). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_39

Esqué, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta idoneidad didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38–54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>

Evitts, T. A. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* (Publicación N. ° 3157533) [Tesis doctoral, The Pennsylvania State University]. ProQuest Dissertations and Theses Global.

F

Faith, M. (2020). Evaluating pre-service teachers' design of mathematical modelling tasks. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 28(1), 44–59. <https://doi.org/10.30722/IJISME.28.01.004>

Falcó-Solsona, P. J., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2024). Inquiry and mathematical modelling with real-archaeological objects in secondary education. *Education Sciences*, 14(3), Artículo 304. <https://doi.org/10.3390/educsci14030304>

Fazio, C., Di Paola, B., y Guastella, I. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of the processes of modeling: A case study. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 8(1), Artículo 010110. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010110>

Fernández, C., Llinares, S., Gutiérrez, A., y Planas, N. (Eds.). (2022). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vols. 1–4). PME.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 220–242. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11>

Fischer, R., y Malle, G. (1984). *Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Interuniversitäres Forschungsinstitut für Fernstudien.

Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 249–279.

- Font, V., y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(1), 33–52. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V., Giménez, J., Zorrilla, J. F., Larios, V., Dehesa, N., Aubanell, A., y Benseny, A. (2012). Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas. Una propuesta. En V. Font, J. Giménez, V. Larios, y J. F. Zorrilla (Eds.), *Competencias del Profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato* (pp. 59–68). Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.
- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Font, V., y Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, 13(2), 55–67.
- Font, V., y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua Didattica*, 24(1–2), 97–123.
- Förster, F. (2011). Secondary teachers' beliefs about teaching applications – Design and selected results of a qualitative case study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 65–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_8
- Frenken, L. (2021). Measuring students' metacognitive knowledge of mathematical modelling. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 215–225). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_18
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1–2), 3–8. <https://doi.org/10.1007/bf00426224>
- Freudenthal, H. (1969). Allocution du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique Lyon, 24-31 août 1969. *Educational Studies in Mathematics*, 2(2–3), 135–138. <https://doi.org/10.1007/bf00303453>
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47234-1>

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. <https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3>
- Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment – A literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 413–438. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9491-5>
- Frejd, P., y Vos, P. (2024). The spirit of mathematical modeling – A philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education. *The Mathematics Enthusiast*, 21(1–2), 269–300. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1626>
- Friedman, M., y Krauthausen, K. (2022). How to grasp an abstraction: Mathematical models and their vicissitudes between 1850 and 1950. Introduction. En M. Friedman y K. Krauthausen (Eds.), *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century* (pp. 1–49). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-97833-4_1
- G**
- Galbraith, P. L., y Haines, C. R. (1997). Some mathematical characteristics of students entering applied mathematics degree courses. En S. K. Houston, W. Blum, I. D. Huntley, y N. T. Neill (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Innovation, Investigation and Applications* (pp. 77–92). Albion Publishing.
- Galbraith, P., y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/bf02655886>
- Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., y Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 130–140). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.130>
- Gallart, C., Ferrando, I., y García-Raffi, L. M. (2015). El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria. *SUMA*, 79, 9–16.
- García, F. J., y Ruiz-Higueras, L. (2011). Modifying teachers’ practices: The case of a European training course on modelling and applications. En G. Kaiser, W. Blum,

- R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 569–578). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_55
- García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 912–936. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- García-Marimón, O., Diez-Palomar, J., Morales-Maure, L., y Durán-González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta criterios de idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 35(70), 1047–1072. <http://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23>
- Garfunkel, S., y Montgomery, M. (Eds.). (2019). *GAIMME: Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Educational* (2ª ed.). COMAP, SIAM.
- Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 305–314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31
- Geiger, V., Mulligan, J., Date-Huxtable, L., Ahlip, R., Jones, D. H., May, E. J., Rylands, L., y Wright, I. (2018). An interdisciplinary approach to designing online learning: Fostering pre-service mathematics teachers' capabilities in mathematical modelling. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 217–232. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0920-x>
- Gellert, U., Jablonka, E., y Keitel, C. (2001). Mathematical literacy and common sense in mathematics education. En B. Atweh, H. Forgasz, y B. Nebres (Eds.), *Sociocultural Research on Mathematics Education: An International Perspective* (pp. 57–76). Routledge.

- Gerber, S., Quarder, J., Greefrath, G., y Siller, H.-S. (2023). Promoting adaptive intervention competence for teaching simulations and mathematical modelling with digital tools: Theoretical background and empirical analysis of a university course in teacher education. *Frontiers in Education*, 8, Artículo 1141063. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1141063>
- Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, Artículo e172011. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>
- Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary teachers' beliefs on modelling in geometry and stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 75–84). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_9
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2–3), 237–284.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111–132.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 177–195). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_12
- Godino, J. D., Batanero, C., y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA: Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), Artículo em2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38–43.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 47–59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90–113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Gould, H., Murray, D. R., y Sanfratello, A. (2012). *Mathematical Modeling Handbook*. COMAP.
- Govender, R. (2020). Mathematical modelling: A ‘growing tree’ for creative and flexible thinking in pre-service mathematics teachers. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 443–453). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_38
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, y L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 7–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_2
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 137–144). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

- Gravemeijer, K., y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1–3), 111–129. <https://doi.org/10.1023/A:1003749919816>
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling – Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 301–305). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modelling. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 173–183). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_13
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., y Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. En R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe* (pp. 11–37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0_1
- Greefrath, G., y Siller, H.-S. (2018). Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. En G. Greefrath y H.-S. Siller (Eds.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren: Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (pp. 3–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21940-6_1
- Greefrath, G., y Siller, H.-S. (2024). Editorial: Mathematical modelling through and with digital resources. *Frontiers in Education*, 9. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1382594>
- Greefrath, G., Siller, H.-S., Klock, H., y Wess, R. (2022). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 383–407. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10038-z>
- Greefrath, G., y Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9>

- Greer, B., y Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies – Overview. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 219–224). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_22
- Gregersen, P., y Højgaard, T. (1998). *Problemløsning og modellering i en almindelig matematikundervisning* (Reporte Nro. 353). Tekster fra IMFUFA, Roskilde Universitet. https://forskning.ruc.dk/files/2050841/IMFUFA_353.pdf
- Guevara, G. (2011). Estructuras de argumentos. En L. Vega y P. Olmos (Eds.), *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica* (pp. 239–243). Trotta.
- Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los Procesos Metacognitivos en la Comprensión de las Prácticas de los Estudiantes Cuando Resuelven Problemas Matemáticos: Una Perspectiva Ontosemiótica* [Tesis doctoral no publicada] Universidade de Santiago de Compostela.

H

- Hagena, M. (2015). Improving mathematical modelling by fostering measurement sense: An intervention study with pre-service mathematics teachers. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 185–194). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_14
- Haines, C., Crouch, R., y Davis, J. (2001). Understanding students' modelling skills. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, y S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9 – Applications in Science and Technology* (pp. 366–380). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099655.5.366>
- Hankeln, C. (2018). Wie viel Simulieren steckt im Modellieren? Empirische Analysen von Simulations- und Modellierungsprozessen am Computer. En G. Greefrath y H.-S. Siller (Eds.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren: Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (pp. 67–89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21940-6_4
- Hansen, R. (2021). Pre-service teachers' facilitations for pupils' independency in modelling processes. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong

- (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 283–292). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_24
- Henn, H.-W., y Meyer, J. (Eds.). (2014). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1: ISTRON-Schriftenreihe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-03628-7>
- Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J., y Vanegas, Y. (2023). Prácticas de autorregulación en la propuesta didáctica de un futuro profesor de matemáticas: Un instrumento para la reflexión. *PARADIGMA*, XLIV(2), 112–146. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p112-146.id1384>
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Hilton, P. J. (1973). *Le Langage des Catégories* (J.-C. Matthys, Trad.). Cédic.
- Hodgen, J., Geraniou, E., Bolondi, G., y Ferretti, F. (Eds.). (2022). *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)*. Free University of Bozen-Bolzano; ERME.

I

- Ikeda, T., y Stephens, M. (2021). Investigating pre-service teachers’ experiences with the “A4 paper format” modelling task. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 293–304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_25
- Ikeda, T., Stephens, M., y Matsuzaki, A. (2007). A teaching experiment in mathematical modelling. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 101–109). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.101>
- Inprasitha, M., Changsri, N., y Boonsena, N. (Eds.). (2021). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vols. 1–4). PME.

Isoda, M., Arcavi, A., y Mena-Lorca, A. (Eds.). (2012). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global* (3ª ed.). Ediciones Universitarias de Valparaíso.

J

Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? – A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2), 307–330. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10215-2>

Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M., y Veldhuis, M. (Eds.). (2019). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute; Utrecht University; ERME.

Jiang, Q., Xie, J., y Ye, Q. (2007). An introduction to CUMCM. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 168–175). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.168>

Julie, C., y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_58

Jung, H.-Y., y Lee, K.-H. (2021). How mathematical modelling can be promoted by facilitating group creativity. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 377–387). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_31

K

Kacerja, S., Julie, C., Gierdien, M. F., Herheim, R., Lilland, I. E., y Smith, C. R. (2021). South African and Norwegian prospective teachers' critical discussions about mathematical models used in society. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 501–511). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_42

- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110–119). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.110>
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 553–561). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Kaiser, G., Blomhøj, M., y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 82–85. <https://doi.org/10.1007/bf02655882>
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., y Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, y H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 357–383). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_13
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., y Stillman, G. (Eds.). (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2>
- Kaiser, G., Borba, M. C., Schukajlow, S., y Stillman, G. A. (Eds.). (2018). Empirical research on the teaching and learning of mathematical modeling [Número especial]. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2).
- Kaiser, G., y Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 129–149). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10
- Kaiser, G., y Schukajlow, S. (Eds.). (2022). Innovations in measuring and fostering modelling competencies [Número especial]. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2).
- Kaiser, G., Schwarz, B., y Buchholtz, N. (2011). Authentic modelling problems in mathematics education. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 591–601). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_57

- Kaiser, G., Schwarz, B., y Tiedemann, S. (2013). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp. 433–444). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_37
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., y García, F. J. (2007). Report from the working group Modelling and Applications – Differentiating perspectives and delineating commonalities. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2035–2041). University of Cyprus; ERME.
- Kaiser, G., y Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 277–293). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_23
- Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht – Bd. 1: Theoretische Konzeptionen, Bd. 2: Empirische Untersuchungen*. Franzbecker Verlag.
- Kaiser-Messmer, G. (1988). Anwendungen im Mathematikunterricht – Konzeptionen und Untersuchungen zur unterrichtlichen Realisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 9(4), 337–338. <https://doi.org/10.1007/BF03339300>
- Kaiser-Messmer, G. (1993). Reflection on future developments in the light of empirical research. En T. Breiteig, I. Huntley, y G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in Context* (pp. 213–218). Ellis Horwood.
- Klein, B., y McDonald, B. (2015). Mathematical modeling. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(6), 324.
- Klein, F. (2016a). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint – Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis* (G. Schubring, Trad.; ed. 2016). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49442-4>

- Klein, F. (2016b). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint – Volume II: Geometry* (G. Schubring, Trad.; ed. 2016). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49445-5>
- Klein, F. (2016c). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint – Volume III: Precision Mathematics and Approximation Mathematics* (M. Menghini, G. Schubring, Trad.; ed. 2016). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49439-4>
- Koç, D., y Elçi, A. N. (2022). The effect of mathematical modeling instruction on pre-service primary school teachers' problem solving skills and attitudes towards mathematics. *Journal of Pedagogical Research*, 6(4), 111–129. <https://doi.org/10.33902/JPR.202217783>
- Koellner-Clark, K., y Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 159–173). Lawrence Erlbaum.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum.
- Kuntze, S. (2011). In-service and prospective teachers' views about modelling tasks in the mathematics classroom – Results of a quantitative empirical study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 279–288). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_28
- Kuntze, S., Siller, H.-S., y Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling – An empirical study with Austrian teachers. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 317–326). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_13
- Kutluca, T., y Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11(21), 240–274. <https://doi.org/10.18009/jcer.1242785>

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>

L

la Bastide-van Gemert, S. (2015). *All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9334-6>

Lantau, J.-M., Bracke, M., Bock, W., y Capraro, P. (2020). The design of a successful teacher training to promote interdisciplinary STEM modelling projects. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 455–465). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_39

Ledezma, C. (2017). *Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Højgaard* [Tesis de magíster, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Repositorio Institucional PUCV. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.27061.35048> (versión actualizada)

Ledezma, C. (2018). La función exponencial basada en el estudio de clases. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática*, 11(1), 33–37.

Ledezma, C., Breda, A., y Font, V. (2023). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Artículo individual. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8>

Ledezma, C., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Reflexão de uma futura professora sobre o ensino de álgebra através da modelagem matemática. *INTERMATHS*, 2(2), 227–244. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.9644>

Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2021). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso

- de instrucción para enseñar trigonometría. *PARADIGMA*, XLII(Extra 2), 290–312. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043>
- Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, 35(4), 715–741. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>
- Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G., y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.
- Ledezma, C., Hidalgo-Moncada, D., y Sánchez, A. (2024). The role of self-regulation practices in mathematical modelling. *CEMeR: Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, 14(1).
- Ledezma, C., Sala, G., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher’s reflection on the role of mathematical modelling in his master’s thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri, y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195–204). PME.
- Ledezma, C., Sánchez, A., e Hidalgo-Moncada, D. (2024). Reflexiones de futuros profesores sobre la implementación de la modelización matemática en el retorno a la enseñanza presencial. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 38, Artículo e230170. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170>
- Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics*, 10(18), Artículo 3339. <https://doi.org/10.3390/math10183339>
- Lesh, R., y Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 173–194. <https://doi.org/10.1007/s10758-007-9121-3>

- Lesh, R., y Doerr, H. M. (Eds.). (2003a). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., y Fennewald, T. (2013). Introduction to Part I Modeling: What is it? Why do it? En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp 5–10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_2
- Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C., y Hurford, A. (Eds.). (2013). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8>
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591–646). Routledge.
- Lesh, R., y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2–3), 109–129. <https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996>
- Lesh, R., Niss, M., y Lee, D. (1986). Theme group 6: Applications and modelling. En M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (pp. 197–211). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4238-1_16
- Lesh, R., y Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 490–505. <https://doi.org/10.1007/BF02655858>
- Liljedahl, P., y Santos-Trigo, M. (Eds.). (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6>

- Lingefjård, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 96–112. <https://doi.org/10.1007/bf02655884>
- Lingefjård, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – Necessity or unnecessarily. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 333–340). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_35
- Lingefjård, T., y Meier, S. (2010). Teachers as managers of the modelling process. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 92–107. <https://doi.org/10.1007/BF03217568>
- Lu, X., y Kaiser, G. (2022). Creativity in students’ modelling competencies: Conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 287–311. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y>
- Ludwig, M., y Reit, X.-R. (2013). A cross-sectional study about modelling competency in secondary school. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 327–337). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_27

M

- Maaß, J. (2007). Ethik im Mathematikunterricht? Modellierung reflektieren! En G. Greefrath y J. Maaß (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 11: Unterrichts- und Methodenkonzepte* (pp. 54–61). Franzbecker.
- Maaß, J., O’Meara, N., Johnson, P., y O’Donoghue, J. (2018). *Mathematical Modelling for Teachers: A Practical Guide to Applicable Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-00431-6>
- Maaß, J., y Siller, H.-S. (Eds.). (2014). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2: ISTRON-Schriftenreihe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-05003-0>
- Maaß, K. (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(2), 114–142. <https://doi.org/10.1007/BF03339013>
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113–142. <https://doi.org/10.1007/bf02655885>

- Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 63–78). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.2.63>
- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285–311. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2>
- Maass, K., Artigue, M., Burkhardt, H., Doorman, M., English, L. D., Geiger, V., Krainer, K., Potari, D., y Schoenfeld, A. (2022). Mathematical modelling – A key to citizenship education. En N. Buchholtz, B. Schwarz, y K. Vorhölter (Eds.), *Initiationen mathematikdidaktischer Forschung: Festschrift zum 70. Geburtstag von Gabriele Kaiser* (pp. 31–50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36766-4_2
- Maass, K., y Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 273–285. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0911-y>
- Maaß, K., y Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 629–639). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_60
- Malaspina, U., y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107–130. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9243-8>
- Malaspina, U., Torres, C., y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research* (pp. 133–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7
- Manouchehri, A. (2017). Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in*

- Mathematics Education* (pp. 421–432). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_35
- Matos, J., y Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. En C. Sloyer, W. Blum, e I. Huntley (Eds.), *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 71–80). Water Street Mathematics.
- Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 269–280. <https://doi.org/10.1007/bf02652810>
- Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 45, Artículo e189468. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201945189468>
- Moutet, L. (2016). *Diagrammes et Théorie de la Relativité Restreinte : Une Ingénierie Didactique* [Tesis doctoral, Université Paris Diderot]. Catalogue SUDOC. <https://www.sudoc.fr/22990405X>
- N**
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.
- Ng, K. E. D. (2010). Initial experiences of primary school teachers with mathematical modelling. En B. Kaur y J. Dindyal (Eds.), *Mathematical Applications and Modelling: Yearbook 2010, Association of Mathematics Educators* (pp. 129–147). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789814313353_0008
- Ng, K. E. D. (2013). Teacher readiness in mathematical modelling: Are there differences between pre-service and in-service teachers? En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 339–348). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_28
- Ng, K. E. D., Yeo, J. K. K., Chua, B. L., y Ng, S. F. (2019). Continuing from pre-service: Towards a professional development framework for mathematics teachers in the twenty-first century. En T. L. Toh, B. Kaur, y E. G. Tay (Eds.), *Mathematics*

- Education in Singapore* (pp. 405–427). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3573-0_17
- Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum – State and trends. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(4), 487–505. <https://doi.org/10.1080/0020739870180401>
- Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. En W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, y L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 22–31). Ellis Horwood.
- Niss, M. (1993). Assessment of mathematical modelling and applications in mathematics teaching. En J. de Lange, I. Huntley, C. Keitel, y M. Niss (Eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications* (pp. 41–51). Ellis Horwood.
- Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, y S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9 – Applications in Science and Technology* (pp. 72–88). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099655.1.72>
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. G. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2008). Perspectives on the balance between applications and modelling and ‘pure’ mathematics in the teaching and learning of mathematics. En M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, y F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education* (pp. 69–84). Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Niss, M., y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315189314>
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics*

- Education: The 14th ICMI Study* (pp. 3–32). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1
- Niss, M., y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- O**
- Orey, D. C., y Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 173–185.
<https://doi.org/10.1007/s11858-018-0930-8>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD Publishing.
<https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2005). *Marcos Teóricos de PISA 2003 – Conocimientos y Destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas* (E. Belmonte, Trad.). OECD Publishing; INECSE.
<https://doi.org/10.1787/9789264065963-es>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing.
<https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing.
<https://doi.org/10.1787/dfc0bf9c-en>
- Organisation for European Economic Co-Operation. (1961). *New Thinking in School Mathematics*. Autor.
- Ortiz, J., Rico, L., y Castro, E. (2007). Mathematical modelling: A teachers’ training study. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 241–249). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.241>
- Ortlieb, C. P. (2004). Mathematische Modelle und Naturerkenntnis. *Mathematica Didactica*, 27(1), 23–40. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2004.1023>

P

- Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 201–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_20
- Park, J. Y. (2017). A commognitive perspective on pre-service secondary teachers' content knowledge in mathematical modelling. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 289–299). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_25
- Peña, F., Solares, A., Preciado, A., y Ortiz, A. (2023). Comparación de tendencias sobre la modelización matemática entre Latinoamérica y el resto del mundo: Una revisión bibliográfica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 37(76), 532–554. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a08>
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., y Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(5), 1407–1432. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value functions: Two theoretical perspectives. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 11(2), 97–124.
- Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1–2), 24–30. <https://doi.org/10.1007/bf00426228>
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2–3), 393–404. <https://doi.org/10.1007/bf00303471>
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En B. Christiansen, T. J. Fletcher, A. Revuz, L. A. Santaló, y H.-G. Steiner (Eds.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 232–248). UNESCO.
- Pollak, H. O. (2003). A history of the teaching of modelling. En G. Stanic y J. Kilpatrick (Eds.), *A History of School Mathematics* (pp. 647–671). NCTM.

- Pollak, H. O. (2007). Mathematical modelling – A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 109–120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_9
- Praetorius, A.-K., y Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forward. *ZDM – Mathematics Education*, 50(3), 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Preciado, A. P., Peña, F., Ortiz, Y. A., y Solares, A. (2023). Diversity of perspectives on mathematical modelling: A review of the international landscape. En G. Greefrath, S. Carreira, y G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 43–57). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_3
- Prediger, S., Bikner-Ahsbabs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM – Mathematics Education*, 40(2), 165–178. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z>
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., y Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, Artículo 969212. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.969212>
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205–235). Sense Publishers.
- Psycharis, G., y Potari, D. (2017). Mathematics teachers' learning at the boundaries of teaching and workplace. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 301–312). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_26

R

- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM – Mathematics Education*, 40(2), 317–327. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., Blomberg, J., y Leopold, C. (2022). Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. *Applied Cognitive Psychology*, 36(2), 402–417. <https://doi.org/10.1002/acp.3930>
- Remillard, A. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources: Advances and Issues* (pp. 69–88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4
- Reusser, K. (1998). Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. En F. Klix y H. Spada (Eds.), *Sonderdruck aus Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich C: Theorie und Forschung, Serie II: Kognition, Band 6: Kognition* (pp. 115–166). Hogrefe.
- Rodríguez, M. A., Ledezma, C., Vergara, A., y Gregori, P. (2021). Reconstrucción cognitiva de los conceptos centrales de la función exponencial: Un estudio de enfoque mixto. *Formación Universitaria*, 14(6), 149–164. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062021000600149>
- Rodríguez-Nieto, C. A. (2021). *Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un Networking of Theories entre la Teoría de las Conexiones y el Enfoque Ontosemiótico* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Guerrero]. Repositorio Institucional de la UAGro. <https://ri.uagro.mx/handle/uagro/3768>
- Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., y Font, V. (2022). A new view about connections: The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231–1256. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254>

- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f' . *Educational Studies in Mathematics*, 114(1), 63–88. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9>
- Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona. <https://hdl.handle.net/2445/65704>
- Rudi, R., Suryadi, D., y Rosjanuardi, R. (2020). Identifying students' difficulties in understanding and applying Pythagorean theorem with an onto-semiotic approach. *MaPan: Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, 8(1), 1–18. <https://doi.org/10.24252/mapan.2020v8n1a1>

S

- Saeki, A., Kanedo, M., Kawakami, T., Ikeda, T. (2023). In-service teachers' transformation of a mathematised task into modelling tasks. En G. Greefrath, S. Carreira, y G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 241–257). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_15
- Sala, G., Font, V., Giménez, J., y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325–335). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28
- Sala-Sebastià, G., Font, V., y Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Cuadrante*, 30(1), 116–139. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23590>
- Sánchez, A. (2021). *Perspectivas de los Futuros Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria sobre la Creatividad y su Desarrollo en las Clases* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona. <https://hdl.handle.net/2445/187046>

- Sánchez, A., Font, V., y Breda, A. (2022). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*, 34(4), 863–885. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w>
- Sandoval-Troncoso, L. A. (2021). *Desarrollo del Discurso Matemático con los Objetos Funciones y Series de Funciones: Estudio de Casos de Profesores y Estudiantes en la Universidad* [Tesis doctoral no publicada]. Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Sandoval-Troncoso, L., y Ledezma, C. (2021). Los gestos, una manera de comunicar matemática: El caso particular de las funciones. *Educación Matemática*, 33(2), 205–226. <https://doi.org/10.24844/EM3302.08>
- Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 641–651). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_61
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 53–70). Erlbaum.
- Schorr, R. Y., y Koellner-Clark, K. (2003). Using a modeling approach to analyze the ways in which teachers consider new ways to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2–3), 191–210. <https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679999>
- Schorr, R. Y, y Lesh, R. (2003). A modeling approach for providing teacher development. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 141–157). Lawrence Erlbaum.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice*. SAGE.
- Schukajlow, S., y Blum, W. (2023). Methods for teaching modelling problems. En G. Greefrath, S. Carreira, y G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 327–339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_20

- Schukajlow, S., Kaiser, G., y Stillman, G. (2023). Modeling from a cognitive perspective: Theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning*, 25(3), 259–269. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012631>
- Schupp, H. (1989). Applied mathematics instruction in the lower secondary level – Between traditional and new approaches. En W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, y L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 37–48). Ellis Horwood.
- Sen Zeytun, A., Cetinkaya, B., y Erbas, A. K. (2017). Understanding prospective teachers' mathematical modeling processes in the context of a mathematical modeling course. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(3), 691–722. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00639a>
- Sen Zeytun, A., Cetinkaya, B., y Erbas, A. K. (2024). Why do prospective teachers have difficulties in mathematical modelling? Insights from their perspectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(1), 94–117. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2171922>
- Sevinc, S., y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 301–314. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>
- Sevinc, S., y Lesh, R. (2022). Pre-service mathematics teachers' web of knowledge recalled for mathematically rich and contextually realistic problems. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 471–494. <https://doi.org/10.30935/scimath/12250>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Shahbari, J. A., y Tabach, M. (2016). Developing modelling lenses among practicing teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 717–732. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1106015>
- Shahbari, J. A., y Tabach, M. (2019). Adopting the modelling cycle for representing prospective and practising teachers' interpretations of students' modelling activities. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in*

- Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 179–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_10
- Shahbari, J. A., y Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers. *Educational Studies in Mathematics*, 105(2), 115–135. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Siller, H.-S., Geiger, V., y Greefrath, G. (2023). The role of digital resources in mathematical modelling in extending mathematical capability. En B. Pepin, G. Gueudet, y J. Choppin (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1–28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_18-1
- Siller, H.-S., Greefrath, G., Wess, R., y Klock, H. (2023). Pre-service teachers' self-efficacy for teaching mathematical modelling. En G. Greefrath, S. Carreira, y G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 259–274). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_16
- Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(1), 18–40. <https://doi.org/10.1007/BF03338964>
- Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 35–57. <https://doi.org/10.1007/BF01284527>
- Skovsmose, O., y Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. En P. Valero y R. Zevenberger (Eds.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology* (pp. 207–226). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-7914-1_17
- Sousa, J. R., Gusmão, T. C. R. S., Font, V., y Lando, J. C. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Acta Scientiae*, 22(4), 98–120. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711>
- Sriraman, B., y English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research.

- Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 450–456.
<https://doi.org/10.1007/BF02655853>
- Sriraman, B., Kaiser, G., y Blomhøj, M. (2006). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 212–213. <https://doi.org/10.1007/bf02652805>
- Stacey, K., y Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. En A. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, y F. K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 721–751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23
- Stachowiak, H. (1973). *Allgemeine Modelltheorie*. Springer-Verlag.
- Steen, L. A. (1999). Theories that gyre and gimble in the Wabe [Revisión del libro *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, por A. Sierpiska y J. Kilpatrick, Eds.]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 235–241. <https://doi.org/10.2307/749614>
- Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Steiner, H.-G. (1968). Examples of exercises in mathematization on the secondary school level. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1–2), 181–201. <https://doi.org/10.1007/BF00426243>
- Steiner, H.-G. (1976). Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts. En W. Dörfler y R. Fischer (Eds.), *Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II: Vorträge des 1. Kärntner Symposions für Didaktik der Mathematik v. 28.9.–1.10.1976 in Klagenfurt* (pp. 211–245). Heyn.
- Stillman, A. (1998). The emperor’s new clothes? Teaching and assessment of mathematical applications at the senior secondary level. En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, e I. D. Huntley (Eds.), *Mathematical Modelling: Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp. 243–253). Horwood Publishing.
- Stillman, G., y Brown, J. P. (2011). Pre-service secondary mathematics teachers’ affinity with using modelling tasks in teaching years 8–10. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of*

- Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 289–298). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_29
- Stillman, G., Brown, J., y Galbraith, P. (2010). Researching applications and mathematical modelling in mathematics learning and teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 1–6. <https://doi.org/10.1007/BF03217561>
- Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., y Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5>
- Stillman, G. A., Kaiser, G., y Lampen, C. E. (2020). Sense-making in mathematical modelling and applications educational research and practice. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 15–29). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_2
- Stohlmann, M., y Yang, Y. (2023). Investigating the alignment to mathematical modelling of teacher-created mathematical modelling activities available online. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(5), 671–686. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1961030>

T

- Tan, L. S., y Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling – A case study. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 373–383). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_31
- Tanner, H., y Jones, S. (1993). Developing metacognition through peer and self assessment. En T. Breiteig, I. Huntley, y G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in Context* (pp. 228–240). Ellis Horwood.
- Tanner, H., y Jones, S. (1995). Developing metacognitive skills in mathematical modelling – A socio-constructivist interpretation. En C. Sloyer, W. Blum, e I. Huntley (Eds.), *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 61–70). Water Street Mathematics.

- Tekin, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 292–314. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825>
- Tekin Dede, A., y Bukova, E. (2023). Reflections from planning and implementing a modelling task. *IEJME: International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(1), Artículo em0728. <https://doi.org/10.29333/iejme/12821>
- Thomas, K., y Hart, J. (2013). Pre-service teachers' perceptions of model eliciting activities. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp 531–538). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_46
- Tidwell, W., Anhalt, C. O., Cortez, R., y Kohler, B. R. (2023). Development of prospective elementary teachers' mathematical modelling competencies and conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(10), 2176–2196. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2005170>
- Toerner, G., y Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 86, 52–54.
- Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument* (2ª ed.). Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en 1954)
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*. D. Reidel Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9>
- Tschannen-Moran, M., y Woolfolk Hoy, A. (2001). Teacher efficacy: Capturing an elusive construct. *Teaching and Teacher Education*, 17(7), 783–805. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(01\)00036-1](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(01)00036-1)
- Turner, R. (2007). Modelling and applications in PISA. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 433–440). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_48
- Turner, E. E., Bennett, A. B., Granillo, M., Ponnuru, N., Mcduffie, A. R., Foote, M. Q., Aguirre, J. M., y McVicar, E. (2024). Authenticity of elementary teacher designed

and implemented mathematical modeling tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 47–70. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2028225>

Turner, R., Dossey, J., Blum, W., y Niss, M. (2013). Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA: A MEG Study. En M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schöps, y S. Rönnebeck (Eds.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009* (pp. 23–37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4458-5_2

V

Van Dooren, W., Verschaffel, L., y Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, 33(5), 319–351. <https://doi.org/10.2307/4149957>

Van Dooren, W., Verschaffel, L., y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(1), 27–52. <https://doi.org/10.1023/a:1022109006658>

van Eemeren, F., y Grootendorst, R. (2004). *A Systematic Theory of Argumentation: The Pragma-Dialectical Approach*. Cambridge University Press.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.

Verdugo-Hernández, P., Huincahue, J., Cumsille, P., y Nechache, A. (2022). Articulación entre el ciclo de modelización de Blomhøj y espacios de trabajo matemático. Análisis de una tarea en educación superior. *Acta Scientiae*, 24(7), 62–91. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7135>

Vergel, R., Godino, J. D., Font, V., y Pantano, Ó. L. (2023). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach on the school algebra nature and learning. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 475–496. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00400-y>

Verschaffel, L., de Corte, E., y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of

- school word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 339–359. [https://doi.org/10.1016/s0959-4752\(97\)00008-x](https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00008-x)
- Verschaffel, L., Greer, B., y de Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Swets & Zeitlinger.
- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis: Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16), 133–148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>
- Villarreal, M. E., Esteley, C. B., y Smith, S. (2015). Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En G. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 567–578). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_48
- vom Hofe, R., y Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Supl. 1), 225–254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>
- Vos, P. (2011). What is ‘authentic’ in the teaching and learning of mathematical modelling? En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 713–722). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_68

W

- Wake, G. D. (2011). Teachers' professional learning: Modelling at the boundaries. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 653–662). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_62
- Wang, Y. (2021). Investigation of the mathematics modelling competency of mathematics undergraduate student teachers. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 239–247). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_20
- Wendt, L., Vorhölter, K., y Kaiser, G. (2020). Teachers' perspectives on students' metacognitive strategies during mathematical modelling processes – A case study.

- En G. A. Stillman, G. Kaiser, y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-Making* (pp. 335–346). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_29
- Wess, R., Klock, H., Siller, H.-S., y Greefrath, G. (2021). *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling: A Test Instrument*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5>
- Wiegand, S., y Borromeo Ferri, R. (2023). Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. *ZDM – Mathematics Education*, 55(7), 1269–1282. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01500-8>
- Wijaya, A., van den Hauvel-Panhuizen, M., y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 41–65. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1>
- Williams, J., y Goos, M. (2013). Modelling with mathematics and technologies. En A. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, y F. K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 549–569). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_18
- Williams, S. R., y Leatham, K. R. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 369–396. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.4.0369>
- Winter, M., y Venkat, H. (2013). Pre-service teacher learning for mathematical modelling. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 395–404). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_33

Y

- Yang, X., Schwarz, B., y Leung, I. K. C. (2022). Pre-service mathematics teachers' professional modeling competencies: A comparative study between Germany, Mainland China, and Hong Kong. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 409–429. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10064-x>
- Yilmaz, S., y Tekin-Dede, A. (2016). Mathematization competencies of pre-service elementary mathematics teachers in the mathematical modelling process.

International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), 4(4), 284–298.

Yu, S.-Y., y Chang, C.-K. (2011). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modelling teaching? En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 147–156). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_16

Z

Zbiek, R. M., y Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63(1), 89–112. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9002-4>

Zbiek, R. M., Peters, S. A., Galluzzo, B., y White, S. J. (2024). Secondary mathematics teachers learning to do and teach mathematical modeling: A trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(1), 55–83. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09550-7>

Referencias
References

Índice de Anexos –

Index of Annexes

Annex 1: English Translation for Chapter 1 – Introduction.....	309
A1.1. Motivation of the Study	309
A1.1.1. First approaches to mathematical modelling.....	309
A1.1.2. Hindsight	310
A1.1.3 Repercussions on doctoral research	311
A1.2. Research Background	312
A1.2.1. Historical evolution of modelling research	312
A1.2.1.1. <i>First half of the twentieth century</i>	312
A1.2.1.2. <i>Second half of the twentieth century</i>	313
A1.2.1.3. <i>Twenty-first century</i>	319
A1.2.2. Terminological clarifications	322
A1.2.2.1. <i>Problem</i>	322
A1.2.2.2. <i>Problem solving</i>	322
A1.2.2.3. <i>Modelling</i>	323
A1.2.2.4. <i>Modelling problem</i>	324
A1.2.2.5. <i>Mathematical model</i>	326
A1.2.2.6. <i>Modelling cycle</i>	328
A1.2.2.7. <i>Modelling competency (or competencies)</i>	337
A1.2.2.8. <i>Modelling perspectives</i>	342
A1.2.3. Research on mathematical modelling	353
A1.2.3.1. <i>Reflections on modelling cycles</i>	354
A1.2.3.2. <i>Modelling in teacher education</i>	358
A1.2.3.3. <i>Professional competencies and mathematical processes in</i> <i>modelling</i>	368
A1.3. Structure of the Doctoral Thesis	372
A1.3.1. Chapters and language	372
Annex 2: English Translation for Chapter 2 – Research Problem, Questions, and	
Objectives	375
A2.1. Formulating the Research Problem	375

A2.2. First Research Question and Objective.....	375
A2.3. Second Research Question and Objective	377
A2.4. Third Research Question and Objective	378
A2.5. Fourth Research Question and Objective	379
A2.6. Synthesis of Research Questions and Objectives	380
Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo	
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article.....	383
Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo	
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article.....	391
Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo	
Annex 3: Database of MFPs from the Third Article.....	503
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo	
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article.....	511
Annex 7: English Translation for Chapter 8 – Conclusions.....	595
A7.1. Proposal for Refinement of the Modelling Cycle.....	595
A7.1.1. Presentation and description of a modelling cycle.....	596
A7.1.2. Representations in the SCMMC.....	597
A7.1.3. Didactic implications	599
A7.2. Presence of Modelling in the Didactic Proposals of the Prospective Teachers...600	
A7.2.1. On the DSC criteria and components prioritised in the reflection	600
A7.2.2. On the mathematical contents in which modelling was implemented	602
A7.2.3. Conclusions about the comparisons	602
A7.3. Limitations of this Doctoral Research	603
A7.4. Future Projections of this Doctoral Research	604
A7.4.1. Future developments of the SCMMC and Semiotic-Cognitive Analysis Model	604

A7.4.2. Future developments in reflection on and teacher education in modelling	605
A7.4.3. Other projections	606
A7.5. Publications Derived from the Doctoral Thesis	606
A7.5.1. Articles	607
A7.5.2. Conference proceedings	607
A7.5.3. Seminars, conferences, and other dissemination instances	609

Annex 1: English Translation for Chapter 1 –

Introduction

This chapter introduces the present doctoral thesis. The first section (A1.1) explains the motivation that made it possible to conduct this investigation; the second section (A1.2) presents the background that justifies this investigation; and the third section (A1.3) describes the structure of this doctoral thesis.

A1.1. Motivation of the Study

The purpose of this first section is to present an overview, from the personal perspective of the doctoral candidate, about his work prior to doctoral studies and which motivated him to conduct this research. This section explains his first approaches to the study of modelling (subsection A1.1.1), the hindsight of his first research works (subsection A1.1.2), and the repercussions on the development of his doctoral research work (subsection A1.1.3).

A1.1.1. First approaches to mathematical modelling

This study originates from the interest of the doctoral candidate in research in the mathematical modelling process, fundamentally, as a result of the work developed during his studies in the postgraduate programme Master in Didactics of Mathematics at the Institute of Mathematics of the Pontifical Catholic University of Valparaíso (IMA-PUCV, Chile), during the years 2016 and 2017. In those two years, the doctoral candidate was introduced to the study of modelling from a more pedagogical than research perspective, due to the professionalising nature of the postgraduate programme. In accordance with the guidelines of this programme, students were asked to focus on one mathematical content taught at a certain educational level to develop a didactic proposal which, in turn, had to incorporate elements of some theoretical reference of Mathematics Education⁶⁴ (taught throughout the master's programme) for its implementation and subsequent analysis.

In this context, the doctoral candidate analysed the textbooks and curricular documents to delve into the approach to modelling in the classroom, focusing on the mathematical

⁶⁴ In this thesis, depending on the context, the terms «Didactics of Mathematics» (in Spanish language) and «Mathematics Education» (in English language) are used as affine terms to name this discipline of study.

object exponential function that was taught (until 2017) at the second grade of secondary education (students aged 15–16), with which he developed his didactic proposal framed in the methodology followed by the IMA-PUCV for this postgraduate programme based on Lesson Study (see Isoda et al., [2012](#)). The choice of both the mathematical object and the educational level was justified by the professional work of the doctoral candidate during said period of time. Likewise, the didactic design implemented with the students at this level considered the modelling cycle proposed by Blomhøj and Højgaard ([2003](#))⁶⁵ and some elements from the APOS Theory (Arnon et al., [2014](#)), since they were the theoretical references that the doctoral candidate considered most suitable for his needs and those of the expected results of his research.

As a result of this work, the thesis entitled *Study of Modelling with Exponential Function for Students of Second Grade of Secondary Education, according to the Blomhøj and Højgaard's Model* (Ledezma, [2017](#)) was prepared, which consists, on one hand, of a didactic proposal for teaching the exponential function through modelling for the second grade of secondary education and, on the other hand, of the analysis of the productions of some students who showed signs of incipient mental constructions of the exponential function up to the process level (in terms of the APOS Theory). From this master's thesis, the doctoral candidate only published a short article in which he summarises the main findings of his study (see Ledezma, [2018](#)), presented some results of his research in two academic events (at national and international level, respectively), and partially contributed to the design of a genetic decomposition for the exponential function (see Rodríguez et al., [2021](#)).

A1.1.2. Hindsight

Although the work carried out by the doctoral candidate during his postgraduate studies does not have the theoretical-methodological rigour required for the preparation of a master's thesis based exclusively on research, it also laid the foundations for the doctoral candidate to become interested in continuing to delve deeper into the study of modelling. More specifically, three questionable aspects are considered for the current state of research in modelling, which are detailed below.

⁶⁵ This reference entry also appears as «Blomhøj and Jensen (2003)» in some works; however, the reference entry «Blomhøj and Højgaard (2003)» is adopted in this thesis.

Firstly, the choice of the cycle of Blomhøj and Højgaard (2003; in turn, complemented by the work of Blomhøj, 2004) would not be the most appropriate at present. Although these authors have developed a contribution to research mostly recognised in the Danish context (for example, Blomhøj, 1993; Blomhøj et al., 2001; Blomhøj & Kjeldsen, 2006, 2009, 2018; Gregersen & Højgaard, 1998; among others) and the cycle proposed by these authors has been complemented with other educational perspectives (see Sala-Sebastià et al., 2021, for Inquiry-based Mathematics Education), in general terms, this cycle has not been widely worked on by the modelling research community and has been displaced by other cycles to characterise this process (see further discussion in subsection A1.2.2.6).

Secondly, the use of the term «*modelación*» (an inaccurate translation of the term «modelling» in Spanish language) to refer to the educational perspective of the modelling process enters a deep contradiction with the position and consensus reached by the modelling research community today⁶⁶.

Finally, the reductionist interpretation of the modelling process, which fundamentally limits it to the mathematisation of statements that do not necessarily meet the agreed characteristics for a modelling problem (see further discussion in subsection A1.2.2), is another conceptual error of this work.

These three questionable aspects, among others of lesser relevance to the investigation, made the doctoral candidate rethink the work previously carried out during his postgraduate studies and, once these were concluded, he continued to delve deeper, on his own, into the study of modelling from a perspective that transcended its teaching at the school level.

A1.1.3. Repercussions on doctoral research

Despite the three questionable aspects mentioned in the previous subsection, it is remarkable that the fact of having analysed modelling, although in an incipient way, with a theoretical reference from Mathematics Education such as the APOS Theory, allowed the doctoral candidate to broaden his view of this process. More specifically, it was this fact that motivated the doctoral candidate to continue delving deeper into the study of

⁶⁶ This discussion is only meaningful in Spanish language, so it will not be addressed in this translation.

modelling, not only considering it as a relevant process of mathematical activity from an educational perspective, but also complementing its understanding with other theoretical approaches, as is the case of Mathematical Working Spaces (MWS; Kuzniak et al., [2016](#)) or the Onto-Semiotic Approach (Godino et al., [2007](#)), the latter reflected in this thesis. Finally, it is emphasised that the self-criticism made by the doctoral candidate of his first research works in modelling is not intended to undermine or invalidate his results and academic achievements until before starting his doctoral work, but rather it aims to be evidence of his growth and development as a professional researcher in Mathematics Education.

A1.2. Research Background

The purpose of this second section is to present the theoretical framework of reference that was elaborated for this research since, due to space limitations in the presentation of the publications, it is not possible to go into depth with sufficient clarity about the background that supports the research work reported in this doctoral thesis. This section begins with the historical evolution of the modelling research field (subsection A1.2.1), continues with some terminological clarifications used in this work (subsection A1.2.2), and ends with a synthesis of the main investigations conducted in modelling, especially since the beginning of the twenty-first century (subsection A1.2.3).

A1.2.1. Historical evolution of modelling research

The first glimpses of including problems with a certain context in school mathematics education date back to the nineteenth century, specifically, regarding the teaching of arithmetic and geometry (Kaiser et al., [2015](#)). In other words, the idea of applying mathematical knowledge to everyday situations in teaching the subject is not new (Niss, [1987](#)). The following subsections present a brief historical overview of the important points of modelling research from the beginning of the twentieth century to the present.

A1.2.1.1. First half of the twentieth century

At the beginning of the twentieth century, the term model was fundamentally associated with three-dimensional material objects, and in the particular case of mathematical models, its relationship was exclusively with geometric aspects (Friedman &

Krauthausen, [2022](#)) (see further discussion in subsection A1.2.2.5). During this time, the German mathematician and educator Felix Klein (1849–1925) developed a study programme that integrated mathematical applications into the teaching of his pure mathematics courses (see Klein, [2016a](#), [2016b](#), [2016c](#)). Klein’s proposal was framed in curricular debates with a *utilitarian* approach, where the *raison d’être* for mathematics was considered to be its usefulness in science and society (Niss, [1987](#)). In this way, school teaching began to include problems of daily life, which were not always related to reality, but which sought to establish some type of relationship between the intra- and the extra-mathematical. For its part, university education at that time, restricted mainly to certain social minorities, had a fairly limited spectrum of applications of mathematics in areas such as physics, engineering, astronomy, and some disciplines in the economic field. Although Klein’s proposal was innovative for its time, the teaching of mathematics worldwide continued to be mainly based on performing calculations decontextualised from reality.

A1.2.1.2. Second half of the twentieth century

The Organisation for European Economic Co-Operation organised the *Royaumont Seminar* in Asnières-sur-Oise (France) 23rd November–5th December, 1959 (de Bock & Vanpaemel, [2015](#)), considered the event the officially began the *Modern Mathematics Reform* (Bourbaki, [1984/2007](#)) as a way to bridge the gap between school and university mathematics (Niss, [1987](#)). Despite having a strong theoretical orientation, this Reform intended to provide an ideal basis for addressing extra-mathematical issues where mathematics was applied (Niss, [2008](#)), that is, the need to reform mathematics education curricula from an applied and interdisciplinary perspective was raised. However, the dominant position was that of French structuralist school, where pure mathematics were the theoretical foundations for teaching the questions of applied mathematics (Organisation for European Economic Co-Operation, [1961](#)).

During the 1960s, the role of extra-mathematical situations in *Modern Mathematics* can be exemplified by the following Hilton’s ([1973](#)) distinction between *illustration* and *application*:

A situation, within or outside mathematics, is an *illustration* of a mathematical theory if and only if that situation clarifies the

theory. A situation is an *application* of a mathematical theory if and only if that situation is clarified by the theory. (de Bock & Zwaneveld, [2020](#), p. 411)

In this sense, there were no *applications* of higher-order mathematical structures (groups, fields, vector spaces) that were taught to students in school stages, and these structures could only be *illustrated* through concrete instantiations, such as materials or games created for this end (de Bock & Zwaneveld, [2020](#)).

During this time, the term *model* began to be used in the teaching of mathematics, although mainly related to physics, because it was the discipline with which this term was mostly associated (Niss, [1987](#)). However, this Reform did not have the expected results⁶⁷, among other reasons, due to the disconnection with the students' context and the excess of formalism in the teaching of mathematics, a situation that began to change at the end of the 1960s.

A particular academic event that massified curricular questions about the teaching of mathematics was the international colloquium *Why to Teach Mathematics so as to Be Useful*, held in Utrecht (Netherlands) 21–25 August 1967 (de Bock & Zwaneveld, [2020](#)). This colloquium is considered the first event in which different positions on the use of mathematics were discussed (la Bastide-van Gemert, [2015](#)), and its proceedings were published in the first issue of the journal *Educational Studies in Mathematics* of May 1968, where two conferences stand out.

Firstly, the conference by the Dutch mathematician Hans Freudenthal ([1968](#)), who begins by questioning two extreme positions for teaching mathematics: on one hand, the teaching that does not focus on the use of mathematics, since students are expected to use it when they need it; on the other hand, the teaching of useful mathematics. In this author's terms, the first position proved to have failed due the students' poor results in their capability to apply, while the second position, although not tried very often, is useful only when the application context does not change much. Finally, this author urges that the teaching of mathematics be focused mainly as a mathematisation activity instead of as a closed system, since otherwise, it would be the end of mathematics education.

⁶⁷ See a broader discussion about the *Modern Mathematics Reform* and its international implementation in de Bock ([2023](#)).

Secondly, the conference by the Austrian-American mathematician Henry O. Pollak (1968), who begins by proposing five misconceptions about the applications of mathematics: (1) only advanced mathematics is applied mathematics; (2) only classical physics leads to important and ‘real’ applications of mathematics; (3) the use of vocabulary from another discipline in a mathematical problem motivates mathematical applications in another discipline; (4) applied mathematics is very different from pure mathematics and requires different types of teaching; (5) applied mathematics is a very dense, deep, and difficult field to understand. To refute these five misconceptions, this author gives some examples of mathematical applications and highlights some academic initiatives of that time that point in that direction, from an educational perspective, for different areas of knowledge. Finally, although this author emphasises the difficulties of teachers in implementing examples of mathematical applications in the classroom, he urges that the search for more examples of this type continue, not only for university mathematics, but also for school mathematics.

Although these two conferences do not explicitly talk about modelling, but only about mathematical applications, they do give glimpses of the first research foci that, years later, would give way to a theoretical formalisation of mathematical modelling. In her doctoral work⁶⁸, Kaiser-Messmer (1986) distinguishes between two currents of discussion that emerged from a debate raised by these authors until the 1980s. On one hand, a pragmatic perspective focused on the use of mathematics to solve practical problems, led by the work and reflections of Pollak (1968, 1969). On the other hand, a scientific-humanist perspective focused on the interactions between mathematics and reality, where the theory is developed from the reality experienced by students, led by the work and reflections of Freudenthal (1968, 1969). More specifically, the Pollak’s contributions provided a circular structure to the idealised representations of the modelling process, and the Freudenthal’s contributions allowed it to delve deeper into the interactions between mathematics and the real world through horizontal/vertical mathematisation (Kaiser et al., 2015).

During the 20 years after the 1967 colloquium, a separation began to occur between two terms: *mathematical applications* and *mathematical modelling*. In July 1983,

⁶⁸ See a summary of this thesis in Kaiser-Messmer (1988).

mathematicians John Berry, David N. Burghes, Ian Huntley, Glynn James, and Alfredo Moscardini organised the first *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling* at the University of Exeter, England (Berry et al., 1984). This particular event began the formation of the *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA) which, to this day, holds international conferences every two years to address the topics of education in modelling and mathematical applications. In this way, the discussion on the focus of educational curricula regarding the integration of these two terms evolved, in terms of Niss (1987), in the way shown in Table 23.

Table 23. Change of focus on mathematical applications and modelling.

Criteria	From focus on	→	Towards focus on
Purpose	Applications in curriculum are intended to defend mathematics against criticism and declining student recruitment.		The interest in introducing applications and modelling into the curriculum is independent, going beyond the scope of mathematics and mathematics education.
Goals	To provide motivation or to improve the students' acquisition of mathematical concepts, theories, and methods.		To improve the activation of mathematics in situations and problems outside the mathematical world.
Content	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Internal</i> and <i>classical</i> topics. • <i>Applied/applicable</i> topics or that are being applied. • <i>Problem-situations</i> calling of the application of mathematics. 		<ul style="list-style-type: none"> • <i>Applied/applicable</i> topics, including 'new' ones. • <i>Applications</i>. • <i>Problem-situations</i> calling for the application of mathematics. • Problem-situations aimed at <i>illuminating aspects of the extra-mathematical world</i>.
Problems	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Well-defined</i>. • <i>Constructed</i>. • Work <i>inside the model</i> focused on its mathematical properties. 		<ul style="list-style-type: none"> • <i>Open-ended</i>. • <i>Real</i>. • Work with the <i>entire model</i>, including its non-mathematical aspects.
Organisation	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Separate courses</i> in applications and modelling. • <i>Independence</i> of other subjects. • <i>Short</i> sequences of applications and modelling. 		<ul style="list-style-type: none"> • <i>Integration</i> in the general mathematics programme. • <i>Interdisciplinary</i> cooperation. • <i>Long</i> sequences of applications and modelling.
Methods	Initiative is with the <i>teacher</i> , who manages the course of events.		<i>Students</i> work independently, often in groups, under teacher guidance.

Note: *Italics* from the original text. Source: Adapted from Niss (1987, p. 500).

This gradual change in mathematical applications and modelling, especially since the late 1980s, caused the focus to shift to answering three fundamental questions about their teaching in the classroom: *why* they should be taught, *what* of them should be taught, and *how* they should be taught. Faced with these questions, the works of the German mathematician Werner Blum and the Danish mathematician Mogens Niss (Blum, [1991](#); Blum & Niss, [1989](#), [1991](#); Niss, [1989](#)) shed light to answer them.

Firstly, these authors present five arguments (A) that justify *why* mathematical applications and modelling should be taught:

- (A1) The *formative* argument: They allow students to develop problem-solving competencies, along with creativity, exploration, open-mindedness, self-sufficiency, and self-confidence when facing this type of problem-situations.
- (A2) The *critical competence* argument: They allow students to generate, develop, and refine critical thinking to observe and judge the use (and misuse) of mathematics in society to address real-world problems.
- (A3) The *utility* argument: They allow students to relate their mathematical knowledge with other subjects in the curriculum, other disciplines of knowledge, or everyday life, whether in the present or future moment of the individuals.
- (A4) The *picture of mathematics* argument: They allow mathematics to be given a picture that highlights its importance as a science, as a tool in society, and as part of the cultural development of humanity.
- (A5) The *promoting mathematics learning* argument: They allow better acquisition, understanding, and retention of mathematical concepts, notions, methods, and results, as well as motivating and promoting mathematical study.

These arguments have different foci within mathematics education, that is, arguments (A1) y (A5) focus on the individual perspective of the student and their learning and development; argument (A2) focuses on the social perspective; argument (A3) focuses on the student's relationship with society; and argument (A4) focuses on the perspective of mathematics (Lingefjärd, [2006](#)).

Secondly, these authors propose three ways of making mathematical applications and modelling objects of study (*what* [W] to teach) and educational activities:

- (W1) To know the existing models and applications of mathematics, and the characteristics of the modelling.

(W2) To carry out modelling, either applying/modifying known models or building new ones.

(W3) To analyse and critically evaluate mathematical models according to their mathematical properties and their capability to represent the modelled reality.

Finally, these authors do not explicitly raise the answers to the question about *how* to teacher mathematical applications and modelling, although, on one hand, they suggest that research in Mathematics Education delve into this topic and, on the other hand, they recognise the existence of six approaches (P) in which the teaching of mathematical applications and modelling is organised (see Lesh et al., [1986](#)):

(P1) The *separation* approach: Teaching of these topics in two separate courses, that is, one for *pure mathematics* and another for *applied mathematics*.

(P2) The *two-compartment* approach: Teaching of these topics in the same course, where the first part is dedicated to *pure mathematics* and the second part to *applied mathematics* (applicable from what was learned in the first part).

(P3) The *islands* approach: Teaching of these topics in the same course, divided into several segments as in (P2), that is, each *pure mathematics* topic taught is then worked on from *applied mathematics* before moving on to the next topic.

(P4) The *mixing* approach: Teaching of mathematical concepts, methods, and results that point towards mathematical applications and modelling, where the mathematics necessary for its solving is given from the beginning.

(P5) The *mathematics curriculum integrated* approach: Teaching begins with the formulation of (mathematical or application) problems and then the mathematics necessary to solve them is taught. The problems point only to the mathematics established by the curriculum.

(P6) The *interdisciplinary integrated* approach: Very similar approach to (P5), but operating in a fully integrated framework with intra- and extra-mathematical topics, where mathematics is not organised as a separate subject.

These reflections led to mathematical applications and modelling beginning to be more formally introduced into international educational curricula, especially since the late 1990s.

A1.2.1.3. Twenty-first century

The turn of the century brought with it, among others, three great advances in terms of mathematical applications and modelling: first, a generalised recognition of the importance of these processes for the teaching of mathematics at all educational levels, materialised in their curricular inclusion at an international level (Lingefjärd, [2006](#)); second, a notable increase in interest in researching these topics; and third, a conceptual refinement to define and distinguish both terms (Blum, [2002](#)). Without downplaying the third advance (broadly addressed in subsection A1.2.2), this subsection will discuss the first and second advances.

In curricular terms, the National Council of Teachers of Mathematics' (NCTM, [2000](#)) approach to modelling stands out in three of its six principles:

- Curricular principle: “the curriculum should offer experiences that allow students to see that mathematics has powerful uses in modelling and predicting real-world phenomena” (pp. 15–16).
- Learning principle: “more attention can be given to understanding the number concepts and the modelling procedures used in solving problems” (p. 20).
- Technology principle: “The computational capacity of technological tools extends the range of problems accessible to students and also enables them to execute routine procedures quickly and accurately, thus allowing more time for conceptualizing and modelling” (p. 25).

In the same way, the NCTM ([2000](#)) curricular proposal makes it explicit that modelling is present in the content (Numbers and operations, Algebra, Geometry, Measurement, Data analysis and probability) and process (Problem solving, Reasoning and proof, Communication, Connections, Representation) standards. This position was replicated by different countries, where the curricular inclusion of modelling required the design and preparation of support materials for its implementation in the classroom, such as guides, handbooks, and textbooks (for example, Borrromeo Ferri et al., [2013](#); Garfunkel & Montgomery, [2019](#); Gould et al., [2012](#); Henn & Meyer, [2014](#); J. Maaß et al., [2018](#); J. Maaß & Siller, [2014](#); among others). In other words, the fact that modelling was considered part of the principles that guide mathematics teaching made it part of the content and means to achieve mathematical learning.

As a consequence of this curricular inclusion, modelling also began to form part of international assessments, as in the case of PISA, in the domain of mathematical literacy (Turner, [2007](#)). More specifically, since PISA was implemented, modelling is considered one of the eight mathematical competencies that are evaluated in this domain (Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD], [2004](#)) until today, although with slight conceptual variations (see further discussion in subsection A1.2.2.3).

In parallel with the curricular advance, modelling was also attracting the interest of more researchers in Mathematics Education in a more notable way than other forms of mathematical applications, in the sense that it predicts an apparent reconciliation between the intra- and the extra-mathematical (Pollak, [2003](#)), in addition to opening the door to a more meaningful mathematics education (Stillman et al., [2020](#)). More specifically, since 2005, a substantial growth in scientific production around modelling became evident (Kutluca & Kaya, [2023](#)), which materialised in, for example, the publication of special issues of journals dedicated to this topic, where the following stand out:

- In 2006, *ZDM – Mathematics Education* (then known as *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*) published two special issues entitled «Mathematical Modeling Research Around the World (Part A and B)» (vol. 38, no. 2: Kaiser et al., [2006](#); vol. 38, no. 3: Sriraman et al., [2006](#)).
- In 2007, *Technology, Knowledge and Learning* (then known as *International Journal of Computers for Mathematical Learning*) published a special issue entitled « Modeling as Application versus Modeling as a Way to Create Mathematics» (vol. 12, no. 3: Lesh & Caylor, [2007](#)).
- In 2010, *Journal für Mathematik-Didaktik* published a special issue entitled «Empirical Research on Mathematical Modelling» (vol. 31, no. 1: Biehler & Leiss, [2010](#)).
- In 2010, *Mathematics Education Research Journal* published a special issue entitled «Researching Applications and Mathematical Modelling in Mathematics Learning and Teaching» (vol. 22, no. 2: Stillman et al., [2010](#)).
- In 2015, *Mathematics Teaching in the Middle School* published a special issue with mathematical modelling activities (vol. 20, no. 6: Klein & McDonald, [2015](#)).

- In 2018, *ZDM – Mathematics Education* published a special issue entitled «Empirical Research on the Teaching and Learning of Mathematical Modeling» (vol. 50, nos. 1–2: Kaiser et al., [2018](#)).
- In 2021, *Advances in Research in Mathematics Education* (originally named *Avances de Investigación en Educación Matemática* in Spanish language) published a special issue entitled «Research on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling: Approaches for its design, implementation and analysis» (vol. 17: Barquero, [2021](#)).
- In 2021, *Quadrante* published two special issues entitled «Mathematical Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics (Part 1 and 2)» (vol. 30, nos. 1, 2: Carreira & Blum, [2021a](#), [2021b](#)).
- In 2022, *Educational Studies in Mathematics* published a special issue entitled «Innovations in Measuring and Fostering Modelling Competencies» (vol. 109, no. 2: Kaiser & Schukajlow, [2022](#)).
- In 2023, *Mathematical Thinking and Learning* published a special issue entitled «Modeling from a Cognitive Perspective» (vol. 25, no. 3: Schukajlow et al., [2023](#)).
- In 2024, *Frontiers in Education* published a research topic entitled «Mathematical Modelling through and with Digital Resources» (vol. 9: Greefrath & Siller, [2024](#)).

Along with the special issues mentioned above, the book series *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* has been published since 2011 (see Kaiser, Blum et al., [2011](#); Lesh et al., [2013](#); Stillman et al., [2013](#); among others). In this book series, different theoretical perspectives on modelling and its teaching at different educational levels (school and university) are addressed, and the proceedings of ICTMA conferences are published. Hand in hand with this growth and theoretical development around modelling, various international academic events have included thematic groups dedicated to its discussion, such as the *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME, see CERME 13 in Drijvers et al., [2023](#); CERME 12 in Hodgen et al., [2022](#); CERME 11 in Jankvist et al., [2019](#); among others) or the *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME, see PME 46 in Ayalon et al., [2023](#); PME 45 in Fernández et al., [2022](#); PME 44 in Inprasitha et al., [2021](#); among others).

Finally, in current times, modelling research not only considers the particularised study of this process, but also its articulation/concatenation with other relevant processes of mathematical activity, from a competency perspective, and in different educational contexts (students and teachers), as will be shown in detail in subsection A1.2.3.

A1.2.2. Terminological clarifications

Throughout the years of research in modelling, the definitions around this process have varied due not only to the advances in research in Mathematics Education, but also to the use and consideration of modelling in different areas (education, science, society) (Frejd & Vos, [2024](#)). Therefore, it is considered relevant to establish the definitions adopted for this research around the terms that form a fundamental part of mathematical modelling, which are addressed in this subsection.

A1.2.2.1. Problem

The first term to define is *problem*, understood as a situation that is performed with an open question and that represents an intellectual challenge for whoever faces it, since the solve does not know the methods, procedures, or algorithms involved in its solving (see also Schoenfeld, [1994](#)). Particularly, *problems* can be (a) *applied mathematical problems*, where the situation and the question(s) belong to some segment of the *real world* (rest of the world outside of mathematics, such as other disciplines, everyday life, etc.) and some mathematical concepts, methods, and results are involved; (b) *purely mathematical problems*, where the situation and the question(s) are totally immersed in a mathematical universe, and although they may emerge from *applied problems*, once they leave the extra-mathematical context, they cease to be *applied problems* (Blum & Niss, [1991](#)).

A1.2.2.2. Problem solving

The second term to define is *problem solving*, understood as the process of approaching a *problem* and trying to solve it. In turn, this process can be decomposed into the *applied mathematical* and *purely mathematical problem solving* (Blum & Niss, [1991](#)), hence this clarification will focus on the first type where *modelling problems* are included, in order to continue the thread of the following definitions.

A1.2.2.3. Modelling

The third term to define is *modelling*, although some prior considerations are required. Firstly, to define what *modelling* is, this term requires differentiation from *applications*. This is because, as presented in subsection A1.2.1.2, *mathematical applications* and *modelling* were treated as a single term and subsequently individualised. Blum (2002) states that both *applications* and *modelling* allow it to denote all types of relationships established between the «real world» and «mathematics», which presupposes the existence of two separate *worlds* as a fundamental part of these processes (see Blum, 1985). Now, by assuming the existence of these two *worlds*, Niss and collaborators (2007) propose that *modelling* is the transition from the «real world» to «mathematics», focusing mainly on the process of *mathematisation* of reality; while *applications* are the transition from «mathematics» to the «real world», focusing mainly on the mathematical object involved. Both processes are bidirectional, in the form «real world» ↔ «mathematics» (Wess et al., 2021), although they differ in the starting point and the context in which each process is validated. Figure 21 represents the processes of *mathematical applications* and *modelling* based on the previously established differentiation.

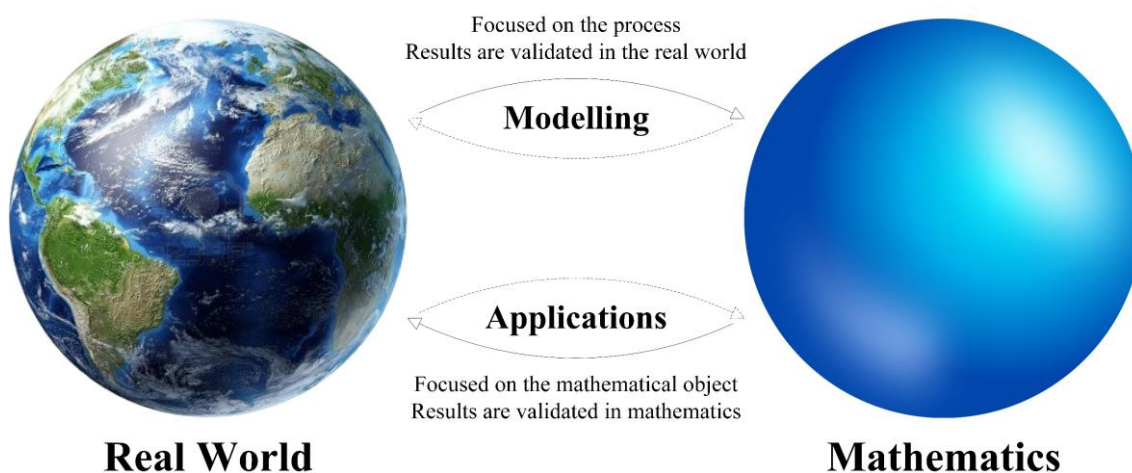


Figure 21. Representation of the processes of mathematical applications and modelling.
Source: Author’s elaboration based on the definitions by Blum (2002) and Niss et al. (2007).

Secondly, to define what *modelling* is, it must be considered that there is no single definition for this term. This is because, throughout the construction of the theoretical corpus of this process, different positions on it have emerged, known as *modelling perspectives* (see further discussion in subsection A1.2.2.8). However, a generic definition of this term is provided by Pollak (2007), who states that *mathematical*

modelling is the process that begins with a situation outside of mathematics that is posed as a problem that is attempted (or expected) to be understood mathematically until an image that will allow the solver to obtain some answers is formed. In synthesis, *modelling* is the mathematical activity in which a *modelling process* is carried out. On other occasions, *modelling* is defined by the phases that make up this *process*, as in the case of the theoretical framework of PISA:

This involves structuring the field or situation to be modelled; translating “reality” into mathematical structures; interpreting mathematical models in terms of “reality”; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing and offering a critique of a model and its results; communicating about the model and its results (including the limitations of such results); and monitoring and controlling the modelling process.
(OECD, [2004](#), p. 40)

Although this definition is used as part of the theoretical support for PISA to this day (see OECD, [2023](#)), it is more related to the *modelling cycle* than to the process itself (see further discussion in subsection A1.2.2.6).

A1.2.2.4. Modelling problem

The fourth term to define is *modelling problem*, understood as a problem-situation that meets certain characteristics to be considered as such (see Borromeo Ferri, [2018](#); K. Maaß, [2007](#)). To exemplify these characteristics, the *Sugarloaf Problem* is used (see Figure 22), which is proposed by Blum and Leiß ([2007a](#)).



Sugarloaf

The Sugarloaf cableway takes approximately three minutes for its ride from the valley station to the peak of the Sugarloaf Mountain in Rio de Janeiro. It runs with a speed of 30 km/h and covers a height difference of approximately 180 m. The chief engineer, Giuseppe Pelligrini, would very much prefer to walk – as he did earlier on, when he was a mountaineer, and first ran from the valley station across the vast plain to the mountain and then climbed it in 12 minutes.

How big is the distance, approximately, that Giuseppe had to run from the valley station to the foot of the mountain? Show all your work.

Figure 22. Sugarloaf Problem.
Source: Adapted from Blum & Leiß ([2007a](#), p. 225).

The problem in Figure 22 is characterised by being *open*, which means that the situation presented is not limited to a specific answer and/or procedure; also, the situation is

complex, since the solver must try to understand the context in which it arises and look for the relevant data for its solving. The wording of this problem describes a *realistic* situation, as real-world elements are used (the cableway, Sugarloaf Mountain), and it is also an *authentic* situation. Regarding the authenticity of a task, there is more than one position on the matter: for example, for Palm (2007), a task is *authentic* when the situation described in its wording is plausible to have occurred in the past, to be occurring in the present, or to occur in the near future; while for Vos (2011), a task is *authentic* when the elements of the real world that are considered, and which were not created for educational purposes, are used for such purposes. In the case of the problem in Figure 22, both characteristics are present: on one hand, the Sugarloaf Mountain actually exists, it is located in Rio de Janeiro (Brazil), and it has a cableway to visit it; on the other hand, the mountain is a natural formation and the cableway was created for tourist purposes, that is, its elements do not have an educational purpose. A *modelling problem* is essentially a *mathematical problem* that cannot be solved by applying known algorithms or routine procedures (Schoenfeld, 1994), but which does require strategies for its solving (Lesh & Doerr, 2003b). Finally, a *modelling problem* must be *solvable through the modelling process*, which implies that all the phases of a *modelling cycle* are used for its solving (see further discussion in subsection A1.2.2.6).

In addition to the six characteristics previously exemplified, some extra criteria have been proposed in literature to consider when implementing *modelling problems* in the classroom (Borromeo Ferri, 2018; Borromeo Ferri & Lesh, 2013):

- Meaningfulness of the modelling task: Students must be capable to do the task and it must make them sense to work with it.
- Age-based realistic context: The task must take into consideration the interests of the age group to which it is directed.
- Provocation of further questions: The task should give students the opportunity to ask new questions, both at a mathematical level and in the context of the problem-situation.
- Stimulating holistic ways of learning: More complex modelling tasks can be solved using various learning strategies and even outside the classroom.

- Appropriate level of language: Modelling tasks must have language appropriate to the educational level of the students so that they can understand them, without room for ambiguities that affect a good mental picture of the problem-situation.

A1.2.2.5. Mathematical model

The fifth term to define is *mathematical model*, although some prior considerations are required. Firstly, to define what a *mathematical model* is, the historical evolution of the term *model* must be considered. As mentioned in subsection A1.2.1.1, at the beginning of the twentieth century, the term *model* was fundamentally associated with three-dimensional objects. More specifically, the Austrian physicist Ludwig Boltzmann (1844–1906) defined the following in the *Encyclopædia Britannica* of 1902: “The term model denotes a tangible representation, whether the size be equal, or greater, or smaller, of an object which is either in actual existence, or has to be constructed in fact or in thought” (Boltzmann, 1902, cited in Friedman & Krauthausen, [2022](#), p. 7). After making a classification of the different models used at the time (stationary, moving, working, experimental, etc.), he focuses on those of instrumental-mathematical type used in physics, defining what a *mathematical model* is as follows: “In pure mathematics, especially geometry, models constructed of *papier-mâché* and plaster are chiefly employed to present to the senses the precise form of geometrical figures, surfaces, and curves” (Boltzmann, 1902, cited in Friedman & Krauthausen, [2022](#), p. 7, *italics* from the original text). In this sense, Boltzmann considers *mathematical models* as precise three-dimensional representations of geometric figures, with the aim of being used for teaching and research (Friedman & Krauthausen, [2022](#)). This idea of a *model* evolved and, particularly in mathematics, became detached from considerations of physics. For example, the Polish-American mathematician Alfred Tarski (1901–1983) gives the term *mathematical model* a formal-logical character to express a correspondence between certain logical formulas and a certain mathematical structure, in the form of an ‘instantiation’ of a formal axiomatic system (Tarski, 1936, cited in Friedman & Krauthausen, [2022](#)). During the rest of the twentieth century, *mathematical models* were acquiring a logical, non-concrete (they are no longer three-dimensional representations), temporary (they can change), and fragmentary (they reduce the complexity of a portion of reality) character (Friedman & Krauthausen, [2022](#)). Finally, the German philosopher

Herbert Stachowiak (1921–2004) describes three characteristics for *models* (Stachowiak, 1973):

- Mapping: *Models* always represent another ‘something’, of natural or artificial origin, which may even already be *models*.
- Reduction: *Models* describe only a part, considered relevant, of the attributes of the original representation.
- Pragmatism: *Models* are not assigned to an original permanently, but rather have a specific purpose for a certain time.

Secondly, to define what a *mathematical model* is, it must be considered that – as with *modelling* (see subsection A1.2.2.3) – there is no single definition for this term. This is also due to the different positions on the *modelling* process and what is considered a *mathematical model* in each *perspective* (see further discussion in subsection A1.2.2.8). However, a generic definition of this term is provided by Niss and collaborators (2007), who propose that a *mathematical model* consists of a triad between an extra-mathematical domain (D), a mathematical domain (M), and a rule mapping from D to M (f), of the form (D, M, f) (see Figure 21). In other words, a *mathematical model* consists of mathematical objects (functions, vectors, equations, etc.) defined as essential to explain the relationships between the problem-situation from the real (*real model*) and between the objects that represent these relationships (Wess et al., 2021). Therefore, the construction or use of a *mathematical model* is a characteristic step of the *modelling process*.

Finally, the types of *mathematical models* have been studied in literature, considering the characterisation of Stachowiak (1973) as a basis, and they have been classified as shown in Figure 23. *Normative models*⁶⁹ are those that are given in a prescriptive manner, such as, for example, to calculate a tax, to date an archaeological piece with carbon-14, the fall of a body in the area of physics and other exact sciences, etc. *Descriptive models*⁷⁰ are used as images and are characterised by being descriptions and/or predictions (Freudenthal, 1978) that also allow it to understand the internal coherence of the portion of reality they represent (Greefrath & Vorhölter, 2016): *descriptive-explanatory models* provide an explanation of the data and facts, giving meaning to, for example, the relationships between them; *descriptive-probabilistic models* make predictions; and

⁶⁹ In terms of Burkhardt (1981), they are also known as *standard models*.

⁷⁰ In terms of Burkhardt (1981), they are also known as *models of new situations*.

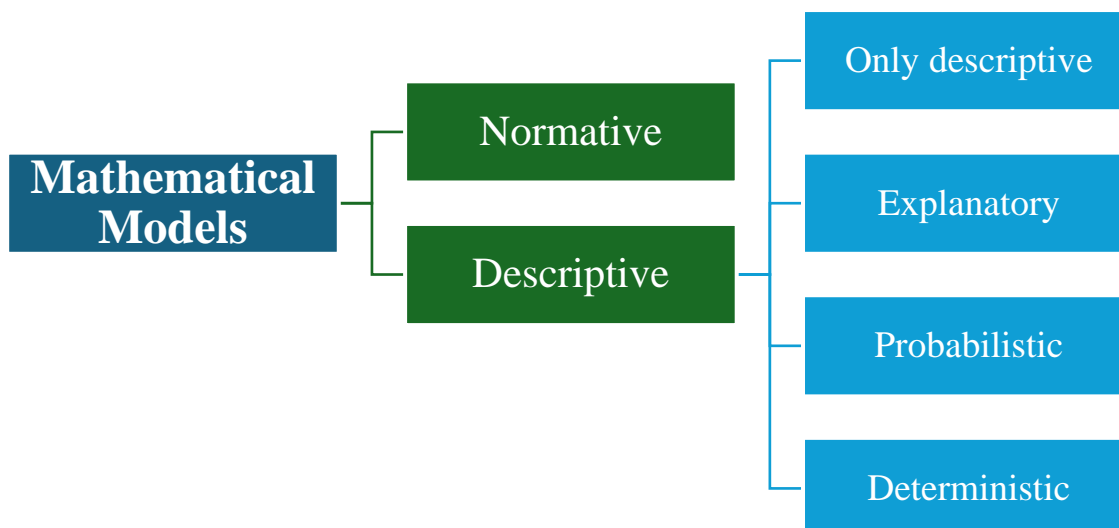


Figure 23. Classification of mathematical models.
Source: Adapted from Greefrath & Vorhölter (2016, p. 9)

descriptive-deterministic models make specific predictions (Wess et al., 2021). In educational terms, the tasks aimed at addressing the two main types of *mathematical models* have different foci: on one hand, tasks with *normative mathematical models* focus on decision-making in certain situations⁷¹; on the other hand, tasks with *descriptive mathematical models* focus on the description and solving of real-life problems⁷² (Greefrath & Vorhölter, 2016).

A1.2.2.6. Modelling cycle

The sixth term to define is *modelling cycle*, although a prior differentiation of the terms *modelling* and *modelling process* is required. While *modelling* is the mathematical activity in which a *modelling process* is carried out (see subsection A1.2.2.3), the *modelling cycle* is the ideal representation of the *modelling process*. In other words, the *modelling cycle* is a *model* of the *modelling process* (Greefrath & Vorhölter, 2016).

In literature, the design of different cycles to explain the *modelling process* has been reported, due to the different approaches to its understanding and the type of tasks that its structure aims to describe (see Borromeo Ferri, 2006). At the beginning of the discussion on ways to represent the *modelling process*, these sequences had a linear nature to develop

⁷¹ An example of a task that uses *normative mathematical models* is that proposed by J. Maaß (2007) to distribute the cost of heating in a house with several rooms.

⁷² An example of a task that uses *descriptive mathematical models* is the *Sugarloaf Problem* (see Figure 22).

the activities, where «mathematics» and the «real world» tended to be static (Kaiser et al., 2015). For example, one of the first widely accepted representations to explain the relationships between *applied mathematics* and the *rest of the world* is that proposed by Pollak (1979), currently known as the Cycle of Applied Mathematics (see Figure 24).

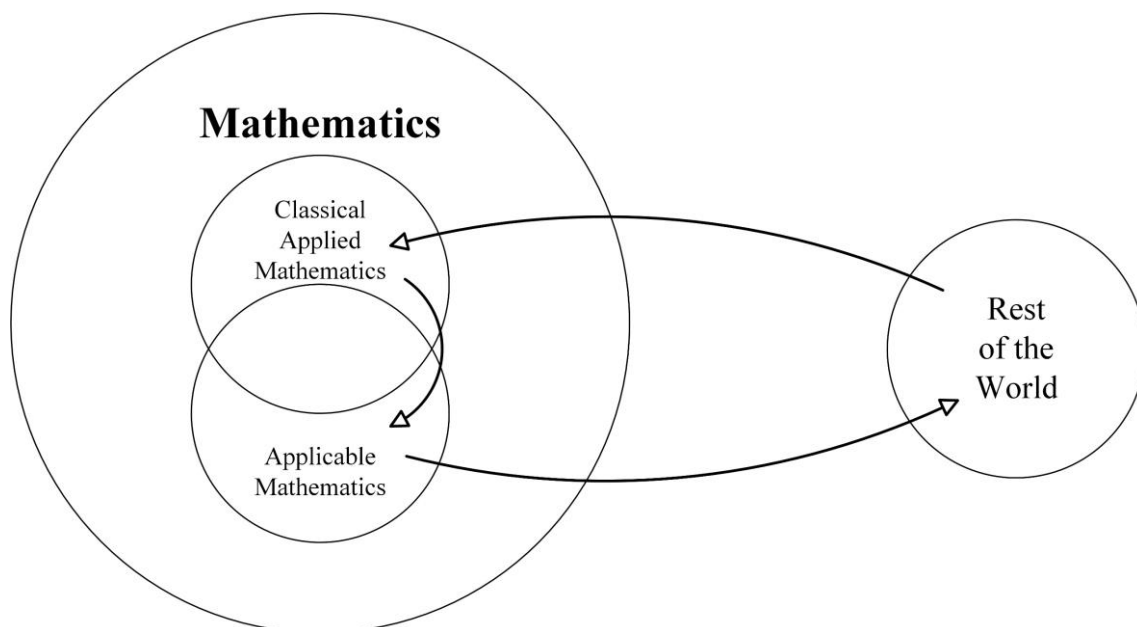


Figure 24. Cycle of applied mathematics.
Source: Adapted from Pollak (1979, p. 232).

This scheme is the representation of the following four definitions⁷³ given by the author about *applied mathematics* (Pollak, 1979):

- (1) *Applied mathematics means classical applied mathematics*; that is, the classical branches of analysis (calculus, ordinary and partial differential equations, integral equations, theory of functions, and other related areas) and the secondary education mathematics that serves as a prerequisite for calculus (algebra, trigonometry, and geometry). While these branches of mathematics are mostly applicable to physics, they do not involved connections to physics problems.
- (2) *Applied mathematics means all mathematics that has significant practical application*. This includes all the branches in (1), plus the mathematical topics taught in primary and secondary education (sets and logic, functions, inequalities, linear algebra, modern algebra, probability, statistics, and calculations) and much

⁷³ Pollak (1979) also recognises the existence of another contemporary classification, which is that proposed by Browder (1976).

of that taught in university and postgraduate education. Its potential fields of application transcend physics.

- (3) *Applied mathematics means beginning with a situation in some other field or in real life, making a mathematical interpretation or model, doing mathematical work within the model, and applying the results to the original situation. Its fields of application cover the biological, social, and management sciences, as well as many others than in (1) and (2).*
- (4) *Applied mathematics means what people who apply mathematics in their livelihood actually do. Although this position is similar to (3), it usually involves a constant transition between the «real world» and «mathematics».*

In the scheme of Figure 24, Pollak (1979) considers that *classical applied mathematics* corresponds to definition (1), while *applicable mathematics* corresponds to definition (2). The fact that (2) does not contain (1) is due to the fact that there is a theoretical mathematics that is (for its time yet) not applicable. Given that the «rest of the world» includes all disciplines of human knowledge and everyday life, the difference between definitions (3) and (4) lies in the fact that, while (3) involves a transition of the form «rest of the world» → «mathematics» → «rest of the world», (4) involves a constant transition of the form «rest of the world» ↔ «mathematics».

Another widely accepted representation to explain how to tackle a real problem mathematically is that proposed by Burkhardt (1981), where the author described an approximation to the essential elements to describe such tackling (see Figure 25). In the description of this cycle, Burkhardt (1981) states the following:

We will begin on the left, which represents the problem in the world outside mathematics, then somehow, we *formulate* a more or less mathematical model which mirrors at least some aspects of the problem. We rearrange or *solve* the model and then cross back to the real world by *interpreting* the answer. In practice we have also to *validate* the model by checking if the answers describe the situation well enough. Usually, it is necessary to go round the processes shown several times, *improving* or extending the model. We have also to get into and out of these modelling processes. The first involves the *recognition* that there is a

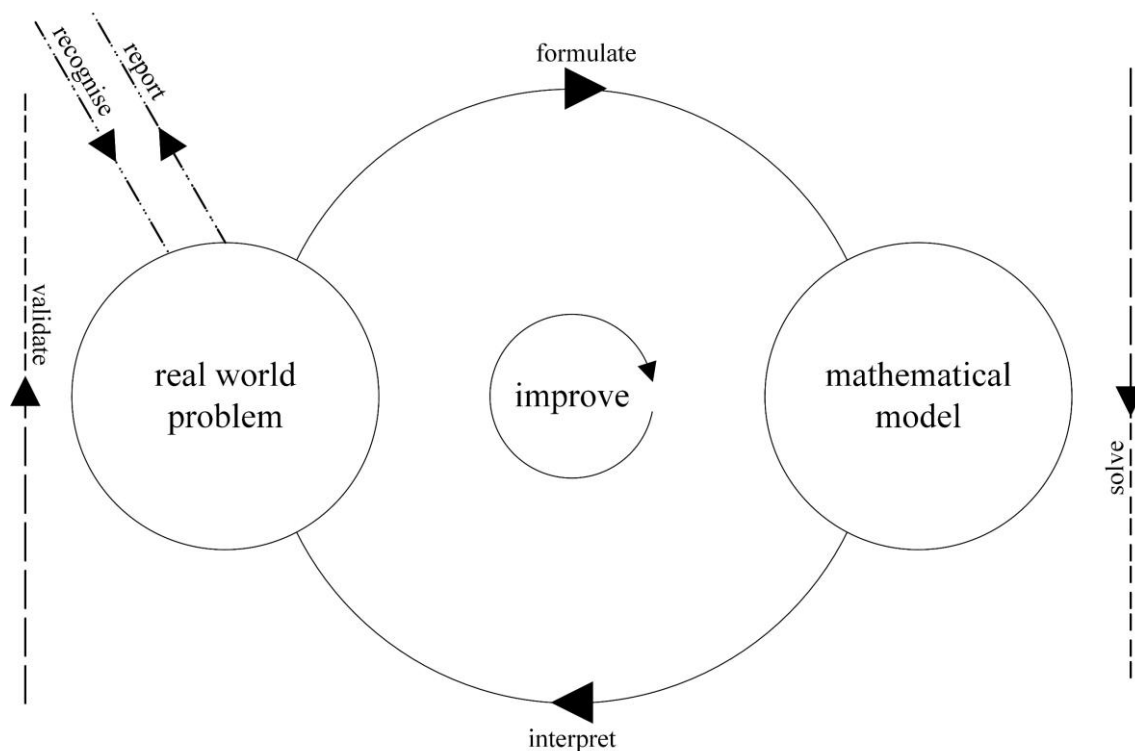


Figure 25. Cycle to tackle a real problem mathematically.
Source: Adapted from Burkhardt (1981, p. 3).

problem worth thinking about, the second the communication of the conclusions including the process of clarification which exposition required (*we report*). (pp. 3–4, *italics* from the original text)

In both Pollak's (1979) and Burkhardt's (1981) proposals, the principles that will govern the design of subsequent ideal representations of the *modelling process* are observed, such as a structure that separates between the «real world» and «mathematics» – or between the intra- and the extra-mathematical – and a cyclical behaviour to describe it. However, up to this point in the historical development of modelling research, the proposed cycles tend to overlap between *mathematical applications* and *modelling*.

The proposal of the German researchers Werner Blum (1985) and Gabriele Kaiser-Messmer (1986) is the first that can be considered, strictly speaking, as a *modelling cycle*. This *cycle* refined the structure mentioned in the previous paragraph, adding greater clarity about the phases and transitions that an individual would go through to solve a *modelling problem* (see Figure 26), based on the studies developed up to that point (for example, Burghes et al., 1982; Burkhardt, 1981; Fischer & Malle, 1984; Pollak, 1979; Steiner, 1976).

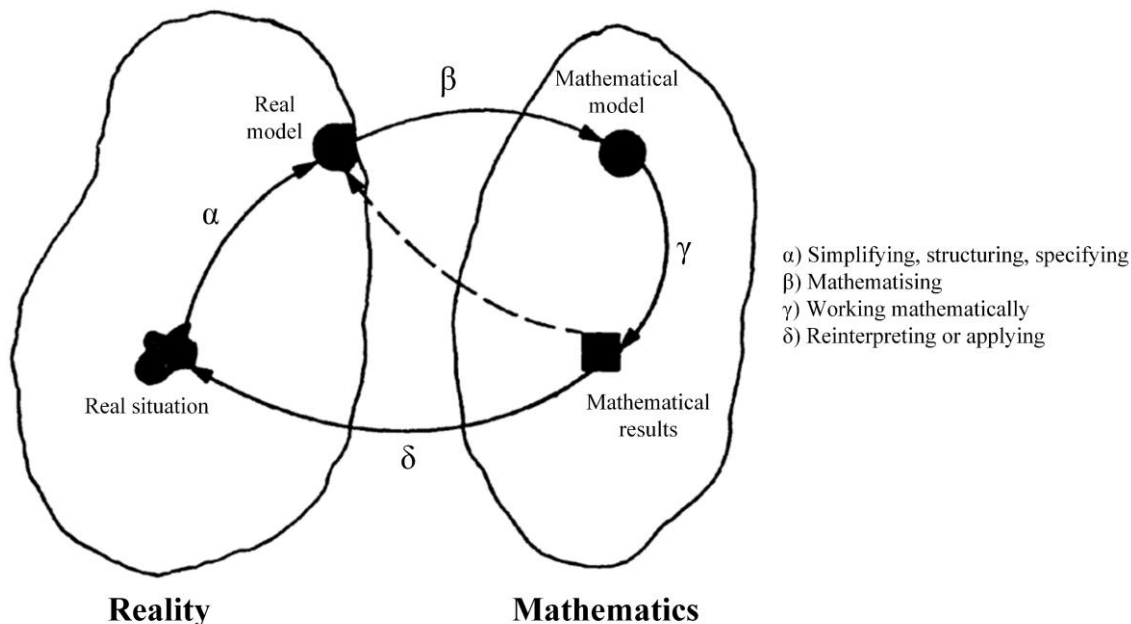


Figure 26. Modelling cycle by Blum/Kaiser-Messmer.
Source: Adapted from Blum (1985, p. 200).

The *modelling cycle* in Figure 26, understood as an idealised representation of the *modelling process*, can be described as follows: the starting point is a *real situation* that is simplified in a *real model* (this leads to making assumptions and discovering the main influencing factors); to design a *mathematical model*, the *real model* must be ‘translated’ into mathematics (the distinction between *real model* and *mathematical model* is not always clear, since their development process are intertwined, among other causes, by the mathematical knowledge of the modeller); *mathematical results* are elaborated with the help of the *mathematical model*, and such *results* must be interpreted (in the context of the *real situation*); finally, both the real solutions as the entire *modelling process* must be validated (in the context of the *real situation*) and, if necessary, some parts of the *modelling cycle* may have to be reprocessed (Kaiser et al., 2015).

Subsequent theoretical developments and a broader view on the *modelling process* allowed the emergence of other cycles during the following years (for example, Galbraith & Haines, 1997; Haines et al., 2001; Schupp, 1989; Zbiek & Conner, 2006; among others). A particular case is the work of Verschaffel and collaborators (2000), who propose a diagram to explain the *modelling process* from the perspective of *word-problems solving* (see Figure 27).

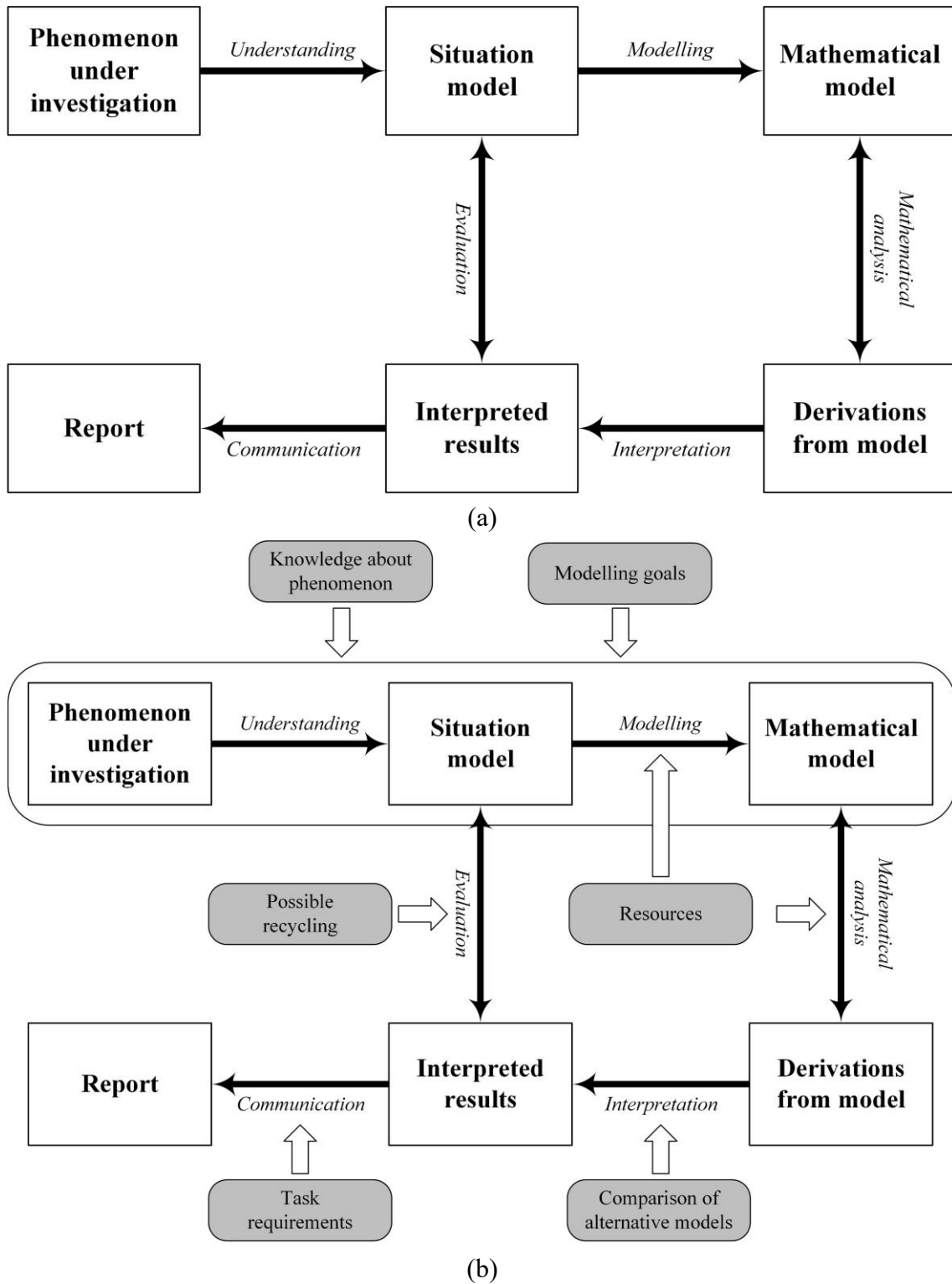


Figure 27. (a) Schematic diagram of the modelling process;
(b) an elaborated view of the modelling process.
Source: Adapted from Verschaffel et al. (2000, pp. xii, 168).

Unlike the *modelling cycles* in Figure 24, Figure 25, and Figure 26, the proposal of these authors does not establish a visible separation between two worlds and considers *modelling problems* as “a special kind of application problem presented in a particular (i.e. verbal, or at least predominantly verbal) format and in a particular (i.e. instructional) setting” (Verschaffel et al., [2000](#), p. xii). However, given the interests of this study, these *cycles* will not be addressed.

During the late 1980s and early 1990s, an important term that was refined is *mathematisation*. Although broadly speaking, this term is understood of an extra-mathematical language into mathematical language, Treffers ([1987](#)) raises the ideas of *horizontal* and *vertical mathematisation*. The first refers to making a problem-situation accessible for mathematical treatment (in the most formal sense of the word); while the second refers to more or less formal mathematical processing. Later, Freudenthal ([1991](#)) refines this distinction as follows:

Horizontal mathematisation leads from the world of *life* to the world of *symbols*. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. (pp. 41–42, *italics* from the original text)

It is important to stress that every *modelling process* involves both types of *mathematisation*; however, *mathematisation per se* does not necessarily imply the development of a *modelling process*.

As mentioned in subsection A1.2.1.3, the twenty-first century brought with it a growing interest in modelling research and, in line with the theoretical developments and the broader view on this process, new proposals (for example, Ortlieb, [2004](#)) and refinements of *modelling cycles*. A particular case of this period is the work of the Danish researchers Morten Blomhøj and Tomas Højgaard, who propose a graphical model to explain the *modelling process* (see Figure 28) that gives greater emphasis to what these authors call *modelling subprocesses* and that considers aspects of inquiry (Blomhøj, [2004](#); Blomhøj & Højgaard, [2003](#)).

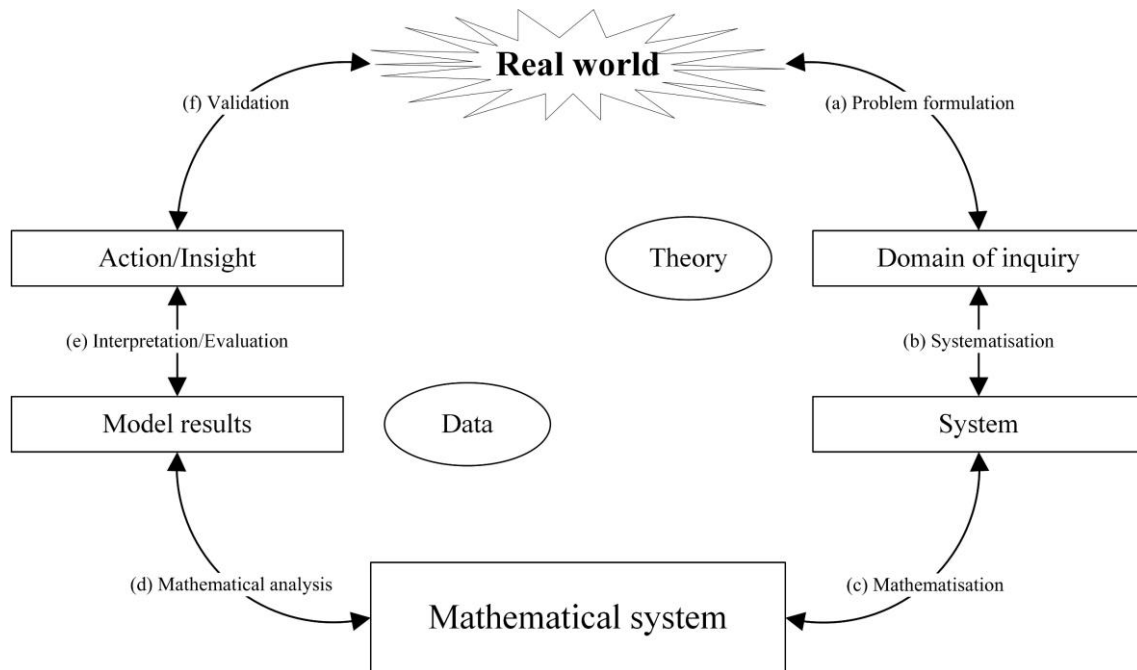


Figure 28. A graphic model of a modelling process.
Source: Adapted from Blomhøj (2004, p. 148).

Unlike the *modelling cycle* presented in Figure 26, the proposal in Figure 28 explains the *modelling process* through six *subprocesses* that a solver can develop (Blomhøj & Højgaard, 2003):

- (a) *Problem formulation*: A more or less explicit task is formulated, which guides the solver to identify the characteristics of the fragment of reality that is intended to be modelled.
- (b) *Systematisation*: The relevant objects and/or relationships from the resulting domain of inquiry are selected and idealised to enable a mathematical representation.
- (c) *Mathematisation*: These objects and/or relationships are translated from their original appearance into mathematics.
- (d) *Mathematical analysis*: Mathematical methods are used to obtain mathematical results and conclusions.
- (e) *Interpretation/Evaluation*: These mathematical results and conclusions are interpreted with respect to the initial research domain.
- (f) *Validation*: The validity of the model is evaluated by comparing it with the data and knowledge of the modelled fragment of reality.

In this entire *cycle*, two basal elements for its development intervene: *Theory* (theoretical/shared knowledge, or based on personal experiences of the solver) and *Data* (observed, predicted, pre-existing, or collected data), which correspond to the domain of inquiry that occurs after formulating a problem (Blomhøj, 2004). Also, their work begins to talk more explicitly about *modelling competencies* (see further discussion in subsection A1.2.2.7).

In parallel to the theoretical developments, there were also refinements to the *modelling cycles*, specifically to the proposal developed by Blum (1985)/Kaiser-Messmer (1986). Particularly, two proposals stand out: a seven-phase *modelling cycle* (Blum & Leiß, 2007a in Figure 29a) and another from a cognitive perspective (Borromeo Ferri, 2006 in Figure 29b). Both proposals are worked on in depth in later chapters, so they are not detailed here⁷⁴.

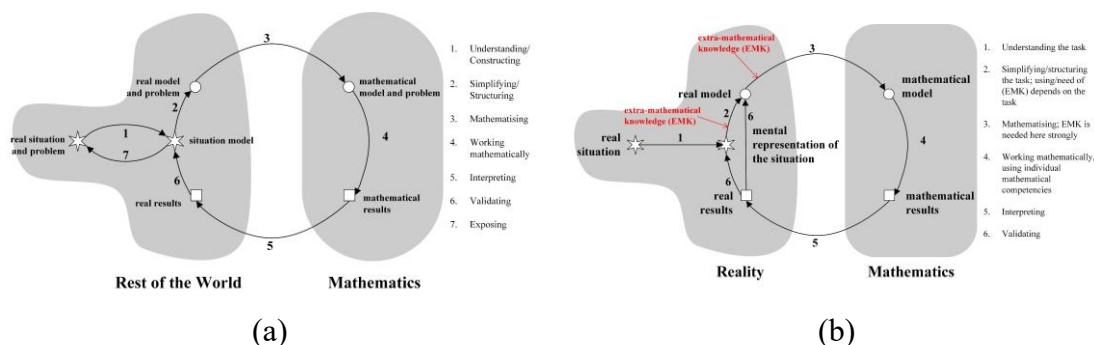


Figure 29. Modelling cycles derived from the Blum/Kaiser-Messmer's proposal.
Source: Adapted from (a) Blum & Leiß (2007a, p. 225); (b) Borromeo Ferri (2018, p. 15).

In addition to the *modelling cycles* in Figure 29, there were other proposals based on this structure (for example, Greefrath, 2011; Kaiser & Stender, 2013; Ludwig & Reit, 2013; K. Maaß, 2005; among others), which have their strong and weak points depending on their purposes and the types of tasks they promote solving (Blum, 2015). For example, the proposal by Greefrath (2011, expanded in Greefrath & Vorhölter, 2016) extends the *modelling cycle* to integrate the use of digital tools (see Figure 30).

Currently, a broad consensus has been reached regarding the fundamental structure of a *modelling process*, due to the different *cycles* that have been designed over the years to explain this *process*, agreeing upon on the following description:

⁷⁴ The cycle in Figure 29a is discussed extensively in Chapters 4 and 5; the cycle in Figure 29b is discussed extensively in Chapters 3 and 7.

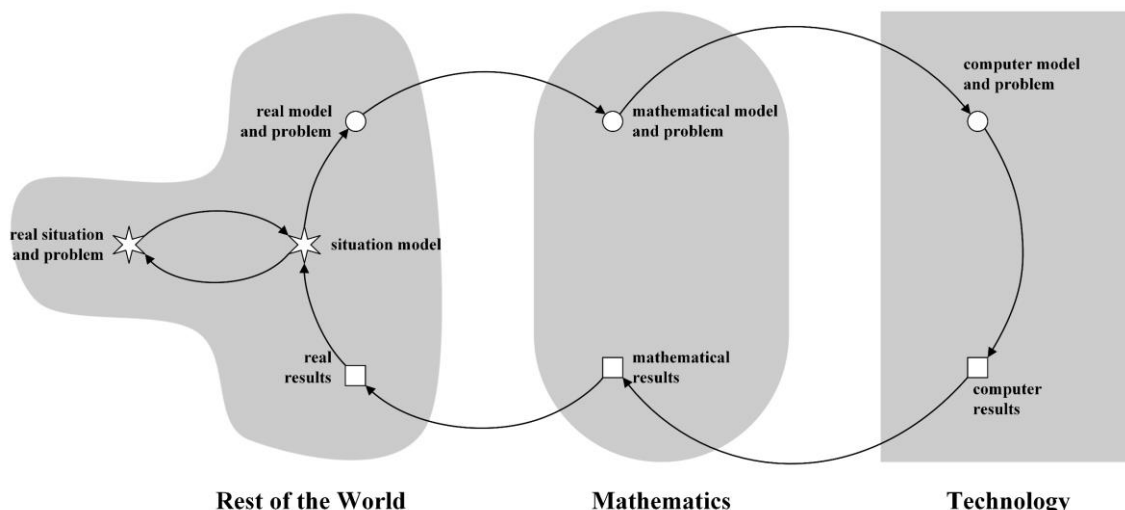


Figure 30. Modelling cycle expanded with digital tools.
Source: Adapted from Greefrath & Vorhölter (2016, p. 23).

essential characteristics of a problem in the real-world are identified; the real problem is simplified in order to develop a workable model; justifiable assumptions are made to accommodate missing information; the real situation is translated into an idealized mathematical model (mathematizing); an initial solution is generated from the mathematical model; resulting solutions are brought back into relief against the initial real-world situation; the validity of a potential solution is considered; and the process is revisited until an acceptable solution is established. (Geiger et al., 2018, p. 218)

Finally, to develop a *modelling process*, the solver needs *modelling competencies*, which are addressed in the following subsection.

AI.2.2.7. Modelling competency (or competencies)

The seventh term to define is *modelling competency (or competencies)*, although some prior considerations are required. Firstly, to define what the *modelling competency* is, the historical evolution of this topic⁷⁵. At the first ICTMA Conference in 1983, Burghes (1984) emphasised the importance of experimenting with *modelling* to be proficient in its

⁷⁵ Note that, unlike the previous terms, here it refers to ‘topic’, since the *modelling competency (or competencies)* cannot be limited only to define it as a single term.

use; however, topics such as ‘modelling abilities’ or ‘modelling skills’ were not delved into (Kaiser & Brand, [2015](#)), nor in ICTMA 2 and 3, where the focus was on the creation of *modelling* courses (see Berry et al., [1984](#), [1986](#), [1987](#); Blum et al., [1989](#)). In subsequent editions of this academic event, the discussion on *modelling* assessment began to emerge, more specifically, what and how to assess, based on the overview presented by Niss ([1993](#)); also, the importance of metacognition in *modelling* was consolidated, based on the work of Tanner and Jones ([1993](#), [1995](#)); and the notion of *mathematical competence* and its relationship with metaknowledge emerged in the work of Stillman ([1998](#), supported by the work of Matos & Carreira, [1995](#)). Nevertheless, the 2000s are when the term *modelling competency* takes hold.

Secondly, to define what the *modelling competency* is, it must be considered that – as with some of the previous terms – there is no single approach to this topic (Kaiser & Brand, [2015](#)). At the beginning of the 2000s, Niss ([2003](#)) reports the results of the KOM Project (Danish acronym for ‘Competencies and Learning of Mathematics’), where it is proposed that possessing a *competence*, that is, being competent, in some domain of personal, professional, or social life means mastering (in a fair sense, depending on the circumstances and conditions) the essential aspects of said domain. From this, the author defines *mathematical competence* as “the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role” (Niss, [2003](#), p. 120), and within this *competence* is *mathematically model*, which consists of:

- *analysing* foundations and properties of *existing models*, including assessing their range and validity;
- *decoding* existing models, i.e. translating and interpreting model elements in terms of the ‘reality’ modelled;
- *performing active modelling* in a given context: structuring the field; mathematising; working with(in) the model, including solving the problems it gives rise to; validating the model, internally and externally; analysing and criticising the model, in itself and vis-à-vis possible alternatives; communicating about the model and its results; monitoring and controlling the entire modelling process. (Niss, [2003](#), p. 120, *italics* from the original text)

Based on this work, and being at a much more advanced stage of the KOM Project, Blomhøj and Højgaard (2007) refine the definition of *competence* and state that it is “someone’s insightful readiness to act in response to the challenges of a given situation” (p. 47). As a consequence of this definition, on one hand, it is determined that *competence* is action-oriented and not based on knowledge or skills and, on the other hand, that the development of *competences* is a continuous process (Blomhøj & Højgaard, 2007). Following this line, the authors define *mathematical competence* as:

someone’s insightful readiness to act in response to *a certain kind of mathematical challenge* of a given situation, and then identify, explicitly formulate and exemplify a set of mathematical competencies that can be agreed upon as independent dimensions in the spanning of mathematical competence. (Blomhøj & Højgaard, 2007, p. 47, *italics* from the original text)

Thus, these authors define the *modelling competency* as “someone’s insightful readiness to carry through all parts of a mathematical modelling process in a certain context” (Blomhøj & Højgaard, 2007, p. 48), based on the *modelling cycle* proposed in previous studies (see Figure 28) to characterise said *process*. Finally, Blomhøj and Højgaard (2007) propose two approaches for the development of the *modelling competency*: a holistic approach (encompassing the development of the complete *modelling cycle*) and an atomistic approach (focusing especially on mathematisation and working with the mathematical model).

A parallel theoretical development is that of K. Maaß (2006) who, based (among others) on the work of Niss (2003), proposes a more detailed classification of *modelling competencies* and *sub-competencies*. To do this, this author takes as a basis her adaptation of the *modelling cycle* in Figure 26 (see K. Maaß, 2005) and makes a breakdown of six *modelling competencies*:

- A. Sub-competencies to carry out the individual steps of the modelling process: To understand the real problem and to set up a model based on reality; to set up a mathematical model from the real model; to solve mathematical questions within the mathematical model; to interpret mathematical results in a real situation; to validate the solution.

- B. Metacognitive modelling competencies: Importance of metacognition as a way of thinking about one's own thinking and controlling one's own thought processes (from the position of Sjøts, [2003](#)).
- C. Competencies to structure real-world problems and to work of direction to find a solution: Solvers must be guided towards specific objectives during the modelling process, since the phases of the modelling cycle are not enough.
- D. Competencies to argue in relation to the modelling process and to write down this argumentation: Importance of argumentation about the procedures carried out throughout the modelling process.
- E. Competencies to see the possibilities mathematics offers for the solution of real-world problems and to consider these possibilities as positive: Four types of modellers are distinguished, namely, the *reality-distant*, the *mathematics-distant*, the *reflecting*, and the *uninterested modeller*.

Regarding the *modelling sub-competencies* proposed in A, they can be synthesised as the *sub-competencies* necessary to develop a *modelling process* as those represented in the *cycles* of Figure 29, while the *modelling competencies* proposed in B–E, they can be synthesised as the relevant processes of mathematical activity that occur together with the *modelling process* (see further discussion in [Chapter 3](#)).

Following the line of the *modelling sub-competencies* proposed in A, years later, K. Maaß ([2010](#)) designs a scheme to classify modelling tasks that aim to develop this *process* in the classroom, both in specific (portions of the *modelling process*) and global manner (the entire *modelling process*). This schema is worked on extensively in [Chapter 6](#).

Currently, assuming the existence of other positions (such as curricular ones, for example, Turner et al., [2013](#)) and taking into consideration the work of other researchers (for example, Galbraith et al., [2007](#); Greer & Verschaffel, [2007](#); Ikeda et al., [2007](#); Jiang et al., [2007](#); among others), the modelling research community has converged on the approach of two major definitions of *modelling competencies*. On one hand, a general definition has been agreed upon (similar to the holistic approach of Blomhøj & Højgaard, [2007](#)), proposed by Niss and Højgaard ([2019](#)), which is called *Mathematical modelling competency – analysing and constructing models of extra-mathematical contexts and situations*, and which is the one adopted in this doctoral thesis as a reference for *modelling competency*:

This competency focuses on mathematical models and modelling, i.e., on mathematics being put to use to deal with extra-mathematical questions, contexts and situations. Being able to construct such mathematical models, as well as to critically analyse and evaluate existing or proposed models, whilst taking purposes, data, facts, features and properties of the extra-mathematical domain being modelled into account, are the core of this competency. It involves relating to and navigating within and across the key processes of the ‘modelling cycle’ in its various manifestations.

In this definition, the authors emphasise that working with problem-situations with high mathematical content that are situated in an extra-mathematical context, but without considering said context enough, does not necessarily imply *modelling competency*, but rather the *mathematical problem handling competency* (referred to posing and solving mathematical problems).

On the other hand, particular definitions have been agreed upon (similar to the atomistic approach of Blomhøj & Højgaard, 2007) for the different *modelling competencies*. In this position, the work of Kaiser (2007) stands out, who differentiates between *modelling abilities* and *modelling competencies* in the following way: “Modelling competencies include, in contrast to modelling abilities, not only the ability but also the willingness to work out problems, with mathematical aspects taken from reality, through mathematical modelling” (p. 110). In this way, *modelling competencies* (which correspond to the phases of the *modelling cycle*, as in A by K. Maaß, 2006) are understood through *sub-competencies* for each one (Kaiser & Brand, 2015). As a way to synthesise Kaiser’s (2007) proposal, Table 24 presents the proposal of Greefrath and collaborators (Greefrath, 2015; Greefrath et al., 2013; Greefrath & Vorhölter, 2016), and which is the one adopted in this doctoral thesis as a reference for *modelling sub-competencies*.

Table 24. Mathematical modelling sub-competencies.

Sub-competencies	Indicators
Constructing	They construct their own mental model from a given problem and thus formulate an understanding of their problem.
Simplifying	They identify relevant and irrelevant information from a real problem.

Sub-competencies	Indicators
Mathematising	They translate specific, simplified real situations into mathematical models (for example, terms, equations, figures, diagrams, and functions).
Interpreting	They relate results obtained from manipulation within the model to the real situation and thus obtain real results.
Validating	They judge the real results obtained in terms of plausibility.
Exposing	They relate the results obtained in the situational model to the real situation, and thus obtain an answer to the problem.

Note: Working mathematically (working with mathematical methods in the mathematical model and getting mathematical solutions) does not appear in this table, since it is not considered as a specific sub-competency to the modelling process. Source: Adapted from Greefrath & Vorhölter (2016, p. 19).

A1.2.2.8. Modelling perspectives

The eighth and final topic to address is *modelling perspectives*, understood as the way in which the *modelling process* is defined, addressed, and characterised. To address this topic, the studies conducted by Kaiser and Sriraman (2006) and Abassian and collaborators (2020) are taken as references.

As mentioned in subsection A1.2.1.2, in her doctoral work, Kaiser-Messmer (1986) identifies two *perspectives* on *mathematical applications* and *modelling* that were prominent in the 1980s.

- A *pragmatic perspective* focused on utilitarian objectives, such as applying mathematics to solve practical problems, led by the work and reflections of Pollak (1968, 1969).
- A *scientific-humanistic perspective* focused on mathematics as a science and on the humanist ideals of education, such as the ability to create relationships between mathematics and reality, led by the work and reflections of Freudenthal (1968, 1969).

Kaiser and Sriraman (2006) recognise that, in parallel to these two *perspectives*, others began to be developed, such as the *epistemological perspective* (focused on the development of mathematical theory in mathematisation; see Steiner, 1968), the *emancipatory perspective* (focused on a socio-critical approach to education; see Gellert et al., 2001), and the *integrative perspective* (develops an integrative approach between scientific, mathematical, and pragmatic approaches; see Blum & Niss, 1991). Based on the *perspectives* mentioned above, Kaiser and Sriraman (2006) propose a first categorisation, as presented in Table 25.

Table 25. Classification of modelling perspectives according to Kaiser and Sriraman (2006).

Perspectives	Objectives	Relationships*	Background
Realistic or applied	Pragmatic- utilitarian objectives, such as solving real-world problems, understanding the real world, and promoting modelling competencies.	Pragmatic perspective of Pollak.	Anglo-Saxon pragmatism and applied mathematics.
Contextual	Psychological and subject-related objectives, such as solving word problems.	Information processing approaches leading to systems approaches.	American debate on problem solving as well as everyday school practice and psychological lab experiments.
Educational: (a) didactical (b) conceptual	Pedagogical and subject-related objectives, such as (a) structuring and promoting learning processes and (b) introducing and developing concepts.	Integrative perspective of Blum and Niss, and further developments of the scientific- humanist approach.	Didactical and learning theories.
Socio-critical	Pedagogical objectives, such as critical understanding of the surrounding world.	Emancipatory perspective.	Socio-critical approaches in political sociology.
Epistemological or theoretical	Theory-oriented objectives, such as promoting theoretical development.	Scientific-humanist perspective of the early Freudenthal's works.	Roman epistemology.

Note (*): This column refers to the relationships of each perspective with another previous one.
Source: Adapted from Kaiser & Sriraman (2006, p. 304).

Regarding the *contextual perspective*, Kaiser and Sriraman (2006) relate it to the American realm, where the theory of model-eliciting activities is developed (see Lesh & Doerr, 2003b; Lesh & Sriraman, 2005), also known as *models and modelling perspective*. Among the premises on which this *perspective* is based are: (a) the social nature of conceptual systems; (b) the diversity of means for representing these systems; (c)

knowledge is organised around experiences and abstractions, and that knowledge for decision making must come from different disciplines; (d) the ‘worlds of experiences’ are the product of human creativity, they are changing, and so is the knowledge to understand them. However, given the interests of this study, this *perspective* will not be addressed.

Regarding the *educational perspective*, Kaiser and Sriraman (2006) relate it to the work started by Freudenthal (1968, 1969) and continued by de Lange (1987) and Treffers (1987) from the *scientific-humanist perspective*, where real-world examples and their interrelationships with mathematics are considered the core to structure mathematical teaching and learning. The subsequent developments of this *perspective* give it an *integrative* character, with the works of Blum and Niss (1989, 1991, among others), important references within this research.

Regarding the *socio-critical perspective*, Kaiser and Sriraman (2006) consider it as a continuation of the *emancipatory perspective*, focusing on sociocultural dimensions of mathematics. One aspect of this *perspective* is ethno-mathematics, developed (among others) by D’Ambrosio (1999), who emphasises the social role played by mathematics, *mathematical models*, and *modelling*; also, the works of Barbosa (2006) stand out, who addresses the discrimination between *mathematical modelling* developed by professionals and that developed in school. In pedagogical terms, the focus is on promoting critical thinking in students; however, given the interests of this study, this *perspective* will not be addressed.

In the classification of Table 25, two almost completely opposed *perspectives* are found. On one hand, the *realistic perspective*, derived from the *pragmatic perspective*, where *modelling* is understood as the activity of solving authentic problems, mainly from industry and science, just as a professional modeller would do, and seeks to carry out this *process* in its entirety to develop *modelling competencies* (this *perspective* is widely addressed throughout this thesis). On the other hand, the *epistemological perspective*, derived (among others) from the Anthropological Theory of the Didactic by Chevallard (1992) or from the idea of ‘didactic contract’ by Brousseau (2002), where great attention is not paid to the reality aspects of the problems, and all mathematical activity is understood as *modelling*, so this *process* would not be limited by *mathematisation* (given the interests of this study, the latter *perspective* will not be addressed).

Beyond the classification of Table 25, Kaiser and Sriraman (2006) recognise the existence of *cognitive meta-perspective* which, at that time, was considered the most recent for the analysis of the *modelling process* (see Borromeo Ferri, 2006). In this *meta-perspective*, the objectives are divided into two groups: on one hand, the research objectives, such as analysing and understanding the cognitive processes that take place during the *modelling process*; on the other hand, the psychological objectives, such as promoting mathematical thinking processes through the use of *models* as mental or physical images, or by emphasising *modelling* as a mental *process* (abstraction or generalisation). This *meta-perspective* is widely addressed throughout this thesis.

Finally, Kaiser and Sriraman (2006) point out that this classification should not be understood in exhaustive terms and that its intention is, on one hand, to demonstrate the current state of advances in *modelling* research and, on the other hand, that these advances come from the evolution of already existing traditions. In fact, the classification proposed by these authors was used, for example, to categorise researchers' contributions to academic events (for example, Blomhøj, 2009; Kaiser et al., 2007), although it mainly drew lines for future research and theoretical developments.

As mentioned in subsection A1.2.1.3, the turn of the century brought with it, among others, a generalised recognition of the importance of *modelling* for the teaching of mathematics at all educational levels and a notable increase in interest in research on this matter. However, the difficulties in implementing *modelling* in curricula were partially justified by the diversity of theoretical approaches around this *process* (Borromeo Ferri, 2013; Lesh & Fennewald, 2013).

In their review of literature, Abassian and collaborators (2020), rather than proposing a new classification of *modelling perspectives*, they notably refine the proposal by Kaiser and Sriraman (2006). These authors are based on the two main goals that are proposed for *modelling*:

- The first goal is to facilitate the learning of mathematics through the use of contextual situations. This goal is also known as “modelling for the learning of mathematics” (Niss et al., 2007, p. 6) or “modelling as a vehicle” (Julie & Mudaly, 2007, p. 504).
- The second goal is to explore extra-mathematical scenarios using mathematics as a tool, whose purpose is not necessarily mathematical learning, but rather that of

the *modelling process*. This goal is also known as the application of mathematics to problem solving (Niss et al., [2007](#)) or “modelling as a content” (Julie & Mudaly, [2007](#), p. 504).

These goals should not be understood in dichotomous terms, but rather in dual terms since it is possible to work on different levels of each goal at the same time. Table 26 synthesises the classification of *modelling perspectives* proposed by Abassian and collaborators ([2020](#)) based on their review of literature, in which they consider five aspects for each *perspective*: their goals (first column), their definition for a *mathematical model* (second column), their description for the *modelling cycle* (third column) and for the design of *modelling problems* (fourth column), and its research focus (fifth column).

As mentioned above, the proposal by Abassian and collaborators ([2020](#)) is mainly a notable refinement of that by Kaiser and Sriraman ([2006](#)). Therefore, in the following paragraphs, the new features of the classification in Table 26 in relation to that in Table 25 are highlighted.

Regarding the *realistic perspective*, Abassian and collaborators ([2020](#)) specify that its focus is mainly on the value of solving real-world problems rather than on the development of any specific mathematical object (see Kaiser, Schwarz, & Buchholtz, [2011](#)). In other words, this *perspective* focuses on the development and promotion of *modelling competencies*, where the *modelling cycle* proposed by Blum and Leiß ([2007a](#)) and its derivations (see Figure 29) stand out as the references to characterise the *modelling process* from this *perspective*. The *problem* in Figure 22 is a paradigmatic example for this *perspective*.

Regarding the *educational perspective*, Abassian and collaborators ([2020](#)) specify that, although it has some similarities with the *realistic perspective*, especially with regard to the description of the *modelling cycle* and the characteristics of these *problems*, the difference lies in which the *educational perspective* seeks a balance between learning *modelling competencies* and the mathematical contents involved. In other words, this *perspective* considers *modelling* as a content and as a vehicle (in terms of Julie & Mudaly, [2007](#)), where the *modelling cycle* proposed by Zbiek and Conner ([2006](#)) (as well as those derived from the Blum/Kaiser-Messmer’s work) stands out as one of the references to characterise the *modelling process* from this *perspective* (see Figure 31), since interest is

Table 26. Classification of modelling perspectives according to Abassian and collaborators (2020).

Perspective	Goals	Mathematical model	Modelling cycle	Modelling problem	Research focus
Realistic	Develop modelling skills to model and understand authentic real-world scenarios.	Mathematical objects that explain the given real-world scenario.	A cyclical and multistep process that begins in the real world, is mathematised in the mathematical world, and ends in the real world.	Real-life (authentic and messy) tasks that require the use of the modelling cycle.	Mathematical modelling competencies.
Educational	Develop modelling skills to model and understand mathematics.	Mathematical objects that have a relationship to the given real-world scenario.	A cyclical and multistep process that begins in the real world, is mathematised, and ends in the real world.	Authentic tasks that can be simplified to reveal specific mathematical goals.	Mathematics in mathematical modelling and mathematical modelling in the curriculum.
Models and Modelling	Develop a deep understanding of mathematics through a modelling context.	A conceptual system that maps the structural characteristics of a relevant system.	A cycle that begins in the real world, then, once a model is developed, goes back to the real world, and is repeated as many times as needed.	Model-eliciting activities designed to develop a specific mathematical concept in the context of a real-world problem.	The use of model-eliciting activities to teach mathematics.

Table 26. Classification of modelling perspectives according to Abassian and collaborators (2020). (cont.)

Perspective	Goals	Mathematical model	Modelling cycle	Modelling problem	Research focus
Socio-Critical	Develop modelling skills to make decisions in society.	Mathematical representation of a relevant scenario.	All aspects of the modeller's involvement in the exploration of a real-world problem using mathematics.	Tasks in a societal context that are also focused on the development of specific mathematical concepts.	Students' use of mathematics to understand society critically.
Epistemological	Develop formal mathematical reasoning.	The result of an activity based on situations and mathematical concepts.	Four-stage activities, where models-of and models-for are created to develop formal mathematical reasoning.	No requirements set.	Teaching and learning of specific mathematical concepts.

Note: The classification originally proposed by Abassian et al. (2020) includes the main researchers of each perspective; however, they are not included here.
Source: Adapted from Abassian et al. (2020, p. 56).

also placed in the underlying mathematical activity.

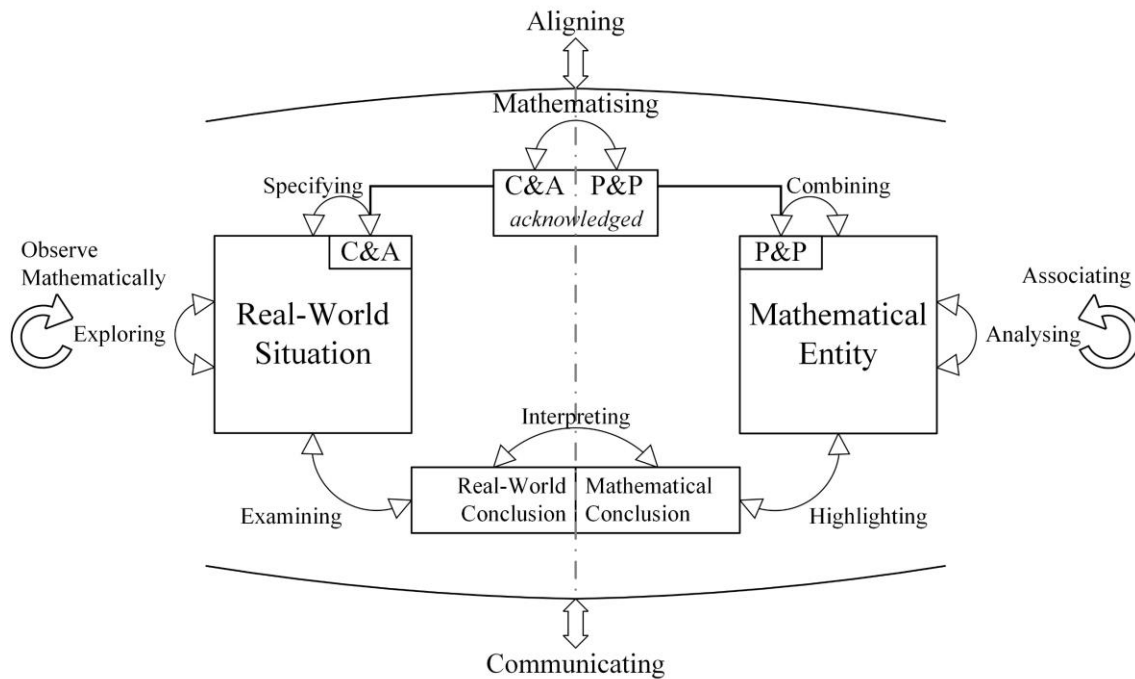


Figure 31. Modelling process diagram proposed by Zbiek and Conner (2006).
Note: C&A means *conditions and assumptions*; P&P means *properties and parameters*.
Source: Adapted from Zbiek & Conner (2006, p. 98).

Regarding the *models and modelling perspective*, Abassian and collaborators (2020) establish it as an evolution of the *contextual perspective* proposed by Kaiser and Sriraman (2006). This *perspective* is based on the work developed by Lesh and collaborators (see Lesh & Doerr, 2003a; Lesh et al., 2000; Lesh & Sriraman, 2005; among others), in turn, influenced by the work developed by Piaget (manifested in their definition of *mathematical model*). Although the *models and modelling perspective* shares an interest in the use and understanding of mathematical concepts with the *educational perspective*, the difference lies in the emphasis given to model-eliciting activities (MEAs). MEAs are real-world tasks that are designed to promote mathematical development, following six principles: (1) model construction, (2) reality, (3) self-assessment, (4) model documentation, (5) generalisability, and (6) effective prototype (Lesh & Doerr, 2003b). MEAs are also used to investigate students' mathematical thinking (see Doerr & Lesh, 2011), through the development of the *modelling cycle* presented in Figure 32.

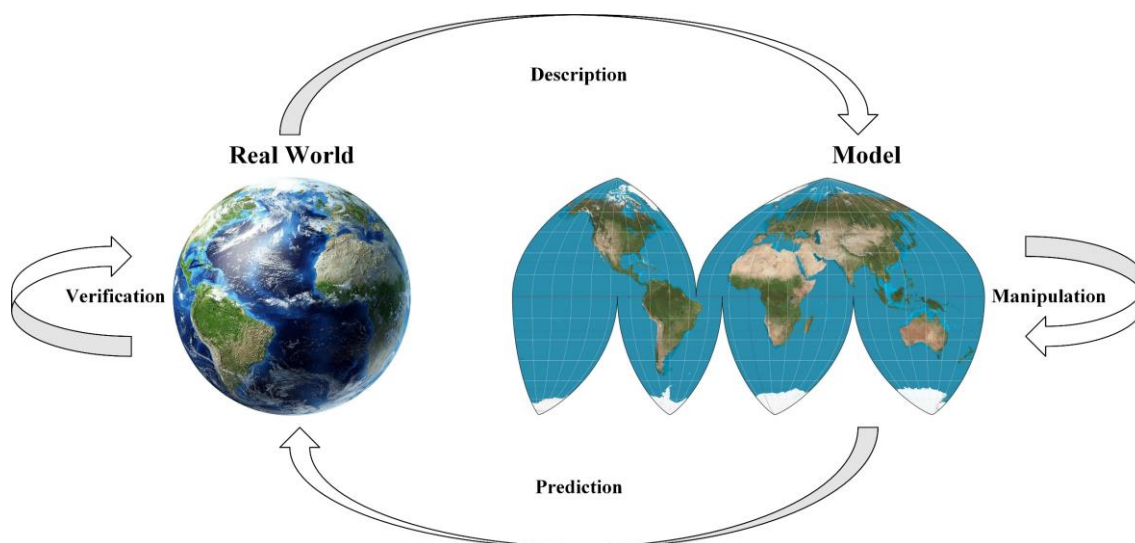


Figure 32. Modelling cycle proposed by Lesh and Doerr (2003b).
Source: Adapted from Lesh & Doerr (2003b, p. 17).

Regarding the *socio-critical perspective*, Abassian and collaborators (2020) expand its foundations with the work of Skovsmose and collaborators (see Skovsmose, 1994; Skovsmose & Borba, 2004; among others) in the field of critical pedagogy. This *perspective* is based on the idea that, if mathematics is used in society to make decisions, for example, through *modelling*, then the modellers who create *mathematical models* and are able to criticise them have a certain power over society. This *perspective* greatly differs from the previous three in the sense that, on one hand, it does not emphasise the development of *modelling competencies* (such as the *realistic* and *educational perspectives*) and, on the other hand, it does not focus on mathematical understanding (such as the *educational* and *models and modelling perspectives*), but its purpose is to educate critical modellers capable of recognising the power of *mathematical models* and mathematics in society (Barbosa, 2006, 2007).

Regarding the *epistemological perspective*, Abassian and collaborators (2020) expand its foundations with the work of Gravemeijer and collaborators (see Gravemeijer, 1999, 2002, 2007; Gravemeijer & Doorman, 1999; among others) in the field of Realistic Mathematics Education. Since the objective of this *perspective* is to develop mathematical understanding, unlike the previous *perspectives*, it does not require a real-world problem to model, because every mathematical task is considered a *modelling task*. Gravemeijer (2002, 2007) describes that the *modelling process* in this *perspective* consists of four stages: (1) activity in the task setting, (2) referential activity, (3) general activity, and (4) formal mathematical reasoning.

Finally, the proposal by Abassian and collaborators (2020) does not contemplate the *cognitive meta-perspective* in the same way that Kaiser and Sriraman (2006) do, but rather, they include it within the *realistic* and partially the *educational perspectives*.

In addition to the two literature reviews on *modelling perspectives* previously described other reviews on more specific topics surrounding *modelling* research have also been reported. For example, English and collaborators (2016) conduct a review of the proceedings of PME events between 2005 and 2015, in order to identify research trends in *modelling*; also, Cevikbas and collaborators (2022) conduct a systematic review of the literature on conceptual developments around *modelling competencies* between 2003 and 2021; while Frejd (2013) presents a critical review of the literature on research in *modelling* assessment, also revealing the criteria that are usually privileged depending on the approach (holistic or atomistic) to *modelling competencies*. A common characteristic of these studies is that they consider the different *modelling perspectives* to organise their results.

A final review of the literature that stands out is that conducted by Preciado and collaborators (2023), privileging the geographical attribute in the distribution of *modelling* research. In the context of the preparation of this doctoral thesis, the work of these authors is considered one of the most recent reviews of the literature on *modelling* research, which allows it to provide an updated look at the state of the art in this matter. In their work, these authors consider as sources: (a) the chapter of six books emanating from the ICTMA Conferences and two of the ICME Congresses (acronym for *International Commission on Mathematical Instruction*); and (b) 98 articles (published until 2020) from nine journals of research in Mathematics Education (based on the classifications by Toerner & Arzarello, 2012; Williams & Leatham, 2017). Table 27 summarises the results of the literature review conducted by Preciado and collaborators (2023) considering the following attributes: countries with the highest number of publications (second row), *modelling perspective* privileged in each country (third row), content privileged in each country (fourth row), and educational level privileged in each country (fifth row).

Table 27. Synthesis of the literature review conducted by Preciado and collaborators (2023).

Attributes		Data					
Countries (*)	Germany (104)	United States (79)	Australia (66)	Brazil (37)	Japan (22)	United Kingdom (18)	Others (174)
Perspective	Educational	Contextual/ Models and modelling	Educational	Socio-critical	Educational	Educational	Educational
Content	Modelling competencies	Specific mathematical content	Modelling competencies	Specific mathematical content	Specific mathematical content/ Modelling competencies	Specific mathematical content	Specific mathematical content
Educational level	School (secondary education)	School (secondary education)	School (secondary education)	University (Undergraduate)	School (secondary education)	School (secondary education)	School (secondary education)

Note (*): This row includes the number of publications in parentheses. Source: Adapted from Preciado et al. (2023).

The synthesis in Table 27 shows that the three countries with the most academic production in the ICTMA community are Germany, the United States, and Australia, with almost half of the total publications (249 of 500). Although at an international level⁷⁶ there is a trend to work on the *educational modelling perspective*, in the United States a preference for studies from the *models and modelling perspective* prevails, just as in Brazil the same situation happens with the *socio-critical perspective*. In both countries, this trend is due to the origin of the *perspectives*, converting them into local research trends. In this doctoral thesis, the *realistic modelling perspective* is mainly assumed with some theoretical overtones from the *educational perspective*.

This synthesis also shows that the main topics of these investigations are the development of *modelling competencies* and the learning of specific mathematical content by students. This means that, although knowledge of certain mathematical content and the development of *modelling competencies* are emphasised, the large areas of mathematical knowledge (algebra, calculus, geometry, etc.) are not addressed in a global manner. Furthermore, most research focuses on the school educational level, mainly on secondary education (with the exception of Brazil). In this doctoral thesis, the content of the investigation, on one hand, is fundamentally reflective-on-theory and, on the other hand, is not limited to a certain content or specific area of mathematical knowledge; likewise, the educational level at which part of this investigation was conducted was postgraduate, due to the context of teacher education in Spain. In other words, this doctoral thesis seeks to investigate field of knowledge in Mathematics Education that have not been sufficiently explored.

A1.2.3. Research on mathematical modelling

As seen in subsection A1.2.1, research on mathematical modelling has been evolving since, above all, the second half of the twentieth century. Particularly, 1973 is considered the year in which modelling began to form an integral part of research in Mathematics Education, because it was the year in which the McLone Report was published, which highlighted the students' performance in solving problem was highlighted, but also the poor capability to formulate them (Frejd & Vos, [2024](#)). During these 50 years, research

⁷⁶ For a review of the literature in the Hispanic American context, see Peña et al. (2023).

in modelling allowed a conceptual refinement and its characterisation as a relevant process of mathematical activity, as seen in subsection A1.2.2. However, these advances in research were possible due to the fact that modelling was considered a relevant topic of study within Mathematics Education.

Taking into consideration that the academic production of the last 50 years has been numerous, this subsection highlights three areas of interest that are addressed in this doctoral thesis during the years of the twenty-first century that have passed, considering as the main but not exclusive reference the work conducted by the ICTMA community: reflections on the structure and uses of modelling cycles (subsection A1.2.3.1), the role played by modelling in teacher education (subsection A1.2.3.2), and the articulation of modelling with other professional competencies and relevant processes of mathematical activity (subsection A1.2.3.3).

A1.2.3.1. Reflections on modelling cycles

As stated in subsection A1.2.2.6, the modelling cycle is an idealised representation of the modelling process, so it constitutes not only a descriptive tool of the transitions performed by a modeller between the real world and mathematics, but also a tool for the analysis of the mathematical activity underlying the modelling process. This subsection highlights some studies in which the usefulness of the modelling cycle is expanded to analyse other aspects that transcend the phases and transitions of the modelling process.

Galbraith and Stillman (2006; also, see Galbraith et al., 2007) develop a framework to identify blockages that students may experience during the transitions of the modelling process. To this end, these authors rely on their adaptation of the cycle proposed by Blum (1985) and Kaiser-Messmer (1986) in Figure 33. The objective of this work is to delve into the critical aspects in the modelling process, focusing on the transitions $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow E$, $E \rightarrow F \rightarrow [B-G]$ of the cycle in Figure 33. The context of implementation is RITEMATHS, a research project developed by two Australian universities in six schools, and whose focus is to promote interactions between modelling, mathematical content, and technology. The participants were secondary education students (grades 8–10; students aged 13–16) to whom three modelling problems were applied. Although these authors already had an emerging framework (see an excerpt in Table 28), the collected productions allowed them to refine it for future implementations. Finally, the authors

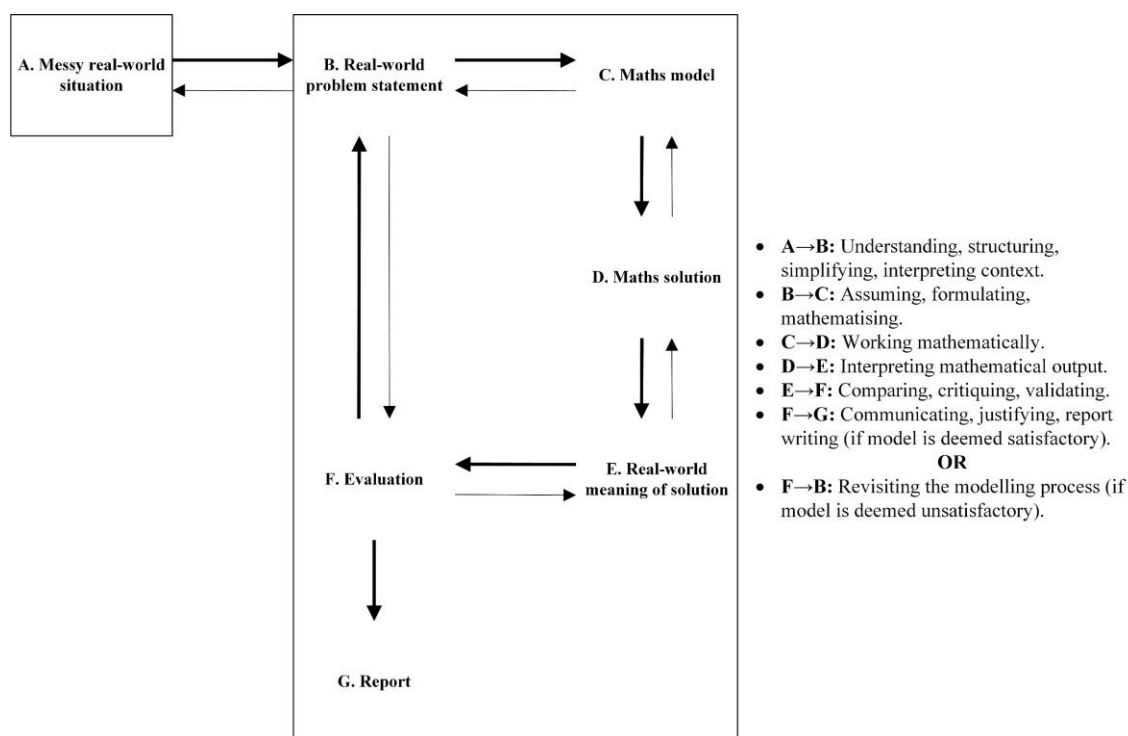


Figure 33. Modelling process chart proposed by Galbraith and Stillman (2006).

Source: Adapted from Galbraith & Stillman (2006, p. 144).

propose the use of this framework not only for research purposes, but also for the learning and assessment of different modelling problems.

Table 28. Excerpt of the framework to identify student blockages during the transitions of the modelling process.

Transitions	Blockages
A→B	<ul style="list-style-type: none"> • Clarifying context of problem. • Making simplifying assumptions. • Identifying strategic entities. • Specifying the correct elements of strategic entities.
B→C	<ul style="list-style-type: none"> • Identifying dependent and independent variables for inclusion in algebraic model. • Realising independent variable must be uniquely defined. • Representing elements mathematically so formulae can be applied. • Making relevant assumptions. [...]
C→D	<ul style="list-style-type: none"> • Applying appropriate formulae. • Applying algebraic simplification processes to symbolic formulae to produce more sophisticated functions. • Using technology/mathematical tables to perform calculation. • Using technology to automate extension of formulae application to multiple cases. [...]
D→E	<ul style="list-style-type: none"> • Identifying mathematical results with their real-world counterparts. • Contextualising interim and final mathematical results in terms of real-world situation. • Integrating arguments to justify interpretations.

Transitions	Blockages
D→E (cont.)	<ul style="list-style-type: none"> • Relaxing of prior constraints to produce results needed to support a new interpretation. [...]
E→F	<ul style="list-style-type: none"> • Reconciling unexpected interim results with real situation. • Considering real-world implications of mathematical results. • Reconciling mathematical and real-world aspects of the problem. • Realising there is a limit to the relaxation of constraints that is acceptable for a valid solution. [...]

Source: Adapted from Galbraith & Stillman (2006, p. 147).

Another notable work in this line is that conducted by Greefrath and collaborators (see Greefrath, 2011; Greerath & Siller, 2018; Greefrath & Vorhölter, 2016; among others), who incorporate the use of digital tools in the modelling process. To this end, these authors rely on their adaptation of the cycle proposed by Blum and Leiß (2007a) in Figure 34.

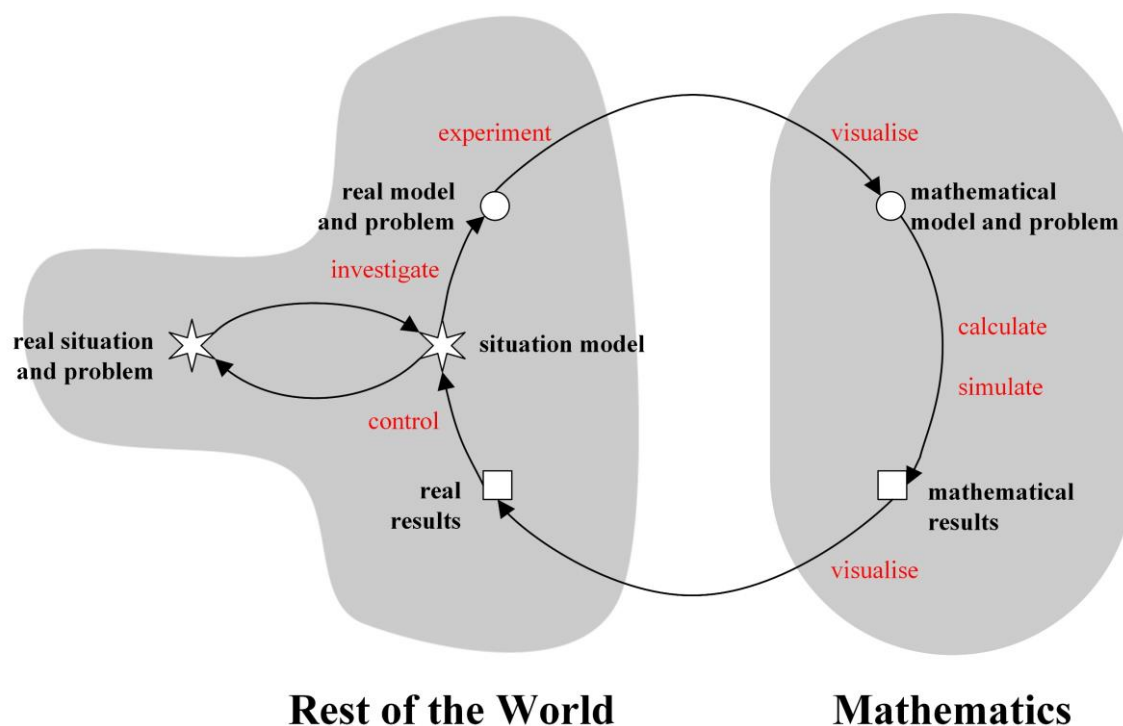


Figure 34. Use of digital tools in the modelling cycle.
Source: Adapted from Greefrath & Siller (2018, p. 12, author's translation).

The cycle in Figure 34 shows the possible uses of digital tools throughout the modelling process, where two translation processes are required: first, from the real world into mathematics, and second, from mathematics into the language of the digital tool (Greefrath & Vorhölter, 2016). This requires an extended cycle, such as that presented in Figure 30. The studies conducted in this research line delve into the role of digital tools

in the different transitions of the modelling cycle, especially for interpreting and validating results (Geiger, [2011](#)); assessment in modelling through the use of technologies (Stacey & Wiliam, [2013](#); William & Goos, [2013](#)); simulation processes occurring in modelling (Hankeln, [2018](#)); didactic knowledge for teaching modelling and simulation with digital tools (Gerber et al., [2023](#)); among other topics⁷⁷.

Finally, three studies are mentioned that propose an interpretation of the modelling process using the tools provided by a theoretical framework of Mathematics Education for a deeper understanding. The first study is that conducted by Ärlebäck and Frejd ([2013](#)), who explore an emerging framework to analyse mathematical models and the modelling process from commognition. This theoretical framework, proposed by Sfard ([2008](#)), allows the analysis of the intra- and interpersonal communication of individuals who solve a modelling problem, addressing both the social and cognitive aspects of this process. In methodological terms, this is a case study in which the solving of a modelling task by three groups of secondary education studies is analysed, focusing on the discourses where mathematical models are used, created, developed, and modified. In this study, the researchers analyse the students' modelling process by applying commognitive tools; however, it cannot be spoken of a theoretical articulation between both frameworks (modelling and commognition) since it is a pioneering study of its kind⁷⁸.

The second study⁷⁹ is that conducted by Cosmes and Montoya-Delgadillo ([2021](#)), who investigate the development of the modelling competency in the context of engineering education. This study takes the modelling cycle proposed by Borromeo Ferri ([2006](#)) as a theoretical reference and they complement the analysis of this process with the MWS Theory (Kuzniak et al., [2016](#)), specifically, with the extended version of this model for the area of engineering (see Moutet, [2016](#)). In methodological terms, this is a case study with prospective civil engineers from a Chilean university, in which the students solved structural-analysis problems during an academic semester. The results of this study show the role played by modelling in engineering, calling it engineering mathematical modelling; however, the MWS Theory is only limited to analysing the sub-competency of mathematical work with the model and does not intervene with real-world elements.

⁷⁷ See a synthesis of the studies conducted in this research line in Siller, Geiger, & Greefrath ([2023](#)).

⁷⁸ See the articulation of Commognitive Theory with other frameworks in the works by Sandoval-Troncoso and collaborators (Sandoval-Troncoso, [2021](#); Sandoval-Troncoso & Ledezma, [2021](#)).

⁷⁹ See an extension of this study in Cosmes ([2020](#)).

The third study is that conducted by Verdugo-Hernández and collaborators (2022), who propose an articulation between the modelling cycle proposed by Blomhøj and Højgaard (2003) and the MWS Theory. In methodological terms, this is a case study with prospective computer civil engineers from a Chilean university, in which the students solved a modelling task designed based on the proposed articulation. Although the authors state that they do not intend to adjust the Blomhøj and Højgaard's cycle to the MWS Theory, they do identify some complementarities between both theoretical references. However, given that the elements of the MWS Theory only cover mathematical aspects, this framework is not sufficient to cover the entire modelling cycle considered, so the articulation proposed by these authors turns out to be partial and limited.

Unlike the studies referenced in this subsection, one of the objectives of this doctoral thesis points towards a deep theoretical articulation between a modelling cycle and a theoretical framework of Mathematics Education. Therefore, although above all the studies conducted by Galbraith and Stillman (2006) and by Cosmes and Montoya-Delgadillo (2021) are recognised as important precedents, this research goes one step further with the use of the *Networking of Theories* methodology (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010, 2014), a topic that will be extensively addressed in [Chapter 3](#).

A1.2.3.2. Modelling in teacher education

As stated in subsection A1.2.1.3, the turn of the century brought with it, among others, a generalised recognition of the importance of modelling for the teaching of mathematics at all educational levels, materialised in its curricular inclusion at an international level, in the design and preparation of support materials, and in the implementation of courses for prospective and practising teachers. This subsection highlights some studies that address the teaching and learning of modelling in teacher education.

At the beginning of the twenty-first century, one of the groups that gave special emphasis to research on modelling in teacher education was that of the models and modelling perspective in the United States (see Doerr, 2006; Doerr & Lesh, 2003; Koellner-Clark & Lesh, 2003; Schorr & Koellner-Clark, 2003; Schorr & Lesh, 2003; among others). In their work, these authors investigate the development of knowledge and abilities of practising teachers through the implementation of professional development activities in

their classrooms. In this way, the application of model-eliciting activities allows teachers to know their students' ways of thinking from an approach based on cognitively guided instruction (Lesh & Lehrer, [2003](#)).

Another study in this line of research is that conducted by Blomhøj and Kjeldsen ([2006](#)), who report an experience with practising Danish secondary education teachers (grades 10–12; students aged 15–18), in the context of a problem-oriented project-based modelling course⁸⁰. The objective of this course is to provide support to develop, implement in their classrooms, evaluate, and report this type of projects. Among the problems in implementing this course was that, in the temporal context of the study, Danish teachers did not have education in modelling derived from their university studies, since this process was not yet integrated into the university curriculum for teacher education. The results of the study lead the authors to reflect on three dilemmas about teaching modelling in the classroom:

- Understanding the modelling competency from a global point of view (holistic approach) or as a compilation of sub-competencies (atomistic approach).
- Considering modelling as an educational goal in itself or as a means to motivate and support mathematical learning.
- Teaching directed autonomy (see Blomhøj & Højgaard, [2007](#)).

Until then, research on modelling in teacher education focused mainly on the implementation of courses and activities for practising teachers, because the curricular incorporation of modelling at an international level was in full swing. An interesting reflection in this regard is that made by Lingefjärd ([2007](#)), who addresses how difficult it was to create, maintain, and support modelling courses in teacher education in the Swedish context due to the competition with mathematics subjects which, at that time, were considered more useful to include in training courses than the teaching of modelling for prospective teachers. Therefore, a new vein was generated to explore and research on this topic was expanded to cover other aspects, studying both prospective and practising teachers.

One of the research approaches on modelling in teacher education is that of knowledge and competencies in this process. For example, Carrejo and Marshall ([2007](#)) study the

⁸⁰ The interdisciplinary extensions of this work can be found in Blomhøj & Kjeldsen ([2009](#), [2018](#)).

construction, development, and use of mathematical models performed by a group of prospective mathematics and physics teachers for the study of movement in a physics course. Using a framework on modelling tensions, the authors explore the prospective teachers' capability to make connections between the abstract models of both disciplines.

In the German context, Kaiser (2007) reports the results of a seminar on modelling for prospective secondary education teachers, in which scholars from the mathematics and didactics of mathematics departments, prospective teachers, and secondary education students (aged 16–18) participated. The course consisted of prospective teachers supervising the work of groups of students while they solved modelling problems; in parallel, the prospective teachers attended their corresponding university course, where they discussed the work performed by their students. The results of this study gave rise to reflections on the time required to acquire modelling competencies and how these teachers should organise the teaching of this process in the classroom in their future practice. Another study with similar characteristics is that reported by Ortiz and collaborators (2007), who focus on the didactic knowledge that prospective teachers make evident during the implementation of a course to promote the modelling competency and the use of the graphic calculator for the development of algebraic activities.

In the Australian context, Stillman and Brown (2011) study the professional knowledge and competencies of prospective secondary education teachers on teaching modelling and real-world applications. The 73 participating teachers came from two different education systems: one-year programmes (professionalising postgraduate degrees in education enabling them to practise teaching) or four-year programmes (training in mathematics and education during undergraduate studies). The results show the differences and similarities between both teacher education systems regarding the adaptation of tasks to certain educational levels, the ability to analyse student responses, and beliefs about the nature of mathematics and its uses.

An interesting reflection on this type of knowledge is that developed by Wake (2011) in the English context because, over the years, these studies adopted more formal models of knowledge and competencies. More specifically, among the most used models to develop these studies are that proposed by Shulman (1986) on teacher knowledge, and that by Hill and collaborators (2008) on mathematical knowledge for teaching (MKT). Another

interesting reflection is that raised by Borromeo Ferri (2021), who questions the knowledge that prospective teachers acquire and the competencies that they develop once modelling has become part of the educational curricula.

In the German context, Kaiser and collaborators (2013) report the partial results of an international research project, focusing on a case study on the professional knowledge of prospective teachers around modelling. The results provide evidence on three types of knowledge of the MKT model: mathematical content, pedagogical content, and general pedagogical knowledge. Of these types, the one that stood out the most was pedagogical content knowledge, which led to a reflection by the authors on how to articulate these three types of knowledge around modelling. A more recent study in this line is that reported by Greefrath and collaborators (2022), who focus on the pedagogical content knowledge (PCK) of prospective secondary education teachers. The results show a high degree of development of some facets of PCK in modelling of the prospective teachers who participated in a seminar specially designed for these purposes, compared to those who attended regular courses in didactics of mathematics, highlighting the importance of prospective teachers being those who design and solve their own modelling problems.

In the Austrian context, Kuntze and collaborators (2013) focus on the PCK of prospective and practising teachers on modelling, with the aim of exploring how these teachers perceive their knowledge to help students in the development of this process and how they consider their university education in modelling is/was. The results of the study show a negative perception of both groups of teachers about their PCK in modelling, which makes evident a need for further professional development in this process that encompasses, for example, positive modelling experiences in the classroom and support for the use of technology during this process, intended for both prospective and practising teachers.

In the Singaporean context, Tan and Ang (2013) report a case study on the knowledge on modelling of a group of prospective secondary education teachers based on their individual experiences, that is, contrary to other studies, here the prospective teachers solved two modelling problems individually and not in groups. The results show a tendency to privilege the mathematical aspects of the solving at the expense of modelling competencies, due to their lack of experience with the implementation of this type of

problems in the classroom. In the German context, Besser and collaborators (2015) report the results of a course for practising teachers on how to promote PCK and general pedagogical knowledge (PK) on assessment in modelling. 67 teachers participated in this course and it lasted 10 months, where the teachers implemented the knowledge and competencies acquired during the course for 10 weeks. The results show the improvement of these teachers in the quality of their formative assessment in modelling and their feedback capabilities.

In the Turkish context, Yilmaz and Tekin-Dede (2016) study the mathematisation sub-competency of five prospective primary education teachers during a university course in their last academic year. Since an individual modelling course is not included throughout their undergraduate studies, it was decided to implement this nine-week course. The results show the evolution of the prospective teachers in the development of the mathematisation sub-competency (examining their capability to identify assumptions and variables, and to build mathematical models), showing an improvement between before and after the course. Other studies with similar characteristics, also conducted in the Turkish context, are that reported by Sen Zeytun and collaborators (2017), although focusing on the entire modelling process developed by prospective primary education teachers; Sevinc and Lesh (2018), who focus on the abilities of prospective secondary education teachers to write, revise, and refine modelling problems (see a continuation of this study in Sevinc & Lesh, 2022), as well as Faith (2020) focuses on their abilities in designing modelling tasks; Didiş Kabar y Erbaş (2021), who focus on the capabilities of these teachers to identify thinking, anticipate errors, and analyse the work of students when faced with modelling problems.

In the American context, Park (2017) studies the content knowledge of three prospective secondary education teachers about modelling from a commognitive approach. Using the framework proposed by Galbraith and Stillman (2006), the modelling processes of three students who took a module on science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education were examined. Due to the limited nature of the study, the results suggest that the prospective teachers' discourse manifested a pragmatic modelling perspective (see subsection A1.2.2.8) and that their knowledge about this process allowed them to mathematically verify the proposed model and critically reflect on the solutions. Also in the American context, Tidwell and collaborators (2023) report a study on the

growth and development of modelling competencies of prospective primary education teachers. By solving modelling tasks, presenting posters, reports, and applying a questionnaire before and after the intervention, the results showed the capability of the prospective teachers to put the modelling cycle into practice and to develop an appropriate conception of this process, especially about its benefits for the teaching and learning of mathematics.

In the South African context, Durandt and Lautenbach (2020) study the understanding of prospective secondary education teachers about the modelling cycle and the development of competencies in this process when they take on the role of modellers and modelling teachers. In methodological terms, this is a design-based study with 49 prospective teachers where, in a first iteration, they developed mathematical competencies as modellers, while in a second iteration, they developed modelling competencies as teachers. These results were evident in the posters that the prospective teachers presented at the end of their project.

In the Chinese context, Wang (2021) studies the modelling competency of prospective secondary education teachers and its relationship with experiences in modelling competitions. The study included the participation of 285 participating teachers, who answered a questionnaire that included a modelling problem, of which 273 were considered valid. The results show the differences between prospective teachers according to the type of university they study at, their gender, and whether they participated in modelling competitions or not.

Another research approach on modelling in teacher education is on teacher and assessment strategies. For example, Antonius and collaborators (2007) reflect on the role that the teacher must play in the classroom, where the important aspects that must be promoted are: the formulation of strategic questions (metacognitive indications, focused on specific solving strategies, and with few detailed guides); the idea that mathematics is a tool within modelling and not the objective of the process; the introduction of mathematical topics when the situation requires it; employing active, student-centred, and contextualised pedagogy. Another reflection in this line is that made by Lingefjård and Meier (2010), who address the gap between what modelling is and what is taught in the mathematics classroom, with the aim of establishing a framework so that teachers can be managers of the modelling process in their lessons. Finally, Schukajlow and Blum (2023)

conduct a review of the literature in which they identified a guided-instruction approach and a constructivist vision on the teaching of modelling, from which different principles that guide this teaching are derived.

Also, studies such as that conducted by K. Maaß and Gurlitt (2011) report that the LEMA Project (acronym for *Learning and Education in and through Modelling and Applications*), although it had no effects on the beliefs of the participating teachers, it did have effects on their knowledge and management capability in the classroom when they implemented modelling with their students. However, despite these efforts, studies such as that conducted by Schmidt (2011) provide evidence that there are still obstacles to implementing modelling in the classroom, from the perspective of prospective (in their educational internship experiences) and practising teachers (in their daily practice), such as the lack of time and materials, and the difficulties in its assessment.

In the Brazilian context, Araújo and Campos (2015) report the negotiation strategies of a university professor with a prospective teacher to use mathematics in a modelling project. The results of this study reveal the importance of the teacher managing negotiation strategies in the classroom when facing these types of problems. In the Turkish context, Aydogan and collaborators (2017) report a study on the generation of evaluation criteria for modelling competency developed by four practising secondary education teachers following the lesson study methodology. The context of implementation was a professional development programme that included the introduction, solving, and implementation of model-eliciting activities for teachers. The results of the study showed a change in the teachers' evaluation strategies, from assuming that each modelling activity should have different criteria to creating unified personal guidelines to apply to any activity of this type. A continuation of the work carried out by these authors focuses on the strategies of 10 practising secondary education teachers for asking questions during the solving of modelling tasks (see Aydogan et al., 2018). Also in the Turkish context, Cakmak Gurel and Bekdemir (2022) study the strategies to intervene and question the validity of a mathematical model of 47 prospective secondary education teachers. Among the results, the type of interventions and their effect stand out, such as, for example, insufficient explanations, student errors, and progress in the modelling process.

In the American context, Manouchehri (2017) reports the efforts to assist a group of practising teachers to develop knowledge about modelling and its implementation based

on what is stipulated in the school curriculum. The study was part of a 25-hour professional development course, where 85 teachers worked on modelling tasks and discussed their implementation. This study reports the results of 25 of the teachers who participated in the course, where growth was evident in their knowledge about modelling based on the mathematical (construction and work with the mathematical model), pedagogical (strategies to develop this process in the classroom), and epistemological challenges (obstacles during the modelling process) that they had to face.

In the Japanese context, Saeki and collaborators (2023) study the strategies of a group of practising teachers to transform mathematised tasks into modelling tasks, in the context of a four-module teacher professional development course for novice teachers. The results of the study show how the teachers modified the mathematised tasks meeting different criteria of a modelling task and that these tasks were improving after their implementations according to the lesson study methodology. In the German context, Siller, Greefrath and collaborators (2023) study the self-efficacy beliefs⁸¹ of prospective teachers about modelling, in the context of a one-semester university seminar. The results became more evident when participating teachers implemented the modelling tasks that they created with ninth grade students (aged 14–15).

Another research approach on modelling in teacher education is on their beliefs and conceptions around this process. For example, Chapman (2007) investigates conceptions about mathematics, word problems, and problem solving that involve the need to model in the classroom. In methodological terms, this is a case study with six practising secondary education teachers, to whom interviews, observations of their lessons, and role-playing scenarios were applied to capture the nature of their thinking on the topics of interest. The results of this study show the strategies that the participating teachers use to promote modelling in their lessons, concluding that the thinking of teachers' beliefs and conceptions are important factors to create a culture that supports modelling in the classroom.

In the Singaporean context, Ng (2010) reports a preliminary study with practising primary education teachers with the aim of knowing their conceptions of modelling tasks and their

⁸¹ These authors assume the definition by Tschannen-Moran and Woolfolk Hoy (2001): “A teacher’s efficacy belief is a judgment of his or her capabilities to bring about desired outcomes of student engagement and learning, even among those students who may be difficult or unmotivated” (p. 783).

inclusion in the classroom. In methodological terms, this study was conducted with 48 teachers, who solved a model-eliciting task (*Youth Olympic Games*, adapted from English, [2013](#)) and reflected on the solving procedures and the plausibility of implementing it in their classes. A continuation of this investigation is that reported in Ng ([2013](#)), in which the author compares the results of the first study with those of a group of 57 prospective primary education teachers in the context of an undergraduate training course, making evident the similarities and differences between both groups of teachers when solving the same model-eliciting task, and suggesting a working method for the Singaporean context that includes prospective and practising teachers when addressing the teaching of modelling in the classroom (see Ng et al., [2019](#)).

In the Italian context, Fazio and collaborators ([2012](#)) study the conceptions of prospective primary education teachers about modelling and the use of models in a physics and mathematics course. The results of the questionnaire applied to the participating teachers allowed it to infer their knowledge approaches (behaviourist, cognitivist, and constructivist) with reference to modelling. In the German context, Förster ([2011](#)) reports a case study with eight practising secondary education teachers, with the aim of delving into their beliefs about applications and modelling. The results of the study show the effects of professional development courses on teachers with more teaching experience, the contradiction between finding it necessary to make applications in physics, but not in mathematics, and the need to promote a positive attitude and preparation in knowledge for teaching modelling in the classroom. A study with similar characteristics is that reported by Girnat and Eichler ([2011](#)) for beliefs about modelling in geometry and probabilities.

In the Taiwanese context, Yu and Chang ([2011](#)) report the perceptions of 16 practising secondary education teachers (students in a professionalising master's programme) about model-eliciting activities. Although the results show a positive assessment of this type of activities, the participating teachers also declared obstacles to its implementation in the classroom, as well as only some superficial aspects of its solving due to a lack of theoretical background in the models and modelling perspective. A study with similar characteristics is that reported by Thomas and Hart ([2013](#)) with prospective American primary education teachers. In the German context, Kuntze ([2011](#)) reports the results of applying a questionnaire on tasks with low or high demand for modelling to two samples:

one of 230 prospective teachers and another of 79 practising teachers. The results suggest a need to include work on types of modelling tasks in teacher education, since a tendency was revealed for prospective teachers to consider the application of modelling tasks incompatible with the teaching of mathematical content, while practising teachers did see valuable learning opportunities in this type of tasks.

In the American context, Anhalt and Cortez (2016) report the evolution of 11 prospective secondary education teachers who took a module on modelling for the first time. This module consisted of a six-week course based on the curricular provisions of the Common Core State Standards Initiative (2010), where modelling is defined as “the process of choosing and using appropriate mathematics and statistics to analyze empirical situations, to understand them better, and to improve decisions” (p. 72). The results show that, although the prospective teachers were able to put into practice a modelling cycle, the connection between the real world and mathematics took them more time and this factor should be considered with special care in undergraduate training courses. A study with similar characteristics is that reported by Cetinkaya and collaborators (2016) in the Turkish context, who focus on the pedagogical principles that prospective teachers consider necessary to teach mathematics through modelling.

Other topics addressed in research on modelling in teacher education include, among others:

- the analysis of undergraduate development courses (for example, Abramovich, 2013; Asempapa & Sastry, 2021; Bal & Doğanay, 2014; Çıltaş & Işık, 2013; Deniz Yılmaz & Incesu, 2022; Durandt & Jacobs, 2017; Hagen, 2015; Hansen, 2021; Koç & Elçi, 2022; Villarreal et al., 2015; Winter & Venkat, 2013; among others);
- the analysis of postgraduate professionalising courses and experiences (for example, Ärleback, 2020; Escalante, 2013; Gallart et al., 2015; García y Ruiz-Higueras, 2011; Ikeda & Stephens, 2021; Maass & Engeln, 2018; Psycharis & Potari, 2017; Shahbari & Tabach, 2016; Zbiek et al., 2024; among others).
- distance courses (for example, Biembengut & Faria, 2011; Deniz Yılmaz et al., 2023; Geiger et al., 2018; Orey & Rosa, 2018; Stohlmann & Yang, 2023; among others).

- performance comparisons between countries (for example, Cabassut & Ferrando, [2017](#); Kacerja et al., [2021](#); Yang et al., [2022](#); among others).

Unlike the studies referenced in this subsection, one of the objectives of this doctoral thesis points towards reflection on the practice of prospective teachers on the inclusion of modelling in mathematical teaching and learning processes. Therefore, although the existence of precedents that address this issue is recognised (see Borromeo Ferri, [2017](#); Tekin Dede & Bukova, [2023](#)), this research goes one step further with the use of the tool *Didactic Suitability Criteria* (Godino, [2013](#)) to reflect on one's own practice, a topic that will be extensively addressed in Chapters [4](#) and [5](#).

A1.2.3.3. Professional competencies and mathematical processes in modelling

As stated in subsection A1.2.1.3, the turn of the century brought with it, among others, a notable increase in interest in researching modelling, not only considering the particularised study of this process, but also its analysis from other relevant processes of mathematical activity and from a competency perspective. This subsection highlights some studies in which modelling is addressed in conjunction with other professional competencies and mathematical processes.

One of the professional competencies in modelling that teachers must develop is the capability to identify the difficulties that this process entails, in order to be able to intervene before errors occur. In this sense, Sen Zeytun and collaborators ([2024](#)) investigate the origin of the difficulties that prospective teachers of different educational levels (undergraduate and postgraduate) experienced during an elective course on modelling. The 19 participating teachers were grouped into teams of three or four members and worked during the semester of the course. The participants already had mathematical knowledge from previous courses (calculus, discrete mathematics, algebraic structures, etc.) according to their specialisation in teaching; however, none of them declared having taken a specialised course in modelling. The participating teachers collaboratively solved 23 modelling tasks with different structures and levels of complexity, although they also solved them individually and discussed them with the class group. The results of the study showed two types of difficulties involved in solving modelling problems:

- Individual factors: Lack of conceptual mathematical understanding, difficulties connecting the real world with the mathematical world, being more focused on obtaining a result than on developing a process and carrying out disorganised work throughout the modelling process.
- Contextual factors: Lack of previous experiences with solving modelling tasks and lack of time to solve them.

In this line of research, it is also considered that the complexity of the modelling process is due, among other factors, to the variety of approaches that students can take to solve a modelling problem. For this reason, another of the professional competencies in modelling that teachers must develop is the noticing competencies (van Es & Sherin, [2002](#)). In this way, the modelling process is analysed from the perspective of a teacher who seeks at what time and in what way he should intervene when his students solve this type of problems.

Alwast and Vorhölter ([2022](#)) propose a video-based instrument to measure noticing competencies, conceptualising them based on the characterisation of competence as a continuum (see Blömeke et al., [2015](#)). To this end, the authors conducted three studies to validate this instrument. The first study evaluated the content validity and that all these contents were covered by the instrument, that is, that the videos presented, the questions asked, and the ability of the participants to perceive the intended incidents were in line. The second study evaluated the elementary validity, and that the participants' reasoning was in line with the levels of interpretation, that is, that the participants' interpretations were possible to categorise at one level or another. The third study evaluated the construct validity, that is, whether the scale adequately described the results of the application of the instrument. In a subsequent study by these authors, this instrument is used to assess the noticing competencies of prospective teachers, in the context of a postgraduate seminar with a focus on modelling (see Alwast & Vorhölter, [2023](#)).

Another study that addresses noticing competencies is that reported by Cai and collaborators ([2022](#)), who examine how prospective and practising teachers solved modelling tasks, as well as analysing students' responses to such tasks. The results showed that, when examining student work, both groups of teachers interpreted positive aspects in the students' solutions and provided feedback, although they responded in different ways: almost all practising teachers responded by asking questions; a portion of

the prospective teachers directly corrected students' errors; and another portion of them only pointed out the errors without correcting them.

In parallel with noticing competencies, teachers must develop metacognitive strategies that help students avoid or overcome cognitive barriers during the modelling process. For example, Wendt and collaborators (2020) study the case of a teacher who showed a breadth in her perception of the use of metacognition, by her students, while they developed modelling processes. In methodological terms, the study consisted of the teacher having to implement six modelling tasks in a period of eight months, which involved her explaining the cycle proposed by Kaiser and Stender (2013) and each of its phases with certain tasks designed for this, and thus be able to develop metacognitive knowledge about the characteristics of these tasks. The results of the study show that the teacher expanded her perceptions when planning modelling tasks with her students, integrating metacognitive abilities when planning, monitoring, and evaluating performance. Taking into consideration the need to develop an instrument to measure metacognitive knowledge of modelling, Frenken (2021) proposes one based on the theoretical definition of what metacognitive knowledge is⁸². In this sense, the author defines that “metacognitive knowledge of mathematical modelling is part of a competency that includes memorizing facts about different strategies, properties of modelling and potential difficulties during the process” (Frenken, 2021, p. 218).

One of the characteristics of the modelling process is that it includes the realisation of other relevant processes of mathematical activity in its development, which has led researchers to focus their attention on the behaviour of the latter. In this sense, Tekin (2019) studies the arguments that four prospective primary education teachers construct when they solve a modelling task. To do this, the author uses the Toulmin's (1954/2003) argumentation scheme and the modelling cycle proposed by Blum and Leiß (2007a) to examine the collective argumentation (see Krummheuer, 1995) of the participating teachers. The results show the emergence of the elements of the Toulmin's scheme (claims, data, warrants, backings, qualifiers, and rebuttals) in the different transitions of the modelling cycle. Another study conducted in this line is that reported by Ledezma,

⁸² This term is used in this study “as the generic term for verifiable, domain-specific knowledge about the factors that affect cognitive processes, which can be considered as relating to knowledge about the involved person(s), about the tasks to solve and about appropriate strategies, including their aims and objectives” (Frenken, 2021, p. 217).

Sol and collaborators (2022), who focus on the argumentation made by a prospective secondary education teacher in his master's final project to justify the inclusion of modelling during his educational internship experience. To this end, the authors analyse a portion of the data from the pragma-dialectical perspective (van Eemeren & Grootendorst, 2004) for the analysis of the reflection sessions with the prospective teacher; and another portion of the data using the diagramming technique (Guevara, 2011) for his written reflection. The results of the study show that the prospective teacher makes different types of knowledge evident, as part of a conglomerate made up by values, beliefs, and guidelines for action.

Another mathematical process that has been considered for research along with modelling is inquiry. In their study, Falcó-Solsona and collaborators (2024) report a school experience, in which students must solve a problem-situation of an archaeological context and where the emergence of inquiry and modelling subprocesses during its solving is made evident. The most remarkable contribution of this study is the proposal of an articulated cycle between both processes in which, although inquiry stands out over modelling, it shows the need to use both processes to provide plausible and coherent answers to the problem-situation initially posed.

The representation process has also been a focus of attention for researchers in modelling. Studies such as those conducted by Shahbari and Tabach (2020), Rellensmann and collaborators (2022), and Jablonski (2023) show the importance of the use, need, and modification of different representations for the development of the modelling process. Finally, research that has approached modelling from complementary perspectives includes the role of creativity⁸³ (for example, Govender, 2020; Jung & Lee, 2021; Lu & Kaiser, 2022; among others), computational thinking (for example, Ang, 2021), and that played by modelling in STEM/STEAM Education (for example, Lantau et al., 2020; Turner et al., 2024; Wiegand & Borromeo Feri, 2023; among others).

In a similar way to the studies references in this subsection, one of the objectives of this doctoral thesis points towards the theoretical deepening and reflection on the dialectics of general and specific analyses for the modelling process, namely, considering other relevant processes of mathematical activity. Therefore, this research explores a new

⁸³ See a detailed study about creativity in teacher education in Sánchez (2021).

aspect with the analysis of mathematical connections in the modelling process, a topic that will be extensively addressed in [Chapter 7](#).

A1.3. Structure of the Doctoral Thesis

The purpose of this third section is to describe the structure of this doctoral thesis and present a brief note⁸⁴ on the terminology used.

A1.3.1. Chapters and language

This doctoral thesis was prepared in the form of a compendium of publications, which means that this research was conducted through publications that have the study of modelling as their central axis and that individually address the objectives proposed. For this reason, its structure differs from a traditional doctoral dissertation in the form: Introduction, Theoretical framework, Methodology, Results, and Discussion/Conclusions. Another differentiating element is the language used throughout the doctoral thesis, since each chapter is written in Spanish or English, depending on the language used in each publication, to fulfil the requirements of the international PhD mention. This has an impact on the numbering of Figuras and Tablas in Spanish, and of Figures and Tables in English, which is independent according to the language (see [Índice de Figuras – Index of Figures](#) and [Índice de Tablas – Index of Tables](#)). In this way, this doctoral thesis is structured and written as follows:

- [Capítulo 1: Introducción – Chapter 1: Introduction](#) (chapter written entirely in Spanish language with its corresponding translation into English language in [Annex 1: English Translation for Chapter 1 – Introduction](#)).
- [Capítulo 2: Problema, Preguntas, y Objetivos de Investigación – Chapter 2: Research Problem, Questions, and Objectives](#) (chapter written entirely in Spanish language with its corresponding translation into English language in [Annex 2: English Translation for Chapter 2 – Research Problem, Question, and Objectives](#)).
- [Capítulo 3: Primer Artículo – Chapter 3: First Article](#) (publication and comments written in English language).

⁸⁴ This subsection was not translated because the discussion addressed is only meaningful in Spanish language regarding to the way of referring the term modelling.

- [Capítulo 4: Segundo Artículo – Chapter 4: Second Article](#) (publication and comments written in English language).
- [Capítulo 5: Tercer Artículo – Chapter 5: Third Article](#) (publication and comments written in Spanish language).
- [Capítulo 6: Capítulo de Libro – Chapter 6: Book Chapter](#) (publication and comments written in English language).
- [Capítulo 7: Cuarto Artículo – Chapter 7: Fourth Article](#) (publication and comments written in English language).
- [Capítulo 8: Discusión y Conclusiones – Chapter 8: Discussion and Conclusions](#) (chapter written entirely in Spanish language with its corresponding translation into English language in [Annex 7: English Translation for Chapter 8 – Discussion and Conclusions](#)).

Regarding Chapters 3–7, each includes:

- The identification data of the work (title, authors, affiliations, etc.), evidence of its publication (journal cover or logo/book cover, and first page of the work), and the indexation data of the journal (for Chapters 3, 4, 5, and 7) or information of the book (for Chapter 6).
- The abstract and keywords of each publication (in Spanish and English).
- The full text of each publication (in the original language of publication).
- Additional commentaries for each publication explaining, among other aspects, its relationship with the objectives of this doctoral thesis.

Regarding the presentation of the publications, an attempt was made to achieve a balance between the original design of each publication and the formal requirements of this doctoral thesis. For example, correlative numbering is followed for Figuras/Figures y Tablas/Tables in Spanish/English language, in addition to maximising their sizes and relocating them (if necessary) for better reading and understanding (especially for large Tablas/Tables). In summary, the structure of this doctoral thesis allows most of its content to be read in both Spanish and English language.

Annex 2: English Translation for Chapter 2 – Research Problem, Questions, and Objectives

This chapter presents the research problem, questions, and objectives of this research. The first section (A2.1) states the research problem and the following sections break down the research questions that emerge from this problem and their articulation with the objectives that allow answering each of these research questions.

A2.1. Formulating the Research Problem

This doctoral thesis focuses on the study of mathematical modelling, considered as a relevant process of mathematical activity and as a mathematical competency. As presented in section A1.2, modelling has been gaining an important space in Mathematics Education research and, therefore, in international curricula at different educational levels. In other words, modelling is a relevant research topic for Mathematics Education that deserves to continue being studied and deepened. Now, the literature review conducted in section A1.2 shows that, although around 50 years have passed since research in modelling began, there are still areas for research on this process and competency, such as articulations with other theoretical frameworks of Mathematics Education, different approaches to address in teacher education, and other mathematical processes from which to analyse modelling, among others. This is why, in this doctoral thesis, there three research foci that still remain to be explored are addressed, and which are detailed in the following sections.

A2.2. First Research Question and Objective

Firstly, there is an interest in delving into a modelling cycle from the perspective of a theoretical framework of Mathematics Education, with the purpose of generating a more detailing understanding of the mathematical activity underlying the modelling process. This leads to consider two theoretical references of different levels, namely, a specific theoretical framework for modelling and a general theoretical framework for Mathematics Education. Thus, the first research question is posed as follows:

To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process?

To answer this question, the following research objective is proposed:

To conduct a theoretical in-depth study of the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective, under the lens of the Onto-Semiotic Approach, in order to find complementarities between both references.

In this study, the existence of different modelling cycles and perspectives that have been developed throughout the construction of the theoretical corpus on this process is recognised, as presented in subsections A1.2.2.6 and A1.2.2.8, respectively. However, the prevalence of the cycles presented in Figure 29 (derived from the Blum/Kaiser-Messmer's proposal) and the educational perspective over other modelling cycles and perspectives in Mathematics Education research at an international level is also recognised. For this reason, to fulfil this objective and thus answer the first research question, the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective (proposed in the works of Borromeo Ferri, [2006](#), [2011](#), [2018](#)) is adopted as the specific theoretical reference for modelling and, in turn, the realistic/educational perspective of this process is assumed, in which this cycle is framed.

Likewise, it is a fact that there is a wide variety of theoretical frameworks developed in Mathematics Education (see Sriraman & English, [2005](#)) to analyse the mathematical activity developed by individuals in mathematical teaching and learning processes. However, the advantage of some theoretical frameworks over others in terms of the level of detail in the analysis of this mathematical activity is recognised. For this reason, to fulfil this objective and thus answer the first research question, the Onto-Semiotic Approach (proposed in the works of Godino et al., [2007](#), [2019](#), [2020](#)) is adopted as the general theoretical reference for Mathematics Education and which corresponds to the main framework used by the research group in which this doctoral thesis was prepared.

The period in which the realisation of this research objective was developed corresponds to the first two academic years of the doctoral studies, that is, to courses 2019–2020 and 2020–2021. The realisation of this objective is detailed in [Chapter 3](#), in the form of a reflective-on-theory study.

A2.3. Second Research Question and Objective

Secondly, there is interest in delving into the inclusion and implementation of modelling in prospective teacher education, specifically, during the period of educational internship experiences, with the purpose of identifying the aspects of the mathematical teaching and learning process that are prioritised when working with modelling. This leads to consider, in addition to a modelling cycle, a tool to guide this reflection on teaching practice. Thus, the second research question is posed as follows:

What aspects of the mathematical teaching and learning process do prospective secondary and baccalaureate education teachers relate to modelling in their reflections on the inclusion of this process during their educational internship experiences?

To answer this question, the following research objective is proposed:

To analyse to what extent modelling is present in the didactic proposals and Master's Degree Final Projects prepared by prospective secondary and baccalaureate education mathematics teachers.

In this study, the existence of different compilations of criteria to guide the mathematics teacher's practice so that it is of quality is recognised (see Praetorius & Charalambous, [2018](#); Prediger et al., [2022](#); among others). However, it is also recognised that, derived from the general theoretical framework of Mathematics Education used in this research, the Onto-Semiotic Approach provides a tool to guide reflection on teaching practice. For this reason, to fulfil this objective and thus answer the second research question, the Didactic Suitability Criteria tool (proposed in the works of Breda et al., [2017](#); Godino, [2013](#); Godino et al., [2023](#)) is adopted as the theoretical reference to guide reflection on teaching practice. Likewise, in line with the recognition of the existence of different modelling cycles, the Modelling Cycle proposed by Blum and Leiß ([2007a](#)) is adopted as the theoretical reference for this process. The choice of both constructs is justified in that they are taught to prospective teachers in the context in which this research is conducted.

The period in which the realisation of this research objective is developed corresponds to three academic years of the doctoral studies, that is, to courses 2020–2021, 2021–2022, and 2022–2023. The realisation of this objective is detailed in Chapters [4](#) and [5](#), in the

form of two studies conducted in a professionalising master's programme for secondary and baccalaureate education teachers in the Spanish context, in which the results of the academic years 2020–2021 and 2021–2022 are reported.

A2.4. Third Research Question and Objective

Thirdly, derived from the second research question and objective, there is an interest in delving into the type of tasks that prospective teachers propose, also during the educational internship period, with a double purpose: first, to know the tasks that prospective teachers propose to work on modelling and, second, to identify whether these tasks meet the characteristics to be considered modelling tasks. This leads to consider a consensual characterisation of the attributes that a modelling task should have to be considered as such and a theoretical scheme that classifies this type of tasks. Thus, the third research question is posed as follows:

What modelling tasks do prospective teachers propose? Are these actual modelling tasks according to the characteristics agreed upon for this type of problems by the research community in modelling?

To answer this question, the following research objective is proposed:

To characterise and classify the tasks proposed by prospective teachers in their Master's Degree Final Projects which they consider as modelling tasks.

Given that this research question and objective are derived from the fulfilment of and response to what was proposed in section A2.3, some of the results of the fulfilment of and response to the second research objective and question are taken as a basis. Furthermore, since in this study the realistic/educational modelling perspective is assumed, therefore, the corresponding consensual characteristics and classification for the modelling tasks that fall within this perspective are considered. For this reason, to fulfil this objective and thus answer the third research question, the synthesis of Borromeo Ferri (2018) to characterise the modelling problems and the scheme proposed by K. Maaß (2010) to classify this type of tasks are adopted. Unlike the other objectives of this doctoral thesis, here the use of a general theoretical framework for Mathematics

Education is not resorted to for its fulfilment, but exclusively to references of research on modelling.

The period in which the realisation of this research objective is developed corresponds, just like what was proposed in section A2.3, to courses 2020–2021, 2021–2022, and 2022–2023. The realisation of this objective is detailed in [Chapter 6](#), in the form of a study conducted in a professionalising master's programme for secondary and baccalaureate education teachers in the Spanish context, in which the results of the three academic years mentioned above are reported.

A2.5. Fourth Research Question and Objective

Fourthly, derived from the first research question and objective, there is an interest in delving into the specific theoretical framework for modelling from the perspective of other relevant processes of mathematical activity. This leads to consider two different theoretical references of equal level, namely, a specific theoretical framework for modelling and one of another mathematical process, with the condition that both frameworks have already been analysed from the perspective of a general theoretical framework for Mathematics Education. Thus, the fourth research question is posed as follows:

What is the role played by other relevant processes of mathematical activity in the modelling process?

To answer this question, the following research objective is proposed:

To conduct a theoretical deepening and reflection on the dialectics of the analyses of general mathematical activity and specific analyses for the modelling process.

Given that this research question and objective are derived from the fulfilment of and response to what was proposed in section A2.2, the theoretical articulation resulting from the fulfilment of and response to the first research objective and question is taken as a basis. Furthermore, since in this study the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective is adopted as the specific theoretical reference for modelling and the Onto-Semiotic Approach as the general theoretical reference for Mathematics Education, consequently, another relevant process of mathematical activity that has been analysed from this same perspective is considered. For this reason, to fulfil this objective

and thus answer the third research question, the articulations between Modelling and Onto-Semiotic Approach (proposed in the work of Ledezma, Font, & Sala, [2023](#)) and between the Extended Theory of Mathematical Connections (proposed in the work of Rodríguez-Nieto et al., [2023](#)) are adopted as theoretical references.

The period in which the realisation of this research objective is developed corresponds to the last academic year of the doctoral studies, that is, to course 2023–2024. The realisation of this objective is detailed in [Chapter 7](#), in the form of a reflective-on-theory study.

A2.6. Synthesis of Research Questions and Objectives

Table 29 shows a synthesis in which presents the four research questions and objectives (second and third column), the period in which the realisation of each objective is developed (fourth column), the chapter in which the studies that allow them to be fulfilled and answered are found (fifth column), and the relationship between the different questions and objectives (sixth column). Regarding the latter, the presentation and explanation of the research questions and objectives throughout this chapter show that there is a relationship between them. More specifically, the fulfilment of the first objective and the consequent response to the first research question is the basis for the fulfilment of the fourth objective and the consequent response to the fourth research question (identified in green), the same situation that occurs with the fulfilment of and the response to the second and third research objectives and questions (identified in blue).

Finally, it is stressed that, for the development of this research, the doctoral candidate followed the protocols established by the Code of Ethics on Integrity and Best Practices provided by the University of Barcelona⁸⁵.

⁸⁵ Available at <http://hdl.handle.net/2445/137937>.

Table 29. Synthesis of research questions and objectives.

No.	Questions	Objectives	Period	Studies	Relationship
1 st	To what extent does the application of the onto-semiotic tools complement the analysis from a cognitive perspective of a mathematical modelling process?	To conduct a theoretical in-depth study of the Mathematical Modelling Cycle from a Cognitive Perspective, under the lens of the Onto-Semiotic Approach, in order to find complementarities between both references.	2019–2020 2020–2021	Chapter 3	
2 nd	What aspects of the mathematical teaching and learning process do prospective secondary and baccalaureate education teachers relate to modelling in their reflections on the inclusion of this process during their educational internship experiences?	To analyse to what extent modelling is present in the didactic proposals and Master's Degree Final Projects prepared by prospective secondary and baccalaureate education mathematics teachers.	2020–2021 2021–2022 2022–2023	Chapter 4 Chapter 5	
3 rd	What modelling tasks do prospective teachers propose? Are these actual modelling tasks according to the characteristics agreed upon for this type of problems by the research community in modelling?	To characterise and classify the tasks proposed by prospective teachers in their Master's Degree Final Projects which they consider as modelling tasks.	2020–2021 2021–2022 2022–2023	Chapter 6	
4 th	What is the role played by other relevant processes of mathematical activity in the modelling process?	To conduct a theoretical deepening and reflection on the dialectics of the analyses of general mathematical activity and specific analyses for the modelling process.	2023–2024	Chapter 7	

Source: Author's elaboration.

Annex 2: English Translation for Chapter 2 –
Research Problem, Questions, and Objectives

Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo –

Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

En este anexo se presenta la base de datos construida durante el *segundo paso* del análisis de contenido que se describe en el segundo artículo (véase [subsección 4.4.3](#)). Hay una nota (*) para considerar: Mod indica el nivel de referencia a la modelización que se describe en la Table 11.

This annex presents the database built during the *second step* of content analysis described in the second article (see [subsection 4.4.3](#)). There are three notes to be considered:

- Note (*): Mod indicates the level of reference to modelling as described in Table 11.
- Note (**): Educational levels (Nivel) are 1st, 2nd, 3rd, and 4th grades of Compulsory Secondary Education (ESO); 1st and 2nd grades of Baccalaureate Education (BAC).
- Note (***): Topics (Tema) are Algebra, Functions, Geometry, Numbers, Probability, Statistics, and Trigonometry.

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
001	4º ESO	Trigonometría	Ablard, A.	Trigonometria a quart d'ESO: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
002	4º ESO	Trigonometría	Albiol, A.	Trigonometria a quart d'ESO: Proposta de millora	N ₃ /L ₃
003	3º ESO	Álgebra	Alcaraz, D.	Sistemes d'equacions a tercer d'ESO	N ₃ /L ₃
004	1º BAC	Geometría	Alonso, J.	Geometria de la recta a R2	N ₃ /L ₃
005	3º ESO	Estadística	Anglada, M.	Estadística a 3r d'ESO: Proposta de millora	N ₀ /L ₀
006	1º BAC	Funciones	Armengol, X.	Introducció a les funcions a primer de batxillerat: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
007	3º ESO	Funciones	Arranz, C.	Funció proporcional: Anàlisi i propostes de millora de la unitat didàctica a 3r d'ESO	N ₂ /L ₂
008	3º ESO	Álgebra	Atencia, N.	Sistemes d'equacions lineals a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
009	2º ESO	Números	Ayala, R.	Anàlisi i millora de la unitat didàctica fraccions i mesures a 2n d'ESO	N ₁ /L ₁
010	3º ESO	Álgebra	Bachiller, D.	Sistemes d'equacions a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
011	2º ESO	Geometría	Badia, A.	Proposta de millora d'una seqüència didàctica per introduir el teorema de Pitàgores a secundària	N ₀ /L ₀
012	4º ESO	Geometría	Baena, J.	Semejanza e implicaciones en la educación secundaria	N ₀ /L ₀

Anexo 3: Base de Datos de los TFM's del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
013	2º ESO	Álgebra	Balaguer, P.	Anàlisi i proposta de millora per a la introducció a l'àlgebra a 2n d'ESO	N ₀ /L ₀
014	3º ESO	Geometría	Barber, L.	Geometria manipulable, volums, àrees i visió espacial	N ₁ /L ₁
015	2º ESO	Funciones	Basallote, E.	Una revisió heurística d'una unitat didàctica de funcions	N ₂ /L ₂
016	2º ESO	Geometría	Bertrand, J.	Proporcionalitat geomètrica i Pitàgores a 2n d'ESO	N ₁ /L ₁
017	2º ESO	Geometría	Biarnès, P.	Proposta de millora de la unitat didàctica sobre figures i cossos geomètrics a segon d'ESO	N ₀ /L ₀
018	2º ESO	Geometría	Biete, C.	Millora de la representativitat matemàtica en la unitat didàctica del teorema de Pitàgores	N ₀ /L ₀
019	1º ESO	Números	Blanco, S.	Propostes didàctiques per a l'estudi de la proporcionalitat a primer d'ESO	N ₀ /L ₀
020	1º ESO	Geometría	Bocanegra, J. F.	El món en dues dimensions: Proposta de millora i redissenyi	N ₂ /L ₂
021	4º ESO	Probabilidades	Burgués, P.	Combinatòria, treball telemàtic i treball competencial: Anàlisi i proposta de millora d'una unitat didàctica de combinatòria	N ₃ /L ₃
022	2º ESO	Geometría	Caelles, M.	Geometria plana i de l'espai a 2n d'ESO: Proposta de millora d'una unitat didàctica	N ₂ /L ₂
023	1º ESO	Números	Cañadell, J.	Divisibilitat i fraccions a 1r ESO	N ₁ /L ₁
024	3º ESO	Funciones	Capdevila, E.	Introducció a les funcions 3r d'ESO: Avaluació i proposta de millora de la unitat didàctica	N ₃ /L ₃
025	4º ESO	Trigonometría	Capdevila, A.	Plantegem triangles i resolvem-los: Trigonometria a 4t d'ESO	N ₂ /L ₂
026	4º ESO	Geometría	Castedo, A.	Aprendre matemàtiques a través de la interdisciplinarietat	N ₁ /L ₁
027	1º ESO	Números	Colque, J. J.	Aprenentatge educatiu amb l'ús del TAC	N ₂ /L ₂
028	4º ESO	Estadística	Corral, Ó.	Classificar i analitzar el món que no som conscients que existeix: Proposta de millora unitat didàctica d'estadística	N ₃ /L ₃
029	1º BAC	Probabilidades	De la Rosa, M.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Probabilitats	N ₁ /L ₁
030	2º ESO	Álgebra	De Mingo, J.	Equacions de 1r grau a 2n d'ESO – Proposta de millora	N ₁ /L ₁
031	1º ESO	Geometría	Dilmé, J.	Geometria en joc: Una proposta de millora	N ₃ /L ₃
032	2º BAC	Funciones	Domènech, N.	Derivades i problemes d'optimització a 2on. de batxillerat: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
033	4º ESO	–	Elorza, I.	Disseny i desenvolupament d'una unitat didàctica a través de la metodologia Lesson Study	–
034	2º ESO	Geometría	Esqué, J.	Conreant la geometria 3D	N ₁ /L ₁

Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
035	3º ESO	Álgebra	Esteve, J.	Equacions de 1r i 2n grau a 3r d'ESO. Proposta de millora del treball cooperatiu, competencial i de l'avaluació	N ₃ /L ₃
036	2º ESO	Geometría	Farnós, J.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat: Cossos geomètrics a 2n d'ESO	N ₃ /L ₃
037	1º ESO	Números	Fernández, D.	Les fraccions a 1r d'ESO: Anàlisi i millora d'una unitat didàctica	N ₁ /L ₁
038	1º ESO	Números	Font, M.	Les fraccions a 1r d'ESO: Anàlisi i millora d'una unitat didàctica	N ₀ /L ₀
039	4º ESO	Trigonometría	Font, C.	Trigonometria a 4t d'ESO: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
040	3º ESO	Funciones	Galindo, M.	Proposta de millora de la unitat de funcions en un grup adaptat de 3r d'ESO	N ₃ /L ₃
041	3º ESO	Estadística	García, J. M.	L'estadística en les xarxes socials i la comunicació: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
042	1º ESO	Geometría	García, J.	Espai i forma a 1r d'E.S.O.	N ₁ /L ₁
043	2º ESO	Geometría	García, N.	Com treballar les figures planes en una aula per a tots: Proposta de millora d'una unitat didàctica de geometria plana	N ₁ /L ₁
044	2º ESO	Geometría	García, S.	Geometritzem-nos!	N ₁ /L ₁
045	1º ESO	Números	Gregorio, J. A.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Unitats de mesura	N ₁ /L ₁
046	2º ESO	Geometría	Guirao, I.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Cossos geomètrics a 2n d'ESO	N ₁ /L ₁
047	1º BAC	Probabilidades	Hervás, D.	Probabilitat a primer de batxillerat	N ₀ /L ₀
048	4º ESO	Álgebra	Irigoyen, A.	Inequacions lineals a 4t d'ESO: Anàlisi i proposta de millora	N ₃ /L ₃
049	2º ESO	Geometría	Jiménez, C.	Cossos geomètrics a 2n de l'ESO: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
050	2º ESO	Números	Jiménez, J. M.	Proporcionalitat a 2n d'ESO en temps de la Covid-19	N ₁ /L ₁
051	4º ESO	Funciones	Jordan, M.	Característiques de les funcions a quart d'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica implementada durant el pràcticum	N ₃ /L ₃
052	1º BAC	Funciones	Justícia, S.	Funcions matemàtiques a primer de batxillerat: Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₃ /L ₃
053	2º BAC	Álgebra	Lemus, M.	Proposta de millora i reflexió de la unitat didàctica sistemes d'equacions impartida a 2n de batxillerat	N ₀ /L ₀
054	2º ESO	Funciones	López, È.	Introducció a les funcions a 2n d'ESO: Valoració i redissenyi de la unitat didàctica	N ₃ /L ₃

Anexo 3: Base de Datos de los TFM's del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
055	1º ESO	Números	López, C.	Retrospectiva constructivista dels continguts de magnituds i mesura	N ₁ /L ₁
056	2º ESO	Geometría	Lorca, D.	Triangles semblants i el teorema de Tales: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
057	4º ESO	Funciones	Martín, M.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Funcions quadràtiques a 4t d'ESO	N ₃ /L ₃
058	1º BAC	Geometría	Martínez, J.	Còniques i llocs geomètrics: Anàlisi i propostes de millora	N ₀ /L ₀
059	1º ESO	Geometría	Martínez, M.	Geometria plana: Figures regulars, classificació dels triangles i el càlcul del perímetre i l'àrea de les principals figures planes. Proposta de millora de la unitat didàctica de 1r d'ESO	N ₂ /L ₂
060	3º ESO	Geometría	Martínez, A.	Figures planes a 3r E.S.O. Proposta de millora	N ₂ /L ₂
061	4º ESO	–	Martínez, D.	Pensament crític i ensenyament de les matemàtiques: Un diagnòstic a partir dels helicòpters del SEM	–
062	2º ESO	Números	Mateu, P.	Anàlisi de la qualitat didàctica i propostes de millora. Unitat didàctica: Racionals, segon d'ESO	N ₀ /L ₀
063	1º ESO	Números	Mercé, E.	Proporcionalitat a 1r d'ESO: Anàlisi i millora d'una proposta didàctica	N ₀ /L ₀
064	–	–	Mercier, P.	Revisió bibliogràfica de l'impacte del GeoGebra en l'educació matemàtica a secundària: Una perspectiva ontosemiòtica	–
065	2º BAC	Funciones	Milanés, D.	Derivades i introducció a l'optimització a 2on de batxillerat: Una proposta de millora del seu ensenyament	N ₂ /L ₂
066	3º ESO	Funciones	Míralles, J.	Funcions a tercer d'ESO: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
067	4º ESO	Números	Montaña, C.	La millora aplicada al procés d'aprenentatge dels nombres reals	N ₁ /L ₁
068	2º ESO	Álgebra	Mulero, L.	Iniciació a l'àlgebra a segon de l'ESO: Proposta de millora	N ₁ /L ₁
069	3º ESO	Estadística	Nafria, S.	Estadística descriptiva a tercer d'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica "coneguem la nostra classe"	N ₀ /L ₀
070	1º ESO	Números	Naranjo, S.	Mesurem l'illa de plàstic? Anàlisi de l'actuació i proposta de millora de la unitat didàctica	N ₀ /L ₀
071	3º ESO	Números	Navarro, E.	Proposta de millora d'una unitat didàctica en línia d'introducció	N ₀ /L ₀

Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
				a les successions numèriques per a 3r d'ESO	
072	3º ESO	Geometría	Nicolini, C.	Geometria a 3r d'ESO: Una proposta de millora	N ₁ /L ₁
073	4º ESO	Geometría	Olivé, G.	Introducció a les corbes còniques 4rt d'ESO	N ₀ /L ₀
074	4º ESO	Números	Olivé, D.	Proporcionalitat, mesura i error	N ₂ /L ₂
075	2º ESO	Geometría	Padrós, L.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Cossos geomètrics i volum a 2n d'ESO	N ₃ /L ₃
076	3º ESO	Funciones	Pagès, J.	Funcions i gràfiques a tercer d'ESO: Proposta de millora	N ₃ /L ₃
077	4º ESO	Trigonometría	Parramon, R.	Proposta d'anàlisi i millora de la unitat didàctica de trigonometria a 4t d'ESO	N ₃ /L ₃
078	4º ESO	Funciones	Pérez, J.	Funcions lineals a 4t d'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica impartida durant el pràcticum	N ₁ /L ₁
079	3º ESO	Funciones	Pié, S.	Funcions lineals i afins a 3r d'ESO: Anàlisi d' idoneïtat i propostes de millora d'una unitat didàctica	N ₁ /L ₁
080	3º ESO	Funciones	Pla, M.	Funcions lineals i afins a 3r d'ESO: Anàlisi i proposta de millora	N ₂ /L ₂
081	2º ESO	Geometría	Pou, F.	El teorema de Pitàgores: Millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
082	2º ESO	Álgebra	Prat, B.	Equacions a 2n d'ESO: Una proposta de millora	N ₀ /L ₀
083	2º ESO	Álgebra	Prats, F.	Equacions de primer grau a 2n d'ESO: Proposta de millora per inspirar l'alumnat	N ₃ /L ₃
084	1º ESO	Geometría	Quintana, A.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Àrees, formes i perímetres a 1º d'ESO	N ₁ /L ₁
085	3º ESO	Estadística	Ramírez, M.	Millora de la unitat didàctica d'estadística a 3r d'ESO	N ₀ /L ₀
086	1º ESO	Geometría	Ramon, I.	Rectes i angles en el pla	N ₁ /L ₁
087	1º BAC	Funciones	Riba, R.	Modelització matemàtica: Límits i continuïtat	N ₃ /L ₃
088	4º ESO	Funciones	Ríos, N.	Les funcions a quart d'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica implementada durant el pràcticum	N ₃ /L ₃
089	4º ESO	Geometría	Rodríguez, C.	Vectors en el pla a 4º ESO: Millora i redissenyi de la UD	N ₂ /L ₂
090	1º ESO	Geometría	Rojano, J. M.	Valoració i redissenyi de la unitat didàctica de mesura per l'aprenentatge a distància: Àrees, perímetres i unitats a 1r ESO	N ₀ /L ₀
091	2º ESO	Geometría	Roset, J.	Volum de poliedres i cossos rodons: Anàlisi i proposta de millora	N ₀ /L ₀

Anexo 3: Base de Datos de los TFM's del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Títol	Mod*
092	4º ESO	Geometría	Rovira, M.	Anàlisi i millora d'una unitat didàctica: Còniques a 4rt d'ESO	N ₀ /L ₀
093	2º ESO	Álgebra	Rueda, B.	Introducció a l'àlgebra a partir de patrons i relacions: Anàlisi i millora d'una unitat didàctica	N ₁ /L ₁
094	4º ESO	Funciones	Sáez, J.	Proposta de millora de la unitat didàctica de funcions a 4t ESO	N ₃ /L ₃
095	1º BAC	Funciones	Sánchez, A.	Les funcions reals: Redissenyi de la unitat didàctica impartida a primer de batxillerat	N ₂ /L ₂
096	3º ESO	Probabilidades	Sánchez, M.	Jugant amb la probabilitat a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
097	3º ESO	Funciones	Santoro, A.	Unitat didàctica introducció a les funcions – 3r d'ESO: Proposta de millora	N ₃ /L ₃
098	1º ESO	Estadística	Santos, R.	Estadística i medi ambient: Una proposta de millora 1er ESO	N ₃ /L ₃
099	2º ESO	Geometría	Sañé, R.	El teorema de Pitàgores a 2n d'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₂ /L ₂
100	3º ESO	Geometría	Sarriera, J.	Implementació de sessions no presencials d'espai i forma en 3r d'ESO: Un estudi crític	N ₁ /L ₁
101	1º ESO	Geometría	Sebastià, C.	Anàlisi i millora de la unitat didàctica de “geometria plana”	N ₁ /L ₁
102	3º ESO	Funciones	Serra, X.	Anàlisi de la qualitat didàctica i propostes de millora. Unitat didàctica: Funcions, tercer d'ESO	N ₂ /L ₂
103	2º ESO	Geometría	Serra, S.	Proposta de millora d'una unitat didàctica per a 2on d'ESO: Cossos geomètrics	N ₀ /L ₀
104	1º ESO	Números	Serra, J.	Introducció a les fraccions a primer d'eso: Proposta de millora	N ₀ /L ₀
105	3º ESO	Geometría	Silvestre, J.	Del pla a l'espai	N ₀ /L ₀
106	4º ESO	Funciones	Soler, J.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Funcions artístiques	N ₂ /L ₂
107	1º ESO	Geometría	Sort, A.	Del punt al cercle, passant per la recta i el pla	N ₀ /L ₀
108	2º BAC	Funciones	Souto, M.	La programació lineal al batxillerat: Proposta de millora	N ₀ /L ₀
109	3º ESO	Funciones	Sust de Rosselló, P.	UD de funcions a 3r d'ESO: Anàlisi i proposta de millora	N ₁ /L ₁
110	1º ESO	Probabilidades	Tancredi, L.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Probabilitat, estimacions i sòlids	N ₁ /L ₁
111	1º ESO	Estadística	Tarragó, G.	Estadística a 1r d'ESO: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
112	1º ESO	Geometría	Tenor, M.	Proposta de millora de la unitat didàctica “Geometria en el pla a 1r d'ESO”	N ₁ /L ₁
113	4º ESO	Trigonometría	Teruel, N.	Semblança i trigonometria a 4t d'ESO	N ₀ /L ₀
114	1º ESO	Números	Tomàs, M.	Proporcionalitat a 1r d'ESO: Proposta de millora	N ₀ /L ₀

Anexo 3: Base de Datos de los TFM's del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
115	4º ESO	Trigonometría	Torrent, A.	Anàlisi i proposta de millora d'una unitat didàctica de trigonometria	N ₂ /L ₂
116	2º ESO	Álgebra	Tunica, N.	Les àvies ja ho sabien fer... d'una altra manera	N ₀ /L ₀
117	3º ESO	Funciones	Ustrell, D.	Proposta de millora de la unitat didàctica de les funcions contextualitzada a 3r d'ESO	N ₀ /L ₀
118	4º ESO	Funciones	Vásquez, E.	La funció exponencial aplicada a un context real: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
119	3º ESO	Álgebra	Vegas, O.	Els sistemes d'equacions, més a prop que mai – Proposta de millora	N ₁ /L ₁
120	3º ESO	Funciones	Vilarrubla, A.	Tipus de funcions a 3r d'ESO: Proposta de millora	N ₀ /L ₀
121	1º ESO	Geometría	Vinuesa, C.	Proposta de millora de la unitat didàctica geometria plana i mesura a 1er ESO	N ₀ /L ₀
122	1º BAC	Geometría	Vives, R.	Geometria analítica a primer de batxillerat: Proposta de millora	N ₁ /L ₁

Anexo 3: Base de Datos de los TFMs del Segundo Artículo
Annex 3: Database of MFPs from the Second Article

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo

– Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

En este anexo se presentan los 169 comentarios valorativos de los 45 TFMs clasificados en los niveles L₂ y L₃ de referencia a la modelización matemática en el segundo artículo (véase Table 13), en idioma catalán (original), español, e inglés.

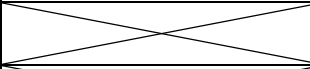
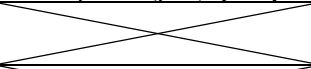
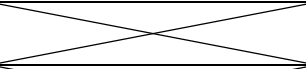
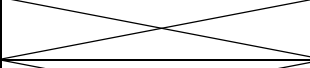
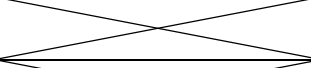
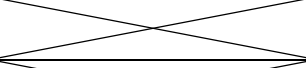
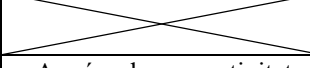
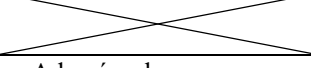
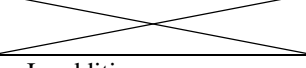
This annex presents the 169 evaluative comments taken from the 45 MFPs classified at levels L₂ and L₃ of reference to mathematical modelling in the second article (see Table 13), in Catalan (original), Spanish, and English language. (*) Criterio means Criterion.

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #002			
Epistémico Epistemic	<p>– Els continguts i han estat revisats amb anterioritat perquè fossin concrets, contextualitzats i evitar així errors (p. 8). [IE1]</p> <p>– Resolució de problemes: la capacitat d'un alumne de resoldre diferents tipus de problemes matemàtics amb diversos mètodes (p. 9). Contextualització (modelització): ús de problemes del món real (p. 9). [IE3]</p> <p>– Situacions del context dels problemes ha tingut caràcter realista i ha sigut proper a l'alumne (p. 10). [IE4]</p>	<p>– Los contenidos fueron revisados con anterioridad para que fuesen concretos, contextualizados, y así evitar errores (p. 8). [IE1]</p> <p>– Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver diferentes tipos de problemas matemáticos con diversos métodos (p. 9). Contextualización (modelización): Uso de problemas del mundo real (p. 9). [IE3]</p> <p>– Situaciones del contexto de los problemas ha tenido carácter realista y ha sido cercano al estudiante (p. 10). [IE4]</p>	<p>– The contents were previously reviewed so that they were concrete, contextualised, and thus avoid errors (p. 8). [ES1]</p> <p>– Problem solving: A student's capacity to solve different types of mathematical problems using various methods (p. 9). Contextualisation (modelling): Use of real-world problems (p. 9). [ES3]</p> <p>– Situations in the context of the problems have been realistic and close to students (p. 10). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– Ho vaig comprovar amb diversos exercicis amb caràcter realista amb enfocaments diferents de la simple aplicació de la fórmula (p. 13). D'aquesta manera amb diversos exercicis grupals de caràcter contextualitzat vaig fer particip als alumnes (p. 13). [IC1]</p> <p>– El meu enfocament va ser doncs, fer de guia amb una tendència constructivista, però considero que un punt a millorar seria plantejar-ho com una activitat on ells mateixos de manera col·laborat iva puguin deduir-ho (p. 14). Pel cas</p>	<p>– Lo comprobé con varios ejercicios con carácter realista, con enfoques distintos a la simple aplicación de la fórmula (p. 13). De esta forma, con varios ejercicios grupales de carácter contextualizado, hice participe a los estudiantes (p. 13). [IC1]</p> <p>– Mi enfoque fue, pues, hacer de guía con una tendencia constructivista, pero considero que un punto a mejorar sería plantearlo como una actividad donde ellos mismos, de forma colaborativa, puedan deducirlo (p. 14). En el</p>	<p>– I verified it with several realistic exercises, with different approaches to the simple application of the formula (p. 13). In this way, with various group exercises of a contextualised nature, I made the students participate (p. 13). [CS1]</p> <p>– So, my approach was acting as a guide with constructivist tendency, but I consider that a point to improve would be to propose it as an activity where they themselves, collaboratively, can deduce it (p. 14). In the case of the Coronavirus Slope activity, it would be</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	de l'activitat Pendent Coronavirus estaria millor adaptar-la per l'ampliació degut a la complexitat de les unitats d'escala en els eixos (p. 15). [IC4]	caso de la actividad Pendiente Coronavirus, sería mejor adaptarla para la ampliación, debido a la complejidad de las unidades de escala de los ejes (p. 15). [IC4]	better to adapt it for ampliation, due to the complexity of the scale units of the axes (p. 15). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– A l'inici de cada sessió feia un breu recordatori dels aspectes més importants des de l'inici de la UD amb el PowerPoint com a fons mostrant exemples i aplicacions (realistes) (p. 15). [IA1]	– Al inicio de cada sesión hacía un breve recordatorio de los aspectos más importantes desde el inicio de la UD con PowerPoint como fondo mostrando ejemplos y aplicaciones (realistas) (p. 15). [IA1]	– At the beginning of each session, I made a brief reminder of the most important aspects from the beginning of the DU, using PowerPoint as a background to show (realistic) examples and applications (p. 15). [AS1]
Ecológico Ecological	– Pel que fa a les connexions interdisciplinaris s'ha treballat la Llei d'Snell (Física) de manera experimental amb edicions de vídeos, i també exemples visuals de plans inclinats (descomposició vectorial de forces) (p. 22). [IEc2] – La majoria d'exemples, activitats i problemes eren contextualitzats, per tant relacionats amb situacions del món real i de l'entorn proper a l'alumnat (p. 22). [IEc3]	– En cuanto a las conexiones interdisciplinarias, se trabajó la Ley de Snell (Física) de forma experimental con ediciones de videos, así como ejemplos visuales de planos inclinados (descomposición vectorial de fuerzas) (p. 22). [IEc2] – La mayoría de los ejemplos, actividades, y problemas eran contextualizados, por tanto, relacionados con situaciones del mundo real y del entorno cercano al alumnado (p. 22). [IEc3]	– Regarding interdisciplinary connections, Snell's Law (Physics) was experimentally worked on with video editions, as well as visual examples of inclined planes (vector decomposition of forces) (p. 22). [EcS2] – Most of the examples, activities, and problems were contextualised, therefore, related to real-world situations and the environment close to the students (p. 22). [EcS3]
Otros Others	– L'activitat (Looping) contextualitzada per construir la circumferència goniomètrica adoptant models matemàtics extreus de la vida (p. 28). – Per tant, s'acabarà generalitzant el mètode, tenint inclús una modelització per poder mesura distàncies i alçades (p. 78). – Per tant finalment tenim el model ja amb possibilitats de jugar amb els valors dels punts lliscants o directament	– La actividad (Looping) contextualizada para construir la circunferencia goniométrica adoptando modelos matemáticos extraídos de la vida (p. 28). – Por tanto, se acabará generalizando el método, teniendo incluso una modelización para poder medir distancias y alturas (p. 78). – Por tanto, finalmente, tenemos el modelo ya con posibilidades de jugar con los valores de los puntos	– The activity (Looping) is contextualised to build the goniometric circumference adopting mathematical models taken from life (p. 28). – Therefore, the method will end up being generalised, even having a modelling to be able to measure distances and heights (p. 78). – Therefore, finally, we have the model with the possibility of playing with the values of the sliding

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	movent els punts mòbils (p. 85). – Per altra banda, es pretén dotar als continguts d'utilitat per tal de que els alumnes els puguin valorar com a una eina que un cop apresada, podran utilitzar en diferents contextos, això es durà a terme principalment mitjançant tallers i activitats plantejades en contextos de realitat (p. 103).	deslizantes o, directamente, moviendo los puntos móviles (p. 85). – Por otra parte, se pretende dotar a los contenidos de utilidad para que los estudiantes puedan valorarlos como una herramienta que, una vez aprendida, podrán utilizar en diferentes contextos. Esto se llevará a cabo, principalmente, mediante talleres y actividades planteadas en contextos de realidad (p. 103).	points or, directly, moving the mobile points (p. 85). – On the other hand, it is intended to provide the contents with utility so that students can value them as a tool that, once learned, they can use in different contents. This will be carried out, mainly, through workshops and activities raised in contexts of reality (p. 103).
TFM/MFP #003			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: l'alumne posa èmfasis als processos de pensament, als processos d'aprenentatge, agafant el contingut com a camp d'operacions. Els problemes s'han anat succeint de diferents formes en totes les activitats de la UD, excepte quan s'ha tractat el mètode gràfic. Per una banda, el problema com a eix vertebrador del contingut a aprendre (aprenentatge constructivista). Per altra banda, el problema com eina per aplicació d'un contingut ja donat (p. 9). Contextualització: l'alumne aprèn a partir de problemes que li són pròxims al seu entorn. Els alumnes han realitzat algunes activitats que estaven contextualitzades i d'altres que no (p. 9). [IE3]	– Resolución de problemas: El estudiante pone énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje, tomando el contenido como campo de operaciones. Los problemas se fueron sucediendo de distintas formas en todas las actividades de la UD, excepto cuando se trató el método gráfico. Por una parte, el problema como eje vertebrador del contenido a aprender (aprendizaje constructivista). Por otra parte, el problema como herramienta para la aplicación de un contenido ya dado (p. 9). Contextualización: El estudiante aprende a partir de problemas que le son próximos a su entorno. Los estudiantes realizaron algunas actividades que estaban contextualizadas y otras que no (p. 9). [IE3]	– Problem solving: The student places emphasis on thought processes, on learning processes, taking the content as a field of operations. The problems were posed in different ways in all the activities of the DU, except when dealing with the graphical method. On one hand, the problem as the backbone of the content to be learned (constructivist learning). On the other hand, the problem as a tool for the application of an already given content (p. 9). Contextualisation: The students learn from problems that are close to their environment. The students carried out some activities that were contextualised and others that were not (p. 9). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– A més, algunes activitats estaven contextualitzades	– Además, algunas actividades estaban	– In addition, some activities were

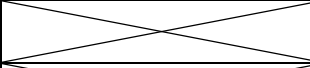
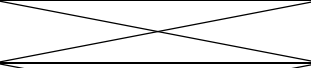
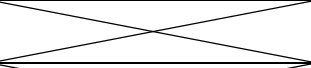
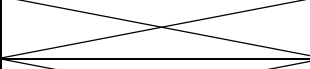
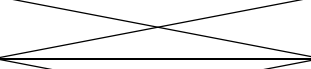
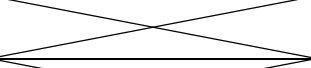
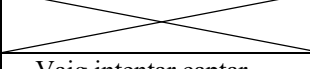
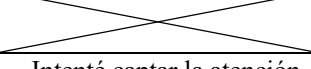
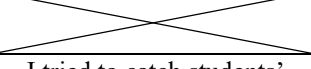
Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	amb situacions que fossin interessants per a l'alumne (p. 16). [IA1]	contextualizadas como situaciones que fueran interesantes para el estudiante (p. 16). [IA1]	contextualised as situations that were interesting for the students (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Activitats i problemes nous: a) Quants cubs formen aquesta torre? (pp. 23–24). b) Enfonsar la mosca (p. 24).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: A classe sempre he intentat generar un aprenentatge interdisciplinari (p. 27).</p>	<p>– Actividades y problemas nuevos: a) ¿Cuántos cubos forman esta torre? (pp. 23–24). b) Hundir la mosca (p. 24).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En clase siempre he intentado generar un aprendizaje interdisciplinario (p. 27).</p>	<p>– New activities and problems: a) How many cubes make up this tower? (pp. 23 – 24). Sink the fly (p. 24).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: In classroom, I have always tried to generate interdisciplinary learning (p. 27).</p>
TFM/MFP #004			
Epistémico Epistemic	<p>– Resolució de problemes: formar als alumnes en l'ús de les eines, conceptes i estratègies matemàtiques per resoldre problemes de diferents formes i amb diferents mètodes i estratègies. Contextualització: emprar coneixements matemàtics que permetin extrapolar els models concrets que han après en situacions més enllà de les matemàtiques. [...]. Modelització: dotar als alumnes d'eines i patrons per interpretar i resoldre problemes mitjançant la traducció a llenguatge matemàtic (p. 10). [IE3]</p> <p>– Extrapolació a altres àmbits o àrees: Activitats matemàtiques contextualitzades que extrapolin els models geomètric-algebraics a d'altres situacions o àrees (p. 11). [IE4]</p>	<p>– Resolución de problemas: Formar a los estudiantes en el uso de las herramientas, conceptos, y estrategias matemáticas para resolver problemas de distintas formas y con distintos métodos y estrategias. Contextualización: Utilizar conocimientos matemáticos que permitan extrapolar los modelos concretos que han aprendido en situaciones, más allá de la matemática. [...]. Modelización: Dotar a los estudiantes de herramientas y patrones para interpretar y resolver problemas mediante traducción a lenguaje matemático (p. 10). [IE3]</p> <p>– Extrapolación a otros ámbitos o áreas: Actividades matemáticas contextualizadas que extrapolen los modelos geométrico-algebraicos a otras situaciones o áreas (p. 11). [IE4]</p>	<p>– Problem solving: Educate students for the use of mathematical tools, concepts, and strategies to solve problems in different ways and with different methods and strategies. Contextualisation: Use of mathematical knowledge that allows extrapolating the specific models they have learned in situations, beyond those mathematical. [...]. Modelling: Provide students with tools and patterns to interpret and solve problems through translation into mathematical language (p. 10). [ES3]</p> <p>– Extrapolation to other fields or areas: Contextualised mathematical activities that extrapolate geometric-algebraic models to other situations or areas (p. 11). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			

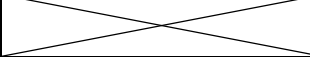


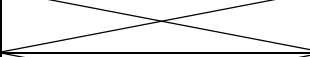
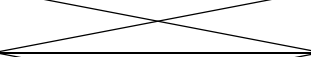
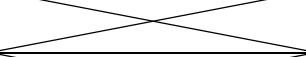
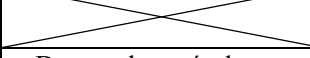
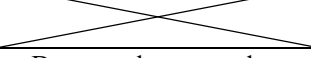
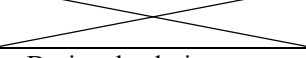
Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective	– Crec que l’interès per la unitat no va ser molt més gran, perquè no vaig saber realitzar activitats contextualitzades properes que permetés que els menys atrets per la assignatura trobessin més interessant el tema (p. 19). [IA1]	– Creo que el interés por la unidad no fue mucho, porque no supe realizar actividades contextualizadas cercanas que permitieran que los menos atraídos por la asignatura encontraran más interesante el tema (p. 19). [IA1]	– I think that the interest in the unit was not great, because I did not know how to make contextualised activities close to students that would allow those less attracted to the subject to find the topic more interesting (p. 19). [AS1]
Ecológico Ecological	– En el mateix sentit que s’ha comentat en l’anàlisi de la idoneïtat epistèmica, han mancat més activitats contextualitzades que possessin de manifest aquestes aplicacions (p. 20). [IEc3]	– En el mismo sentido que se ha comentado en el análisis de la idoneidad epistémica, han faltado más actividades contextualizadas que pusieran de manifiesto estas aplicaciones (p. 20). [IEc3]	– In the same sense that has been commented on in the analysis of the epistemic suitability, there has been a lack of more contextualised activities that would reveal these applications (p. 20). [EcS3]
Otros Others	– Idoneïtat epistèmica: [...] Fer més problemes contextualitzats on s’apreciï la utilitat d’aquesta geometria (p. 21). – Idoneïtat emocional: Una major contextualització dels problemes podria ajudar a captar l’atenció dels alumnes menys atrets per l’assignatura (p. 22). – Idoneïtat ecològica: Una major contextualització per a que puguin connectar les activitats amb altres disciplines, entorns quotidians i laborals (p. 22). – Proposta de millora: Malgrat que són molts els aspectes a millorar de la unitat didàctica dissenyada, em centraré principalment en l’augment i redistribució de les sessions, una major contextualització, una prova d’avaluació inicial, canvis a l’hora de treballar problemes a classe per millorar l’avaluació formativa (p. 22). – Contextualització (p. 23). – Annex 9: Exemples de problemes (pp. 92–96).	– Idoneidad epistémica: [...] Hacer más problemas contextualizados donde se aprecie la utilidad de esta geometría (p. 21). – Idoneidad afectiva: Una mayor contextualización de los problemas podría ayudar a captar la atención de los estudiantes menos atraídos por la asignatura (p. 22). – Idoneidad ecológica: Una mayor contextualización para que puedan conectar las actividades con otras disciplinas, entornos cotidianos y laborales (p. 22). – Propuesta de mejora: Aunque son muchos los aspectos por mejorar de la unidad didáctica diseñada, me centraré, principalmente, en el aumento y redistribución de las sesiones, una mayor contextualización, una prueba de evaluación inicial, cambios a la hora de trabajar problemas en clase para mejorar la evaluación formativa (p. 22). – Contextualización (p. 23). – Contextualización (p. 23).	– Epistemic suitability: [...] Do more contextualised problems where the usefulness of this geometry is shown (p. 21). – Affective suitability: A greater contextualisation of the problems could help to catch the attention of the students who are less attracted to the subject (p. 22). – Ecological suitability: A greater contextualisation so that they can connect the activities with other disciplines, daily and work environments (p. 22). – Improvement proposal: Although there are many aspects to be improved in the designed didactic unit, I will mainly focus on the increase and redistribution of the sessions, a greater contextualisation, an initial evaluation test, changes when working on problems in class to improve formative assessment (p. 22). – Contextualisation (p. 23). – Annex 9: Examples of problems (pp. 92–96). – Contextualisation and interdisciplinary value: As

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Com a matemàtic sempre he vist matemàtiques a totes les disciplines acadèmiques i a totes les situacions quotidianes. Però en aquest màster he après a aplicar la modelització a la docència, tot i que la unitat didàctica que m’ha tocat fer no és un bon exemple, i a fomentar en els alumnes la utilització i la construcció de models matemàtics (p. 26).</p> <p>– Competència en modelització matemàtica: Intentarem d’una manera constructiva dotar als alumnes d’eines i patrons per interpretar i resoldre problemes. Competència en contextualització: En aquest sentit, l’objectiu és que l’alumne adquireixi coneixements matemàtics que li permetin extrapolar els models concrets a que han arribat cap situacions més enllà (p. 100).</p>	<p>– Anexo 9: Ejemplos de problemas (pp. 92–96).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Como matemático, siempre he visto matemática en todas las disciplinas académicas y en todas las situaciones cotidianas. Pero en este máster he aprendido a aplicar la modelización a la docencia, aunque la unidad didáctica que me ha tocado hacer no es un buen ejemplo, y fomentar en los estudiantes la utilización y construcción de modelos matemáticos (p. 26).</p> <p>– Competencia en modelización matemática: Intentaremos, de forma constructiva, dotar a los estudiantes de herramientas y patrones para interpretar y resolver problemas. Competencia en contextualización: En este sentido, el objetivo es que el estudiante adquiera conocimientos matemáticos que le permitan extrapolar los modelos concretos a los que han llegado en situaciones más allá (p. 100).</p>	<p>a mathematician, I have always seen mathematics in all academic disciplines and in all everyday situations. However, in this master’s degree, I have learned to apply modelling to teaching, although the didactic unit that I have had to do is not a good example and encourage students to use and build mathematical models (p. 26).</p> <p>– Mathematical modelling competency: We will try, in a constructive way, to provide students with tools and patterns to interpret and solve problems. Contextualisation competency: In this sense, the objective is for the student to acquire mathematical knowledge that allows them to extrapolate the concrete models to those that have arrived in situations beyond (p. 100).</p>
TFM/MFP #007			
Epistémico Epistemic	– Modelització: Vaig realitzar un parell d’activitats de modelització. Seria convenient augmentar el nombre d’aquest tipus d’activitat (p. 12). [IE3]	– Modelización: Realicé un par de actividades de modelización. Sería conveniente aumentar el número de este tipo de actividad (p. 12). [IE3]	– Modelling: I made a couple of modelling activities. It would be convenient to increase the number of this type of activity (p. 12). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Vaig intentar captar l’atenció de l’alumnat mitjançant activitats contextualitzades a la situació socioeconòmica	– Intenté captar la atención del alumnado mediante actividades contextualizadas en la situación socioeconómica	– I tried to catch students’ attention through activities contextualised in the socioeconomic situation that the students of the

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	que vivien els alumnes del centre de pràctiques. [...]. El resultat d'aquest recurs va ser molt positiu, ja que els alumnes van crear problemes contextualitzats amb les seves experiències (p. 16). [IA1]	que vivían los estudiantes del centro de prácticas. [...]. El resultado de este recurso fue muy positivo, puesto que los estudiantes crearon problemas contextualizados con sus experiencias (p. 16). [IA1]	internship centre lived. [...]. The result of this resource was very positive, since the students created contextualised problems with their experiences (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological	– He intentat desvincular la unitat didàctica a la típica contextualització de ser un camarer de bar. Crec que aquest exemple és un recurs que els alumnes han vist un gran nombre d'ocasions i volia aconseguir que els alumnes identifiquessin la proporcionalitat directa a partir de diferents contextos nous pels alumnes (p. 21). [IEc3]	– Intenté desvincular la unidad didáctica a la típica contextualización de ser un camarero de bar. Creo que este ejemplo es un recurso que los estudiantes han visto un gran número de ocasiones y quería conseguir que ellos identificaran la proporcionalidad directa a partir de diferentes nuevos contextos (p. 21). [IEc3]	– I tried to separate the didactic unit from the typical contextualisation of being a bar waiter. I think this example is a resource that students have seen a number of times and I wanted to get them to identify direct proportionality from different new contexts (p. 21). [EcS3]
Otros Others	– M'ha semblat interessant inspirar les activitats les situacions que m'ha proposat l'alumnat en aquest apartat, ja que m'ha permès contextualitzar les activitats dissenyades a la realitat viscuda pels alumnes (p. 51). – Amb aquests resultats podria dissenyar tasques contextualitzades als estudiants del centre (p. 85).	– Me pareció interesante inspirar las actividades en las situaciones que me propuso el alumnado en este apartado, puesto que me permitió contextualizar las actividades diseñadas en la realidad vivida por los estudiantes (p. 51). – Con estos resultados podría diseñar tareas contextualizadas a los estudiantes del centro (p. 85).	– I found it interesting to inspire the activities in the situations that the students proposed to me in this section, since it allowed me to contextualise the activities designed in the reality lived by the students (p. 51). – With these results, I could design contextualised tasks for the students of the centre (p. 85).
TFM/MFP #015			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Habilitat de l'alumnat de resoldre problemes matemàtics (p. 8). Contextualització: Ús de problemes del món real (p. 8). [IE3]	– Resolución de problemas: Habilidad del alumnado de resolver problemas matemáticos (p. 8). Contextualización: Uso de problemas del mundo real (p. 8). [IE3]	– Problem solving: Students' ability to solve mathematical problems (p. 8). Contextualisation: Use of real-world problems (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Durant el procés de disseny de la unitat didàctica, es va mirar de dissenyar activitats motivadores per als alumnes, que estiguessin	– Durante el proceso de diseño de la unidad didáctica, se intentó diseñar actividades motivadoras para los estudiantes, que estuvieran	– During the design process of the didactic unit, an attempt was made to design motivating activities for the students, which were well

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	ben contextualitzades (p. 12). [IA1]	bien contextualizadas (p. 12). [IA1]	contextualised (p. 12). [AS1]
Ecológico Ecological	– Algunes de les activitats proposades estaven contextualitzades en alguns aspectes de la vida social i laboral (p. 16). [IEc3]	– Algunas de las actividades propuestas estaban contextualizadas en algunos aspectos de la vida social y laboral (p. 16). [IEc3]	– Some of the proposed activities were contextualised in some aspects of social and work life (p. 16). [EcS3]
Otros Others	– Idoneïtat ecològica: [...]. Les activitats estan contextualitzades en gran part i es realitzen connexions intradisciplinàries i interdisciplinàries (p. 17). – Contextualització i valor interdisciplinari: Conec la presència de les matemàtiques en les altres disciplines i soc capaç de realitzar i utilitzar models matemàtics gràcies a la formació de física. Crec ser competent en fomentar en els alumnes la realització i ús de models senzills (p. 27).	– Idoneidad ecológica: [...]. Las actividades están contextualizadas en gran parte y se realizan conexiones intra- e interdisciplinarias (p. 17). – Contextualización y valor interdisciplinario: Conozco la presencia de la matemática en las demás disciplinas y soy capaz de realizar y utilizar modelos matemáticos gracias a la formación en física. Creo ser competente en fomentar en los estudiantes la realización y uso de modelos sencillos (p. 27).	– Ecological suitability: [...]. The activities are largely contextualised, and intra- and interdisciplinary connections are made (p. 17). – Contextualisation and interdisciplinary value: I am aware of the presence of mathematics in other disciplines, and I am able to make and use mathematical models thanks to my education in physics. I think I am competent in encouraging students to make and use simple models (p. 27).
TFM/MFP #020			
Epistémico Epistemic	– Contextualització: Procés d'utilitzar exemples reals en la resolució de problemes. [...]. Resolució de problemes: Comprendre i resoldre problemes. Hi ha activitats amb problemes que s'han d'entendre i resoldre. [...]. Modelització: Procés d'elaborar un model que representi o descriu adequadament un fenomen, un objecte o un procés de la realitat. A l'activitat 15 es fa una modelització d'un terreny rectangular d'àrea fixa i perímetre variable (p. 9). [IE3]	– Contextualización: Proceso de utilizar ejemplos reales en la resolución de problemas. [...]. Resolución de problemas: Comprender y resolver problemas. Hay actividades con problemas que deben entenderse y resolverse. [...]. Modelización: Proceso de elaborar un modelo que represente o describa adecuadamente un fenómeno, un objeto o un proceso de la realidad. En la actividad 15 se realiza una modelización de un terreno rectangular de área fija y perímetro variable (p. 9). [IE3]	– Contextualisation: Process of using real examples in problem solving. [...]. Problem solving: Understand and solve problems. There are activities with problems that need to be understood and solved. [...]. Modelling: Process of developing a model that adequately represents or describes a phenomenon, an object, or a process of reality. In activity 15, a rectangular plot of land, with a fixed area and variable perimeter, is modelled (p. 9). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo			

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Utilitat sociolaboral: Fer activitats contextualitzades (p. 15).	– Utilidad sociolaboral: Hacer actividades contextualizadas (p. 15).	– Social and labour usefulness: Make contextualised activities (p. 15).
TFM/MFP #021			
Epistémico Epistemic			
Cognitivo Cognitive	– Aquests són els continguts necessaris per poder iniciar la unitat, però és important destacar també tenir un bon nivell en les competències de la dimensió de resolució de problemes, especialment la C1: traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats (p. 11). [IC1] – De fet, la dinàmica de les activitats durant el bloc de construcció del coneixement consisteix en anar modelitzant cada un dels casos de combinatòria abans de passar al segon bloc (p. 14). [IC4]	– Estos son los contenidos necesarios para poder iniciar la unidad, pero es importante destacar también tener un buen nivel en las competencias de la dimensión de resolución de problemas, especialmente la C1: traducir un problema a lenguaje matemático o a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas, y modelos adecuados (p. 11). [IC1] – De hecho, la dinámica de las actividades durante el bloque de construcción del conocimiento consiste en ir modelizando cada uno de los casos de combinatoria antes de pasar al segundo bloque (p. 14). [IC4]	– These are the necessary contents to be able to start the unit, but it is also important to highlight having a good level in the competencies of the problem-solving dimension, especially C1: translating a problem into mathematical language or a mathematical representation using variables, symbols, diagrams, and suitable models (p. 11). [CS1] – In fact, the dynamics of the activities during the knowledge construction block consists of modelling each of the cases of combinatorics before moving on to the second block (p. 14). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– Als criteris d'avaluació per la dimensió de resolució de problemes s'especifica la resolució de diferents situacions i problemes de context natural, social i cultural en què cal aplicar els conceptes y les tècniques del càlcul de probabilitats, com la combinatòria. En aquest sentit, potser faria falta presentar problemes en un context més propi	– En los criterios de evaluación para la dimensión de resolución de problemas se especifica la resolución de diferentes situaciones y problemas de contexto natural, social, y cultural en lo que es necesario aplicar los conceptos y las técnicas del cálculo de probabilidades, como la combinatoria. En este sentido, quizás haría falta presentar problemas en un	– In the evaluation criteria for the problem-solving dimension, the solving of different situations and problems of natural, social, and cultural context is specified in which it is necessary to apply the concepts and techniques of probability calculation, such as combinatorics. In this sense, perhaps it could be necessary to present problems in a context more

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	dels alumnes (p. 22). [IEc1]	contexto más propio de los estudiantes (p. 22). [IEc1]	typical of the students (p. 22). [EcS1]
Otros Others	<p>– Primerament, els alumnes havien de crear els seus propis problemes de combinatòria i fer un treball per modelitzar-los amb Scratch (p. 4).</p> <p>– Una bona adaptació i introducció dels continguts educatius en el context en què viuen els alumnes pot aportar l'atribució de sentit als continguts, que contribueix a una major motivació i, en conseqüència, en un aprenentatge més significatiu per part dels alumnes (p. 23).</p> <p>– Des del punt de vista ecològic, també manca una major inclusió de les activitats en un context de rellevància pels alumnes (p. 25).</p> <p>– Això també pot fer-se buscant problemes en un context familiar pels alumnes, que faciliti la comprensió de la utilitat sociolaboral dels coneixements que s'estan adquirint (p. 26).</p> <p>– Modelització amb Scratch: l'activitat funcionaria de la mateixa manera, és a dir, els alumnes han de modelitzar el seu problema a través de la programació (p. 32).</p> <p>– En aquest disseny de les activitats seria convenient tenir en compte la idoneïtat ecològica, buscant presentar activitats dins un context que sigui rellevant pels alumnes i els permeti fer connexions (p. 36).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: S'ha fet èmfasi al llarg del màster en la importància de les connexions per un bon aprenentatge de les matemàtiques. Tot i l'activitat de modelització</p>	<p>– En primer lugar, los estudiantes debían crear sus propios problemas de combinatoria y realizar un trabajo para modelizarlos con Scratch (p. 4).</p> <p>– Una buena adaptación e introducción de los contenidos educativos en el contexto en el que viven los estudiantes puede aportar a dotar de sentido a los contenidos, lo que contribuye a una mayor motivación y, en consecuencia, a un aprendizaje más significativo por parte de los estudiantes (p. 23).</p> <p>– Desde el punto de vista ecológico, también falta una mayor inclusión de las actividades en un contexto de relevancia para los estudiantes (p. 25).</p> <p>– Esto también se puede hacer buscando problemas en un contexto familiar, por parte de los estudiantes, que facilite la comprensión de la utilidad sociolaboral de los conocimientos que se están adquiriendo (p. 26).</p> <p>– Modelización con Scratch: la actividad funcionaría de la misma forma, es decir, los estudiantes deben modelizar su problema a través de la programación (p. 32).</p> <p>– En este diseño de las actividades sería conveniente tener en cuenta la idoneidad ecológica, buscando presentar actividades dentro de un contexto que sea relevante para los estudiantes y les permita realizar conexiones (p. 36).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Se ha hecho énfasis, a lo largo</p>	<p>– Firstly, the students had to create their own combinatorics problems and do a work to model them with Scratch (p. 4).</p> <p>– A good adaptation and introduction of the educational contents in the context in which the students live can contribute to give meaning to the contents, which contributes to a greater motivation and, consequently, to a more meaningful learning on the part of the students (p. 23).</p> <p>– From an ecological point of view, there is also a lack of greater inclusion of activities in a context of relevance for the students (p. 25).</p> <p>– This can also be done by looking for problems in a family context, by the students, which facilitates the understanding of the social and labour usefulness of the knowledge that is being acquired (p. 26).</p> <p>– Modelling with Scratch: the activity would work in the same way, that is, the students must model their problem through programming (p. 32).</p> <p>– In this design of the activities, it would be convenient to take into account the ecological suitability, seeking to present activities within a context that is relevant to the students and allows them to make connections (p. 36).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Emphasis has been placed, throughout the master's programme, on the importance of connections for a good learning of</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	amb Scratch, no considero un treball prou profund per arribar a nivell 3 d'aquest competència (p. 38).	del máster, en la importancia de las conexiones para un buen aprendizaje de la matemática. A pesar de la actividad de modelización con Scratch, no considero un trabajo lo suficientemente profundo como para llegar al nivel 3 de esta competencia (p. 38).	mathematics. Despite the modelling activity with Scratch, I do not consider a work deep enough to reach level three of this competency (p. 38).
TFM/MFP #022			
Epistémico Epistemic	<p>– Resolució de problemes: Al llarg de la unitat s’han realitzat diverses tasques on es plantejaven situacions amb diverses solucions, i es fomentava la cerca exhaustiva d’aquestes [...]. Així, els alumnes a poc a poc anaven desenvolupant estratègies per ser sistemàtics i ordenats i, fins i tot, justificar que ja no podia haver-hi més solucions. També hem potenciat la generació de preguntes de caràcter matemàtic, i potser l’aspecte que ha quedat menys cobert ha estat el de la modelització. Han mancat situacions de la vida real que els alumnes poguessin resoldre a través d’un model matemàtic que s’hi pogués ajustar (p. 9). [IE3]</p> <p>– A escala general, el problema més evident és la manca de diversitat del context sobre els problemes o situacions que hem plantejat: sempre han estat situacions dins de les matemàtiques i, si tenien connexió amb la realitat, no tenien un objectiu significatiu més enllà de les matemàtiques (p. 10). [IE4]</p>	<p>– Resolución de problemas: A lo largo de la unidad se realizaron diversas tareas en las que se plantearon situaciones con diversas soluciones, y se fomentó la búsqueda exhaustiva de estas [...]. Así, los estudiantes poco a poco iban desarrollando estrategias para ser sistemáticos y ordenados e, incluso, justificar que ya no podía haber más soluciones. También, hemos potenciado la generación de preguntas de carácter matemático y, quizás, el aspecto que quedó menos cubierto fue el de modelización. Han faltado situaciones de la vida real que los estudiantes pudieran resolver a través de un modelo matemático que pudiera ajustarse a él (p. 9). [IE3]</p> <p>– A nivel general, el problema más evidente es la falta de diversidad del contexto sobre los problemas o situaciones que hemos planteado: siempre han sido situaciones dentro de la matemática y, si tenían conexión con la realidad, no tenían un objetivo significativo más allá de la matemática (p. 10). [IE4]</p>	<p>– Problem solving: Throughout the unit, various tasks were made in which situations with various solutions were posed, and an exhaustive search for these solutions was encouraged [...]. Thus, the students, little by little, developed strategies to be systematic and orderly, and even justify that there could be no more solutions. We have also promoted the generation of mathematical questions and, perhaps, the aspect that was least covered was that of modelling. There has been a lack of real-life situations that students could solve through a mathematical model that could be adjusted to it (p. 9). [ES3]</p> <p>– At a general level, the most evident problem is the lack of diversity of the context regarding the problems or situations that we have posed: they have always been situations within mathematics and, if they had a connection with reality, they did not have a significant objective beyond mathematics (p. 10). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	– Pel que fa als coneixements més	– En cuanto a los conocimientos más	– Regarding the more strictly mathematical

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>estrictament matemàtics, el punt més conflictiu va ser quan van haver d'utilitzar el teorema de Pitàgores per resoldre situacions contextualitzades, ja que necessitaven un domini de maneig d'expressions algebraïques que molts d'ells no tenien (p. 11). [IC1]</p>	<p>estrictamente matemáticos, el punto más conflictivo fue cuando tuvieron que utilizar el teorema de Pitágoras para resolver situaciones contextualizadas, ya que necesitaban un dominio en el manejo de expresiones algebraicas que muchos de ellos carecían (p. 11). [IC1]</p>	<p>knowledge, the most controversial point was when they had to use the Pythagorean theorem to solve contextualised situations, since they needed a mastery in handling algebraic expressions that many of them lacked (p. 11). [CS1]</p>
Interaccional Interactional	X	X	X
Mediacional Mediational	X	X	X
Afectivo Affective	X	X	X
Ecológico Ecological	<p>– La poca connexió i contextualització de les matemàtiques que hem emprat en situacions de la vida real o en problemes, fan que la utilitat per a la inserció sociolaboral siguin pràcticament nul·la (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– La poca conexión y contextualización de la matemática que hemos empleado en situaciones de la vida real o en problemas, hacen que la utilidad para la inserción sociolaboral sea prácticamente nula (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– The little connection and contextualisation of the mathematics that we have used in real life situations or in problems, make the utility for social and labour insertion practically null (p. 17). [IEc3]</p>
Otros Others	<p>– Modificacions i incorporacions d'activitats (pp. 21–22). – Contextualització i valor interdisciplinari: Una de les competències que m'ha permès desenvolupar el màster és entendre que hi ha moments per treballar les matemàtiques des d'un vessant més específica i d'altres en què pot ser molt positiu un treball interdisciplinari. Això sí, perquè en aquest treball interdisciplinari totes les disciplines involucrades es treballin de manera adequada, les activitats s'han de pensar molt bé. En els darrers dies de curs, amb el confinament, on la construcció d'uns continguts específics no era rellevant, al centre hem realitzat algunes tasques interdisciplinàries i, pel retorn que ens n'han fet els</p>	<p>– Modificaciones e incorporaciones de actividades (pp. 21–22). – Contextualización y valor interdisciplinario: Una de las competencias que me ha permitido desarrollar el máster es entender que existen momentos para trabajar la matemática desde una vertiente más específica y otros en los que puede ser muy positivo un trabajo interdisciplinario. Eso sí, para que en este trabajo interdisciplinario todas las disciplinas involucradas se trabajen de forma adecuada, las actividades deben pensarse muy bien. En los últimos días del curso, con el confinamiento, donde la construcción de unos contenidos específicos no era relevante, en el centro realizamos algunas tareas</p>	<p>– Modifications and additions of activities (pp. 21–22). – Contextualisation and interdisciplinary value: One of the competencies that the master's programme has allowed me to develop is understanding that there are moments to work on mathematics from a more specific perspective and others in which interdisciplinary work can be very positive. Of course, so that in this interdisciplinary work all the disciplines involved work properly, the activities must be well thought out. In the last days of the course, because of lockdowns, where the construction of specific contents was not relevant, we carried out some interdisciplinary tasks in</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	alumnes, les hem valorat molt positivament (p. 27).	interdisciplinarias y, por la retroalimentación de los estudiantes, las valoramos muy positivamente (p. 27).	the centre and, based on the feedback from the students, we valued them very positively (p. 27).
TFM/MFP #024			
Epistémico Epistemic	<p>– Modelització: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats. [...]. Els alumnes van modelitzar i representar en gràfiques les informacions de les diferents tarifes de transport públic i, després d'analitzar-les, van haver de decidir quines eres les opcions més òptimes segons la situació en que estiguessin o se'ls plantejava: fins quina data surt a compte tornar a comprar un altre cop la mateixa tarifa, quines altres tarifes són bones alternatives a considerar i en quines condicions. La nota que poso a aquest procés de modelització, en funció del treball que s'hi ha fet, és de 3 ja que considero que s'ha treballat però es podria haver treballat més en altres activitats amb modelitzar situacions més contextualitzades a part d'aquesta (p. 9). Resolució de problemes: Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes. Mantener una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes. La resolució de problemes ha sigut una eina també molt utilitzada per situar tots els objectius didàctics i coneixements que es volien treballar en el treball de classe, en petit</p>	<p>– Modelización: Traducir un problema al lenguaje matemático o a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas, y modelos adecuados. [...]. Los estudiantes modelizaron y representaron en gráficas las informaciones de las diferentes tarifas de transporte público y, después de analizarlas, tuvieron que decidir cuáles eran las opciones más óptimas según la situación en que estuvieran, o se les planteaba: ¿hasta qué fecha sale a cuenta volver a comprar de nuevo la misma tarifa, qué otras tarifas son buenas alternativas a considerar y en qué condiciones? La nota que pongo a este proceso de modelización, en función del trabajo realizado, es 3, ya que considero que se ha trabajado, pero se podría haber trabajado más en otras actividades con modelizar situaciones más contextualizadas aparte de ésta (p. 9). Resolución de problemas: Emplear conceptos, herramientas, y estrategias matemáticas para resolver problemas. Mantener una actitud de investigación frente a un problema probando estrategias diversas. Generar preguntas de cariz matemático y plantear problemas. La resolución de problemas ha sido una herramienta también muy utilizada para ubicar todos los objetivos didácticos y conocimientos que se</p>	<p>– Modelling: Translating a problem into mathematical language or a mathematical representation using variables, symbols, diagrams, and appropriate models. [...]. The students modelled and represented the information on the different public transport fares in graphs and, after analysing them, they had to decide which were the most optimal options according to the situation they were in, or they were asked: until what date is it worthwhile to buy the same fare again, what other fares are good alternatives to consider and under what conditions? The mark that I give to this modelling process, based on the work done, is 3, since I consider that work has been done, but more work could have been done in other activities with modelling more contextualised situations apart from this one (p. 9). Problem solving: Use mathematical concepts, tools, and strategies to solve problems. Maintain an investigative attitude in the face of a problem trying different strategies. Generate questions of a mathematical nature and pose problems. Problem solving has also been a widely used tool to locate all the didactic objectives and knowledge that were intended to be worked on during class, in small groups or individually. The fact of being aware of this</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>grup o individual. El get de ser-ne conscients i elaborar nosaltres mateixos la gran majoria d'aquests va fer que poguéssim treballar en tot moment el que es pretenia de forma interessant, contextualitzada i reflexiva. [...].</p> <p>Contextualització: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics. Ús de problemes del món real.</p> <p>Considero que aquest procés es va tenir molt present des del primer moment en que [...] vam començar a dissenyar la UD. Volíem que els exemples treballats i les reflexions fossin el màxim significatives així que vam dissenyar la gran majoria d'exemples i activitats al voltant de realitats més o menys pròximes als alumnes i evitant els processos més repetitius i descontextualitzats. Els alumnes van treballat molt aquest procés ja que al llarg de la UD es van plantejar situacions i problemes tant reals com l'ús de mapes i plànols com el de fer un estudi per saber quina és la millor tarifa de transport públic que he d'escollir si vull obtenir el màxim rendiment, entre d'altres (p. 10). Resolució de problemes (p. 48). [IE3]</p> <p>– Vam considerar oportú durant la planificació de la UD crear nosaltres mateixos la majoria de problemes i exemples ja que, d'aquesta manera, vam aconseguir treballar tot de problemes variats i contextualitzats dins de diferents camps (p. 11). Ràpidament els alumnes van interpretar-ho, tot i que es podria haver anat</p>	<p>querían trabajar durante la clase, en pequeños grupos o de manera individual. El hecho de ser conscientes de ello y elaborar nosotros mismos la gran mayoría de éstos, hizo que pudiéramos trabajar en todo momento lo que se pretendía de forma interesante, contextualizada, y reflexiva. [...].</p> <p>Contextualización: Emplear el razonamiento matemático en entornos no matemáticos. Uso de problemas del mundo real.</p> <p>Considero que este proceso se tuvo muy presente desde el primer momento en que [...] empezamos a diseñar la UD. Queríamos que los ejemplos trabajados y las reflexiones fueran lo más significativas, así que diseñamos la gran mayoría de ejemplos y actividades en torno a realidades más o menos próximas a los estudiantes y evitando los procesos más repetitivos y descontextualizados. Los estudiantes trabajaron mucho este proceso ya que, a lo largo de la UD, se planteamos muchas situaciones y problemas tan reales como el uso de mapas y planos, así como realizar un estudio para saber cuál es la mejor tarifa de transporte público que debo escoger si quiero obtener el máximo rendimiento, entre otros (p. 10). Resolución de problemas (p. 48). [IE3]</p> <p>– Consideramos oportuno, durante la planificación de la UD, crear nosotros mismos la mayoría de los problemas y ejemplos ya que, de este modo, conseguimos trabajar varios problemas variados y contextualizados dentro</p>	<p>and making the vast majority of these by us, made it possible for us to always work what was intended in an interesting, contextualised, and reflective way. [...].</p> <p>Contextualisation: Use mathematical reasoning in non-mathematical settings. Use of real-world problems. I believe that this process was very much in mind from the first moment that [...] we began to design the DU. We wanted the examples worked on and the reflections to be as significant as possible, so we designed the vast majority of examples and activities around realities more or less close to the students and avoiding the most repetitive and decontextualised processes. The students worked a lot on this process since, throughout the DU, we raised many situations and problems as real as the use of maps and plots, as well as conducting a study to find out what is the best public transport fare to choose if I want to get the maximum performance, among others (p. 10). Problem solving (p. 48). [ES3]</p> <p>– We consider it opportune, during the planning of the DU, to create most of the problems and examples ourselves since, in this way, we manage to work of several varied and contextualized problems within different fields (p. 11). The students quickly interpreted it, although it could have been remarking that the purpose of any function is to define a model that explains and</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	remarcant que la finalitat de qualsevol funció és la de definir un model que expliqui i representi un procés concret. [...]. Tot i això, va quedar molt per treballar sobretot de cara als problemes i activitats de les últimes sessions, on es pretenia englobar tots els coneixements en situacions més contextualitzades (p. 49). [IE4]	de diferentes campos (p. 11). Los estudiantes lo interpretaron rápidamente, aunque podría haberse ido remarcando que la finalidad de cualquier función es la de definir un modelo que explique y represente un proceso concreto. [...]. Sin embargo, quedó mucho por trabajar, sobre todo, de cara a los problemas y actividades de las últimas sesiones, donde se pretendía englobar todos los conocimientos en situaciones más contextualizadas (p. 49). [IE4]	represents a specific process. [...]. However, there was a lot to work on, especially regarding the problems and activities of the last sessions, where it was intended to include all the knowledge in more contextualised situations (p. 49). [ES4]
Cognitivo Cognitive	– De bon principi vam intentar que al llarg de tota la UD hi haguessin activitats i sessions que sortissin de la docència formal i tradicional i fossin més competencials per treballar processos cognitius i matemàtics com la comunicació de conceptes, el raonament i argumentació matemàtica, l'abstracció per imaginar i raonar situacions fictícies, modelització i resolució de problemes (pp. 12–13). [IC4]	– Desde el principio, intentamos que, a lo largo de toda la UD, hubiera actividades y sesiones que salieran de la docencia formal y tradicional, y que fueran más competenciales para trabajar procesos cognitivos y matemáticos, como la comunicación de conceptos, el razonamiento y argumentación matemática, la abstracción para imaginar y razonar situaciones ficticias, modelización y resolución de problemas (pp. 12–13). [IC4]	– From the beginning, we tried that, throughout the entire DU, there were activities and sessions that came out of formal and traditional teaching, and that were more competent to work on cognitive and mathematical processes, such as communication of concepts, mathematical reasoning and argumentation, abstraction to imagine and reason fictitious situations, modelling and problem solving (pp. 12–13). [CS4]
Interaccional Interaccional	– Això ha permès que s'hagin treballat diferents processos cognitius: argumentació, comunicació, resolució de problemes (p. 15). [II2]	– Esto ha permitido que se hayan trabajado diferentes procesos cognitivos: argumentación, comunicación, resolución de problemas (p. 15). [II2]	– This has allowed different cognitive processes to be worked on: argumentation, communication, problem solving (p. 15). [IS2]
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Les activitats plantejades [...] estaven contextualitzades en situacions possibles o pròximes a la vida quotidiana dels alumnes. D'aquesta manera també es va aconseguir interès per part seva i es va donar importància a la necessitat	– Las actividades planteadas [...] estaban contextualizadas en situaciones posibles o próximas a la vida cotidiana de los estudiantes. De esta forma, también se logró interés por su parte y se dio importancia a la necesidad	– The activities proposed [...] were contextualised in possible situations or close to the students' daily life. In this way, interest was also caught on their part and importance was given to the need to take and introduce these new mathematical concepts in

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	de prendre i introduir aquests nous conceptes matemàtics a la vida real i professional (p. 16). [IA1] – Al llarg de la UD es van disposar activitats més estètiques i que els van cridar més l’atenció degut a que estaven preparades i contextualitzades fent-los adonar del prop que estan les matemàtiques de la vida real (p. 17). [IA3]	de tomar e introducir estos nuevos conceptos matemáticos en la vida real y profesional (p. 16). [IA1] – A lo largo de la UD, se dispusieron actividades más estéticas y que les llamaron más la atención debido a que estaban preparadas y contextualizadas, haciéndoles dar cuenta de lo cerca que está la matemática de la vida real (p. 17). [IA3]	real and professional life (p. 16). [AS1] – Throughout the DU, more aesthetic activities were proposed and that caught their attention because they were prepared and contextualised, making them realise how close mathematics is to real life (p. 17). [AS3]
Ecológico Ecological	– Així com si que bona part de les activitats i exemples durant la UD es va contextualitzar en entorns socials i més o menys pròxims als alumnes [...], no s’ha acabat de contextualitzar-los en entorns laborals. [...]. Tot i això, si que hauria sigut interessant posar alguns exemples i/o activitats contextualitzats en algun ofici que els resulti motivador i interessant (p. 18). [IEc3]	– Así como buena parte de las actividades y ejemplos durante la UD se contextualizó en entornos sociales y más o menos próximos a los estudiantes [...], no se ha acabado de contextualizarlos en entornos laborales. [...]. Sin embargo, sí hubiera sido interesante poner algunos ejemplos y/o actividades contextualizadas en algún oficio que les resulte motivador e interesante (p. 18). [IEc3]	– Just as a good part of the activities and examples during the DU were contextualised in social environments and more or less close to the students [...], they have not been fully contextualised in work environments. [...]. However, it would have been interesting to put some contextualised examples and/or activities in a job that they find motivating and interesting (p. 18). [EcS3]
Otros Others	– En les darreres sessions de la UD es va treballar tot els conceptes vistos a partir de la resolució de problemes contextualitzats (p. 5). – Les propostes de millora que es proposen en el sentit de millorar la preparació i els diferents beneficis que aquesta suposa són: [...] Creació d’una taula per facilitar la contextualització dels conceptes i activitats i detectar connexions intradisciplinàries durant la planificació de la UD (p. 21). – Contextualització i valor interdisciplinari: considero que la contextualització de les activitats/problemes és una de les eines més importants pels alumnes	– En las últimas sesiones de la UD se trabajaron todos los conceptos vistos a partir de la resolución de problemas contextualizados (p. 5). – Las propuestas de mejora que se plantean, en el sentido de mejorar la preparación y los diferentes beneficios que ésta supone, son: [...] Creación de una tabla para facilitar la contextualización de los conceptos y actividades, y detectar conexiones intradisciplinarias durante la planificación de la UD (p. 21). – Contextualización y valor interdisciplinario: considero que la contextualización de las actividades/problemas es	– In the last sessions of the DU, all the concepts seen from the solving of contextualised problems were worked on (p. 5). – The proposals for improvement, in the sense of improving the preparation and the different benefits that this entail, are: [...] Creation of a table to facilitate the contextualisation of concepts and activities, and detect intradisciplinary connections during the planning of the DU (p. 21). – Contextualisation and interdisciplinary value: I consider that the contextualisation of activities/problems is one of the most important tools for students to understand the usefulness of

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>entendre la utilitat de les matemàtiques i que els hi agradin i els hi donin importància (p. 28). – L’ajust dels pesos de l’avaluació pels diferents blocs modificada seria: [...] 15% per l’aprenentatge dels processos matemàtics que portaran a l’alumne a aprendre i assolir les competències matemàtiques a part dels continguts com l’autonomia, l’aprendre a aprendre, dins aquest bloc doncs es valoraran punts com el raonament matemàtic, l’argumentació i comunicació, la modelització, la resolució de problemes (p. 81).</p>	<p>una de las herramientas más importantes para que los estudiantes entiendan la utilidad de la matemática y que les guste y den importancia (p. 28). – El ajuste de los pesos de la evaluación modificada para los diferentes bloques sería: [...] 15% para el aprendizaje de los procesos matemáticos que llevarán al estudiante a aprender y alcanzar las competencias matemáticas aparte de los contenidos en este bloque, como la autonomía, el aprender a aprender, pues se valorarán puntos como el razonamiento matemático, la argumentación y comunicación, la modelización, la resolución de problemas (p. 81).</p>	<p>mathematics for them, and to like it and give importance to it (p. 28). – The adjustment of the weights of the modified evaluation for the different blocks would be: [...] 15% for learning the mathematical processes that will lead the student to learn and achieve mathematical competencies apart from the contents in this block, such as autonomy, learning to learn, since points such as mathematical reasoning, argumentation and communication, modelling, problem solving, will be assessed (p. 81).</p>
TFM/MFP #025			
Epistémico Epistemic	<p>– Es va dur a terme un plantejament i desenvolupament d’activitats el més competencials possible, incidint sobretot en la resolució de problemes i les connexions; dimensions que serien avaluades competencialment. De forma distribuïda, també es van dur a terme algunes activitats que requerien processos de modelització incentivant el debat entre els alumnes entorn a models matemàtics i la seva adequació per representar situacions quotidianes, es va afavorir la comunicació i contrast d’argumentacions entre els alumnes i es va propiciar l’exploració dels conceptes de forma autònoma entre d’altres. [...]. El problema de la imatge 6 es pot resoldre amb uns coneixements bàsics de les</p>	<p>– Se llevó a cabo un planteamiento y desarrollo de actividades lo más competenciales posible, incidiendo sobre todo en la resolución de problemas y conexiones, dimensiones que serían evaluadas competencialmente. De forma distribuida, también se llevaron a cabo algunas actividades que requerían procesos de modelización, incentivando el debate entre los estudiantes en torno a modelos matemáticos y su adecuación para representar situaciones cotidianas, se favoreció la comunicación y contraste de argumentaciones entre los estudiantes, y se propició la exploración de los conceptos de forma autónoma, entre otros. [...]. El problema de la imagen 6 puede resolverse con unos conocimientos básicos de las razones</p>	<p>– An approach and development of activities that were as competent as possible was carried out, focusing above all on problem solving and connections, dimensions that would be evaluated according to competencies. In a distributed way, some activities that required modelling processes were also carried out, encouraging debate among the students about mathematical modelling and their adequacy to represent everyday situations, communication and contrasting arguments among the students were favoured, and the exploration of concepts in an autonomous way was fostered, among others. [...]. The problem in image 6 can be solved with a basic knowledge of the trigonometric ratios, but, on the other hand, it</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>raons trigonomètriques, però, per altra banda, requereix a l'alumne de diferents processos: [...] Es pot anar més enllà i raonar que el model matemàtic proposat no descriu amb exactitud la situació però ens serveix per resoldre el problema (p. 16). Es promou també la reflexió en quant a la presa de mesures i la seva adequació i al realitzar-se tots aquests processos en un context de quotidianitat per als alumnes, els dota de significat i rellevància (p. 18). [IE3]</p>	<p>trigonométricas, pero, por otra parte, requiere al estudiante de diferentes procesos: [...] Se puede ir más allá y razonar que el modelo matemático propuesto no describe con exactitud la situación, pero nos sirve para resolver el problema (p. 16). También, se promueve la reflexión en cuanto a la toma de medidas y su adecuación, y al realizarse todos estos procesos en un contexto de cotidianidad para los estudiantes, les dota de significado y relevancia (p. 18). [IE3]</p>	<p>requires the student to go through different processes: [...] One can go further and reason that the proposed mathematical model does not accurately describe the situation, but it helps us to solve the problem (p. 16). Also, reflection regarding the taking of measures and their adequacy is promoted, and when all these processes are carried out in a context of daily life for the students, it gives them meaning and relevance (p. 18). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– La demanda cognitiva més enllà dels continguts intrínsecs de la pròpia unitat es troba en majors o menors pinzellades en la majoria de tasques. Entre les diferents tasques, sobretot hi trobem [...] Modelització en contextos quotidians i reflexió dels models matemàtics. [...] Prendre mesures reals per i emprar-les en processos matemàtics de resolució de problemes (p. 23). [IC4]</p>	<p>– La demanda cognitiva, más allá de los contenidos intrínsecos de la propia unidad, se encuentra en mayores o menores pinceladas en la mayoría de las tareas. Entre las diferentes tareas, sobre todo [...] Modelización en contextos cotidianos y reflexión de los modelos matemáticos. [...] Tomar medidas reales para y utilizarlas en procesos matemáticos de resolución de problemas (p. 23). [IC4]</p>	<p>– The cognitive demand, beyond the intrinsic contents of the unit itself, is found to a greater or lesser extent in most tasks. Among the different tasks, above all [...] Modelling in everyday contexts and reflection on mathematical models. [...] Take real measurements and use them in mathematical problem-solving processes (p. 23). [CS4]</p>
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– A part de en la fase introductòria, durant tota la unitat es van anar utilitzant exemples i exercicis que pretenien donar sentit a l'ús de la trigonometria més enllà de resoldre simples triangles (p. 29). [IA1]</p>	<p>– Aparte de la fase introductoria, durante toda la unidad se utilizaron ejemplos y ejercicios que pretendían dar sentido al uso de la trigonometría más allá de resolver simples triángulos (p. 29). [IA1]</p>	<p>– Apart from the introductory phase, throughout the unit, examples and exercises that tried to give meaning to the use of trigonometry were given, beyond solving simple triangles (p. 29). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– En bastantes activitats es resolien problemes reals. Per contra, aquests poden no ser excessivament quotidians en alguns casos i es podrien millorar en conjunt orientant-los cap</p>	<p>– En bastantes actividades se resolvían problemas reales. Por el contrario, éstos pueden no ser excesivamente cotidianos, en algunos casos, y podrían mejorarse en</p>	<p>– In many activities, real problems were solved. On the contrary, there may not be excessively familiar, in some cases, and could be improved as a whole, focus them on more</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	a utilitats més pràctiques. No obstant, el utilitzar mesures reals en contextos relativament coneguts pels alumnes però fàcilment comprensibles i alhora interessants, poden produir també un efecte motivador (pp. 31–32). [IEc3]	conjunto, orientándolos hacia utilidades más prácticas. Sin embargo, utilizar medidas reales en contextos relativamente conocidos por los estudiantes, pero fácilmente comprensibles y a la vez interesantes, también pueden producir un efecto motivador (pp. 31–32). [IEc3]	practical utilities. However, using real measures in contexts that are relatively familiar to the students, but easily understandable and, at the same time, interesting, can also produce a motivating effect (pp. 31–32). [EcS3]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Un aprofundiment del coneixement i domini de continguts de les altres matèries, contribuiria a millorar en aquesta competència (p. 42).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Una profundización del conocimiento y dominio de contenidos de las demás materias contribuiría a mejorar en esta competencia (p. 42).	– Contextualisation and interdisciplinary value: A deepening of the knowledge and mastery of contents from other subjects would contribute to improve in this competency (p. 42).
TFM/MFP #027			
Epistémico Epistemic	– A continuació, es passa a la realització d'activitats, on els alumnes han d'identificar i analitzar els problemes que tindran a l'hora de resoldre-les, coneguda com la modelització matemàtica, que és el procés de descriure en termes matemàtics un fenomen real, obtenint resultats matemàtics i l'avaluació i interpretació matemàtica d'una situació real, un exemple d'una situació real és l'activitat 2 de la UD, on els alumnes treballen en un restaurant i han de modificar el nombre d'ingredients, i per resoldre aquesta activitat (i totes les activitats de la UD) de manera correcta s'hauria de seguir el següent procés de modelització. [...]. La matematització horitzontal, porta del món real al món dels símbols i fa possible tractar matemàticament un conjunt de problemes i la matematització vertical, consisteix en el tractament específicament matemàtic	– A continuación, se pasa a la realización de actividades, donde los estudiantes deben identificar y analizar los problemas que tendrán a la hora de resolverlos, conocida como modelización matemática, que es el proceso de describir un fenómeno real en términos matemáticos, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemática de una situación real. Un ejemplo de una situación real es la actividad 2 de la UD, donde los estudiantes trabajan en un restaurante y deben modificar el número de ingredientes, y para resolver esta actividad (y todas las actividades de la UD) de forma correcta, debería seguirse el siguiente proceso de modelización. [...]. La matematización horizontal lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible tratar matemáticamente un conjunto de problemas, y	– Next, activities as carried out, where the students must identify and analyse the problems they will have when solving them, known as mathematical modelling, which is the process of describing a real phenomenon in mathematical terms, obtaining mathematical results and the evaluation and mathematical interpretation of a real situation. An example of a real situation is activity 2 of the DU, where the students work in a restaurant and must modify the number of ingredients, and to solve this activity (and all the activities in the DU) correctly, the following modelling process must be followed. [...]. Horizontal mathematisation leads from the real world to the world of symbols and makes it possible to treat a set of problems mathematically, and vertical mathematisation consists of the specifically mathematical treatment of

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	de les situacions (pp. 6–7). Resolució de problemes: L’alumne ha de ser capaç de resoldre qualsevol classe de problemes de diverses maneres (pp. 7–8). Contextualització: Realització de problemes de la vida quotidiana (p. 8). [IE3]	la matematització vertical consisteix en el tractament específicament matemàtic de les situacions (pp. 6–7). Resolució de problemes: El estudiant ha de ser capaç de resoldre qualsevol classe de problemes de diverses formes (pp. 7–8). Contextualització: Realització de problemes de la vida quotidiana (p. 8). [IE3]	situacions (pp. 6–7). Problem solving: A student must be able to solve any kind of problem in a variety of ways (pp. 7–8). Contextualisation: Realisation of everyday problems (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecològic Ecological			
Otros Others	– Activitat 2: Som un restaurant (pp. 17–18). – Contextualització i valor interdisciplinari: Sincerament puc dir que aquesta competència és important, però desgraciadament no he pogut ampliar els coneixements durant les classes de màster, però si durant la realització de la UD (p. 25).	– Actividad 2: Somos un restaurante (pp. 17–18). – Contextualización y valor interdisciplinario: Sinceramente, puedo decir que esta competencia es importante, pero desgraciadamente no he podido ampliar los conocimientos durante las clases del máster, pero sí durante la realización de la UD (p. 25).	– Activity 2: We are a restaurant (pp. 17–18). – Contextualisation and interdisciplinary value: I can honestly say that this competency is important, but unfortunately, I have not been able to expand my knowledge during the master’s classes, but I did during the DU (p. 25).
TFM/MFP #028			
Epistémico Epistemic	– Plantejar i resoldre problemes: Comprèn plantejar, formular i definir diferents tipus de problemes matemàtics i resoldre diversos tipus de problemes utilitzant una varietat de mètodes. En aquest cas els alumnes han treballat de diverses maneres el càlcul de les mesures de centralització i dispersió, així com la construcció del núvol de punts. Primer de tot, es va fer una activitat que incloïa aquests paràmetres per calcular-los a mà, i	– Plantear y resolver problemas: Comprende plantear, formular, y definir distintos tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos. En este caso, los estudiantes trabajaron de diversas formas el cálculo de las medidas de centralización y dispersión, así como la construcción de la nube de puntos. Primero que todo, se realizó una actividad que incluía estos parámetros para	– Posing and solving problems: Includes posing, formulating, and defining different types of mathematical problems and solving different types of problems using a variety of methods. In this case, the students worked in various ways on the calculation of the measures of centralisation and dispersion, as well as the construction of the cloud of points. First of all, an activity was carried out that included these parameters to calculate

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>posteriorment vam fer una activitat per calcular aquests paràmetres i construir aquest gràfic amb eines TIC com han estat el full de càlcul i el GeoGebra (p. 9). Modelar: Inclou estructurar la situació que s'ha de modelar; traduir la “realitat” a una estructura matemàtica; treballar amb un model matemàtic; validar el model; reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i els seus resultats; comunicar-se de manera eficaç sobre el model i els seus resultats (incloent limitacions); i monitorar i controlar el procés de modelatge. Fer inferència estadística vol dir modelar un patró, un comportament de la població o de dos factors que tenen una relació entre sí. Per trobar les rectes de regressió que ens ajudaran a estimar valors que no apareixen en la mostra com a tal, estem creant un model de regressió lineal (pp. 9–10). Contextualització: Utilitzar problemes del món real propers i útils per a l'alumnat. La gran part de les activitats de l'UD, així com els exemples que hem posat a classe sobre els diferents conceptes, han estat tractats amb casos/situacions reals i de proximitat a l'alumnat per a que entengui el concepte i pugui posar en pràctica el que ha après d'una manera realista (p. 10). [IE3]</p>	<p>calcularlos a mano y, posteriormente, realizamos una actividad para calcular estos parámetros y construir este gráfico con herramientas TIC, como fueron la hoja de cálculo y el GeoGebra (p. 9). Modelizar: Incluye estructurar la situación a modelizar; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse de forma eficaz sobre el modelo y sus resultados (incluyendo limitaciones); y monitorear y controlar el proceso de modelización. Hacer inferencia estadística significa modelar un patrón, un comportamiento de la población o dos factores que tienen una relación entre sí. Para encontrar las rectas de regresión que nos ayudarán a estimar valores que no aparecen en la muestra como tal, estamos creando un modelo de regresión lineal (pp. 9–10). Contextualización: Utilizar problemas del mundo real, cercanos y útiles para el alumnado. La gran parte de las actividades de la UD, así como los ejemplos que pusimos en clase sobre los diferentes conceptos, han sido tratados con casos/situaciones reales y de proximidad al alumnado para que entienda el concepto y pueda poner en práctica lo aprendido de forma realista (p. 10). [IE3]</p>	<p>them by hand and, later, we carried out an activity to calculate these parameters and build this graph with ICT tools, such as the spreadsheet and GeoGebra (p. 9). Modelling: Includes structuring the situation to be modelled; translating “reality” into a mathematical structure; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing, and criticising a model and its results; communicating effectively about the model and its results (including limitations); and monitoring and controlling the modelling process. Making statistical inference means modelling a pattern, population behaviour, or two factors that are related to each other. To find the regression lines that will help us estimate values that do not appear in the sample as such, we are creating a linear regression model (pp. 9–10). Contextualisation: Use problems from the real world, close and useful for students. Most of the activities of the DU, as well as the examples that we presented in class about the different concepts, have been treated with real cases/situations and close to the students so that they understand the concept and can put into practice what they have learned in a realistic way (p. 10). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interaccional	X	X	X

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– A més a més, tots els exemples estaven contextualitzats en entorns pròxims a ells, per tal de que poguessin entendre millor el significat del concepte (p. 19). [IA1]	– Además, todos los ejemplos estaban contextualizados en entornos cercanos a ellos, a fin de que pudieran entender mejor el significado del concepto (p. 19). [IA1]	– In addition, all the examples were contextualised in environments close to them, so that they could better understand the meaning of the concepts (p. 19). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Gràcies a que he estudiat una carrera de ciències socials, l'aplicabilitat dels processos matemàtics en la vida quotidiana és una de les coses que més destaquen en aquests estudis que contenen matemàtiques. Aquest màster, cursant l'assignatura de modelització, m'ha permès trobar noves aplicabilitats de conceptes que no sabia a on s'aplicaven (p. 29).</p> <p>– Sessió 9: Recta de regressió + full de càlcul. En aquesta sessió introduïrem el concepte de recta de regressió lineal per trobar un model que ens expliqui el comportament d'aquesta mostra (p. 41).</p> <p>– Activitat 7: Grup Bimbo Espanya S.A. (pp. 88–91).</p> <p>– Activitat 3: COVID-19 (pp. 106–110).</p> <p>– Proposta de millora activitat 7 (pp. 133–135).</p> <p>– Proposta de millora activitat 3 (pp. 136–137).</p>	<p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Gracias a que he estudiado una carrera de ciencias sociales, la aplicabilidad de los procesos matemáticos en la vida cotidiana es una de las cosas que más destacan en estos estudios que contienen matemática. Este máster, cursando la asignatura de modelización, me ha permitido encontrar nuevas aplicabilidades de conceptos que no sabía dónde se aplicaban (p. 29).</p> <p>– Sesión 9: Recta de regresión + hoja de cálculo. En esta sesión introduciremos el concepto de recta de regresión lineal para encontrar un modelo que nos explique el comportamiento de esta muestra (p. 41).</p> <p>– Actividad 7: Grupo Bimbo España S.A. (pp. 88–91).</p> <p>– Actividad 3: COVID-19 (pp. 106–110).</p> <p>– Propuesta de mejora actividad 7 (pp. 133–135).</p> <p>– Propuesta de mejora actividad 3 (pp. 136–137).</p>	<p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Thanks to the fact that I have studied a degree in social sciences, the applicability of mathematical processes in everyday life is one of the things that stands out the most in these studies that contain mathematics. This master's programme, by studying the subject of modelling, has allowed me to find new applicability of concepts that I did not know where they were applied (p. 29).</p> <p>– Session 9: Regression line + spreadsheet. In this session, we will introduce the concept of linear regression to find a model that explains the behaviour of this sample (p. 41).</p> <p>– Activity 7: Bimbo Group Spain (pp. 88–91).</p> <p>– Activity 3: COVID-19 (pp. 106–110).</p> <p>– Improvement proposal for activity 7 (pp. 133–135).</p> <p>– Improvement proposal for activity 3 (pp. 136–137).</p>
TFM/MFP #031			
Epistémico Epistemic			
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional			

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Per facilitar la connexió amb els estudiants, s’incorporen estratègies de gamificació, treball cooperatiu i el plantejament dels problemes contextualitzats, de manera que es fomenti el treball competencial i l’atenció a la diversitat (p. 4).</p> <p>– Activitat La frontissa ideal (pp. 17–18).</p> <p>– Activitat Les fronteres al segle XXI (pp. 18–19).</p> <p>– Activitat El pastor i els pous del desert (pp. 20–23).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Seguint la línia de les competències anteriors, considero que la formació rebuda al màster m’ha fet veure la importància d’aquesta competència a l’hora d’ensenyar les matemàtiques i, mentre l’anterior curs acadèmic m’hagués ubicat al nivell 2 ara tinc les eines per situar-me al nivell 3 (p. 32).</p>	<p>– Para facilitar la conexión con los estudiantes, se incorporan estrategias de gamificación, trabajo colaborativo, y el planteamiento de problemas contextualizados, de modo que se fomente el trabajo competencial y la atención a la diversidad (p. 4).</p> <p>– Actividad La bisagra ideal (pp. 17–18).</p> <p>– Actividad Las fronteras en el siglo XXI (pp. 18–19).</p> <p>– Actividad El pastor y los pozos del desierto (pp. 20–23).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Siguiendo la línea de las competencias anteriores, considero que la formación recibida en el máster me ha hecho ver la importancia de esta competencia a la hora de enseñar la matemática y, mientras que en el curso académico anterior me hubiera ubicado en el nivel 2, ahora tengo las herramientas para situarme en el nivel 3 (p. 32).</p>	<p>– To facilitate the connection with the students, gamification strategies, collaborative work, and the approach of contextualised problems are incorporated, so as to encourage work on competencies and attention to diversity (p. 4).</p> <p>– The ideal hinge activity (pp. 17–18).</p> <p>– Borders in the 21st century activity (pp. 18–19).</p> <p>– The shepherd and the desert wells activity (pp. 20–23).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Following the line of the previous competencies, I consider that the education received in the master’s programme has made me see the importance of this competency when it comes to teaching mathematics and, whereas in the previous academic year I would have placed myself at level 2, I now have to tools to get to level 3 (p. 32).</p>
TFM/MFP #035			
Epistémico Epistemic	<p>– A més de l’algoritmizació, aquests exercicis ajuden a treballar altres processos com ara la resolució de problemes doncs, l’alumne ha de saber aplicar unes eines diferents en cada cas o escollir quines són més òptimes (cas dels diferents mètodes per la resolució de sistemes). [...]. Per altra banda, s’han proposat també tot d’activitats amb contextos reals que</p>	<p>– Además de la algoritmización, estos ejercicios ayudan a trabajar otros procesos, como la resolución de problemas, pues el estudiante debe saber aplicar unas herramientas diferentes en cada caso o escoger cuáles son las más óptimas (caso de los diferentes métodos para la resolución de sistemas). [...]. Por otra parte, también se propusieron</p>	<p>– In addition to algorithmisation, these exercises help to work on other processes, such as problem solving, since the student must know how to apply different tools in each case or choose which are the most optimal (in the case of the different methods to solve systems). [...]. On the other hand, activities with real contexts were also proposed that allowed</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>permetien treballar la contextualització, les connexions, l'argumentació, la formulació, la resolució de problemes, i fins i tot la comunicació gràcies a que algunes activitats es realitzaven en grups. Alguns exemples serien problemes de modelitzar algebraicament una "endevinalla", problemes geomètrics i exercicis de presa de decisions (p. 8). L'exemple més potent d'aquest cas ha estat clarament el problema de presa de decisions sobre el millor sistema de subministrament elèctric. És evident que aquest és un problema contextualitzat i que promou la resolució de problemes, però també promou la creació de connexions amb la vida quotidiana i amb el món de les energies renovables a través del mapa de pensament proposat que també és molt útil per generar debat (comunicació) i practicar l'argumentació (pp. 8–9). [IE3]</p> <p>– Com a mètode de modelització algebraica per extreure dades com ara edats, nombre d'objectes iguals, preus, distàncies i dimensions, com a descripció d'una corba en el pla o inclús com a enunciat escrit, tal i com es feia en l'antiguitat (p. 9). [IE4]</p>	<p>actividades con contextos reales que permitían trabajar la contextualización, las conexiones, la argumentación, formulación, resolución de problemas e, incluso, la comunicación, gracias a que algunas actividades se realizaban en grupos. Algunos ejemplos serían problemas de modelizar algebraicamente una "adivinanza", problemas geométricos, y ejercicios de toma de decisiones (p. 8). El ejemplo más potente de este caso ha sido, claramente, el problema de toma de decisiones sobre el mejor sistema de suministro eléctrico. Es evidente que éste es un problema contextualizado y que promueve la resolución de problemas, pero también promueve la creación de conexiones con la vida cotidiana y con el mundo de las energías renovables a través del mapa de pensamiento propuesto, el cual también es muy útil para generar debate (comunicación) y practicar la argumentación (pp. 8–9). [IE3]</p> <p>– Como método de modelización algebraica para extraer datos como edades, número de objetos iguales, precios, distancias, y dimensiones, como descripción de una curva en el plano o incluso como enunciado escrito, tal y como se hacía en la antigüedad (p. 9). [IE4]</p>	<p>working on contextualisation, connections, argumentation, formulation, problem solving, and even communication, thanks to the fact that some activities were carried out in groups. Some examples would be algebraically modelling a "riddle", geometric problems, and decision-making exercises (p. 8). The most powerful example of this case has clearly been the decision-making problem about the best electricity supply system. It is evident that this is a contextualised problem and that it promotes problem solving, but it also promotes the creation of connections with daily life and with the world of renewable energies through the proposed thought map, which is also very useful for generate debate (communication) and practise argumentation (p. 8–9). [ES3]</p> <p>– As an algebraic modelling method to extract data such as ages, number of equal objects, prices, distances, and dimensions, as a description of a curve on the plane or even as a written statement, as was done in antiquity (p. 9). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	<p>– La gran majoria del temps la vaig dedicar a la resolució de problemes,</p>	<p>– La gran mayoría del tiempo la dediqué a la resolución de problemas,</p>	<p>– Most of the time I dedicated to solving problems, since it is how</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	doncs és com s'aprèn de manera més competencial a través de posar en pràctica els conceptes explicats i facilitant la retenció i la creació de connexions amb altres conceptes (p. 15). [IM3]	pues es cómo se aprende de forma más competencial, a través de poner en práctica los conceptos explicados y facilitando la retención y la creación de conexiones con otros conceptos (p. 15). [IM3]	they learn in a more competent way, through putting into practice the concepts explained and facilitating retention and creation of connections with other concepts (p. 15). [MS3]
Afectivo Affective	– Si bé és cert que la majoria de tasques eres contextualitzades, la majoria no feien referència a un context amb el qual es sentissin especialment identificats. Només alguna activitat creava un interès especial per la seva aplicabilitat a situacions reals. Un exemple va ser l'activitat de presa de decisions en què calia escollir la millor opció de subministrament elèctric en base a criteris reals com el cost, el període d'amortització, la sostenibilitat o la fiabilitat del subministrament (p. 15). [IA1]	– Si bien es cierto que la mayoría de las tareas estaban contextualizadas, la mayoría no hacían referencia a un contexto con el que se sintieran especialmente identificados. Sólo alguna actividad creaba especial interés por su aplicabilidad a situaciones reales. Un ejemplo fue la actividad de toma de decisiones, en la que era necesario escoger la mejor opción de suministro eléctrico con base en criterios reales, como el coste, el período de amortización, la sostenibilidad, o la fiabilidad del suministro (p. 15). [IA1]	– Although most of the tasks were contextualised, most did not refer to a context with which they felt particularly identified. Only some activity created special interest due to its applicability to real situations. An example was the decision-making activity, in which it was necessary to choose the best electricity supply option based on real criteria, such as cost, payback period, sustainability, or reliability of supply (p. 15). [AS1]
Ecológico Ecological	– El teorema de Pitàgores va permetre que els alumnes treballassin amb equacions de 2n grau de forma més contextualitzada i a la vegada que aprenien un teorema clau de les matemàtiques de l'ESO i creaven connexions entre àlgebra i geometria. També es van fer alguns exercicis contextualitzats que eres reproduccions simplificades de problemes complicats que requereixen matemàtiques avançades. [...]. Per que fa a les connexions interdisciplinàries, hi va haver un grau important de contextualització dels exercicis que creava connexions amb l'àmbit social (p. 16). [IEc2]	– El teorema de Pitágoras permitió que los estudiantes trabajaran con ecuaciones de 2º grado de forma más contextualizada y, al mismo tiempo, aprendían un teorema clave de la matemática de la ESO y creaban conexiones entre álgebra y geometría. También se realizaron algunos ejercicios contextualizados que eran reproducciones simplificadas de problemas complicados que requieren una matemática avanzada. [...]. En cuanto a las conexiones interdisciplinarias, hubo un importante grado de contextualización de los ejercicios que creaba conexiones con el ámbito social (p. 16). [IEc2]	– The Pythagorean theorem allowed the students to work with 2 nd degree equations in a more contextualised way and, at the same time, they learned a key theorem of CSE and created connections between algebra and geometry. There were also some contextualised exercises that were simplified reproductions of complicated problems that require advanced mathematics. [...]. Regarding interdisciplinary connections, there was a significant degree of contextualisation of the exercises that created connections with the social field (p. 16). [EcS2]

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
<p>Otros Others</p>	<p>– Les equacions són un tema d’una importància cabdal, doncs permeten modelitzar sub-espais de solucions en funció d’unes restriccions (p. 3). – Els objectius d’aprenentatge han estat els següents: [...]. Utilitzar la modelització algebraica mitjançant equacions per resoldre problemes (p. 4). – Idoneïtat emocional: Crear un major clima d’interès fent ús d’activitats més interessants i contextualitzades, tenint una actitud més energètica en tot moment i buscant en tot moment la implicació dels alumnes a través d’explicacions interactives (p. 18). – L’activitat 7 serà la primera activitat que els alumnes realitzin amb una metodologia cooperativa [...]. A part de treballar molt la traducció a llenguatge matemàtic, servirà com a preparació per l’activitat on hauran d’aplicar estratègies semblants en un cas contextualitzat com l’elecció del subministrament elèctric (p. 23). – Contextualització i valor interdisciplinari: Vaig començar el màster amb una idea de la gran influència de les matemàtiques, sobretot en la resta de ciències. Durant el pràcticum vaig implementar alguna activitat competencial amb un context real en la qual els alumnes havien d’aplicar les matemàtiques per resoldre-ho. Si bé és cert que els alumnes només van emprar raonaments matemàtics en aquestes activitats sense</p>	<p>– Las ecuaciones son un tema de una importancia primordial, pues permiten modelizar subespacios de soluciones en función de unas restricciones (p. 3). – Los objetivos de aprendizaje han sido los siguientes: [...]. Utilizar la modelización algebraica mediante ecuaciones para resolver problemas (p. 4). – Idoneidad afectiva: Crear un mayor clima de interés haciendo uso de actividades más interesantes y contextualizadas, teniendo una actitud más energética y buscando en todo momento la implicación de los estudiantes a través de explicaciones interactivas (p. 18). – La actividad 7 será la primera que los estudiantes realicen con una metodología cooperativa [...]. Aparte de trabajar mucho la traducción al lenguaje matemático, servirá como preparación para la actividad donde tendrán que aplicar estrategias similares en un caso contextualizado, como la elección del suministro eléctrico (p. 23). – Contextualización y valor interdisciplinario: Empecé el máster con una idea de la gran influencia de la matemática, sobre todo, en el resto de las ciencias. Durante las prácticas implementé alguna actividad competencial con un contexto real en el que los estudiantes debían aplicar la matemática para resolverlo. Si bien es cierto que los estudiantes sólo utilizaron razonamientos matemáticos en estas actividades sin llegar a</p>	<p>– Equations are a topic of paramount importance, since they allow modelling subspaces of solutions based on some restrictions (p. 3). – The learning objectives have been as follows: [...]. Use algebraic modelling using equations to solve problems (p. 4). – Affective suitability: Create a greater climate of interest by using more interesting and contextualised activities, having a more energetic attitude and seeking at all times the involvement of the students through interactive explanations (p. 18). – Activity 7 will be the first that the students carry on with a cooperative methodology [...]. Apart from working hard on the translation into mathematical language, it will serve as preparation for the activity where they will have to apply similar strategies in a contextualised case, such as the choice of electricity supply (p. 23). – Contextualisation and interdisciplinary value: I started the master’s programme with an idea of the great influence of mathematics, above all, in the rest of sciences. During the internship experiences, I implemented some competency activity with a real context in which the students had to apply mathematics to solve it. Although it is true that the students only used mathematical reasoning in these activities without actually doing modelling (p. 28).</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	arribar a fer modelitzacions (p. 28).	realizar modelizaciones (p. 28).	
TFM/MFP #036			
Epistémico Epistemic	– Una de les activitats en les quals es tractaria de modelitzar una situació real, encara que no s’hagi seguit l’esquema de Mogens-Niss ja que són més simplificades, seria el problema en el qual es demana quants camions cisterna necessitaria un poble que s’ha quedat aïllat a causa del temporal Gloria. Un altre exemple en seria l’activitat d’empaquetar caramels [...], són activitats que permeten treballar també la resolució de problemes (p. 8). [IE3]	– Una de las actividades en las que se trataría de modelizar una situación real, aunque no se haya seguido el esquema de Mogens Niss, puesto que son más simplificadas, sería el problema en el que se pide cuántos camiones cisterna necesitaría un pueblo que se ha quedado aislado a causa del temporal Gloria. Otro ejemplo sería la actividad de empaquetar caramelos [...], son actividades que permiten trabajar también la resolución de problemas (p. 8). [IE3]	– One of the activities in which an attempt would be made to model a real situation, although the Mogens Niss’s scheme has not been followed, since they are more simplified, would be the problem in which it is asked how many tanker lorries would be needed by a town that has been isolated due to storm Gloria. Another example would be the activity of packing candies [...], these are activities that also allow problem solving to be worked on (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Al llarg de la unitat s’ha intentat pensar en activitats que estiguessin contextualitzades (p. 13). [IA1] – Un altre factor que podria fer que s’hi impliquessin més seria que hi haguessin activitats més contextualitzades al seu dia a dia (p. 14). [IA2]	– A lo largo de la unidad se ha intentado pensar en actividades que estuvieran contextualizadas (p. 13). [IA1]. – Otro factor que podría hacer que se implicaran más sería que hubiera actividades más contextualizadas en su día a día (p. 14). [IA2]	– Throughout the unit, we have tried to think of activities that were contextualised (p. 13). [AS1] – Another factor that could make them get more involved would be more contextualised activities in their daily routine (p. 14). [AS2]
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Propostes per millorar la qualitat matemàtica, problemes més contextualitzats (pp. 18–19). – En la millora, he intentat que les matemàtiques estiguessin més contextualitzades, mirant també de millorar la idoneïtat emocional, i he augmentat també el pes de la resolució de problemes (p. 26).	– Propuestas para mejorar la calidad matemática, problemas más contextualizados (pp. 18–19). – En la mejora, he intentado que la matemática estuviera más contextualizada, tratando también de mejorar la idoneidad afectiva, y he aumentado también el peso de la resolución de problemas (p. 26).	– Proposals to improve mathematical quality, more contextualised problems (pp. 18–19). – In the improvement, I have tried to make mathematics more contextualised, also trying to improve affective suitability, and I have also increased the weight of problem solving (p. 26). – Contextualisation and interdisciplinary value: In the subjects of the

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: En les assignatures de l'especialitat de matemàtiques, la d'ensenyament i aprenentatge, la de complements de formació, o la d'innovació i recerca, hem pogut veure activitats contextualitzades i en les quals es feien connexions amb altres disciplines. En la millora de la unitat he intentat fer activitats més contextualitzades (p. 28).</p> <p>– Activitats de resolució de problemes (pp. 60–61).</p> <p>– Annex 9: Enunciats de problemes més contextualitzats (pp. 69–70).</p>	<p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En las asignaturas de la especialidad de matemática, la de enseñanza y aprendizaje, complementos de formación, o de innovación e investigación, hemos podido ver actividades contextualizadas y en las que se realizaban conexiones con otras disciplinas. En la mejora de la unidad he intentado realizar actividades más contextualizadas (p. 28).</p> <p>– Actividades de resolución de problemas (pp. 60–61).</p> <p>– Anexo 9: Enunciados de problemas más contextualizados (pp. 69–70).</p>	<p>speciality of mathematics, that of teaching and learning, complements of formation, or innovation and research, we have been able to see contextualised activities and in which connections with other disciplines were made. In improving the unit, I have tried to make more contextualised activities (p. 28).</p> <p>– Problem solving activities (pp. 60–61).</p> <p>– Annex 9: Statements of more contextualised problems (pp. 69–70).</p>
TFM/MFP #039			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Modelització – contextualització: A partir d'un problema que descriu una situació del món real han de ser capaços de representar-lo i resoldre'l de manera matemàtica i saber veure com afecten aquests resultats al món real. Aquest procés s'ha treballat principalment en aquesta darrera part feta virtualment [...]. He volgut donar-li importància ja que el tema de trigonometria es pot aplicar en moltes situacions quotidianes per calcular alçades o distàncies. Penso que és en aquest tipus de problemes on acaben de comprendre la utilitat de la trigonometria (p. 7).</p> <p>Resolució de problemes: Saber resoldre diferents tipus de problemes de la mateixa manera que també han de saber fer-ho per</p>	<p>– Modelización – contextualización: A partir de un problema que describa una situación del mundo real, deben ser capaces de representarlo y resolverlo de forma matemática y saber ver cómo afectan estos resultados al mundo real. Este proceso se trabajó, principalmente, en esta última parte realizada virtualmente [...]. Quise darle importancia, puesto que el tema de trigonometría se puede aplicar en muchas situaciones cotidianas para calcular alturas o distancias. Pienso que es en este tipo de problemas donde acaban de comprender la utilidad de la trigonometría (p. 7).</p> <p>Resolución de problemas: Saber resolver diferentes tipos de problemas de la misma forma que también deben saber hacerlo por</p>	<p>– Modelling – contextualisation: From a problem that describes a real-world situation, they must be able to represent and solve it mathematically and know how to see the effects of these results in the real world. This process was worked on, mainly, in this last part carried out virtually [...]. I wanted to give it importance, since the subject of trigonometry can be applied in many everyday situations to calculate heights or distances. I think that it is, in this type of problems, where they have just understood the usefulness of trigonometry (p. 7).</p> <p>Problem solving: Know how to solve different types of problems in the same way that they must also know how to do it in different ways and not just one (p. 8). [ES3]</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	diferents vies i no només una (p. 8). [IE3]	diferentes vías y no sólo una (p. 8). [IE3]	
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Sempre intento explicar als meus alumnes de repàs diferents aplicacions o utilitats de les matemàtiques perquè li trobin sentit als conceptes treballats, però al que m’han ajudat els diferents treballs del màster i principalment les pràctiques és a saber preparar activitats en les que es treballi la contextualització (p. 26).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Siempre intento explicar a mis estudiantes de repaso diferentes aplicaciones o utilidades de la matemática para que le encuentren sentido en los conceptos trabajados, pero a lo que me han ayudado los diferentes trabajos del máster y, principalmente, las prácticas, es saber preparar actividades en las que se trabaje la contextualización (p. 26).	– Contextualisation and interdisciplinary value: I always try to explain different applications or utilities of mathematics to my refresher students, so that they make sense of the concepts worked on, but what the different master’s projects have helped with, and mainly, the internship experiences, it is knowing how to prepare activities in which contextualisation is worked on (p. 26).
TFM/MFP #040			
Epistémico Epistemic	– Contextualització: Utilitzar situacions del món real i enllaçar els objectes matemàtics amb aquest. Present a la UD (p. 9). Resolució de problemes: Traduir un problema a llenguatge matemàtic i emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes (p. 10). [IE3]	– Contextualización: Utilizar situaciones del mundo real y enlazar los objetos matemáticos con éste. Presente en la UD (p. 9). Resolución de problemas: Traducir un problema al lenguaje matemático y utilizar conceptos, herramientas, y estrategias matemáticas para resolver problemas (p. 10). [IE3]	– Contextualisation: Use real world situations and link mathematical objects with them. Present in the DU (p. 9). Problem solving: Translate a problem into mathematical language and use mathematical concepts, tools, and strategies to solve problems (p. 10). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– Quant als paràmetres característics de la recta es considera assolible el significat geomètric del pendent, car es presentarà de manera gràfica i contextualitzat (p. 13). [IC1] – Totes les definicions i propietats tractades en aquesta Unitat Didàctica van ser contextualitzats amb exemples de la vida quotidiana i/o recolzats	– En cuanto a los parámetros característicos de la recta, se considera alcanzable el significado geométrico de la pendiente, ya que se presentará de forma gráfica y contextualizada (p. 13). [IC1] – Todas las definiciones y propiedades tratadas en esta Unidad Didáctica fueron contextualizadas con ejemplos de la vida	– Regarding the characteristic parameters of the line, the geometric meaning of the slope is considered achievable since it will be presented graphically and contextualised (p. 13). [CS1] – All the definitions and properties discussed in this Didactic Unit were contextualised with examples from everyday

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	sobre la representació gràfica (p. 13). [IC2] – Amb la Unitat Didàctica s'estimulen processos com l'algoritmització, el canvi de representació com eina de treball i finalitat i connexions intramatemàtiques amb unitats didàctiques fetes anteriorment com la de successions i equacions i extramatemàtiques amb la contextualització de les activitats amb aspectes de la vida quotidiana (p. 14). [IC4]	cotidiana y/o apoyadas sobre la representación gráfica (p. 13). [IC2] – Con la Unidad Didáctica se estimulan procesos como la algoritmización, los cambios de representación como herramienta de trabajo y finalidad, y las conexiones intramatemáticas con unidades didácticas realizadas anteriormente, como la de sucesiones y ecuaciones, y extramatemáticas con la contextualización de las actividades con aspectos de la vida cotidiana (p. 14). [IC4]	life and/or supported by graphical representation (p. 13). [CS2] – With the Didactic Unit, processes such as algorithmisation, changes of representation as a work tool and purpose, and intra-mathematical connections with previously developed didactic units, such as sequences and equations, and extra-mathematical connections with the contextualisation of activities with aspects of everyday life are stimulated (p. 14). [CS4]
Interaccional Interaccional	– Utilitzava preguntes retòriques i emprava exemples contextualitzats en situacions que els interessaven per tal que se sentissin implicats (p. 16). [III1] – La inclusió es treballava a partir de la participació en l'aula ja esmentada i amb la contextualització del temari amb exemples interessants per ells (p. 17). [II2]	– Utilizaba preguntas retóricas y empleaba ejemplos contextualizados en situaciones que les interesaban para que se sintieran implicados (p. 16). [III1] – La inclusión se trabajaba a partir de la participación en el aula ya citada y con la contextualización del temario con ejemplos interesantes para ellos (p. 17). [II2]	– I used rhetorical questions and contextualised examples in situations that interested them so that they felt involved (p. 16). [IS1] – Inclusion was worked from the aforementioned participation in the classroom and with the contextualisation of the agenda with interesting examples for them (p. 17). [IS1]
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– En comptes de seleccionar tasques d'interès per als alumnes, més aviat vaig intentar dotar d'interès les activitats preteses contextualitzant-les amb exemples de la vida quotidiana com tarifes telefòniques, interpretació de gràfiques actuals com la de la COVID-19 o la de la bateria del seu mòbil perquè trobin una utilitat al que s'ha treballat (p. 14). [IA1]	– En lugar de seleccionar tareas de interés para los estudiantes, más bien intenté dotar de interés a las actividades pretendidas contextualizándolas con ejemplos de la vida cotidiana, como tarifas telefónicas, interpretación de gráficas actuales, como la del COVID-19 o de la batería de sus teléfonos para que encuentren una utilidad en lo que se ha trabajado (p. 14). [IA1]	– Instead of selecting tasks of interests to the students, I rather tried to give the intended activities interest by contextualising them with examples from everyday life, such as telephone rates, interpretation of current graphs, such as that of COVID-10 or the battery of their phones so that they find a utility in what has been worked on (p. 14). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	– A més, són bàsiques per a la modelització	– Además, son básicas para la modelización	– In addition, they are basic for mathematical

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>matemàtica de la vida real, el que pot apropar a l'aula situacions quotidianes dels alumnes on les matemàtiques estan involucrades (p. 4). – Activitat 17: Demografia i funcions (pp. 27–28). – Contextualització i valor interdisciplinari: Durant les pràctiques he hagut de fer molt ús d'aquest recurs que afavoria un major aprenentatge perquè el vinculava amb la part utilitarista i emocional de l'alumnat (p. 31).</p>	<p>matemática de la vida real, lo que puede acercar al aula situaciones cotidianas de los estudiantes en las que la matemática está involucrada (p. 4). – Actividad 17: Demografía y funciones (pp. 27–28). – Contextualización y valor interdisciplinario: Durante las prácticas tuve que hacer mucho uso de este recurso, el cual favorecía un mayor aprendizaje porque lo vinculaba con la parte utilitarista y emocional del alumnado (p. 31).</p>	<p>modelling of real life, which can bring the students' everyday situations in which mathematics is involved closer to the classroom (p. 4). – Activity 17: Demographics and functions (pp. 27–28). – Contextualisation and interdisciplinary value: During the internship experiences, I had to make a lot of use of this resource, which favoured greater learning because it was linked to the utilitarian and emotional part of the students (p. 31).</p>
TFM/MFP #041			
Epistémico Epistemic	<p>– A mode de resum, la unitat s'ha centrat molt en la contextualització, estudiant el perquè les aplicacions o xarxes socials son gratuïtes, veient la seva vessant de dades estadístiques per a màrqueting (p. 10). Resolució de problemes: La capacitat d'un alumnes de resoldre problemes implica resoldre diferents tipus de problemes matemàtics mitjançant diverses vies. [...]. Contextualització: Ús de problemes del món real (p. 12). [IE3]</p>	<p>– A modo de resumen, la unidad se ha centrado mucho en la contextualización, estudiando porqué las aplicaciones o redes sociales son gratuitas, viendo su vertiente de datos estadísticos para el marketing (p. 10). Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver problemas implica resolver distintos tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías. [...]. Contextualización: Uso de problemas del mundo real (p. 12). [IE3]</p>	<p>– As a summary, the unit has focused a lot on contextualisation, studying why applications or social networks are free, seeing their aspect of statistical data for marketing (p. 10). Problem solving: A student's ability to solve problems involves solving different types of mathematical problems through various ways. [...]. Contextualisation: Use of real-world problems (p. 12). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– El mètode escollit per ensenyar els continguts ha requerit una alta demanda cognitiva, fent connexions intramatemàtiques, generalitzacions i reflexions sobre l'ús de les matemàtiques en un context real (p. 13). [IC4]</p>	<p>– El método escogido para enseñar los contenidos ha requerido una alta demanda cognitiva, realizando conexiones intramatemáticas, generalizaciones, y reflexiones sobre el uso de la matemática en un contexto real (p. 13). [IC4]</p>	<p>– The method chosen to teach the contents has required a high cognitive demand, making intramathematical connections, generalisations, and reflections on the use of mathematics in a real context (p. 13). [CS4]</p>
Interaccional Interaccional	X	X	X
Mediacional Mediational	X	X	X

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective	– S’han seleccionat tasques que pensem que han estat d’interès pels alumnes, d’igual manera que els debats i contextualitzacions de les explicacions per poder observar la utilitat de les matemàtiques en la seva realitat (p. 16). [IA1]	– Se seleccionaron tareas que pensamos fueron de interés para los estudiantes, de igual modo que los debates y contextualizaciones de las explicaciones para poder observar la utilidad de la matemática en su realidad (p. 16). [IA1]	– We selected tasks that we thought were of interest to the students, in the same way as the debates and contextualisation of the explanations in order to observe the usefulness of mathematics in their reality (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological	– Els continguts matemàtiques van ser totalment contextualitzats i reals (p. 18). [IEc3]	– Los contenidos matemáticos fueron totalmente contextualizados y reales (p. 18). [IEc3]	– The mathematical contexts were fully contextualised and real (p. 18). [EcS3]
Otros Others	– Així doncs, he pogut treballar gran part de la unitat didàctica i he transformat la part de la sessió dedicada a explicar conceptes per un mètode més constructivista i contextualitzada amb exemples reals mitjançant visualitzacions d’informatius, programes o vídeos de YouTube dins dels fulls de treball [...]. Les classes s’han transformat íntegrament. He dissenyat un full de treball per a cada sessió amb una introducció al tema contextualitzat en casos reals (p. 9). – Contextualització i valor interdisciplinari: Si bé no he après els coneixements, si que he descobert una nova manera d’enfocar les matemàtiques, estudiades inversament a com ho van fer amb mi. Veure un situació i extreure les seves matemàtiques implícites perquè l’alumne es motivi i vegi la utilitat en la seva vida real penso que és vital per aconseguir millorar en els resultats i en la valoració que fan els alumnes de les matemàtiques (p. 26).	– Así pues, pude trabajar gran parte de la unidad didáctica y transformé la parte de la sesión dedicada a explicar conceptos por un método más constructivista y contextualizado con ejemplos reales, mediante visualizaciones de informativos, programas, o videos de YouTube dentro de las hojas de trabajo [...]. Las clases se transformaron en su totalidad. He diseñado una hoja de trabajo para cada sesión con una introducción al tema contextualizado en casos reales (p. 9). – Contextualización y valor interdisciplinario: Si bien no he aprendido los conocimientos, sí que he descubierto una nueva forma de enfocar la matemática, estudiadas inversamente a cómo lo hicieron conmigo. Ver una situación y extraer su matemática implícita para que el estudiante se motive y vea la utilidad en su vida real, pienso que es vital para conseguir mejorar en los resultados y en la valoración que ellos hacen de la matemática (p. 26).	– Thus, I was able to work a large part of the didactic unit and I transformed the part of the session dedicated to explaining concepts by a more constructivist method and contextualised with real examples, through visualisations of news, programs, or YouTube videos within the worksheets [...]. The lessons were completely transformed. I have designed a worksheet for each session with an introduction to the topic contextualised in real cases (p. 9). – Contextualisation and interdisciplinary value: Although I have not learned the knowledge, I have discovered a new way of approaching mathematics, studied inversely to how they did it with me. Seeing a situation and extracting its implicit mathematics so that the student is motivated and sees its usefulness in real life, I think is vital to achieve improvement in the results and in the assessment that they make of mathematics (p. 26).

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #048			
Epistémico Epistemic	<p>– Contextualització: Procés d'utilitzar exemples reals en la resolució de problemes i explicació de conceptes matemàtics. Tasca contextualització: Busca situacions de la vida quotidiana a on s'utilitzin desigualtats, escriu 5. Modelització: procés d'elaborar un model que representi o descrigui adequadament un fenomen, un objecte o un procés de la realitat. Tasca modelització: La tarifa de telefonia de l'empresa A és de 25€ fixes al mes més 10 cèntims per minut de conversa; l'empresa B és 20€ fixes al mes més 20 cèntims per minut de conversa; a partir de quants minuts comença a ser més rendible la tarifa de l'empresa A? (p. 15). [IE3]</p>	<p>– Contextualización: Proceso de utilizar ejemplos reales en la resolución de problemas y explicación de conceptos matemáticos. Tarea de contextualización: Busca situaciones de la vida cotidiana en las que se utilicen desigualdades, escribe cinco. Modelización: Proceso de elaborar un modelo que represente o describa adecuadamente un fenómeno, un objeto, o un proceso de la realidad. Tarea de modelización: La tarifa de telefonía de la empresa A es de 24 € fijos al mes más 10 céntimos por minuto de conversación; la empresa B es 20€ fijos al mes más 20 céntimos por minuto de conversación; ¿a partir de cuántos minutos comienza a ser más rentable la tarifa de la empresa A? (p. 15). [IE3]</p>	<p>– Contextualisation: Process of using real examples in problem solving and explaining mathematical concepts. Contextualisation task: Look for everyday life situations in which inequalities are used, write five. Modelling: Process of developing a model that adequately represents or described a phenomenon, an object, or a process of reality. Modelling task: Company A's telephone rate is a fixed €24 per month plus 10 cents per minute of conversation; company B's is €20 fixed per month plus 20 cents per minute of conversation; after how many minutes does the rate of company A starts to be more profitable? (p. 15). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interaccional	<p>– Un dels punts d'inflexió durant l'execució de la unitat didàctica, va tenir lloc en acabar la sessió 2. L'objectiu de la mateixa era doble: d'una banda trobar situacions de la vida quotidiana on intervinguessin inequacions i d'altra abordar la resolució de problemes (p. 22). [II1]</p>	<p>– Uno de los puntos de inflexión durante la ejecución de la unidad didáctica tuvo lugar al terminar la segunda sesión. Su objetivo era doble: por una parte, encontrar situaciones de la vida cotidiana donde intervinieran inequaciones y, por otra parte, abordar la resolución de problemas (p. 22). [II1]</p>	<p>– One of the turning points during the development of the didactic unit took place at the end of the second session. Its objective was twofold: on one hand, to find everyday life situations where inequalities intervened and, on the other hand, to tackle problem solving (p. 22). [IS1]</p>
Mediacional Mediational	<p>– En aquest sentit la unitat didàctica ha sigut força rica, s'han utilitzat diverses activitats i aplicacions, tant per contextualitzar com per treballar les diferents parts de la unitat didàctica (p. 23). [IM1]</p>	<p>– En este sentido, la unidad didáctica ha sido bastante rica, se utilizaron diversas actividades y aplicaciones, tanto para contextualizar como para trabajar sus diferentes partes (p. 23). [IM1]</p>	<p>– In this sense, the didactic unit has been quite rich, various activities and applications were used, both to contextualise and to work on its different parts (p. 23). [MS1]</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective	– Quan més treballaven els alumnes, era quan no s’adonaven que estaven fent matemàtiques. Es mostraven més motivats quan les activitats estaven millor contextualitzades (p. 25). [IA1]	– Cuando más trabajaban los estudiantes era cuando no se daban cuenta de que estaban haciendo matemática. Se mostraban más motivados cuando las actividades estaban mejor contextualizadas (p. 25). [IA1]	– When the students worked the most was when they did not realise that they were doing mathematics. They were more motivated when the activities were better contextualised (p. 25). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Les inequacions són un objecte matemàtic que modelitza situacions en les quals és necessari establir cotes i comparacions, amb la qual cosa desiguals. En aquesta unitat didàctica resoldrem problemes on intervinguin inequacions (p. 7).</p> <p>– Utilitat socio-laboral: Com a utilitat social, es presenta una activitat on es detallen les restriccions de la fase 2 del desconfinament i es demana que les expliquin mitjançant desigualtats. És una bona activitat perquè ajuda l’alumnat a connectar les inequacions amb un tema contextualitzat en la realitat social que vivim en aquest moment (pp. 31–32).</p> <p>– Estic reaprenent la matemàtica des d’una visió molt més rica on aquestes són contextualitzades en el món real, on es treballen en profunditat les connexions intramatemàtiques, però també a l’evolució històrica i l’art (p. 32).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: durant la meua etapa com alumne, mai se’ns havia ensenyat matemàtiques contextualitzades amb la realitat i amb altres disciplines. Gràcies al màster he descobert aquesta nova visió en</p>	<p>– Las inequaciones son un objeto matemático que modeliza situaciones en las que es necesario establecer cotas y comparaciones con lo que es desigual. En esta unidad didáctica resolveremos problemas en los que intervengan las inequaciones (p. 7).</p> <p>– Utilidad sociolaboral: Como utilidad social se presenta una actividad donde se detallan las restricciones de la fase 2 del desconfinamiento y se pide que las expliquen mediante desigualdades. Es una buena actividad porque ayuda a los estudiantes a conectar las inequaciones con un tema contextualizado en la realidad social que vivimos en este momento (pp. 31–32).</p> <p>– Estoy reaprendiendo la matemática desde una visión mucho más rica donde está contextualizada en el mundo real, donde se trabajan en profundidad las conexiones intramatemáticas, pero también la evolución histórica y el arte (p. 32).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Durante mi etapa como estudiante, nunca se nos había enseñado una matemática contextualizada con la realidad y con otras disciplinas. Gracias al máster, he descubierto esta</p>	<p>– Inequalities are a mathematical object that models situations in which it is necessary to establish levels and comparisons with what is inequal. In this didactic unit, we will solve problems involving inequalities (p. 7).</p> <p>– Social and labour utility: As a social utility, an activity is presented detailing the restrictions of phase 2 of post-lockdown and asking them to explain them through inequalities. It is a good activity because it helps students to connect the inequalities with a topic contextualised in the social reality that we live in at the moment (pp. 31–32).</p> <p>– I am relearning mathematics from a much richer vision where it is contextualised in the real world, where intra-mathematical connections are worked on in depth, but also historical evolution and art (p. 32).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: During my time as a student, we had never been taught a mathematics contextualised with reality and with other disciplines. Thanks to the master’s programme, I have discovered this new vision in learning. Also, I have tried to incorporate it into my practice, although I consider that the</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>l'aprenentatge. També he procurat incorporar-la en la meva pràctica, tot i que considero que les aportacions han sigut escasses (p. 34). – Annex 1: Les finestres perdudes (p. 38).</p>	<p>nueva visión en el aprendizaje. También, he procurado incorporarla en mi práctica, aunque considero que las aportaciones han sido escasas (p. 34). – Anexo 1: Las ventanas perdidas (p. 38).</p>	<p>contributions have been scarce (p. 34). – Annex 1: The lost windows (p. 38).</p>
TFM/MFP #051			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Les gràfiques que es presenten als alumnes són un tros de la gràfica i als alumnes s'han d'imaginar tota la gràfica per poder respondre, però quan les funcions són contextualitzades, malgrat que la fórmula pugui ser una funció real de variable real, el domini i el recorregut estan limitats pel context i això vol dir, per exemple, que no es pot anar més enllà del tros de gràfica del que ens parla el problema. Aquest anar i venir entre tros i tota la gràfica pot confondre als alumnes i dur-los a cometre errors quan calculen dominis de funcions a partir de la gràfica o quan calculen dominis de funcions contextualitzades en què degut al context, el domini és més restringit (p. 9). [IE2] – Resolució de problemes: resoldre diferents tipus de problemes mitjançant diverses vies. [...]. Contextualització: ús de problemes del món real (p. 9). Contextualització: Per exemple, la fitxa que treballa les funcions a partir de la gràfica de la demanda elèctrica a temps real que es pot trobar a la web de la Red Eléctrica Española. Crec que tot i que sí que hi ha problemes contextualitzats a la UD implementada, amb les modificacions respecte la</p>	<p>– Las gráficas que se presentan a los estudiantes son un trozo de la gráfica, y ellos deben imaginarse toda la gráfica para poder responder. Pero cuando las funciones son contextualizadas, aunque la fórmula pueda ser una función de variable real, el dominio y el recorrido están limitados por el contexto y esto significa, por ejemplo, que no se puede ir más allá del trozo de gráfica del que nos habla el problema. Este ir y venir entre el trozo y toda la gráfica puede confundir a los estudiantes y llevarlos a cometer errores cuando calculan dominios de funciones a partir de la gráfica o cuando calculan dominios de funciones contextualizadas en las que, debido al contexto, el dominio es más restringido (p. 9). [IE2] – Resolución de problemas: Resolver distintos tipos de problemas mediante diversas vías. [...]. Contextualización: Uso de problemas del mundo real (p. 9). Contextualización: Por ejemplo, la ficha que trabaja las funciones a partir de la gráfica de la demanda eléctrica en tiempo real que puede encontrarse en la web de la Red Eléctrica Española. Creo que, aunque sí existen problemas</p>	<p>– The graphs presented to the students are a piece of the graph, and they must imagine the entire graph to answer. But when functions are contextualised, even though the formula may be a function of a real variable, the domain and range are limited by the context and this means, for example, that you cannot go beyond the piece of graph the problem is talking about. This back and forth between the piece of and the whole graph can confuse students and lead them to make mistaken when calculating domains of functions from the graph or calculating domains of contextualised functions where, due to the context, the domain is more restricted (p. 9). [ES2] – Problem solving: Solve different types of problems through different ways. [...]. Contextualisation: Use of real-world problems (p. 9). Contextualisation: For example, the worksheet that addresses functions from graph of the electricity demand in real time that can be found on the website of the Spanish Electrical Network. I think that, although there are contextualised problems in the DU implemented with modifications compared to the original, many</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>original s’han perdut moltes activitats contextualitzades i d’interès i s’han substituït per activitats sense context i repetitives. A la proposta de millora proposo la substitució d’aquestes activitats sense context per activitats contextualitzades un altre cop (p. 10). [IE3]</p> <p>– Llegint bibliografia relacionada amb les configuracions epistèmiques en el cas de les funcions he trobat la següent proposta d’estructura per a una unitat adient: a) problemes contextualitzats introductoris [...], b) desenvolupament de la UD amb problemes contextualitzats d’aplicació intercalats [...], i c) problemes contextualitzats de consolidació al final del tema (p. 11). [IE4]</p>	<p>contextualizados en la UD implementada con las modificaciones respecto a la original, se han perdido muchas actividades contextualizadas y de interés, y se han sustituido por actividades sin contexto y repetitivas. En la propuesta de mejora propongo la sustitución de estas actividades sin contexto por actividades contextualizadas de nuevo (p. 10). [IE3]</p> <p>– Leyendo bibliografía relacionada con las configuraciones epistémicas, en el caso de las funciones, encontré la siguiente propuesta de estructura para una unidad adecuada: (a) problemas contextualizados introductorios [...]; (b) desarrollo de la UD con problemas contextualizados de aplicación intercalados [...]; y (c) problemas contextualizados de consolidación al final del tema (p. 11). [IE4]</p>	<p>contextualised and interesting activities have been lost, and have been replaced by activities without context and repetitive. In the improvement proposal, I propose the replacement of these activities without context by contextualised activities again (p. 10). [ES3]</p> <p>– By reading bibliography related to epistemic configurations, in the case of functions, I found the following structure proposal for an adequate unit: (a) introductory contextualised problems [...]; (b) development of the DU with interspersed contextualised application problems [...]; and (c) contextualised consolidation problems at the end of the topic (p. 11). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Les activitats dissenyades originalment estaven contextualitzades majoritàriament en temes que podien ser d’interès dels alumnes. Amb les modificacions fetes pel confinament, passa a haver-hi només una activitat contextualitzada i per tant la UD té mancances en aquest sentit (p. 12). [IA1]</p>	<p>– Las actividades diseñadas originalmente estaban contextualizadas mayoritariamente en temas que podían ser de interés de los estudiantes. Con las modificaciones hechas por el confinamiento, pasa a haber sólo una actividad contextualizada y, por tanto, la UD tiene carencias en este sentido (p. 12). [IA1]</p>	<p>– The originally designed activities were mainly contextualised in topics that could be of interest to the students. With modifications made because of the lockdown, there is now only one contextualised activity and, therefore, the DU has deficiencies in this regard (p. 12). [AS1]</p>
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– En la UD implementada la presència de dues fitxes</p>	<p>– En la UD implementada, la presencia de dos fichas</p>	<p>– In the implemented DU, the presence of two</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>amb exercicis del llibre trenca amb la dinàmica que pretenia tenir la UD original en què es volia donar sentit (contextualitzat) i utilitat a les matemàtiques ensenyades. S'hauria de mirar de recuperar això (p. 16).</p> <p>– Tot i que hi ha relació amb continguts intramatemàtics caldria establir relacions amb continguts d'altre disciplines. Això està relacionat amb mancances que he comentat anteriorment relacionades amb contextualitzar activitats i mostrar la utilitat de les matemàtiques ensenyades (per exemple, la seva utilitat en el món sociolaboral) (p. 17).</p> <p>– Idoneïtat afectiva: cal recuperar la contextualització i el donar utilitat a les matemàtiques de les activitats (p. 18)</p> <p>– Substitució de les fitxes de la UD implementada per fitxes amb continguts més competencials, contextualitzats i rics en processos (millora de la idoneïtat afectiva i ecològica) (p. 24)</p> <p>– Crec que aquest treball intenta plasmar tot això per mitjà d'una proposta de millora que inclou activitats TIC, amb materials manipulatius, activitats contextualitzades i pensades per satisfer els interessos dels estudiants i treball en grups cooperatius (p. 30).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: aquests és un dels punts clau que he hagut de millorar de la meua UD i per tant la realització d'aquest treball m'ha fet utilitzar les eines</p>	<p>con ejercicios del libro rompe con la dinámica que pretendía tener la UD original, en la que se quería dar sentido (contextualizar) y utilidad a la matemática enseñada. Habría que intentar recuperar esto (p. 16).</p> <p>– Aunque existe relación con contenidos intramatemáticos, habría que establecer relaciones con contenidos de otras disciplinas. Esto está relacionado con las carencias que he comentado anteriormente, relacionadas con contextualizar actividades y mostrar la utilidad de la matemática enseñada (por ejemplo, su utilidad en el mundo sociolaboral) (p. 17).</p> <p>– Idoneidad afectiva: Es necesario recuperar la contextualización y dar utilidad a la matemática de las actividades (p. 18).</p> <p>– Sustitución de las fichas de la UD implementada por fichas con contenidos más competenciales, contextualizados, y ricos en procesos (mejoras a la idoneidad afectiva y ecológica) (p. 24).</p> <p>– Creo que este trabajo intenta plasmar todo esto por medio de una propuesta de mejora que incluye actividades TIC, con materiales manipulativos, actividades contextualizadas y pensadas para satisfacer los intereses de los estudiantes y el trabajo en grupos cooperativos (p. 30).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Éste es uno de los puntos clave que he tenido que mejorar de mi UD y, por tanto, la realización de este</p>	<p>worksheets with exercises from the textbook breaks with the dynamics that the original DU intended to have, in which I wanted to provide meaning (contextualise) and usefulness to the mathematics taught. It would be necessary to try to recover this (p. 16).</p> <p>– Although there is a relationship with intramathematical contents, relationships should be established with contents from other disciplines. This is related to the shortcomings that I have mentioned previously, related to contextualising activities and showing the usefulness of the mathematics taught (for example, its usefulness in the social and labour world) (p. 17).</p> <p>– Affective suitability: It is necessary to recover the contextualisation and provide utility to the mathematics of the activities (p. 18).</p> <p>– Substitution of the worksheets of the DU implemented by worksheets with more competency-based, contextualised, and rich in processes contents (improvements to affective and ecological suitability) (p. 24).</p> <p>– I think this project tries to capture all this through a proposal for improvement that includes ICT activities, with manipulative materials, contextualised activities designed to satisfy the interests of the students and work in cooperative groups (p. 30).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: This is one of the key</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	apreses en les assignatures del màster en aquest sentit i adornar-me de la importància de la contextualització de les activitats i del seu valor interdisciplinari (p. 31).	trabajo me ha hecho utilizar las herramientas aprendidas en las asignaturas del máster en este sentido, y empaparme de la importancia de la contextualización de las actividades y de su valor interdisciplinario (p. 31).	points that I have had to improve in my DU and, therefore, writing this project has made me use the tools learned in the master's programme in this sense, and soak up the importance of contextualising the activities and their interdisciplinary value (p. 31).
TFM/MFP #052			
Epistémico Epistemic	– Sortint del que és la prova de prospecció, s'ha plantejat també un problema transversal per a tota la UD consistent en un estudi de rendibilitat d'una petita empresa (franquícia comercialitzadora) i la seva modelització amb programari gràfic. [...]. Amb els objectius d'aprenentatge de l'activitat es volia encetar els processos següents: interpretar les propietats de les funcions, tot comprovant els resultats amb mitjans tecnològics en problemes contextualitzats i extraure i identificar informacions derivades de l'estudi i anàlisi de funcions en contextos reals com ara l'estudi iniciàtic d'engegar una petita empresa. [...]. Així treballarem amb la dimensió Resolució de problemes especialment la Competència 1 i la 2, traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats. La metodologia emprada ha estat la metodologia ABP d'aprenentatge basat en problemes. (p. 6). [IE3]	– Saliendo de lo que es la prueba de prospección, también se planteó un problema transversal para toda la UD, el cual consiste en un estudio de rentabilidad de una pequeña empresa (franquicia comercializadora) y su modelización con software gráfico. [...]. Con los objetivos de aprendizaje de la actividad se querían empezar los siguientes procesos: interpretar las propiedades de las funciones, comprobando los resultados con medios tecnológicos en problemas contextualizados, y extraer e identificar informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones en contextos reales, como el estudio inicial de poner en marcha una pequeña empresa. [...]. Así trabajamos con la dimensión Resolución de problemas, especialmente, las Competencias 1 y 2, traducir un problema al lenguaje matemático o a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas, y modelos adecuados. La metodología utilizada ha sido el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) (p. 6). [IE3]	– Leaving what the prospecting test is, a transversal problem was also posed for the entire DU, which consists of a profitability study of a small company (marketing franchise) and its modelling with graphic software. [...]. With the learning objectives of the activity, we wanted to start the following processes: interpret the properties of functions, verifying the results with technological means in contextualised problems, and extract and identify information derived from the study and analysis of functions in real contexts, such as the initial study of starting a small business. [...]. This is how we work with the Problem-solving dimension, especially, Competencies 1 and 2, translating a problem into mathematical language or a mathematical representation using variables, symbols, diagrams, and appropriate models. The methodology used has been Problem-Based Learning (PBL) (p. 6). [ES3]

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional	<p>– Després del plantejament de problemes o exercicis hem donat cinc o deu minuts de reflexió abans de la seva resolució a la pissarra. [...]. En les classes de particularització hem intentat encetar petits debats per veure com entomar la resolució d'un problema amb la sistemàtica ABP. Era una reflexió de cinc minuts on només interveníem si es desenfocava molt el camí de resolució. [...]. El més potent exercici de socialització i treball col·lectiu el vam planificar per a l'esmentat problema de consideració de rendibilitat econòmica en què finalment només vam poder assolir parcialment la primera part (pp. 8–9). [II2]</p>	<p>– Después del planteamiento de problemas o ejercicios, dimos cinco o diez minutos de reflexión antes de su resolución en la pizarra. [...]. En las clases de particularización intentamos empezar pequeños debates para ver cómo afrontar la resolución de un problema con la sistemática ABP. Era una reflexión de cinco minutos en la que sólo interveníamos si se desenfocaba mucho el camino de resolución. [...]. El ejercicio más potente de socialización y trabajo colectivo lo planificamos para el problema de consideración de rentabilidad económica en el que, finalmente, sólo pudimos alcanzar, parcialmente, la primera parte (pp. 8–9). [II2]</p>	<p>– After posing the problems or exercises, we gave five or ten minutes of reflection before solving them on the blackboard. [...]. In the particularisation lessons, we tried to start small debates to see how to solve a problem with the PBL system. It was a five-minute reflection in which we only intervened if the path to resolution became very blurred. [...]. The most powerful exercise of socialisation and collective work, we planned it for the problem of consideration of economic profitability in which, finally, we could only partially develop the first part (pp. 8–9). [IS2]</p>
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– El principal argument va ser el problema de la rendibilitat d'una franquícia de telefonia mòbil amb el qual preteníem fer-los veure amb una objectivació matemàtica, i amb una graficació de les funcions, de la difícil realitat de la vida laboral i com a incentiu per continuar els estudis (p. 10). [IA1]</p>	<p>– El principal argumento fue el problema de la rentabilidad de una franquicia de telefonía móvil con el que pretendíamos hacerles ver, con una objetivación matemática y una graficación de las funciones, la difícil realidad de la vida laboral y como incentivo para continuar los estudios (p. 10). [IA1]</p>	<p>– The main argument was the problem of the profitability of a mobile phone franchise with which we tried to make them see, with a mathematical objectification and a graphing of functions, the difficult reality of working life and as an incentive to continue studying (p. 10). [AS1]</p>
Ecològic Ecological	<p>– L'única incursió interdisciplinària ha estat amb l'estudi de rendibilitat per connectar en certa forma amb l'economia, fent càlculs per esbrinar rendibilitat amb la identificació de costos i ingressos i comparatives amb el salari mínim</p>	<p>– La única incursión interdisciplinaria ha sido con el estudio de rentabilidad para conectar, en cierta forma, con la economía, haciendo cálculos para averiguar la rentabilidad mediante la identificación de costes e ingresos y comparativas</p>	<p>– The only interdisciplinary incursion has been the study of profitability to connect, in a certain way, with economy, making calculations to find out the profitability by identifying costs and income and comparisons with the</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>interprofessional explicat el primer dia com a objectiu d'aquest problema (p. 11). [IEc2]</p> <p>– Ens remetem al referenciat problema de càlcul de rendibilitat precisament per incidir en aquesta qüestió. Hem reiterat tant com ens ho ha permès el context, la transversalitat de la utilitat de les funcions en la nostra vida, especialment laboral (p. 11). [IEc3]</p>	<p>con el salario mínimo interprofesional explicado el primer día como objetivo de este problema (p. 11). [IEc2]</p> <p>– Nos remitimos al problema de cálculo de rentabilidad precisamente para incidir en esta cuestión. Hemos reiterado, tanto como lo ha permitido el contexto, la transversalidad de la utilidad de las funciones en nuestra vida, especialmente, laboral (p. 11). [IEc3]</p>	<p>minimum interprofessional salary explained on the first day as the objective of this problem (p. 11). [EcS2]</p> <p>– We refer to the problem of calculating profitability precisely to influence this issue. We have reiterated, as far as the context has allowed, the transversality of the usefulness of functions in our, especially, work life (p. 11). [EcS3]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– A manera d'immersió en el tema, es planteja el projecte d'estudi de rendibilitat d'una franquícia, on el concepte de funció es presenta d'una manera contextualitzada amb l'objectiu de facilitar a l'estudiant la seva progressiva construcció temporal. A continuació es realitza un desenvolupament de problemes, i finalment s'aborda un problema contextualitzat de consolidació, tot introduint elements de modelització com a un dels significats parcials genuïns de les funcions per potenciar aspectes de representativitat. L'exercici de modelització sens dubte desferma processos cognitius rellevants com ara la generalització, l'habilitació de connexions intramatemàtiques o la formulació iniciàtica de conjetures tot encetant una relativa alta demanda cognitiva (p. 14).</p> <p>– Creiem que és una proposta plausible per tal de, mitjançant la modelització amb les versàtils funcions a trossos, incidir en el</p>	<p>– A modo de inmersión en el tema, se plantea el proyecto de estudio de rentabilidad de una franquicia, donde el concepto de función se presenta de forma contextualizada, con el objetivo de facilitar al estudiante su progresiva construcción temporal. A continuación, se realiza un desarrollo de problemas y, finalmente, se aborda un problema contextualizado de consolidación, introduciendo elementos de modelización como uno de los significados parciales genuinos de las funciones para potenciar aspectos de su representatividad. El ejercicio de modelización, sin duda, desata procesos cognitivos relevantes, como la generalización, la habilitación de conexiones intra-matemáticas, o la formulación iniciática de conjeturas, iniciando una relativa alta demanda cognitiva (p. 14).</p> <p>– Creemos que es una propuesta plausible para, mediante la modelización con las versátiles funciones a trozos, incidir en el componente epistémico de</p>	<p>– As an immersion in the topic, the study project of profitability of a franchise is proposed, where the concept of function is presented in a contextualised way, with the aim of facilitating the student's progressive temporary construction. Next, a problem development is carried out and, finally, a contextualised consolidation problem is addressed, introducing modelling elements as one of the genuine partial meanings of the functions to enhance aspects of their representativeness. The modelling exercise undoubtedly unleashes relevant cognitive processes, such as generalisation, the enabling of intra-mathematical connections, or the initiatory formulation of conjectures, initiating a relatively high cognitive demand (p. 14).</p> <p>– We believe that it is a plausible proposal, through modelling with versatile piecewise functions, to influence the epistemic component of representativeness, the addition and subtraction of</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>component epistèmic de representativitat, la suma i resta de funcions (ingressos, costos i fiscalitat aplicada als diferents tram de comercialització del nombre de contractes consolidats) i la graficació de dites funcions (p. 16). – Projecte dels canvis de fase de l'aigua: volem amb aquest problema contextualitzat [...], entroncar amb les potes (S) i (T) del paradigma STEM quant a la modelització d'aquest fenomen físic amb una funció a trossos. Aquesta modelització activa l'alta demanda cognitiva en haver d'activar processos d'interrelació amb les ciències experimentals (p. 16). – Problema del límit de velocitat d'un automòbil: ja en la fase de consolidació de la UD plantejem un problema que serveix de compendi si no de tota, si de gran part de la conceptualització (límits, domini, continuïtat, recorregut, representació, creixement i decreixement) del tema Funcions matemàtiques. Ens acostem a la realitat productiva del departament d'enginyeria (E) d'una firma automobilística que dissenya un motor de velocitat del qual ve modelada per una funció que es proposa estudiar (p. 17). – El problema de la modelització dels canvis de fase de l'aigua en estar relacionat amb la presència al laboratori, només assoliria un 40% de realització real ja que s'haurien de fer simulacions (p. 20).</p>	<p>representatividad, la suma y resta de funciones (ingresos, costes, y fiscalidad aplicada a los diferentes tramos de comercialización del número de contratos consolidados), y la graficación de dichas funciones (p. 16). – Proyecto de los cambios de fase del agua: Con este problema contextualizado [...] queremos entroncar con las siglas (S) y (T) del paradigma STEM en cuanto a la modelización de este fenómeno físico con una función a trozos. Esta modelización activa la alta demanda cognitiva al tener que activar procesos de interrelación con las ciencias experimentales (p. 16). – Problema del límite de velocidad de un automóvil: Ya en la fase de consolidación de la UD, planteamos un problema que sirve de compendio, sino de toda, de gran parte de la conceptualización (límites, dominio, continuidad, recorrido, representación, crecimiento, y decrecimiento) del tema Funciones matemáticas. Nos acercamos a la realidad productiva del departamento de ingeniería (E) de una firma automobilística que diseña un motor de velocidad que viene modelizada por una función que se propone estudiar (p. 17). – El problema de la modelización de los cambios de fase del agua, al estar relacionado con la presencia en el laboratorio, sólo alcanzaría un 40% de realización real, ya que debían realizarse simulaciones (p. 20).</p>	<p>functions (income, costs, and taxation applied to the different commercialisation sections of the number of consolidated contracts), and the graphing of such functions (p. 16). – Water phase changes project: With this contextualised problem [...], we want to connect with the acronyms (S) and (T) of the STEM paradigm in terms of modelling this physical phenomenon with a piecewise function. This modelling activates the high cognitive demand by having to activate interrelation processes with experimental sciences (p. 16). – Problem of the speed limit of a car: Already in the consolidation phase of the DU, we posed a problem that serves as a compendium, if not all, of a large part of the conceptualisation (limits, domain, continuity, range, growth, and decreasing) from the topic Mathematical Functions. We approach the productive reality of the engineering department E of an automobile firm that designs a speed engine that is modelled by a function that is proposed to be studied (p. 17). – The problem of modelling the phase changes of water, as it is related to its presence in the laboratory, would only reach 40% of actual realisation, since simulations had to be performed (p. 20). – Contextualisation and interdisciplinary value: For those of us who come from engineering or scientific disciplines, we used to say</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: per a qui com nosaltres provenim de disciplines enginyerils o científiques, dèiem que la matemàtica era un instrument de modelització i de càlcul. Potser aquesta competència és la que d'entrada tenim més fàcil assolir i progressar (p. 22).</p> <p>– Les funcions com a eina matemàtica modeladora de fenòmens físics i socials és així objecte d'especial atenció curricular pel legislador (p. 26).</p> <p>– Aquí pren especial relleu els conceptes d'aproximació, és a dir crear l'expressió formal modeladora d'un fenomen a partir de les dades empíriques i els conceptes d'error, com a diferència entre allò real i allò previst per la funció (p. 27).</p> <p>– Saber per a què serveixen les funcions: predir valors, modelar situacions, agrupar dades, interpretar resultats (p. 28).</p> <p>– Plantejar problemes, construir la seva formulació redactada, generar el model matemàtic i intentar resoldre'l (p. 29).</p> <p>– Es faran problemes d'aplicació fent aquí èmfasi en la visió competencial i a la que considero el tema de funcions es presta de forma nítida. Per poder realitzar-lo cal un avançament de la matèria per poder posar en joc el màxim d'elements que permetin la modelització i resolució dels problemes plantejats. Aquesta pràctica de modelització com a ús fonamental i principal de les matemàtiques cobra, com dèiem, especial rellevància</p>	<p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Para quienes, como nosotros, provenimos de disciplinas ingenieriles o científicas, decíamos que la matemática era un instrumento de modelización y de cálculo. Quizás, esta competencia sea la que, de entrada, tenemos más fácil de alcanzar y progresar (p. 22).</p> <p>– Las funciones como herramienta modelizadora de fenómenos físicos y sociales es así objeto de especial atención curricular por el legislador (p. 26).</p> <p>– Aquí toman especial relevancia los conceptos de aproximación, es decir, crear la expresión formal modelizadora de un fenómeno a partir de los datos empíricos y los conceptos de error, como diferencia entre lo real y lo previsto por la función (p. 27).</p> <p>– Saber para qué sirven las funciones: Predecir valores, modelizar situaciones, agrupar datos, interpretar resultados (p. 28).</p> <p>– Plantear problemas, construir su formulación redactada, generar el modelo matemático, e intentar resolverlo (p. 29).</p> <p>– Se harán problemas de aplicación, haciendo énfasis en la visión competencial y en la que considero el tema de funciones se presta de forma nítida. Para poder realizarlo es necesario un adelanto de la materia para poder poner en juego el máximo de elementos que permitan la modelización y resolución de los problemas planteados. Esta</p>	<p>that mathematics was an instrument for modelling and calculation. Perhaps, this competency is one that, from the outset, we have the easiest to reach and progress (p. 22).</p> <p>– Functions, as a modelling tool for physical and social phenomena, is thus the object of special curricular attention by the legislator (p. 26).</p> <p>– Here the concepts of approximation take on special relevance, that is, creating the formal modelling expression of a phenomenon from empirical data and the concepts of error, as a difference between what is real and what is predicted by the function (p. 27).</p> <p>– Know what the functions are for: Predict values, model situations, group data, interpret results (p. 28).</p> <p>– Set up problems, build their written formulation, generate the mathematical model, and try to solve it (p. 29).</p> <p>– Application problems will be made, emphasising the competency vision and in what I consider the topic of functions is clearly suitable. To be able to do it, an advanced of the topic is necessary to be able to put into play the maximum of elements that allow modelling and problem solving. This practice of modelling as a fundamental and main use of mathematics takes on, as we said, special relevance with functions. For this purpose, we will try to outline a problem of economic analysis of profitability for the creation of a small company, using as an</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>amb les funcions. A l'efecte intentarem perfilar un problema de plantejament d'anàlisi econòmica de rendibilitat per a la creació d'una petita empresa. Posant com a exemple posar en marxa una franquícia, plantejar la situació, discernir els elements implicats, aproximar-nos al model que plasma amb versemblança dita realitat i resoldre-la (p. 30).</p> <p>– Sessió 10. En aquesta sessió el docent començarà a introduir el plantejament de problemes de la vida quotidiana fent ús de les funcions. Es farà el plantejament d'un problema que implicarà modelar-lo amb una funció a trossos que permeti introduir alguns dels conceptes explicats. Es resoldrà i es proposarà plantejar exemples senzills de problemes que puguin ser modelats mitjançant una formulació de funcions (p. 32).</p> <p>– De les quatre competències concernides en aquesta dimensió intentarem reflectir en la unitat didàctica especialment la primera, la competència 1 amb la identificació, plantejament i resolució de problemes aplicats. En particular tractarem un problema de rendibilitat econòmica de posar un establiment comercial en mode de franquícia on tractarem conceptes que sortiran amb la modelització emprada d'una funció a trossos (p. 36).</p> <p>– Proposta: treballem les connexions. Aquesta pràctica serveix per a un treball inter-disciplinar amb el qual modelitzen un</p>	<p>práctica de la modelización como uso fundamental y principal de la matemática cobra, como decíamos, especial relevancia con las funciones. Para tal efecto intentaremos perfilar un problema de planteamiento de análisis económico de rentabilidad para la creación de una pequeña empresa, poniendo como ejemplo poner en marcha una franquicia, plantear la situación, discernir los elementos implicados, aproximarnos al modelo que plasma con verosimilitud dicha realidad, y resolverla (p. 30).</p> <p>– Sesión 10. En esta sesión, el docente empezará a introducir el planteamiento de problemas de la vida cotidiana haciendo uso de las funciones. Se hará el planteamiento de un problema que implicará modelizarlo con una función a trozos que permita introducir algunos de los conceptos explicados. Se resolverá y se propondrá plantear ejemplos sencillos de problemas que puedan ser modelizados mediante una formulación de funciones (p. 32).</p> <p>– De las cuatro competencias concernidas en esta dimensión, intentaremos reflejar en la unidad didáctica, especialmente, la Competencia 1 con la identificación, planteamiento, y resolución de problemas aplicados. En particular, trataremos un problema de rentabilidad económica de poner un establecimiento comercial en modo de</p>	<p>example starting a franchise, presenting the situation, discerning the elements involved, approaching the model that plausibly reflects such reality, and solve it (p. 30).</p> <p>– Session 10. In this session, the teacher will begin to introduce the approach to everyday life problems using functions. A problem will be proposed that will involve modelling it with a piecewise function that allows introducing some of the concepts explained. It will be solved and simple examples of problems that can be modelled by means of a formulation of functions will be posed (p. 32).</p> <p>– Of the four competencies concerned in this dimension, we will try to reflect in the didactic unit, especially, Competency 1 with the identification, approach, and solving of applied problems. In particular, we will deal with a problem of economic profitability of putting a commercial establishment in franchise mode, where we will deal with concepts that will come out with the modelling of a piecewise function used (p. 36).</p> <p>– Proposal: Let us work on connections. This practice is useful for interdisciplinary work with which they model a physical phenomenon, such as phase changes and temperature increase of a compound taken to the laboratory and represented in a Cartesian graph. Make a STEM proposal with the implication of Technology – Physics – Mathematics – Computer Science. We</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>fenomen físic com ara els canvis de fase i augment de temperatura d'un compost portat al laboratori i representat en un gràfic cartesià. Fer una proposta STEM amb la implicació de la Tecnologia – Física – Matemàtiques – Informàtica. Treballem aquesta modelització física definit com ara la capacitat calorífica específica de l'aigua a pressió constant. També identifiquem com una funció a trossos modela el comportament físic dels canvis de fase (fusió i ebullició) amb una funció constant (l'aportació d'energia no puja la temperatura sinó que l'energia aportada canvia l'estructura molecular) (p. 42).</p>	<p>franquicia, donde trataremos conceptos que saldrán con la modelización empleada de una función a trozos (p. 36). – Propuesta: Trabajemos las conexiones. Esta práctica sirve para un trabajo interdisciplinario con el que modelizan un fenómeno físico, como los cambios de fase y aumento de temperatura de un compuesto llevado al laboratorio y representado en un gráfico cartesiano. Hacer una propuesta STEM con la implicación de la Tecnología – Física – Matemática – Informática. Trabajamos esta modelización física definida como la capacidad calorífica específica del agua a presión constante. También, identificamos cómo una función a trozos modeliza el comportamiento físico de los cambios de fase (fusión y ebullición) con una función constante (el aporte de energía no sube la temperatura, sino que la energía aportada cambia la estructura molecular) (p. 42).</p>	<p>work on this physical modelling defined as the specific heat capacity of water at constant pressure. We also identify how a piecewise function models the physical behaviour of phase changes (melting and boiling) with a constant function (the input of energy does not raise the temperature, but the input of energy changes the molecular structure) (p. 42).</p>
TFM/MFP #054			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: S'ha promogut la resolució de problemes, que ha estat la dinàmica de la major part de les sessions, i durant tota la unitat s'han resolt diversitat de problemes, buscant relacionar-los amb altres parts del currículum de matemàtiques com la proporcionalitat, sobretot. S'hauria pogut relacionar amb geometria també, cosa que no s'ha fet. En positiu, s'ha intentat potenciar que l'alumnat busqués totes les</p>	<p>– Resolución de problemas: Se ha promovido la resolución de problemas, que ha sido la dinámica de la mayor parte de las sesiones y, durante toda la unidad, se resolvieron muchos problemas, buscando relacionarlos con otras partes del currículo de matemática, como la proporcionalidad. También, se habría podido relacionar con geometría, algo que no se hizo. En positivo, se ha intentado</p>	<p>– Problem solving: This process has been promoted, which has been the dynamics of most of the sessions and, throughout the unit, many problems were solved, seeking to relate them to other parts of the mathematics curriculum, such as proportionality. Also, it could have been related to geometry, something that was not done. On the positive side, an attempt has been made to encourage the students</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>resolucions possibles d'un problema i les expliqués al grup classe. [...]. Contextualització: En tractar-se d'una unitat molt palpable en la vida real, la majoria d'activitats estaven bastant contextualitzades i tenien una aplicació directa i relativament útil en el l'àmbit quotidià: el preu de la factura del mòbil o d'omplir el dipòsit del cotxe a la benzinera, el sou d'un venedor segons la comissió que s'emporta. Tot i això, els problemes plantejats poques vegades tenien una relació directa amb la quotidianitat de l'alumnat, de manera que no eres especialment motivadors (p. 10). [IE3] – Per últim, un altre aspecte que he intentat tenir molt en compte són els problemes contextualitzats [...]. En general, aquests problemes han servit per donar sentit al que es feia i evitar que es plantejessin exercicis artificials on apareixen els conceptes (p. 11). [IE4]</p>	<p>potenciar que los estudiantes buscaran todas las posibles resoluciones de un problema y las explicasen al grupo curso. [...]. Contextualización: Al tratarse de una unidad muy palpable en la vida real, la mayoría de las actividades estaban bastante contextualizadas y tenían una aplicación directa y relativamente útil en el ámbito cotidiano: el precio de la factura del teléfono móvil o de llenar el depósito de combustible del vehículo en la gasolinera, el sueldo de un vendedor según la comisión que se lleva. Sin embargo, los problemas planteados, rara vez, tenían una relación directa con la cotidianidad de los estudiantes, por lo que no eran especialmente motivadores (p. 10). [IE3] – Por último, otro aspecto que he intentado tener en cuenta son los problemas contextualizados [...]. En general, estos problemas sirvieron para dar sentido a lo que se había y evitar que se plantearan ejercicios artificiales en los que aparecen los conceptos (p. 11). [IE4]</p>	<p>to look for all the possible solutions to a problem and explain them to the class group. [...]. Contextualisation: Being a very tangible unit in real life, most of the activities were quite contextualised and had a direct and relatively useful application in everyday life: the price of the mobile phone bill or that of filling the fuel tank of a vehicle at the gas station, the salary of a seller according to the commission that he takes. However, the problems posed rarely had a direct relationship with the students' daily life, so they were not particularly motivating (p. 10). [ES3] – Finally, another aspect that I have tried to take into account is the contextualised problems [...]. In general, these problems served to make sense of what was there and avoid artificial exercises in which concepts appear (p. 11). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional	<p>– Com hem indicat prèviament, el fet que es busquessin totes les formes possibles de resoldre els problemes i es comentessin en veu alta feia que estiguéssim en contacte permanent, ja que quan no hi havia interacció entre tot el grup, que era a l'hora de comentar la resolució dels problemes, n'hi havia a nivell de dubtes que em preguntaven a mi o de preguntes que m'acostava</p>	<p>– Como hemos indicado previamente, el hecho de que se buscaran todas las formas posibles de resolver los problemas y se comentaran en voz alta, hacía que estuviéramos en contacto permanente, ya que cuando no había interacción entre todo el grupo que estaba mientras se comentaba la resolución de los problemas, había un nivel de dudas que me preguntaban a mí, o de preguntas que me acercaba</p>	<p>– As we have previously indicated, the fact that all possible ways to solve the problems were sought and they were discussed aloud, meant that we were in permanent contact, since when there was no interaction between the entire group that was there while the problem solving was being discussed, there was a level of doubts that they asked me, or of questions that I approached to ask the</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	a fer als grups mentre treballaven per assegurar-me que tot funcionava correctament i per avaluar-ne el progrés (p. 15). [III]	a hacer a los grupos mientras trabajaban para asegurarme de que todo funcionaba correctamente y evaluar su progreso (p. 15). [III]	groups while they were working to make sure that everything was working properly and assess their progress (p. 15). [IS1]
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– A nivell del transcurs de la UD, com que les sessions van ser sobretot pràctiques, de treball en grup i de resolució de problemes, la dinàmica els va resultar còmoda i atractiva, segons explicaven, i va fer que treballessin de bon grat. De totes maneres, l'intent de connectar les funcions amb la vida real va quedar reduït a una sèrie de situacions més o menys forçades, i les alumnes no van trobar una connexió molt contextualitzada de les funcions amb la realitat perquè la majoria d'exemples que fèiem servir no eres molt properes a la seva quotidianitat i per tant se'n podria millorar la significativitat i projecció (p. 14). [IA1]</p> <p>– En general, l'actitud de diàleg i discussió s'ha fomentat al llarg de la unitat didàctica, ja que s'han dedicat bona part de les sessions a resoldre problemes i comentar-los entre les alumnes, tant en grups petits com discutint-los i explicant-los a la resta del grup classe (p. 14). [IA2]</p> <p>– Considero que en general els alumnes no han vist una gran diferència entre aquestes sessions i les que estaven acostumades a fer, més enllà de l'actitud de resolució de problemes constant. És per això que penso que sí que s'ha aconseguit aquella</p>	<p>– A medida que transcurría la UD, dado que las sesiones fueron sobre todo prácticas, de trabajo en grupo, y de resolución de problemas, la dinámica les resultó cómoda y atractiva, según explicaban, e hizo que trabajaran con agrado. De todas formas, el intento de conectar las funciones con la vida real quedó reducido a una serie de situaciones más o menos forzadas, y los estudiantes no encontraron una conexión muy contextualizada de las funciones con la realidad porque la mayoría de los ejemplos que usábamos no eran muy cercanos a su cotidianidad y, por lo tanto, se podría mejorar su significatividad y proyección (p. 14). [IA1]</p> <p>– En general, la actitud de diálogo y discusión se fomentó a lo largo de la unidad didáctica, puesto que se dedicó buena parte de las sesiones a resolver problemas y comentarlos entre los estudiantes, tanto en grupos pequeños como discutiéndolos y explicándolos al resto del grupo curso (p. 14). [IA2]</p> <p>– Considero que, en general, los estudiantes no vieron una gran diferencia entre estas sesiones y las que estaban acostumbrados a realizar, más allá de la actitud de resolución de problemas constante. Por eso pienso que sí se consiguió aquella sensación de placer de</p>	<p>– As the DU progressed, since the sessions were mainly practical, group work, and problem solving, the dynamics were comfortable and attractive, as they explained, and made them work with pleasure. In any case, the attempt to connect functions with real life was reduced to a series of more or less forced situations, and the students did not find a highly contextualised connection of functions with reality, because most of the examples we used were not very close to their everyday life and, therefore, their significance and projection could be improved (p. 14). [AS1]</p> <p>– In general, the attitude of dialogue and discussion was fostered throughout the didactic unit, since a good part of the sessions was dedicated to solving problems and approaching them among the students, both in small groups and discussing and explaining them to the rest of the groups (p. 14). [AS2]</p> <p>– I think that, in general, the students did not see big difference between these sessions and those they were used to doing, beyond the constant problem-solving attitude. That is why I think that the sensation of pleasure of being able to solve the problems posed was achieved in some students,</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	sensació del plaer d'aconseguir resoldre problemes plantejats, en algunes alumnes, però en general no s'ha aconseguit fer que les alumnes acabessin amb la sensació de que allò que estaven aprenent els estava obrint portes a molts coneixements i disciplines diverses i interessants, a més d'estar connectat amb la seva vida i no s'han generat emocions que facilitessin la comprensió i consolidació dels aprenentatges (pp. 14–15). [IA3]	poder resolver los problemas planteados, en algunos estudiantes, pero en general, no se consiguió hacer que ellos acabaran con la sensación de que lo que estaban aprendiendo estaba abriendo puertas a muchos conocimientos y disciplinas diversas e interesantes, además de estar conectado con su vida y no se generaron emociones que facilitarán la comprensión y consolidación de los aprendizajes (pp. 14–15). [IA3]	but in general, it was not possible for them to end up with the feeling that they were learning was opening doors to many diverse and interesting knowledge and disciplines, in addition to being connected to their lives, and emotions that facilitated the understanding and consolidation of learning were not generated (pp. 14–15). [AS3]
Ecológico Ecological	– Com en el punt anterior [IEc3] , podem dir que els exemples contextualitzats utilitzats no són suficients (p. 18). [IEc2] – Dèiem que els exemples estaven contextualitzats, però realment gairebé cap [...] tenien càrrega social suficient al darrera com per contribuir a la formació socio-professional de les alumnes, ni tampoc a la seva educació en valors (p. 18). [IEc3] – Per la banda positiva, considero molt profitós el sistema d'aprenentatge basat en problemes i el treball autònom en grup, que no m'havia plantejat tan en profunditat com ara i que crec que van funcionar molt bé, però en general crec que es podria haver anat més enllà, quant a innovació (p. 18). [IEc4]	– Como en el punto anterior [IEc3] , podremos decir que los ejemplos contextualizados no son suficientes (p. 18). [IEc2] – Decíamos que los ejemplos estaban contextualizados, pero realmente casi ninguno [...] tenía una carga social suficiente detrás como para contribuir a la formación socio-profesional de los estudiantes, ni tampoco a su educación en valores (p. 18). [IEc3] – Por el lado positivo, considero muy provechoso el sistema de aprendizaje basado en problemas y el trabajo autónomo en grupo, que no me había planteado tan en profundidad como ahora y que creo que funcionó muy bien, pero en general creo que se podría haber ido más allá en cuanto a la innovación (p. 18). [IEc4]	– As in the previous point [EcS3] , we can say that the contextualised examples are not enough (p. 18). [EcS2] – We said that the examples were contextualised, but really almost none [...] had a sufficient social burden behind it to contribute to the students' socio-professional training, nor to their education in values (p. 18). [EcS3] – On the positive side, I consider the problem-based learning system and autonomous group work to be very useful, which I had not considered as deeply as now and which I think worked very well, but in general I think it could have gone beyond in terms of motivation (p. 18). [EcS4]
Otros Others	– L'estudi de les funcions té una importància cabdal en l'educació secundària perquè és el concepte sobre el qual es fonamenta qualsevol modelització, ja que podem considerar el concepte de funció com	– El estudio de las funciones tiene una importancia primordial en la educación secundaria porque es el concepto sobre el que se fundamenta cualquier modelización, ya que podemos considerar el	– The study of functions is a of paramount importance in secondary education because it is the concept on which any modelling is based since we can consider the concept of function as an abstraction

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>una abstracció del concepte de llei científica (p. 3). – L’objectiu era que aquesta fos una unitat didàctica de tipus constructivista amb problemes introductoris contextualitzats que portin cap a un desenvolupament a nivell més teòric dels conceptes bàsics de la unitat, els quals, un cop interioritzats ens havien de permetre treballar, finalment, amb problemes d’aplicació i problemes de consolidació (p. 5). – A partir dels exemples que triarem de relacions entre variables, acabarem de donar forma al concepte de funció que vam introduir mentre caminem cap a la representació algebraica de les funcions, i un cop haguem agafat certa confiança amb aquestes relacions, resoldrem problemes contextualitzats i presentarem eines TAC que ens ajudaran a fer-ho mentre anem desgranant els conceptes finals que aniran apareixent: funcions afins, ordenada a l’origen (p. 5). – Tot i així, totes són millorables: com hem vist, caldria replantejar com millorar la contextualització en la vida quotidiana de l’alumnat i la capacitat d’emocionar, per millorar l’afectiva i l’epistèmica, així com afavorir els processos d’exploració i relacionar millor els conceptes matemàtics (p. 19). – Un dels aspectes que hem vist que era clarament millorable era el de la contextualització dels problemes, que són molt</p>	<p>concepto de función como una abstracción del concepto de ley científica (p. 3). – El objetivo era que ésta fuera una unidad didáctica de tipo constructivista, con problemas introductorios contextualizados que lleven hacia un desarrollo a nivel más teórico de los conceptos básicos de la unidad, los cuales, una vez interiorizados, debían permitirnos trabajar, finalmente, con problemas de aplicación y de consolidación (p. 5). – A partir de los ejemplos de relaciones entre variables que escogeremos, acabaremos de dar forma al concepto de función que introdujimos mientras caminábamos hacia la representación algebraica de las funciones y, una vez hayamos ganado cierta confianza con estas relaciones, resolveremos problemas contextualizados y presentaremos herramientas TAC que nos ayudarán a hacerlo mientras vamos desgranando los conceptos finales que irán apareciendo (funciones afines, ordenada en su origen) (p. 5). – Sin embargo, todas son mejorables. Como hemos visto, habría que replantear cómo mejorar la contextualización en la vida cotidiana de los estudiantes y la capacidad de emocionar, para mejorar la idoneidad afectiva y epistémica, así como favorecer los procesos de exploración y relacionar mejor los conceptos matemáticos (p. 19).</p>	<p>of the concept of scientific law (p. 3). – The objective was for this to be a constructivist didactic unit, with contextualised introductory problems that lead to a more theoretical development of the basic concepts of the unit, which once internalised should allow us to work, finally, with application and consolidation problems (p. 5). – Based on the examples of relationships between variables that we will choose, we will finish shaping the concept of function that we introduced while walking towards the algebraic representation of functions and, once we have gained some confidence with these relationships, we will solve contextualised problems and present LKT tools that will help us to do it while we are shelling out the final concepts that will appear (affine functions, ordered in their origin) (p. 5). – However, they are all improvable. As we have seen, it would be necessary to reconsider how to improve the contextualisation in the students’ daily life and the ability to evoke, to improve affective and epistemic suitability, as well as favour exploration processes and better related mathematical concepts (p. 19). – One of the aspects that we have seen that can clearly be improved is the contextualisation of the problems, which are very important to make the students feel attracted and identified with the</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>importants per tal de fer que les alumnes se sentin atretes i identificades per les matemàtiques que estan aprenent, aconseguint una millor motivació i eliminant el factor d'angoixa que se'ls associa socialment, millorant sobretot la idoneïtat afectiva però també la cognitiva i l'epistèmica, de passada (p. 21).</p> <p>– S'ha ampliat la sèrie d'activitats i problemes contextualitzats per evitar haver de recórrer a exercicis poc competencials i sense context (p. 23).</p> <p>– Originalment vaig intentar adaptar el currículum de matemàtiques a la unitat didàctica que m'havia tocat impartir i amb aquest treball crec que m'he acostat força a l'objectiu inicial, particularment contextualitzant la gran majoria d'activitats proposades de manera que els aprenentatges proposats no fossin artificials i desmotivadors, tot i que no s'ha tingut en compte una perspectiva històrica de les matemàtiques (p. 25).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Aquest és un aspecte molt rellevant de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, doncs un dels principals problemes, tal com se'ns ha recalcat sovint al llarg del curs, és que l'aïllament del coneixement matemàtic de la vida quotidiana de l'alumnat en dificulta l'aprenentatge i la interdisciplinarietat és molt útil per assolir aquest propòsit. Realment, però, m'ha resultat complicat dur-ho a la pràctica, com</p>	<p>– Uno de los aspectos que hemos visto que es claramente mejorable, es el de la contextualización de los problemas, que son muy importantes para hacer que los estudiantes se sientan atraídos e identificados por la matemática que están aprendiendo, consiguiendo una mejor motivación y eliminando el factor de angustia que se le atribuye socialmente, mejorando sobre todo la idoneidad afectiva pero también la cognitiva y la epistémica (p. 21).</p> <p>– Se ha ampliado la serie de actividades y problemas contextualizados para evitar tener que recurrir a ejercicios poco competenciales y sin contexto (p. 23).</p> <p>– Originalmente, intenté adaptar el currículo de matemática a la unidad didáctica que me había tocado impartir y, con este trabajo, creo que me he acercado bastante al objetivo inicial, particularmente, contextualizando la gran mayoría de actividades propuestas, de modo que los aprendizajes propuestos no fueran artificiales y desmotivadores, aunque no se ha tenido en cuenta una perspectiva histórica de la matemática (p. 25).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Éste es un aspecto muy relevante de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pues uno de los principales problemas, tal como se ha recalcado a menudo durante el curso, es que el aislamiento del conocimiento matemático de la vida cotidiana de los</p>	<p>mathematics they are learning, achieving better motivation, and eliminating the anguish factor that is socially attributed to it, improving above all affective suitability but also cognitive and epistemic suitability (p. 21).</p> <p>– The series of contextualised activities and problems has been expanded to avoid having to resort to exercises with little competency and without context (p. 23).</p> <p>– Originally, I tried to adapt the mathematics curriculum to the didactic unit that I had to teach and, with this project, I think I have come quite close to the initial objective, particularly contextualising the vast majority of proposed activities, so that the proposed learning were not artificial and demotivating, although a historical perspective of mathematics has not been taken into account (p. 25).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: This is a very relevant aspect of the teaching and learning of mathematics, since one of the main problems, as has often been emphasised during the course, is that the isolation of mathematical knowledge from student everyday life hinders their learning and interdisciplinarity is very useful to achieve this purpose. However, it has really been difficult for me to put into practice, as I verified in the internship experiences, because, although I find situations where to use it, they are</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	he comprovat al pràcticum, perquè encara que trobi situacions on utilitzar-ho, sovint són excuses i no problemes reals a resoldre (p. 27).	estudiantes dificulta su aprendizaje y la interdisciplinariedad es muy útil para alcanzar este propósito. Sin embargo, realmente me ha resultado complicado llevarlo a la práctica, como comprobé en las prácticas, porque, aunque encuentre situaciones donde utilizarlo, a menudo son excusas y no problemas reales para resolver (p. 27)	often excuses and not real problems to solve (p. 27).
TFM/MFP #057			
Epistémico Epistemic			
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Es tracta d'un dossier de problemes de funcions lineals i de proporcionalitat directa/inversa (també altre amb funcions quadràtiques). Tots els problemes representen o simulen un model de la vida real amb l'objectiu d'oferir una visió de la matemàtica contextualitzada a la vida quotidiana (p. 12).</p> <p>– Analitzar un model real de variables dependents és un procés que requereix una traducció prèvia al llenguatge matemàtic i que evidencia el vincle existent entre la unitat i la competència seleccionada. [...]. L'anàlisi, l'àlgebra i la resolució d'equacions són continguts matemàtics intrínsecament relacionats. Tot model es constitueix de variables dependents, variables independents i</p>	<p>– Se trata de un dossier de problemas de funciones lineales y de proporcionalidad directa/inversa (también otro con funciones cuadráticas). Todos los problemas representan o simulan un modelo de la vida real con el objetivo de ofrecer una visión de la matemática contextualizada en la vida cotidiana (p. 12).</p> <p>– Analizar un modelo real de variables dependientes es un proceso que requiere una traducción previa al lenguaje matemático y evidencia el vínculo existente entre la unidad y la competencia seleccionada. [...]. El análisis, álgebra, y resolución de ecuaciones son contenidos matemáticos intrínsecamente relacionados. Todo modelo</p>	<p>– It is a dossier of problems of linear functions and direct/inverse proportionality (also another one with quadratic functions). All the problems represent or simulate a real-life model with the aim of offering a vision of mathematics contextualised in everyday life (p. 12).</p> <p>– Analysing a real model of dependent variables is a process that requires prior translation into mathematical language and evidences the link between the unit and the selected competency. [...]. Analysis, algebra, and solving equations are intrinsically related mathematical contents. Every model is built from dependent and independent variables, and from constants. Ignorance of</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>constants. El desconeixement d’alguns d’aquestes tres elements genera una incògnita que s’ha d’aïllar per trobar-ne el valor. A la UD s’inclouen activitats que requereixen una connexió necessària entre els diferents continguts nombrats. [...] Quan s’exposen les conclusions extretes de l’anàlisi d’un model i el públic no està especialitzat en la matèria, sintetitzar les dades i utilitzar eines de representació adients en funció del públic és indispensable per una correcta interpretació de les dades. [...] Els fulls de càlcul, programes de modelització i entorns software de programació són recursos digitals necessaris en l’anàlisi de models a la indústria i la recerca social, i la generació de simulacions a la recerca científica (p. 15).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: [...]. A diferents mòduls d’aquest màster s’ha emfatitzat en la necessitat de contextualitzar les matemàtiques a la vida quotidiana i a altres disciplines amb l’objecte d’oferir una visió més entenedora de les matemàtiques a l’alumnat (p. 43).</p> <p>– Después de trabajar actividades basadas en modelos reales al largo de la UD, es pot corroborar la utilitat d’oferir una visió contextualitzada de les matemàtiques en altres disciplines, doncs l’alumnat assimila els conceptes d’una forma més entenedora quan és capaç d’atribuir un</p>	<p>se construye de variables dependientes e independientes, y de constantes. El desconocimiento de alguno de estos tres elementos genera una incògnita que debe aislarse para encontrar su valor. En la UD se incluyen actividades que requieren una conexión necesaria entre los distintos contenidos nombrados. [...] Cuando se exponen las conclusiones extraídas del análisis de un modelo y el público no está especializado en la materia, sintetizar los datos y utilizar herramientas de representación adecuadas en función del público es indispensable para una correcta interpretación de los datos. [...] Las hojas de cálculo, los programas de modelización, y los entornos software de programación son recursos digitales necesarios en el análisis de modelos en la industria y la investigación social, y la generación de simulaciones en la investigación científica (p. 15).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: [...]. En diferentes módulos de este máster se ha enfatizado en la necesidad de contextualizar la matemática en la vida cotidiana y en otras disciplinas con el objeto de ofrecer una visión más comprensible de la matemática a los estudiantes (p. 43).</p> <p>– Después de trabajar actividades basadas en modelos reales a lo largo de la UD, se puede corroborar la utilidad de ofrecer una visión</p>	<p>any of these three elements generates an unknown that must be isolated to find its value. The DU includes activities that require a necessary connection between the different named contents. [...]. When the conclusions drawn from the analysis of a model are presented and the public is not specialised in the matter, synthesising the data and using appropriate representation tools depending on the public is essential for a correct interpretation of the data. [...]. Spreadsheets, modelling programs, and programming software environments are necessary digital resources in the analysis of models in industry and social research, and the generation of simulations in scientific research (p. 15).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: [...]. In different modules of this master’s programme, the need to contextualise mathematics in everyday life and in other disciplines has been emphasised in order to offer a more understandable vision of mathematics to students (p. 43).</p> <p>– After working on activities based on real models throughout the DU, the usefulness of offering a contextualised vision of mathematics in other disciplines can be confirmed, since students assimilate the concepts in a more understandable way when they are able to attribute a meaning to what they are doing (p. 45).</p>

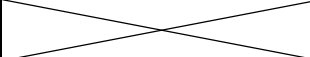
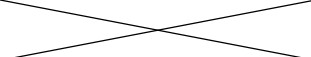



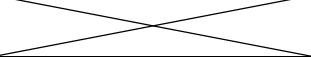
Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>significat a allò que està fent (p. 45). – S’enfocarà la unitat de funcions quadràtiques des d’un punt de vista contextualitzat, sempre trobant un sentit a tot allò que s’està fent. S’evitaran les activitats de resolució mecànica i complexa per donar lloc a activitats on el raonament de l’alumnat cobri un protagonisme i on les funcions representin models de la vida real (p. 55). – Activitat 1: Pràctica de la llei de Hooke. UD millorada (p. 77). – Activitat: Problemes d’ampliació. UD millorada (p. 93).</p>	<p>contextualizada de la matemática en otras disciplinas, pues los estudiantes asimilan los conceptos de una forma más comprensible cuando son capaces de atribuir un significado a lo que están haciendo (p. 45). – La unidad de funciones cuadráticas se enfocará desde un punto de vista contextualizado, siempre encontrando un sentido a todo lo que se está haciendo. Se evitarán las actividades de resolución mecánica y compleja para dar lugar a actividades en las que el razonamiento de los estudiantes cobre un protagonismo y donde las funciones representen modelos de la vida real (p. 55). – Actividad 1: Práctica de la Ley de Hooke. UD mejorada (p. 77). – Actividad: Problemas de ampliación. UD mejorada (p. 93).</p>	<p>– The unit of quadratic functions will be approached from a contextualised point of view, always finding meaning in everything that is being done. Mechanical and complex solving activities will be avoided to give rise to activities in which the students’ reasoning takes centre stage and where the functions represent real-life models (p. 55). – Activity 1: Practising the Hooke’s Law. Improved DU (p. 77). – Activity: Additional problems. Improved DU (p. 93).</p>
TFM/MFP #059			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: Procés de donar solució a problemes matemàtics mitjançant diverses resolucions. Traduir un problema a llenguatge matemàtic i fer la corresponent resolució del problema sempre argumentant el procediment. [...]. Millorable (p. 9). Contextualització: Procés d’utilitzar exemples reals en la resolució de problemes i explicació de conceptes matemàtics. Un dels objectius principals de [la UD] era fer activitats contextualitzades a la realitat dels estudiants amb l’objectiu de despertar els seu interès i promoure la utilitat de les matemàtiques (p. 10).</p>	<p>– Resolución de problemas: Proceso de dar solución a problemas matemáticos mediante diversas resoluciones. Traducir un problema al lenguaje matemático y realizar la correspondiente resolución del problema, siempre argumentando el procedimiento. [...]. Mejorable (p. 9). Contextualización: Proceso de utilizar ejemplos reales en la resolución de problemas y explicación de conceptos matemáticos. Uno de los objetivos principales de [la UD] era realizar actividades contextualizadas en la realidad de los estudiantes con el objetivo de despertar su interés y</p>	<p>– Problem solving: Process of solving mathematical problems through various solving procedures. Translate a problem into mathematical language and carry out its corresponding solving, always arguing the procedure. [...]. Improvable (p. 9). Contextualisation: Process of using real examples in solving problems and explaining mathematical concepts. One of the main objectives of [the DU] was to carry out activities contextualised in the students’ reality with the aim of arousing their interest and promoting the usefulness of mathematics (p. 10). Finally, in relation to the mathematical processes of</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	Finalment, en relació amb els processos matemàtics de contextualització i comunicació, dir que sí s'han complert donat que, tots els exercicis estaven contextualitzats i estaven preparats per a treballar en grup (p. 12). [IE3]	promover la utilidad de la matemática (p. 10). Por último, en relación con los procesos matemáticos de contextualización y comunicación, éstos sí se han cumplido, dado que todos los ejercicios estaban contextualizados y preparados para trabajar en grupo (p. 12). [IE3]	contextualisation and communication, these have been fulfilled, since all the exercises were contextualised and prepared for group work (p. 12). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– A la UD s'han activat, en menor o major grau, part dels processos cognitius. Com per exemple, l'exploració, la resolució de problemes, l'argumentació i la contextualització (p. 16). [IC4]	– En la UD se activaron, en menor o mayor medida, parte de los procesos cognitivos como, por ejemplo, la exploración, la resolución de problemas, la argumentación, y la contextualización (p. 16). [IC4]	– In the DU, part of the cognitive processes was activated, to a lesser or greater extent, such as exploration, problem solving, argumentation, and contextualisation (p. 16). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediacional			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– Malgrat hagi proporcionat activitats contextualitzades, les activitats proposades a la UD no estableixen connexions amb altres continguts curricular propis del currículum de matemàtiques ni tampoc amb altres matèries (p. 21). [IEc2]	– A pesar de haber proporcionado actividades contextualizadas, las actividades propuestas en la UD no establecen conexiones con otros contenidos curriculares propios de la matemática ni tampoco con otras asignaturas (p. 21). [IEc2]	– Despite having provided contextualised activities, the activities proposed in the DU do not establish connections with other curricular contents of mathematics or with other subjects (p. 21). [Ecs2]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: El màster ens ha possibilitat, mitjançant diverses assignatures, la competència d'aprendre a preparar activitats contextualitzades, així com, a saber relacionar els diferents blocs del currículum de les matemàtiques. Aquesta competència ha sigut treballada, concretament, amb les activitats de modelització del mòdul de Complementos de Formació de Matemàtiques (p. 31).	– Contextualización y valor interdisciplinario: El máster nos ha posibilitado, mediante diversas asignaturas, la competencia de aprender a preparar actividades contextualizadas, así como a saber relacionar los diferentes bloques del currículo de la matemática. Esta competencia se trabajó, concretamente, con las actividades de modelización del módulo de Complementos de Formación Disciplinar (p. 31).	– Contextualisation and interdisciplinary value: The master's programme enabled us, through various subjects, the competency to learn to prepare contextualised activities, as well as to know how to relate the different blocks of the mathematics curriculum. This competency was worked on, specifically, with the modelling activities of the Complements of Disciplinary Formation module (p. 31).

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #060			
Epistémico Epistemic	<p>– Els alumnes van realitzar tres tasques fonamentals que exemplifiquen clarament la idea de riquesa de processos: es buscava que argumentessin i treballessin la resolució de problemes per ells mateixos i una pinzellada de modelització, ja que ells havien d'abordar amb les eines que tenien els problemes presentats (p. 10). En el primer cas contextualitzat a la situació de pandèmia que teníem en aquells moments, es va voler que l'alumne modelitzés una pinzellada per poder veure l'existència de dos triangles rectangles (p. 11). Aquesta activitat era força directa però necessària per començar la següent: un ratolí que ha de fer el camí més curt possible per arribar al menjar que desitja (p. 12). L'objectiu, a part de modelitzar al nivell de l'exercici anterior, es va voler buscar el debat, del qual els alumnes defensaven per què la seva resposta era correcta segons el seu raonament (p. 13). [IE3]</p> <p>– El vessant algebraic: Mitjançant diferents exercicis directes i/o contextualitzats poden aplicar el teorema amb un enfocament més algebraic (p. 19). [IE4]</p>	<p>– Los estudiantes realizaron tres tareas fundamentales que ejemplifican claramente la idea de riqueza de procesos. Se buscaba que argumentaran y trabajaran la resolución de problemas por sí mismos y una pincelada de modelización, ya que ellos debían abordar los problemas presentados con las herramientas que tenían (p. 10). En el primer caso, contextualizado en la situación de pandemia que teníamos en aquellos momentos, se quiso que el estudiante modelizara una pincelada para poder ver la existencia de dos triángulos rectángulos (p. 11). Esta actividad era bastante directa, pero necesaria para empezar la siguiente: un ratón debe hacer el camino más corto posible para llegar a la comida que desea (p. 12). El objetivo, aparte de modelizar al nivel del ejercicio anterior, fue buscar el debate en que los estudiantes defendían su razonamiento (p. 13). [IE3]</p> <p>– La vertiente algebraica: Mediante diferentes ejercicios directos y/o contextualizados pueden aplicar el teorema con un enfoque más algebraico (p. 19). [IE4]</p>	<p>– The students carried out three fundamental tasks that clearly exemplify the idea of richness of processes. They were expected to argue and work on solving problems by themselves and a touch of modelling, since they had to address the problems presented with the tools they had (p. 10). In the first case, contextualised in the pandemic situation we were experiencing at the time, the student was asked to model a bit in order to see the existence of two right-angle triangles (p. 11). This activity was fairly direct, but necessary to start the next one: a mouse must take the shortest path possible to get to the food it wants (p. 12). The objective, apart from modelling at the level of the previous exercise, was to search for the debate in which the students defended their reasoning (p. 13). [ES3]</p> <p>– The algebraic aspect: Through different direct and/or contextualised exercises, they can apply the theorem with a more algebraic approach (p. 14). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational	<p>– En canvi la distribució del temps no acaba de ser gaire bona, ja que falta una hora setmanal. Malgrat això, la creació dels projectes Sumem fa que l'alumnat treballi totes les</p>	<p>– En cambio, la distribución del tiempo no acaba de ser muy buena, ya que falta una hora semanal. Sin embargo, la creación de los proyectos “Sumemos” hace que los</p>	<p>– On the other hand, the distribution of time is not quite good, since there is one hour a week missing. However, the creation of the “Let’s sum!” projects make students work on all</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	matèries de manera molt contextualitzada i aplicada a esdeveniments de la vida real (p. 24). [IM3]	estudiantes trabajen todas las materias de manera muy contextualizada y aplicada a acontecimientos de la vida real (p. 24). [IM3]	subjects in a very contextualised way and applied to real-life events (p. 24). [MS3]
Afectivo Affective	– Sense oblidar la necessitat algebraica d'alguns continguts, l'enfocament de la unitat era anar aportant pinzellades de fets de la vida real on les matemàtiques realitzen un paper fonamental (p. 21). [IA1]	– Sin olvidar la necesidad algebraica de algunos contenidos, el enfoque de la unidad era ir aportando pinceladas de hechos de la vida real donde la matemática realiza un papel fundamental (p. 21). [IA1]	– Without forgetting the algebraic necessity of some contents, the focus of the unit was to gradually provide brushstrokes of real-life facts where mathematics plays a fundamental role (p. 21). [AS1]
Ecológico Ecological	– Hi ha pocs exemples contextualitzats com a tal (p. 25). [IEc3]	– Hay pocos ejemplos contextualizados como tal (p. 25). [IEc3]	– There are few contextualised examples as such (p. 25). [EcS3]
Otros Others	– Caldrà doncs dur a la pràctica activitats de tipus algebraic i de tipus aplicacions en contextos quotidians (p. 1). – Finalitzant amb un recull més teòric del teorema i d'exercicis contextualitzats, per refrescar i ampliar les idees presentades de l'any anterior i complementades en el present (pp. 4–5). – Teorema de Pitàgores: partint de la coneixença general del teorema, es presenta una comprovació manipulativa i s'amplia amb una pàgina web on observariem diferents versions a la proposada. Es treballa focalitzant problemes contextualitzats (p. 5).	– Habrá pues que llevar a la práctica actividades de tipo algebraico y de tipo aplicaciones en contextos cotidianos (p. 1). – Finalizando con una recopilación más teórica del teorema y de ejercicios contextualizados, para refrescar y ampliar las ideas presentadas del año anterior y complementadas en el presente (pp. 4–5). – Teorema de Pitágoras: Partiendo del conocimiento general del teorema, se presenta una comprobación manipulativa y se amplía con una página web donde observaríamos diferentes versiones a la que se propone. Se trabaja focalizando problemas contextualizados (p. 5).	– Therefore, it will be necessary to carry out activities of an algebraic type and of an application type in everyday contexts (p. 1). – Ending with a more theoretical compilation of the theorem and contextualised exercises, to refresh and expand the ideas presented from the previous course and complemented in the present (pp. 4–5). – Pythagorean Theorem: Starting from the general knowledge of the theorem, a manipulative verification is presented, and it is extended with a webpage where we would observe different versions of the one proposed. Work is done focussing on contextualised problems (p. 5).
TFM/MFP #065			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Diferents camps de problemes, càlcul de tangents, variació mitja i instantània, aplicació derivada en la cerca de màxims i mínims i optimització. Modelització:	– Resolución de problemas: Diferentes campos de problemas, cálculo de tangentes, variación media e instantánea, aplicación derivada en la búsqueda de máximo y mínimos, y optimización.	– Problem solving: Different fields of problems, calculation of tangents, average and instantaneous variation, derivative application in the search for maximum and minimum, and optimisation. Modelling:

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	Representació matemàtica d'un objecte o fenomen real, també d'altres disciplines. [...]. Contextualització: Concebre les matemàtiques en problemes, també, d'altres àmbits extra matemàtics (p. 8). [IE3]	Modelización: Representación matemática de un objeto o fenómeno real, también, de otras disciplinas. [...]. Contextualización: Concebir la matemática en problemas, también, de otros ámbitos extra-matemáticos (p. 8). [IE3]	Mathematical representation of a real object or phenomenon, also from other disciplines. [...]. Contextualisation: Conceiving mathematics in problems, also, from other extra-mathematical fields (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Des de bon principi en la UD s'ha volgut contextualitzar, anar més enllà de les matemàtiques i trobar situacions de fora que permetessin veure la utilitat de les matemàtiques. [...]. Proposar alguna activitat contextualitzada des de bon inici del tema, sense haver d'esperar tant al final crec que pot ser interessant com a punt motivacional pels estudiants (p. 16). [IA1]	– Desde el principio, en la UD se ha querido contextualizar, ir más allá de la matemática y encontrar situaciones externas que permitieran ver su utilidad. [...]. Proponer alguna actividad contextualizada desde el inicio del tema, sin tener que esperar tanto al final, creo que puede ser interesante como punto motivacional para los estudiantes (p. 16). [IA1]	– From the beginning, the DU has intended to be contextualised, going beyond mathematics, and finding external situations that would allow us to see its usefulness. [...]. Proposing some contextualised activity from the beginning of the topic, without having to wait so long at the end, I think it can be interesting as a motivational point for the students (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological	– També és un tema que dona peu a connectar les matemàtiques amb contextos extramatemàtics, especialment de l'àmbit de les ciències socials i econòmiques (p. 15). [IEc2] – Això sobretot és factible a la part final de la UD on es treballen aplicacions de màxims i mínims i optimització amb una vocació d'utilitat i orientació cap al futur professional dels nois i noies (p. 15). [IEc3]	– También es un tema que da pie a conectar la matemática con contextos extra-matemáticos, especialmente, del ámbito de las ciencias sociales y económicas (p. 15). [IEc2] – Esto es, sobre todo, factible en la parte final de la UD, donde se trabajan aplicaciones de máximos y mínimos, y optimización con una vocación de utilidad y orientación hacia el futuro profesional de los estudiantes (p. 15). [IEc3]	– It is also a topic that gives rise to connecting mathematics with extra-mathematical contexts, especially in the field of social and economic sciences (p. 15). [EcS2] – This is, above all, feasible in the final part of the DU, where applications of maximums and minimums are worked on, and optimisation with an intention of utility and orientation towards the students' professional future (p. 15). [EcS3]
Otros Others	– Per exemple, m'agradaria en aquesta UD poder contextualitzar amb un grau d'intensitat més elevat des d'un bon inici i no haver d'esperar al final amb les activitats	– Por ejemplo, me gustaría en esta UD poder contextualizar con un mayor grado de intensidad desde un comienzo y no tener que esperar hasta el final con las actividades de	– For example, in this DU, I would like to be able to contextualise with a greater degree of intensity from the beginning and not have to wait until the end with the optimisation

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>d'optimització. Estic obert a propostes en aquest sentit (p. 28). – Contextualització i valor interdisciplinari: Arrancava d'unes experiències com alumne en dinàmiques tradicionals més basades en la mecanització, tant a l'institut com a la universitat. Ara sé que hi ha altres estratègies per aconseguir apropar les matemàtiques als joves i més encertades. Una continua contextualització, també a les classes de mates, és imprescindible (p. 29).</p>	<p>optimización. Estoy abierto a propuestas en este sentido (p. 28). – Contextualización y valor interdisciplinario: Arrancaba de unas experiencias como estudiante en dinámicas tradicionales basadas en la mecanización, tanto en el instituto como en la universidad. Ahora sé que existen otras estrategias para conseguir acercar la matemática a los estudiantes y más acertadas. Una continua contextualización, también en las clases de matemática, es imprescindible (p. 29).</p>	<p>activities. I am open to proposals in this regard (p. 28). – Contextualisation and interdisciplinary value: I started from some experiences as a student in traditional dynamics based on mechanisation, both at secondary and university education. Now, I know that there are other strategies to bring mathematics closer and more accurately to students. A continuous contextualisation, also in mathematics lessons, is essential (p. 29).</p>
TFM/MFP #074			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Modelització: S'ha treballat adequadament, ja que s'han treballat de forma matemàtics els models del format DIN o del cos humà entre altres, buscant caracteritzacions i patrons. [...]. Resolució de problemes: Sens dubte, aquesta unitat didàctica està molt centrada en la resolució de problemes. El paper del professor és d'orientador, els alumnes estan gairebé sempre treballant sols o en grups (p. 8). Contextualització: S'ha intentat contextualitzar la gran majoria de problemes en situacions conegudes pels alumnes, a excepció d'alguns problemes del dossier d'exercicis que són més abstractes (p. 9). [IE3]</p>	<p>– Modelización: Se trabajó adecuadamente, puesto que se trabajaron matemáticamente los modelos del formato DIN o del cuerpo humano, entre otros, buscando caracterizaciones y patrones. [...]. Resolución de problemas: Sin duda alguna, esta unidad didáctica está muy centrada en la resolución de problemas. El papel del profesor es de orientador, los estudiantes están casi siempre trabajando solos o en grupos (p. 8). Contextualización: Se intentó contextualizar la gran mayoría de problemas en situaciones conocidas por los estudiantes, a excepción de algunos problemas del dossier de ejercicios, que eran más abstractos (p. 9). [IE3]</p>	<p>– Modelling: Work was carried out adequately, since the models of the DIN format or of the human body, among others, were worked on mathematically, looking for patterns. [...]. Problem solving: Without doubt, this didactic unit is very focused on problem solving. The role of the teacher is that of a guide, the students are almost always working individually or in groups (p. 8). Contextualisation: An attempt was made to contextualise the vast majority of the problems in situations known to the students, with the exception of some problems in the exercise dossier, which were more abstract (p. 9). [ES3]</p>
<p>Cognitivo Cognitive</p>	X	X	X
<p>Interaccional Interactional</p>	X	X	X
<p>Mediacional Mediational</p>	X	X	X

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective	– Per tant, l'estratègia que vaig triar va ser intentar fer activitats en grup i exercicis de temàtiques molt variades, i sempre intentant contextualitzar-ho tot (p. 11). [IA1]	– Por lo tanto, la estrategia que elegí fue intentar realizar actividades en grupo y ejercicios de temáticas muy variadas, y siempre intentando contextualizarlo todo (p. 11). [IA1]	– Therefore, the strategy I chose was to try to carry out group activities and exercises on a wide variety of topics, and always trying to contextualise everything (p. 11). [AS1]
Ecológico Ecological	– A nivell matemàtic tenim alguns exercicis on hi ha certes connexions amb l'àlgebra, com ara quan es modelen els principis del format DIN de forma algebraica (p. 16). [IEc2] – També he intentat fomentar molt el treball col·laboratiu i l'autonomia dels alumnes respecte el professor, i he contextualitzat la majoria de problemes, incloent materials manipulatius quan hi havia l'ocasió (p. 16). [IEc4]	– A nivel matemático, tenemos algunos ejercicios donde existen ciertas conexiones con el álgebra, como cuando modelizan los principios del formato DIN de forma algebraica (p. 16). [IEc2] – También intenté fomentar mucho el trabajo colaborativo y la autonomía de los estudiantes respecto al profesor, y contextualicé la mayoría de los problemas, incluyendo materiales manipulativos cuando existía la ocasión (p. 15). [IEc4]	– At a mathematical level, we have some exercises where there are certain connections with algebra, such as when they algebraically model the principles of the DIN format (p. 16). [ECS2] – I also tried to encourage a lot of collaborative work and the student autonomy with respect to the teacher, and I contextualised most of the problems, including manipulative materials when the occasion existed (p. 15). [EcS4]
Otros Others	– L'objectiu d'aquesta unitat didàctica ha sigut, doncs, presenta a l'alumne alguns d'aquests conceptes geomètrics –proporció, mesura i error– a través d'activitats en grup contextualitzades i d'exercicis individuals a mode de consolidació (p. 3). – Contextualització i valor interdisciplinari: A mi sempre m'ha agradat posar context a les matemàtiques, crec que és la forma correcta d'ensenyar-les i que resulta molt útil per aprendre-les. De fet, és una de les tècniques que més utilitzo quan dono classes. Al màster hem treballat diversos models matemàtic a les classes [...], però crec que hem tingut carències en l'apartat interdisciplinari. M'hagués agradat treballar més aquest aspecte, ara que	– El objetivo de esta unidad didáctica fue presentar al estudiante algunos de estos conceptos geométricos (proporción, medida, y error) a través de actividades contextualizadas en grupo y de ejercicios de consolidación individuales (p. 3). – Contextualización y valor interdisciplinario: A mí siempre me ha gustado poner contexto a la matemática, creo que es la forma correcta de enseñarlas y que resulta muy útil para aprenderlas. De hecho, es una de las técnicas que más utilizo cuando doy clases. En el máster hemos trabajado varios modelos matemáticos en clases [...], pero creo que hemos tenido carencias en el apartado interdisciplinario. Me hubiera gustado trabajar más este aspecto,	– The objective of this didactic unit was to introduce the student to some of these geometric concepts (proportion, measure, and error) through contextualised group activities and individual consolidation exercises (p. 3). – Contextualisation and interdisciplinary value: I have always liked to put mathematics in context, I think it is the correct way to teach it and that it is very useful to learn it. In fact, it is one of the techniques I use the most when I teach. In the master's programme, we have worked on several mathematical models in classes [...], but I think we have had shortcomings in the interdisciplinary section. I would have liked to work on this aspect more now that it is

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	està de moda treballar per projectes (p. 24).	ahora que está de moda trabajar por proyectos (p. 24)	fashionable to work by projects (p. 24).
TFM/MFP #075			
Epistémico Epistemic	<p>– Pel que fa a les activitats, en la versió original es van plantejar diferents problemes i modelitzacions que requereixen quelcom més que l'aplicació immediata de fórmules. No es van plantejar però exercicis de resolució immediata, tot i que alguns dels “problemes” que es van plantejar es puguin considerar més exercicis que problemes. Els alumnes als quals vaig donar classe estan més acostumats a fer exercicis que problemes. [...]. Durant el confinament, es van plantejar algunes modelitzacions, però la presentació que se'n va dar estava molt guiada i d'alguna manera simplificada per tal d'afavorir que tots els alumnes poguessin arribar al final del problema [...]. En la proposta de millora de la unitat inclouré aquestes activitats però amb un caràcter molt més competencial. La contextualització també es va treballar de manera àmplia ja que totes les activitats estaven contextualitzades en el món real. Si bé es considera un aspecte positiu, crec que algunes d'aquestes realitats es troben una mica allunyades de la realitat dels alumnes i que seria bo emprar entorns que els fossin més propers (p. 14). [IE3]</p>	<p>– En lo que se refiere a las actividades, en la versión original se plantearon diferentes problemas y modelizaciones que requieren algo más que la aplicación inmediata de fórmulas. Sin embargo, no se plantearon ejercicios de resolución inmediata, aunque algunos de los “problemas” que se plantearon se puedan considerar más como ejercicios que como problemas. Los estudiantes a los que di clase están más acostumbrados a realizar ejercicios de problemas. [...]. Durante el confinamiento, se plantearon algunas modelizaciones, pero la presentación que se dio estaba muy guiada y, de alguna manera, simplificada para favorecer que todos los estudiantes pudieran llegar al final del problema [...]. En la propuesta de mejora de la unidad incluiré estas actividades, pero con un carácter mucho más competencial. La contextualización también se trabajó de forma amplia, puesto que todas las actividades estaban contextualizadas en el mundo real. Si bien se considera un aspecto positivo, creo que algunas de estas realidades se encuentran algo alejadas de la realidad de los estudiantes, y que sería bueno utilizar entornos que les fueran más cercanos (p. 14). [IE3]</p>	<p>– Regarding the activities, in the original version, different problems and modelling that require something more than the immediate application of formulas were posed. However, there were no exercises for immediate resolution, although some of the “problems” that were posed can be considered more as exercises than problems. The students I taught are more used to doing problem exercises. [...]. During the lockdown, some modelling was proposed, but the presentation given was very guided and, in some way, simplified to favour that all the students could reach the end of the problem [...]. In the improvement proposal of the unit, I will include these activities, but with a much more competency character. Contextualisation was also worked extensively, since all the activities were contextualised in the real world. Although it is considered as a positive aspect, I think that some of these realities are somewhat far from the students' reality, and that it would be good to use environments that are closer to them (p. 14). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	– Tot i que la majoria de significats es trobaven dins	– Aunque la mayoría de los significados se	– Although most of the meanings were in the

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>la zona de desenvolupament potencial dels alumnes, alguns dels problemes es plantejaven en un context real tot i potser una mica allunyat dels alumnes. Els enunciats eres llargs ja que tenien la voluntat de contextualitzar la situació i alguns dels cossos que hi intervenien no eres del tot evidents (p. 15). [IC1]</p> <p>– Tal com s’ha analitzat anteriorment, s’activaven diversos processos cognitius com la comprensió, la comunicació, l’argumentació, la contextualització, la resolució de problemes i algun procés de modelització (activitats virtuals), la contextualització i les connexions. [...]. Es podria haver aprofundit més en les modelitzacions (p. 17). [IC4]</p>	<p>encontraban en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, algunos de los problemas se planteaban en un contexto real, aunque quizás algo alejado de los estudiantes. Los enunciados eran largos, ya que tenían la voluntad de contextualizar la situación y algunos de los elementos que intervenían no eran del todo evidentes (p. 15). [IC1]</p> <p>– Tal y como se ha analizado anteriormente, se activaron diversos procesos cognitivos, como la comprensión, la comunicación, la argumentación, la contextualización, la resolución de problemas y algún proceso de modelización (actividades virtuales), las conexiones. [...]. Podría haberse profundizado más en las modelizaciones (p. 17). [IC4]</p>	<p>students’ area of potential development, some of the problems were posed in a real context, although perhaps somewhat removed from the students. The wording of the tasks was long since they wanted to contextualise the situation and some of the elements involved were not entirely obvious (p. 15). [CS1]</p> <p>– As previously analysed, various cognitive processes were activated, such as understanding, communication, argumentation, contextualisation, problem solving and some modelling process (virtual activities), connections. [...]. Modelling could have gone deeper (p. 17). [CS4]</p>
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	<p>– El conjunt del material que es va dissenyar partia de contextos i situacions reals que motivaven les definicions i propietats que es desenvolupaven al llarg de la unitat (p. 19). [IM1]</p>	<p>– El conjunto del material que se diseñó partía de contextos y situaciones reales que motivaban las definiciones y propiedades que se desarrollaban a lo largo de la unidad (p. 19). [IM1]</p>	<p>– The set of material that was designed started from contexts and real situations that motivated the definitions and properties that were developed throughout the unit (p. 19). [MS1]</p>
Afectivo Affective	<p>– Crec que les activitats que es van idear són proposades totalment realistes i contextualitzades en la realitat que ens envolta. [...]. Segurament s’haguessin pogut plantejar activitats encara més properes a ells si s’hagués disposat d’un coneixement més profund sobre la seva realitat (p. 20). [IA1]</p>	<p>– Creo que las actividades que se idearon son propuestas totalmente realistas y contextualizadas en la realidad que nos envuelve. [...]. Seguramente, hubieran podido plantearse actividades aún más cercanas a ellos si se hubiera dispuesto de un conocimiento más profundo sobre su realidad (p. 20). [IA1]</p>	<p>– I believe that the activities that were designed are totally realistic proposals and contextualised in the reality that surrounds us. [...]. Surely, activities even closer to them could have been considered if a deeper knowledge of their reality had been available (p. 20). [AS1]</p>
Ecológico Ecological			

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Otros Others	<p>– Riquesa de processos: Incloure altres materials per a la comprensió més enllà dels textos, fomentar més l'argumentació, la comunicació i la mecanització; incloure més modelitzacions i un nou procés d'exploració; emprar contextos més pròxims als alumnes. [...]. Alta demanda cognitiva: Incloure activitats que promoguin l'exploració, la conjeturació i la institucionalització, aprofundir més en les modelitzacions i la resolució de problemes (p. 23).</p> <p>– Interessos i necessitats: Apropar una mica més els contextos a la realitat dels alumnes (p. 24).</p> <p>– També l'assignatura de Complementos de Formació en Matemàtiques ha tingut un paper clau en la meua formació, sobretot en la part de modelització, que també té un enfoc més pràctic (p. 40).</p> <p>– Contextualització i valoració interdisciplinaris: Conec contextos amplis d'aplicació de la matemàtica que puc fer servir en les meves classes de matemàtiques. Puc utilitzar models matemàtics a partir de situacions i contextos extramatemàtics que es poden aplicar a les classes. Tal com s'ha pogut veure en la meua unitat didàctica fomento en els alumnes la realització de processos senzills de construcció de models (p. 43).</p>	<p>– Riqueza de procesos: Incluir otros materiales para la comprensión más allá de los textos; fomentar más la argumentación, la comunicación, y la mecanización; incluir más modelizaciones y un nuevo proceso de exploración; utilizar contextos más próximos a los estudiantes. [...]. Alta demanda cognitiva: Incluir actividades que promuevan la exploración, conjeturación, e institucionalización; profundizar más en las modelizaciones y la resolución de problemas (p. 23).</p> <p>– Intereses y necesidades: Acercar un poco más los contextos a la realidad de los estudiantes (p. 24).</p> <p>– También, la asignatura de Complementos de Formación en Matemática ha tenido un papel clave en mi formación, sobre todo, en la parte de modelización, que también tiene un enfoque más práctico (p. 40).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Conozco contextos amplios de aplicación de la matemática que puedo utilizar en mis clases de esta asignatura. Puedo utilizar modelos matemáticos a partir de situaciones y contextos extra-matemáticos que pueden aplicarse a las clases. Tal y como se ha podido ver en mi unidad didáctica, fomento en los estudiantes la realización de procesos sencillos de construcción de modelos (p. 43).</p>	<p>– Richness of processes: Include other materials for understanding beyond the texts; encourage more argumentation, communication, and mechanisation; include more modelling and a new exploration process; use contexts closer to the students. [...]. High cognitive demand: Include activities that promote exploration, conjecture, and institutionalisation; go deeper into modelling and problem solving (p. 23).</p> <p>– Interests and needs: Bring the contexts a little closer to the students' reality (p. 24).</p> <p>– Also, the Complements of Disciplinary Formation subject has played a key role in my education, especially in the modelling part, which also has a more practical focus (p. 40).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: I know broad contexts of application of mathematics that I can use in my lessons. I can use mathematical models from extra-mathematical situations and contexts that can be applied to my lessons. As has been seen in my didactic unit, I encourage students to carry out simple model-building processes (p. 43).</p>
TFM/MFP #076			
Epistémico Epistemic	– Modelització: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una	– Modelización: Traducir un problema a lenguaje matemático o a una	– Modelling: Translating a problem into mathematical language or a

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames, models adequats [...]. Resolució de problemes: Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes, mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses, generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes [...].</p> <p>Contextualització: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics (p. 8). Modelització: Durant la implementació, en algunes ocasions, es van proposar activitats que consistien en la interpretació i traducció dels enunciats a un llenguatge matemàtic, com en el cas de l'activitat d'introducció a les funcions lineals, activitat la qual introduïa la forma algebraica de la funció. Aquest procés però, representa una gran importància dins la temàtica en que estem tractant, per tant considero que ha de ser objecte a potenciar, incorporant més activitats en el conjunt de la Unitat Didàctica [...].</p> <p>Resolució de problemes: La programació del UD està pensada perquè, gran part dels temps, els alumnes afrontin directament els problemes proposats, és a dir, s'han fet poques sessions teòriques. La intensió és que aquests compreguin el contingut teòric a través de la resolució del problemes plantejats [...].</p> <p>Contextualització: Pel que fa el contingut de la majoria del treball proposat durant la Unitat, s'han tractat temes</p>	<p>representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas, y modelos adecuados [...]. Resolución de problemas: Emplear conceptos, herramientas, y estrategias matemáticas para resolver problemas, mantener una actitud de investigación ante un problema, ensayando estrategias diversas, generando preguntas de tipo matemático, y planteando problemas [...].</p> <p>Contextualización: Emplear el razonamiento matemático en entornos no-matemáticos (p. 8). Modelización: Durante la implementación, en algunas ocasiones, se propusieron actividades que consistían en la interpretación y traducción de los enunciados a un lenguaje matemático, como en el caso de la actividad de introducción a las funciones lineales, la cual introducía la forma algebraica de la función. Sin embargo, este proceso representa una gran importancia dentro de la temática que estamos tratando, por lo tanto, considero que debe ser objeto para potenciar, incorporando más actividades en el conjunto de la Unidad Didáctica [...].</p> <p>Resolución de problemas: La programación de la UD está pensada para que, gran parte del tiempo, los estudiantes afronten directamente los problemas propuestos, es decir, se realizaron pocas sesiones teóricas. La intención es que los estudiantes comprendan el contenido teórico a través de la resolución de los</p>	<p>mathematical representation using variables, symbols, diagrams, and appropriate models [...]. Problem solving: Use mathematical concepts, tools, and strategies to solve problems, maintain an investigative attitude when faced with a problem, trying different strategies, generating mathematical questions, and posing problems [...].</p> <p>Contextualisation: Employ mathematical reasoning in non-mathematical settings (p. 8). Modelling: During the implementation, on some occasions, activities were proposed that consisted of the interpretation and translation of the statements into a mathematical language, as in the case of the activity of introduction to linear functions, which introduced the algebraic form of the function. However, this process represents a great importance within the topic that we are dealing with, therefore, I consider that it should be promoted, incorporating more activities in the Didactic Unit as a whole [...].</p> <p>Problem solving: The programming of the DU is designed so that, much of the time, the students directly face the proposed problems, that is, few theoretical sessions were carried out. The intention is that the students understand the theoretical content through the solving of the problems posed [...].</p> <p>Contextualisation: Regarding the content of most of the work proposed</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>associats amb un entorn pròxim als alumnes, com també aspectes naturals de la vida quotidiana. L'objectiu es basa en facilitar-los-hi la seva comprensió i que percebin a la vegada, una utilitat a la seva vida pràctica (p. 10). [IE3]</p> <p>– Per treballar la temàtica de funcions en aquest cas, se'ns dubte, s'ha tingut en compte el significat parcial referent a la funció com a relació entre magnituds, s'ha procurat contextualitzar molts dels problemes en un entorn pròxim al dels alumnes (p. 10). [IE4]</p>	<p>problemas planteados [...]. Contextualización: Con respecto al contenido de la mayoría del trabajo propuesto durante la Unidad, se trataron temas asociados con un entorno cercano a los estudiantes, así como aspectos naturales de la vida cotidiana. El objetivo se basa en facilitarles su comprensión y que perciban, a su vez, una utilidad en su vida práctica (p. 10). [IE3]</p> <p>– Para trabajar la temática de funciones, en este caso, se tuvo en cuenta el significado parcial referente a la función como relación entre magnitudes, procurando contextualizar muchos de los problemas en un entorno cercano al de los estudiantes (p. 10). [IE4]</p>	<p>during the Unit, issued associated with an environment close to the students were discussed, as well as natural aspects of daily life. The objective is based on facilitating their understanding and that they perceive, in turn, a usefulness in their practical life (p. 10). [ES3]</p> <p>– To work on the topic of functions, in this case, the partial meaning referring to the function as a relationship between magnitudes was taken into account, trying to contextualise many of the problems in an environment close to that of the students (p. 10). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– Les tasques plantejades han estat variades, però hi ha hagut algunes tasques amb una certa demanda cognitiva, que són aquelles que han permès desenvolupar alguns dels processos com la modelització (p. 14). [IC4]</p>	<p>– Las tareas planteadas han sido variadas, pero ha habido algunas con cierta demanda cognitiva, que son aquellas que permitieron desarrollar algunos de los procesos como la modelización (p. 14). [IC4]</p>	<p>– The tasks proposed have been varied, but there have been some with a certain cognitive demand, which are those that allowed the development of some of the processes such as modelling (p. 14). [CS4]</p>
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– També, al tractar-se de matemàtiques però vinculades al món real i en entorns coneguts per l'alumnat, ha despertat la motivació dels alumnes, ja que poden apreciar la utilitat que presenten les propostes dels exercicis i activitats (p. 14). [IA1]</p>	<p>– También, al tratarse de matemática, pero vinculada al mundo real y en entornos conocidos por los estudiantes, despertó su motivación, ya que pueden apreciar la utilidad que presentan las propuestas de los ejercicios y actividades (p. 14). [IA1]</p>	<p>– Also, since it is about mathematics, but linked to the real world and in environments known to the students, it aroused their motivation, since they can appreciate the usefulness of the proposals of the exercises and activities (p. 14). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– Al tractar-se de la temàtica funcions i gràfiques, molts dels exercicis proposats en el dossier de treball, s'han pogut contextualitzar amb</p>	<p>– Al tratarse de la temática de funciones y gráficas, muchos de los ejercicios propuestos en el dossier de trabajo se pudieron contextualizar con temas</p>	<p>– When dealing with the topic of functions and graphs, many of the exercises proposed in the work dossier could be contextualised with</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>temes socioculturals. També s'han fet connexions amb la física, per introduir la funció de proporcionalitat directa, s'ha utilitzat la teoria de la Llei de Hooke (p. 18). [IEc2]</p> <p>– Com s'ha comentat, moltes de les activitats i exercicis proposats tractaven de ser contextualitzades, com per exemple, en l'exercici que relaciona la quantitat de gasoil consumit per un cotxe en funció del temps de trajecte que ha realitzat, o, com el preu de la llum varia en funció del seu consum (p. 18). [IEc3]</p>	<p>socioculturales. También, se realizaron conexiones con la física, para introducir la función de proporcionalidad directa se utilizó la teoría de la Ley de Hooke (p. 18). [IEc2]</p> <p>– Como se ha comentado, muchas de las actividades y ejercicios propuestos trataron de ser contextualizados como, por ejemplo, el ejercicio que relaciona la cantidad de combustible consumido por un vehículo en función del tiempo de trayecto realizado, o cómo el precio de la electricidad varía en función de su consumo (p. 18). [IEc3]</p>	<p>sociocultural issues. Also, connections with physics were made, to introduce the function of direct proportionality, the theory of Hooke's Law was used (p. 18). [EcS2]</p> <p>– As mentioned, many of the proposed activities and exercises tried to be contextualised, such as, for example, the exercise that relates the amount of fuel consumed by a vehicle based on the journey time made, or how the price of electricity varies depending on their consumption (p. 18). [EcS3]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– Idoneïtat ecològica: Tot i que ja es van contextualitzar molts dels exercicis proposats en el Dossier de treball, es podria potenciar la presència d'activitats que fessin referència a situacions sociolaborals, per així indirectament abocar als alumnes a la reflexió i consciència sobre temes d'actualitat (p. 19).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Durant el pràcticum he pogut promoure aquesta competència al contingut de la UD, contextualitzant conceptes amb altres matèries, com la física o les ciències socials. Aquest fet és molt favorable en quant a l'aprenentatge de l'alumne, ja que al contextualitzar els diferents conceptes es facilita l'enteniment d'aquests. El Màster ens ha proporcionat recursos que permeten aplicar aquest aspecte (p. 26).</p>	<p>– Idoneidad ecológica: Aunque ya se contextualizaron muchos de los ejercicios propuestos en el dossier de trabajo, se podría potenciar la presencia de actividades que hicieran referencia a situaciones sociolaborales, para así, indirectamente, abocar a los estudiantes a la reflexión y conciencia sobre temas de actualidad (p. 19).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Durante las prácticas pude promover esta competencia en el contenido de la UD, contextualizando conceptos con otras materias, como la física o las ciencias sociales. Este hecho es muy favorable en cuanto al aprendizaje del estudiante, ya que al contextualizar los distintos conceptos se facilita su entendimiento. El Máster nos ha proporcionado recursos que permiten aplicar este aspecto (p. 26).</p>	<p>– Ecological suitability: Although many of the exercises proposed in the work dossier have already been contextualised, the presence of activities that refer to social and labour situations could be promoted, in order to indirectly lead students to reflection and awareness on issues of today (p. 19).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: During the internship experiences, I was able to promote this competency in the content of the DU, contextualising concepts with other subjects, such as physics or social sciences. This fact is very favourable in terms of student learning, since by contextualising the different concepts, their understanding is facilitated. The master's programme provided us with resources that allow us to apply this aspect (p. 26).</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterion*	Original	Español	English
TFM/MFP #077			
Epistémico Epistemic	<p>– Contextualització: Fer ús d'explicacions i problemes del món real. Modelització: Traduir a models matemàtics situacions de la vida real i/o vinculades a altres branques del coneixement. Resolució de problemes: Exposar al grup d'alumnes a poder resoldre els problemes per diferents vies matemàtiques (p. 7). Contextualització: Quasi tots els problemes he intentat que s'acostin a la realitat (p. 8); Modelització: En la unitat didàctica realitzada no s'ha plantejat cap activitat concreta i ambiciosa de modelització. A la unitat didàctica inicial sí que es va proposar fer l'activitat 5 amb GeoGebra, amb formulació genèrica i promovent poder variar les dades inicials i, per tant, tenir diferents resultats. Però sí que hi ha hagut alguns problemes que comporten una part de modelització per argumentar la seva resolució (pp. 8–9); Resolució de problemes: S'ha potenciat molt la resolució de problemes a partir de diferents eines. Dins la teoria es promouen constantment i l'alumnat dona resposta a través d'aquestes i de maneres diferents, segons cada persona (p. 9). [IE3]</p>	<p>– Contextualización: Hacer uso de explicaciones y problemas del mundo real. Modelización: Traducir a modelos matemáticos situaciones de la vida real y/o vinculadas a otras ramas del conocimiento. Resolución de problemas: Exponer al grupo de estudiantes a poder resolver los problemas por diferentes vías matemáticas (p. 7). Contextualización: Casi todos los problemas intenté que se acercaran a la realidad (p. 8). Modelización: En la unidad didáctica realizada no se planteó ninguna actividad concreta y ambiciosa de modelización. En la unidad didáctica inicial sí se propuso realizar la actividad 5 con GeoGebra, con formulación genérica y promoviendo poder variar los datos iniciales y, por tanto, tener diferentes resultados. Pero sí que hubo algunos problemas que conllevan una parte de modelización para argumentar su resolución (pp. 8–9). Resolución de problemas: Se potenció mucho la resolución de problemas a partir de distintas herramientas. Dentro de la teoría se promueven constantemente y los estudiantes dan respuesta a través de éstas y de formas diferentes, según cada persona (p. 9). [IE3]</p>	<p>– Contextualisation: Make use of real-world explanations and problems. Modelling: Translate real-life situation and/or those linked to other branches of knowledge into mathematical models. Problem solving: Expose the group of students to being able to solve problems through different mathematical ways (p. 7). Contextualisation: Almost all the problems I tried to bring closer to reality (p. 8). Modelling: In the didactic unit carried out, no specific and ambitious modelling activity was proposed. In the initial didactic unit, it was proposed to carry out activity 5 with GeoGebra, with a generic formulation and promoting the ability to vary the initial data and, therefore, have different results. But there were some problems that involved modelling to argue for their solving (pp. 8–9). Problem solving: This process was greatly promoted using different tools. These tools are constantly promoted within the theory, and the students respond through them and in different ways, depending on each person (p. 9). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interaccional	X	X	X
Mediacional Mediational	X	X	X

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective	– Algunes de les activitats les vaig simplificar per poder mantenir l'atenció del grup. La majoria d'elles tenien problemes que permetien valorar la utilitat de les matemàtiques en la vida quotidiana i laboral. (p. 13). [IA1]	– Algunas de las actividades las simplifiqué para mantener la atención del grupo. La mayoría tenían problemas que permitían valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y laboral (p. 13). [IA1]	– I simplified some of the activities to keep the attention of the group. Most had problems that allowed assessing the usefulness of mathematics in daily and work life (p. 13). [AS1]
Ecológico Ecological	– Connexions extramatemàtiques es poden veure en els diferents problemes que podrien donar-se a la vida real, però no s'ha realitzat connexions explícites amb una altra disciplina (p. 17). [IEc2]	– Las conexiones extra-matemáticas pueden verse en los diferentes problemas que podrían darse en la vida real, pero no se realizaron conexiones explícitas con otras disciplinas (p. 17). [IEc2]	– The extra-mathematical connections can be seen in the different problems that could occur in real life, but no explicit connections with other disciplines were made (p. 17). [EcS2]
Otros Others	– Els continguts treballats: [...] 6. Resolució de problemes trigonomètrics contextualitzats d'una i de dues equacions (p. 5). – Idoneïtat epistèmica: En aquesta part caldria millorar el procés de comunicació, el de modelització i el d'algorithmització. Es pot ampliar la representativitat de les raons trigonomètriques (p. 18). – Activitat per desenvolupar el procés de modelització: S'incorpora una activitat amb full de càlcul o GeoGebra que permeti la resolució d'un tipus de problema trigonomètric en funció de diferents paràmetres, millorant la idoneïtat epistèmica (p. 22). – Contextualització i valor interdisciplinari: [...]. Després dels aprenentatges del Màster i conjuntament amb la meua experiència tinc una bona competència d'utilitzar els contextos extramatemàtics per aplicar-los a classe (p. 25). – Activitat de modelització: A l'activitat de "Mesurem en confinament?" que s'ha	– Los contenidos trabajados: [...]. 6. Resolución de problemas trigonométricos contextualizados de una o dos ecuaciones (p. 5). – Idoneidad epistémica: En esta parte habría que mejorar el proceso de comunicación, el de modelización, y el de algorithmización. Se puede ampliar la representatividad de las razones trigonométricas (p. 18). – Actividad para desarrollar el proceso de modelización: Se incorpora una actividad con hoja de cálculo o GeoGebra que permita la resolución de un tipo de problema trigonométrico en función de diferentes parámetros, mejorando la idoneidad epistémica (p. 22). – Contextualización y valor interdisciplinario: [...]. Después de los aprendizajes del Máster, y junto con mi experiencia, tengo una buena competencia para utilizar los contextos extra-matemáticos y aplicarlos en clase (p. 25).	– The contents addressed: [...]. 6. Solving of contextualised trigonometric problems with one or two equations (p. 5). – Epistemic suitability: In this part, the processes of communication, modelling, and algorithmicising should be improved. The representativeness of the trigonometric ratios can be expanded (p. 18). – Activity to develop the modelling process: An activity with a spreadsheet or GeoGebra is incorporated, which allows the solving of a type of trigonometric problem based on different parameters, improving epistemic suitability (p. 22). – Contextualisation and interdisciplinary value: [...]. After learning the master's programme, and along with my experience, I have a good competency to use extra-mathematical contexts and apply them in class (p. 25). – Modelling activity: In the "Shall we measure lockdown?" activity,

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>implementat a aquesta unitat didàctica, un dels problemes que ha tingut l'alumnat és arribar a alguns valors vàlids i lògics. Com, prèviament, han treballat amb el full de càlcul, es podria utilitzar aquesta eina i la modelització per arribar a ajustar-se a la solució i sobretot per poder solucionar qualsevol tipus de problemes d'aquest tipus (pp. 52–53).</p>	<p>– Actividad de modelización: En la actividad “¿Medimos el confinamiento?” que se implementó en esta unidad didáctica, uno de los problemas que tuvieron los estudiantes fue llegar a algunos valores válidos y lógicos. Como previamente trabajaron con la hoja de cálculo, podría utilizarse esta herramienta y la modelización para llegar a ajustarse a la solución y, sobre todo, para poder solucionar cualquier tipo de problemas de este tipo (pp. 52–53).</p>	<p>which was implemented in this didactic unit, one of the problems that the students had was to arrive at some valid and logical values. Since they previously worked with the spreadsheet, this tool and the modelling could be used to adjust to the solution and, above all, to be able to solve any type of problem of this type (pp. 52–53).</p>
TFM/MFP #080			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Modelització: Transformació d'una situació no matemàtica a una situació matemàtica a través d'un model per poder-la manipular matemàticament i extreure'n resultats. Contextualització: Ús de problemes del món real. Resolució de problemes: Traducció d'un problema a llenguatge matemàtic, ús d'eines de resolució i assaig d'estratègies diverses (p. 7). Modelització i resolució de problemes: En moltes de les activitats que s'han proposat tant en la fase presencial com virtual, els alumnes havien d'interpretar l'enunciat i traduir la situació donada a llenguatge matemàtic (algebraic) per tal de poder trobar la funció de la qual es tractava i treballar amb aquesta. [...]. Com veiem en els exemples presentats, podem dir que si hi ha hagut un procés de contextualització perquè els problemes que veiem ho son (p. 8). [IE3]</p>	<p>– Modelización: Transformación de una situación no-matemática en una situación matemática a través de un modelo para poder manipularla matemáticamente y extraer resultados. Contextualización: Uso de problemas del mundo real. Resolución de problemas: Traducción de un problema al lenguaje matemático, uso de herramientas de resolución, y ensayo de estrategias diversas (p. 7). Modelización y resolución de problemas: En muchas de las actividades que se propusieron, tanto en la fase presencial como virtual, los estudiantes debían interpretar el enunciado y traducir la situación dada al lenguaje matemático (algebraico) para poder encontrar la función de la que se trataba y trabajar con ésta. [...]. Como vemos en los ejemplos presentados, podemos decir que sí ha habido un proceso de contextualización porque</p>	<p>– Modelling: Transformation of a non-mathematical situation into a mathematical situation through a model to be able to manipulate it mathematically and extract results. Contextualisation: Use of real-world problems. Problem solving: Translation of a problem into mathematical language, use of solving tools, and testing of various strategies (p. 7). Modelling and problem solving: In many of the activities that were proposed, both in the face-to-face and virtual phases, the students had to interpret its wording and translate the given situation into mathematical language (algebraic) in order to find the function in question and work with it. [...]. As we see in the examples presented, we can say that there has been a contextualisation process because the problems we see are contextualised (p. 8). [ES3]</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
		los problemas que vemos son contextualizados (p. 8). [IE3]	
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Ahora, l'enunciat hauria d'estar relacionat amb una situació real propera i coneguda. D'aquesta manera els problemes o qüestions que es generin estaran contextualitzats. Així doncs, podem afirmar que amb aquesta nova activitat es corregiria la component de riqueses de processos pertanyent a la idoneïtat epistèmica (p. 25).</p> <p>– Sens dubte, ja durant el període de pràctiques en el període virtual, era conscient de la falta de contextualització dels arguments tractats, malgrat tot l'anàlisi de les diferents idoneïtats m'ha fet donar-me compte de quant aquest aspecte influeix en la valoració de la unitat didàctica (p. 28).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: El màster ha donat molta importància a la contextualització dels continguts i a crear coneixements amb altres disciplines. Considero que la planificació de la meua unitat didàctica si contempla la contextualització, però no les connexions amb altres disciplines. La meua intenció és incloure-la en les sessions futures (p. 30).</p>	<p>– Al mismo tiempo, el enunciado debería estar relacionado con una situación real cercana y conocida. De esta forma, los problemas o cuestiones que se generen estarán contextualizados. Así pues, podemos afirmar que, con esta nueva actividad, se corregiría el componente de riqueza de procesos perteneciente a la idoneidad epistémica (p. 25).</p> <p>– Ya durante el período de prácticas en el período virtual, era consciente de la falta de contextualización de los argumentos tratados. A pesar de todo, el análisis de las diferentes idoneidades me hizo notar cuánto influye este aspecto en la valoración de la unidad didáctica (p. 28).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: El máster ha dado mucha importancia a la contextualización de los contenidos y a crear conocimientos con otras disciplinas. Considero que la planificación de mi unidad didáctica sí contempla la contextualización, pero no las conexiones con otras disciplinas. Mi intención es incluirla en las sesiones futuras (p. 30).</p>	<p>– At the same time, the wording of the task should be related to a close and familiar real situation. In this way, the problems or questions that are generated will be contextualised. Thus, we can affirm that, with this new activity, the richness of processes component, belonging to the epistemic suitability, would be corrected (p. 25).</p> <p>– Already during the educational internship during the virtual period, I was aware of the lack of contextualisation of the discussed arguments. In spite of everything, the analysis of the different suitability criteria made me notice how much this aspect influences the assessment of the didactic unit (p. 28).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: The master's programme has given great importance to the contextualisation of the contents and to creating knowledge with other disciplines. I consider that the planning of my didactic unit does contemplate contextualisation, but not the connections with other disciplines. My intention is to include it in future sessions (p. 30).</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #083			
Epistémico Epistemic	X	X	X
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interaccional	X	X	X
Mediacional Mediational	X	X	X
Afectivo Affective	X	X	X
Ecológico Ecological	X	X	X
Otros Others	<p>– Per esmenar la idoneïtat cognitiva, l'altra idoneïtat que ha resultat poc valorada en l'anàlisi realitzat, es proposen activitats que requereixen una alta demanda cognitiva. El disseny d'aquestes activitats utilitza diferents representacions, diverses modelitzacions de fenòmens de l'entorn d'interès de l'alumne i, algunes d'elles, no totes, son riques en argumentació. Per tant, també es produeix una millora de la idoneïtat epistèmica (p. 5).</p> <p>– Resolució de problemes plantejant usant aquest objecte matemàtic. Hi ha diversos contextos on pot aparèixer: personal, laboral/educatiu, públic, científic. Fenomenologia (p. 9).</p> <p>– Els problemes plantejats connecten amb altres àrees de les matemàtiques pròpies del nivell de referència: uns son essencialment aritmètics i altres amb contingut geomètric, però potser manca modelització com es pot deduir de les activitats [...]. Per tant, es treballen les connexions amb una forta mancança en l'àmbit de la modelització (p. 9).</p>	<p>– Para subsanar la idoneidad cognitiva, la otra idoneidad que ha resultado poco valorada en el análisis realizado, se proponen actividades que requieren una alta demanda cognitiva. El diseño de estas actividades utiliza diferentes representaciones, diversas modelizaciones de fenómenos del entorno de interés del estudiante, y algunas de ellas, no todas, son ricas en argumentación. Por lo tanto, también se produce una mejora de la idoneidad epistémica (p. 5).</p> <p>– Resolución de problemas usando este objeto matemático. Hay varios contextos en los que puede aparecer: personal, laboral/educativo, público, científico. Fenomenología (p. 9).</p> <p>– Los problemas planteados conectan con otras áreas de la matemática propias del nivel de referencia: unos son esencialmente aritméticos y otros con contenido geométrico, pero quizás falta modelización, como puede deducirse de las actividades [...]. Por lo tanto, se trabajan las conexiones con una fuerte</p>	<p>– To correct cognitive suitability, the other suitability criterion that has been undervalued in the analysis conducted, activities that require a high cognitive demand are proposed. The design of these activities uses different representations, various modelling of phenomena in the students' environment of interest, and some of them, but not all, are rich in arguments. Therefore, there is also an improvement in epistemic suitability (p. 5).</p> <p>– Solve problems using this mathematical object. There are several contexts in which it can appear: personal, work/educational, public, scientific contexts. Phenomenology (p. 9).</p> <p>– The problems posed connect with other areas of mathematics typical of the reference level: some are essentially arithmetic and others with geometric content, but perhaps modelling is lacking, as can be deduced from the activities [...]. Therefore, the connections with a strong lack in the field of modelling are worked on (p. 9).</p> <p>– Neither has phenomenology been fully</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Tampoc s’ha tractat completament la fenomenologia: es tracta de presentar un context on l’objecte tingui una relació amb un fenomen de la vida quotidiana i des d’aquest punt de vista la UD te mancances (p. 9).</p> <p>– En resum, l’anàlisi de la idoneïtat epistèmica de la nostra UD revela que la proposta de millora ha d’anar encaminada a proposar activitats més riques en l’àmbit de la modelització, les diferents representacions, la millora de les connexions i, sobre tot, que doni peu a les argumentacions, és a dir, que incorpori discussió per poder treballar la millor la complexitat de l’objecte d’estudi. Dins de les connexions s’entén completar la fenomenologia amb aplicacions a la vida quotidiana (personal, social i científica) (p. 13).</p> <p>– Com es pot observar, torna a ser la contextualització, la presentació de models (modelització) i en definitiva el que s’ha diagnosticat a la idoneïtat epistèmica i cognitiva la línia de millora de la UD (p. 15).</p> <p>– S’han presentat activitats amb connexions intra-matemàtiques, sobre tot amb la geometria, però sí que hi ha una mancança important d’activitats amb connexions extra-matemàtiques. [...]. La part més feble de la idoneïtat ecològica és el fet que no s’ha presentat l’objecte en contextos d’aplicació de la vida quotidiana, social o professional (p. 17).</p>	<p>carencia en el ámbito de la modelización (p. 9).</p> <p>– Tampoco se ha tratado completamente la fenomenología: Se trata de presentar un contexto en el que el objeto tenga una relación con un fenómeno de la vida cotidiana y, desde este punto de vista, la UD tiene carencias (p. 9).</p> <p>– En resumen, el análisis de la idoneidad epistémica de nuestra UD revela que la propuesta de mejora debe ir encaminada a proponer actividades más ricas en el ámbito de la modelización, las diferentes representaciones, la mejora de las conexiones y, sobre todo, que dé pie a las argumentaciones, es decir, que incorpore la discusión para poder trabajar con mayor complejidad el objeto de estudio. Dentro de las conexiones se pretende completar la fenomenología con aplicaciones en la vida cotidiana (personal, social, y científica) (p. 13).</p> <p>– Como puede observarse, vuelve a ser la contextualización, la presentación de modelos (modelización) y, en definitiva, lo que se ha diagnosticado en la idoneidad epistémica y cognitiva, la línea de mejora de la UD (p. 15).</p> <p>– Se presentaron actividades con conexiones intra-matemáticas, sobre todo, con la geometría, pero sí que existe una carencia importante de actividades con conexiones extra-matemáticas. [...]. La parte más débil de la idoneidad ecológica es que no se ha presentado el objeto en contextos de</p>	<p>addressed: It is about presenting a context in which the object has a relationship with a phenomenon of everyday life, and from this point of view the DU is lacking (p. 9).</p> <p>– In summary, the analysis of the epistemic suitability of our DU reveals that the proposal for improvement must be aimed at proposing richer activities in the field of modelling, the different representations, the improvement of connections and, above all, that it allows the emergence of arguments, that is to say, that incorporates the discussion to be able to work with greater complexity the object of study. Within connections, it is intended to complete the phenomenology with applications in daily (personal, social, and scientific) life (p. 13).</p> <p>– As can be seen, it is again the contextualisation, the presentation of models (modelling) and, ultimately, what has been diagnosed in epistemic and cognitive suitability, the line of improvement of the DU (p. 15).</p> <p>– Activities with intra-mathematical connections were presented, especially with geometry, but there is a significant lack of activities with extra-mathematical connections. [...]. The weakest part of the ecological suitability is that the object has not been presented in application contexts of everyday, social, or professional life (p. 17).</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Un cop s’incloguin activitats on les equacions de primer grau tinguin un paper rellevant aplicat als contextos mencionats, millorarà molt la idoneïtat ecològica al treballar millor les connexions, però s’encadenaran una sèrie de millores ja que la nostra UD te aquesta mancança comú: millorarà la idoneïtat emocional al presentar activitats útils en la vida quotidiana i professional de l’alumnat; millorarà la idoneïtat mediacional al contextualitzar i presentar situacions concretes d’interès per l’alumne; [...]; i per últim, millorarà la idoneïtat epistèmica si afegim modelització [...] en aquestes noves activitats que s’han de dissenyar (p. 18).</p> <p>– Aquesta línia de millora de la qualitat matemàtica de la unitat didàctica es basa en proposar activitats on l’objecte (les equacions de primer grau) tinguin un paper rellevant, s’apliquin en contextos més interessants per l’alumnat on intervingui la modelització i es requereixi una alta demanda cognitiva (p. 19).</p> <p>– Valoració oberta del màster: [...] i la importància de la matemàtica en la modelització que ens permet apropar-nos a explicar matemàticament fenòmens de la nostra realitat (p. 24).</p> <p>– El condensador: En aquesta activitat es presenta un fenomen físic i es proposa deduir el seu model matemàtica. Per tant, l’activitat te una connexió extra-matemàtica, augmentant la</p>	<p>aplicación de la vida cotidiana, social, o profesional (p. 17).</p> <p>– Una vez que se incluyan actividades donde las ecuaciones de primer grado tengan un papel relevante aplicado a los contextos mencionados, mejorará mucho la idoneidad ecológica al trabajar mejor las conexiones, pero se encadenarán una serie de mejoras, ya que nuestra UD tiene esta carencia común. Mejorará la idoneidad emocional al presentar actividades útiles en la vida cotidiana y profesional de los estudiantes; mejorará la idoneidad mediacional al contextualizar y presentar situaciones concretas de interés para el estudiante; [...]; y, por último, mejorará la idoneidad epistémica si añadimos modelización [...] en estas nuevas actividades que deben diseñarse (p. 18).</p> <p>– Esta línea de mejora de la calidad matemática de la unidad didáctica se basa en proponer actividades donde el objeto (las ecuaciones de primer grado) tengan un papel relevante, se apliquen en contextos más interesantes para los estudiantes en el que intervenga la modelización y se requiera una alta demanda cognitiva (p. 19).</p> <p>– Valoración abierta del máster: [...] y la importancia de la matemática en la modelización, que nos permite acercarnos a explicar matemáticamente fenómenos de nuestra realidad (p. 24).</p> <p>– El condensador: En esta actividad se presenta un</p>	<p>– Once activities where first-degree equations have a relevant role applied to the contexts mentioned above are included, the ecological suitability will greatly improve by working on connections better, but a series of improvements will be chained, since our DU has this common lack. The emotional suitability will improve by presenting useful activities in the students’ daily and professional life; the mediational suitability will improve by contextualising and presenting specific situations of interest to the student; [...]; and, finally, the epistemic suitability will improve if we add modelling [...] in these new activities that must be designed (p. 18).</p> <p>– This line of improvement of the mathematical quality of the didactic unit is based on proposing activities where the object (first-degree equations) has a relevant role, are applied in more interesting contexts for the students in which modelling is involved and requires a high cognitive demand (p. 19).</p> <p>– Open assessment of the master’s programme: [...] and the importance of mathematics in modelling, which allows us to get closer to mathematically explaining phenomena of our reality (p. 24).</p> <p>– The condenser: In this activity, a physical phenomenon is presented, and it is proposed to deduce its mathematical model. Therefore, the activity has an extra-mathematical connection, increasing the ecological</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>idoneïtat ecològica; proposa també una senzilla simulació per extreure'n les dades i es contextualitza en una situació concreta que forma part del temari del currículum de l'alumne (p. 79).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Aquesta competència s'ha treballat molt en el màster, especialment en el relatiu a la proposta de millora de la meua UD donat que a la programació inicial hi mancava la contextualització i la modelització. Per tal de produir una millora significativa de la UD s'ha treballat en profunditat el disseny d'activitats riques en contingut matemàtic i que comportin l'ús o la construcció d'un model matemàtic i també la seva contextualització extra-matemàtica, sobre tot relacionat amb les matèries de física-química, tecnologia i economia (p. 104).</p>	<p>fenómeno físico y se propone deducir su modelo matemático. Por lo tanto, la actividad tiene una conexión extra-matemática, aumentando la idoneidad ecológica; propone también una sencilla simulación para extraer sus datos y se contextualiza en una situación concreta que forma parte del temario del currículo del estudiante (p. 79).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Esta competencia se trabajó mucho en el máster, especialmente, en lo relativo a la propuesta de mejora de mi UD, dado que en la programación inicial faltaba la contextualización y la modelización. Para producir una mejora significativa de la UD se trabajó en profundidad el diseño de actividades ricas en contenido matemático y que comporten el uso o construcción de un modelo matemático y, también, su contextualización extra-matemática, sobre todo, relacionado con las asignaturas de física-química, tecnología, y economía (p. 104).</p>	<p>suitability; a simple simulation to extract its data is also proposed, which is contextualised in a specific situation that is part of the student's curriculum agenda (p. 79).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: This competency was worked on a lot in the master's programme, especially in relation to the proposal to improve my DU, since contextualisation and modelling were lacking in the initial planning. In order to produce a significant improvement of the DU, the design of activities rich in mathematical content and that involve the use or construction of a mathematical model and also its extra-mathematical contextualisation was worked in depth, especially related to the subjects of physics-chemistry, technology, and economics (p. 104).</p>
TFM/MFP #087			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– En quant a la resolució de problemes, vaig ensenyar als alumnes diferents maneres de resoldre els problemes proposats i en els exercicis proposats els alumnes van mecanitzar aquells procediments més eficients per resoldre els problemes. No obstant, em va faltar donar temps als alumnes per a que poguessin explorar diferents problemes contextualitzats que despertessin el seu</p>	<p>– En cuanto a la resolución de problemas, enseñé a los estudiantes diferentes formas de resolver los problemas propuestos y, en los ejercicios propuestos, los estudiantes mecanizaron aquellos procedimientos más eficientes para resolver los problemas. Sin embargo, me faltó dar tiempo a los estudiantes para que pudieran explorar distintos problemas contextualizados que</p>	<p>– Regarding problem solving, I taught the students different ways to solve the proposed problems, and in the exercises, the students mechanised those most efficient procedures to solve the problems. However, I lacked time for the students so that they could explore different contextualised problems that aroused their interest in the topic of the didactic unit (p. 7). [ES3]</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	interès pel tema de la unitat didàctica (p. 7). [IE3]	despertaran su interés por el tema de la unidad didáctica (p. 7). [IE3]	
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Crec que aquestes dades són un indicador de que cal contextualitzar més el contingut de la meua unitat didàctica les quals promoguin situacions que permetin valorar la utilitat de les matemàtiques en la vida quotidiana i professional (p. 9). [IA1]	– Creo que estos datos son un indicador de que es necesario contextualizar más el contenido de mi unidad didáctica, para que se promuevan situaciones que permitan valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional (p. 9). [IA1]	– I believe that these data are an indicator that it is necessary to further contextualise the content of my didactic unit, so that situations are promoted that allow assessing the usefulness of mathematics in daily and professional life (p. 9). [AS1]
Ecològic Ecological	– En quant a les diferents connexions dins els diferents continguts matemàtics i/o d'altres disciplines, en la impartició de la meua unitat didàctica no les vaig fomentar i per tant penso que aquest punt és un punt a millorar juntament amb la contextualització de la meua unitat didàctica (p. 12). [IEc2]	– En cuanto a las diferentes conexiones dentro de los distintos contenidos matemáticos y/o de otras disciplinas, en la impartición de mi unidad didáctica no las fomenté y, por tanto, pienso que este punto se debe mejorar, junto con la contextualización de mi unidad didáctica (p. 12). [IEc2]	– Regarding the different connections within the different mathematical contents and/or other disciplines, I did not promote them in the teaching of my didactic unit, therefore, I think that this point should be improved, along with the contextualisation of my didactic unit (p. 12). [EcS2]
Otros Others	– Finalment, la idoneïtat ecològica és clarament un punt feble de la meua unitat didàctica ja que no la vaig contextualitzar prou bé ni tampoc vaig incloure connexions intra ni interdisciplinàries. Més en concret crec que els punts a millorar són: La contextualització i les connexions [...] (p. 13). – Contextualització i connexions: Un dels punts principals a millorar en la meua unitat didàctica és la contextualització i les connexions d'aquesta. Penso que en un Batxillerat de Ciències Socials, el fet de treballar un tema com és el de límits i continuïtat és una bona oportunitat per a proposar	– Finalmente, la idoneidad ecológica es claramente un punto débil de mi unidad didáctica, ya que no la contextualicé bien ni incluí conexiones intra ni interdisciplinarias. Más en concreto, creo que los puntos para mejorar son la contextualización y las conexiones [...] (p. 13). – Contextualización y conexiones: Uno de los puntos principales para mejorar en mi unidad didáctica es su contextualización y conexiones. Pienso que, en un Bachillerato de Ciencias Sociales, trabajar un tema como el de límites y continuidad es una buena oportunidad para proponer actividades más	– Finally, the ecological suitability is clearly a weak point of my didactic unit, since I did not contextualise it well nor did I include intra- or interdisciplinary connections. More specifically, I think the points to improve are contextualisation and connections (p. 13). – Contextualisation and connections: One of the main points to improve in my didactic unit is its contextualisation and connections. I think that, in a Social Sciences Baccalaureate, working on a topic such as limits and continuity is a good opportunity to propose more contextualised and

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>activitats més contextualitzades i transversals que siguin més properes a l'alumne i que el motivin a aprendre els continguts pretendos. Per aquest motiu la nostra millora estarà centrada en bona part en la contextualització i les connexions de la unitat didàctica. Per assolir aquest objectiu, proposarem activitats de modelització matemàtica basades en els diferents impactes que ha tingut el COVID-19 en la nostra societat (p. 15).</p> <p>– Pel que fa a l'activitat d'ampliació inclouria problemes amb més dificultat així com també problemes contextualitzats on l'alumne hagi d'aplicar els seus coneixements a problemes que requereixin fer connexions amb continguts d'altres matèries (p. 16).</p> <p>– Activitat 3: Modelització del COVID-19 (pp. 20–21).</p> <p>– Activitat 3: Modelització del COVID-19 (pp. 47–49).</p>	<p>contextualizadas y transversales que sean más cercanas al estudiante y que le motiven a aprender los contenidos pretendidos. Por este motivo, nuestra mejora está centrada, en buena parte, en la contextualización y las conexiones de la unidad didáctica. Para conseguir este objetivo, propondremos actividades de modelización matemática basadas en los diferentes impactos que ha tenido el COVID-19 en nuestra sociedad (p. 15).</p> <p>– En cuanto a la actividad de ampliación, incluiría problemas con mayor dificultad, así como problemas contextualizados donde el estudiante deba aplicar sus conocimientos a problemas que requieran realizar conexiones con contenidos de otras materias (p. 16).</p> <p>– Actividad 3: Modelización del COVID-19 (pp. 20–21).</p> <p>– Actividad 3: Modelización del COVID-19 (pp. 47–49).</p>	<p>transversal activities that are closer to the students and that motivate them to learn the intended contents. For this reason, our improvement is largely focused on the contextualisation and connections of the didactic unit. To achieve this goal, we will propose mathematical modelling activities based on the different impacts that COVID-19 has had on our society (p. 15).</p> <p>– Regarding the extension activity, it would include more difficult problems, as well as contextualised problems where the students must apply their knowledge to problems that require making connections with contents of other subjects (p. 16).</p> <p>– Activity 3: Modelling of COVID-19 (pp. 20–21).</p> <p>– Activity 3: Modelling of COVID-19 (pp. 47–49).</p>
TFM/MFP #088			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: Aquest procés ha estat present durant tota la unitat didàctica, traduint un problema a llenguatge matemàtic, utilitzant representacions gràfiques de funcions, expressions algebraiques i taula de dades. Els alumnes havien de resoldre situacions en que cal identificar relacions entre variables i determinar-ne la funció que pot modelitzar-la (p. 7). Contextualització: [...]. A la unitat didàctica s'ha seleccionat una mostra representativa de situacions</p>	<p>– Resolución de problemas: Este proceso ha estado presente durante toda la unidad didáctica, traduciendo un problema al lenguaje matemático, utilizando representaciones gráficas de funciones, expresiones algebraicas, y tabla de datos. Los estudiantes debían resolver situaciones en las que es necesario identificar relaciones entre variables y determinar la función que puede modelizarla (p. 7). Contextualización: [...]. En la unidad didáctica se seleccionó una muestra representativa de</p>	<p>– Problem solving: This process has been present throughout the didactic unit, translating a problem into mathematical language, using graphical representations of functions, algebraic expressions, and data tables. The students had to solve situations in which it is necessary to identify relationships between variables and determine the function that can model them (p. 7). Contextualisation: [...]. In the didactic unit, a representative sample of contextualised situations</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>contextualitzades, [...]. La dificultat resideix en arribar a un equilibri entre “problemes” i “exercicis”. En aquest sentit, crec que alguns aspectes s’han treballat de manera més tècnica per poder adquirir habilitats en la determinació de les característiques de les funcions, o la representació gràfica d’algunes funcions, en detriment de l’exploració i la investigació. Tot i que s’ha intentat introduir cada tipus de funció amb una situació propera contextualitzada, penso que es podria millorar la unitat cercant situacions que es puguin relacionar amb contextos acadèmics extramatemàtics i establint connexions (p. 8). [IE3].</p> <p>– La relació entre variables s’ha treballat en activitats contextualitzades com l’activitat 10 que descriu amb un gràfic un viatge en bicicleta amb les variables distància i temps, o en l’activitat 18 d’omplir recipients amb el nivell d’aigua del recipient en funció del temps com a variables. [...]. Situacions-problemes: Algunes activitats s’han aproximat a situacions reals que requerien l’ús d’habilitats, conceptes i processos matemàtics. [...]. A la unitat hi ha diferents problemes segons el tipus de funció que s’ha treballat (p. 9). [IE4]</p>	<p>situaciones contextualizadas, [...]. La dificultad reside en llegar a un equilibrio entre problemas y ejercicios. En este sentido, creo que algunos aspectos se trabajaron de forma más técnica para poder adquirir habilidades en la determinación de características de las funciones, o la representación gráfica de algunas funciones, en detrimento de la exploración y la investigación. Aunque se intentó introducir cada tipo de función con una situación cercana y contextualizada, creo que se podría mejorar la unidad buscando situaciones que puedan relacionarse con contextos académicos extra-matemáticos y estableciendo conexiones (p. 8). [IE3]</p> <p>– La relación entre variables se trabajó en actividades contextualizadas, como la actividad 10 que describe un viaje en bicicleta con un gráfico a partir de las variables de distancia y tiempo; o en la actividad 18 de llenar recipientes con el nivel de agua del recipiente en función del tiempo como variables. [...]. Situaciones-problema: Algunas actividades se han aproximado a situaciones reales que requerían el uso de habilidades, conceptos, y procesos matemáticos. [...]. En la unidad existen diferentes problemas según el tipo de función que se trabajaba (p. 9). [IE4]</p>	<p>was selected, [...]. The difficulty lies in reaching a balance between problems and exercises. In this sense, I think that some aspects were worked on in a more technical way to be able to acquire skills in determining the characteristics of the functions, or the graphical representation of some functions, to the detriment of exploration and investigation. Although an attempt was made to introduce each type of function with a close and contextualised situation, I think the unit could be improved by looking for situations that can be related to extra-mathematical academic contexts and establishing connections (p. 8). [ES3]</p> <p>– The relationship between variables was worked on in contextualised activities, such as activity 10 that describes a bicycle trip with a graph based on the distance and time variables; or in activity 18 about filling containers with the level of water in the container as a function of time as variables. [...]. Problem-situations: Some activities have been approximated to real situations that required the use of mathematical skills, concepts, and processes. [...]. There are different problems in the unit depending on the type of function being worked on (p. 9). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interaccional	X	X	X

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
Mediacional Mediational	– A la unitat no estava previst l'ús de materials manipulatius. Aquest és un punt que caldria tenir en compte de cada a facilitar l'aprenentatge amb situacions contextualitzades (per exemple, fent barreges de materials i proporcions per treballar les funcions racionals) (p. 13). [IM1]	– En la unidad no estaba previsto el uso de materiales manipulativos. Éste es un punto que debería tenerse en cuenta de cara facilitar el aprendizaje con situaciones contextualizadas (por ejemplo, haciendo mezclas de materiales y proporciones para trabajar las funciones racionales (p. 13). [IM1]	– The use of manipulative materials was not foreseen in the unit. This is a point that should be taken into account in order to facilitate learning with contextualised situations (for example, mixing materials and proportions to work on rational functions) (p. 13). [MS1]
Afectivo Affective	– Amb la contextualització de les activitats, s'ha intentat que els alumnes mostressin interès pels continguts treballats durant la unitat. Val a dir que possiblement no s'han tractat temes de rellevància per ells però sí que donessin sentit a la competència matemàtica i permetés valorar la seva utilitat en la vida quotidiana i professional (p. 14). [IA1]	– Con la contextualización de las actividades se intentó que los estudiantes mostraran interés por los contenidos trabajados durante la unidad. Cabe destacar que, posiblemente, no se trataron temas de relevancia para ellos, pero sí que dieran sentido a la competencia matemática y que permitieran valorar su utilidad en la vida cotidiana y profesional (p. 14). [IA1]	– With the contextualisation of the activities, an attempt was made for the students to show interest in the contents worked on during the unit. It should be noted that, possibly, topics of relevance to them were not covered, but they did give meaning to mathematical competency and allowed to assess its usefulness in daily and professional life (p. 14). [AS1]
Ecológico Ecological	– La unitat didàctica s'ha presentat de manera que permeti als alumnes prendre consciència de la importància de les funcions en el món real. Aquesta aproximació s'ha fet presentant situacions de la vida quotidiana, per exemple a la primera sessió (p. 15). [IEc3]	– La unidad didáctica se presentó de forma que permita a los estudiantes tomar conciencia de la importancia de las funciones en el mundo real. Esta aproximación se realizó presentando situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, en la primera sesión (p. 15). [IEc3]	– The didactic unit was presented in a way that allows the students to become aware of the importance of functions in the real world. This approximation was made by presenting everyday life situations, for example, in the first session (p. 15). [IEc3]
Otros Others	– És a dir, no es tracta d'aplicar les matemàtiques teòriques a una situació contextualitzada, sinó en que l'alumnat capti les matemàtiques que apareixen en el context i les treballi per donar resposta a la situació plantejada (p. 2). – A través de l'aplicació contextualitzada dels conceptes treballats en la UD, s'ha volgut fomentar	– Es decir, no se trata de aplicar la matemática teórica a una situación contextualizada, sino que los estudiantes capten la matemática que aparece en el contexto y la trabajen para dar respuesta a la situación planteada (p. 2). – A través de la aplicación contextualizada de los conceptos trabajados en la UD, se quiso fomentar la actitud positiva de los	– That is, it is not about applying theoretical mathematics to a contextualised situation, but rather that the students grasp the mathematics that appears in the context and work on it to respond to the situation posed (p. 2). – Through the contextualised application of the concepts worked on at the DU, we wanted to promote a positive attitude

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>l'actitud positiva de l'alumnat envers les matemàtiques, mostrar la utilitat en resoldre situacions diferents, i treballar la seva capacitat reflexiva i resolutive, al mateix temps que desenvolupen competències i consoliden conceptes (p. 4).</p> <p>– L'estudi de les característiques, propietats i diferents models de les funcions, permet conèixer la relació entre una gran quantitat de parells de variables que corresponen a fenòmens de les ciències i que apareixen en situacions quotidianes de la vida (p. 4).</p> <p>– Les activitats matemàtiques laborals són problemes reals, pràctics, diversos i contextualitzats en els quals el docent pot situar a l'alumne en el món en que estem. En alguns casos l'activitat matemàtica laboral consisteix en aplicacions de les matemàtiques institucionalitzades. En d'altres, pel contrari, es parteix del problema al qual s'enfronta el professional i es desenvolupen idees i procediments matemàtics (p. 20).</p> <p>– Després de l'anàlisi realitzat, es pot veure que les idoneïtats en les que s'hauria d'incidir prioritàriament són l'epistèmica, l'emocional i l'ecològica. Es podria dir que hi ha una factor comú que pot ajudar a resoldre les deficiències que s'han trobat. Seria la introducció de més problemes contextualitzats. Per una banda treballaríem la contextualització i la representativitat en alguns</p>	<p>estudiantes hacia la matemática, mostrar la utilidad al resolver situaciones diferentes, y trabajar su capacidad reflexiva y resolutive, al mismo tiempo que desarrollaban competencias y consolidaban conceptos (p. 4).</p> <p>– El estudio de las características, propiedades, y diferentes modelos de las funciones permite conocer la relación entre una gran cantidad de pares de variables que corresponden a fenómenos de las ciencias y que aparecen en situaciones cotidianas de la vida (p. 4).</p> <p>– Las actividades matemáticas laborales son problemas reales, prácticos, diversos, y contextualizados en los que el docente puede situar al estudiante en el mundo en el que estamos. En algunos casos, la actividad matemática laboral consiste en aplicaciones de la matemática institucionalizada. En otros, por el contrario, se parte del problema al que se enfrenta un profesional y se desarrollan ideas y procedimientos matemáticos (p. 20).</p> <p>– Después del análisis realizado se puede ver que las idoneidades en las que debería incidir prioritariamente son la epistémica, afectiva, y ecológica. Se podría decir que existe un factor común que puede ayudar a resolver las deficiencias que se han encontrado, la cual sería la introducción de más problemas contextualizados. Por una parte, trabajaríamos la contextualización y la</p>	<p>in the students towards mathematics, show its usefulness in solving different situations, and work on their reflective and problem-solving capacity, while developing competencies and consolidated concepts (p. 4).</p> <p>– The study of the characteristics, properties, and different models of functions, allows us to know the relationship between a large number of pairs of variables that correspond to science phenomena and that appear in everyday life situations (p. 4).</p> <p>– The mathematical work activities are real, practical, diverse, and contextualised problems in which the teacher can place the student in the world in which we are. In some cases, the work mathematical activity consists of applications of institutionalised mathematics. In others, on the contrary, we start from the problem faced by a professional and mathematical ideas and procedures are developed (p. 20).</p> <p>– After the analysis conducted, it can be seen that the suitability criteria that should be prioritised are the epistemic, affective, and ecological. It could be said that there is a common factor that can help to solve the deficiencies that have been found, which would be the introduction of more contextualised problems. On the one hand, we would work on contextualisation and representativeness in some types of functions, thus</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>tipus de funcions, millorant així la idoneïtat epistèmica. Si a més en aquests problemes es fan connexions amb altres matèries s'estarà millorant també la idoneïtat ecològica, fent veure als alumnes la utilitat de les matemàtiques més enllà de l'aula, i fent-les més properes augmentaria la seva motivació, i per tant la millora de la idoneïtat emocional (p. 20).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Durant tot el curs s'ha constatat en moltes de les assignatures la importància de la contextualització de les matemàtiques. He pogut implementar-ho en la unitat didàctica durant el Pràcticum, però on he acabat de consolidar ha estat amb aquest treball, que després de l'anàlisi i la valoració, m'ha ajudat a millorar en aquest sentit la meua proposta (p. 26).</p> <p>– Activitat 9: Modelitzar un problema de la vida quotidiana emprant la funció matemàtica que millor la descriu (p. 46).</p>	<p>representatividad en algunos tipos de funciones, mejorando así la idoneidad epistémica. Si además en estos problemas se hacen conexiones con otras materias, también se estará mejorando la idoneidad ecológica, haciendo ver a los estudiantes la utilidad de la matemática más allá del aula y haciéndolas más cercanas, lo que aumentaría su motivación y, por tanto, mejoraría la idoneidad afectiva (p. 20).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Durante todo el curso se ha constatado, en muchas asignaturas, la importancia de la contextualización de la matemática. Pude implementarla en la unidad didáctica durante las prácticas, pero donde he acabado de consolidarme ha sido con este trabajo que, después del análisis y la valoración, me ha ayudado a mejorar mi propuesta en este sentido (p. 26).</p> <p>– Actividad 9: Modelizar un problema de la vida cotidiana utilizando la función matemática que mejor la describa (p. 46).</p>	<p>improving the epistemic suitability. In addition, if connections with other subjects are made in these problems, the ecological suitability will also be improved, making the students see the usefulness of mathematics beyond the classroom and making them closer, which would increase their motivation and, therefore, improving the affective suitability (p. 20).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Through the course, the importance of the contextualisation of mathematics has been verified in many subjects. I was able to implement it in the didactic unit during the internship experiences, but where I have finished consolidating myself has been with this project that, after its analysis and assessment, has helped me improve my proposal in this regard (p. 26).</p> <p>– Activity 9: Model a problem from everyday life using the mathematical function that better describes it (p. 46).</p>
TFM/MFP #089			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Modelització: Elaborar un model matemàtic que representi o descriu adequadament un fenomen, un objecte o un procés matemàtic. [...]. Resolució de problemes: Plantejar i resoldre diferents tipus de problemes matemàtics (algorítmic, aplicats, de resposta oberta/tancada) mitjançant diverses vies (p. 8). Contextualització: Ús de situacions o problemes del món real en entorns matemàtics. [...]. Per altra banda, les activitats</p>	<p>– Modelización: Elaborar un modelo matemático que represente o describa adecuadamente un fenómeno, un objeto, o un proceso matemático. [...]. Resolución de problemas: Plantear y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos (algorítmicos, aplicados, de respuesta abierta/cerrada) mediante diversas vías (p. 8). Contextualización: Uso de situaciones o problemas del mundo real en entornos matemáticos. [...]. Por otra</p>	<p>– Modelling: Develop a mathematical model that adequately represents or describes a phenomenon, an object, or a mathematical process. [...]. Problem solving: Pose and solve different types of mathematical problems (algorithmic, applied, open/closed response) through various routes (p. 8). Contextualisation: Use of real-world situations or problems in mathematical settings. [...]. On the other hand, the initial and</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	inicials i intermèdies es basen en situacions del món real contextualitzades per introduir conceptes molt senzills però molt potents i que es faran servir al llarg de tota la UD. [...]. Per altra banda, els processos de modelització i exploració inicialment s'anaven a treballar a partir de GeoGebra amb construccions realitzades per l'alumnat [...] (p. 9). [IE3]	parte, las actividades iniciales e intermedias se basan en situaciones del mundo real contextualizadas para introducir conceptos muy sencillos, pero muy potentes, y que se utilizarán a lo largo de toda la UD. [...]. Por otra parte, los procesos de modelización y exploración, inicialmente, se iban a trabajar a partir de GeoGebra con construcciones realizadas por los estudiantes [...] (p. 9). [IE3]	intermediate activities are based on contextualised real-world situations to introduce very simple, yet very powerful concepts that will be used throughout the DU. [...]. On the other hand, the modelling and exploration processes, initially, were going to work from GeoGebra with constructions made by the students [...] (p. 9). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– Contextualització: l'Activitat 1 [...] treballa en cada diapositiva un concepte dels vectors contextualitzat en diverses ocasions a situacions quotidianes o properes (p. 13). [IC4]	– Contextualización: La Actividad 1 [...] trabaja un concepto de los vectores en cada diapositiva, contextualizado en mayormente en situaciones cotidianas o cercanas (p. 13). [IC4]	– Contextualisation: Activity 1 [...] works on a concept of vectors on each slide, contextualised mostly in everyday or close situations (p. 13). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	– Per treballar adequadament les activitats i poder realitzar-ne algunes addicionals i treballar la resolució de problemes i/o tractar en profunditat els conceptes que presenten més dificultats, caldria introduir 1 o 2 sessions addicionals a la planificació [...] (p. 17). [IM3]	– Para trabajar adecuadamente las actividades y poder realizar algunas adicionales y trabajar la resolución de problemas y/o tratar en profundidad los conceptos que presentaban mayores dificultades, habría que introducir una o dos sesiones adicionales en la planificación [...] (p. 17). [IM3]	– In order to adequately work on the activities and be able to carry out some additional ones and work on problem solving and/or deal in depth with the concepts that presented the greatest difficulties, one or two additional sessions would have to be introduced in the planning [...] (p. 17). [MS3]
Afectivo Affective	– Les Activitats 1, 2 i 3 estan dissenyades i adaptades a partir de les propostes de Dan Meyer (2007), Demetriadou i Tzanakis (2001) i Ródenas (2017), basades en contextos reals els quals faciliten les connexions extra-matemàtiques amb el temari de vectors en el pla i el món real. A mesura que la seqüència didàctica es complica i el temari és	– Las Actividades 1, 2, y 3 están diseñadas y adaptadas a partir de las propuestas de Dan Meyer (2007), Demetriadou y Tzanakis (2001), y Ródenas (2017), basadas en contextos reales, los cuales facilitan las conexiones extra-matemáticas con el temario de vectores en el plano y el mundo real. A medida que la secuencia	– Activities 1, 2, and 3 are designed and adapted from the proposals by Dan Meyer (2007), Demetriadou and Tzanakis (2001), and Ródenas (2017), based on real contexts, which facilitate extra-mathematical connections with the topic of vectors in the plane and the real world. As the didactic sequence becomes more complicated and the

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>més abstracte, la contextualització desapareix i les situacions i contextos no es poden assimilar a la vida quotidiana o professional directa, però si faciliten la modelització per a la seva comprensió (Approva i Berezovski, 2016). [...]. Un sondeig previ en la Fase I hagués ajudat a contextualitzar millor les activitats (p. 17). [IA1]</p> <p>– Tot i haver emprat eines TIC per treballar les matemàtiques a través de models [...] i observar-les a partir de fenòmens [...] i els esports [...], no s'ha connectat amb l'alumnat (p. 18). [IA3]</p>	<p>didáctica se complica y el temario es más abstracto, la contextualización desaparece y las situaciones y contextos no pueden asimilarse a la vida cotidiana o profesional directa, pero sí facilitan la modelización para su comprensión (Approva y Berezovski, 2016). [...]. Un sondeo previo en la Fase I hubiera ayudado a contextualizar mejor las actividades (p. 17). [IA1]</p> <p>– A pesar de utilizar herramientas TIC para trabajar la matemática a través de modelos [...] y observarlas a partir de fenómenos [...] y los deportes [...], no se ha conectado con los estudiantes (p. 18). [IA3]</p>	<p>agenda is more abstract, the contextualisation disappears and the situations and contexts cannot be assimilated to direct daily or professional life, but they do facilitate modelling for their understanding (Approva & Berezovski, 2016). [...]. A previous survey in Phase I would have helped to better contextualise the activities (p. 17). [AS1]</p> <p>– Despite using ICT tools to work on mathematics through models [...] and observe them from phenomena [...] and sports [...], it has not connected with the students (p. 18). [AS3]</p>
<p>Ecológico Ecological</p>	<p>– El component de connexions intra-matemàtiques i extra-matemàtiques és elevat, permeten contextualitzar en moltes ocasions situacions quotidianes a partir d'un punt de vista vectorial, així com diferents elements de les matemàtiques es relacionen entre si (p. 18). [IEc2]</p> <p>– La modelització de situacions a través de software com GeoGebra i promou la descoberta, anàlisi i argumentació de les propietats, definicions i operativa amb vectors incentiva i permet treballar processos matemàtics amb més facilitat i eficàcia que amb activitats de tipus reproductiu i classes magistrals (p. 19). [IEc4]</p>	<p>– El componente de conexiones intra- y extra-matemáticas es elevado, permiten contextualizar, en muchas ocasiones, situaciones cotidianas a partir de un punto de vista vectorial, así como diferentes elementos de la matemática que se relacionan entre sí (p. 18). [IEc2]</p> <p>– La modelización de situaciones a través del software GeoGebra y promover el descubrimiento, análisis, y argumentación de las propiedades, definiciones, y operaciones con vectores, incentiva y permite trabajar procesos matemáticos con mayor facilidad y eficacia que con actividades de tipo reproductivo y clases magistrales (p. 19). [IEc4]</p>	<p>– The intra- and extra-mathematical connections component is high, they allow contextualising, on many occasions, everyday situations from a vector point of view, as well as different elements of mathematics that are related to each other (p. 18). [EcS2]</p> <p>– The modelling of situations through the GeoGebra software and promoting the discovery, analysis, and argumentation of the properties, definitions, and operations with vectors, encourages and allows working on mathematical processes with greater ease and efficiency that with reproductive-type activities and master classes (p. 19). [EcS4]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– Idoneïtat emocional: Les activitats estan en gran part contextualitzades i segueixen una progressió lògica, tot i no connectar directament amb els</p>	<p>– Idoneidad afectiva: Las actividades están en gran parte contextualizadas y siguen una progresión lógica, a pesar de no conectar directamente con</p>	<p>– Affective suitability: The activities are largely contextualised and follow a logical progression, despite not directly</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	interessos de l'alumnat (p. 21). – Activitat “Viatjant amb vectors”: [...]. Promou processos poc treballats en la UD, permet modelitzar una situació donada, la necessitat d'explorar-la a partir de coneixements adquirits en sessions anteriors i generalitzar els fenòmens que s'observen (p. 24).	los intereses de los estudiantes (p. 21). – La actividad “Viajando con vectores”: [...]. Promueve procesos poco trabajados en la UD, permite modelizar una situación dada, la necesidad de explorarla a partir de conocimientos adquiridos en sesiones anteriores, y generalizar los fenómenos que se observan (p. 24).	connecting with the students' interests (p. 21). – The “Travelling with vectors” activity: [...]. It promotes processes little worked on in the DU, allows modelling a given situation, the need to explore it based on knowledge acquired in previous sessions, and generalise the phenomena that are observed (p. 24).
TFM/MFP #094			
Epistémico Epistemic	– Es veu clarament que es tracta d'una activitat on es desenvolupa la traducció a llenguatge matemàtic d'una situació real, propera al context diari de qualsevol alumne [...]. Aquesta competència és més complexa que l'anterior ja que per desenvolupar-la calen problemes on sigui l'alumne qui hagi de plantejar la seva pròpia estratègia de resolució (p. 6). En aquestes activitats es connecten les funcions amb la geometria i amb l'àlgebra. En general, en aquesta unitat es relacionen diverses parts de les matemàtiques, ja que, per exemple, el pendent de la recta és vist tant amb el significat geomètric, com l'àlgebraic/funcional. En aquestes activitats també s'activen les competències de la dimensió resolució de problemes (p. 7). [IE3]	– Se ve claramente que se trata de una actividad en la que se desarrolla una traducción al lenguaje matemático de una situación real, cercana al contexto diario de cualquier estudiante. [...]. Esta competencia es más compleja que la anterior ya que, para desarrollarla, se necesitan problemas donde sea el estudiante quien tenga que plantear su propia estrategia de resolución (p. 6). En estas actividades se conectan las funciones con la geometría y el álgebra. Por lo general, en esta unidad se relacionan diversas partes de la matemática ya que, por ejemplo, la pendiente de la recta es vista tanto con el significado geométrico como con el algebraico/funcional. En estas actividades, también se activan las competencias de la dimensión de resolución de problemas (p. 7). [IE3]	– It is clearly seen that it is an activity in which a translation into mathematical language of a real situation is carried out, close to the daily context of any student. [...]. This competency is more complex than the previous one since, to develop it, problems where the student is the one who has to propose their own solving strategies are needed (p. 6). In these activities, functions are connected with geometry and algebra. In general, in this unit, various parts of mathematics are related since, for example, the slope of the line is seen with both the geometric and the algebraic/functional meaning. In these activities, the competencies of the problem-solving dimension are also activated (p. 7). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– La contextualització de les activitats va captar immediatament la seva	– La contextualización de las actividades captó de inmediato su atención,	– The contextualisation of the activities immediately caught their attention, such

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	atenció, com l'activitat 4b on per saber el recorregut calia saber quina alçada feia l'edifici més alt del món. En la mesura que es va poder es van apropar els continguts a la seva realitat tot buscant situacions verosímils properes a ells (p. 15). [IA1]	como la actividad 4B donde, para saber el recorrido, era necesario saber qué altura tenía el edificio más alto del mundo. En la medida en que se pudo, se acercaron los contenidos a su realidad buscando situaciones verosímiles cercanas a ellos (p. 15). [IA1]	as activity 4B where, to know the route, it was necessary to know the height of the tallest building in the world. To the extent possible, the contents were brought closer to their reality, looking for credible situations close to them (p. 15). [AS1]
Ecológico Ecological	<p>– El contingut de funcions s'ha relacionat amb altres continguts matemàtics, com la geometria i l'àlgebra. Per altra banda, també s'han inclòs en les activitats, contingut extra matemàtic. Per exemple l'estudi de l'evolució de la població mundial o l'evolució de cultius en un laboratori, entre d'altres. Es tracta d'activitats contextualitzades connectades amb la seva vida real i amb altres assignatures (pp. 16–17). [IEc2]</p> <p>– Els continguts treballats són útils per a la inserció socio-laboral, perquè estan contextualitzats i tenen contacte amb fets que passen a la vida real i els hi servirà en el seu dia a dia. Un bon exemple és la tipologia de prova escrita on es planteja un viatge amb dades reals (p. 16). [IEc3]</p>	<p>– El contenido de funciones se relacionó con otros contenidos matemáticos, como la geometría y el álgebra. Por otra parte, también se incluyó contenido extra-matemático en las actividades. Por ejemplo, el estudio de la evolución de la población mundial o la evolución de cultivos en un laboratorio, entre otros. Se trata de actividades contextualizadas conectadas con su vida real y con otras asignaturas (pp. 16–17). [IEc2]</p> <p>– Los contenidos trabajados son útiles para la inserción sociolaboral, porque están contextualizados y tienen contacto con hechos que ocurren en la vida real y les servirá en su día a día. Un buen ejemplo es la tipología de prueba escrita en la que se plantea un viaje con datos reales (p. 16). [IEc3]</p>	<p>– The content of functions was related to other mathematical contents, such as geometry and algebra. On the other hand, extra-mathematical content was also included in the activities. For example, the study of the evolution of the world population or the evolution of cultures in a laboratory, among others. There are contextualised activities connected with their real life and with other subjects (pp. 16–17). [EcS2]</p> <p>– The contents worked on are useful for social and labour insertion because they are contextualised and have contact with events that occur in real life and will help them in their day to day. A good example is the type of written tests in which a trip with real data is proposed (p. 16). [EcS3]</p>
Otros Others	– Esta proposta empra com a eina essencial la modelització per apropar a l'alumnat a una situació real, fomentant el tàndem matemàtiques-realitat [...] i pretén motivar a l'alumne en l'aprenentatge, fent que recordi els coneixements anteriors sobre funcions i els apliqui en un context que està en la seva zona de desenvolupament proper (p. 18).	– Esta propuesta emplea como herramienta esencial la modelización para acercar a los estudiantes a una situación real, fomentando el tàndem matemática-realidad [...] y pretende motivar al estudiante en el aprendizaje, haciendo que recuerde los conocimientos anteriores sobre funciones y los aplique en un contexto que está en su	– This proposal uses modelling as an essential tool to bring the students closer to a real situation, fostering the mathematical-reality tandem [...] and aims to motivate the students in learning, making them remember previous knowledge about functions and apply them in a context that is in its zone

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Al màster s’ha remarcat la importància de treballar les matemàtiques des dels contextos intra i interdisciplinaris, sent conscients que els alumnes tindran més interès per allò que forma part de la seva vida. Però la posada en pràctica no és trivial i suposa un canvi respecte el que nosaltres mateixos vam experimentar com alumnes i la realitat que molts alumnes continuen tenint als seus centres (p. 26).</p> <p>– En finalitzar la UD l’alumnat hauria de ser capaç de: 1. Modelitzar un problema de la vida quotidiana emprant la funció matemàtica que millor la descriu. [...]. Contextualitzar i interpretar amb llenguatge propi una representació gràfica donada i crear-ne de noves que donin resposta a un context establert (p. 30).</p>	<p>zona de desarrollo cercano (p. 18).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En el máster se ha remarcado la importancia de trabajar la matemática desde los contextos intra- e interdisciplinarios, siendo conscientes de que los estudiantes tendrán más interés por lo que forma parte de su vida. Pero la puesta en práctica no es trivial y supone un cambio respecto al que nosotros mismos experimentamos como estudiantes y la realidad que muchos de ellos siguen teniendo en sus centros educativos (p. 26).</p> <p>– Al finalizar la UD, los estudiantes deberían ser capaces de: 1. Modelizar un problema de la vida cotidiana utilizando la función matemática que mejor la describa. [...]. Contextualizar e interpretar, con lenguaje propio, una representación gráfica dada y crear otras nuevas que den respuesta a un contexto establecido (p. 30).</p>	<p>of near development (p. 18).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: The master’s programme has highlighted the importance of working on mathematics from intra- and interdisciplinary contexts, being aware that students will be more interested in what is part of their lives. But putting it into practice is not trivial and represents a change with respect to what we ourselves experience as students and the reality that many of them continue to have in their educational centres (p. 26).</p> <p>– At the end of the DU, students should be able to: 1. Model an everyday problem using the mathematical function that best describes it. [...]. Contextualise and interpret, with their own language, a given graphical representation and create new ones that respond to an established context (p. 30).</p>
TFM/MFP #095			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: La capacitat que posseeix un alumne per resoldre diferents problemes a partir dels coneixements de caire matemàtic obtinguts al llarg del seu aprenentatge. Es realitzaven problemes introduïen a la propera sessió, però no eren d’una gran demanda cognitiva [...]. Una tasca avaluativa telemàtica durant el confinament era la resolució de diferents problemes relacionats amb funcions [...]. Modelització: [...]. La modelització és un procés</p>	<p>– Resolución de problemas: La capacidad que posee un estudiante para resolver distintos problemas a partir de los conocimientos de cariz matemático obtenidos a lo largo de su aprendizaje. Se realizaban problemas que introducían a la siguiente sesión, pero no eran de gran demanda cognitiva [...]. Una tarea evaluativa telemática durante el confinamiento era la resolución de distintos problemas relacionados con funciones [...]. Modelización: [...]. La modelización es un</p>	<p>– Problem solving: The capacity of students to solve different problems from the knowledge of a mathematical nature obtained throughout their learning. Problems that led to the next session were done, but they were not of great cognitive demand [...]. A telematic evaluation task during the lockdown was the solving of different problems related to functions [...]. Modelling: [...]. Modelling is a process by which a certain situation is interpreted mathematically in order to understand its</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>pel qual s'interpreta de forma matemàtica una determinada situació per tal de conèixer el seu comportament i controlar-la. Les resolucions de problemes provenien de situacions de la vida real on havien d'aplicar les matemàtiques per trobar l'expressió que regís les situacions i resoldre-ho [...]. A posteriori, trobo a faltar alguna pregunta addicional que els portés a una major reflexió sobre aquests problemes (p. 15). [IE3]</p>	<p>proceso por el que se interpreta, de forma matemática, una determinada situación para conocer su comportamiento y controlarla. Las resoluciones de problemas provenían de situaciones de la vida real, en las que debían aplicar la matemática para encontrar la expresión que rigiera las situaciones y resolverlas [...]. A posteriori, echo de menos alguna pregunta adicional que los llevara a una mayor reflexión sobre estos problemas (p. 15). [IE3]</p>	<p>behaviour and control it. The problem solving came from real-life situations, in which they had to apply mathematics to find the expression that governed the situations and solve them [...]. In hindsight, I miss any additional questions that would lead them to further reflect on these problems (p. 15). [ES3]</p>
<p>Cognitivo Cognitive</p>	<p>– En quant a la metodologia de la classe, per a facilitar l'aprenentatge actiu de l'alumne vaig adoptar una metodologia activa. És a dir, començava posant problemes de context extra matemàtic que els alumnes podien resoldre amb el seus coneixements previs i que com a resultat del treball realitzat apareixia un nou contingut [...] (p. 17). En la primera s'avaluaven les funcions elementals i les seves característiques mitjançant la resolució de problemes; i en la segona, la funció inversa, la composició i operació de funcions per l'altre [...]. En ella es pot identificar una diferència notable entre els resultats del primer i el segon lliurament, amb unes notes més baixes en la tasca relativa a la resolució de problemes de situacions del món real on s'avaluaven les funcions elementals i les seves característiques. [...]. Per últim, crec que l'avaluació sumativa va ser idònia per avaluar el temari impartit,</p>	<p>– En cuanto a la metodología de la clase, para facilitar el aprendizaje activo del estudiante, adopté una metodología activa. Es decir, empezaba poniendo problemas de contexto extra-matemático que los estudiantes podían resolver con sus conocimientos previos y que, como resultado del trabajo realizado, aparecía un nuevo contenido [...] (p. 17). En la primera se evaluaban las funciones elementales y sus características mediante la resolución de problemas; y en la segunda, la función inversa, la composición, y operación de funciones. [...]. En ella se puede identificar una diferencia notable entre los resultados de la primera y segunda entrega, con unas notas más bajas en la tarea relativa a la resolución de problemas de situaciones del mundo real, donde se evaluaban las funciones elementales y sus características. [...]. Por último, creo que la evaluación sumativa fue idónea para evaluar el</p>	<p>– Regarding the lesson methodology, to facilitate the active learning of the students, I adopted an active methodology. That is to say, it began by setting problems with an extra-mathematical context that the students could solve with their previous knowledge and that, as a result of the work carried out, a new content appeared [...] (p. 17). In the first, the elementary functions and their characteristics were evaluated by solving problems; and in the second, the inverse function, the composition, and operation of functions. [...]. In it, a notable difference can be identified between the results of the first and second delivery, with lower marks in the task related to solving problems in real-world situations, where the elementary functions and their characteristics were evaluated. [...]. Finally, I think that the summative evaluation was ideal to evaluate the syllabus</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>proposant problemes contextualitzats i exercicis on s'avaluaven tots els conceptes treballats durant la unitat (p. 19). [IC3]</p> <p>– Malauradament, un cop vistes les tasques a posteriori, la meva impressió és que n'hi ha hagut poques que comportessin una alta demanda cognitiva per als alumnes. La majoria dels problemes que formaven l'avaluació formativa es basaven en conceptes que treballàriem a les següents sessions i no se'ls podia exigir una gran demanda cognitiva; per contra, la segona tasca avaluativa [...] crec que ja tenia una demanda cognitiva superior, amb la resolució de diversos problemes extrets de situacions extra matemàtiques (pp. 19–20). [IC4]</p>	<p>temario impartido, proponiendo problemas contextualizados y ejercicios en los que se evaluaban todos los conceptos trabajados durante la unidad (p. 19). [IC3]</p> <p>– Desgraciadamente, una vez vistas las tareas a posteriori, mi impresión es que hubo pocas que comportaran una alta demanda cognitiva para los estudiantes. La mayoría de los problemas que formaban la evaluación formativa se basaban en conceptos que trabajaríamos en las siguientes sesiones y no se les podía exigir una gran demanda cognitiva; por el contrario, la segunda tarea evaluativa [...] creo que ya tenía una demanda cognitiva superior, con la resolución de varios problemas extraídos de situaciones extra-matemáticas (pp. 19–20). [IC4]</p>	<p>taught, proposing contextualised problems and exercises in which all the concepts worked on during the unit were evaluated (p. 19). [CS3]</p> <p>– Unfortunately, after looking at the tasks, my impression is that there were few that involved a high cognitive demand for the students. Most of the problems that made up the formative evaluation were based on concepts that we would work on in the following sessions and could not require a great cognitive demand; on the contrary, the second evaluative task [...] I think it already had a higher cognitive demand, with the solving of several problems extracted from extra-mathematical situations (pp. 19–20). [CS4]</p>
Interaccional Interaccional	<p>– Durant la realització de la fase d'intervenció del pràcticum, els alumnes havien de lliurar uns problemes que deixava per deures [...]. Com que la majoria dels problemes proposats formaven part de la introducció als conceptes que volia treballar a la següent sessió, només vaig avaluar el fet que les haguessin entregat amb un contingut concret [...]. En conclusió, la meva avaluació formativa no va ser suficientment bona perquè, tot i que podia extreure molta informació mitjançant les converses i debats a l'aula; crec que la realització de problemes i exercicis de forma posterior a l'explicació és</p>	<p>– Durante la realización de la fase de intervención de las prácticas, los estudiantes debían entregar unos problemas que dejaba como deberes [...]. Dado que la mayoría de los problemas propuestos formaban parte de la introducción a los conceptos que quería trabajar en la siguiente sesión, sólo evalué el hecho de que los hubieran entregado con un contenido concreto [...]. En conclusión, mi evaluación formativa no fue suficientemente buena porque, aunque pude extraer mucha información mediante las conversaciones y debates en el aula, creo que la realización de problemas y</p>	<p>– During the intervention phase of the internship experiences, the students had to hand in some problems that I left as homework [...]. Since most of the proposed problems were part of the introduction to the concepts that I wanted to work on in the next session, I only evaluated the fact that they had been delivered with a specific content [...]. In conclusion, my formative evaluation was not good enough because, although I was able to extract a lot of information through conversations and debates in the classroom, I believe that doing problems and exercises after the explanation is essential to</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>bàsica per mostrar evidències dels avenços aconseguits. Al redisseny de l'avaluació formativa [...] he tingut en compte aquests paràmetres per treballar problemes sobre els continguts treballats a l'aula després d'haver impartit la sessió (p. 10). [II4]</p>	<p>ejercicios de forma posterior a la explicación es básica para mostrar evidencias de los avances conseguidos. En el rediseño de la evaluación formativa [...] tuve en cuenta estos parámetros para trabajar problemas sobre los contenidos abordados en el aula después de haber impartido la clase (p. 10). [II4]</p>	<p>show evidence of the progress made. In the redesign of the formative evaluation [...] I took these parameters into account to work on problems about the contents addressed in the classroom after having taught the lesson (p. 10). [IS4]</p>
Mediacional Mediational	X	X	X
Afectivo Affective	<p>– Durant la implementació de la Unitat Didàctica he intentat centrar els exercicis i problemes a les necessitats dels alumnes, intentant relacionar-les amb circumstàncies del món real [...], però m'ha faltat connectar-ho més amb les altres matèries que treballen per emfatitzar més amb aquestes necessitats (p. 5). [IA1]</p>	<p>– Durante la implementación de la Unidad Didáctica intenté centrar los ejercicios y problemas en las necesidades de los estudiantes, intentando relacionarlos con circunstancias del mundo real [...], pero me faltó conectarlo más con las demás materias que trabajan para enfatizar más en estas necesidades (p. 5). [IA1]</p>	<p>– During the implementation of the Didactic Unit, I tried to focus the exercises and problems on the students' needs, trying to relate them to real-world circumstances [...], but I needed to connect it more with the other subjects that work to emphasise these needs more (p. 5). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– Els continguts que he treballat a la unitat es corresponent al subapartat “Estudi de les característiques de certs tipus de funcions que poden ser models de fenòmens científics, tecnològics i socials” de l'apartat d'Anàlisi del currículum de Batxillerat actualment vigent a Catalunya (p. 6). Competència en modelització matemàtica: La modelització matemàtica va ser present en dos moments de la unitat. El primer, de forma bastant senzilla, amb la realització dels deures que els hi posava [...]; el segon, el trobem a la segona tasca avaluativa de l'avaluació sumativa [...],</p>	<p>– Los contenidos que trabajé en la unidad se corresponden con el subapartado “Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos científicos, tecnológicos, y sociales” del apartado de Análisis en el currículo de Bachillerato actualmente vigente en Cataluña (p. 6). Competencia en modelización matemática: La modelización matemática estuvo presente en dos momentos de la unidad. El primero, de forma bastante sencilla, con la realización de los deberes que les planteaba [...]; el segundo lo encontramos en la segunda tarea evaluativa de la</p>	<p>– The contents that I worked on in the unit correspond to the “Study of the characteristics of certain types of functions that can be models of scientific, technological, and social phenomena” subsection from the Analysis section in the Baccalaureate curriculum currently in force in Catalonia (p. 6). Competency in mathematical modelling: Mathematical modelling was present in two moments of the unit. The first, in a fairly simple way, with the realisation of the tasks that I set for them [...]; the second is found in the second evaluative task of the summative evaluation [...], in which</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>on els alumnes a partir d'una situació havien d'identificar l'expressió que la regia i obtenir la gràfica i les diferents característiques. Tot i així crec que podria haver integrat més aquesta competència a l'avaluació formativa, cosa que duc a terme al redisseny de la unitat (pp. 6–7). Competència en contextualització: Tot i que a les activitats de deures i la segona tasca avaluativa ens acostàvem al context públic i científic, crec que podria haver-m'hi apropiat més amb uns problemes més interdisciplinaris. Al redisseny de l'avaluació formativa incorporo uns problemes i activitats més contextualitzats (p. 7). [IEc1] – En quant a la connexió interdisciplinari, trobo que no he acabat de connectar del tot. He trobat exercicis que relacionen les funcions amb el món real, [...], però podria haver extret més fruit i lligar-ho a més matèries (analitzar preus d'accions a partir de notícies del món real, relacionar tirs parabòlics amb la física, etc.) (p. 7). [IEc2] – Tot i tenir davant un tema que crec que se li pot treure bastanta utilitat sociolaboral, considero que no he explotat suficientment aquest factor. He fet alguna tasca col·laborativa que fomentés el treball en grup, alguns problemes provenen de situacions reals que no considero que treballin prou aquest factor, etc. A la meva proposta de millora de l'avaluació formativa,</p>	<p>evaluación sumativa [...], en la que los estudiantes, a partir de una situación, debían identificar la expresión que la regia y obtener la gráfica y las diferentes características. Sin embargo, creo que podría haber integrado más esta competencia en la evaluación formativa, lo que llevo a cabo en el rediseño de la unidad (pp. 6–7). Competencia en contextualización: Aunque en las actividades de los deberes y en la segunda tarea evaluativa nos acercábamos al contexto público y científico, creo que podría haberme acercado más con unos problemas más interdisciplinarios. En el rediseño de la evaluación formativa incorporo unos problemas y actividades más contextualizados (p. 7). [IEc1] – En cuanto a la conexión interdisciplinaria, creo que no terminé de conectar del todo. Encontré ejercicios que relacionan las funciones con el mundo real [...], pero podría haber extraído más frutos y ligarlo a más materias (analizar precios de acciones a partir de noticias del mundo real, relacionar tiros parabólicos con la física, etc.) (p. 7). [IEc2] – A pesar de tener delante un tema que creo se le puede quitar bastante utilidad sociolaboral, considero que no he explotado suficientemente este factor. Hice alguna tarea colaborativa que fomentara el trabajo en grupo, algunos problemas provienen de situaciones reales que no considero que trabajen</p>	<p>the students, based on a situation, had to identify the expression that governed it and obtain the graph and the different characteristics. However, I think I could have integrated this competency more into the formative evaluation, which I carry out in the redesign of the unit (pp. 6–7). Competency in contextualisation: Although in the homework activities and in the second evaluation task we approached the public and scientific contexts, I think I could have gotten closer with some more interdisciplinary problems. In the redesign of the formative evaluation, I incorporate more contextualised problems and activities (p. 7). [EcS1] – As for the interdisciplinary connection, I think I did not fully connect. I found exercises that related the functions to the real world [...], but I could have extracted more fruits and linked it to more subjects (analysing stock prices based on real-world news, relating parabolic shots to physics, etc.) (p. 7). [EcS2] – Despite having in front of me a topic that I believe can be detracted from its social and labour usefulness, I consider that I have not sufficiently exploited this factor. I created some collaborative tasks that encouraged group work; some problems come from real situations that I do not consider work on this factor sufficiently. In my proposal to improve the</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>intento introduir uns exercicis que tinguin més relació amb altres camps que els poden servir com a connectors, introduixo l'exposició davant de tot el grup classe d'algunes resolucions de problemes per treballar factors que els siguin útils en la seva vida social/professional i aumento les tasques col·laboratives perquè puguin interactuar més amb aquesta tipologia de treball (pp. 7–8). [IEc3]</p>	<p>suficientemente este factor. En mi propuesta de mejora de la evaluación formativa intento introducir unos ejercicios que tengan más relación con otros campos que les pueden servir como conectores, introduzco la exposición ante todo el grupo curso de algunas resoluciones de problemas para trabajar factores que les sean útiles en su vida social/profesional, y aumento las tareas colaborativas para que puedan interactuar más con esta tipología de trabajo (pp. 7–8). [IEc3]</p>	<p>formative evaluation, I try to introduce some exercises that are more related to other fields that can serve as connectors, I introduce the presentation to the entire course group of some problem resolutions to work on factors that are useful to them in their social/professional life, and I increase collaborative tasks so that they can interact more with this typology of work (pp. 7–8). [EcS3]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– Tot englobat al contingut d'anàlisi del Currículum de Batxillerat, més concretament al l'estudi de les característiques de certs tipus de funcions que poden ser models de fenòmens científics, tecnològics i socials (p. 4). – Idoneïtat ecològica: Hauria de plantejar més activitats on s'aconsegueixin treballar les competències que considero que més han mancat a la unitat: modelització, contextualització i experimentació. També s'hauria d'aconseguir augmentar la connexió interdisciplinari, tant amb la introducció d'exercicis com amb la dinàmica de l'aula (p. 21). – Idoneïtat epistèmica: Hauria d'intentar augmentar la riquesa de processos, incorporant una varietat d'exercicis i problemes que permeti als alumnes reforçar, sobretot, els processos de la comunicació, argumentació i la resolució de problemes (p. 22).</p>	<p>– Todo englobado en el contenido de análisis del Currículo de Bachillerato, más concretamente, en el estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos científicos, tecnológicos, y sociales (p. 4). – Idoneidad ecológica: Debería plantearse más actividades en las que se consigan trabajar las competencias que considero que más faltaron en la unidad: modelización, contextualización, y experimentación. También, debería conseguirse aumentar la conexión interdisciplinaria, tanto con la introducción de ejercicios como con la dinámica del aula (p. 21). – Idoneidad epistémica: Debería intentar aumentar la riqueza de procesos, incorporando una variedad de ejercicios y problemas que permita a los estudiantes reforzar, sobre todo, los procesos de comunicación, argumentación, y</p>	<p>– All included in the analysis content of the Baccalaureate Curriculum, more specifically, in the study of the characteristics of certain types of functions that can be models of scientific, technological, and social phenomena (p. 4). – Epistemic suitability: More activities should be proposed in which the competencies that I consider were most lacking in the unit can be worked on, such as modelling, contextualisation, and experimentation. Also, it should be possible to increase the interdisciplinary connection, both with the introduction of exercises and with the dynamics of the classroom (p. 21). – Epistemic suitability: I should try to increase the richness of processes, incorporating a variety of exercises and problems that allow students to reinforce, above all, the processes of communication,</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Idoneïtat ecològica: Treballem la contextualització tant a l'avaluació formativa redissenyada [...] com als problemes que introduïxo a l'avaluació sumativa [...] i a les noves activitats de l'aula [...] introduint situacions de la vida real que s'han de modelitzar per trobar la seva expressió matemàtica que permeti analitzar-les i controlar-les (p. 23).</p> <p>– Idoneïtat mediacional: Per millorar el treball dels recursos TAC, introduïxo una sessió de GeoGebra a l'aula d'informàtica que correspondrà a l'avaluació formativa i en la qual treballarem la resolució de tres problemes enfocats en la funció definida a trossos (p. 23).</p> <p>– Idoneïtat epistèmica: És necessari millorar els processos de comunicació i argumentació, per això a les sessions d'avaluació formativa es treballarà mitjançant la resolució de problemes en petits grups i l'exposició de la resolució d'aquests problemes davant de tot el grup classe (p. 24).</p> <p>– Idoneïtat cognitiva: A la unitat didàctica implementada pecava de deixar per deures exercicis i problemes que no exigien massa dificultat. A la proposta de noves activitats [...] i al redisseny de l'avaluació formativa [...], introduïxo 6 problemes on els alumnes necessitaran una demanda cognitiva més elevada per resoldre'ls. També mantinc els problemes que ja vaig treballar a l'avaluació sumativa que vaig implementar, ja que els</p>	<p>resolución de problemas (p. 22).</p> <p>– Idoneidad ecológica: Trabajamos la contextualización, tanto en la evaluación formativa rediseñada [...], como en los problemas que introduzco en la evaluación sumativa [...], y en las nuevas actividades del aula [...], introduciendo situaciones de la vida real que se deben modelizar para encontrar la expresión que permita analizarlas y controlarlas (p. 23).</p> <p>– Idoneidad mediacional: Para mejorar el trabajo de los recursos TAC, introduzco una sesión de GeoGebra en el aula de informática que corresponderá a la evaluación formativa y en la que trabajaremos la resolución de tres problemas enfocados en la función definida a trozos (p. 23).</p> <p>– Idoneidad epistémica: Es necesario mejorar los procesos de comunicación y argumentación, por eso en las sesiones de evaluación formativa se trabajará mediante la resolución de problemas en pequeños grupos y la exposición de la resolución de estos problemas ante todo el grupo de la clase (p. 24).</p> <p>– Idoneidad cognitiva: En la unidad didáctica implementada pecaba de dejar ejercicios y problemas que no exigían demasiada dificultad como deberes. En la propuesta de nuevas actividades [...] y en el rediseño de la evaluación formativa [...], introduzco seis problemas donde los estudiantes necesitarán una demanda</p>	<p>argumentation, and problem solving (p. 22).</p> <p>– Ecological suitability: We work on contextualisation, both in the redesigned formative evaluation [...], as well as in the problems that I introduce in the summative evaluation [...], and in the new classroom activities [...], introducing real-life situations that must be modelled to find the expression that allows them to be analysed and controlled (p. 23).</p> <p>– Mediation suitability: To improve the work of the LKT resources, I introduce a GeoGebra session in the computer room that will correspond to the formative evaluation and in which we will work on the solving of three problems focused on the function defined in pieces (p. 23).</p> <p>– Epistemic suitability: It is necessary to improve the communication and argumentation processes, which is why in the formative evaluation sessions we will work by solving problems in small groups and exposing the solving of these problems to the entire class group (p. 24).</p> <p>– Cognitive suitability: In the didactic unit implemented, I was wrong to leave exercises and problems that did not require too much difficulty as homework. In the proposal of new activities [...] and in the redesign of the formative evaluation [...], I introduce six problems where the students will need a higher cognitive demand to solve them. Also, I maintain the problems that I already</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>considero d'una demanda cognitiva elevada (p. 24). – Contextualització i valor interdisciplinari: Una de les competències que menys vaig treballar a la Unitat Didàctica era el valor interdisciplinari, aquest treball amb la proposta de millora m'ha permès obrir més la ment fixant-me amb les altres matèries que s'imparteixen en paral·lel (p. 26).</p>	<p>cognitiva más elevada para resolverlos. También, mantengo los problemas que ya trabajé en la evaluación sumativa que implementé, puesto que los considero de una demanda cognitiva elevada (p. 24). – Contextualización y valor interdisciplinario: Una de las competencias que menos trabajé en la Unidad Didáctica fue el valor interdisciplinario. Este trabajo, con la propuesta de mejora, me permitió abrir más la mente, fijándome con las demás materias que se imparten en paralelo (p. 26).</p>	<p>worked on in the summative evaluation that I implemented, since I consider them to have a high cognitive demand (p. 24). – Contextualisation and interdisciplinary value: One of the competencies that I worked on the least in the Didactic Unit was interdisciplinary value. This final project, with the proposal for improvement, allowed me to open my mind more, paying attention to the other subjects that are taught in parallel (p. 26).</p>
TFM/MFP #097			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Contextualitzar: Ús de problemes i exemples de l'entorn real i proper als alumnes. [...]. Modelitzar: Traduir a model matemàtic situacions quotidianes o reals. [...]. Resolució de problemes: Exposar l'alumnat a resoldre problemes per diferents vies (p. 7). Contextualitzar: En la sessió 5 es treballa amb plànols d'una cuina i de carreteres, en la sessió 7 s'introdueix la relació entre graus Celsius i Fahrenheit i es demana trobar la funció afí que ho representa i relacionar-ho amb la temperatura a possibles destins de vacances de setmana santa. Un altre exemple el trobem en el problema sobre bitllets de transport i la T-16 en les sessions 9 i 10. [...]. Modelitzar: Es dediquen dues sessions a resoldre el problema relatiu a la pèrdua del títol de transport, la targeta T-16, es és el que utilitzen els menors de setze anys a la ciutat de Barcelona i que</p>	<p>– Contextualizar: Uso de problemas y ejemplos del entorno real y cercano a los estudiantes. [...]. Modelizar: Traducir situaciones cotidianas o reales a un modelo matemático. [...]. Resolución de problemas: Exponer a los estudiantes a resolver problemas por diferentes vías (p. 7). Contextualizar: En la sesión 5 se trabaja con planos de una cocina y de carreteras, en la sesión 7 se introduce la relación entre grados Celsius y Fahrenheit, y se pide encontrar la función afín que lo representa y relacionarlo con la temperatura para posibles destinos de vacaciones en Semana Santa. Otro ejemplo lo encontramos en el problema sobre billetes de transporte y la T-16 en las sesiones 9 y 10. [...]. Modelizar: Se dedican dos sesiones a resolver el problema relativo a la pérdida del título de transporte, la tarjeta T-16, es la que utilizan los</p>	<p>– Contextualise: Use of problems and examples from the real environment close to the students. [...]. Model: Translate every day or real situations into a mathematical model. [...]. Problem solving: Expose students to solve problems in different ways (p. 7). Contextualise: In session 5, we work with plans of a kitchen and roads, in session 7, the relationship between degrees Celsius and Fahrenheit is introduced, and it is asked to find the affine function that represents it and relate it to the temperature for possible holiday destinations during Easter. Another example is found in the problem about transport tickets and the T-16 in sessions 9 and 10. [...]. Model: Two sessions are dedicated to solving the problem related to the loss of the transport ticket, the T-16 card, which is used by minors aged under 16 in the city of Barcelona and which is current, due to the commotion that has</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>és d'actualitat degut a l'enrenou que ha ocasionat el recent canvi de sistema tarifari de TMB.</p> <p>L'enunciat és una situació propera als joves d'aquesta edat i en la que qualsevol d'ells s'hi pot sentir representat (p. 8).</p> <p>Resolució de problemes: L'exemple de modelització també il·lustra aquest procés (p. 9). [IE3]</p>	<p>menores de 16 años en la ciudad de Barcelona y que es de actualidad, debido al revuelo que ha ocasionado el reciente cambio de sistema tarifario del TMB.</p> <p>El enunciado es una situación cercana a los jóvenes de esta edad y en la que cualquiera de ellos puede sentirse representado (p. 8).</p> <p>Resolución de problemas: El ejemplo de modelización también ilustra este proceso (p. 9). [IE3]</p>	<p>caused by the recent change in the TMB tariff system. The wording of the situation is close to young people of this age and in which any of them can feel represented (p. 8).</p> <p>Problem solving: The modelling example also illustrates this process (p. 9). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Les activitats han estat engrescadores i crec que han motivat els alumnes, ens ha faltat l'experiència de les darreres sessions que haguessin permès veure com els alumnes s'enfrontaven a un problema real i aplicaven els coneixements adquirits sobre funcions (p. 15). [IA3]</p>	<p>– Las actividades fueron estimulantes y creo que motivaron a los estudiantes. Nos faltó la experiencia de las últimas sesiones que hubieran permitido ver cómo los estudiantes se enfrentaban a un problema real y aplicaban los conocimientos adquiridos sobre funciones (p. 15). [IA3]</p>	<p>– The activities were stimulating, and I think they motivated the students. We lacked the experience of the last sessions that would have allowed us to see how the students faced a real problem and applied the knowledge acquired about functions (p. 15). [AS3]</p>
Ecológico Ecological	<p>– S'ha tingut cura que les activitats fossin contextualitzades (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– Se ha cuidado que las actividades fueran contextualizadas (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– Care has been taken to ensure that the activities were contextualised (p. 17). [EcS3]</p>
Otros Others	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: En diferents mòduls del màster se'ns ha parlat sovint de la importància de contextualitzar i apropar l'ensenyament de les matemàtiques a la vida quotidiana dels alumnes de manera que les puguin reconèixer en la seva realitat més propera. A la vegada el pràcticum ens ha permès veure com justament les activitats més contextualitzades</p>	<p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En diferentes módulos del máster se nos habló a menudo de la importancia de contextualizar y acercar la enseñanza de la matemática a la vida cotidiana de los estudiantes, de modo que puedan reconocerlas en su realidad más cercana. A su vez, las prácticas nos permitieron ver cómo justamente las actividades más contextualizadas</p>	<p>– Contextualisation and interdisciplinary value: In different modules of the master's programme, we were often told about the importance of contextualising and bringing the teaching of mathematics closer to the students' daily lives, so that they can recognise them in their closest reality. At the same time, the internship experiences allowed us to see how precisely the most</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	aconsegueixen, en general, despertar més interès en els alumnes (p. 24).	consiguen, en general, despertar más interés en los estudiantes (p. 24).	contextualised activities manage, in general, to awaken more interest in the students (p. 24).
TFM/MFP #098			
Epistémico Epistemic	<p>– Formulació i resolució de problemes: Comprendre, plantejar, formular i definir diferents tipus de problemes matemàtics. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes. La UD té com uns dels seus pilars l’aprenentatge basat en problemes. És per aquest motiu que soc més exigent amb els resultats obtinguts. Hauria d’haver treballat més situacions-problema. [...].</p> <p>Modelització: Inclou estructurar la situació que es modela; traduir la realitat a una estructura matemàtica; treballar amb un model matemàtic; validar el model; reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i als seus resultats. A la UD s’havia previst el disseny i confecció d’un estudi estadístic a través d’una enquesta per a determinar la generació de residus a l’institut. Aquesta part tenia una forta component de modelització a través de l’adquisició de dades i posterior anàlisi. Però malauradament no es va poder implementar pel confinament. [...].</p> <p>Contextualització: Utilitzar problemes del món real adequats al context dels alumnes. En tot moment la UD s’ha contextualitzat en problemes reals i propers als alumnes. Tant és així que el propòsit de la UD és determinar la generació de residus a l’institut fent ús</p>	<p>– Formulación y resolución de problemas: Comprender, plantear, formular, y definir distintos tipos de problemas matemáticos. Emplear conceptos, herramientas, y estrategias matemáticas para resolver problemas. La UD tiene como uno de sus pilares el aprendizaje basado en problemas. Por eso soy más exigente con los resultados obtenidos. Debería haber trabajado más situaciones-problema. [...]. Modelización: Incluye estructurar la situación que se modeliza; traducir la realidad a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y sus resultados. En la UD se había previsto el diseño y confección de un estudio estadístico a través de una encuesta para determinar la generación de residuos en el instituto. Esta parte tenía un fuerte componente de modelización a través de la adquisición de datos y su posterior análisis. Desgraciadamente, no pudo implementarse durante el confinamiento. [...]. Contextualización: Utilizar problemas del mundo real adecuados al contexto de los estudiantes. En todo momento, la UD se contextualizó en problemas reales y cercanos a los estudiantes. Tanto es así que el propósito de la UD es</p>	<p>– Formulation and solving of problems: Understand, pose, formulate, and define different types of mathematical problems. Use mathematical concepts, tools, and strategies to solve problems. The DU has problem-based learning as one of its pillars. That is why I am more demanding with the results obtained. I should have worked more problem-situations. [...]. Modelling: Includes structuring the situation that is modelled; translating reality into a mathematical structure; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing, and raising criticisms of a model and its results. The design and preparation of a statistical study had been planned in the DU, through a survey to determine the generation of waste in the institute. This part had a strong modelling component through data acquisition and its subsequent analysis. Unfortunately, it could not be implemented during the lockdown. [...]. Contextualisation: Use real-world problems appropriate to the students’ context. At all times, the DU was contextualised in real problems close to the students. So much so that the purpose of the DU is to determine the generation of waster at the institute using statistics as a study tool (p. 10). [ES3]</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	de l'estadística com una eina d'estudi (p. 10). [IE3]	determinar la generación de residuos en el instituto haciendo uso de la estadística como herramienta de estudio (p. 10). [IE3]	
Cognitivo Cognitive	– En concret, l'abordatge a partir de la perspectiva de resolució de problemes permet crear les condicions adients per al desenvolupament d'aquests processos metacognitius. És una llàstima que degut al confinament [...], no es pogués dur a terme el bloc didàctic corresponent al projecte-enquesta i que hagués estat molt enriquidor per a propiciar aquests processos d'alta demanda cognitiva (p. 16). [IC4]	– En concreto, el abordaje a partir de la perspectiva de resolución de problemas permite crear las condiciones adecuadas para el desarrollo de estos procesos metacognitivos. Es una lástima que, debido al confinamiento [...], no se pudiera llevar a cabo el bloque didáctico correspondiente al proyecto-enquesta y que hubiera sido muy enriquecedor para propiciar estos procesos de alta demanda cognitiva (p. 16). [IC4]	– Specifically, the approach from the perspective of problem solving allows creating the appropriate conditions for the development of these metacognitive processes. It is a shame that, due to the lockdown [...], the didactic block corresponding to the survey-project could not be carried out and which would have been very enriching to promote these processes of high cognitive demand (p. 16). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– El disseny de la UD ja partia de la premissa de desenvolupar una temàtica contextualitzada als interessos i necessitats dels alumnes. Per això vaig escollir el medi ambient com a leimotiv per a treballar l'estadística, donat que els joves alumnes tenen una gran consciència mediambiental i es preocupen per la sostenibilitat del planeta. En aquest cas, l'estadística representa l'eina i no la fi del procés d'aprenentatge (pp. 17–18). [IA1]	– El diseño de la UD ya partía de la premisa de desarrollar una temática contextualizada en los intereses y necesidades de los estudiantes. Por eso escogí el medio ambiente como <i>leitmotiv</i> para trabajar la estadística, dado que los jóvenes estudiantes tienen una gran conciencia medioambiental y se preocupan por la sostenibilidad del planeta. En este caso, la estadística representa la herramienta y no el fin del proceso de aprendizaje (pp. 17–18). [IA1]	– The design of the DU was already based on the premise of developing a theme contextualised in the students' interests and needs. That is why I chose the environment as a leitmotiv to work on statistics, given that young students have a great environmental awareness and are concerned about the sustainability of the planet. In this case, statistics represents the tool and not the end of the learning process (pp. 17–18). [AS1]
Ecológico Ecological	– La unitat no havia de tractar específicament amb la temàtica mediambiental. Era un aspecte de lliure elecció que vaig considerar apropiat per a contextualitzar els continguts (p. 22). [IEc1]	– La unidad no debía tratar específicamente con la temática medioambiental. Era un aspecto de libre elección que consideré apropiado para contextualizar los contenidos (p. 22). [IEc1]	– The unit should not deal specifically with environmental issues. It was an aspect of free choice that I considered appropriate to contextualise the contents (p. 22). [EcS1]

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– La unitat didàctica parteix ja d'un plantejament certament innovador: l'aprenentatge basat en la resolució de problemes (p. 23). [IEc4]</p>	<p>– La unidad didáctica parte ya de un planteamiento ciertamente innovador: el aprendizaje basado en la resolución de problemas (p. 23). [IEc4]</p>	<p>– The teaching unit is already based on a truly innovative approach: learning based on problem solving (p. 23). [EcS4]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– I les matemàtiques són una eina imprescindible per dotar d'estructura i rigor tots aquests processos de l'estudi estadístic, especialment el d'anàlisi de les dades i el d'obtenció de conclusions, que també lliguen amb els models matemàtics de la probabilitat. [...]. Per això les activitats estan contextualitzades a tal fi, amb l'objectiu de treballar de forma eminentment pràctica [...] a partir de casos i situacions reals. És a dir, es farà servir l'estadística com una eina i no com a una fi (p. 2). – Treballar el procés de modelització en la resolució de problemes a través de la caracterització i síntesi d'un conjunt de dades estadístiques (p. 26). – Activitat: Què es recicla més? S'introdueix per treballar la modelització en el context de l'estadística amb èmfasi a les mesures de centralització (p. 28). – Anàlisi de la qualitat de l'aire. En aquesta activitat s'inclouen més problemes-situació contextualitzats al medi ambient per tal de diferenciar la població i la mostra d'un estudi estadístic (p. 30). – Què es recicla més? Es treballa la comparació de dades estadístiques de residus per a extreure conclusions (modelització en el context de l'estadística, ús de la mitjana, la mediana i la moda) (p. 30). – Contextualització i valor interdisciplinari: Al llarg</p>	<p>– Y la matemática es una herramienta imprescindible para dotar de estructura y rigor a todos estos procesos del estudio estadístico, especialmente, el de análisis y obtención de conclusiones, que también ligan con los modelos matemáticos de la probabilidad. [...]. Por eso, las actividades están contextualizadas para tal fin, con el objetivo de trabajar de forma eminentemente práctica [...] a partir de casos y situaciones reales. Es decir, se utilizará la estadística como una herramienta y no como un fin (p. 2). – Trabajar el proceso de modelización en la resolución de problemas a través de la caracterización y síntesis de un conjunto de datos estadísticos (p. 26). – Actividad: ¿Qué se recicla más? Se introduce para trabajar la modelización en el contexto de la estadística con énfasis en las medidas de centralización (p. 28). – Análisis de la calidad del aire: En esta actividad se incluyen más situaciones-problema contextualizadas en el medioambiente para diferenciar la población y la muestra de un estudio estadístico (p. 30). – ¿Qué se recicla más? Se trabaja la comparación de datos estadísticos de residuos para extraer conclusiones (modelización en el</p>	<p>– And mathematics is an essential tool to provide structure and rigour to all these processes of statistical study, specifically that of analysis and obtaining conclusions, which also link with mathematical models of probability. [...]. For this reason, the activities are contextualised for this purpose, with the aim of working in an eminently practical way [...] based on real cases and situations. That is, statistics will be used as a tool and not as an end (p. 2). – Working on the modelling process in solving problems through the characterisation and synthesis of a set of statistical data (p. 26). – Activity: What is recycled the most? It is introduced to work on modelling in the context of statistics with emphasis on centralisation measures (p. 28). – Analysis of air quality: This activity includes more problem-situations contextualised in the environment to differentiate the population and the sample of a statistical study (p. 30). – What is recycled the most? The comparison of statistical data of residuals is worked on to draw conclusions (modelling in the context of statistics, use of the mean, median, and mode) (p. 30). – Contextualisation and interdisciplinary value:</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	de la meua trajectòria professional he treballat en diferents àmbits tècnics i científics, pel que considero que tinc un grau d'assoliment alt. Respecte al màster, crec que a la part de modelització de l'assignatura de complements de formació podem trobar una major contribució a desenvolupar aquesta competència (p. 38).	contexto de la estadística, uso de la media, mediana, y moda) (p. 30). – Contextualización y valor interdisciplinario: A lo largo de mi trayectoria profesional he trabajado en diferentes ámbitos técnicos y científicos, por lo que considero que tengo un alto grado de consolidación. Respecto al máster creo que, en la parte de modelización de la asignatura de complementos de formación, podemos encontrar una mayor contribución a desarrollar esta competencia (p. 38).	Throughout my professional career, I have worked in different technical and scientific fields, which is why I consider that I have a high degree of consolidation. Regarding the master's programme, I believe that, in the modelling part of the complements of formation, we can find a greater contribution to developing this competency (p. 38).
TFM/MFP #099			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Plantejament i comprensió de problemes matemàtics amb resolucions per mètodes variats. [...]. Contextualització: Utilització d'exemples reals o connectats amb la realitat en l'explicació de conceptes matemàtics o en la resolució de problemes. [...]. Modelització: Elaboració d'un model de representació o descripció d'un fenomen o procés de la realitat, per tal de fer-ne un anàlisi, validar-lo i realitzar crítiques als seus resultats (p. XXXVII). Resolució de problemes: Aquesta qüestió es considera mitjanament assolida, sobretot a través dels problemes plantejats per a les sessions durant el confinament (p. XXXVIII). Contextualització: A la 2a sessió de repàs durant el confinament [...] s'hi va incloure un exercici plantejat en el context de la pròpia habitació de cada alumne, per tal que en prenguessin les mesures i després responguessin	– Resolución de problemas: Planteamiento y comprensión de problemas matemáticos con resoluciones por métodos variados. [...]. Contextualización: Utilización de ejemplos reales o conectados con la realidad en la explicación de conceptos matemáticos o en la resolución de problemas. [...]. Modelización: Elaboración de un modelo de representación o descripción de un fenómeno o proceso de la realidad, con el fin de realizar un análisis, validarlo, y realizar críticas a sus resultados (p. XXXVII). Resolución de problemas: Esta cuestión se considera medianamente alcanzada, sobre todo, a través de los problemas planteados para las sesiones durante el confinamiento (p. XXXVIII). Contextualización: En la segunda sesión de repaso durante el confinamiento [...] se incluyó un ejercicio planteado en el contexto de	– Problem solving: Approach and understanding of mathematical problems with solving by various methods. [...]. Contextualisation: Use of real examples or those connected to reality in the explanation of mathematical concepts or in solving problems. [...]. Modelling: Preparation of a model of representation or description of a phenomenon or process of reality, in order to carry out an analysis, validate it, and criticise its results (p. XXXVII). Problem solving: This issue is considered moderately achieved, above all, through the problems posed for the sessions during the lockdown (p. XXXVIII). Contextualisation: In the second review session during the lockdown [...] an exercise posed in the context of each student's own room was included, so that they could take measurements and then answer two questions. This

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>dues qüestions. Amb això es buscava motivar els alumnes i alhora que cadascú treballés amb les seves pròpies dades. L'activitat sobre navegadors plantejada durant el confinament es va contextualitzar en el municipi dels alumnes [...]. És el procés que s'ha assolit amb major èxit, per bé que es considera que la seva qualitat hauria millorat en cas d'haver pogut realitzar una docència totalment presencial. [...].</p> <p>Modelització: Com s'ha mencionat en relació a la resolució de problemes, durant la segona sessió de repàs [...], els alumnes van mesurar la seva habitació, ja que se'ls demanava el recorregut que faria una aranya que seguís les diagonals de l'habitació. La resposta de l'alumnat va ser positiva, tot i que amb aquesta activitat s'esperava una millor utilització de les unitats de longitud (p. XXXIX). [IE3]</p>	<p>la propia habitación de cada estudiante, para que tomaran medidas y, después, respondieran dos preguntas. Con ello se buscaba motivar a los estudiantes y, al mismo tiempo, que cada uno trabajara con sus propios datos. La actividad sobre navegadores, planteada durante el confinamiento, se contextualizó en el municipio de los estudiantes [...]. Es el proceso que se logró con mayor éxito, aunque se considera que su calidad habría mejorado en caso de haber podido realizar una docencia totalmente presencial. [...].</p> <p>Modelización: Como se mencionó en relación con la resolución de problemas, durante la segunda sesión de repaso [...], los estudiantes midieron su habitación, ya que se les pedía el recorrido que haría una araña que siguiera las diagonales de la habitación, la respuesta de los estudiantes fue positiva, aunque con esta actividad se esperaba una mejor utilización de las unidades de longitud (p. XXXIX). [IE3]</p>	<p>sought to motivate the students and, at the same time, for each one to work with their own data. The activity on navigators, proposed during the lockdown, was contextualised in the students' municipality [...]. It is the process that was achieved with the greatest success, although it is considered that its quality would have improved if it had been possible to carry out fully face-to-face teaching. [...].</p> <p>Modelling: As mentioned in relation to problem solving, during the second review session [...], the students measured their room, since they were asked the path that a spider would take following the diagonals of the room, the answer of the students was positive, although with this activity a better use of length units was expected (p. XXXIX). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational	<p>– Hauria volgut tenir més temps per a la resolució de problemes d'aplicació de caire contextualitzat, per treballar-los a l'aula i discutir-ne la interpretació amb l'alumnat. Aquest qüestió es considera dins de la millora de la unitat, tractada a l'apartat d'aquest treball (p. XLVII). [IM3]</p>	<p>– Habría querido tener más tiempo para la resolución de problemas de aplicación de carácter contextualizado, para trabajarlos en el aula y discutir su interpretación con los estudiantes. Este aspecto se considera dentro de la mejora de la unidad, tratada en el</p>	<p>– I would have liked to have had more time to solve application problems of a contextualised nature, to work on them in the classroom and discuss their interpretation with the students. This aspect is considered within the improvement of the unit, discussed in the section of</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
		apartado de este trabajo (p. XLVII). [IM3]	this final project (p. XLVII). [MS3]
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	<p>– L’activitat amb Google Maps, programada a la sessió no presencial “Navegadors” es considera útil de cara a la lectura i interpretació de plànols, especialment pel fet que es va contextualitzar dins del municipi dels estudiants. [...]. Al marge d’això, [...], em va faltar temps per plantejar més problemes contextualitzats als alumnes (p. L). [IEc3]</p>	<p>– La actividad con Google Maps, programada en la sesión no presencial “Navegadores”, se considera útil de cara a la lectura e interpretación de planos, especialmente, debido a que se contextualizó dentro del municipio de los estudiantes. [...]. Al margen de esto, [...], me faltó tiempo para plantear más problemas contextualizados a los estudiantes (p. L). [IEc3]</p>	<p>– The activity with Google Maps, programmed in the non-face-to-face session “Navigators”, is considered useful for reading and interpreting plans, especially because it was contextualised within the students’ municipality. [...]. Aside from this, [...], I lacked time to pose more contextualised problems to the students (p. L). [EcS3]</p>
Otros Others	<p>– Els exercicis sobre ternes pitagòriques van resultar un punt abstractes per a una part de l’alumnat, hauria hagut de plantejar tasques on la modelització matemàtica tingués més pes, get que hauria captar l’interès dels alumnes i també afavorit un procés de debat i d’argumentació (p. 12).</p> <p>– Respecte a la sessió impartida en digital, s’incorpora un exercici breu [...] contextualitzat a l’entorn immediat del centre, el qual implica un petit exercici de modelització matemàtica, que millora la riquesa de processos de la unitat (idoneïtat epistèmica) (p. 16).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Durant la unitat didàctica es va dissenyar activitats contextualitzades pensant en fer-les atractives per als alumnes. En el mòdul [...] s’han presentat un nombre elevat de recursos molt variats, fet que ajuda al plantejament de tasques contextualitzades (p. 22).</p>	<p>– Los ejercicios sobre ternas pitagóricas resultaron un punto abstracto para una parte de los estudiantes, habría tenido que plantear tareas donde la modelización matemática tuviera más peso, lo que debería captar el interés de los estudiantes y, también, favorecido un proceso de debate y de argumentación (p. 12).</p> <p>– Respecto a la sesión impartida en digital, se incorpora un ejercicio breve [...] contextualizado en el entorno inmediato del centro, que implica un pequeño ejercicio de modelización matemática que mejora la riqueza de procesos de la unidad (idoneidad epistémica) (p. 16).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Durante la unidad didáctica se diseñaron actividades contextualizadas pensando en hacerlas atractivas para los estudiantes. En los módulos [...] se presentó un número elevado de recursos muy variados, lo</p>	<p>– The exercises on Pythagorean triples were an abstract point for some of the students; I would have had to propose tasks where mathematical modelling had more weight, which should catch the students’ interest and also favour a process of debate and argumentation (p. 12).</p> <p>– Regarding the session taught digitally, a short exercise is incorporated [...] contextualised in the immediate environment of the internship centre, which involves a small mathematical modelling exercise that improves the richness of the unit’s processes (epistemic suitability) (p. 16).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: During the didactic unit, contextualised activities were designed thinking about making them attractive to the students. In the modules [...] a high number of very varied resources were presented, which helps to propose</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
		que ayuda al planteamiento de tareas contextualizadas (p. 22).	contextualised tasks (p. 22).
TFM/MFP #102			
Epistémico Epistemic	<p>– En aquest període, per portar a terme els processos de matematització, vaig estimular els alumnes a esquematitzar els enunciats dels problemes, els vaig fer explorar diferents maneres d'interpretar-los, es van descobrir relacions i regularitats matemàtiques en situacions reals, vaig ajudar-los a reconèixer aspectes semblants en problemes diferents, vaig mostrar-los algunes tècniques de càlcul i vaig conduir-los a elaborar raonaments per justificar les solucions dels problemes –garantint la matematització horitzontal a través dels processos de comunicació, exploració i contextualització– [...]. Les activitats proposades en aquest període partien de situacions o problemes reals on els estudiants van identificar-hi elements matemàtics, però la transferència dels coneixements generats a partir d'aquestes situacions reals al món matemàtic no es va assolir completament. [...]. Durant el període virtual no es va acomplir una matematització vertical eficaç a causa de les limitacions del sistema didàctic pactat (p. 10). [IE3]</p>	<p>– En este período, para llevar a cabo los procesos de matematización, estimulé a los estudiantes a esquematizar los enunciados de los problemas, los hice explorar diferentes formas de interpretarlos, se descubrieron relaciones y regularidades matemáticas en situaciones reales, los ayudé a reconocer aspectos similares en problemas diferentes, les mostré algunas técnicas de cálculo y los conduje a elaborar razonamientos para justificar las soluciones de los problemas – garantizando la matematización horitzontal a través de los procesos de comunicación, exploración, y contextualización– [...]. Las actividades propuestas en este período partían de situaciones o problemas reales donde los estudiantes identificaron elementos matemáticos, pero la transferencia de los conocimientos generados a partir de estas situaciones reales en el mundo matemático no se logró completamente. [...]. Durante el período virtual no se cumplió una matematización vertical eficaz debido a las limitaciones del sistema didáctico pactado (p. 10). [IE3]</p>	<p>– In this period, to carry out the mathematisation process, I encouraged the students to schematise the wording of the problems, I made them explore different ways of interpreting them, mathematical relationships and regularities were discovered in real situations, I helped them recognise similar aspects in different problems, I showed them some calculation techniques and led them to develop reasoning to justify the solutions to the problems – guaranteeing horizontal mathematisation through the processes of communication, exploration, and contextualisation– [...]. The activities proposed in this period were based on real situations or problems where the students identified mathematical elements, but the transfer of knowledge generated from these real situations in the mathematical world was not completely achieved. [...]. During the virtual period, effective vertical mathematisation was not achieved due to the limitations of the agreed teaching system (p. 10). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– El tema de les funcions incorpora un ampli ventall de processos matemàtics que afavoreixen l'aplicació de diversos tipus de representació i són cabdals per a la resolució de</p>	<p>– El tema de las funciones incorpora un amplio abanico de procesos matemáticos que favorecen la aplicación de diversos tipos de representación y son primordiales para la</p>	<p>– The topic of functions incorporates a wide range of mathematical processes that favour the application of various types of representation and are essential for solving</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>problemes quotidians, per connectar les matemàtiques amb elles mateixes i amb altres disciplines, [...] i descobrir els models matemàtics que governen el conjunt de circumstàncies, relacions, etc., que regeixen el món que els envolta (p. 14). [IC3]</p>	<p>resolución de problemas cotidianos, para conectar la matemática consigo misma y con otras disciplinas, [...] y descubrir los modelos matemáticos que gobiernan el conjunto de circunstancias, relaciones, etc., que rigen el mundo que les rodea (p. 14). [IC3]</p>	<p>everyday problems, to connect mathematics with itself and with other disciplines, [...] and discover the mathematical models that govern the set of circumstances, relationships, etc., that govern the world around them (p. 14). [CS3]</p>
<p>Interaccional Interaccional</p>	<p>– Durant el període presencial del Pràcticum he pogut comprovar que les activitats que es realitzen mitjançant eines TIC són més motivadores. En concret: [...] Enriqueixen la comprensió global dels problemes. Permeten fer les matemàtiques més realistes, menys abstractes (p. 16). [III]</p>	<p>– Durante el periodo presencial de Prácticas pude comprobar que las actividades que se realizan mediante herramientas TIC son más motivadoras. En concreto: [...] enriquecen la comprensión global de los problemas; permiten realizar la matemática más realista, menos abstractas (p. 16). [III]</p>	<p>– During the face-to-face Internships period, I was able to identify that the activities carried out using ICT tools are more motivating. Specifically: [...] they enrich the global understanding of the problems, they allow for more realistic, less abstract mathematics (p. 16). [IS1]</p>
<p>Mediacional Mediational</p>			
<p>Afectivo Affective</p>			
<p>Ecológico Ecological</p>			
<p>Otros Others</p>	<p>– Les funcions ens ajuden a distingir els diferents tipus de relacions entre dues variables, interpretar els canvis que s'esdevenen en aquestes dependències funcionals i proposar models per resoldre problemes en contextos diversos (p. 5). – En aquesta unitat didàctica s'ofereixen recursos als estudiants per interpretar la realitat que els envolta mitjançant les propietats bàsiques de les funcions i per modelitzar situacions pròpies de les funcions de primer grau (p. 5). – Les activitats de la seqüència didàctica inicial, recullen situacions i problemes quotidians que poden esdevenir en l'entorn d'un adolescent de</p>	<p>– Las funciones nos ayudan a distinguir los diferentes tipos de relaciones entre dos variables, interpretar los cambios que ocurren en estas dependencias funcionales, y proponer modelos para resolver problemas en contextos diversos (p. 5). – En esta unidad didáctica se ofrecen recursos a los estudiantes para interpretar la realidad que les rodea mediante las propiedades básicas de las funciones y para modelizar situaciones propias de las funciones de primer grado (p. 5). – Las actividades de la secuencia didáctica inicial recogen situaciones y problemas cotidianos que pueden ocurrir en el entorno de un adolescente</p>	<p>– Functions help us to distinguish the different types of relationships between two variables, interpret the changes that occur in these functional dependencies, and propose models to solve problems in diverse contexts (p. 5). – In this didactic unit, resources are offered to the students interpret the reality that surrounds them through the basic properties of functions and to model situations typical of first-degree functions (p. 5). – The activities of the initial didactic unit collect everyday situations and problems that can occur in the environment of a 15-year-old adolescent. In these activities, the usefulness of functions to</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>quinze anys. En aquestes activitats es posa de manifest la utilitat que tenen les funcions per entendre el món que els envolta (p. 14).</p> <p>– En els altres dos haurà de fer servir la funció afí per modelitzar dues situacions contextualitzades (p. 21).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: En el màster he treballat textos i situacions en les que s'utilitza o s'apliquen els diversos continguts matemàtics de l'educació secundària per ressaltar les seves aplicacions i funcionalitats, en especial, projectar el paper de les matemàtiques com a instrument en altres disciplines (p. 26).</p>	<p>de 15 años. En estas actividades se pone de manifiesto la utilidad que tienen las funciones para entender el mundo que les rodea (p. 14).</p> <p>– En los otros dos tendrán que utilizarse la función afín para modelizar dos situaciones contextualizadas (p. 21).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En el máster he trabajado textos y situaciones en las que se utilizan o aplican los diversos contenidos matemáticos de la educación secundaria para resaltar sus aplicaciones y funcionalidades, en particular, proyectar el papel de la matemática como instrumento en otras disciplinas (p. 26).</p>	<p>understand the world around them is revealed (p. 14).</p> <p>– In the other two, the affine function will have to be used to model two contextualised situations (p. 21).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: In the master's programme, I have worked on texts and situations in which the various mathematical contents of secondary education are used or applied to highlight their applications and functionalities, in particular, project the role of mathematics as an instrument in other disciplines (p. 26).</p>
TFM/MFP #106			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: La capacitat d'un alumne de resoldre problemes implica diferents tipus de problemes matemàtics mitjançant diverses vies. [...]. Modelització: Procés d'elaborar un model que representi o descrigui adequadament (un fenomen, un objecte o un procés de la realitat). [...]. Contextualització: Ús de problemes del món real (p. 29). [IE3]</p> <p>– Realista: Com a alternativa, es proposa una organització més contextualitzada. Per tant, s'enfoca en la visió de relació entre magnituds i posteriorment a la relació entre variables. Malgrat, es considera més adequada en l'etapa de educació obligatòria, pot portar a ambigüitats durant el procés (p. 7). [IE4]</p>	<p>– Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver problemas implica diferentes tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías. [...]. Modelización: Proceso de elaborar un modelo que represente o describa adecuadamente un fenómeno, un objeto, o un proceso de la realidad. [...]. Contextualización: Uso de problemas del mundo real (p. 29). [IE3]</p> <p>– Realista: Como alternativa, se propone una organización más contextualizada. Por tanto, se enfoca en la visión de relación entre magnitudes y, posteriormente, en la relación entre variables. Sin embargo, se considera más adecuada en la etapa de educación obligatoria, puede llevar a ambigüedades durante el proceso (p. 7). [IE4]</p>	<p>– Problem solving: A student's ability to solve problems involves different types of mathematical problems through various means. [...]. Modelling: Process of developing a model that adequately represents or describes a phenomenon, an object, or a process of reality. [...]. Contextualisation: Using real-world problems (p. 29). [ES3]</p> <p>– Realistic: As an alternative, a more contextualised organisation is proposed. Therefore, it focuses on the vision of the relationship between magnitudes and, subsequently, on the relationship between variables. However, it is considered more appropriate in the compulsory education stage, it can lead to</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
			ambiguities during the process (p. 7). [ES4]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Altres activitats eres molt contextualitzades en situacions reals (temps de cocció de la carn, distància per arribar a una platja o energia cinètica en relació a la velocitat) i això també els va connectar. [...]. Els problemes no estaven contextualitzats i el nivell demanat va resultar massa elevat (p. 10). [IA1]</p> <p>– El fet de motivar els alumnes amb exercicis contextualitzats i propers i també el proposar activitats manuals, ajuda a que els alumnes tinguin un grau de participació més elevat a la classe (p. 11). [IA2]</p> <p>– Pienso que el fet de presentar les matemàtiques contextualitzades, properes i manipulables fa que molts els alumnes recuperin el gust per les matemàtiques (p. 11). [IA3]</p>	<p>– Otras actividades estaban muy contextualizadas en situaciones reales (tiempo de cocción de la carne, distancia para llegar a una playa, o energía cinética con relación a la velocidad) y esto también les conectó. [...]. Los problemas no estaban contextualizados y el nivel pedido resultó demasiado elevado (p. 10). [IA1]</p> <p>– El hecho de motivar a los estudiantes con ejercicios contextualizados y cercanos, y también proponer actividades manuales, ayuda a que los estudiantes tengan un mayor grado de participación en la clase (p. 11). [IA2]</p> <p>– Pienso que presentar la matemática contextualizada, cercana, y manipulable hace que muchos de los estudiantes recuperen el gusto por la matemática (p. 11). [IA3]</p>	<p>– Other activities were very contextualised in real situations (meat cooking time, distance to reach a beach, or kinetic energy in relation to speed) and this also connected them. [...]. The problems were not contextualised, and the level requested was too high (p. 10). [AS1]</p> <p>– The fact of motivating students with contextualised and close exercises, and also proposing manual activities, helps students have a greater degree of participation in the class (p. 11). [AS2]</p> <p>– I think that presenting mathematics that is contextualised, close, and manipulable makes many students regain their taste for mathematics (p. 11). [AS3]</p>
Ecológico Ecological	<p>– La UD ha sigut rica en connexions inter-matemàtiques, ja sigui amb música, física, topografia, etc. Cal recordar que en l'última activitat els alumnes s'han inventat una funció contextualitzada (p. 13). [IEc2]</p> <p>– Segurament la contextualització és la única via d'utilitat social d'aquesta UD. Com que el centre està especialitzat en l'educació artística, podem dir que la contextualització en aquest camp pot servir</p>	<p>– La UD ha sido rica en conexiones intra-matemáticas, ya sea con música, física, topografía, etc. Cabe recordar que, en la última actividad, los estudiantes inventaron una función contextualizada (p. 13). [IEc2]</p> <p>– Seguramente, la contextualización es la única vía de utilidad social de esta UD. Dado que el centro está especializado en la educación artística, podemos decir que la contextualización en este campo puede servir como</p>	<p>– The DU has been rich in intra-mathematical connections, whether with music, physics, topography, etc. It should be remembered that, in the last activity, the students invented a contextualised function (p. 13). [EcS2]</p> <p>– Surely, contextualisation is the only way of social utility of the DU. Since the internship centre is specialised in artistic education, we can say that contextualisation in this field can serve as work utility (p. 13). [EcS3]</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	com a utilitat laboral (p. 13). [IEc3]	utilidad laboral (p. 13). [IEc3]	
Otros Others	<p>– Aquesta UD pretén l’aprenentatge del treball cooperatiu, les eines digitals i de funcions d’un cert grau de complexitat (de segon grau, exponencials, logarítmiques i a trossos) a partir de la representació i aplicació en contextos reals i pròxims (p. 1).</p> <p>– Idoneïtat afectiva: Penso que es va notar una gran predisposició i millora per part dels alumnes gràcies a plantejar les matemàtiques des d’un punt de vista més contextualitzat, proper y manipulatiu (p. 14).</p> <p>– Per tant, plantejem els següents canvis: Canvi en l’ordre de les preguntes. Inicialment preguntàvem per les equacions (nivell d’abstracció alt) i després demanàvem contextualitzar l’equació. Per tal d’assolir un aprenentatge significatiu [...] i contextualitzat hem d’invertir l’ordre (p. 17).</p> <p>– Per cada sessió hem fet 4 recull d’activitats de diferents nivells de dificultat, continguts i eines utilitzades. També incidim en fer els exercicis de nivells inicials més contextualitzats (p. 18).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Penso que el fet de treballar en matemàtiques en un camp tant interdisciplinari com les aigües subterrànies, m’ha ajudat a poder contextualitzar les matemàtiques i saber on es poden trobar. Malgrat això encara hi ha moltes aplicacions per descobrir (p. 25).</p> <p>– Per exemple (dins de l’estructura actual), fer Història o Modelització</p>	<p>– Esta UD pretende el aprendizaje del trabajo cooperativo, las herramientas digitales y de funciones de un cierto grado de complejidad (de segundo grado, exponenciales, logarítmicas, y a trozos) a partir de la representación y aplicación en contextos reales y próximos (p. 1).</p> <p>– Idoneidad afectiva: Pienso que se notó una gran predisposición y mejora, por parte de los estudiantes, gracias a plantear la matemática desde un punto de vista más contextualizado, cercano, y manipulativo (p. 14).</p> <p>– Por lo tanto, planteamos los siguientes cambios: cambio en el orden de las preguntas. Inicialmente, preguntábamos por las ecuaciones (nivel de abstracción alto) y, después, pedíamos contextualizar la ecuación. Para lograr un aprendizaje significativo [...] y contextualizado debemos invertir el orden (p. 17).</p> <p>– Por cada sesión hicimos cuatro recopilaciones de actividades de diferentes niveles de dificultad, contenidos, y herramientas utilizadas. También, incidimos en realizar los ejercicios de niveles iniciales más contextualizados (p. 18).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Pienso que trabajar en matemática, en un campo tanto interdisciplinario como las aguas subterráneas, me ha ayudado a poder contextualizar la matemática y saber dónde</p>	<p>– This DU aims to learn cooperative work, digital tools and functions of a certain degree of complexity (second degree, exponential, logarithmic, and piecewise functions) based on representation and application in real and close contexts (p. 1).</p> <p>– Affective suitability: I think that a great predisposition and improvement was noted on the part of the students, thanks to approaching mathematics from a more contextualised, close, and manipulative point of view (p. 14).</p> <p>– Therefore, we propose the following changes: change in the order of the questions. Initially, we asked about the equations (high level of abstraction) and then we asked to contextualise the equation. To achieve meaningful [...] and contextualised learning we must reverse the order (p. 17).</p> <p>– For each session, we made four compilations of activities of different levels of difficulty, content, and tools used. Also, we emphasise doing the more contextualised initial level exercises (p. 18).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: I think that working in mathematics, in an interdisciplinary field, such as groundwater, has helped me to be able to contextualise mathematics and know where it can be found. However, there are still many applications to be discovered (p. 25).</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>aplicada dins d'un treball d'Ensenyament i aprenentatge. O fer activitats matemàtiques per cohesió i gestió de grup (Psicologia i Pedagogia) (p. 60).</p>	<p>se puede encontrar. Sin embargo, todavía hay muchas aplicaciones por descubrir (p. 25). – Por ejemplo (dentro de la estructura actual), realizar historia o modelización aplicada dentro de un trabajo de enseñanza y aprendizaje, o realizar actividades matemáticas por cohesión y gestión de grupo (Psicología y Pedagogía) (p. 60).</p>	<p>– For example (within the current structure), carrying out history or applied modelling within a teaching and learning work, or carrying out mathematical activities for group cohesion and management (Psychology and Pedagogy) (p. 60).</p>
TFM/MFP #111			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– El fet que la majoria d'activitats, particularment les telemàtiques, estiguessin molt pautades i contextualitzades ha contribuït a evitar que es generessin ambigüitats (p. 7). [IE2] – Modelització: Traduir la realitat a una estructura matemàtica, treballar amb un model matemàtic, validar-lo, reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i als seus resultats. [...]. Resolució de problemes: Tenir la capacitat de trobar diferents vies per resoldre dificultats i interrogants plantejats de manera matemàtica. [...]. Contextualització: Utilitzar exemples reals en la resolució de problemes i l'explicació de conceptes matemàtics (p. 8). Modelització: El confinament ens ha impedit treballar aquest procés de manera global a la unitat didàctica. El fil conductor de la unitat havia de ser, [...], fer un estudi estadístic sobre com havia de ser l'activitat extraescolar ideal per a l'alumnat del centre. Seguint les fases de l'estudi estadístic havíem de saber veure i raonar, al final, si havíem resolt</p>	<p>– El hecho de que la mayoría de las actividades, particularmente las telemáticas, estuvieran muy pautadas y contextualizadas ha contribuido a evitar que se generaran ambigüedades (p. 7). [IE2] – Modelización: Traducir la realidad a una estructura matemática, trabajar con un modelo matemático, validarlo, reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y a sus resultados. [...]. Resolución de problemas: Tener la capacidad de encontrar diferentes vías para resolver dificultades e interrogantes planteadas de forma matemática. [...]. Contextualización: Utilizar ejemplos reales en la resolución de problemas y la explicación de conceptos matemáticos (p. 8). Modelización: El confinamiento nos impidió trabajar este proceso de forma global en la unidad didáctica. El hilo conductor de la unidad debía ser, [...], realizar un estudio estadístico sobre cómo debía ser la actividad extraescolar ideal para los estudiantes del centro. Siguiendo las fases del estudio estadístico debíamos saber, ver, y</p>	<p>– The fact that most of the activities, particularly the telematic ones, were highly structured and contextualised, has contributed to avoiding the generation of ambiguities (p. 7). [ES2] – Modelling: Translating reality into a mathematical structure, working with a mathematical model, validating it, reflecting, analysing, and criticising a model and its results. [...]. Problem solving: Having the ability to find different ways to resolve difficulties and questions posed mathematically. [...]. Contextualisation: Using real examples in solving problems and explaining mathematical concepts (p. 8). Modelling: The lockdown prevented us from working on this process globally in the didactic unit. The common thread of the unit had to be, [...], to carry out a statistical study on what the ideal extracurricular activity should be like for the students of the internship centre. Following the phases of the statistical study, we had to know, see, and reason, in the end, whether we had satisfactorily solved the initial problem.</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>satisfactòriament el problema inicial. Quan vam començar la docència telemàtica vam perdre aquest fil conductor, per això creiem que aquest procés no s'ha treballat de manera suficient (p. 9). Resolució de problemes: Al llarg de la unitat s'han plantejat poques activitats que requerissin de processos de resolució de problemes. La metodologia que hem usat a les classes presencials (constructiva i cooperativa) sí que es prestava més a treballar aquest procés, però el fet que les activitats telemàtiques estiguessin molt pautades (per a garantir el seguiment i la motivació de l'alumnat) ens han impedit activar més vegades aquest procés tant rellevant (pp. 9-10). Contextualització: Pràcticament totes les tasques treballades al llarg de la unitat estaven contextualitzades. Sobretot durant la docència telemàtica es va intentar que totes les activitats estiguessin contextualitzades a la realitat de l'alumnat (p. 10). [IE3]</p>	<p>razonar, al final, sí habíamos resuelto satisfactoriamente el problema inicial. Cuando empezamos la docencia telemática perdimos este hilo conductor, por eso creemos que este proceso no se ha trabajado suficientemente (p. 9). Resolución de problemas: A lo largo de la unidad se plantearon pocas actividades que requirieran de procesos de resolución de problemas. La metodología que usamos en las clases presenciales (constructiva y cooperativa) sí que se prestaba más para trabajar este proceso, pero el hecho de que las actividades telemáticas estuvieran muy pautadas (para garantizar el seguimiento y la motivación de los estudiantes) nos impidieron activar más veces este proceso tan relevante (pp. 9–10). Contextualización: Prácticamente todas las tareas trabajadas a lo largo de la unidad estaban contextualizadas. Sobre todo, durante la docencia telemática se intentó que todas las actividades estuvieran contextualizadas en la realidad de los estudiantes (p. 10). [IE3]</p>	<p>When we started telematic teaching, we lost this common thread, which is why we believe that this process has not been worked on sufficiently (p. 9). Problem solving: Throughout the unit, few activities were proposed that required problem-solving processes. The methodology we used in the face-to-face lessons (constructive and cooperative) did lend itself more to working on this process, but the fact that the telematic activities were highly scheduled (to guarantee the monitoring and motivation of the students) prevented us from activating this very relevant process more times (pp. 9–10). Contextualisation: Virtually all the tasks worked on throughout the unit were contextualised. Above all, during telematic teaching, we tried to ensure that all the activities were contextualised in the students' reality (p. 10). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– La seqüència de tasques seleccionades per dur a l'aula es van planificar intentant garantir la motivació de l'alumnat. Per aquest motiu les vam contextualitzar tant com</p>	<p>– La secuencia de tareas seleccionadas para llevar al aula se planificaron intentando garantizar la motivación de los estudiantes. Por este motivo, las</p>	<p>– The sequence of tasks selected to take to the classroom was planned to try to guarantee the students' motivation. For this reason, we contextualised them as</p>

Anexo 4: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Segon Article
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	vam poder i vam motivar-ne la posada en pràctica a partir de preguntes o situacions que despertessin la seva curiositat (p. 16). [IA1]	contextualizados tanto como pudimos y motivamos su puesta en práctica a partir de preguntas o situaciones que despertaran su curiosidad (p. 16). [IA1]	much as we could and motivated their implementation based on questions or situations that aroused their curiosity (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological	X	X	X
Otros Others	<p>– Es van canviar les activitats i les sessions previstes inicialment, intentant aprofitar aquelles que podien adaptar-se bé a una docència virtual, contextualitzant-les a la realitat de l'alumnat i, sobretot, pauntant-les molt més per a ajudar-los a seguir el fil (p. 5).</p> <p>– Idoneïtat epistèmica: Millorar la riquesa de processos (sobretot resolució de problemes, modelització i argumentació) i la representativitat de la complexitat (p. 21).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: S'ha fet referència de forma transversal al llarg del Màster a la importància de contextualitzar les activitats i establir connexions. A Modelització hem treballat molts contextos extramatemàtics aplicables a classe, i he intentat implementar-ho a la unitat didàctica. La transversalitat de l'estadística m'ha ajudat en aquest sentit però considero que em fa falta més pràctica per a assolir el grau més alt en aquesta competència (p. 28).</p>	<p>– Se cambiaron las actividades y las sesiones previstas inicialmente, intentando aprovechar aquellas que podían adaptarse bien a una docencia virtual, contextualizándolas en la realidad de los estudiantes y, sobre todo, pauntándolas mucho más para ayudarlos a seguir el hilo (p. 5).</p> <p>– Idoneidad epistémica: Mejorar la riqueza de procesos (sobre todo, resolución de problemas, modelización, y argumentación) y la representatividad de la complejidad (p. 21).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Se hizo referencia, de forma transversal a lo largo del Máster, a la importancia de contextualizar las actividades y establecer conexiones. En Modelización trabajamos muchos contextos extra-matemáticos aplicables en clase, y he intentado implementarlo en la unidad didáctica. La transversalidad de la estadística me ha ayudado en este sentido, pero considero que me hace falta más práctica para alcanzar un mayor grado en esta competencia (p. 28).</p>	<p>– The activities and sessions initially planned were changed, trying to take advantage of those that could adapt well to virtual teaching, contextualising them in the students' reality and, above all, pacing them much more to help them follow the thread (p. 5).</p> <p>– Epistemic suitability: Improve the richness of processes (especially problem solving, modelling, and argumentation) and the representativeness of complexity (p. 21).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Reference was made, transversally through the Master's programme, to the importance of contextualising activities and establishing connections. In Modelling, we worked on many extra-mathematical contexts applicable in class, and I have tried to implement it in the didactic unit. The transversality of statistics has helped me in this sense, but I consider that I need more practice to reach a higher level in this competency (p. 28).</p>
TFM/MFP #115			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Capacitat d'enfrontar-se a un problema fent ús d'estratègies planificades.	– Resolución de problemas: Capacidad de enfrentarse a un problema utilizando estrategias	– Problem solving: Ability to confront a problem using planned strategies. [...]. Contextualisation/

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>[...]. Contextualització/ Connexió: Ús de problemes i situacions properes, del món real. [...]. Modelització: Capacitat de transformar una situació no matemàtica en un objecte/model matemàtic (p. 10). En la meva unitat didàctica, un dels processos centrals era la modelització. Aquest procés el vam treballar força, sobretot en transformar un enunciat purament escrit, a una situació matemàtica representable amb un model dibuixat d'un triangle rectangle (o un conjunt d'ells). [...]. Vaig intentar que els problemes que vam anar realitzant fossin situacions més o menys reals i properes a l'alumnat [...], però penso que ho hagués pogut treballar i aconseguir més contextualització. [...]. En el cas de la resolució de problemes, potser va ser un dels processos que m'hagués agradat treballar i va acabar tenint poc pes. El problemes que vam realitzar estaven acotats a un moment molt concret de la unitat didàctica i per tant responien més aviat a una definició d'exercici de pràctica reproductiva més que no pas a la resolució de problemes (p. 11). [IE3]</p>	<p>planificadas. [...]. Contextualización/ Conexión: Uso de problemas y situaciones cercanas, del mundo real. [...]. Modelización: Capacidad de transformar una situación no- matemática en un objeto/modelo matemático (p. 10). En mi unidad didáctica, uno de los procesos centrales era la modelización. Este proceso lo trabajamos bastante, sobre todo, al transformar un enunciado puramente escrito, a una situación matemática representable con un modelo dibujado de un triángulo rectángulo (o un conjunto de ellos). [...]. Intenté que los problemas que fuimos realizando fueran situaciones más o menos reales y cercanas a los estudiantes [...], pero creo que lo hubiera podido trabajar y conseguir una mayor contextualización. [...]. En el caso de la resolución de problemas, quizás fue uno de los procesos que me hubiera gustado trabajar y acabó teniendo poco peso. Los problemas que realizamos estaban acotados a un momento muy concreto de la unidad didáctica y, por lo tanto, respondían más bien a una definición de ejercicio de práctica reproductiva más que a la resolución de problemas (p. 11). [IE3]</p>	<p>Connection: Use of familiar, real-world problems and situations. [...]. Modelling: Capability to transform a non-mathematical situation into a mathematical object/model (p. 10). In my didactic unit, one of the central processes was modelling. We worked a lot on this process, especially when transforming a purely written statement into a mathematical situation representable with a drawn model of a right-triangle (or a set of them). [...]. I tried to make the problems we were doing more or less real situations and close to the students [...], but I think I could have worked on it and achieved greater contextualisation. [...]. In the case of problem solving, perhaps it was one of the processes that I would have liked to work on, and it ended up having little weight. The problems we did were limited to a very specific moment of the didactic unit and, therefore, they responded more to a definition of a reproductive-practice exercise than to problem solving (p. 11). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– En cap de les activitats que es van poder realitzar abans de la pandèmia es realitza una alta demanda cognitiva. Les activitats són més aviat de pràctica reproductiva. Fins i tot les sessions de problemes, on sí que es treballen processos com la</p>	<p>– En ninguna de las actividades que se pudieron realizar antes de la pandemia se realizó una alta demanda cognitiva. Las actividades son más bien de práctica reproductiva. Incluso, las sesiones de problemas, donde sí se trabajan</p>	<p>– In none of the activities that could be carried out before the pandemic there was a high cognitive demand. The activities are more of reproductive practice. Even the problem sessions, where processes such as modelling are worked on, I believe that</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	modelització, crec que no se'ls va treure tot el suc que es podria haver aconseguit. [...]. En la pràctica de mesures inaccessibles, punt àlgid de la UD programada però no executada, és on s'activaven més processos: resolució de problemes, modelització, raonament i exploració de solucions, comunicació (p. 16). [IC4]	procesos como la modelización, creo que no se les sacó todo el provecho que podría haberse conseguido. [...]. En la práctica de medidas inaccesibles, punto álgido de la UD programada pero no ejecutada, es donde se activaban más procesos: resolución de problemas, modelización, razonamiento y exploración de soluciones, comunicación (p. 16). [IC4]	we did not get all the benefit that could have been achieved. [...]. In the practice of inaccessible measures, the high point of the programmed but not implemented DU, is where more processes were activated: problem solving, modelling, reasoning and exploration of solutions, communication (p. 16). [CS4]
Interaccional Interaccional	– Durant les sessions de problemes vam proposar que la resolució fos en grups de dos o tres i aquí sí que es va afavorir de manera intencionada el diàleg entre companys (p. 19). [II2] – Es contempla l'autonomia dels estudiants a les sessions de problemes, on a partir d'un llistat de problemes, se'ls dona llibertat per autoregular-se la feina de manera autònoma (p. 19). [II3]	– Durante las sesiones de problemas propusimos que la resolución fuese en grupos de dos o tres, donde sí se favoreció el diálogo entre estudiantes de forma intencionada (p. 19). [II2] – Se contempla la autonomía de los estudiantes en las sesiones de problemas, donde a partir de un listado de problemas, se les da libertad para autorregular su trabajo de forma autónoma (p. 19). [II3]	– During the problem sessions, we proposed that the solving be in groups of two or three students, where dialogue between them was intentionally favoured (p. 19). [IS2] – The student autonomy is contemplated in the problem sessions, where based on a list of problems, they are given the freedom to self-regulate their work autonomously (p. 19). [IS3]
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Pel que fa als interessos i necessitats, vaig intentar que la selecció d'exercicis i problemes [...] fos propera als alumnes per potenciar el procés de connexió tot i que a l'aprofitar enunciats d'un llibre de text mai acaben de ser de tot contextualitzats a l'entorn particular (p. 17). [IA1]	– En cuanto a los intereses y necesidades, intenté que la selección de ejercicios y problemas [...] fuera cercana a los estudiantes para potenciar el proceso de conexión, aunque al aprovechar enunciados de un libro de texto, nunca acaban de ser del todo contextualizados en el entorno particular (p. 17). [IA1]	– In terms of interests and needs, I tried to make the selection of exercises and problems [...] be close to the students to enhance the connection process, although when taking advantage of statements from a textbook, they are never completely contextualised in the particular environment (p. 17). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Els objectius d'aprenentatge plantejats per aquesta unitat didàctica són els següents: [...]. Modelitzar una situació matemàtica real on hi	– Los objetivos de aprendizaje planteados por esta unidad didáctica son los siguientes: [...]. Modelizar una situación matemática real en la que	– The learning objectives set by this didactic unit are the following: [...]. Model a real-mathematical situation in which trigonometric ratios

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>intervinguin les raons trigonomètriques per identificar les matemàtiques en una situació quotidiana (p. 6). – Idoneïtat afectiva: Intentar apropar una mica més els enunciats dels exercicis i problemes a les necessitats i realitats dels alumnes. Això també ens ajudarà amb el procés de contextualització (p. 25). – Així doncs, aquesta pràctica ens serveix tan per reforçar el procés de connexions com el de modelització, resolució de problemes i comunicació (p. 28). – Contextualització i valor interdisciplinari: Potser el fet de ser enginyer m’ajuda a tenir una visió força pràctica i aplicada de les matemàtiques i em sento còmode explicant com hi intervenen en tecnologies actuals. Tot i ser coneixements complexos, penso que simplificar-los i poder-ne entreveure les idees clau és útil per donar sentit a una assignatura de naturalesa abstracta (p. 30).</p>	<p>intervengan las razones trigonométricas para identificar la matemática en una situación cotidiana (p. 6). – Idoneidad afectiva: Intentar acercar algo más los enunciados de los ejercicios y problemas a las necesidades y realidades de los estudiantes. Esto también nos ayudará con el proceso de contextualización (p. 25). – Así pues, esta práctica nos sirve tanto para reforzar el proceso de conexiones como el de modelización, resolución de problemas, y comunicación (p. 28). – Contextualización y valor interdisciplinario: Quizás, el hecho de ser ingeniero me ayude a tener una visión bastante práctica y aplicada de la matemática, y me siento cómodo explicando cómo intervienen en tecnologías actuales. A pesar de ser conocimientos complejos, pienso que simplificarlos y poder vislumbrar sus ideas clave es útil para dar sentido a una asignatura de naturaleza abstracta (p. 30).</p>	<p>intervene to identify mathematics in an everyday situation (p. 6). – Affective suitability: Try to bring the wording of the exercises and problems a little closer to the students’ needs and realities. This will also help us with the contextualisation process (p. 25). – Thus, this practice serves to reinforce the process of connections as well as modelling, problem solving, and communication (p. 28). – Contextualisation and interdisciplinary value: Perhaps, the fact of being an engineer helps me to have a fairly practical and applied vision of mathematics, and I feel comfortable explaining how they intervene in current technologies. Despite being complex knowledge, I think that simplifying it and being able to glimpse its key ideas is useful to make sense of a subject of an abstract nature (p. 30).</p>
TFM/MFP #118			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolución de problemas: La capacidad d’un alumne de resoldre problemes, implica resoldre diferents tipus de problemes matemàtics mitjançant diverses vies. [...]. Contextualització: Ús de problemes del món real (p. 11). Resolución de problemas: Tota la unitat didàctica gira al voltant de la resolució de problemes (p. 12). Contextualització: Tot el conjunt d’activitats presentades, gira al voltant d’un eix central. L’eix</p>	<p>– Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver problemas implica resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías. [...]. Contextualización: Uso de problemas del mundo real (p. 11). Resolución de problemas: Toda la unidad didáctica gira en torno a la resolución de problemas (p. 12). Contextualización: Todo el conjunto de actividades presentadas</p>	<p>– Problem solving: A student’s ability to solve problems involves solving different types of mathematical problems in various ways. [...]. Contextualisation: Using real-world problems (p. 11). Problem solving: The entire didactic unit revolves around problem solving (p. 12). Contextualisation: The entire set of activities presented revolves around a central axis. The backbone that</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	vertebrador que contextualitza i dona sentit a la funció exponencial són les dades extrems de la situació de la COVID-19. Per tant, totes les activitats estat pensades per ser útils i responen a models de creixement exponencial, com podem ser la reproducció del SARS-CoV-2, l'augment dels contagis, dels ingressats en UCI, etc. [...]. Podem observar que dins d'aquest enunciat troben que hi ha una contextualització real d'un problema, en el qual l'objectiu és arribar a representar gràficament una funció a partir de dades d'una activitat anterior (p. 13). [IE3]	gira en torno a un eje central. El eje vertebrador que contextualiza y da sentido a la función exponencial son los datos extraídos de la situación del COVID-19. Por lo tanto, todas las actividades están pensadas para ser útiles y responden a modelos de crecimiento exponencial, como pueden ser la reproducción del SARS-CoV-2, el aumento de los contagios, de los ingresados en UCI, etc. [...]. Podemos observar que dentro de este enunciado encuentran que existe una contextualización real de un problema, en el que el objetivo es llegar a representar gráficamente una función a partir de datos de una actividad anterior (p. 13). [IE3]	contextualises and gives meaning to the exponential function is the data extracted from the COVID-19 situation. Therefore, all the activities are designed to be useful and respond to exponential growth models, such as the reproduction of SARS-CoV-2, the increase of infections, in those admitted to the ICU, etc. [...]. We can observe that within this statement they find that there is a real contextualisation of a problem, in which the objective is to graphically represent a function based on data from a previous activity (p. 13). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Pel que fa al context en el qual s'ha desenvolupat la unitat didàctica, considero que el fet que totes les activitats fossin contextualitzades al voltant de la COVID-19, ha aconseguir [...] motivar-los (p. 21). [IA1]	– En cuanto al contexto en el que se desarrolló la unidad didáctica, considero que el hecho de que todas las actividades fueran contextualizadas en torno al COVID-19, logró [...] motivarlos (p. 21). [IA1]	– Regarding the context in which the didactic unit was carried out, I consider that the fact that all the activities were contextualised around COVID-19 managed to [...] motivate them (p. 21). [AS1]
Ecológico Ecological	– En aquest cas, considero que la unitat didàctica ha estat fortament contextualitzada i enriquidora en valors. Gairebé tots els apartats del enunciat estaven contextualitzats en el marc de la situació de la pandèmia (pp. 23–24). [IEc3]	– En este caso, considero que la unidad didáctica fue fuertemente contextualizada y enriquecedora en valores. Casi todos los apartados de los enunciados estaban contextualizados en el marco de la situación de pandemia (pp. 23–24). [IEc3]	– In this case, I consider that the didactic unit was strongly contextualised and enriched in values. Almost all sections of the statements were contextualised within the framework of the pandemic situation (pp. 23–24). [EcS3]
Otros Others	– Normalment, quan es realitza una unitat didàctica en l'àmbit de les	– Normalmente, cuando se realiza una unidad didáctica en el ámbito de	– Normally, when a didactic unit is carried out in the field of functions,

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>funcions, s'acostumen a tractar diferents tipus de funcions des d'un punt de vista analític, on s'expliquen gran varietat conceptes amb molt poca aplicació de problemes contextualitzats (p. 2).</p> <p>– El fet d'introduir-ho contextualitza l'enunciat de forma molt més realista i la dificultat de càlcul radica en les propietats bàsiques de les operacions matemàtiques (p. 6).</p> <p>– La unitat didàctica planificada per al pràcticum II era de Polinomis i Operacions Algebraiques, la qual es va pensar que era massa complexa per poder impartir de manera telemàtica, aleshores es va decidir acotar el tema a Funcions Exponencials, i totes les activitats havien de desenvolupar-se en un context real (p. 36).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: En aquest punt, considero que (a causa de les circumstàncies) he hagut d'acabar realitzant una unitat didàctica totalment enfocada a l'aplicació real d'un seguit de conceptes matemàtics. Ha estat a causa de la crisi de la COVID-19 viscuda, que he hagut de canviar-ho tot i re-dissenyar una UD completament contextualitzada. Per tant, considero que el meu nivell d'assoliment d'aquesta competència és elevat (p. 39).</p> <p>– Crea un enunciat de problema en el qual es produeixi una situació que respongui a un model de creixement exponencial. Es valorarà la coherència en el redactat, que respongui a un model de</p>	<p>las funciones, suelen tratarse diferentes tipos de funciones desde un punto de vista analítico, donde se explican gran variedad de conceptos con muy poca aplicación en problemas contextualizados (p. 2).</p> <p>– El hecho de introducirlo contextualiza el enunciado de forma mucho más realista y la dificultad de cálculo radica en las propiedades básicas de las operaciones matemáticas (p. 6).</p> <p>– La unidad didáctica planificada para la Práctica II era de Polinomios y Operaciones Algebraicas, la cual se pensó que era demasiado compleja para poder impartir de forma telemática, entonces se decidió acotar el tema a Funciones Exponenciales, y todas las actividades debían desarrollarse en un contexto real (p. 36).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: En este punto, considero que (debido a las circunstancias) tuve que terminar realizando una unidad didáctica totalmente enfocada en la aplicación real de una serie de conceptos matemáticos. Debido a la crisis del COVID-19 vivida, tuve que cambiar todo y rediseñar una UD completamente contextualizada. Por lo tanto, considero que mi nivel de consecución de esta competencia es elevado (p. 39).</p> <p>– Crea un enunciado de problema en el que se produzca una situación que responda a un modelo de crecimiento exponencial. Se valorará la coherencia en la redacción, que responda a un modelo de</p>	<p>different types of functions are usually treated from an analytical point of view, where a wide variety of concepts are explained with very little application in contextualised problems (p. 2).</p> <p>– The fact of introducing it contextualises the statement in a much more realistic way and the difficulty of calculation lies in the basic properties of mathematical operations (p. 6).</p> <p>– The didactic unit planned for Internships II was Polynomials and Algebraic Operations, which was thought to be too complex to be virtually taught, so it was decided to limit the topic to Exponential Functions, and all activities had to be developed in a real context (p. 36).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: At this point, I consider that (due to circumstances) I had to end up carrying out a didactic unit totally focused on the real application of a series of mathematical concepts. Due to the COVID-19 crisis, I had to change everything and redesign a completely contextualised DU. Therefore, I consider that my level of achievement of this competency is high (p. 39).</p> <p>– Create a problem statement in which a situation occurs that responds to an exponential growth model. Coherence in the writing will be valued, which responds to an exponential growth model and, finally, its solving procedure (p. 73).</p>

Anexo 4: Comentarios Evaluativos Analizados en el Segundo Artículo
Annex 4: Evaluative Comments Analysed in the Second Article

Criterio*	Original	Español	English
	creixement exponencial, i finalment, la seva resolució (p. 73).	crecimiento exponencial y, por último, su resolución (p. 73).	

Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo – Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

En este anexo se presenta la base de datos construida durante el *segundo paso* del análisis de contenido que se describe en el tercer artículo (véase [subsección 5.4.3](#)). Hay una nota (*) para considerar: Mod indica el nivel de referencia a la modelización que se describe en la Tabla 12.

This annex presents the database built during the *second step* of content analysis described in the second article (see [subsection 5.4.3](#)). There are three notes to be considered:

- Note (*): Mod indicates the level of reference to modelling as described in Tabla 12.
- Note (**): Educational levels (Nivel) are 1st, 2nd, 3rd, and 4th grades of Compulsory Secondary Education (ESO); 1st and 2nd grades of Baccalaureate Education (BAC).
- Note (***): Topics (Tema) are Algebra, Functions, Geometry, Numbers, Probability, Statistics, and Trigonometry.

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
001	2º ESO	Geometría	Abárzuza, F.	Proposta de millora d'una unitat didàctica sobre el Teorema de Pitàgores	N ₂ /L ₂
002	2º BAC	Funciones	Abuín, V.	Anàlisi i representació de funcions per a 2n de batxillerat	N ₁ /L ₁
003	1º ESO	Números	Acedo, G.	Proporcionalitat, mesura i representació de dades a 1r d'ESO	N ₂ /L ₂
004	1º ESO	Números	Alcántara, M.	Mesurem junts. Unitat Didàctica: Sistema Mètric Decimal	N ₀ /L ₀
005	1º ESO	Funciones	Alegret, A.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Funcions	N ₁ /L ₁
006	3º ESO	Números	Anguera, M.	Successions a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
007	4º ESO	Probabilidades	Antorán, A.	Combinatòria (generalitzacions per comptar). Proposta de millora	N ₀ /L ₀
008	2º ESO	Álgebra	Arnaiz, J.	Proposta de millora de la unitat didàctica d'equacions de segon grau implementada en el pràcticum	N ₁ /L ₁
009	2º ESO	Números	Ascari, M.	Proporcionalitat numèrica: Millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
010	1º ESO	Álgebra	Basallote, J.	Variables y expresiones algebraicas en primero de ESO: Propuesta de mejora	N ₃ /L ₃

Anexo 5: Base de Datos de los TFM's del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Títol	Mod*
011	4º ESO	Estadística	Bejar, R.	Proposta de millora de la unitat didàctica – Estadística de 4t ESO	N ₁ /L ₁
012	2º ESO	Geometría	Benítez, J. M.	Propostes al voltant de la gestió d'aula i l'avaluació a l'assignatura de matemàtiques	N ₁ /L ₁
013	2º ESO	Geometría	Bergonyó, R.	Millora de la unitat didàctica de triangles a un centre de màxima complexitat	N ₁ /L ₁
014	3º ESO	Geometría	Berrouhou, I.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica: Geometria 3D a 3r d'ESO	N ₂ /L ₂
015	2º ESO	Álgebra	Blázquez, C.	Introducció a l'àlgebra i funcions	N ₃ /L ₃
016	2º ESO	Geometría	Bosch, B.	Anàlisi sobre la implementació de la unitat didàctica “Estructures triangulars, estructures singulars” i propostes de millora	N ₁ /L ₁
017	1º ESO	Números	Brañes, J. P.	Anàlisi i proposta de millora d'una unitat didàctica de magnitud i mesura a 1r ESO	N ₀ /L ₀
018	2º ESO	Geometría	Brullas, M.	Figures planes a 2n d'ESO. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
019	4º ESO	Trigonometría	Burgueño, M.	Reflexió i proposta de millora – Unitat didàctica de trigonometria (4t d'ESO)	N ₂ /L ₂
020	4º ESO	Álgebra	Caballer, M.	Ensenyament-aprenentatge dels polinomis	N ₃ /L ₃
021	4º ESO	Estadística	Carbonell, M.	Explicuem el nostre entorn a través de les dades. Proposta de millora	N ₀ /L ₀
022	2º ESO	Números	Casades, M.	Un viatge per la història de les fraccions: Anàlisi de la unitat didàctica i proposta de millora	N ₁ /L ₁
023	1º ESO	Funciones	Casado, P.	Taules i gràfics del pla cartesià al full de càlcul	N ₁ /L ₁
024	1º ESO	Números	Castellà, G.	Fraccions a primer d'ESO. Anàlisi i proposta de millora d'una unitat didàctica	N ₀ /L ₀
025	1º BAC	Funciones	Civit, H.	Treball de Fi de Màster	N ₃ /L ₃
026	1º ESO	Geometría	Conca, A.	Espai i forma a primer d'ESO. Anàlisi i proposta de millora	N ₂ /L ₂
027	4º ESO	Trigonometría	Conde, L.	Proposta de millora de la unitat didàctica de trigonometria a 4t d'ESO	N ₁ /L ₁
028	2º ESO	Estadística	Corral, A.	Valoració i proposta de millora de la unitat didàctica Introducció a l'estadística i criptografia a partir del joc	N ₀ /L ₀
029	4º ESO	Probabilidades	Cortada, D.	Una mirada per entendre la probabilitat	N ₀ /L ₀
030	2º ESO	Geometría	Cova, P.	Triangles rectangles: Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁

Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
031	4º ESO	Estadística	Criballés, S.	Fem estadística a partir de la música a quart d'ESO	N ₀ /L ₀
032	1º ESO	Números	De Bofarull, A.	Proporcionalitat i percentatges a primer d'ESO. Una anàlisi d'idoneïtats i propostes de millora	N ₀ /L ₀
033	3º ESO	Funciones	Deltell, A.	Millora d'una unitat didàctica de funcions a 3º de ESO, emprant el procés de modelització com a eix vertebrador	N ₃ /L ₃
034	4º ESO	Geometría	Díez, C.	Anàlisi i proposta de millora Geometria analítica en el pla. 4t d'ESO	N ₁ /L ₁
035	2º BAC	Geometría	Domingo, A.	Proposta de millora de la unitat didàctica de vectors a segon de batxillerat	N ₁ /L ₁
036	2º ESO	Geometría	Dubreuil, O.	El teorema de Pitàgores: Proposta de millora d'una unitat didàctica	N ₃ /L ₃
037	3º ESO	Funciones	Durán, R.	Millora de la unitat didàctica: Introducció a funcions a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
038	1º BAC	Estadística	Duró, J.	Una parella de convinença: Eleccions i estadística. Estudi de variables bidimensionals	N ₀ /L ₀
039	1º BAC	Estadística	El Madafri, I.	Proposta de millora de la unitat didàctica d'estadística a 1r de batxillerat	N ₂ /L ₂
040	4º ESO	Trigonometría	Español, A.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica sobre trigonometria a 4t d'ESO	N ₀ /L ₀
041	4º ESO	Probabilidades	Espín, E.	Introduint la combinatòria a l'aula, l'art de comptar	N ₃ /L ₃
042	4º ESO	Trigonometría	Esteve, C.	Proposta de millora d'una unitat didàctica: Trigonometria. Adreçada al curs de 4t d'ESO	N ₂ /L ₂
043	2º ESO	Álgebra	Falguera, O.	Àlgebra i equacions: Millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
044	2º ESO	Números	Felip, M.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Proporcionalitat Numèrica a 2n d'ESO	N ₀ /L ₀
045	4º ESO	Estadística	Fernández, A.	Estadística unidimensional per a 4t ESO	N ₀ /L ₀
046	4º ESO	Geometría	Fernández, E.	Jugant amb una esfera, un cordill, un con, i l'aula com un paper, endinsa't al món de la geometria analítica al pla	N ₀ /L ₀
047	4º ESO	Geometría	Ferrà, I.	Millora d'unitat didàctica de geometria analítica a 4t d'ESO	N ₀ /L ₀
048	1º ESO	Números	Fortuny, P.	Proporcionalitat i percentatges. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
049	4º ESO	Álgebra	Gascó, B.	Ensenyament-aprenentatge de les equacions a 4t d'ESO	N ₁ /L ₁

Anexo 5: Base de Datos de los TFM's del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
050	3º ESO	Álgebra	Giménez, O.	Proposta de millora de la unitat didàctica Equacions i sistemes de primer grau – 3r ESO	N ₁ /L ₁
051	3º ESO	Álgebra	González, C.	Avaluació competencial de la resolució de sistemes d'equacions lineals a 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
052	1º ESO	Geometría	Graell, V.	Espai, forma i mesura (1r ESO). Autoavaluació i proposta de millora	N ₀ /L ₀
053	3º ESO	Álgebra	Güell, S.	Dues equacions, dues incògnites. Els sistemes: una eina per a resoldre problemes	N ₂ /L ₂
054	3º ESO	Geometría	Güell, C.	Aprenem semblança i proporcionalitat geomètrica. Una proposta de millora de la unitat didàctica	N ₂ /L ₂
055	4º ESO	Trigonometría	Gumbau, S.	Trigonometria per tots els nivells. UD 4t ESO	N ₁ /L ₁
056	3º ESO	Geometría	Hernández, J.	Proposta de millora d'una unitat didàctica sobre isometries al pla a un curs de 3r d'ESO	N ₁ /L ₁
057	4º ESO	Trigonometría	Hernández, V.	Millora d'una unitat didàctica de trigonometria de 4t d'ESO	N ₂ /L ₂
058	4º ESO	Trigonometría	Herreros, C.	Proposta de millora de la unitat didàctica de trigonometria a 4t d'ESO	N ₁ /L ₁
059	2º ESO	Álgebra	Joan, M.	Anàlisi, valoració i proposta de millora de la implementació de la unitat didàctica: els sistemes d'equacions	N ₂ /L ₂
060	4º ESO	Álgebra	Jovellar, A.	Proposta de millora de l'ensenyament d'expressions algebraiques i polinomis	N ₂ /L ₂
061	3º ESO	Geometría	Landman, P.	Anàlisi i millora de la unitat didàctica "Experimentem amb cossos a l'espai"	N ₂ /L ₂
062	3º ESO	Funciones	Ledo, L.	Ensenyar funcions a 3r d'ESO: Reflexió i proposta de millora	N ₂ /L ₂
063	4º ESO	Funciones	Linares, J.	Funcions a quart curs d'ESO	N ₁ /L ₁
064	1º ESO	Álgebra	Lleixà, M.	Introducció a l'àlgebra a primer d'ESO. Anàlisi de la UD i proposta de millora	N ₁ /L ₁
065	3º ESO	Funciones	Llovera, G.	Anàlisi de la qualitat didàctica i propostes de millora de la unitat didàctica de funcions lineals a 3r d'ESO	N ₃ /L ₃
066	4º ESO	Trigonometría	Mancebo, A.	Reflexió sobre la millora d'una unitat didàctica de trigonometria a 4t d'ESO	N ₂ /L ₂
067	4º ESO	Trigonometría	Marcual, J.	Trigonometria a 4t d'ESO. Proposta de millora d'una unitat didàctica	N ₁ /L ₁
068	4º ESO	Álgebra	Martín, A.	Inecuaciones, una herramienta para resolver problemas de optimización en el mundo real	N ₃ /L ₃

Anexo 5: Base de Datos de los TFM's del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
069	4º ESO	Trigonometría	Martín, A.	Geometria i trigonometria a 4rt d'ESO: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
070	1º ESO	Estadística	Martínez, M.	Ens volen conèixer! Com som els alumnes de 1rt d'ESO?	N ₁ /L ₁
071	4º ESO	Funciones	Martínez, D.	Funcions a l'Europa. Anàlisi i proposta de millora	N ₀ /L ₀
072	1º ESO	Números	Martos, R.	Les fracciones a primer de l'ESO. Proposta de millora	N ₀ /L ₀
073	4º ESO	Trigonometría	Marzo, R.	Introducció a la trigonometria a 4t d'ESO. Proposta de millora	N ₂ /L ₂
074	2º ESO	Estadística	Massó, J.	Introducció a l'estadística a segon d'ESO. Proposta de millora	N ₁ /L ₁
075	3º ESO	Funciones	Matarrodona, P.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica: Introducció a les funcions i funcions lineals	N ₃ /L ₃
076	4º ESO	Funciones	Maya, G.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica Funcions a quart d'ESO	N ₃ /L ₃
077	3º ESO	Probabilidades	Mesa, F.	Juguem amb la probabilitat a 3r de l'ESO: Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₃ /L ₃
078	1º ESO	Álgebra	Miguel, R.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Expressions algebraiques equivalents a 1r de la ESO	N ₀ /L ₀
079	4º ESO	Geometría	Montraveta, L.	Rectes en el pla, una revisió. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₁ /L ₁
080	1º ESO	Geometría	Moñux, A.	Juguem amb figures planes, una proposta per desenvolupar la geometria	N ₁ /L ₁
081	1º ESO	Números	Moreno, T.	Els nombres enters a primer d'ESO – Anàlisi i proposta de millora de la UD	N ₀ /L ₀
082	1º ESO	Álgebra	Muria, S.	Proposta de millora de l'avaluació en la unitat didàctica d'equacions de 1r grau	N ₀ /L ₀
083	4º ESO	Álgebra	Musacchia, A.	Equacions quadràtiques i biquadrades 4t d'ESO. Proposta de millora	N ₁ /L ₁
084	2º ESO	Geometría	Navas, A.	El Teorema de Pitàgores. Proposta de millora de la unitat didàctica a 2n d'ESO	N ₀ /L ₀
085	4º ESO	Trigonometría	Olmos, J. M.	Proposta de millora de la UD: Trigonometria a 4rt ESO	N ₁ /L ₁
086	3º ESO	Álgebra	Palomar, M.	Anàlisi i proposta de millora: Sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites	N ₁ /L ₁
087	3º ESO	Geometría	Pedrosa, A.	Millora de la unitat didàctica de Relacions geomètriques a 3r d'ESO	N ₃ /L ₃
088	3º ESO	Funciones	Picart, A.	Proposta de millora de la unitat didàctica Rectes i funcions afins	N ₂ /L ₂
089	1º ESO	Geometría	Picó, M.	Geometria i mesura 1r d'ESO. Model de proposta de millora	N ₁ /L ₁

Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
090	2º ESO	Geometría	Pinado, Z.	Proposta de millora de la unitat didàctica: Expliquem el nostre món tridimensional a 2n d'E.S.O.	N ₁ /L ₁
091	4º ESO	Trigonometría	Piñón, O.	Mesurem l'inabastable	N ₁ /L ₁
092	2º ESO	Geometría	Pont, J.	Triangles i els seus teoremes	N ₁ /L ₁
093	1º ESO	Geometría	Prat, S.	Geometria de primer d'ESO – Proposta de millora	N ₁ /L ₁
094	4º ESO	Funciones	Puig, G.	Funcions a quart d'ESO. Estudi d'una unitat didàctica	N ₃ /L ₃
095	2º ESO	Geometría	Puig, P.	Millora de la unitat didàctica de geometria a 2n d'ESO	N ₁ /L ₁
096	2º ESO	Estadística	Pujol, A.	Estadística i probabilitat per al crim sense resoldre a 2n d'ESO. Estudi de la idoneïtat didàctica i proposta de millora de la U.D.	N ₀ /L ₀
097	1º ESO	Geometría	Quer, C.	Rectes i angles a 1r d'ESO: Anàlisi de la qualitat i propostes de millora a la unitat didàctica	N ₀ /L ₀
098	3º ESO	Geometría	Reverter, D.	Geometria en 3 dimensions: Proposta de millora	N ₂ /L ₂
099	2º ESO	Geometría	Rodríguez, R.	La mesura: semblança, Tales i Pitàgores a 2n d'ESO. Proposta de millora	N ₂ /L ₂
100	4º ESO	Funciones	Roig, A.	Funcions lineals i afins 4t ESO. Anàlisi i proposta de millora	N ₃ /L ₃
101	3º ESO	Geometría	Romero, Ó.	Analitzem l'espai a tercer d'ESO	N ₁ /L ₁
102	1º BAC	Números	Sánchez, J. A.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica: Aritmètica mercantil a 1r de batxillerat	N ₃ /L ₃
103	4º ESO	Geometría	Sánchez, J. R.	Anàlisi i proposta de millora d'una unitat didàctica de geometria analítica en el pla a 4t ESO	N ₁ /L ₁
104	2º ESO	Álgebra	Simon, M.	Equacions de segon grau a GES-2. Proposta de millora	N ₁ /L ₁
105	3º ESO	Funciones	Sola, A.	Introduïm-nos a les funcions a 3r d'ESO. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₂ /L ₂
106	3º ESO	Geometría	Soler, J.	Proporcionalitat geomètrica. Una proposta de millora de la unitat didàctica	N ₂ /L ₂
107	4º ESO	Álgebra	Tajahuerce, M.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica: Sistemes d'equacions i inequacions	N ₁ /L ₁
108	3º ESO	Álgebra	Tapias, A.	Treball Final de Màster: Sistemes d'equacions, reptes cooperatius	N ₁ /L ₁
109	1º ESO	Geometría	Tarragó, B.	Anàlisi de la implementació de la unitat didàctica: Polígons, triangles	N ₀ /L ₀
110	1º ESO	Números	Teixidó, M.	Fraccions 1r d'ESO. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₀ /L ₀
111	1º ESO	Números	Thöni, E.	L'avaluació, una clau pel cademat de la motivació. Millora	N ₀ /L ₀

Anexo 5: Base de Datos de los TFM's del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

N.º	Nivel**	Tema***	Autor	Título	Mod*
				de la unitat didàctica dels nombres enters	
112	3º ESO	Geometría	Tomàs, A.	Proposta de millora sobre una unitat didàctica de geometria plana	N ₀ /L ₀
113	3º ESO	Álgebra	Ullés, S.	Millora de la unitat didàctica: Sistemes d'equacions de primer grau	N ₂ /L ₂
114	2º ESO	Álgebra	Vadillo, M.	Introducció a l'àlgebra	N ₁ /L ₁
115	1º ESO	Geometría	Valdivieso, N.	Geometria adaptada a l'alumnat. Proposta de millora de la unitat didàctica	N ₀ /L ₀
116	2º ESO	Geometría	Valverde, G.	Anàlisi i proposta de millora de la unitat didàctica: Cossos geomètrics a 2n d'ESO	N ₂ /L ₂
117	2º ESO	Geometría	Vidal, P.	La mesura: Teoremes de Tales i de Pitàgores. Valoració i proposta de millora de la unitat didàctica	N ₀ /L ₀

Anexo 5: Base de Datos de los TFMs del Tercer Artículo
Annex 5: Database of MFPs from the Third Article

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo – Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

En este anexo se presentan los 148 comentarios valorativos de los 40 TFMs clasificados en los niveles L₂ y L₃ de referencia a la modelización en el tercer artículo (véase Tabla 14), en idioma catalán (original), español, e inglés.

This annex presents the 148 evaluative comments taken from the 40 MFPs classified at levels L₂ and L₃ of reference to mathematical modelling in the third article (see Tabla 14), in Catalan (original), Spanish, and English language. (*) Criterio means Criterion.

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #001			
Epistémico Epistemic	– La modelització s’hauria pogut treballar amb més intensitat, especialment considerant que el teorema de Pitàgores es pot estendre fàcilment al món tangible i que és una eina fonamental per modelitzar multitud de problemes geomètrics. Alguns contextos senzills es van treballar (com per exemple, les distàncies), però no es van explorar models més complicats de forma suficient (p. 12). [IE3]	– La modelización se habría podido trabajar con mayor intensidad, especialmente, considerando que el teorema de Pitágoras puede extenderse fácilmente al mundo tangible y que es una herramienta fundamental para modelizar una multitud de problemas geométricos. Algunos contextos sencillos se trabajaron (por ejemplo, la distancias), pero no se exploraron modelos más complicados de forma suficiente (p. 12). [IE3]	– Modelling could have been worked on more intensely, especially considering that the Pythagorean theorem can be easily extended to the tangible world and that it is a fundamental tool for modelling a multitude of geometric problems. Some simple contexts were worked on (for example, distances), but more complicated models were not sufficiently explored (p. 12). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Durant el disseny de la unitat didàctica es va intentar posar èmfasi en unes matemàtiques contextualitzades que l’alumnat pogués vincular fàcilment amb la seva realitat pròpia (p. 19). [IA1]	– Durante el diseño de la unidad didáctica se intentó poner énfasis en una matemática contextualizada que los estudiantes pudieran vincular fácilmente con su propia realidad (p. 19). [IA1]	– During the design of the didactic unit, an attempt was made to emphasise contextualised mathematics that the students could easily link with their own reality (p. 19). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	– La majoria de l’alumnat ha acabat la unitat didàctica amb aquesta visió predominant, i no ha	– La mayoría de los estudiantes terminaron la unidad didáctica con esta visión predominante, y no	– Most of the students finished the didactic unit with this predominant vision and did not show

Criterio*	Original	Español	English
	<p>mostrat prou capacitat per aplicar el coneixement adquirit a altres contextos que no siguin, necessàriament, la resolució de triangles rectangles (p. 24). – Utilitzar el teorema per resoldre problemes senzills. Identificar contextos no matemàtics on el teorema pot ser rellevant. [...]. Buscar contextos on el teorema resulta útil. Entendre la utilitat del teorema per cercar distàncies al sistema cartesià. [...]. Treballar la resolució de problemes contextualitzats (p. 35).</p>	<p>mostraron capacidad suficiente para aplicar el conocimiento adquirido a otros contextos que no fueran, necesariamente, la resolución de triángulos rectángulos (p. 24). – Utilizar el teorema para resolver problemas sencillos. Identificar contextos no-matemáticos en los que el teorema puede ser relevante. [...]. Buscar contextos en los que el teorema resulta útil. Entender la utilidad del teorema para buscar distancias en el sistema cartesiano. [...]. Trabajar la resolución de problemas contextualizados (p. 35).</p>	<p>sufficient ability to apply the knowledge acquired to other contexts that were not, necessarily, the solving of right-triangles (p. 24). – Using the theorem to solve simple problems. Identifying non-mathematical contexts in which the theorem may be relevant. [...]. Looking for contexts in which the theorem is useful. Understanding the usefulness of the theorem to find distances in the cartesian system. [...]. Working on solving contextualised problems (p. 35).</p>
TFM/MFP #003			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Contextualització: Resoldre problemes matemàtics contextualitzats al món real i a la vida quotidiana. Gairebé tots els problemes han estat contextualitzats en entorns quotidians i/o coneguts per l'alumnat. [...]. Modelització: Traduir un problema amb context real a llenguatge matemàtic usant diverses tècniques, amb l'objectiu de donar una resposta a la qüestió plantejada. Pràcticament inexistent, tot i que l'objectiu de la UD és precisament fer una introducció a la potencialitat modelitzadora de les matemàtiques. [...]. Hi ha 4 processos amb una presència forta, 4 en camí de millorar i dos amb presència insuficient, un d'ells totalment inexistent. En particular, considero que s'ha de parar especial atenció al procés de modelització, ja que essent un dels processos fonamentals per poder garantir l'ensenyament d'una bones matemàtiques,</p>	<p>– Contextualización: Resolver problemas matemáticos contextualizados en el mundo real y en la vida cotidiana. Casi todos los problemas se contextualizaron en entornos cotidianos y/o conocidos por los estudiantes. [...]. Modelización: Traducir un problema con contexto real al lenguaje matemático usando diversas técnicas, con el objetivo de dar respuesta a la cuestión planteada. Prácticamente inexistente, aunque el objetivo de la UD es precisamente realizar una introducción al potencial modelizador de la matemática. [...]. Hay cuatro procesos con una fuerte presencia, cuatro en camino de mejorar, y dos con presencia insuficiente, uno de ellos totalmente inexistente. En particular, considero que debe prestarse especial atención al proceso de modelización, ya que siendo uno de los procesos</p>	<p>– Contextualisation: Solving mathematical problems contextualised in the real world and everyday life. Almost all the problems were contextualised in everyday environments and/or known to the students. [...]. Modelling: Translating a problem with a real context into mathematical language using various techniques, with the aim of answering the question posed. Practically non-existent, although the objective of the DU is precisely to provide an introduction to the modelling potential of mathematics. [...]. There are four processes with a strong presence, four on the way to improvement, and two with insufficient presence, one of them completely non-existent. Particularly, I consider that special attention should be paid to the modelling process, since being one of the fundamental processes to guarantee the teaching of a good mathematics, it</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	no pot faltar a l'hora de dissenyar i implementar una UD. En aquest sentit, crec que és urgent treballar més en activitats on es fomenti l'exploració, l'argumentació i la interpretació, ja que aquests processos porten com a conseqüència directa un esperit modelitzador (pp. 7–8). [IE3]	fundamentales para poder garantizar la enseñanza de una buena matemática, no puede faltar a la hora de diseñar e implementar una UD. En este sentido, creo que es urgente trabajar más en actividades que fomenten la exploración, la argumentación, y la interpretación, ya que estos procesos traer como consecuencia directa un espíritu modelizador (pp. 7–8). [IE3]	cannot be missing when designing and implementing a DU. In this sense, I believe that it is urgent to work more on activities that encourage exploration, argumentation, and interpretation, since these processes bring a modelling spirit as a direct consequence (pp. 7–8). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– Connexions: Aplicació a contextos no matemàtics, contextualització, interpretació de situacions per a transformar-los en problemes matemàtics i relació entre diferents àmbits matemàtics (p. 14). [IC4]	– Conexiones: Aplicación a contextos no-matemáticos, contextualización, interpretación de situaciones para transformarlos en problemas matemáticos y relación entre distintos ámbitos matemáticos (p. 14). [IC4]	– Connections: Application to non-mathematical contexts, contextualisation, interpretation of situations to transform them into mathematical problems and relationship between different fields (p. 14). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Amb la informació recollida durant la fase d'observació i conjuntament amb l'assessorament del meu mentor, vaig dissenyar gairebé totes les activitats de forma que no només estiguessin contextualitzades en el món real, sinó en situacions que motivessin a l'alumnat (p. 19). [IA1]	– Con la información recogida durante la fase de observación y juntamente con el asesoramiento de mi mentor, diseñé casi todas las actividades de forma que no sólo estuvieran contextualizadas en el mundo real, sino también en situaciones que motivaran a los estudiantes (p. 19). [IA1]	– With the information collected during the observation phase and together with the advice of my mentor, I designed almost all the activities so that they were not only contextualised in the real world, but also in situations that motivated the students (p. 19). [AS1]
Ecológico Ecological	– Degut a l'alt grau de contextualització de les activitats proposades a la UD i la naturalesa del projecte global on està emmarcada amb una aplicació al món real directa [...], considero que tot allò que s'ha treballat té una gran utilitat en termes socio-laborals. [...]. D'altra banda, en qüestions modelitzadores, usem les	– Debido al alto grado de contextualización de las actividades propuestas en la UD y la naturaleza del proyecto global donde está enmarcada, con una aplicación directa al mundo real [...], considero que todo lo trabajado tiene una gran utilidad en términos sociolaborales. [...]. Por otra parte, en cuestiones modelizadoras,	– Due to the high degree of contextualisation of the activities proposed in the DU and the nature of the global project where it is framed, with a direct application to the real world [...], I consider that everything I have worked on is very useful in social and labour terms. [...]. On the other hand, in modelling issues, we

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>matemàtiques contínuament per descriure la realitat, i la proporcionalitat entra en joc quan no ens és suficient usar només nombres per donar informació: necessitem comparar i relacionar quantitats. D'altra banda, les situacions on els percentatges estan involucrats són extraordinàriament freqüents en la vida de tothom, pel que el seu estudi és una qüestió motivadora en si mateixa perquè tots els alumnes n'han sentit a parlar alguna vegada (p. 23). [IEc3]</p>	<p>usamos la matemática continuamente para describir la realidad y la proporcionalidad entra en juego cuando no nos basta con usar sólo números para dar información: necesitamos comparar y relacionar cantidades. Por otro lado, las situaciones en las que los porcentajes están involucrados son extraordinariamente frecuentes en la vida de todos, por lo que su estudio es una cuestión motivadora en sí misma porque todos los estudiantes han oído hablar de ello alguna vez (p. 23). [IEc3]</p>	<p>continually use mathematics to describe reality and proportionality comes into play when it is not enough to use only numbers to provide information: we need to compare and relate quantities. On the other hand, situations in which percentages are involved are extraordinarily frequent in everyone's life, so their study is a motivating question in itself because all the students have heard of it at some time (p. 23). [EcS3]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– L'objectiu principal de la UD era treballar continguts relacionats amb la proporcionalitat i els percentatges, de forma que estigués enquadrat en un context pràctic i proper a l'alumnat. La idea era que adquirissin els problemes plantejats, a la vegada que comprenien la seva naturalesa matemàtica (p. 1). – I és que l'objectiu final en qüestions matemàtiques era introduir la potencialitat d'aquestes com a eina modelitzadora de la realitat que ens envolta (p. 3). – Contextualització i valor interdisciplinari: Abans del màster considero que el grau d'assoliment d'aquesta competència era N2, com es pot veure en el disseny totalment contextualitzat de la UD. Un cop estic a punt de finalitzar-lo, crec que em trobo en un grau d'assoliment N2/N3, ja que encara no se ben bé com fomentar en l'alumnat la construcció de models matemàtics senzills, però</p>	<p>– El objetivo principal de la UD era trabajar contenidos relacionados con la proporcionalidad y los porcentajes, de forma que estuviera encuadrado en un contexto práctico y cercano a los estudiantes. La idea era que adquirieran los problemas planteados, a la vez que comprendían su naturaleza matemática (p. 1). – Y es que el objetivo final, en cuestiones matemáticas, era introducir el potencial de éstas como herramienta modelizadora de la realidad que nos rodea (p. 3). – Contextualización y valor interdisciplinario: Antes del máster, considero que el grado de consecución de esta competencia era N2, como puede verse en el diseño totalmente contextualizado de la UD. Ahora que estoy a punto de finalizarlo, creo que me encuentro en un grado de consecución N2/N3, ya que todavía no sé exactamente cómo fomentar en los estudiantes la construcción de modelos</p>	<p>– The main objective of the DU was to work on contents related to proportionality and percentages, so that it was framed in a practical context close to the students. The was for them to acquire the problems posed, while understanding their mathematical nature (p. 1). – And the final objective, in mathematical matters, was to introduce their potential as a modelling tool of the reality that surrounds us (p. 3). – Contextualisation and interdisciplinary value: Before the master's programme, I consider that the degree of achievement of this competency was L2, as can be seen in the fully contextualised design of the DU. Now that I am close to finishing it, I think I am at a level of achievement N2/N3, since I still do not know exactly how to encourage students to build simple mathematical models, but I intend to investigate it (p. 112).</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	tinc la intenció d'investigar-ho (p. 112).	matemáticos sencillos, pero tengo la intención de investigarlo (p. 112).	
TFM/MFP #010			
Epistémico Epistemic		<p>– Resolución de problemas: Aplicar los conocimientos previos y el razonamiento para traducir un problema a lenguaje matemático y resolverlo, contemplando diferentes estrategias. Sí. La UD se ha diseñado para realizar un aprendizaje basado en problemas. En “Generalizamos”, se llega inductivamente al concepto de equivalencia de expresiones algebraicas al generar el alumnado diversas expresiones que describen la misma situación-problema. [...]. Modelización (matematización horizontal de Freudenthal, 1991): Usar representaciones matemáticas para modelizar e interpretar situaciones. Sí. La actividad “Generalizamos” se basa en la búsqueda de un patrón para generar expresiones algebraicas equivalentes (p. 9). Contextualización y fomento de conexiones: Utilizar problemas basados en situaciones cercanas al alumnado, que formen parte de su realidad, o que fomenten la conexión con otras áreas matemáticas. Sí. Los problemas planteados están basados en situaciones cercanas al alumnado y se potencian la visualización, los conocimientos previos y las conexiones con la geometría para fomentar diferentes métodos de aprendizaje y estimular la intuición para usarla como scaffold sobre el que construir (como</p>	<p>– Problem solving: Applying prior knowledge and reasoning to translate a problem into mathematical language and solve it, contemplating different strategies. YES. The DU was designed for problem-based learning. In “We generalise”, the concept of equivalence of algebraic expressions is reached inductively when the students generate various expressions that describe the same problem-situation. [...]. Modelling (horizontal mathematisation of Freudenthal, 1991): Using mathematical representations to model and interpret situations. YES. The “We generalise” activity is based on the search for a pattern to generate equivalent algebraic expressions (p. 9). Contextualisation and promotion of connections: Using problems based on situations close to the students, which are part of their reality, or which promote the connection with other mathematical areas. YES. The problems posed are based on situations close to the students and visualisation, prior knowledge, and connections with geometry are promoted to foster different learning methods and stimulate intuition to use it as a scaffold on which to build (as documented by Papert, 1980, p. 144) (p. 10). [ES3]</p> <p>– The activity where the notion of function or relationship was worked</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
 Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		<p>documenta Papert, 1980, p. 144) (p. 10). [IE3]</p> <p>– La actividad donde se ha trabajado la noción de función o relación ha sido “Generalizamos”, donde se partía de un patrón visual contextualizado (una piscina), para practicar diferentes formas de contar las baldosas marrones del borde en función de las baldosas de un lado (p. 12). En concordancia con este marco teórico, se determina que se fueron presentando de forma progresiva las configuraciones tabular, analítica y gráfica, centradas en su aplicación a la solución de un problema de modelización extra-matemático (p. 13). [IE4]</p>	<p>on has been “We generalise”, where we started from a contextualised visual pattern (a swimming pool), to practise different ways of counting the brown tiles on the edge depending on the tiles on one side (p. 12). In accordance with this theoretical framework, it is determined that the tabular, analytical, and graphical configurations were progressively presented, focused on their application to the solution of an extra-mathematical modelling problem (p. 13). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive		<p>– Por otra parte, las actividades propuestas en la unidad didáctica partían de situaciones contextualizadas, con una fuerte base visual, y pensadas para ser de suelo bajo y techo alto (y permitir, por lo tanto, su resolución desde diferentes puntos de partida y diferentes niveles de complejidad), por lo que eran asumibles para todo el alumnado (p. 15). [IC1]</p> <p>– Aunque las actividades propuestas en la unidad didáctica promuevan el aprendizaje basado en problemas, éstos han sido seleccionados para activar procesos cognitivos relevantes para el nivel del alumnado y los contenidos trabajados. Entre los principales procesos cognitivos potenciados se encuentran la generalización [...], las conexiones intra-matemáticas [...], cambios de representación [...],</p>	<p>– On the other hand, the activities proposed in the didactic unit started from contextualised situations, with a strong visual base, and designed to have a low floor and a high ceiling (and therefore allow their solving from different starting points and different levels of complexity), so they were acceptable to all the students (p. 15). [CS1]</p> <p>– Although the activities proposed in the didactic unit promote problem-based learning, they have been selected to activate relevant cognitive processes for the student level and the contents addressed. Among the main cognitive processes enhanced are generalisation [...], intra-mathematical connections [...], representation changes [...], mental calculation [...] or reasoning [...] (p. 16). [CS4]</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		cálculo mental [...] o razonamiento [...] (p. 16). [IC4]	
Interaccional Interaccional		–	–
Mediacional Mediational		– Además, la actividad “Generalizamos” permitió al alumnado familiarizarse con la representación de una relación mediante tabla y gráfico utilizando el programa GeoGebra [...] y la actividad [...] se desarrollaba, asimismo, haciendo uso de recursos TAC [...], siendo la motivación fundamental de estas implementaciones la contextualización del contenido y la potenciación del aspecto visual de los mismos (p. 19). [IM1]	– In addition, the “We generalise” activity allowed the students to become familiar with the representation of a relationship through a table and graph using the GeoGebra software [...] and the activity [...] was also developed using LKT resources [...], being the contextualisation of contents and the enhancement of their visual aspect the fundamental motivation for these implementations (p. 19). [MS1]
Afectivo Affective		–	–
Ecológico Ecological		– Las actividades intentan fomentar las conexiones intra-matemáticas, [...], fomentando diferentes aproximaciones al mismo problema y el trabajo de la geometría. Además, se han fomentado las conexiones con elementos cercanos al contexto del alumnado (sistema Din para folios, juego de Bingo, modelización de una piscina), aunque no se han fomentado las conexiones interdisciplinarias (p. 20). [IEc2] – Los contenidos trabajados, así como el álgebra en general, facilitan observar y comprender el contexto que nos rodea mediante modelos, generalizaciones y mediciones (p. 20). [IEc3]	– The activities try to promote intra-mathematical connections, [...], promoting different approaches to the same problem and the work of geometry. In addition, connections with elements close to the students’ context were encouraged (Din system for folios, Bingo game, modelling of a swimming pool), although interdisciplinary connections were not encouraged (p. 20). [EcS2] – The contents addressed, as well as algebra in general, make it easier to observe and understand the context that surrounds us through models, generalisations, and measurements (p. 20). [EcS3]
Otros Others		– Mi propia forma de aprender matemáticas, así como mi formación en ingeniería, me han facilitado la creación de	– My own way of learning mathematics, as well as my education in engineering, have facilitated the creation of a

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	X	una unidad didáctica donde el alumnado aprende dentro de un contexto de aplicación cercano donde las matemáticas son un recurso necesario para modelizar (p. 28). – Modelización (pp. 36–37).	didactic unit where the students learn within a close application context where mathematics is a necessary resource for modelling (p. 28). – Modelling (pp. 36–37).
TFM/MFP #014			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Resoldre diferents tipus de problemes matemàtics de diverses maneres. [...]. Materialització: Passar una idea matemàtica a un context concret. [...]. Aquesta inclou un problema que consisteix en indicar el nombre màxim de caixes que hi poden cabre en un camió d'una determinada dimensió. Llavors, es pot aplicar diverses estratègies per resoldre'l perquè segons com es col·loca les caixes hi cabran un nombre de caixes o un altre. Cada alumne ho farà com cregui convenient i després s'agruparà amb el seu grup cooperatiu per explicar la seva proposta. Per tant, en aquesta activitat es pot treballar el procés de resolució de problemes, de problematització i de materialització (p. 6). [IE3]	– Resolución de problemas: Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas formas. [...]. Materialización: Pasar una idea matemática a un contexto concreto. [...]. Se incluye un problema que consiste en indicar el número máximo de cajas que pueden caber en un camión de una determinada dimensión. Entonces, se pueden aplicar diferentes estrategias para resolverlo porque, según cómo se colocan las cajas, cabrá un número u otro. Cada estudiante lo hará como crea conveniente y después se reunirá con su grupo cooperativo para explicar su propuesta. Por lo tanto, en esta actividad se puede trabajar el proceso de resolución de problemas, de problematización, y de materialización (p. 6). [IE3]	– Problem solving: Solving different types of mathematical problems in different ways. [...]. Materialisation: Transferring a mathematical idea to a concrete context. [...]. A problem that consists of indicating the maximum number of boxes that can fit in a lorry of a certain size is included. So, different strategies can be applied to solve it because, depending on how the boxes are placed, one number or another will fit. Each student will do it as they see fit and then meet with their cooperative group to explain their proposal. Therefore, in this activity, the processes of problem solving, problematisation, and materialisation can be worked on (p. 6). [ES3]
Cognitivo Cognitive	X	X	X
Interaccional Interactional	X	X	X
Mediacional Mediational	X	X	X
Afectivo Affective	– Algunes activitats de la unitat didàctica estan pensades perquè els alumnes puguin treballar en grups cooperatius. Per fer l'Activitat 2 de Construcció d'un hotel, s'ha posat en un context en	– Algunas actividades de la unidad didáctica están pensadas para que los estudiantes puedan trabajar en grupos cooperativos. Para realizar la Actividad 2 de Construcción de un hotel, se puso un contexto	– Some activities in the didactic unit are designed so that students can work in cooperative groups. To carry out Activity 2 of Construction of a hotel, a context was set in which the students are architects

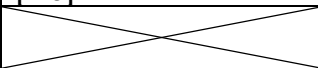
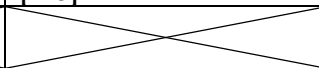
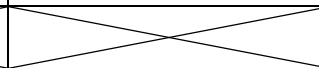
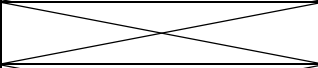
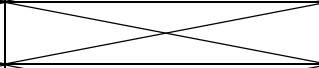
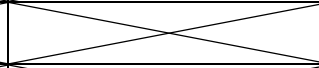
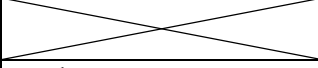
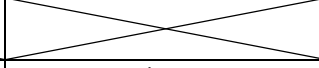
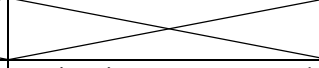
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	que els alumnes són arquitectes i a més, cadascú té un rol (constructor, comptable i RRPP). Vaig observat que això els va motivar per treballar, però el fet que treballin en grups fa que sigui més difícil de controlar cada alumne (p. 16). [IA1]	en que los estudiantes son arquitectos y, además, cada uno tiene un rol (constructor, contable, relacionador público). Observé que esto les motivó para trabajar, pero el hecho de que lo hagan en grupos hace que sea más difícil controlar a cada estudiante (p. 16). [IA1]	and, in addition, each one has a role (builder, accountant, public relations officer). I observed that this motivated them to work, but the fact that they do it in groups makes it more difficult to control each student (p. 16). [AS1]
Ecológico Ecological	– No hi ha hagut una utilitat laboral directa, però en alguna activitat com la de Construcció d'un hotel s'acaba posant un context, posant de manifest la relació de la geometria amb l'arquitectura (p. 21). [IEc3]	– No ha habido una utilidad laboral directa, pero en alguna actividad, como la de Construcción de un hotel, se acaba poniendo un contexto, poniendo de manifiesto la relación entre la geometría y la arquitectura (p. 21). [IEc3]	– There has not been a direct labour utility, but in some activity, such as that of Construction of a hotel, a context ends up being created, revealing the relationship between geometry and architecture (p. 21). [EcS3]
Otros Others	– A més, amb les eines que ofereixen les TIC es poden desenvolupar activitats d'aprenentatge interactives, participatives i que simulin contextos reals (p. 27). – Contextualització i valor interdisciplinari: Al dissenyar la unitat didàctica, s'ha intentat crear problemes contextualitzats encara que m'ha resultat complicat cercar contextos quotidians on poder treballar alguns conceptes. El màster m'ha ensenyat a donar importància a les activitats contextualitzades i relacionades amb la vida quotidiana per afavorir l'aprenentatge (p. 31).	– Además, con las herramientas que ofrecen las TIC, se pueden desarrollar actividades de aprendizaje interactivas, participativas, y que simulen contextos reales (p. 27). – Contextualización y valor interdisciplinario: Al diseñar la unidad didáctica, se intentó crear problemas contextualizados, aunque me resultó complicado buscar contextos cotidianos en los que poder trabajar algunos conceptos. El máster me ha enseñado a dar importancia a las actividades contextualizadas y relacionadas con la vida cotidiana para favorecer el aprendizaje (p. 31).	– Furthermore, with the tools offered by ICT, interactive and participatory learning activities can be developed that simulate real contexts (p. 27). – Contextualisation and interdisciplinary value: When designing the didactic unit, an attempt was made to create contextualised problems, although it was difficult for me to find everyday contexts in which to work on some concepts. The master's programme has taught me to give importance to contextualised activities related to daily life to promote learning (p. 31).
TFM/MFP #015			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Sí, s'ha produït la resolució de problemes, como ara en la Tasca 5. Però la mostra de problemes podria haver estat més representativa. [...]. Contextualització: Sí, s'ha produït. Existeixen moltes activitats que	– Resolución de problemas: Sí, se produjo la resolución de problemas, como en la Tarea 5. Pero la muestra de problemas podría haber sido más representativa. [...]. Contextualización: Sí, se produjo. Existen muchas actividades que	– Problem solving: Yes, problem solving occurred, as in Task 5. But the sample of problems could have been more representative. [...]. Contextualisation: Yes, it occurred. There are many activities that reflect various problems of daily

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	refleixen diversos problemes de la vida quotidiana. La millor activitat en aquest sentit és la 2 de la Tasca 2 (p. 8). [IE3]	reflejan varios problemas de la vida cotidiana. En este sentido, la mejor actividad es la 2 de la Tarea 2 (p. 8). [IE3]	life. In this sense, activity 2 of Task 2 is the best (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	– S’han inclòs activitats amb recursos manipulatius. La funció d’aquestes activitats ha estat contextualitzar les activitats (p. 10). [IM1]	– Se incluyeron actividades con recursos manipulativos. La función de estas actividades fue contextualizarlas (p. 10). [IM1]	– Activities with manipulative resources were included. The function of these activities was to contextualise them (p. 10). [MS1]
Afectivo Affective	– S’han inclòs activitats que han fet valorar les matemàtiques en la vida quotidiana. Tanmateix, no totes les activitats contextualitzades han estat capaç de motivar suficientment l’alumnat (p. 11). [IA1]	– Se incluyeron actividades que hicieron valorar la matemática en la vida cotidiana. Sin embargo, no todas las actividades contextualizadas fueron capaces de motivar suficientemente a los estudiantes (p. 11). [IA1]	– Activities that valued mathematics in everyday life were included. However, not all the contextualised activities were able to sufficiently motivate the students (p. 11). [AS1]
Ecológico Ecological	– S’han fet moltes activitats contextualitzades en la vida quotidiana (p. 11). [IEc3]	– Se realizaron muchas actividades contextualizadas en la vida cotidiana (p. 11). [IEc3]	– Many activities contextualised in everyday life were carried out (p. 11). [EcS3]
Otros Others	– L’àlgebra és una de les principals eines per a la modelització de les matemàtiques, la qual té un gran pes dins el currículum de l’ESO (p. 3). – Idoneïtat ecològica: La unitat didàctica es va introduir molt bé en la metodologia del centre, amb activitats molt obertes als resultats de recerca. A banda s’han contextualitzat les activitats a la vida real. Tanmateix es podria haver creat més activitats que relacionessin les funcions amb altres disciplines (p. 13). – Contextualització i valor interdisciplinari: El màster m’ha servit per crear més connexions entre les matemàtiques i altres disciplines. També m’ha	– El álgebra es una de las principales herramientas de la matemática para la modelización, que tiene un gran peso en el currículo de la ESO (p. 3). – Idoneidad ecológica: La unidad didáctica se introdujo muy bien en la metodología del centro, con actividades muy abiertas a los resultados de investigación, además de haber estado contextualizadas en la vida real. Sin embargo, podrían haberse creado más actividades que relacionaran las funciones con otras disciplinas (p. 13). – Contextualización y valor interdisciplinario: El máster me ha servido para crear más conexiones entre la matemática y otras	– Algebra is one of the main mathematical tools for modelling, which has great weight in the CSE curriculum (p. 3). – Ecological suitability: The didactic unit was very well introduced into the internship centre’s methodology, with activities very open to research results, in addition to having been contextualised in real life. However, more activities could have been created that related the functions to other disciplines (p. 13). – Contextualisation and interdisciplinary value: The master’s programme has helped me create more connections between mathematics and other disciplines. Also, it made me reflect on using my

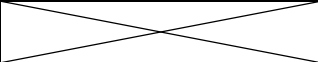

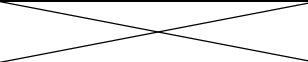



Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	fet reflexionar, per utilitzar el meu coneixement en termes econòmics per contextualitzar les matemàtiques, augmentant així el pensament crític de l'alumnat (p. 24).	disciplinas. También, me ha hecho reflexionar para utilizar mi conocimiento en términos económicos para contextualizar la matemática, aumentando así el pensamiento crítico de los estudiantes (p. 24).	knowledge in economic terms to contextualise mathematics, thus increasing students' critical thinking (p. 24).
TFM/MFP #019			
Epistémico Epistemic	– Per una banda, tal com s'indica a la taula-resum, les competències que més s'han desenvolupat han estat: comunicar, modelar, plantejar i resoldre problemes i institucionalitzar. [...]. Plantejar i resoldre problemes ha estat una part primordial de la unitat didàctica de trigonometria. Vaig preparar tres activitats exclusivament per reforçar aquest procés. [...]. Modelar ha esdevingut una peça clau durant el desenvolupament de l'activitat que es va dur a terme al pati de l'escola [...], on l'alumnat havia de mesurar les alçades de diversos objectes de l'institut mitjançant diferents procediments en un ambient totalment contextualitzat i reflexionar sobre els resultats obtinguts (p. 6). [IE3]	– Por un lado, tal y como se indica en la tabla-resumen, las competencias que más se desarrollaron fueron: comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, e institucionalizar. [...]. Plantear y resolver problemas ha sido parte primordial de la unidad didáctica de trigonometría. Preparé tres actividades exclusivamente para reforzar este proceso. [...]. Modelizar se convirtió en una pieza clave durante el desarrollo de la actividad que se llevó a cabo en el patio de la escuela [...], donde los estudiantes debían medir las alturas de diversos objetos del instituto mediante diferentes procedimientos en un ambiente totalmente contextualizado y reflexionar sobre los resultados obtenidos (p. 6). [IE3]	– On one hand, as indicated in the summary table, the competencies that were most developed were: communicating, modelling, posing and solving problems, and institutionalising. [...]. Posing and solving problems has been a fundamental part of the didactic unit on trigonometry. I prepared three activities exclusively to reinforce this process. [...]. Modelling became a key piece during the development of the activity that took place in the school yard [...], where the students had to measure the heights of various objects in the institute using different procedures in a fully contextualised environment and reflect about the results obtained (p. 6). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– S'han proposat situacions que mostren algunes de les infinites possibilitats que ens brinda aquesta branca de la ciència en la vida quotidiana. En són bons exemples tots aquests problemes contextualitzats, como ara el de la Torre Eiffel [...] o la Torre de	– Se propusieron situaciones que muestran algunas de las infinitas posibilidades que nos brinda esta rama de la ciencia en la vida cotidiana. Todos estos problemas contextualizados son buenos ejemplos, como el de la Torre Eiffel [...] o la	– Situations were proposed that show some of the infinite possibilities that this branch of science offers us in everyday life. All these contextualised problems are good examples, such as that of the Eiffel Tower [...] or the Tower of Pisa [...], and the activity carried out in

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	Pisa [...], i l'activitat feta al pati amb el goniòmetre, on l'alumnat havia de trobar, mitjançant diferents procediments, l'alçada de diversos objectes. [...]. Així i tot, potser podria haver fet una enquesta durant la primera fase del pràcticum per assabentar-me dels interessos dels estudiants, i poder acotar i contextualitzar més els problemes de la unitat (p. 11). [IA1]	Torre de Pisa [...], y la actividad realizada en el patio con el goniómetro, donde los estudiantes debían encontrar, mediante diferentes procedimientos, la altura de varios objetos. [...]. Aun así, quizás podría haber hecho una encuesta durante la primera fase de prácticas para conocer los intereses de los estudiantes, y poder acotar y contextualizar más los problemas de la unidad (p. 11). [IA1]	the yard with the goniometer, where the students had to find, through different procedures, the height of various objects. [...]. Even so, perhaps I could have done a survey during the first phase of the internship experience to find out the students' interests, and to be able to limit and better contextualise the problems of the unit (p. 11). [AS1]
Ecológico Ecological	– Mitjançant els problemes contextualitzats també s'han treballat altres tipus de connexions (p. 20). [IEc2]	– Mediante los problemas contextualizados, también se trabajaron otros tipos de conexiones (p. 20). [IEc2]	– Through the contextualised problems, other types of connections were also worked on (p. 20). [EcS2]
Otros Others	– Amb tot això, l'objectiu era que l'alumnat fos capaç, en futures ocasions, de resoldre satisfactòriament problemes on la trigonometria es veïés implicada, tant en contextos matemàtics com extramatemàtics (p. 3). – Per tal d'oferir més oportunitats de treballar cooperativament i potenciar, així, la idoneïtat ecològica, es crearà un espai de treball en grups per tal de resoldre les activitats 7 i 8, és a dir, aquelles que plantegen tot un seguit de problemes contextualitzats (p. 24). – Modelar: Inclou estructurar la situació que es modela, traduir la realitat a una estructura matemàtica, treballar amb un model matemàtic, validar el model, reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i als seus resultats (p. 34). – Contextualització i valor interdisciplinari: Considero que, prèviament a la realització del màster,	– Con todo ello, el objetivo era que los estudiantes fueran capaces, en futuras ocasiones, de resolver satisfactoriamente problemas en los que la trigonometría se viera implicada, tanto en contextos matemáticos como extra-matemáticos (p. 3). – Con el fin de ofrecer más oportunidades de trabajar cooperativamente y potenciar, de este modo, la idoneidad ecológica, se creará un espacio de trabajo en grupos para resolver las actividades 7 y 8, es decir, aquéllas que plantean una serie de problemas contextualizados (p. 24). – Modelizar: Incluye estructurar la situación que se modeliza, traducir la realidad a una estructura matemática, trabajar con un modelo matemático, validar el modelo, reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y a sus resultados (p. 34). – Contextualización y valor interdisciplinario:	– With all this, the objective was that the students would be able, on future occasions, to satisfactorily solve problems in which trigonometry was involved, both in mathematical and extra-mathematical contexts (p. 3). – In order to offer more opportunities to work cooperatively and thus enhance ecological suitability, a group workspace will be created to solve activities 7 and 8, that is, those that pose a series of contextualised problems (p. 24). – Modelling: Includes structuring the situation that is modelled, translating reality into a mathematical structure, working with a mathematical model, validating the model, reflecting, analysing, and raising criticisms of a model and its results (p. 34). – Contextualisation and interdisciplinary value: I consider that, prior to completing the master's

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	era capaç de reconèixer contextos i situacions es feia ús de continguts matemàtics. Ara he après a potenciar aquesta competència durant les classes docents, a ressaltar les aplicacions i les utilitats de les matemàtiques en altres disciplines per tal de realitzar un aprenentatge més ric i significatiu (p. 89).	Considero que, previo a la realización del máster, era capaz de reconocer contextos y situaciones en que se hacía uso de contenidos matemáticos. Ahora he aprendido a potenciar esta competencia durante las clases como docente, a resaltar las aplicaciones y utilidades de la matemática en otras disciplinas para realizar un aprendizaje más rico y significativo (p. 89).	programme, I was able to recognise contexts and situations in which mathematical contents were used. Now, I have learned to enhance this competency during my lessons as a teacher, to highlight the applications and uses of mathematics in other disciplines to achieve richer and more meaningful learning (p. 89).
TFM/MFP #020			
Epistémico Epistemic	– A les activitats 6 i 7, els alumnes havien de reflexionar sobre quines característiques comunes tenien les imatges (què era que podíem modelitzar la seva forma amb un polinomi) i sobre quins trets tenien en comú tots els elements excepte un, respectivament. [...]. En tercer lloc, plantejar i resoldre problemes, és un procés indispensable per aprendre qualsevol concepte matemàtic. A la Unitat Didàctica, es pot veure un ampli ventall d'activitats de diferents tipus, i es pot veure també que en la majoria hi ha la possibilitat de resoldre-les utilitzant diferents mètodes i diferents recursos (p. 4). Els alumnes s'han adonat que els polinomis no són un tema aïllat sinó que estan relacionats amb l'àlgebra i amb la geometria; i que serveixen per modelitzar la trajectòria d'una pilota de bàsquet, la forma d'una muntanya russa o de l'arc de Sant Martí (p. 5). [IE3]	– En las actividades 6 y 7, los estudiantes debían reflexionar sobre qué características comunes tenían las imágenes (qué era lo que podíamos modelizar con un polinomio) y sobre qué rasgos tenían en común todos los elementos excepto uno, respectivamente. [...]. En tercer lugar, plantear y resolver problemas es un proceso indispensable para aprender cualquier concepto matemático. En la Unidad Didáctica, se puede ver un amplio abanico de actividades de diferentes tipos, y se puede ver también que, en la mayoría, existe la posibilidad de resolverlas utilizando diferentes métodos y recursos (p. 4). Los estudiantes se dieron cuenta de que los polinomios no son un tema aislado, sino que están relacionados con el álgebra y la geometría; y que sirven para modelizar la trayectoria de una pelota de baloncesto, la forma de una montaña rusa, o del arcoíris (p. 5). [IE3]	– In activities 6 and 7, the students had to reflect on what common characteristics the images had (what we could model with a polynomial) and on what features all the elements had in common except one, respectively. [...]. Thirdly, posing and solving problems is an essential process to learn any many mathematical concept. In the Didactic Unit, you can see a wide range of activities of different types, and you can also see that, in most of them, there is the possibility of solving them using different methods and resources (p. 4). The students realised that polynomials are not an isolated topic, but are related to algebra and geometry; and that serve to model the trajectory of a basketball, the shape of a roller coaster, or the rainbow (p. 5). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional			

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
Interaccional			
Mediacional			
Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Per això, en planificar la Unitat Didàctica, vam proposar activitats que despertessin l’interès dels alumnes i que permetessin valorar la utilitat i la necessitat de les matemàtiques tant en la vida quotidiana com professional: d’una banda l’àlgebra i el llenguatge algebraic per a la generalització de patrons, per a la creació d’endevinalles i per al disseny d’una factura amb un full de càlcul i d’altra banda els polinomis com a eina per modelitzar formes de la vida quotidiana – muntanya russa, tir d’una pilota, arc de Sant Martí, etc. (p. 11). [IA1]</p>	<p>– Por eso, al planificar la Unidad Didáctica, propusimos actividades que despertaran el interés de los estudiantes y que permitieran valorar la utilidad y la necesidad de la matemática, tanto en la vida cotidiana como profesional: por un lado, el álgebra y el lenguaje algebraico para la generalización de patrones, para la creación de adivinanzas, y para el diseño de una factura con una hoja de cálculo; por otro lado, los polinomios como herramienta para modelizar formas de la vida cotidiana – montaña rusa, tiro de una pelota, arcoíris, etc. (p. 11). [IA1]</p>	<p>– Therefore, when planning the Didactic Unit, we proposed activities that aroused the students’ interest and that allowed them to value the usefulness and necessity of mathematics, both in daily and professional life: on one hand, algebra and algebraic language for pattern generalisation, for creating riddles, and for designing an invoice with a spreadsheet; on the other hand, polynomials as a tool to model forms of everyday life – roller coaster, ball toss, rainbow, etc. (p. 11). [AS1]</p>
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Idoneïtat epistèmica: Cal afavorir els processos de modelar i d’institucionalitzar (riquesa de processos) (p. 13). – Millora de la idoneïtat epistèmica: Modelització (pp. 13–14). – Millora de la idoneïtat ecològica (pp. 19–20). – Contextualització i valor interdisciplinari: A través de totes les assignatures del Màster, s’ha destacat la importància de la contextualització. A més en la Unitat Didàctica planificada i implementada ha tingut un paper rellevant (p. 22).</p>	<p>– Idoneidad epistémica: Es necesario favorecer los procesos de modelización e institucionalización (riqueza de procesos) (p. 13). – Mejora de la idoneidad epistémica: Modelización (pp. 13–14). – Mejora de la idoneidad ecológica (pp. 19–20). – Contextualización y valor interdisciplinario: A través de todas las asignaturas del Máster, se ha destacado la importancia de la contextualización. Además, en la Unidad Didáctica planificada e implementada ha jugado un papel relevante (p. 22).</p>	<p>– Epistemic suitability: It is necessary to favour the processes of modelling and institutionalisation (richness of processes) (p. 13). – Improving the epistemic suitability: Modelling (pp. 13–14). – Improving the ecological suitability (pp. 19–20). – Contextualisation and interdisciplinary value: Through all the subjects of the master’s programme, the importance of contextualisation has been highlighted. Furthermore, in the planned and implemented Didactic Unit, it has played a relevant role (p. 22).</p>
TFM/MFP #025			
Epistémico Epistemic	<p>– Modelització: L’activitat d “l’energia nuclear de fissió”, [...], considero que és competencial, i un bon exemple de modelització</p>	<p>– Modelización: La actividad de “Energía nuclear de fisión”, [...], considero que es competencial y un buen</p>	<p>– Modelling: The “Nuclear fission energy” activity, [...], I consider to be competency and a good example of modelling (p.</p>

Anexo 6: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Tercer Article
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>(p. 9). Resolució de problemes: No tots els problemes que es van fer a classes (que se'n van realitzar molts) van ser de tipus competencial (pp. 9-10). Connexions amb altres matèries: En els problemes competencials sempre intento introduir conceptes matemàtics mitjançant exemples extra-matemàtics reals. L'activitat final, l'energia nuclear de fissió [...] té evidents connexions amb la física. El problema de l'interès compost que es va realitzar en la sessió 10 està connectat amb problemes de la vida real en un cert moment històric. [...]. L'activitat d'ampolles i funcions i de micro-relats [...] son clarament problemes extra-matemàtics (p. 10). [IE3]</p>	<p>ejemplo de modelización (p. 9). Resolución de problemas: No todos los problemas que se realizaron en clases (que se realizaron muchos) fueron de tipo competencial (pp. 9-10). Conexiones con otras materias: En los problemas competenciales siempre intento introducir conceptos matemáticos mediante ejemplos extra-matemáticos reales. La actividad sobre la energía nuclear de fisión [...], tiene evidentes conexiones con la física. El problema del interés compuesto que se realizó en la sesión 10 está conectado con problemas de la vida real en cierto momento histórico. [...]. La actividad de botellas y funciones y de microrrelatos [...] son claramente problemas extra-matemáticos (p. 10). [IE3]</p>	<p>9). Problem solving: Not all the problems that were done in classes (and many were done) were of a competency type (pp. 9-10). Connections with other subjects: In the competency problems, I always try to introduce mathematical concepts through real extra-mathematical examples. The activity on nuclear fission energy [...] has obvious connections with physics. The problem of compound interest that was done in session 10 is connected to real-life problems at a certain historical moment. [...]. The activity of bottles and functions and micro-stories [...] are clearly extra-mathematical problems (p. 10). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional	<p>– L'episodi de més interacció entre els alumnes va ser en la sessió de l'activitat de “la fissió nuclear”. Els alumnes es van trobar amb un enunciat llarg i complex d'un problema basat en la vida real. Quasi tothom van realitzar l'activitat de forma satisfactòria (p. 16). [II2] – Vaig copsar algunes mancances en el moment en què vaig proposar l'activitat de l'energia nuclear de fissió. Aquesta mancança no era en la part operativa sinó en la part d'anàlisi (la primera part del procés de modelització). Podria ser que aquesta suposada falta d'autonomia a una dificultat massa alta en</p>	<p>– El episodio de mayor interacción entre los estudiantes fue en la sesión de la actividad de “Energía nuclear de fisión”. Los estudiantes se encontraron con un largo y complejo enunciado de un problema basado en la vida real. Casi todos realizaron la actividad de forma satisfactoria (p. 16). [II2] – Entendí algunas carencias en el momento en que propuse la actividad de la energía nuclear de fisión. Esta carencia no estaba en la parte operativa sino en la parte de análisis (la primera parte del proceso de modelización). Pueda que esta supuesta falta de autonomía se deba a una dificultad demasiado alta en algunos momentos.</p>	<p>– The episode of greatest interaction between the students was in the “Nuclear fission energy” activity session. The students were faced with a long and complex problem statement based on real life. Almost everyone completed the activity satisfactorily (p. 16). [IS2] – I understood some shortcomings when I proposed the activity of nuclear fission energy. This lack was not in the operational part but in the analysis part (the first part of the modelling process). The supposed lack of autonomy may be due to the difficulty being too high at times. I could also attribute it to a possible lack of exercises of this</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	alguns moments. També podria atribuir-la a una possible mancança d'exercicis d'aquest tipus (però això són hipòtesis meves). [...]. El fet és que al final tothom la van fer prou bé. Al final l'autonomia va aflorar (p. 16). [II3]	También podría atribuirle a una posible carencia de ejercicios de este tipo (pero esto son hipótesis mías). [...]. El hecho es que, al final, todos la hicieron bien. Al final, la autonomía afloró (p. 16). [II3]	type (but these are my hypotheses). [...]. The fact is, in the end, everyone did it right. In the end, autonomy emerged (p. 16). [IS3]
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– He intentat promoure la implicació dels alumnes en les classes. Però en aquest aspecte potser hauria d'haver sigut una mica més sever i més clar. Parlo, en concret, de l'activitat final "l'energia de fissió nuclear" (p. 18). [IA2]	– Intenté promover la implicación de los estudiantes en las clases. Pero en este aspecto, quizás debería haber sido algo más severo y claro. En concreto, hablo de la actividad final "Energía nuclear de fisión" (p. 18). [IA2]	– I tried to promote student involvement in classes. But in this regard, perhaps it should have been something more severe and clear. Specifically, I am talking about the final activity "Nuclear fission energy" (p. 18). [AS2]
Ecológico Ecological	– S'han realitzat activitats que permeten crear connexions interdisciplinàries. S'han comentat en l'apartat d'ideïtat epistèmica (p. 14). [IEc2]	– Se realizaron actividades que permiten crear conexiones interdisciplinarias. Se comentaron en el apartado de idoneidad epistémica (p. 14). [IEc2]	– Activities were carried out that allow creating interdisciplinary connections. They were discussed in the section on epistemic suitability (p. 14). [EcS2]
Otros Others	– Millors a la riquesa de processos (p. 20). – Millora dels coneixements previs: [...]. Vull destacar que l'avaluació inicial proposada és bastant teòrica però també he afegit dues preguntes de modelització. Vaig poder veure, en la realització del meu pràcticum, les mancances que tenien respecte a aquest concepte, que a més, correspon a una dimensió competencial del batxillerat (competència en modelització matemàtica) (p. 21). – Contextualització i valor interdisciplinari: El treball de contextualització i l'aplicació de les matemàtiques en altres disciplines ja era inherent en la meua professió d'analista-programador.	– Mejoras en la riqueza de procesos (p. 20). – Mejora de los conocimientos previos: [...]. Quiero destacar que la evaluación inicial propuesta es bastante teórica, pero también añadí dos preguntas de modelización. Pude ver, en la realización de mis prácticas, las carencias que tenían respecto a este concepto, que además corresponde a una dimensión competencial del bachillerato (competencia en modelización matemática) (p. 21). – Contextualización y valor interdisciplinario: El trabajo de contextualización y la aplicación de la matemática en otras disciplinas ya era inherente	– Improvements in the richness of processes (p. 20). – Improvement of prior knowledge: [...]. I want to highlight that the proposed initial evaluation is quite theoretical, but I also added two modelling questions. I was able to see, when carrying out my internship experiences, the shortcomings they had regarding this concept, which also corresponds to a competency dimension of baccalaureate education (mathematical modelling competency) (p. 21). – Contextualisation and interdisciplinary value: The work of contextualisation and the application of mathematics in other disciplines was already inherent to my profession as an analyst-

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>He estès aquesta competència a l'àmbit matemàtic, i sempre encoratjo als meus alumnes que aprenguin aquesta competència essencial (p. 26). – Annex VIII – Activitat L'energia nuclear de fissió (document per al professor) (pp. 47–68). – Annex IX – Correccions de l'activitat L'energia nuclear de fissió (pp. 69–80).</p>	<p>a mi profesión de analista-programador. Extendí esta competencia al ámbito matemático y siempre animo a mis estudiantes a que aprendan esta competencia esencial (p. 26). – Anexo VIII – Actividad “Energía nuclear de fisión” (pp. 47–68). – Anexo IX – Correcciones de la actividad “Energía nuclear de fisión” (pp. 69–80).</p>	<p>programmer. I extended this competency to the mathematical field, and I always encourage my students to learn this essential competency (p. 26). – Annex VIII – “Nuclear fission energy” activity (pp. 47–68). – Annex IX – Corrections to the “Nuclear fission energy” activity (pp. 69–80).</p>
TFM/MFP #026			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes (dimensió) – Identificar (procés): Veure i reconèixer les matemàtiques presents en la realitat i en els enunciats dels problemes. La majoria de les activitats que he anat plantejant, tant a les presentacions, con als problemes han estat procedents de la realitat (p. 7). Raonament i prova (dimensió) – Modelar (procés): Traduir la realitat a un model matemàtic i viceversa. Molts dels problemes que hem realitzat són modelitzacions. D'altra banda, aquells alumnes amb més facilitats, se'ls va demanar que creessin un problema de geometria basant-se en la realitat del seu entorn. [...]. Connexions (dimensió) – Contextualitzar (procés): Donar sentit transversal als coneixements, sigui dins les mateixes matemàtiques o relacionant-los amb altres camps cognitius. Tots els problemes s'han pensat en un entorn proper als alumnes, relacionant-los amb la seva quotidianitat i context sempre que ha estat possible (p. 8). [IE3]</p>	<p>– Resolución de problemas (dimensión) – Identificar (proceso): Ver y reconocer la matemática presente en la realidad y en los enunciados de los problemas. La mayoría de las actividades que fui planteando, tanto en las presentaciones como en los problemas, procedían de la realidad (p. 7). Razonamiento y prueba (dimensión) – Modelizar (proceso): Traducir la realidad a un modelo matemático y viceversa. Muchos de los problemas realizados son modelizaciones. Por otra parte, a aquellos estudiantes con más facilidades, se les pidió que crearan un problema de geometría basándose en la realidad de su entorno. [...]. Conexiones (dimensión) – Contextualizar (proceso): Dar sentido transversal a los conocimientos, sea dentro de la misma matemática o relacionándolos con otros campos cognitivos. Todos los problemas se pensaron en un entorno cercano a los estudiantes, relacionándolos con su cotidianidad y contexto,</p>	<p>– Problem solving (dimension) – Identification (process): Seeing and recognising the mathematics present in reality and in the wording of the problems. Most of the activities that I proposed, both in the presentations and in the problems, came from reality (p. 7). Reasoning and proof (dimension) – Modelling (process): Translating reality into a mathematical model and vice versa. Many of the problems made are modelling. On the other hand, those students with more facilities were asked to create a geometry problem based on the reality of their environment. [...]. Connections (dimension) – Contextualisation (process): Giving transversal meaning to knowledge, whether within mathematics itself or relating it to other cognitive fields. All problems were thought about in an environment close to the students, relating them to their daily lives and contexts, whenever possible (p. 8). [ES3]</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		siempre que haya sido posible (p. 8). [IE3]	
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Molts dels problemes han estat contextualitzats en entorns propers, he buscat dinàmiques que els ajudessin a despertar la curiositat per allò que se'ls demanava, bé a través d'activitats manipulables (p. 20). [IA1]	– Muchos de los problemas se contextualizaron en entornos cercanos, busqué dinámicas que les ayudaran a despertar la curiosidad por lo que se les pedía, bien a través de actividades manipulables (p. 20). [IA1]	– Many of the problems were contextualised in close environments, I looked for dynamics that would help them awaken curiosity about what was asked of them, through manipulative activities (p. 20). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Contextualitzar la presentació sobre el càlcul d'àrees: La presentació sobre el càlcul d'àrees va funcionar molt bé, tot i això, una proposta de millora és incloure un problema contextualitzat cada cop que es dedueix una fórmula. Aquest canvi ajudaria a l'alumnat a donar-li sentit, a connectar el que estàvem treballant amb la realitat i a treballar junts aspectes sobre la resolució de problemes (p. 26). – Contextualització i valor interdisciplinari: A l'assignatura de Modelització ens han insistit molt i ens van animar a realitzar un model matemàtic a partir d'una situació “no matemàtica” i pensar com ho plantejaríem a classe (p. 31).	– Contextualizar la presentación sobre el cálculo de áreas: La presentación sobre el cálculo de áreas funcionó muy bien, sin embargo, una propuesta de mejora es incluir un problema contextualizado cada vez que se deduce una fórmula. Este cambio ayudaría a los estudiantes a darle sentido, a conectar lo que estábamos trabajando con la realidad, y a trabajar juntos aspectos sobre la resolución de problemas (p. 26). – Contextualización y valor interdisciplinario: En la asignatura de Modelización nos insistieron mucho y nos animaron a realizar un modelo matemático a partir de una situación no-matemática y pensar cómo lo plantearíamos en clase (p. 31).	– Contextualise the presentation on the calculation of areas: The presentation on the calculation of areas worked very well, however, a proposal for improvement is to include a contextualised problem every time a formula is deduced. This change would help students make sense of it, connect what we were working on with reality, and work on problem-solving aspects together (p. 26). – Contextualisation and interdisciplinary value: In the Modelling subject, they insisted a lot and encouraged us to make a mathematical model from a non-mathematical situation and think about how we would present it in class (p. 31).
TFM/MFP #033			
Epistémico Epistemic	– En aquest sentit, l'eix vertebrador de la unitat didàctica és el procés de modelització que permet moltes eines per a treballar diferents competències.	– En este sentido, el eje vertebrador de la unidad didáctica es el proceso de modelización, que permite muchas herramientas para trabajar distintas	– In this sense, the backbone of the didactic unit is the modelling process, which allows many tools to work on different competencies.

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>[...]. Competència 1. [...]. Competència 5. [...]. Competència 9 (pp. 4–5). [IE3] – En els exemples contextualitzats, i sobretot en els problemes de modelització, el canvi de concepció de funció s’ha emprat com a eina d’anàlisi i resolució de problemes, partint d’una visió abstracta de la funció com a relació de variables. [...]. En menys mesura, s’ha treballat explícitament l’expressió verbal d’una funció, és a dir no se’ls hi ha demanat com a objectiu que expressin una funció verbalment, però sí que s’ha treballat l’expressió a viva veu de la funció en el marc d’elaboració del model, i per això aquesta representació ha estat treballada, ni que sigui de forma implícita (p. 6). [IE4]</p>	<p>competencias. [...]. Competencia 1. [...]. Competencia 5. [...]. Competencia 9 (pp. 4–5). [IE3] – En los problemas contextualizados y, sobre todo, en los problemas de modelización, el cambio de concepción de función se utilizó como herramienta de análisis y resolución de problemas, partiendo de una visión abstracta de la función como relación de variables. [...]. En menor medida, se trabajó explícitamente la expresión verbal de una función, es decir, no se les pidió como objetivo que expresen una función verbalmente, pero sí se trabajó la expresión a viva voz de la función en el marco de elaboración del modelo, por lo que esta representación fue trabajada, aunque sea, de forma implícita (p. 6). [IE4]</p>	<p>[...]. Competency 1. [...]. Competency 5. [...]. Competency 9 (pp. 4–5). [ES3] – In the contextualised problems and, above all, in modelling problems, the change in the conception of function was used as a tool for analysis and problem solving, starting from an abstract vision of the function as a relationship of variables. [...]. To a lesser extent, the verbal expression of a function was explicitly worked on, that is, the objective was not asked to express a function verbally, but the outspoken expression of the function was worked on within the framework of model development, so this representation was worked on, even if only implicitly (p. 6). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– L’objectiu d’aquesta avaluació inicial es va centrar a analitzar el domini dels alumnes sobre unitats de mesura i canvis d’unitats, per veure el domini de l’alumnat en aquest tema, fonamental pels exercicis de modelització i per contextualitzar alguns dels problemes, a més, és on pot haver-hi més disparitat de nivell entre els alumnes, fonat que les unitats de mesura i canvis d’unitats no només es treballen a matemàtiques. L’altre coneixement previ avaluat és la manipulació algebraica d’equacions de primer grau, per veure si els alumnes seran capaços de treballar amb les funcions expressades</p>	<p>– El objetivo de esta evaluación inicial se centró en analizar el dominio de los estudiantes sobre unidades de medida y cambios de unidades, para ver el dominio de los estudiantes en este tema fundamental para los ejercicios de modelización y para contextualizar algunos de los problemas. Además, es donde puede haber mayor disparidad de nivel entre los estudiantes, fundado en que las unidades de medida y cambios de unidades no sólo se trabajan en matemática. El otro conocimiento previo evaluado es la manipulación algebraica de ecuaciones de primer grado, para ver si los</p>	<p>– The objective of this initial evaluation focused on analysing the students’ mastery of units of measurement and unit changes, to see the students’ mastery of this fundamental topic for the modelling exercises and to contextualise some of the problems. In addition, it is where there may be greater level disparity between students, based on the fact that units of measurement and unit changes are not only worked on in mathematics. The other prior knowledge evaluated is the algebraic manipulation of first-degree equations, to see if students will be able to work with functions expressed algebraically</p>

Criterio*	Original	Español	English
	<p>algebraicament amb la desimboltura suficient per tal que en els problemes de modelització la manipulació algebraica no sigui un impediment per la consecució dels exercicis (p. 7). [IC1]</p> <p>– Considero que hi va haver un aprenentatge significatiu dels alumnes. Com a evidència es pot prendre l'examen final, que no només estava format d'exercicis més "mecànics" sobre les funcions, sinó també problemes, un d'ells de modelització que tenia un valor de 2 punts sobre els 10 de l'examen (p. 8). [IC3]</p> <p>– La demanda cognitiva, però, va condicionada per la vertebració de la unitat didàctica amb problemes basats en processos de modelització. És en aquests problemes on la demanda cognitiva a l'alumne és més alta. Primerament tot problema de modelització requereix una primera fase de comprensió del context (contextualització) per tal de definir quines són les variables (independents i dependent) i en quines unitats es volen representar (conversió de llenguatge natural a matemàtic). Aquí ja trobem un primer grau d'abstracció, que com s'ha comprovat a l'examen final molts cops es resolen els problemes de modelització, però costa que els alumnes determinin formalment les variables i per tant assoleixin el màxim grau d'abstracció del problema, que suposarà la representació del problema plantejat en forma de funció, típicament</p>	<p>estudiantes serán capaces de trabajar con las funciones expresadas algebraicamente con la soltura suficiente para que, en los problemas de modelización, la manipulación algebraica no sea un impedimento para la consecución de los ejercicios (p. 7). [IC1]</p> <p>– Considero que hubo un significativo aprendizaje de los estudiantes. Como evidencia se puede tomar el examen final, que no sólo estaba formado por ejercicios más "mecánicos" sobre las funciones, sino también por problemas, uno de ellos de modelización que tenía un valor de 2/10 puntos del examen (p. 8). [IC3]</p> <p>– La demanda cognitiva, sin embargo, va condicionada por la vertebración de la unidad didáctica con problemas basados en procesos de modelización. Es en estos problemas donde la demanda cognitiva al estudiante es mayor. En primer lugar, todo problema de modelización requiere una primera fase de comprensión del contexto (contextualización) para definir cuáles son las variables (independiente y dependiente) y en qué unidades se quieren representar (conversión del lenguaje natural al matemático). Aquí ya encontramos un primer grado de abstracción, que como se comprobó en el examen final, muchas veces se resuelven los problemas de modelización, pero cuesta que los estudiantes determinen formalmente</p>	<p>with sufficient ease so that, in modelling problems, algebraic manipulation is not an impediment to the achievement of the exercises (p. 7). [CS1]</p> <p>– I believe that there was significant student learning. As evidence, we can take the final exam, which was not only made up of more "mechanical" exercises on functions, but also problems, one of them on modelling that had a value of 2/10 exam points (p. 8). [CS3]</p> <p>– The cognitive demand, however, is conditioned by the structuring of the didactic unit with problems based on modelling processes. It is in these problems where the cognitive demand on the student is greater. Firstly, every modelling problem requires a first phase of understanding the context (contextualisation) to define what the variables are (independent and dependent variable) and in what units they want to be represented (conversion from natural to language to mathematical language). Here, we already find a first degree of abstraction, which, as proven in the final exam, often modelling problems are solved, but it is difficult for students to formally determine the variables and, therefore, reach the maximum degree of abstraction of the problem, which will involve the representation of the problem posed in the form of a function, typically expressed in algebraic form, in order to be mathematically analysed. This conversion process is</p>

Anexo 6: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Tercer Article
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>expressada de forma algebraica per tal de poder ser analitzada matemàticament. Aquest procés de conversió es realitza en tots els problemes de modelització proposats en aquesta unitat didàctica que s'analitza. Més enllà de la conversió, els problemes de modelització permeten proposar a l'alumne de resoldre situacions concretes, de forma que han de plantejar diferents situacions o tesis i comprovar-les a partir del model (argumentació matemàtica) (p. 9). També és important notar que en el procés de modelització tenim un primer par de generalització i abstracció en construir i expressar el model, però també un exercici de concreció quan s'han d'interpretar els resultats matemàtics per treure conclusions en el context del problema (contextualització). [...]. És doncs gràcies als problemes de modelització que es pot presentar aquesta riquesa de matisos en la definició de la funció i poder exemplificar perquè serveix tenir-los en compte. Aquest procés requereix una demanda cognitiva alta (p. 10). [IC4]</p>	<p>las variables y, por lo tanto, alcancen el máximo grado de abstracción del problema, que supondrá la representación del problema planteado en forma de función, típicamente expresada en forma algebraica, para poder ser analizada matemáticamente. Este proceso de conversión se realiza en todos los problemas de modelización propuestos en esta unidad didáctica que se analiza. Más allá de la conversión, los problemas de modelización permiten proponer al estudiante resolver situaciones concretas, de forma que deben plantear diferentes situaciones o tesis y comprobarlas a partir del modelo (argumentación matemática) (p. 9). También es importante notar que, en el proceso de modelización, tenemos un primer par de generalización y abstracción al construir y expresar el modelo, pero también un ejercicio de concreción cuando deben interpretarse los resultados matemáticos para sacar conclusiones en el contexto del problema (contextualización). [...]. Es gracias a los problemas de modelización que puede presentarse esta riqueza de matices en la definición de la función y poder ejemplificar para qué sirve tenerlos en cuenta. Este proceso requiere una demanda cognitiva alta (p. 10) [IC4]</p>	<p>carried out in all the modelling problems proposed in this didactic unit that is analysed. Beyond conversion, modelling problems allow the student to propose solving specific situations, so that they must propose different situations or theses and verify them from the model (mathematical argumentation) (p. 9). It is also important to note that, in the modelling process, we have a first pair of generalisation and abstraction when constructing and expressing the model, but also an exercise of concreteness when the mathematical results must be interpreted to draw conclusions in the context of the problem (contextualisation). [...]. It is thanks to the modelling problems that this richness of nuances can arise in the definition of the function and be able to exemplify the purpose of taking them into account. This process requires a high cognitive demand (p. 10). [CS4]</p>
<p>Interaccional Interaccional</p>	<p>– En les reunions de grup, els alumnes comentaven com creien que es resolien els problemes i intentaven explicar per què ho</p>	<p>– En las reuniones de grupo, los estudiantes comentaban cómo creían que se resolvían los problemas e intentaban</p>	<p>– In group meetings, the students discussed how they thought the problems were solved and tried to explain why they tried it</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>intentaven d'una forma o altra. Finalment arribaven a consensos (o no) que consultaven amb el professor. Aquesta dinàmica de treball ha resultat en la meua opinió molt enriquidora i a potenciar, sobretot forçant a la construcció de grups nous i per tant maximitzar la interacció entre tots els alumnes (p. 11). [II2]</p> <p>– Els problemes de modelització, en demandar de l'estudiant la presa de decisions en diversos processos, tendeix a augmentar l'autonomia i en arribar a les solucions, crea un cert sentiment d'autoestima per haver resolt un problema que a l'estar contextualitzat es percep com quelcom relacionat amb la realitat (p. 12). [II3]</p>	<p>explicar por qué lo intentaban de una forma u otra. Finalmente, llegaban a consensos (o no) que consultaban con el profesor. Esta dinámica de trabajo resultó, en mi opinión, muy enriquecedora y se debe potenciar, sobre todo, forzando la construcción de grupos nuevos y, por lo tanto, maximizando la interacción entre todos los estudiantes (p. 11). [II2]</p> <p>– Los problemas de modelización, al demandar del estudiante la toma de decisiones en varios procesos, tiende a aumentar la autonomía y, al llegar a las soluciones, crea un cierto sentimiento de autoestima por haber resuelto un problema que, al estar contextualizado, se percibe como algo relacionado con la realidad (p. 12). [II3]</p>	<p>one way or another. Finally, they reached consensus (or did not) that was consulted with the teacher. This work dynamic was, in my opinion, very enriching and should be promoted, above all, by forcing the construction of new groups and, therefore, maximising the interaction between all students (p. 11). [IS2]</p> <p>– Modelling problems, by requiring the student to make decisions in various processes, tend to increase autonomy and, when reaching solutions, create a certain feeling of self-esteem for having solved a problem that, when contextualised, is perceived as something related to reality (p. 12). [IS3]</p>
<p>Mediacional Mediational</p>			
<p>Afectivo Affective</p>	<p>– Els exercicis de classe, en general, eren de pràctica, però els problemes de modelització, repartits per tota la unitat didàctica, sí que estaven contextualitzats per apel·lar a situacions quotidianes on els alumnes se sentissin identificats. [...]. Així doncs els contextos proposats pels 3 problemes de modelització definits per la unitat didàctica són la compra de producte a granel (taronges), l'anàlisi de velocitats d'un corredor en una cursa de running i la tria d'una tarifa de telefonia mòbil entre diferents opcions. [...]. Ahora en l'examen final, s'incloua un problema de modelització</p>	<p>– Los ejercicios de la clase, en general, eran de práctica, pero los problemas de modelización, repartidos por toda la unidad didáctica, sí estaban contextualizados para apelar a situaciones cotidianas donde los estudiantes se sintieran identificados. [...]. Así, los contextos propuestos por los tres problemas de modelización definidos para la unidad didáctica son: la compra de productos a granel (naranjas), el análisis de velocidades de un corredor en una carrera, y la elección de una tarifa de telefonía móvil entre diferentes opciones. [...]. Asimismo, en el examen final, se incluía un</p>	<p>– The class exercises, in general, were practical, but the modelling problems, spread throughout the teaching unit, were contextualised to appeal to everyday situations where the students felt identified. [...]. Thus, the contexts proposed by the three modelling problems defined for the didactic unit are: the purchase of bulk products (oranges), the analysis of a runner's speed in a race, and the choice of a mobile phone rate among different options. [...]. Likewise, in the final exam, a contextualised modelling problem was included when searching for the most appropriate contracting rate for a gym service based on its use (p.</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>contextualitzat en buscar quina tarifa de contractació d'un servei de gimnàs és la més adequada en funció del seu ús (p. 14). Tot plegat a l'objectiu d'aquesta contextualització dels problemes també s'adreçava a fer veure a l'alumnat que els coneixements matemàtics no només són una eina pels que vulguin continuar els estudis a batxillerat, sinó que també es troben i són útils en entorns propers i quotidians (p. 15). [IA1]</p>	<p>problema de modelización contextualizado al buscar qué tarifa de contratación de un servicio de gimnasio es la más adecuada en función de su uso (p. 14). Todo lo relacionado con el objetivo de esta contextualización de los problemas, también se dirigía a mostrar a los estudiantes que los conocimientos matemáticos no sólo son una herramienta para quienes quieran continuar sus estudios en bachillerato, sino que también se encuentran y son útiles en entornos cercanos y cotidianos (p. 15). [IA1]</p>	<p>14). Everything related to the objective of this contextualisation of the problems was also aimed at showing students that mathematical knowledge is not only a tool for those who want to continue their studies in baccalaureate education, but that it is also found and useful in nearby and everyday environments (p. 15). [AS1]</p>
<p>Ecológico Ecological</p>	<p>– Finalment el punt d'ús de les funcions per a la resolució de problemes en contextos diversos, queda plenament cobert amb la utilització de problemes de modelització, que s'han realitzat a la unitat didàctica (p. 16). [IEc1] – Les connexions interdisciplinàries són també múltiples, donada la naturalesa de la unitat didàctica de funcions, hi ha connexions evidents amb les matèries de física i tecnologia, sobretot per l'ús de la modelització en els problemes que és natural en aquestes disciplines (p. 17). [IEc2] – La utilitat social o laboral de les funcions ha estat exposada sobretot a partir dels problemes de modelització, que han estat contextualitzats en situacions quotidianes. [...]. La utilitat social, la que crec pot ser més pròxima als alumnes de 3^o d'ESO, s'ha introduït a partir de la contextualització dels contextos proposats pels 3</p>	<p>– Finalmente, el punto de uso de las funciones para la resolución de problemas en contextos diversos queda plenamente cubierto con la utilización de los problemas de modelización que se realizaron en la unidad didáctica (p. 16). [IEc1] – Las conexiones interdisciplinarias son también múltiples. Dada la naturaleza de la unidad didáctica de funciones, existen conexiones evidentes con las materias de física y tecnología, sobre todo, por el uso de la modelización en los problemas que es natural en estas disciplinas (p. 17). [IEc2] – La utilidad social o laboral de las funciones estuvo expuesta, sobre todo, a partir de los problemas de modelización, que fueron contextualizados en situaciones cotidianas. [...]. La utilidad social, la que creo puede ser más cercana a los estudiantes de 3^o de ESO, se introdujo</p>	<p>– Finally, the point of use of functions for solving problems in diverse contexts is fully covered with the use of modelling problems that were carried out in the didactic unit (p. 16). [EcS1] – The interdisciplinary connections are also multiple. Given the nature of the didactic unit on functions, there are evident connections with the subjects of physics and technology, above all, due to the use of modelling in problems that is natural in these disciplines (p. 17). [EcS2] – The social or labour usefulness of functions was exposed, above all, from the modelling problems, which were contextualised in everyday situations. [...]. The social utility, which I believe may be closer to 3rd grade CSE students, was introduced from the contextualisation of the contexts proposed by the three modelling problems defined for the didactic</p>

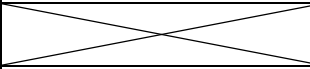
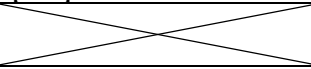
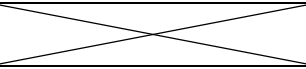
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>problemes de modelització definits per la unitat didàctica. [...]. Els problemes basats en processos de modelització solen ser realistes i autèntics, fet que mostra la seva utilitat a la quotidianitat del dia a dia i no només en situacions especials o professionals (p. 17). [IEc3]</p> <p>– Primerament la utilització de la modelització com a eix vertebrador de la unitat didàctica, que permet proposar uns problemes als alumnes especialment rics contextualment i que permeten treballar diferents competències matemàtiques, [...]. En aquest sentit, se'm fa inclòs difícil d'imaginar el fet de plantejar aquesta unitat didàctica de funcions sense emprar la modelització (p. 17). [IEc4]</p>	<p>a partir de la contextualización de los contextos propuestos por los tres problemas de modelización definidos para la unidad didáctica. [...]. Los problemas basados en procesos de modelización suelen ser realistas y auténticos, lo que muestra su utilidad en la cotidianidad del día a día y no sólo en situaciones especiales o profesionales (p. 17). [IEc3]</p> <p>– En primer lugar, la utilización de la modelización como eje vertebrador de la unidad didáctica, permite proponer problemas a los estudiantes, especialmente, ricos contextualmente y que permiten trabajar diferentes competencias matemáticas, [...]. En este sentido, se me hace difícil imaginar el hecho de plantear esta unidad didáctica de funciones sin utilizar la modelización (p. 17). [IEc4]</p>	<p>unit. [...]. The problems based on modelling processes tend to be realistic and authentic, which shows their usefulness in everyday life and not only in special or professional situations (p. 17). [EcS3]</p> <p>– Firstly, the use of modelling as the backbone of the didactic unit allows the students to be proposed problems, especially those that are contextually rich and that allow them to work on different mathematical competencies, [...]. In this sense, it is difficult for me to imagine presenting this didactic unit of functions without using modelling (p. 17). [EcS4]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– Les funcions s'empren per modelitzar els fenòmens de la natura i la realitat, sent una eina de gran utilitat per assolir aquest objectiu [...]. A partir d'aquests models es construeixen molts cops les teories, s'ordena la realitat, es demostren fets o fins i tot es fan prediccions d'esdeveniments [...]. Al ser tan potent aquest lligam entre funció i model, en aquesta unitat didàctica s'han inclòs continguts de modelització, no només per dotar d'un context més o menys real els problemes, sinó per aprofitar i preparar als alumnes a l'aplicació de</p>	<p>– Las funciones se emplean para modelizar los fenómenos de la naturaleza y la realidad, siendo una herramienta de gran utilidad para conseguir este objetivo. [...]. A partir de estos modelos se construyen muchas veces las teorías, se ordena la realidad, se demuestran hechos, o incluso se hacen predicciones de eventos. [...]. Al ser tan potente este vínculo entre función y modelo, en esta unidad didáctica se incluyeron contenidos de modelización, no sólo para dotar de un contexto más o menos real a los problemas, sino para aprovechar y preparar a los</p>	<p>– Functions are used to model the phenomena of nature and reality, being a very useful tool to achieve this objective. [...]. From these models, theories are often built, reality is ordered, facts are demonstrated, or even predictions of events are made. [...]. Since this link between function and model is so powerful, modelling contents were included in this didactic unit, not only to provide a more or less real context to the problems, but to take advantage of and prepare the students for the application of functions in the reality. [...]. Thus, mathematics in general and the topic in functions</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>les funcions a la realitat. [...]. Així doncs, les matemàtiques en general i el tema de les funcions en particular, sobretot treballat des de l'òptica de la modelització, ajuda als alumnes a ser lògics, a raonar ordenadament i a tenir una ment preparada pel pensament, la crítica i l'abstracció, raons per les quals es justifica la seva inclusió curricular (p. 1).</p> <p>– Ahora l'ús de la modelització pretén reforçar una visió STEM de l'ensenyament, que no tracti les diferents disciplines per separat, sinó que les treballi conjuntament i si bé en assignatures separades (tal com està estructurat l'actual pla d'estudis), que es faci certa referència entre elles, per tal d'evitar la percepció de les disciplines d'àmbit de les ciències, tecnologia, enginyeria i matemàtiques (p. 19).</p> <p>– Introducció del treball de síntesi (pp. 20–24).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Donat que la meva formació ja és interdisciplinària, no em resulta difícil contextualitzar les matemàtiques en entorns professionals o propers al dia a dia. [...]. La modelització en l'ensenyament de les matemàtiques no només l'he introduït per la recomanació a les pròpies sessions del màster, sinó que ja havia iniciat el màster amb aquesta convicció. Malgrat que costa fomentar entre els alumnes la construcció dels seus propis models matemàtics, crec que pel que fa a 3^o d'ESO és</p>	<p>estudiantes a la aplicación de las funciones en la realidad. [...]. Así, la matemática en general y el tema de funciones en particular, sobre todo, trabajado desde la óptica de la modelización, ayuda a los estudiantes a ser lógicos, a razonar ordenadamente, y a tener una mente preparada para el pensamiento, la crítica, y la abstracción, razones por las que se justifica su inclusión curricular (p. 1)</p> <p>– Al mismo tiempo, el uso de la modelización pretende reforzar una visión STEM de la enseñanza, que no trate las diferentes disciplinas por separado, sino que las trabaje conjuntamente y, si bien en asignaturas separadas (tal y como está estructurado el actual plan de estudios), que se haga cierta referencia entre ellas, a fin de evitar la percepción de las disciplinas del ámbito de las ciencias, la tecnología, la ingeniería, y la matemática (p. 19).</p> <p>– Introducción del trabajo de síntesis (pp. 20–24).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Dado que mi formación ya es interdisciplinaria, no me resulta difícil contextualizar la matemática en entornos profesionales o cercanos al día a día. [...]. La modelización en la enseñanza de la matemática no sólo la introduje por la recomendación en las propias sesiones del máster, sino que ya había iniciado el máster con esta convicción. Aunque cuesta fomentar entre los estudiantes la construcción</p>	<p>in particular, especially, worked from the perspective of modelling, helps students to be logical, to reason orderly, and to have a mind prepared for thought, criticism, and abstraction, reasons why its curricular inclusion is justified (p. 1).</p> <p>– At the same time, the use of modelling aims to reinforce a STEM vision of teaching, which does not treat the different disciplines separately, but rather works on them together and, although in separate subjects (as the current study-plan is structured), that a certain reference be made between them, in order to avoid the perception of the disciplines in the field of science, technology, engineering, and mathematics (p. 19).</p> <p>– Introduction of the synthesis work (pp. 20–24).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Given that my education is already interdisciplinary, it is not difficult for me to contextualise mathematics in professional or everyday environments. [...]. I not only introduced modelling in the teaching of mathematics by recommendation in the sessions of the master's programme themselves, but I had already started this programme with this conviction. Although it is difficult to encourage students to build their own mathematical models, I believe that in the 3rd grade of CSO it is achievable, perhaps not by everyone, but by most of them (p. 27).</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>assolible, potser no per tots, però per la majoria (p. 27).</p> <p>– Annex 3: Treball de síntesi de modelització en forma de projecte “Món matemàtic” (pp. 77–79).</p> <p>– Annex 4: Treball de síntesi de modelització en forma de projecte “Món matemàtic”. Enunciat d’alta complexitat (pp. 80–83).</p>	<p>de sus propios modelos matemáticos, creo que en 3º de ESO es alcanzable, quizás no por todos, pero por la mayoría (p. 27).</p> <p>– Anexo 3: Trabajo de síntesis de modelización en forma de proyecto “Mundo matemático” (pp. 77–79).</p> <p>– Anexo 4: Trabajo de síntesis de modelización en forma de proyecto “Mundo matemático”. Enunciado de alta complejidad (pp. 80–83).</p>	<p>– Annex 3: Modelling synthesis work in the form of a “Mathematical world” project (pp. 77–79).</p> <p>– Annex 4: Modelling synthesis work in the form of a “Mathematical work” project. Statement of high complexity (pp. 80–83).</p>
TFM/MFP #036			
Epistémico Epistemic	– Modelització: En la sessió 14 es van treballar problemes de modelització (p. 6). [IE3]	– Modelización: En la sesión 14 se trabajaron problemas de modelización (p. 6). [IE3]	– Modelling: In session 14, modelling problems were worked on (p. 6). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– S’ha incidit en treballar competències com són la resolució de problemes amb els problemes de modelització, raonament i prova amb activitats com la de les barretes de Castelnuovo o la classificació de triangles segons el teorema de Pitàgores o la competència de comunicació en totes aquelles activitats realitzades en equip (p. 9). [IC4]	– Se incidió en trabajar competencias, como la resolución de problemas con los problemas de modelización, el razonamiento y prueba con actividades como la de las barritas de Castelnuovo, la clasificación de triángulos según el teorema de Pitágoras, o la competencia de comunicación en todas aquellas actividades realizadas en equipo (p. 9). [IC4]	– Emphasis was placed on working on competencies, such as problem solving with modelling problems, reasoning and proof with activities such as Castelnuovo bars, the classification of triangles according to the Pythagorean theorem, or communication competencies in all those activities carried out as a team (p. 9). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	– Tot i que ha estat una bona oportunitat per aprofundir en el contingut de la UD i he pogut incloure aspectes destacables com, per exemple, problemes de modelització (p. 10). [IM3]	– Aunque ha sido una buena oportunidad para profundizar en el contenido de la UD y pude incluir aspectos destacables como, por ejemplo, problemas de modelización (p. 10). [IM3]	– Although it has been a good opportunity to delve deeper into the content of the DU and I was able to include noticeable aspects such as, for example, modelling problems (p. 10). [MS3]
Afectivo Affective	– Hem treballat en equip, hem reflexionat i raonat en grup, hem treballat amb el GeoGebra i d’altres aplicacions web i hem pogut treballar problemes contextualitzats. Crec que aquesta varietat ha estat	– Trabajamos en equipo, reflexionamos, y razonamos en grupo, trabajamos con GeoGebra y otras aplicaciones web, y pudimos trabajar problemas contextualizados. Crec que	– We worked as a team, we reflected, and we reasoned as a group, we worked with GeoGebra and other web applications, and we were able to work on contextualised problems. I

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	clau per captar l'interès de l'alumnat (p. 11). [IA1]	esta variedad fue clave para captar el interés de los estudiantes (p. 11). [IA1]	think this variety was key to capturing the students' interest (p. 11). [AS1]
Ecológico Ecological	– Pel que fa a les connexions externes, s'han desenvolupat problemes de modelització (p. 12). [IEc2]	– Con respecto a las conexiones externas, se desarrollaron problemas de modelización (p. 12). [IEc2]	– Regarding the external connections, modelling problems were developed (p. 12). [EcS2]
Otros Others	– Catorzena sessió Problemes de Modelització (modificada): Aquesta activitat, com la vuitena i novena sessió, no canviaria els problemes proposats a classe, el que sí que també faria és canviar la gestió; i, enlloc de fer un treball individual faria un treball en grups de 4 alumnes amb la mateixa dinàmica comentada en les esmentades sessions: deixaria un temps per fer cada problema, i després tirant un dau, faria sortir a sorts, cada cop un grup a corregir un dels problemes a la pissarra, independentment de si el tinguessin bé o malament, per discutir-ho amb el grup classe (p. 18). – Contextualització i valor interdisciplinari: Gràcies als problemes de modelització he pogut contextualitzar situacions diverses per a l'ensenyament-aprenentatge de la matèria impartida en la UD (p. 21). – Problemes de modelització (pp. 30–31).	– Decimocuarta sesión – Problemas de modelización (modificada): En esta actividad, así como la octava y novena sesión, no cambiaría los problemas propuestos en clase, lo que sí haría es cambiar la gestión y, en lugar de hacer un trabajo individual, haría un trabajo en grupos de cuatro estudiantes con la misma dinámica comentada en las sesiones citadas: dejaría un tiempo para hacer cada problema y después, tirando un dado, sacaría al azar cada vez un grupo para que corrija uno de los problemas en la pizarra, independientemente de si lo tuvieran bien o mal, para discutirlo con el grupo curso (p. 18). – Contextualización y valor interdisciplinario: Gracias a los problemas de modelización he podido contextualizar situaciones diversas para la enseñanza-aprendizaje de la materia impartida en la UD (p. 21). – Problemas de modelización (pp. 30–31).	– Fourteenth session – Modelling problems (modified): In this activity, as well as the eighth and ninth sessions, I would not change the problems proposed in class, what I would do is change the management and, instead of doing individual work, I would do work in groups of four students with the same dynamics discussed in the aforementioned sessions: I would allow time to do each problem and then, by rolling a die, I would randomly draw a group each time to correct one of the problems on the board, regardless of whether they got it right or wrong, to discuss it with the class group (p. 18). – Contextualisation and interdisciplinary value: Thanks to the modelling problems, I have been able to contextualise various situations for the teaching-learning of the subject taught in the DU (p. 21). – Modelling problems (pp. 30–31).
TFM/MFP #039			
Epistémico Epistemic	– Plantejar i resoldre problemes: Comprèn plantejar, formular i definir diferents tipus de problemes matemàtics i resoldre diversos tipus de problemes utilitzant una varietat de mètodes. Un dels objectius d'aprenentatge de la U.D. és: Planificar i utilitzar	– Plantear y resolver problemas: Comprende plantear, formular, y definir distintos tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos. Uno de los objetivos de aprendizaje de la UD es: Planificar y utilizar	– Posing and solving problems: Includes posing, formulating, and defining different types of mathematical problems and solving various types of problems using a variety of methods. One of the learning objectives of the DU is: Planning and using reasoning processes and

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, com la realització de conjectures, la seva justificació i generalització, així com la comprovació sobre la representativitat de la mostra d'una distribució bidimensional i del seu grau de correlació (p. 9). Representar i modelar: [...]. Inclou estructurar la situació que s'ha de modelar; traduir la “realitat” a una estructura matemàtica; treballar amb un model matemàtic; validar el model; reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i els seus resultats. L'alumnat ha pogut treballar aquest procés/competència en moltes ocasions a través d'activitats on es tracta de representar la correlació d'una distribució bidimensional utilitzant diferents models estadístics. S'ha fomentat bastant la discussió sobre la rellevància d'escollir un model i en lloc d'un altre. Així mateix, una de les tasques del projecte és interpretar la conseqüència de la tria del model estadístic en un context socioeconòmic (p. 10). Contextualització: Utilitzar problemes del món real propers i útils per tal de mostrar la pertinència dels conceptes matemàtics. Un dels efectes de la contextualització de l'ensenyament de les matemàtiques és d'augmentar. La primera tasca dins del projecte és de reconèixer distribucions estadístiques bidimensionals en contextos no necessàriament</p>	<p>procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, como la realización de conjeturas, su justificación y generalización, así como la comprobación sobre la representatividad de la muestra de una distribución bidimensional y de su grado de correlación (p. 9). Representar y modelizar: [...]. Incluye estructurar la situación a modelizar; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y a sus resultados. Los estudiantes pudieron trabajar este proceso/competencia en muchas ocasiones a través de las actividades en las que se trata de representar la correlación de una distribución bidimensional utilizando diferentes modelos estadísticos. Se fomentó bastante la discusión sobre la relevancia de elegir un modelo en lugar de otro. Asimismo, una de las tareas del proyecto es interpretar la consecuencia de la elección del modelo estadístico en un contexto socioeconómico (p. 10). Contextualización: Utilizar problemas del mundo real cercanos y útiles para mostrar la pertinencia de los conceptos matemáticos. Uno de los efectos de la contextualización de la enseñanza de la matemática es argumentar. La primera tarea dentro del proyecto es reconocer distribuciones estadísticas bidimensionales en contextos no</p>	<p>problem-solving strategies, such as making conjectures, their justification and generalisation, as well as checking the representativeness of the sample of a two-dimensional distribution and of their degree of correlation (p. 9). Representing and modelling: [...]. Includes structuring the situation to be modelled; translating “reality” into a mathematical structure; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing, and raising criticisms of a model and its results. The students were able to work on this process/competency on many occasions through activities in which they to represent the correlation of a two-dimensional distribution using different statistical models. Discussion about the relevance of choosing one model over another was encouraged a lot. Likewise, one of the tasks of the project is to interpret the consequence of the choice of the statistical model in a socioeconomic context (p. 10). Contextualisation: Using close and useful real-world problems to show the relevance of mathematical concepts. One of the effects of contextualising mathematics teaching is to argue. The first task within the project is to recognise two-dimensional statistical distributions in contexts that are not necessarily mathematical. More specifically, in a socioeconomic context.</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>matemàtics. Més concretament, en un context socioeconòmic. [...]. D'altra banda, la majoria dels exemples proposats com a distribucions bidimensionals proven d'un àmbit no matemàtic (p. 11). [IE3]</p> <p>– L'estudi de la correlació per a modelitzar una situació de la vida quotidiana: La valoració i la mostra de l'interès de la noció de correlació no només s'ha fet de manera interna a les matemàtiques, però també mostrant la seva rellevància en àmbits fora del domini de les matemàtiques (p. 13). [IE4]</p>	<p>necesariamente matemáticos. Más concretamente, en un contexto socioeconómico. [...]. Por otra parte, la mayoría de los ejemplos propuestos como distribuciones bidimensionales prueban un ámbito no-matemático (p. 11). [IE3]</p> <p>– El estudio de la correlación para modelizar una situación de la vida cotidiana: La valoración y la muestra del interés de la noción de correlación no sólo se hizo de forma interna en la matemática, sino también mostrando su relevancia en ámbitos fuera del dominio matemático (p. 13). [IE4]</p>	<p>[...]. On the other hand, most of the examples proposed as two-dimensional distributions prove a non-mathematical scope (p. 11). [ES3]</p> <p>– The study of correlation to model a situation of everyday life: The assessment and demonstration of the interest in the notion of correlation was not only done internally in mathematics, but also showing its relevance in areas outside the mathematical domain (p. 13). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– Un exemple de alta demanda cognitiva és la part del projecte que està relacionada amb l'objectiu d'aprenentatge següent: planificar i utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, com la realització de conjetures, la seva justificació i generalització, així com la comprovació sobre la representativitat de la mostra d'una distribució bidimensional i del seu grau de correlació. En aquest sentit, els alumnes van activar processos cognitius rellevants, com plantejar conjetures, fer connexions intra-matemàtiques, comprovació i canvi de representacions (p. 24). [IC4]</p>	<p>– Un ejemplo de alta demanda cognitiva es la parte del proyecto que está relacionada con el siguiente objetivo de aprendizaje: Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, como la realización de conjeturas, su justificación y generalización, así como la comprobación sobre la representatividad de la muestra de una distribución bidimensional y de su grado de correlación. En este sentido, los estudiantes activaron procesos cognitivos relevantes, como plantear conjeturas, realizar conexiones intra-matemáticas, comprobación y cambio de representaciones (p. 24). [IC4]</p>	<p>– One example of high cognitive demand is the part of the project that is related to the following learning objective: Plan and use reasoning processes and problem-solving strategies, such as making conjectures, their justification and generalisation, as well as verification on the representativeness of the sample of a two-dimensional distribution and its degree of correlation. In this sense, the students activated relevant cognitive processes, such as raising conjectures, making intra-mathematical connections, checking and changing representations (p. 24). [CS4]</p>
Interaccional Interaccional	<p>– La disposició de les taules en petites illes representant cada grup durant el projecte o l'avaluació inicial ha sigut rellevant per fomentar la</p>	<p>– La disposición de las mesas en pequeñas islas, representando a cada grupo durante el proyecto o la evaluación inicial, fue relevante para fomentar la</p>	<p>– The arrangement of the tables in small islands, representing each group during the project or the initial evaluation, was relevant to encourage</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	col·laboració entre l'alumnat i per tant, una interacció bastant constructiva (p. 25). [II2]	colaboración entre los estudiantes y, por lo tanto, una interacción bastante constructiva (p. 25). [II2]	collaboration between students and, therefore, a fairly constructive interaction (p. 25). [IS2]
Mediacional Mediational	–	–	–
Afectivo Affective	– En el desenvolupament del projecte final, vam deixar que fossin els mateixos alumnes que triessin les dues variables que volien analitzar, per a que aquestes fossin del seu interès. Així mateix, les dues variables provenen d'un context socioeconòmic. [...]. D'altra banda, la majoria dels exemples proposats com a distribucions bidimensionals provenen d'un àmbit no matemàtic. En tot moment es va procurar proposar situacions que permetessin valorar la utilitat de les matemàtiques en la vida quotidiana dels alumnes (pp. 29–30). [IA1]	– En el desarrollo del proyecto final, dejamos que fueran los mismos estudiantes quienes eligieran las dos variables que querían analizar para que fueran de su interés. Asimismo, ambas variables provienen de un contexto socioeconómico. [...]. Por otra parte, la mayoría de los ejemplos propuestos, como distribuciones bidimensionales, provienen de un ámbito no-matemático. En todo momento, se procuró proponer situaciones que permitieran valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana de los estudiantes (pp. 29–30). [IA1]	– In the development of the final project, we let the students themselves choose the two variables they wanted to analyse so that they were of interest to them. Likewise, both variables come from a socioeconomic context. [...]. On the other hand, most of the proposed examples, such as two-dimensional distributions, come from a non-mathematical field. At all times, an effort was made to propose situations that would allow the usefulness of mathematics to be addressed in the students' daily lives (pp. 29–30). [AS1]
Ecológico Ecological			
Otros Others			
TFM/MFP #041			
Epistémico Epistemic			
Cognitivo Cognitive	– L'exigència en quant a processos cognitius i de raciocini d'aquesta seqüència didàctica està directament relacionada, sobretot, amb l'àmbit de resolució de problemes. En aquest sentit pren especial importància el concepte de modelització. Es considera que la Combinatòria és una branca de la matemàtica discreta amb la qual es pot treballar la modelització de problemes d'una manera senzilla, és a dir, que els alumnes siguin capaços de traduir un problema o situació extreta de la vida	– La exigencia en cuanto a procesos cognitivos y de raciocinio de esta secuencia didáctica está directamente relacionada, sobre todo, con el ámbito de resolución de problemas. En este sentido, toma especial importancia el concepto de modelización. Se considera que la Combinatoria es una rama de la matemática discreta con la que se puede trabajar la modelización de problemas de una forma sencilla, es decir, que los estudiantes sean capaces	– The demand in terms of cognitive and reasoning processes of this didactic sequence is directly related, above all, to the area of problem solving. In this sense, the concept of modelling takes on special importance. It is considered that Combinatorics is a branch of discrete mathematics with which problem modelling can be worked on in a simple way, that is, students are able to translate a problem or situation extracted from real life until reaching the

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>real fins arribar a l'abstracció d'un model matemàtic. [...]. En aquest sentit, és probable que a la implementació de la Unitat Didàctica no s'hagi treballat prou la modelització, tot i ser un recurs molt interessant per portar a l'aula (p. 14). [IC4]</p>	<p>de traducir un problema o situación extraída de la vida real hasta llegar a la abstracción de un modelo matemático. [...]. En este sentido, es probable que, en la implementación de la Unidad Didáctica, no se haya trabajado suficientemente la modelización, aunque sea un recurso muy interesante para llevar al aula (p. 14). [IC4]</p>	<p>abstraction of a mathematical model. [...]. In this sense, it is likely that, in the implementation of the Didactic Unit, modelling has not been sufficiently worked on, although it is a very interesting resource to bring to the classroom (p. 14). [CS4]</p>
<p>Interaccional Interaccional</p>	<p>– En aquest sentit pren especial importància, una altra vegada, la competència de modelització. [...]. Mitjançant la modelització es pretén propiciar un aprenentatge significatiu, permetent als alumnes donar valor i sentit a allò que aprenen i fomentant la motivació cap a l'aprenentatge de les matemàtiques (p. 16). [II3] – Les principals dificultats observades amb les que s'han trobat els alumnes són tres: I. Interpretació incorrecta de l'enunciat. Els alumnes no raonen de manera adequada, llegeixen ràpid el problema, cosa que els indueix a escollir malament el model matemàtic i a un resultat final erroni (p. 17). [II4]</p>	<p>– En este sentido, toma especial importancia, de nuevo, la competencia en modelización. [...]. Mediante la modelización se pretende propiciar un aprendizaje significativo, permitiendo a los estudiantes dar valor y sentido a lo que aprenden, y fomentando la motivación hacia el aprendizaje de la matemática (p. 16). [II3] – Las principales dificultades observadas con las que se encontraron los estudiantes son tres: (1) Interpretación incorrecta del enunciado. Los estudiantes no razonan adecuadamente, leen rápido el problema, lo que les induce a escoger mal el modelo matemático y a un resultado final erróneo (p. 17). [II4]</p>	<p>– In this sense, once again, competency in modelling takes on special importance. [...]. Through modelling, the aim is to promote meaningful learning, allowing students to give value and meaning to what they learn, and promoting motivation towards learning mathematics (p. 16). [IS3] – The main difficulties observed that the students encountered are three: (1) Incorrect interpretation of the statement. The students do not reason adequately, they read the problem quickly, which leads them to choose the wrong mathematical model and to an erroneous final result (p. 17). [IS4]</p>
<p>Mediacional Mediational</p>	<p>– El segon objectiu és apropar els alumnes a la modelització, fent ús contextos extrets de la realitat propera a l'alumne/a i on intervien processos matemàtics més complexos (p. 18). [IM1]</p>	<p>– El segundo objetivo es acercar a los estudiantes a la modelización, utilizando contextos extraídos de la realidad cercana al estudiante, y donde intervienen procesos matemáticos más complejos (p. 18). [IM1]</p>	<p>– The second objective is to bring students closer to modelling, using contents extracted from the reality close to the student, and where more complex mathematical processes intervene (p. 18). [MS1]</p>
<p>Afectivo Affective</p>			
<p>Ecológico Ecological</p>	<p>– Relatiu a la connexió de la Combinatòria amb l'entorn, es poden classificar els problemes</p>	<p>– En relación con la conexión de la Combinatoria con el entorno, se pueden</p>	<p>– In relation to the connection of Combinatorics with the environment, the problems</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>plantejats com a problemes contextualitzats evocats d'aplicació [...]. Es pot dir que es troben en un context evocat, és a dir, són problemes matemàtics que permeten imaginar un marc o situació extra-matemàtica on es produeix el fet. [...]. En aquest sentit, hagués calgut plantejar contextos reals més propers a l'entorn dels alumnes, per tal de captar millor el seu interès (p. 12). [IEc2]</p> <p>– No obstant, es pot millorar la Unitat Didàctica, introduint altres recursos que no s'han emprat prou. Són importants, per exemple, l'ús de les eines TIC o la millora de la contextualització en problemes de Combinatòria, mitjançant la seva connexió amb altres disciplines no matemàtiques (p. 22). [IEc4]</p>	<p>clasificar los problemas planteados como problemas contextualizados evocados de aplicación [...]. Puede decirse que se encuentran en un contexto evocado, es decir, son problemas matemáticos que permiten imaginar un marco o situación extra-matemática donde se produce el hecho. [...]. En este sentido, hubiera sido necesario plantear contextos reales más cercanos al entorno de los estudiantes para captar mejor su interés (p. 12). [IEc2]</p> <p>– No obstante, se puede mejorar la Unidad Didáctica introduciendo otros recursos que no se utilizaron lo suficiente. Son importantes, por ejemplo, el uso de las herramientas TIC o la mejora de la contextualización en problemas de Combinatoria, mediante su conexión con otras disciplinas no-matemáticas (p. 22). [IEc4]</p>	<p>raised can be classified as evoked contextualised application problems [...]. It can be said that they are found in an evoked context, that is, they are mathematical problems that allow us to imagine an extra-mathematical framework or situation where the event occurs. [...]. In this sense, it would have been necessary to propose real contexts close to the students' environment to better capture their interest (p. 12). [Ecs2]</p> <p>– However, the Didactic Unit can be improved by introducing other resources that were not used enough. Important, for example, are the use of ICT tools or the improvement of contextualisation in Combinatorics problems, through their connection with other non-mathematical disciplines (p. 22). [Ecs4]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– En resum, un dels conceptes més importants que caldria millorar en una futura implementació de la Unitat Didàctica serien els processos relacionats amb la modelització de problemes (p. 24).</p> <p>– En aquesta fase es millora la riquesa dels processos matemàtics, en quant a la competència de modelització i també amb la utilització de les eines TIC. Òbviament, s'haurà donar el recolzament necessari per guiar als alumnes en la tasca de programació (p. 26).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Instruir unes matemàtiques contextualitzades a</p>	<p>– En resumen, uno de los conceptos más importantes para mejorar en una futura implementación de la Unidad Didáctica sería los procesos relacionados con la modelización de problemas (p. 24).</p> <p>– En esta fase se mejora la riqueza de los procesos matemáticos en cuanto a la competencia de modelización y, también, con la utilización de las herramientas TIC. Obviamente, deberá darse el apoyo necesario para guiar a los estudiantes en la tarea de programación (p. 26).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Instruir una matemática</p>	<p>– In summary, one of the most important concepts to improve in a future implementation of the Didactic Unit would be the processes related to problem modelling (p. 24).</p> <p>– In this phase, the richness of mathematical processes is improved in terms of modelling competency and, also, with the use of ICT tools. Obviously, the necessary support must be given to guide the students in the programming task (p. 26).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Instructing mathematics contextualised in the student's immediate environment, as a quality</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>l'entorn proper de l'estudiant, com a criteri de qualitat, ha estat una altra idea recurrent a tots els mòduls del Màster. Penso que és un dels conceptes importants que tindrè en compte en la meva pràctica docent, de la mateixa manera que ja ho he tingut en compte i que es troba present en la meva Unitat Didàctica (p. 36). – Especialment revelador per mi ha estat descobrir conceptes com la modelització de problemes, aprendre a connectar les matemàtiques amb altres ciències, amb la història o amb el món real, factors que fan que l'aprenentatge sigui més significatiu i, per tant, més fructífer i enriquidor (p. 37).</p>	<p>contextualizada en el entorno cercano del estudiante, como criterio de calidad, ha sido otra idea recurrente en todos los módulos del máster. Pienso que es uno de los conceptos importantes que tendré en cuenta en mi práctica docente, de la misma forma que ya lo tuve en cuenta y que está presente en mi Unidad Didáctica (p. 36). – Ha sido especialmente revelador para mí descubrir conceptos como la modelización de problemas, aprender a conectar la matemática con otras ciencias, con la historia, o con el mundo real, factores que hacen que el aprendizaje sea más significativo y, por lo tanto, más fructífero y enriquecedor (p. 37).</p>	<p>criterion, has been another recurring idea in all the modules of the master's programme. I think it is one of the important concepts that I will take into account in my teaching practice, in the same way that I already took into account and that is present in my Didactic Unit (p. 36). – It has been especially revealing for me to discover concepts such as problem modelling, learning to connect mathematics with other sciences, with history, or with the real world, factors that make learning more meaningful and, therefore, more fruitful and enriching (p. 37).</p>
TFM/MFP #042			
Epistémico Epistemic	<p>– Per una banda, sí que s'han intentat potenciar processos matemàtics com el raonament i prova, la modelització matemàtica, la comunicació, l'ús de diverses eines matemàtiques o la resolució de problemes a les nostres activitats (p. 5). Això ha fet que, com ja veurem, alguns processos matemàtics, com el de modelització, no quedin del tot fixats per la major part dels alumnes (pp. 5–6). [IE3]</p>	<p>– Por un lado, sí que he intentado potenciar procesos matemáticos como el razonamiento y prueba, la modelización matemática, el uso de diversas herramientas matemáticas, o la resolución de problemas en nuestras actividades (p. 5). Esto ha hecho que, como veremos, algunos procesos matemáticos, como el de modelización, no queden del todo fijados por la mayor parte de los estudiantes (pp. 5–6). [IE3]</p>	<p>– On one hand, I have tried to promote mathematical processes, such as reasoning and proof, mathematical modelling, the use of various mathematical tools, or problem solving in our activities (p. 5). This has meant that, as we will see, some mathematical processes, such as modelling, are not completely fixed by most of the students (pp. 5–6). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– En el nostre cas vam tenir problemes en la part més abstracta de la unitat didàctica, com per exemple les parts relatives a la resolució d'equacions trigonomètriques i a la modelització matemàtica, ja que els alumnes estaven molt acostumats a unes</p>	<p>– En nuestro caso, tuvimos problemas en la parte más abstracta de la unidad didáctica como, por ejemplo, en las partes relativas a la resolución de ecuaciones trigonométricas y la modelización matemática, ya que los estudiantes estaban muy</p>	<p>– In our case, we had problems in the most abstract part of the didactic unit, such as, for example, in the parts related to solving trigonometric equations and mathematical modelling, since the students were very accustomed to highly</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>matemàtiques molt mecanitzades i amb un pes elevat de treball repetitiu (p. 8). [IC1]</p> <p>– Primerament, com ja hem mencionat en anteriors paràgrafs, gran part dels alumnes tenien dificultats en la part consistent en modelitzar matemàticament els problemes, es a dir, no va quedar prou clar per alguns dels estudiants com passar de l'enunciat d'un problema a llenguatge matemàtic (p. 9). [IC3]</p>	<p>acostumbrados a una matemática muy mecanizada y con un peso elevado de trabajo repetitivo (p. 8). [IC1]</p> <p>– En primer lugar, como ya mencionamos en párrafos anteriores, gran parte de los estudiantes tenían dificultades en la parte consistente para modelizar matemáticamente los problemas, es decir, no quedó suficientemente claro para algunos de los estudiantes cómo pasar el enunciado de un problema al lenguaje matemático (p. 9). [IC3]</p>	<p>mechanised mathematics and with a high weight of repetitive work (p. 8). [CS1]</p> <p>– Firstly, as we already mentioned in previous paragraphs, a large part of the students had difficulties in the consistent part of mathematically modelling the problems, that is, it was not sufficiently clear for some of the students how to translate the wording of a problem into mathematical language (p. 9). [CS3]</p>
Interaccional			
Mediacional			
Afectivo			
Ecológico			
Otros Others	<p>– La segona activitat estava enfocada a què els alumnes prenguessin consciència de la contextualització de la trigonometria en la seva vida quotidiana i el seu ús (p. 4).</p>	<p>– La segunda actividad estaba enfocada a que los estudiantes tomaran conciencia de la contextualización de la trigonometría en su vida cotidiana y su uso (p. 4).</p>	<p>– The second activity was focused on making the students aware of the contextualisation of trigonometry in their daily life and its use (p. 4).</p>
TFM/MFP #053			
Epistémico Epistemic	<p>– Plantejar i resoldre problemes: Aquest va ser el procés més treballat a la part final de la unitat didàctica. Un cop apresada la mecànica de resolució dels sistemes d'equacions, en aquest últim pas es demana als alumnes que siguin capaços de seleccionar la informació necessària d'un problema exposat en llenguatge comú (en un context no necessàriament matemàtic) i traduir-la al context matemàtic, organitzar-la, posteriorment construir un sistema d'equacions a</p>	<p>– Plantear y resolver problemas: Éste fue el proceso más trabajado en la parte final de la unidad didáctica. Una vez aprendida la mecánica de resolución de los sistemas de ecuaciones, en este último paso, se pide a los estudiantes que sean capaces de seleccionar la información necesaria de un problema expuesto en lenguaje común (en un contexto no necesariamente matemático) y traducirla al contexto matemático, organizarla,</p>	<p>– Posing and solving problems: This was the process most worked on in the final part of the didactic unit. Once the mechanics of solving systems of equations have been learned, in this last step, the students are asked to be able to select the necessary information from a problem presented in common language (in a context that is not necessarily mathematical) and translate it into the mathematical context, organise it, then build a system of equations from</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>partir d'aquestes dades, resoldre'l i, finalment, reconnectar el resultat de nou amb la realitat (detectar resultats impossibles com ara edats negatives, contemplar les unitats de mesura, etc.) (p. 10). Modelar: Es treballa poc de manera explícita; en tot cas, sí que es fa a la part de resolució de problemes. Concretament, en el moment de traduir els enunciats al llenguatge algebraic per acabar plantejant dues equacions amb dues incògnites, doncs aquest pas no deixa de ser un procés de modelització que es dona en els contextos propis d'aquest tipus de problemes (el de situacions on intervenen un parell de variables que mantenen una relació de dependència i de les quals es poden conèixer un parell de condicions). Tot i així, els alumnes hi arriben a mesura que avança la unitat probablement sense prendre consciència que s'està seguint un procés de modelització concret i definit per als contextos treballats (pp. 10-11). [IE3]</p> <p>– Pel que fa a la complexitat, es va aprofundir en la mesura que els alumnes van seguir el ritme en el qual avançava la unitat. Certament, es va seguir gran part de la programació establerta: [...]. Resolució de problemes a partir d'enunciats en context no necessàriament matemàtic (p. 11). [IE4]</p>	<p>posteriormente construir un sistema de ecuaciones a partir de estos datos, resolverlo y, finalmente, reconectar el resultado de nuevo con la realidad (detectar resultados imposible como edades negativas, contemplar las unidades de medida, etc.) (p. 10). Modelizar: Se trabaja poco de forma explícita; en cualquier caso, sí se hace en la parte de resolución de problemas. Concretamente, en el momento de traducir los enunciados al lenguaje algebraico para acabar planteando dos ecuaciones con dos incógnitas, pues este paso no deja de ser un proceso de modelización que se da en los contextos propios de este tipo de problemas (el de situaciones donde interviene un par de variables que mantienen una relación de dependencia y de las que se pueden conocer un par de condiciones). Sin embargo, los estudiantes llegan a medida que avanza la unidad, probablemente, sin tomar conciencia de que se está siguiendo un proceso de modelización concreto y definido para los contextos trabajados (pp. 10–11). [IE3]</p> <p>– En cuanto a la complejidad, se profundizó en la medida en que los estudiantes siguieron el ritmo en el que avanzaba la unidad. Ciertamente, se siguió gran parte de la programación establecida: [...]. Resolución de problemas a partir de enunciados en contextos no necesariamente matemáticos (p. 11). [IE4]</p>	<p>this data, solve it and, finally, reconnect the results again with reality (detecting impossible results such as negative ages, considering units of measurement, etc.) (p. 10). Modelling: Little work is done explicitly; in any case, it is done in the problem-solving part. Specifically, at the time of translating the statements into algebraic language to end up posing two equations with two unknowns, since this step is still a modelling process that occurs in the contexts typical of this type of problem (that of situations where a pair of variables that maintain a dependency relationship and for which a pair of conditions can be known). However, the students arrive as the unit progresses, probably, without being aware that a concrete modelling process defined for the contexts worked on is being followed (pp. 10–11). [ES3]</p> <p>– Regarding the complexity, it deepened to the extent that the students followed the pace at which the unit progressed. Certainly, much of the established schedule was followed: [...]. Solving problems from statements in contexts that are not necessarily mathematical (p. 11). [ES4]</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
Cognitivo Cognitive	<p>– El pas inicial dels problemes el qual es basa en traduir informació d'un context no matemàtic en un parell d'equacions lineals és el seu obstacle principal, per això ells i elles es mantenen en un context numèric sense entrar en profunditat en el terreny més abstracte de l'àlgebra, a més, se'ls avalua mitjançant una altra prova específica (p. 12). [IC2]</p> <p>– Els processos d'alta demanda cognitiva es concentren a la part final de la unitat, durant la resolució de problemes. És en aquest àmbit on els alumnes han d'establir connexions intramatemàtiques i traduir els enunciats del llenguatge comú al llenguatge algebraic, sovint partint de contextos no matemàtics, decidir com organitzen la informació (taula, croquis...), etc. (p. 17). [IC4]</p>	<p>– El paso inicial de los problemas, que se basa en traducir información de un contexto no-matemático en un par de ecuaciones lineales, es su principal obstáculo, por eso ellos se mantienen en un contexto numérico sin entrar en profundidad en el terreno más abstracto del álgebra, además, se les evalúa mediante otra prueba específica (p. 12). [IC2]</p> <p>– Los procesos de alta demanda cognitiva se concentran en la parte final de la unidad, durante la resolución de problemas. Es en este ámbito donde los estudiantes deben establecer conexiones intra-matemáticas y traducir los enunciados del lenguaje común al lenguaje algebraico, a menudo partiendo de contextos no-matemáticos, decidir cómo organizan la información (tabla, croquis...), etc. (p. 17). [IC3]</p>	<p>– The initial step of the problems, which is based on translating information from a non-mathematical context into a pair of linear equations, is their main obstacle, which is why they remain in a numerical context without going in depth into the more abstract terrain of algebra, in addition, they are evaluated through another specific test (p. 12). [CS2]</p> <p>– High cognitive demand processes are concentrated in the final part of the unit, during problem solving. It is in this area where the students must establish intra-mathematical connections and translate statements from common language to algebraic language, often starting from non-mathematical contexts, decide how they organise the information (table, sketch...), etc. (p. 17). [CS3]</p>
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– S'ha procurat proveir les activitats, així com els problemes, de contextos que se'ls sentin propers. Tot i així, certament aquesta unitat no deixava molt marge en aquest sentit si es compara amb altres unitats (p. 17). [IA1]</p>	<p>– Se procuró dotar las actividades, así como los problemas, de contextos que se sientan cercanos. Sin embargo, esta unidad no dejaba mucho margen en este sentido si se compara con otras unidades (p. 17). [IA1]</p>	<p>– An effort was made to provide the activities, as well as the problems, with contexts that feel close. However, this unit did not leave much room in this regard when compared to other units (p. 17). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– I pel que fa a les connexions interdisciplinàries, s'han limitat al plantejament de problemes en contextos no matemàtics al final de la unitat (p. 20). [IEc2]</p>	<p>– Y en lo que se refiere a las conexiones interdisciplinarias, se limitó el planteamiento de problemas en contextos no-matemáticos hacia el final de la unidad (p. 20). [IEc2]</p>	<p>– And regarding the interdisciplinary connections, the posing of problems in non-mathematical contexts was limited towards the end of the unit (p. 20). [EcS2]</p>
Otros Others	<p>– Possiblement una unitat que proporciona una eina</p>	<p>– Posiblemente, una unidad que proporciona</p>	<p>– Possibly, a unit that provides a tool for</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>de càlcul, de resolució de problemes, de modelització d'escenaris concrets, lluny d'altres unitats més versàtils o que abasten continguts més amplis, com poden ser les unitats dedicades a la geometria o l'estadística (p. 5).</p> <p>– Els sistemes representen una eina per a modelitzar problemes originaris d'un entorn no matemàtic i que poden ser resolts matemàticament (p. 7).</p>	<p>una herramienta de cálculo, de resolución de problemas, de modelización de escenarios concretos, lejos de otras unidades más versátiles o que abarcan contenidos más amplios, como pueden ser las unidades dedicadas a la geometría o la estadística (p. 5).</p> <p>– Los sistemas representan una herramienta para modelizar problemas originarios de un entorno no-matemático y que pueden ser resueltos matemáticamente (p. 7).</p>	<p>calculation, problem solving, and modelling of specific scenarios, far from other more versatile units or those that cover broader content, such as units dedicated to geometry or statistics (p. 5).</p> <p>– Systems represent a tool to model problems originating from a non-mathematical environment and that can be solved mathematically (p. 7).</p>
TFM/MFP #053			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Modelització: Desenvolupar un model matemàtic per resoldre un problema. [...]. Contextualització: Utilitzar problemes del món real propers i útils per a l'alumnat. [...]. En l'activitat A.2, es treballa els processos de Modelització, Formulació i Argumentació ja que hi ha preguntes on els alumnes han d'analitzar els resultats obtinguts fent càlculs i trobar relacions entre ells, per tal de formalitzar la relació entre raons de semblança, d'àrea i volum (p. 12). Alguns exemples de Contextualització els podem trobar en l'activitat A.5 on han de calcular distàncies en mapes reals, o l'àrea del continent de l'Antàrtida. A més a més en l'activitat de A.8 ha estat contextualitzada a la realitat, ja que han hagut de sortir el carrer per poder mesurar distàncies inaccessibles aplicant el teorema de Tales (p. 13). [IE3] – Un cop vistes les diferents representacions del teorema de Tales es va</p>	<p>– Modelización: Desarrollar un modelo matemático para resolver un problema. [...]. Contextualización: Utilizar problemas del mundo real, cercanos y útiles para los estudiantes. [...]. En la actividad A.2, se trabajan los procesos de Modelización, Formulación, y Argumentación, ya que hay preguntas en las que los estudiantes deben analizar los resultados obtenidos, haciendo cálculos y encontrando relaciones entre ellos, para formalizar la relación entre razones de semejanza, área, y volumen (p. 12). Algunos ejemplos de Contextualización se pueden encontrar en la actividad A.5, donde deben calcular distancias en mapas reales o el área del continente de la Antártida. Además, la actividad A.8 se contextualizó en la realidad, ya que tuvieron que salir a la calle para poder medir distancias inaccesibles aplicando el</p>	<p>– Modelling: Developing a mathematical model to solve a problem. [...]. Contextualisation: Using real-world problems that are close and useful to students. [...]. In activity A.2, the processes of Modelling, Formulation, and Argumentation are worked on, since there are questions in which the students must analyse the results obtained, making calculations and finding relationships between them, to formalise the relationship between reasons of similarity, area, and volume (p. 12). Some examples of Contextualisation can be found in activity A.5, where they must calculate distances on real maps or the area of the continent of Antarctica. Furthermore, activity A.8 was contextualised in reality, since they had to go out into the street to be able to measure inaccessible distances by applying Thales' theorem (p. 13). [ES3] – Once we had seen the different representations of</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	treballar en problemes reals de calcular distàncies inaccessibles, [...], i en un context real amb l'activitat A.8 (p. 15). [IE4]	teorema de Tales (p. 13). [IE3] – Una vez vistas las diferentes representaciones del teorema de Tales, se trabajó en problemas reales de calcular distancias inaccesibles, [...], y en un contexto real con la actividad A.8 (p. 15). [IE4]	Thales' theorem, we worked on real problems of calculating inaccessible distances, [...], and in a real context with activity A.8 (p. 15). [ES4]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Les activitats proposades durant la unitat didàctica estaven pensades per motivar l'alumnat i despertar el seu interès ja que buscava treballar les matemàtiques en contextos reals, per tal de que hi trobessin utilitat tant en la vida quotidiana com en el món professional. Tot i això considero que podria haver contextualitzat més algunes de les activitats o proposar-ne de més enfocades en aplicacions reals, o per a una realitat d'adolescents de 14–15 anys (p. 22). [IA1]	– Las actividades propuestas durante la unidad didáctica estaban pensadas para motivar a los estudiantes y despertar su interés, ya que buscaban trabajar la matemática en contextos reales para que encontraran utilidad tanto en la vida cotidiana como en el mundo profesional. Sin embargo, considero que podría haber contextualizado más algunas de las actividades o proponerlas más enfocadas en aplicaciones reales, o para una realidad de adolescentes de 14–15 años (p. 22). [IA1]	– The activities proposed during the didactic unit were designed to motivate students and awaken their interest, since they sought to work on mathematics in real contexts so that they would find it useful, both in daily life and in the professional world. However, I consider that some of the activities could have been contextualised more or proposed more focused on real applications, or for a reality of adolescents aged 14–15 (p. 22). [AS1]
Ecológico Ecological	– La contextualització en la realitat va ser present en algunes de les activitats plantejades però no suficient. Però que tot i buscar un context real en determinats exercicis, [...], o algun dels problemes del teorema de Tales, va faltar contextualitzar-los en una realitat d'adolescents. A més a més la contextualització cap a un món laboral va ser inexistente, provocant que els alumnes no veiessin utilitat en alguna part del temari, com tampoc en l'examen final en el que	– La contextualización en la realidad estuvo presente en algunas de las actividades planteadas, pero no lo suficiente. Aunque pese a buscar un contexto real en determinados ejercicios, [...], o alguno de los problemas del teorema de Tales, faltó contextualizarlos en una realidad de adolescentes. Además, la contextualización hacia el mundo laboral fue inexistente, provocando que los estudiantes no vieran utilidad en alguna	– Contextualisation in reality was present in some of the proposed activities, but not enough. Although despite looking for a real context in certain exercises, [...], or some of the problems of Thales' theorem, it was necessary to contextualise them in a reality of adolescents. Furthermore, the contextualisation towards the world of work was non-existent, causing the students to see no use in any part of the syllabus, nor in the final exam, where they had to solve

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	havien de resoldre exercicis amb molt poc context (p. 27). [IEc3]	parte del temario, como tampoco en el examen final, donde debían resolver ejercicios con muy poco contexto (p. 27). [IEc3]	exercises with very little context (p. 27). [EcS3]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Considero que tinc suficient coneixement matemàtic per reconèixer les matemàtiques en altres matèries i he intentant utilitzar aquestes connexions a les diferents activitats amb modelització i contextualitzar-les extra-matemàticament (p. 36).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Considero que tengo suficiente conocimiento matemático para reconocer la matemática en otras materias y he intentado utilizar estas conexiones en las diferentes actividades, como la modelización y la contextualización extra-matemática (p. 36).	– Contextualisation and interdisciplinary value: I consider that I have enough mathematical knowledge to recognise mathematics in other subjects and I have tried to use these connections in different activities, such as modelling and extra-mathematical contextualisation (p. 36).
TFM/MFP #057			
Epistémico Epistemic	– Modelització: En moltes activitats es demanava als alumnes solucionar un problema amb dades donades d'un context real amb trigonometria, per tant la modelització estava molt present en la unitat ja que utilitzaven un model matemàtic al plantejar el triangle rectangle. [...]. Contextualització i resolució de problemes: El procés de contextualització es troba present al llarg de la unitat didàctica impartida en la resolució de diverses problemes (p. 5). [IE3]	– Modelización: En muchas actividades se pedía a los estudiantes solucionar un problema con datos dados en un contexto real con trigonometría, por lo tanto, la modelización estaba muy presente en la unidad, ya que utilizaban un modelo matemático al plantear el triángulo rectángulo. [...]. Contextualización y resolución de problemas: El proceso de contextualización está presente a lo largo de la unidad didáctica impartida en la resolución de varios problemas (p. 5). [IE3]	– Modelling: In many activities, the students were asked to solve a problem with given data in a real context with trigonometry, therefore, modelling was very present in the unit, since they used a mathematical model when posing a right triangle. [...]. Contextualisation and problem solving: The contextualisation process is present throughout the taught didactic unit in the solving of various problems (p. 5). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– Al llarg de la unitat els alumnes van resoldre problemes i situacions contextualitzades, i totes les activitats individuals les podien fer parlant entre	– A lo largo de la unidad, los estudiantes resolvieron problemas y situaciones contextualizadas, y todas las actividades individuales podían hacerlas hablando entre	– Throughout the unit, the students solved problems and contextualised situations, and they could do all the individual activities by talking each

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	ells i consultant els dubtes (p. 13). [IEc3] – La unitat didàctica impartida està dissenyada per a què els alumnes arribin a les definicions de les raons trigonomètriques a partir de la resolució de problemes contextualitzats, de casos pràctics (p. 13). [IEc4]	ellos y consultando las dudas (p. 13). [IEc3] – La unidad didáctica impartida está diseñada para que los estudiantes lleguen a las definiciones de las razones trigonométricas a partir de la resolución de problemas contextualizados de casos prácticos (p. 13). [IEc4]	other and asking questions (p. 13). [EcS3] – The taught didactic unit is designed so that the students arrive at the definitions of trigonometric ratios by solving contextualised problems of practical cases (p. 13). [EcS4]
Otros Others			
TFM/MFP #059			
Epistémico Epistemic	– La seqüència de tasques contemplades durant la unitat didàctica que representen la modelització i l'argumentació de l'alumnat, es pot dir que ha estat present durant tota la unitat didàctica. L'alumnat ha comprès i ha pensat sobre els sistemes d'equacions i les relacions entre les diverses variables. [...]. Pel que fa al plantejament i la resolució de problemes durant la unitat didàctica, ha estat un element fonamental. L'alumnat ha traduït problemes quotidians i de l'àmbit científic, a llenguatge matemàtic algebraic per així poder plantejar els sistemes d'equacions, que els ha ajudat a trobar les solucions de les situacions plantejades durant la unitat didàctica (p. 5). [IE3]	– La secuencia de tareas contempladas durante la unidad didáctica, que representan la modelización y la argumentación de los estudiantes, puede decirse que estuvo presente durante toda la unidad didáctica. Los estudiantes comprendieron y pensaron sobre los sistemas de ecuaciones y las relaciones entre las diversas variables. [...]. En lo que respecta al planteamiento y la resolución de problemas, esto fue un elemento fundamental durante toda la unidad didáctica. Los estudiantes tradujeron problemas cotidianos y del ámbito científico al lenguaje matemático-algebraico, para poder así plantear los sistemas de ecuaciones que les ayudaron a encontrar las soluciones de las situaciones planteadas durante la unidad didáctica (p. 5). [IE3]	– The sequence of tasks contemplated during the didactic unit, which represent the modelling and argumentation of the students, can be said to have been present during the entire didactic unit. The students understood and thought about systems of equations and the relationships between various variables. [...]. Regarding problem posing and solving, it was a fundamental element throughout the didactic unit. The students translated everyday problems and those from the scientific field into mathematical-algebraic language, in order to propose the systems of equations that helped them find solutions to the situations posed during the didactic unit (p. 5). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– Per tal que l'alumnat sigui capaç de construir el llenguatge algebraic, l'alumnat ha de tenir coneixements previs matemàtics entre quantitats, percepcions, canvis, generalitzacions, resolució de problemes, modelització, justificació,	– Para que los estudiantes sean capaces de construir el lenguaje algebraico, ellos deben tener conocimientos matemáticos previos entre cantidades, percepciones, cambios, generalizaciones, resolución de problemas, modelización,	– For the students to be able to construct algebraic language, they must have prior mathematical knowledge between quantities, perceptions, changes, generalisations, problem solving, modelling, justification, and prescribing, in order to

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>prova i prescriure, per tal de poder tenir pensament algebraic i ser capaç de relacionar aritmètiques, descriure les variacions i modelitzar. [...]. En cas contrari, l'alumnat difícilment podrà donar significat a un model matemàtic en què es necessiti comprendre els paràmetres d'una determinada funció si abans no ha tingut experiències amb el llenguatge algebraic per expressar funcions (p. 9). [IC1]</p>	<p>justificación, prueba, y prescribir, para poder tener pensamiento algebraico y ser capaces de relacionar con la aritmética, describir las variaciones, y modelizarlas. [...]. En caso contrario, los estudiantes difícilmente podrán dar significado a un modelo matemático en el que se necesite comprender los parámetros de una determinada función si no han tenido antes experiencias con el lenguaje algebraico para expresar funciones (p. 9). [IC1]</p>	<p>have algebraic thinking and be able to relate to arithmetic, describe the variations, and model them. [...]. Otherwise, the students will hardly be able to give meaning to a mathematical model in which it is necessary to understand the parameters of a certain function if they have not previously had experience with algebraic language to express functions (p. 9). [CS1]</p>
Interaccional			
Mediacional			
Afectivo Affective	<p>– Al cap i a la fi, la resolució de problemes podríem dir que és el cor de les matemàtiques, i per tant també d'aquesta unitat didàctica. Durant la unitat s'han plantejat diferents problemes de la vida quotidiana que ha servit a l'alumnat a relacionar les matemàtiques amb diferents situacions quotidianes, alhora que han servit d'eina per la comprensió i el plantejament dels sistemes d'equacions (p. 15). [IA1]</p>	<p>– Al fin y al cabo, podríamos decir que la resolución de problemas es el corazón de la matemática y, por lo tanto, de esta unidad didáctica. Durante la unidad se plantearon diferentes problemas de la vida cotidiana que sirvieron a los estudiantes para relacionar la matemática con diferentes situaciones cotidianas, a la vez que sirvió de herramienta para la comprensión y el planteamiento de los sistemas de ecuaciones (p. 15). [IA1]</p>	<p>– At the end of the day, we could say that problem solving is the heart of mathematics and, therefore, of this didactic unit. During the unit, different daily-life problems were posed that helped the students relate mathematics to different everyday situations, while at the same time serving as a tool for understanding and formulating systems of equations (p. 15). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– És per això, que aquesta unitat ha posat en pràctica tots els coneixements adquirits en unitats didàctiques anteriors, per tal de resoldre problemes reals i de la vida quotidiana (p. 16). [IEc2]</p>	<p>– Es por eso por lo que esta unidad didáctica puso en práctica todos los conocimientos adquiridos en unidades didácticas anteriores para resolver problemas reales y de la vida cotidiana (p. 16). [IEc2]</p>	<p>– That is why this didactic unit put into practice all the knowledge acquired in previous didactic units to solve real problems in everyday life (p. 16). [EcS2]</p>
Otros Others	<p>– Durant el Màster he treballat i se'ns ha mostrat el contingut dels currículums de Secundària i de Batxillerat. A més a</p>	<p>– Durante el Máster trabajé y se nos mostró el contenido de los currículos de Secundaria y de Bachillerato. Además,</p>	<p>– During the master's programme, I worked and we were shown the content of the Secondary and Baccalaureate Education</p>

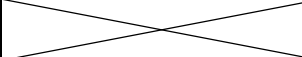
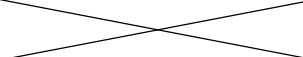

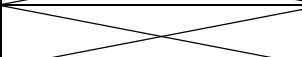
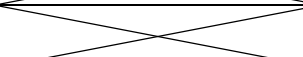
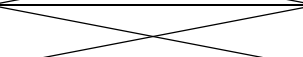
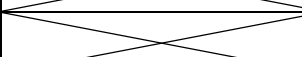
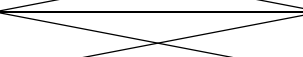
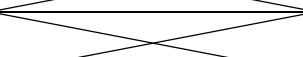
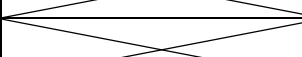
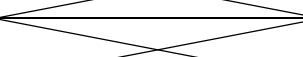



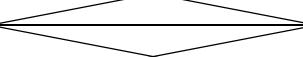
Anexo 6: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Tercer Article
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	més, també hem vist diferents recursos i models extramatemàtics per poder aplicar a les classes de matemàtiques (p. 36).	también vimos diferentes recursos y modelos extra-matemáticos para aplicar en las clases de matemática (p. 36).	curricula. In addition, we also saw different extra-mathematical models to apply in mathematics lessons (p. 36).
TFM/MFP #060			
Epistémico Epistemic	<p>– Contextualització: Resoldre problemes i activitats reals i quotidianes. [...].</p> <p>Resolució de problemes: Usar diferents eines i estratègies per resoldre problemes, tot mantenint una actitud de recerca. Fer inferències per cercar la solució. [...].</p> <p>Modelització: Traduir un problema a llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames o models adequats (p. 8). [IE3]</p>	<p>– Contextualización: Resolver problemas y actividades reales y cotidianas. [...].</p> <p>Resolución de problemas: Usar diferentes herramientas y estrategias para resolver problemas, manteniendo una actitud de investigación. Realizar inferencias para buscar la solución. [...].</p> <p>Modelización: Traducir un problema al lenguaje matemático utilizando variables, símbolos, diagramas, o modelos adecuados (p. 8). [IE3]</p>	<p>– Contextualisation: Solving real and everyday problems and activities. [...].</p> <p>Problem solving: Using different tools and strategies to solve problems, maintaining an investigative attitude. Making inferences to find the solution. [...].</p> <p>Modelling: Translating a problem into mathematical language using appropriate variables, symbols, diagrams, or models (p. 8). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Les activitats dissenyades han pretès ser properes a les necessitats i interessos dels alumnes. L'activitat d'elaboració d'una factura a partir del cas real d'un esmorzar a la cantina de l'INS, per exemple, vol apropar a l'alumnat a un context real i als seus possibles interessos en el món empresarial (p. 12). [IA1]</p>	<p>– Las actividades diseñadas pretendieron estar cercanas a las necesidades e intereses de los estudiantes. La actividad de elaboración de una factura a partir del caso real de un almuerzo en el comedor del instituto, por ejemplo, quiere acercar a los estudiantes a un contexto real y a sus posibles intereses en el mundo empresarial (p. 12). [IA1]</p>	<p>– The designed activities were intended to be close to the students' needs and interests. The activity of preparing an invoice based on the real case of a lunch in the school cafeteria, for example, wants to bring the students closer to a real context and their possible interests in the business world (p. 12). [AS1]</p>
Ecológico Ecological	<p>– L'única activitat de la UD amb utilitat directa al món laboral és l'activitat d'aplicació dels polinomis consistent en l'elaboració d'una factura a partir de la simulació d'un cas real. Estaríem parlant d'un problema contextualitzat evocat d'aplicació (p. 16). [IEc3]</p>	<p>– La única actividad de la UD con utilidad directa en el mundo laboral es la de aplicación de los polinomios, que consiste en la elaboración de una factura a partir de la simulación de un caso real. Estaríamos hablando de un problema contextualizado</p>	<p>– The only activity of the DU with direct use in the world of work is the application of polynomials, which consists of preparing an invoice based on the simulation of a real case. We would be talking about a contextualised evoked</p>

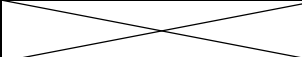
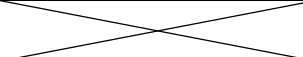

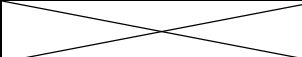
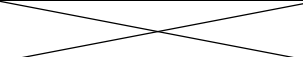

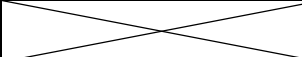
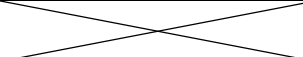

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		evocado de aplicación (p. 16). [IEc3]	application problem (p. 16). [EcS3]
Otros Others	<p>– I, d'altra banda, l'aplicació dels polinomis és present en moltes branques de la ciència com ara l'economia, l'enginyeria forestal, la medicina, la física, la informàtica o en qualsevol especialitat que necessiti de la modelització matemàtica (p. 4).</p> <p>– Idoneïtat epistèmica: Cal plantejar activitats que donin lloc a parlar de més representacions i a connectar-les entre si; també s'han d'incloure activitats més contextualitzades i inferir en el procés d'interpretació i anàlisi de situacions per tal d'augmentar la riquesa de processos. El procés d'argumentació, el d'algorithmització i el de modelització també haurien de tenir més pes (p. 17).</p> <p>– Es treballen els processos matemàtics de contextualització i interpretació, i també els d'argumentació, algorithmització i modelització, deficientes a l'anàlisi de la idoneïtat epistèmica. A més a més, es busca la connexió de les diferents representacions d'un polinomi (algebraica, geomètrica i en funció) a partir de l'aplicació i resolució d'un problema real (p. 20).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: També l'elaboració de la UD que pretenia ser propera a la realitat dels alumnes, contextualitzada i connectada amb altres disciplines, així com la revisió i millora que he efectuat en aquest document, m'ha permès</p>	<p>– Y, por otra parte, la aplicación de los polinomios está presente en muchas ramas de las ciencias como, por ejemplo, la economía, la ingeniería forestal, la medicina, la física, la informática, o en cualquier especialidad que necesite de la modelización matemática (p. 4).</p> <p>– Idoneidad epistémica: Es necesario plantear actividades que den lugar a hablar de más representaciones y a conectarlas entre sí; también, deben incluirse actividades más contextualizadas e inferir, en el proceso de interpretación y análisis de situaciones, para aumentar la riqueza de procesos. El proceso de argumentación, el de algorithmización, y el de modelización, también deberían tener más peso (p. 17).</p> <p>– Se trabajan los procesos matemáticos de contextualización e interpretación, así como los de argumentación, algorithmización, y modelización, deficientes en el análisis de la idoneidad epistémica. Además, se busca la conexión de las diferentes representaciones de un polinomio (algebraica, geométrica, y como función) a partir de la aplicación y resolución de un problema real (p. 20).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: También, la elaboración de la UD, que pretendía ser cercana a la realidad de los estudiantes, contextualizada, y conectada con otras</p>	<p>– And, on the other hand, the application of polynomials is present in many branches of sciences such as, for example, economics, forestry engineering, medicine, physics, computer science, or in any speciality that requires mathematical modelling (p. 4).</p> <p>– Epistemic suitability: It is necessary to propose activities that lead to talking about more representations and connecting them with each other; also, more contextualised activities and inferences should be included in the process of interpretation and analysis of situations, to increase the richness of processes. The processes of argumentation, algorithmicising, and modelling should also have more weight (p. 17).</p> <p>– The mathematical processes of contextualisation and interpretation are worked on, as well as those of argumentation, algorithmicising, and modelling, which are deficient in the analysis of epistemic suitability. In addition, the connection of the different representations of a polynomial (algebraic, geometric, and as a function) is sought from the application and solving of a real problem (p. 20).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Also, the development of the DU, which was intended to be close to the students' reality, contextualised, and connected with other</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	passar de la N1 a la N2 (que considero assolida) (p. 28).	disciplinas, así como la revisión y mejora que he efectuado en este documento, me permitió pasar de la N1 a la N2 (que considero alcanzada) (p. 28).	disciplines, as well as the review and improvement that I have made in this document, allowed me to go from L1 to L2 (which I consider achieved) (p. 28).
TFM/MFP #061			
Epistémico Epistemic	– Per treballar aquesta sèrie de conceptes, es va dissenyar una unitat didàctica rica en processos que va ser duta a terme posant a l'alumnat al centre de l'aprenentatge de diverses maneres. Tot comença amb un problema de modelització que contraposa a l'alumnat amb la seva intuïció (p. 5). Un punt central de la unitat didàctica també ha estat el treball amb material, del qual es deriva la modelització. En diverses activitats es començava treballant amb materials per comprendre les matemàtiques a partir de la seva vivència sensorial i després es retiraven els materials per treballar aquest mateixos conceptes des de l'abstracció i, per tant, amb l'ús dels nous aprenentatges (pp. 5–6). [IE3]	– Para trabajar esta serie de conceptos, se diseñó una unidad didáctica rica en procesos, la cual se llevó a cabo poniendo a los estudiantes en el centro del aprendizaje de diversas formas. Todo comienza con un problema de modelización que contrapone a los estudiantes con su intuición (p. 5). Un punto central de la unidad didáctica también fue el trabajo con material, del que se deriva la modelización. En diversas actividades, se empezaba trabajando con materiales para comprender la matemática a partir de su vivencia sensorial y, después, se retiraban los materiales para trabajar estos mismos conceptos desde la abstracción y, por lo tanto, con el uso de los nuevos aprendizajes (pp. 5–6). [IE3]	– To work on a series of concepts, a didactic unit rich in processes was designed, which was carried out by putting the students at the centre of learning in various ways. It all begins with a modelling problem that contrasts the students with their intuition (p. 5). A central point of the didactic unit was also the work with materials, from which modelling is derived. In various activities, they began working with materials to understand mathematics based on their sensory experience and, later, the materials were removed to work on these same concepts from abstraction and, therefore, with the use of new learning (pp. 5–6). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– I jo vaig contextualitzar les matemàtiques en les seves utilitats i la seva bellesa, però no en la història (p. 18). – Contextualització i valor interdisciplinari: Amb el TFG vaig fer una bona	– Y yo contextualicé la matemática en sus utilidades y su belleza, pero no en la historia (p. 18). – Contextualización y valor interdisciplinario: Con el TFM hice un buen	– And I contextualised mathematics in its uses and its beauty, but not in history (p. 18). – Contextualisation and interdisciplinary value: With the MFP I did a good job of creating models

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	feina de creació de models amb especial perspectiva STEAM, de manera que, entre això i experiències prèvies a eXplorium, ja arribava amb un bon nivell en aquest sentit (p. 51).	trabajo de creación de modelos con especial perspectiva STEAM, de modo que, entre esto y experiencias previas en eXplorium, ya llegaba con un buen nivel en este sentido (p. 51).	with a special STEAM perspective, so that, between this and previous experiences in eXplorium, I already arrived with a good level in this sense (p. 51).
TFM/MFP #062			
Epistémico Epistemic	– Per tal de que l'alumnat veiessin com modelitzar una situació real a través de les funcions, vaig començar per descriure patrons d'associació de dues variables qualitativament amb una representació gràfica (p. 12). [IE3]	– Para que los estudiantes viesan cómo modelizar una situación real a través de las funciones, empecé por describir patrones de asociación de dos variables cualitativamente con una representación gráfica (p. 12). [IE3]	– So that the students could see how to model a real situation through functions, I began by describing association patterns of two variables qualitatively with a graphical representation (p. 12). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Les variables en les quals vaig intentar influir per crear aquest clima varen ser: a) la tria d'activitats, al intentar que fossin de context real i properes (p. 18). [IA1]	– Las variables en las que intenté influir para crear este clima fueron: (a) la elección de actividades, al intentar que fueran de contexto real y cercanas (p. 18). [IA1]	– The variables that I tried to influence to create this climate were: (a) the choice of activities, trying to make them real context and close (p. 18). [AS1]
Ecológico Ecological	– Així s'ha treballat: Resoldre situacions en què cal identificar relacions quantitatives i determinar el tipus de funció (lineal) que pot modelitzar-les. [...]. Reconèixer models funcionals (lineals, quadràtics) en contextos no necessàriament matemàtics i utilitzar les seves característiques i propietats per resoldre situacions que apareixen en treballs realitzats des de la pròpia àrea. Resoldre situacions en què cal identificar relacions quantitatives i determinar el tipus de funció (lineal) que pot modelitzar-les (p. 24). [IEc1] – Al llarg de la UD s'ha intentat connectar les	– Así se trabajó: Resolver situaciones en las que es necesario identificar relaciones cuantitativas y determinar el tipo de función (lineal) que puede modelizarlas. [...]. Reconocer modelos funcionales (lineales, cuadráticos) en contextos no necesariamente matemáticos y utilizar sus características y propiedades para resolver situaciones que aparecen en trabajos realizados desde la propia área. Resolver situaciones en las que es necesario identificar relaciones cuantitativas y determinar el tipo de función (lineal) que puede modelizarlas (p. 24). [IEc1]	– This is how we worked: Solving situations in which it is necessary to identify quantitative relationships and determine the type of function (linear) that can model them. [...]. Recognising functions models (linear, quadratic) in contexts that are not necessarily mathematical and using their characteristics and properties to solve situations that appear in work carried out in the area itself. Solving situations in which it is necessary to identify quantitative relationships and determine the type of function (linear) that can model them (p. 24). [IEc1]

Criterio*	Original	Español	English
	<p>activitats amb les matemàtiques i altres disciplines; les activitats realitzades propiciaven entendre i interpretar un problema en un context real demostrant la utilitat en la vida diària (p. 24). [IEc2]</p> <p>– En relació a les activitats realitzades, no han sigut especialment innovadores, he procurat que fossin properes i contextualitzades (p. 25). [IEc4]</p>	<p>– A lo largo de la UD se intentó conectar las actividades con la matemática y otras disciplinas; las actividades realizadas propiciaban entender e interpretar un problema en un contexto real, demostrando la utilidad en la vida diaria (p. 24). [IEc2]</p> <p>– En relación con las actividades realizadas, no fueron especialmente innovadoras, procuré que fueran cercanas y contextualizadas (p. 25). [IEc4]</p>	<p>– Throughout the DU, an attempt was made to connect activities with mathematics and other disciplines; the activities carried out promoted understanding and interpreting a problem in a real context, demonstrating its usefulness in daily life (p. 24). [EcS2]</p> <p>– Regarding the activities carried out, they were not particularly innovative, I tried to make them close and contextualised (p. 25). [EcS4]</p>
Otros Others	<p>– Contextualització i valor interdisciplinari: Abans del màster podia fer connexions interdisciplinàries limitades, perquè desconeixia la majoria del currículum matemàtic. Gràcies màster, he pogut dissenyar un treball globalitzat pels meus alumnes incloent matemàtiques i tecnologia (p. 36).</p>	<p>– Contextualización y valor interdisciplinario: Antes del máster, podía realizar conexiones interdisciplinarias limitadas, porque desconocía la mayoría del currículum matemático. Gracias al máster, he podido diseñar un trabajo globalizado para mis estudiantes, incluyendo matemática y tecnología (p. 36).</p>	<p>– Contextualisation and interdisciplinary value: Before the master’s programme, I could make limited interdisciplinary connections, because I did not know most of the mathematical curriculum. Thanks to the master’s programme, I have been able to design a globalised work for my students, including mathematics and technology (p. 36).</p>
TFM/MFP #065			
Epistémico Epistemic	<p>– D’altra banda, la contextualització considero que s’ha treballat força a la UD, aplicant-la en gairebé tots els conceptes i continguts matemàtics, encara que en la Sessió 2 [...] s’hauria de millorar. [...]. També s’ha treballat el procés de modelització, encara que considero que s’hauria d’haver complementat amb la representació gràfica (procés de conversió), treballant-ho amb la resolució de problemes, implicant el disseny d’estratègies (p. 15). Resolució de problemes: Capacitat de donar solució a problemes matemàtics que impliquen utilitzar</p>	<p>– Por otra parte, considero que la contextualización se trabajó bastante en la UD, aplicándola en casi todos los conceptos y contenidos matemáticos, aunque en la Sesión 2 [...] debería mejorarse. También se trabajó el proceso de modelización, aunque considero que debería haberse complementado con la representación gráfica (proceso de conversión), trabajándolo con la resolución de problemas, implicando el diseño de estrategias (p. 15). Resolución de problemas: Capacidad de dar solución a problemas matemáticos que impliquen utilizar</p>	<p>– On the other hand, I consider that contextualisation was worked on a lot in the DU, applying it to almost all mathematical concepts and contents, although in Session 2 [...] it should be improved. The modelling process was also worked on, although I consider that it should have been complemented with graphical representation (conversion process), working on it with problem solving, involving the design of strategies (p. 15). Capacity to provide solutions to mathematical problems that involve using concepts and</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>conceptes i dissenyar estratègies. Contextualització: Utilitzar una situació del món real per entendre el contingut matemàtic. Modelització: Utilitzar els coneixements i continguts matemàtics per traduir la realitat a un model matemàtic (p. 71). [IE3]</p>	<p>conceptos y diseñar estrategias. Contextualización: Utilizar una situación del mundo real para entender los contenidos matemáticos. Modelización: Utilizar los conocimientos y contenidos matemáticos para traducir la realidad a un modelo matemático (p. 71). [IE3]</p>	<p>designing strategies. Contextualisation: Using a real-world situation to understand mathematical contents. Modelling: Using mathematical knowledge and contents to translate reality into a mathematical model (p. 71). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– En relació amb l’objectiu “Saber resoldre problemes de funcions reals” i “Diferenciar si una funció és d’un tipus o d’un altre”, considero que s’ha treballat (en la seva mesura) des de la contextualització i la modelització amb situacions quotidianes (p. 20). Alta demanda cognitiva: Tot i que es treballen les connexions intramatemàtiques, la contextualització i la modelització (en la seva mesura), caldria aprofundir més el treball cognitiu en la resolució de problemes (p. 73). [IC4]</p>	<p>– Con relación al objetivo “Saber resolver problemas de funciones reales” y “Diferenciar si una función es de uno u otro tipo”, considero que se trabajó (en su medida) desde la contextualización y la modelización con situaciones cotidianas (p. 20). Alta demanda cognitiva: Aunque se trabajen las conexiones intra-matemáticas, la contextualización, y la modelización (en su medida), habría que profundizar más el trabajo cognitivo en la resolución de problemas (p. 73). [IC4]</p>	<p>– Regarding the objective “Know how to solve problems with real functions” and “Differentiate whether a function is of one type or another”, I consider that we worked (to the extent) from contextualisation and modelling with everyday situations (p. 20). High cognitive demand: Although intra-mathematical connections, contextualisation, and modelling (to the extent) are worked on, the cognitive work in problem solving should be further in-depth (p. 73). [CS4]</p>
Interaccional Interaccional	X	X	X
Mediacional Mediational	<p>– Davant la manca de disponibilitat del GeoGebra, penso que el fet de preparar les classes amb PowerPoint, utilitzant la representació gràfica amb el “Desmos” i amb el “Geogebra” va esmenar força la manca dels ordinadors, ja que va donar cabuda a projectar diferents situacions i contextualitzacions, llenguatges, models, visualitzacions i arguments adaptats al contingut (p. 23). [IM1]</p>	<p>– Ante la carencia de disponibilidad del GeoGebra, pienso que preparar las clases con PowerPoint, utilizando la representación gráfica con “Desmos” y con el “GeoGebra”, enmendó bastante la carencia de los computadores, ya que dio cabida a proyectar diferentes situaciones y contextualizaciones, lenguajes, modelos, visualizaciones, y argumentos adaptados al contenido (p. 23). [IM1]</p>	<p>– Given the lack of availability of GeoGebra, I think that preparing the lessons with PowerPoint, using graphical representation with “Desmos” and “GeoGebra”, made up for the lack of computers, since it gave room to project different situations and contextualised situations, languages, models, visualisations, and arguments adapted to the content (p. 23). [MS1]</p>
Afectivo Affective	<p>– En la Sessió 2 [...] de la programació de la UD s’introduïen situacions contextualitzades per</p>	<p>– En la Sesión 2 [...] de la programación de la UD, se introducían situaciones contextualizadas para</p>	<p>– In Session 2 [...] of the DU agenda, contextualised situations were introduced to introduce theoretical</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	introduir conceptes teòrics, però en la reprogramació es va canviar i, les primeres classes i activitats pràctiques eren força teòrics i no es relacionaven amb contextualitzacions quotidianes, o que poguessin ser del seu interès (p. 25). [IA1]	introducir conceptos teóricos, pero en la reprogramación esto se cambió, y las primeras clases y actividades prácticas eran bastante teóricas y no se relacionaban con contextualizaciones cotidianas o que pudieran ser de su interés (p. 25). [IA1]	concepts, but in the reschedule this was changed, and the first lessons and practical activities were quite theoretical and were not related to everyday contextualised situations or that might be interesting (p. 25). [AS1]
Ecológico Ecological	– Un dels objectius de la UD era “Saber resoldre problemes de funcions lineals”, i s’ha treballat a través de la resolució de problemes contextualitzats amb situacions quotidianes pròximes [...], amb el suport de la representació gràfica. Tot i no haver pogut dedicar més temps a la resolució de problemes, crec que han après quins tipus de funcions lineals ens podem trobar al dia a dia, aprenent que les matemàtiques són útils fora de l’assignatura i que moltes situacions es poden expressar a través d’equacions (p. 27). [IEc3]	– Uno de los objetivos de la UD era “Saber resolver problemas de funciones lineales”, y se trabajó a través de la resolución de problemas contextualizados con situaciones cotidianas cercanas [...], apoyadas por la representación gráfica. A pesar de no haber podido dedicar más tiempo a la resolución de problemas, creo que aprendieron qué tipos de funciones lineales podemos encontrarnos en el día a día, aprendiendo que la matemática es útil fuera de la asignatura y que muchas situaciones se pueden expresar a través de ecuaciones (p. 27). [IE3]	– One of the objectives of the DU was “Know how to solve problems of linear functions”, and we worked through the solving of problems contextualised with close-everyday situations [...], supported by graphical representation. Despite not having been able to dedicate more time to solving problems, I think they learned what types of linear functions we can find on a daily basis, learning that mathematics is useful outside the subject and that many situations can be expressed through equations (p. 27). [ES3]
Otros Others	– Resolució de problemes: En l’anàlisi del component de riquesa de processos s’ha identificat una mancança d’activitats en forma de resolució de problemes que impliquessin dissenyar estratègies per a trobar la solució de problemes que no requereixen una resolució immediata, és a dir, problemes en què els alumnes no tinguin una resposta o un procediment establert, sinó que l’hagin de desenvolupar treballant la pràctica productiva [...]. Ahora, en les activitats de modelització de la UD es va evidenciar una falta de	– Resolución de problemas: En el análisis del componente riqueza de procesos, se identificó una carencia de actividades en forma de resolución de problemas que implicaran diseñar estrategias para encontrar la solución de problemas que no requieren una resolución inmediata, es decir, problemas en los que los estudiantes no tengan una respuesta o un procedimiento establecido, sino que deban desarrollarla trabajando la práctica productiva [...]. Asimismo, en las actividades de	– Problem solving: In the analysis of the richness of processes component, a lack of activities in the form of problem solving that involved designing strategies to find the solution to problems that do not require immediate solving was identified, that is, problems in which the students do not have an answer or an established procedure, but must develop it by working on productive practice [...]. Likewise, in the modelling activities of the DU, a lack of graphical representation and connection was evident, which will be

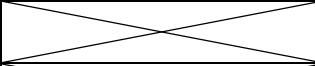
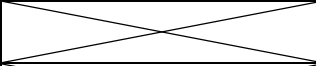
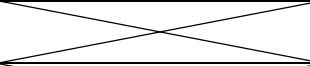
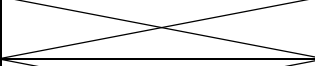
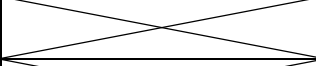
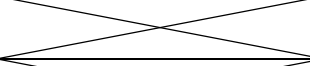
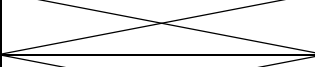
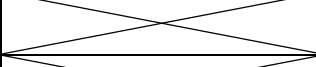
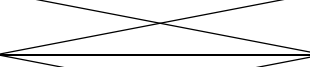
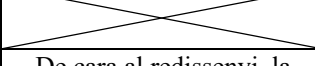
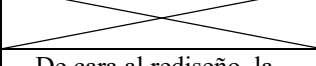
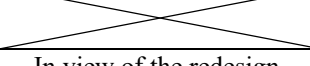
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>representació gràfica i de connexió, que es complementarà amb l'addició de les activitats que s'exposaran a continuació (p. 30). – El treball en un ambient de resolució de problemes facilita l'assoliment de tots els processos i del raonament matemàtic de l'alumnat, i a més, si aquests problemes són competencialment rics, ens fan adonar de la creativitat i intuïció que poden tenir els alumnes si no els delimitem, ja que són problemes oberts. A més, també poden potenciar el desenvolupament de diverses maneres o estratègies, diferents nivells de justificacions (descriptives, explicatives, argumentatives, etc.), l'ús de llenguatge matemàtic, i l'ús d'instruments com el GeoGebra, taules, fulls de càlcul, etc. [...]. A més, la utilització de la modelització, responnent a una única finalitat de mostrar que les matemàtiques es poden aplicar en situacions molt diferents, també es relaciona amb la motivació de l'alumnat, encara que no sempre, pel simple fet que es tracti d'una situació contextualitzada, la motivació serà major per a tots (p. 31). – Contextualització i valor interdisciplinari: Durant el màster s'ha treballat la importància de ressaltar als alumnes les aplicacions i les funcionalitats del contingut matemàtic per tal que puguin contextualitzar-les a la vida real i també relacionar-les amb altres assignatures. La meua formació i professió</p>	<p>modelización de la UD, se evidenció una falta de representación gráfica y de conexión, que se complementarà con la adición de las actividades que se expondrán a continuación (p. 30). – El trabajo en un ambiente de resolución de problemas facilita la consecución de todos los procesos y del razonamiento matemático de los estudiantes. Además, si estos problemas son competencialmente ricos, nos dan cuenta de la creatividad e intuición que pueden tener los estudiantes si no los delimitamos, puesto que son problemas abiertos. Además, también pueden potenciar el desarrollo de diversas formas o estrategias, diferentes niveles de justificaciones (descriptivas, explicativas, argumentativas, etc.), el uso del lenguaje matemático, y el uso de instrumentos como el GeoGebra, tablas, hojas de cálculo, etc. [...]. Además, la utilización de la modelización, respondiendo a una única finalidad de mostrar que la matemática puede aplicarse en situaciones muy diferentes, también se relaciona con la motivación de los estudiantes, aunque no siempre, por el simple hecho de que se trate de una situación contextualizada, la motivación será mayor para todos (p. 31). – Contextualización y valor interdisciplinario: Durante el máster, se trabajó la importancia de resaltar a los estudiantes</p>	<p>complemented with the addition of the activities that will be explained below (p. 30). – Working in a problem-solving environment facilitates the achievement of all processes and mathematical reasoning of the students. Furthermore, if these problems are competency-rich, they show us the creativity and intuition that the students can have if we do not delimit them, since they are open problems. In addition, they can also enhance the development of various forms or strategies, different levels of justifications (descriptive, explanatory, argumentative, etc.), the use of mathematical language, and the use of instruments such as GeoGebra, tables, spreadsheets, etc. [...]. Furthermore, that use of modelling, responding to a single purpose of showing that mathematics can be applied in very different situations, is also related to the student motivation, although not always, due to the simple fact that it is a contextualised situation, motivation will be greater for everyone (p. 31). – Contextualisation and interdisciplinary value: During the master's programme, we worked on the importance of highlighting to students the applications and functionalities of mathematical content so that they can contextualise them in real life and also relate it to other subjects. My education and profession related to the scientific field has made me see that mathematics is</p>

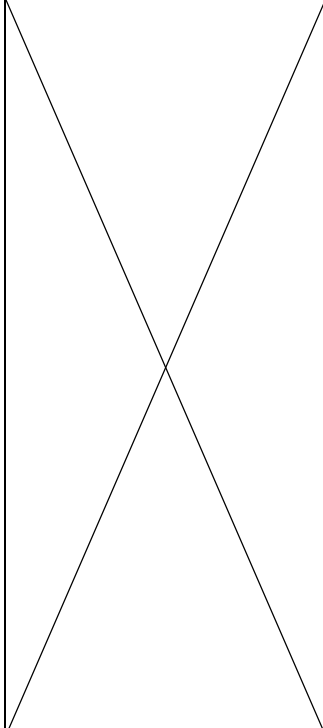
Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>relacionada amb l'àmbit científic, m'ha fet veure que la matemàtica és un instrument de modelització i de càlcul, però per implementar-ho a la docència, hauria de disposar de més eines i disposar de més experiència (p. 97).</p>	<p>las aplicaciones y funcionalidades del contenido matemático para que puedan contextualizarlas en la vida real y, también, relacionarla con otras asignaturas. Mi formación y profesión relacionada con el ámbito científico me ha hecho ver que la matemática es el instrumento de modelización y de cálculo, pero para implementarlo en la docencia, debería disponer de más herramientas y mayor experiencia (p. 97).</p>	<p>an instrument of modelling and calculation, but to implement it in teaching, I should have more tools and greater experience (p. 97).</p>
TFM/MFP #066			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Per altra banda, als enunciats de l'examen vaig proposar un problema contextualitzat amb la vida real que permetia una doble interpretació, és a dir, era possible obtenir dues situacions diferents amb el mateix enunciat (p. 4). [IE2] – Una altra competència molt important és la de modelar. Aquesta competència ha estat clau a l'hora de resoldre problemes contextualitzats, on l'alumnat ha hagut de traduir situacions reals a un model matemàtic (normalment, utilitzant triangles rectangles o obliquangles). També, a la sortida que van fer al final de la unitat per prendre mesures i calcular alçades indirectament, l'alumnat va haver d'entendre i plantejar els models per portar-los a la realitat. [...]. D'aquesta manera, l'alumnat va haver de fer un primer pas d'esquematzació per a plantejar el problema i fer el model amb triangles rectangles. [...]. Respecte a la competència de</p>	<p>– Por otra parte, en los enunciados del examen, propuse un problema contextualizado en la vida real que permitía una doble interpretación, es decir, era posible obtener dos situaciones distintas con el mismo enunciado (p. 4). [IE2] – Otra competencia muy importante es la de modelizar. Esta competencia fue clave a la hora de resolver problemas contextualizados, donde los estudiantes tuvieron que traducir situaciones reales a un modelo matemático (normalmente, utilizando triángulos rectángulos u oblicuángulos). También, en la salida que realizaron al final de la unidad para tomar medidas y calcular alturas indirectamente, los estudiantes tuvieron que entender y plantear los modelos para llevarlos a la realidad. [...]. De este modo, los estudiantes tuvieron que dar un primer paso de esquematización para plantear un problema y realizar el modelo con triángulos rectángulos.</p>	<p>– On the other hand, in the exam statements, I proposed a problem contextualised in real life that allowed a double interpretation, that is, it was possible to obtain two different situations with the same wording (p. 4). [ES2] – Another very important competency is modelling. This competency was key when solving contextualised problems, where the students had to translate real situations into a mathematical model (normally, using right or oblique triangles). Also, in the outing they did at the end of the unit to take measurements and calculate heights indirectly, the students had to understand and propose the models to bring them to reality. [...]. In this way, the students had to take a first step of schematisation to pose a problem and make the model with right triangles. [...]. Regarding the competency of posing and solving problems, one of the objectives of the didactic unit was to</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	plantejar i resoldre problemes, un dels objectius de la unitat didàctica era entendre les raons trigonomètriques i fer-les servir com a eina per a la resolució de triangles rectangles i, posteriorment, fer servir aquesta per la resolució de triangles obliquangles. Tot i això, els problemes i activitats plantejats no eren molt complexos i no incitaven a la reflexió per part de l'alumnat (p. 6). [IE3]	[...]. Respecto a la competencia de plantear y resolver problemas, uno de los objetivos de la unidad didáctica era entender las razones trigonométricas y utilizarlas como herramienta para la resolución de triángulos rectángulos y, posteriormente, utilizarlas para la resolución de triángulos oblicuángulos. Sin embargo, los problemas y actividades planteados no eran muy complejos y no incitaban a la reflexión por parte de los estudiantes (p. 6). [IE3]	understand trigonometric ratios and use them as a tool for solving right-angled triangles and, subsequently, using them to solve oblique triangles. However, the problems and activities posed were not very complex and did not encourage reflection on the part of the students (p. 6). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– De cara al redissenyi, la unitat es podria relacionar significativament amb la història de la matemàtica, com a context intramatemàtic, per contextualitzar exemples. Respecte al context extramatemàtic, es podria relacionar amb l'àrea de la tecnologia mitjançant la construcció del goniòmetre pel redissenyi de l'activitat competencial (p. 19). [IEc2]	– De cara al rediseño, la unidad podría relacionarse significativamente con la historia de la matemática, como contexto intramatemático, para contextualizar ejemplos. Con respecto al contexto extra-matemático, podría relacionarse con el área de la tecnología mediante la construcción del goniómetro para el rediseño de la actividad competencial (p. 19). [IEc2]	– In view of the redesign, the unit could be significantly related to the history of mathematics, as an intra-mathematical context, to contextualise examples. Regarding the extra-mathematical context, it could be related to the area of technology through the construction of the goniometer for the redesign of the competency activity (p. 19). [EcS2]
Otros Others	– D'aquesta manera vam relacionar les raons trigonomètriques amb la resolució de triangles rectangles, la qual vam treballar pròpiament amb triangles rectangles i també amb problemes contextualitzats (p. 3). – Pel que fa a la redacció de l'informe, com que l'alumnat ja hauria tocat	– De este modo, relacionamos las razones trigonométricas con la resolución de triángulos rectángulos, los cuales trabajamos con triángulos rectángulos y con problemas contextualizados (p. 3). – En cuanto a la redacción del informe, dado que los estudiantes ya habrían	– In this way, we relate trigonometric ratios with the solving of right triangles, which we worked with right triangles and with contextualised problems (p. 3). – Regarding the writing of the report, given that the students would have already used GeoGebra to some extent with the

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>alguna cosa de GeoGebra amb l'activitat a l'aula, afegiria incloure al dossier el model matemàtic (triangle rectangle amb diferents dades) creant el triangle amb GeoGebra. D'aquesta manera, l'alumnat podria treballar una mica més el procés de modelar i les eines TAC, com són els applets de GeoGebra (p. 24). – Contextualització i valor interdisciplinari: Per la formació anterior i la realització de classes particulars, abans d'entrar al màster era capaç de reconèixer continguts matemàtics en altres àrees i assignatures. Després del màster, he après la importància de contextualitzar els continguts matemàtics i, en la mesura que ha estat possible, he intentat explicar els continguts amb la seva posterior contextualització (p. 29).</p>	<p>usado algo el GeoGebra con la actividad en el aula, añadiría incluir en el dossier el modelo matemático (triángulo rectángulo con diferentes datos) creando el triángulo con GeoGebra. De esta forma, los estudiantes podrían trabajar un poco más el proceso de modelizar y las herramientas TAC, como son los applets de GeoGebra (p. 24). – Contextualización y valor interdisciplinario: Por la formación anterior y la realización de clases particulares, antes de entrar al máster, era capaz de reconocer contenidos matemáticos en otras áreas y asignaturas. Después del máster, he aprendido la importancia de contextualizar los contenidos matemáticos y, en la medida de lo posible, he intentado explicar los contenidos con su posterior contextualización (p. 29).</p>	<p>classroom activity, I would add to include the mathematical model in the dossier (right triangle with different data) creating the triangle with GeoGebra. In this way, the students could work a little more on the modelling process and the LKT tools, such as the GeoGebra applets (p. 24). – Contextualisation and interdisciplinary value: Due to previous education and private lessons, before starting the master's programme, I was able to recognise mathematical contents in other areas and subjects. After the master's programme, I have learned the importance of contextualising mathematical contents and, as far as possible, I have tried to explain the contents with their subsequent contextualisation (p. 29).</p>
TFM/MFP #068			
<p>Epistémico Epistemic</p>		<p>– Formulación y modelización: De nuevo son procesos que se han trabajado dentro de los problemas contextualizados de optimización que han sido aquellos que permitían el desarrollo de estos procedimientos. Contextualización: Se ha introducido un hilo conductor durante toda la unidad que permitiera dar un sentido a los problemas propuestos y añadir un contexto al trabajo en el plano bidimensional en el que se trabajaba con las inecuaciones de dos variables. Resolución de problemas: De nuevo, este trabajo ha sido llevado a cabo dentro de estas</p>	<p>– Formulation and modelling: Again, these are processes that have been worked within the contextualised optimisation problems, which have been those that allowed the development of these procedures. Contextualisation: A common thread has been introduced throughout the unit that allowed giving meaning to the proposed problems and adding a context to the work in the two-dimensional plan in which the inequalities of two variables were worked on. Problem solving: Again, this work has been carried out within these sessions in which optimisation problems</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		<p>sesiones en las que se ha trabajado con problemas de optimización, pero cabe destacar que su resolución no ha permitida la exploración de distintas manera y estrategias, sino que han sido resoluciones bastante pautadas (p. 15). [IE3] – De igual manera, los problemas en los que se ha trabajado en su modelización mediante inequaciones han quedado restringidos a problemas de dos variables y de soluciones enteras (positivas). La falta de ejemplos contextualizados con soluciones en los números reales podría implicar que el alumnado concluya que no existen tales problemas. Se incluyen en la propuesta de mejora una modificación en las actividades de modelización para evitar esta problemática (p. 14). [IE4]</p>	<p>have been worked on, but it should be noted that their solving has not allowed the exploration of different ways and strategies, but rather they have been fairly patterned resolutions (p. 15). [ES3] – Likewise, the problems that have been modelled using inequalities have been restricted to problems with two variables and integer (positive) solutions. The lack of contextualised examples with solutions in real numbers could mean that the students conclude that such problems do not exist. A modification in the modelling activities is included in the improvement proposal to avoid this problem (p. 14). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive		<p>– Por último, el proceso de modelización de problemas reales es otro proceso de alta complejidad que ha sido trabajado durante esta UD (p. 19). Alta demanda cognitiva: Se trata de UD en la que se tratan procesos relevantes como el continuo cambio de representación o la modelización (p. 32). [IC4]</p>	<p>– Finally, the process of modelling real problems is another highly complex process that has been worked on during this DU (p. 19). High cognitive demand: This is a DU in which relevant processes, such as the continuous changes of representation or modelling, are addressed (p. 32). []</p>
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective		<p>– Se decidió enmarcar toda la unidad didáctica en el contexto de la exploración espacial y, más concretamente, en la exploración del planeta Marte, para así poder</p>	<p>– It was decided to frame the entire didactic unit in the context of space exploration and, more specifically, in the exploration of the planet Mars, in order to connect</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
 Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		<p>conectar los temas tratados con la llegada muy reciente de la misión Curiosity de la NASA. Por un lado, este hilo conductor permitía plantear problemas de optimización contextualizados en la necesidad de ajustar al extremo las cantidades de recursos que pueden tener cabida en las naves espaciales. [...]. Es además un contexto que requiere del trabajo colaborativo y a largo plazo para la consecución de cualquiera de los objetivos marcados, promoviendo valores de cooperación, trabajo en red y planificación, que son y serán importantes para el alumnado a lo largo de su vida (p. 26). Intereses y necesidades: Se ha planteado un contexto centrado en la exploración espacial buscando que fuera atractivo para el alumnado, pero esta decisión no se ha tomado basada en un conocimiento de los grupos clase en concreto (p. 33). [IA1]</p>	<p>the topics discussed with the very recent arrival of NASA's Curiosity mission. On one hand, this common thread allowed us to pose optimisation problems contextualised in the need to adjust to the extreme the amounts of resources that can be accommodated in spacecrafts. [...]. It is also a context that requires collaborative and long-term work to achieve any of the set objectives, promoting values of cooperation, networking, and planning, which are and will be important for students through their lives (p. 26). Interests and needs: A context focused on space exploration has been proposed, seeking to make it attractive to the students, but this decision has not been made based on knowledge of the specific class groups (p. 33). [AS1]</p>
Ecológico Ecological		<p>– Utilidad sociolaboral: No se ha realizado un esfuerzo por conectar el contenido con aplicaciones del entorno más cercano, sino que se ha optado por un contexto más global como la exploración espacial (p. 34). [IEc3] – Incorporación de nuevos tipos de contenidos matemáticos: Se ha desarrollado el bloque de contenidos sobre inecuaciones como herramientas que permiten modelar y resolver problemas de optimización lineal, contenidos que han sido previamente sólo tratados dentro del</p>	<p>– Social and labour usefulness: No effort has been made to connect the content with applications from the closest environment, but rather a more global context, such as space exploration, has been chosen (p. 34). [EcS3] – Incorporation of new types of mathematical contents: The block of contents on inequalities has been developed as tools that allow modelling and solving linear optimisation problems, contents that have previously only been addressed within</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		<p>Bachillerato o carreras universitarias. Presentación de matemáticas contextualizadas: Se ha buscado en todo momento dotar de un contexto a los contenidos presentados, especialmente a aquellos que consistían en problemas de optimización y de trabajo en el plano bidimensional (p. 29). [IEc4]</p>	<p>baccalaureate education or university careers. Presentation of contextualised mathematics: We have sought at all times to provide a context to the contents presented, especially those that consisted of optimisation and work problems in the two-dimensional plane (p. 29). [EcS4]</p>
<p>Otros Others</p>		<p>– Se ha decidido utilizar un tema general para toda la unidad centrado en la exploración del planeta Marte, tanto en su preparación como en la comunicación con misiones como la Curiosity, que se encuentra en la actualidad explorando este planeta. Se trataba de un hilo conductor que permitía dotar de un contexto a la mayoría de las actividades planteadas y ser a la vez atractivo para el alumnado. La exploración espacial es uno de los mayores retos de la humanidad, independientemente de nuestra condición, y permite estimular la creatividad y la curiosidad por la gran cantidad de cuestiones que plantea. Además, es un proyecto que implica una planificación a muy largo plazo, requiriendo de modelos y cálculos extremadamente detallados y que pone en relevancia el papel de las matemáticas en un contexto práctico (p. 9). – Evaluación de un problema competencial contextualizado: [...]. Es el problema con el que se iniciaba la unidad didáctica ampliado de forma que el alumnado</p>	<p>– It has been decided to use a general topic for the entire unit focused on the exploration of the planet Mars, both in its presentation and in communication with missions such as Curiosity, which is currently exploring this planet. It was a common thread that allowed most of the proposed activities to be provided with a context and, at the same time, be attractive to the students. Space exploration is one of the greatest challenges for humanity, regardless of our condition, and allows us to stimulate creativity and curiosity due to the large number of questions it raises. Furthermore, it is a project that involves very long-term planning, requiring extremely detailed models and calculations and that highlights the role of mathematics in a practical context (p. 9). – Evaluation of a contextualised competency problem: [...]. It is the problem with which the didactic unit began, expanded so that the students use the tools seen in the DU for their modelling through inequalities and their subsequent graphical</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		<p>utilice las herramientas vistas en la UD para su modelado mediante inecuaciones y su posterior resolución gráfica e interpretación. [...]. Prueba individual: [...]. Se trata de una prueba que permite evaluar las capacidades del alumnado para el manejo de las expresiones algebraicas, resolución de sistemas de una y dos variables, además, y el modelado de restricciones más básicas (p. 39).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinar: Era consciente y utilizaba estos contextos, pero en el máster he aprendido a fomentar que los alumnos participen de este proceso de modelado (p. 43).</p> <p>– Se exploran así por primera vez conceptos tales como la existencia de múltiples soluciones factibles, el modelado de las restricciones previo a ser capaz de expresarse con inecuaciones y las ideas de interdependencia de variables, claves todas en la unidad (p. 80).</p>	<p>solving and interpretation. [...]. Individual text: [...]. It is a text that allows evaluating the students' capacities to handle algebraic expressions, solve systems of one and two variables, and the modelling of more basic restrictions (p. 39).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: I was aware of and used these contexts, but in the master's programme, I have learned to encourage students to participate in this modelling process (p. 43).</p> <p>– Concepts, such as the existence of multiple feasible solutions, the modelling of restrictions prior to being able to express themselves with inequalities and the ideas of interdependence of variables, all key to the unit, are thus explored for the first time (p. 80).</p>
TFM/MFP #069			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Plantejar i resoldre problemes: Comprèn plantejar, formular i definir diferents tipus de problemes matemàtics i resoldre diversos tipus de problemes utilitzant una varietat de mètodes. [...]. Modelar: Inclou estructurar la situació que s'ha de modelar; traduir la "realitat" a una estructura matemàtica; treballar amb un model matemàtic; validar el model; reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i els seus resultats; comunicar-se de manera eficaç sobre el model i els</p>	<p>– Plantear y resolver problemas: Comprende plantear, formular, y definir distintos tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos. [...]. Modelizar: Incluye estructurar la situación a modelizar; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse de forma eficaz sobre el modelo y</p>	<p>– Posing and solving problems: Includes posing, formulating, and defining different types of mathematical problems and solving various types of problems using a variety of methods. [...]. Modelling: Includes structuring the situation to be modelled; translating "reality" into a mathematical structure; working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing, and raising criticisms of a model and its results; communicating effectively</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	seus resultats (incloent-ne les limitacions); i monitoritzar i controlar el procés de modelatge. L'eix central de la UD és que els alumnes siguin capaços de fer models basats en la trigonometria i la semblança (p. 9). [IE3]	sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y monitorizar y controlar el proceso de modelización. El eje central de la UD es que los estudiantes sean capaces de realizar modelos basados en la trigonometría y la semejanza (p. 9). [IE3]	about the model and its results (including its limitations); and monitoring and controlling the modelling process. The central axis of the DU is that students are able to make models based on trigonometry and similarity (p. 9). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: S'han utilitzat a les classes contextos i situacions diverses en què s'usen els continguts del currículum. S'han realitzat models matemàtics a partir de contextos extramatemàtics aplicats a la classe (p. 24).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Se utilizaron en las clases contextos y situaciones diversas en las que se usan los contenidos del currículo. Se realizaron modelos matemáticos a partir de contextos extra-matemáticos aplicados en clase (p. 24).	– Contextualisation and interdisciplinary value: Various contexts and situations, in which the contents of the curriculum are used, were used in the lessons. Mathematical models were made from extra-mathematical contexts applied in class (p. 24)
TFM/MFP #073			
Epistémico Epistemic	– Contextualització-Resolució de problemes: Molts dels problemes que havien de resoldre els alumnes eren situacions reals, del context de la seva vida quotidiana [...]. D'aquesta manera els alumnes podien aplicar els conceptes trigonomètrics a casos pràctics que li són familiars. A més a més, vaig preparar una activitat de camp [...] en la qual els alumnes van haver de calcular distàncies desconegudes i inaccessibles (p. 6). Comunicació-Modelització: Els primers problemes contextualitzats que havien de resoldre portaven un dibuix il·lustratiu de la situació.	– Contextualización-Resolución de problemas: Muchos de los problemas que debían resolver los estudiantes eran situaciones reales, del contexto de su vida cotidiana [...]. De esta manera, los estudiantes podían aplicar los conceptos trigonométricos a casos prácticos que le son familiares. Además, preparé una actividad de campo [...] en la que los estudiantes tuvieron que calcular distancias desconocidas e inaccesibles (p. 6). Comunicación-Modelización: Los primeros problemas contextualizados que debían resolver llevaban	– Contextualisation-Problem solving: Many of the problems that the students had to solve were real situations, from the context of their daily lives [...]. In this way, the students could apply trigonometric concepts to practical cases with which they were familiar. Additionally, I prepared a field activity [...] in which the students had to calculate unknown and inaccessible distances (p. 6). Communication-Modelling: The first contextualised problems that they had to solve included a drawing illustrating the situation. Once more advanced in the DU [...], the problems

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>Un cop estava més avançada la UD [...], els problemes plantejats ja no hi tenien cap dibuix, sinó que eren els alumnes que havien d'entendre els textos matemàtics de l'enunciat dels problemes i fer-se ells mateixos els dibuixos, i a partir d'aquí fer el plantejament i la resolució del problema. Per tant, a banda de comunicació es pretenia la modelització, per tal que fossin capaços de traduir un problema o situació a un model matemàtic (expressió en llenguatge matemàtic o representació mitjançant esquema o dibuix). Va anar molt bé aquest procés perquè la majoria d'alumnes feia correctament la representació gràfica dels problemes (pp. 6-7). [IE3]</p> <p>– La Unitat inclou una mostra representativa de problemes, problemes de la vida real i contextualitzats, en el que s'han d'utilitzar tant sinus, cosinus com tangent per resoldre'ls (p. 7). [IE4]</p>	<p>un dibujo ilustrativo de la situación. Una vez más avanzada la UD [...], los problemas planteados ya no tenían ningún dibujo, sino que eran los estudiantes quienes debían entender los textos matemáticos del enunciado de los problemas, hacer ellos mismos el dibujo y, a partir de ahí, hacer el planteamiento y la resolución del problema. Por lo tanto, aparte de la comunicación, se pretendía la modelización, para que fueran capaces de traducir un problema o situación a un modelo matemático (expresión en lenguaje matemático o representación mediante esquema o dibujo). Este proceso estuvo muy bien porque la mayoría de los estudiantes hacía correctamente la representación gráfica de los problemas (pp. 6–7). [IE3]</p> <p>– La Unidad incluye una muestra representativa de problemas, problemas de la vida real y contextualizados, en los que deben utilizarse seno, coseno, y tangente para resolverlos (p. 7). [IE4]</p>	<p>posed no longed had any drawings, but rather it was the students who had to understand the wording of the problem, make the drawing themselves and, from there, make the approach and solving of the problem. Therefore, apart from communication, modelling was intended, so that they would be able to translate a problem or situation into a mathematical model (expression in mathematical language or representation through a diagram or drawing). This process was very good because most of the students correctly represented the problems graphically (pp. 6–7). [ES3]</p> <p>– The Unit includes a representative sample of problems, real-life and contextualised problems, in which sine, cosine, and tangent must be used to solve them (p. 7). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	<p>– Les activitats previstes a les diferents sessions eren variades, entretingudes, participatives. Els problemes plantejats es basaven en situacions de la vida real quotidiana, que els alumnes podien sentir properes (p. 17). [IA1]</p>	<p>– Las actividades previstas en las diferentes sesiones eran variadas, entretenidas, y participativas. Los problemas planteados se basaban en situaciones de la vida real cotidiana que los estudiantes podían sentir cercanas (p. 17). [IA1]</p>	<p>– The activities planned in the different sessions were varied, entertaining, and participatory. The problems posed were based on real everyday-life situations that the students could feel close to (p. 17). [AS1]</p>
Ecológico			

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
Ecological			
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Amb la realització del Màster he après la importància d'implementar matemàtiques contextualitzades, i he utilitzat situacions properes i quotidianes dels alumnes en les activitats de la UD (p. 26).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Con la realización del Máster, he aprendido la importancia de implementar una matemática contextualizada, y he utilizado situaciones cercanas y cotidianas de los estudiantes en las actividades de la UD (p. 26).	– Contextualisation and interdisciplinary value: With the completion of the master's programme, I have learned the importance of implementing contextualised mathematics, and I have used close and everyday situations of students in the activities of the DU (p. 26).
TFM/MFP #075			
Epistémico Epistemic	– Resolució de problemes: Vaig proposar diferents activitats de resolució de problemes [...] i intentava que es poguessin resoldre mitjançant diferents vies, incloent el màxim d'alumnes i punts de vista. [...]. Contextualització: Vaig intentar que els problemes a resoldre tinguessin un enunciat relacionat amb el món real i quotidià de l'alumnat. Tot i que alguns dels problemes complien aquest criteri, la majoria d'activitats estaven descontextualitzades [...] i de cara a un futur cal intentar dotar de context més problemes i activitats (p. 12). [IE3]	– Resolución de problemas: Propuse diferentes actividades de resolución de problemas [...] e intentaba que se pudieran resolver mediante diferentes vías, incluyendo a la mayoría de los estudiantes y sus puntos de vista. [...]. Contextualización: Intenté que los problemas a resolver tuvieran un enunciado relacionado con el mundo real y cotidiano de los estudiantes. Aunque algunos de los problemas cumplían este criterio, la mayoría de las actividades estaban descontextualizadas [...] y, de cara a un futuro, es necesario intentar dotar de contexto a más problemas y actividades (p. 12). [IE3]	– Problem solving: I proposed different problem-solving activities [...] and tried to ensure that they could be solved through different means, including the majority of the students and their points of view. [...]. Contextualisation: I tried to ensure that the problems to be solved had a wording related to the real, everyday world of the students. Although some of the problems met this criterion, most of the activities were decontextualised [...] and, in the future, it is necessary to try to provide context to more problems and activities (p. 12). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational	– Durant el transcurs de la unitat didàctica vaig fer servir principalment recursos informàtics (GeoGebra, Desmos, Transum...) tot i que en dues de les sessions de laboratori [...] vaig fer servir materials manipulatiu, que considero que van ajudar a crear situacions	– Durante el transcurso de la unidad didáctica, utilicé principalmente recursos informáticos (GeoGebra, Desmos, Transum, etc.), aunque en dos de las sesiones de laboratorio [...] utilicé materiales manipulativos, los cuales considero que ayudaron a crear situaciones de aprendizaje más	– During the course of the didactic unit, I mainly used computer resources (GeoGebra, Desmos, Transum, etc.), although in two of the laboratory sessions [...] I used manipulative materials, which I consider helped to create more contextualised learning situations than digital resources (where

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	d'aprenentatge més contextualitzades que no pas els recursos digitals (on algunes situacions proposades no pertanyien al dia a dia de l'alumnat). Tot i que vaig intentar dotar d'un context familiar per l'alumnat els conceptes i procediments a treballar, no sempre ho vaig aconseguir (p. 16). [IM1]	contextualizadas que los recursos digitales (donde algunas situaciones propuestas no pertenecían al día a día de los estudiantes). Aunque intenté dotar los conceptos y procedimientos a trabajar de un contexto familiar para los estudiantes, no siempre lo logré (p. 16). [IM1]	some proposed situations did not belong to the students' daily lives). Although I tried to provide the concepts and procedures to work with in a familiar context for the students, I did not always succeed (p. 16). [MS1]
Afectivo Affective	– Vaig intentar que les activitats motivessin a l'alumnat (i algunes d'elles ho van fer) n'hi ha algunes que es podrien haver millorat, contextualitzant-les en entorns més motivadors per l'alumnat. [...]. Per intentar que totes les activitats proposades interessin i enganxin al màxim d'alumnat possible he d'intentar estar més atent als seus gustos i preferències. Ara bé, he de tenir en compte que la contextualització que faci no deformi massa el model a estudiar, ja que la situació resultant pot ser que no despertí interès a l'alumnat. Tot i això, estic content ja que considero que les activitats, dins els contextos proposats [...], van servir a l'alumnat per veure que les matemàtiques estudiades tenen aplicacions reals i tangibles en el seu dia a dia (p. 14). [IA1]	– Intenté que las actividades motivaran a los estudiantes (y algunas de ellas lo hicieron), hay algunas que podrían haberse mejorado, contextualizándolas en entornos más motivadores para los estudiantes. [...]. Para intentar que todas las actividades propuestas interesen y enganchen al máximo de estudiantes posible, debo intentar estar más atento a sus gustos y preferencias. Ahora bien, debo tener en cuenta que la contextualización que haga no deforme demasiado el modelo a estudiar, ya que la situación resultante pueda que no despierte interés en los estudiantes. Sin embargo, estoy contento, ya que considero que las actividades, dentro de los contextos propuestos [...], sirvieron a los estudiantes para ver que la matemática estudiada tiene aplicaciones reales y tangibles en su día a día (p. 14). [IA1]	– I tried to make the activities motivate the students (and some of them did), there are some that could have been improved, contextualising them in more motivating environments for the students. [...]. To try to ensure that all the proposed activities interest and engage as many students as possible, I must try to be more attentive to their likes and preferences. Now, I must take into account that the contextualisation I do does not deform the model to be studied too much, since the resulting situation may not arouse interest in the students. However, I am happy, since I consider that the activities, within the proposed contexts [...], helped the students to see that the mathematics studied has real and tangible applications in their daily lives (p. 14). [AS1]
Ecológico Ecological	– Amb l'activitat L3, on l'alumnat havia de calcular la tarifa telefònica més justa vaig intentar fomentar una matemàtica crítica, que servís per resoldre problemes reals. Ara bé, al final els vaig demanar que reflexionessin sobre si era tant senzill com ho havíem	– Con la actividad L3, donde los estudiantes debían calcular la tarifa telefónica más justa, intenté fomentar una matemática crítica que sirviera para resolver problemas reales. Ahora bien, al final les pedí que reflexionaran sobre si era tan sencillo como lo	– With activity L3, where the students had to calculate the fairest telephone rate, I tried to encourage critical mathematics that could be used to solve real problems. Now, at the end, I asked them to reflect on whether it was as simple as we had modelled it or if

Anexo 6: Comentaris Evaluatius Analitzats en el Tercer Article
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>modelitzat o hi havia altres factors a tenir en compte (tarifes de dades, SMS, segons línies...) i si tot era quantificable de forma universal (quant estem disposats a pagar per tenir una bona cobertura? I per una bona atenció al client? Si el teu oncle treballa en una companyia concreta, influeix?). La majoria de l'alumnat va respondre positivament a la reflexió proposada per aquesta activitat, proposant multituds d'aspectes a tenir en compte (p. 17). [IEc3]</p>	<p>habíamos modelizado o si había otros factores a tener en cuenta (tarifas de datos, SMS, segundas líneas, etc.), y si todo era cuantificable de forma universal (¿cuánto estamos dispuestos a pagar por tener una buena cobertura?, ¿y por una buena atención al cliente?, ¿influye si tu tío trabaja en una compañía concreta?). La mayoría de los estudiantes respondió positivamente a la reflexión propuesta por esta actividad, proponiendo multitudes de aspectos para tener en cuenta (p. 17). [IEc3]</p>	<p>there were other factors to take into account (data rates, SMS, second lines, etc.), and if everything was universally quantifiable (How much are we willing to pay to have good coverage? And for good customer service? Does it matter if your uncle works for a specific company?). Most of the students responded positively to the reflection proposed by this activity, proposing multitudes of aspects to take into account (p. 17). [Ecs3]</p>
Otros Others	<p>– Vaig proposar barrejar activitats contextualitzades (les més extenses de les quals es fan durant els laboratoris) i activitats més curtes, de caire reproductiu, sense tant context, mitjançant eines digitals (a las classes de 50 minuts) (p. 2). – La millor oferta de telefonia (pp. 39–40).</p>	<p>– Propuse mezclar actividades contextualizadas (las más extensas de las que se realizan durante los laboratorios) y actividades más cortas, de tipo reproductivo, sin tanto contexto, mediante herramientas digitales (en las clases de 50 minutos) (p. 2). – La mejor oferta de telefonía (pp. 39–40).</p>	<p>– I proposed mixing contextualised activities (the most extensive of those carried out during the laboratories) and shorter, reproductive-type activities, without much context, using digital tools (in the 50-minute lessons) (p. 2). – The best telephone offer (pp. 39–40).</p>
TFM/MFP #076			
Epistémico Epistemic	<p>– En tercer lloc, el plantejament i resolució de problemes a través de la modelització ha esdevingut una part primordial en el temari de funcions. D'acord amb algun dels problemes que es proposaven en la unitat didàctica referent a la modelització del volum de una caixa, on es valorava positivament l'estructura i ordre de resolució previ a l'activitat, com podia ser una representació gràfica senzilla o la construcció del model en paper. Cal destacar que aquest tipus d'activitat va ser molt</p>	<p>– En tercer lugar, el planteamiento y resolución de problemas a través de la modelización, se convirtió en una parte primordial en el temario de funciones. De acuerdo con algunos de los problemas que se proponían en la unidad didáctica, en lo referente a la modelización del volumen de una caja, donde se valoraba positivamente la estructura y orden de resolución previo a la actividad, como podía ser una representación gráfica sencilla o la construcción del modelo en papel. Cabe</p>	<p>– Thirdly, the posing and solving of problems through modelling became a fundamental part of the syllabus of functions. In accordance with some of the problems that were proposed in the didactic unit, in relation to the modelling of the volume of a box, where the structure and order of solving prior to the activity was positively valued, such as a simple graphical representation or construction of the paper model. It should be noted that this type of activity was very motivating, but,</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	motivadora, però que a la vegada d'acord amb les dinàmiques positives que es van generar a l'aula, va requerir d'un major temps de les que s'havia programat (p. 8). [IE3]	destacar que este tipo de actividad fue muy motivadora, pero que, a su vez, de acuerdo con las dinámicas positivas que se generaron en el aula, requirió un mayor tiempo del que se había programado (p. 8). [IE3]	at the same time, according to the positive dynamics that were generated in the classroom, it required more time than had been scheduled (p. 8). [ES3]
Cognitivo Cognitive	– La unitat didàctica parteix d'un objectiu formador on es dona especial importància a les activitats que incentiven a la construcció del coneixement a través del raonament. En aquest sentit, s'ofereixen problemes de modelització on l'alumnat pugui experimentar, temptejar i realitzar conjetures sobre un problema matemàtic. A més es busca un ordre i planificació en les estratègies de resolució, on es discuteixen i valoren propostes que permetin generar bones preguntes (p. 12). [IC3]	– La unidad didáctica parte de un objetivo formador, en el que se da especial importancia a las actividades que incentivan la construcción del conocimiento a través del razonamiento. En este sentido, se ofrecen problemas de modelización en los que los estudiantes puedan experimentar, tantear, y realizar conjeturas sobre un problema matemático. Además, se busca un orden y planificación en las estrategias de resolución, donde se discuten y valoran propuestas que permitan generar buenas preguntas (p. 12). [IC3]	– The didactic unit is based on a training objective, in which special importance is given to activities that encourage the construction of knowledge through reasoning. In this sense, modelling problems are offered in which the students can experiment, test, and make conjectures about a mathematical problem. In addition, order and planning are sought in the solving strategies, where proposals that allow good questions to be generated are discussed and evaluated (p. 12). [CS3]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– El contingut d'aquesta unitat didàctica permetia establir grans vincles entre la matemàtics i la contextualització d'aquesta en la vida quotidiana. En aquest sentit es va aprofitar al màxim que els exemples proposats a l'aula no es centressin exclusivament en la resolució de sistemes o en l'estudi de funcions. [...]. Penso que els problemes d'optimització son una oportunitat per modelitzar problemes en una situació real. En pocs àmbits de les matemàtiques es té una	– El contenido de esta unidad didáctica permitía establecer grandes vínculos entre la matemática y su contextualización en la vida cotidiana. En este sentido, se aprovechó al máximo que los ejemplos propuestos en el aula no se centraran exclusivamente en la resolución de sistemas o en el estudio de funciones. [...]. Creo que los problemas de optimización son una oportunidad para modelizar problemas en una situación real. En	– The content of this didactic unit allows for establishing great links between mathematics and its contextualisation in everyday life. In this sense, maximum advantage was taken of the fact that the examples proposed in the classroom did not focus exclusively on the solving of systems or the study of functions. [...]. I believe that optimisation problems are an opportunity to model problems in a real situation. In few areas of mathematics there is such a clear opportunity to show

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>oportunitat tant clara de mostrar la potència dels mètodes matemàtics. Tot i que les derivades estan fora del currículum de 4rt d'ESO, vaig aprofitar el problema de modelització de la caixa, per maximitzar el seu volum a través de GeoGebra (p. 18). [IEc3]</p>	<p>pocos ámbitos de la matemática se tiene una oportunidad tan clara de mostrar la potencia de los métodos matemáticos. Aunque las derivadas están fuera del currículo de 4º de ESO, aproveché el problema de modelización de la caja para maximizar su volumen a través de GeoGebra (p. 18). [IEc3]</p>	<p>the power of mathematical methods. Although derivatives are outside the 4th CSE curriculum, I took advantage of the problem about modelling a box to maximise its volume through GeoGebra (p. 18). [IEc3]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– L'estudi de les funcions es un dels pilars en les matemàtiques actuals, i es que l'objecte matemàtic en qüestió permet relacionar i escriure en llenguatge matemàtic la relació present entre dues magnituds diferents. Aquest fet, converteix a les funcions en una eina matemàtica indispensable per construir models que permetin expressar moltes de les situacions que es presenten a la nostra vida quotidiana. [...]. A més, de conèixer i saber interpretar els canvis que es presenten entre dues dependències funcionals, aprendrem a resoldre problemes plantejats per a diferents contextos (p. 1). – Modelització: Traduir el context d'un problema i expressar-lo de forma algebraica d'acord amb els models de funció estudiats (p. 4). – Resolució de problemes (pp. 22–23). – Contextualització i valor interdisciplinari: S'han pogut connectar l'aplicació de les matemàtiques en diferents contextos i situacions, que a més s'han pogut dur a l'aula. El mòdul de modelització en l'assignatura d'ensenyament i aprenentatge ha permès la revisió de models matemàtics a través de</p>	<p>– El estudio de las funciones es uno de los pilares de la matemática actual, y es que este objeto matemático permite relacionar y escribir, en lenguaje matemático, la relación entre dos magnitudes distintas. Este hecho convierte a las funciones en una herramienta matemática indispensable para construir modelos que permitan expresar muchas de las situaciones que se presentan en nuestra vida cotidiana. [...]. Además de conocer y saber interpretar los cambios que se presentan entre dos dependencias funcionales, aprenderemos a resolver problemas planteados para diferentes contextos (p. 1). – Modelización: Traducir el contexto de un problema y expresarlo de forma algebraica de acuerdo con los modelos de función estudiados (p. 4). – Resolución de problemas (pp. 22–23). – Contextualización y valor interdisciplinario: Se pudo conectar la aplicación de la matemática en distintos contextos y situaciones que, además, se pudieron llevar al aula. El módulo de modelización, en la asignatura de enseñanza y aprendizaje, permitió la revisión de modelos</p>	<p>– The study of functions is one of the pillars of current mathematics, and this mathematical object allows us to relate and write, in mathematical language, the relationship between two different magnitudes. This fact makes functions an indispensable mathematical tool for building models that allow us to express many of the situations that arise in our daily lives. [...]. In addition to knowing how to interpret the changes that occur between two functional dependencies, we will learn to solve problems posed for different contexts (p. 1). – Modelling: Translating the context of a problem and expressing it algebraically according to the function models studies (p. 4). – Problem solving (pp. 22–23). – Contextualisation and interdisciplinary value: It was possible to connect the application of mathematics in different contexts and situations that, in addition, could be brought to the classroom. The modelling module, in the teaching and learning subject, allowed the review of mathematical models through different construction processes (p. 26).</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	diferents processos de construcció (p. 26). – Construïm una caixa per a reduir el consum del plàstic (pp. 40–46).	matemáticos a través de distintos procesos de construcción (p. 26). – Construimos una caja para reducir el consumo de plástico (pp. 40–46).	– We built a box to reduce plastic consumption (pp. 40–46).
TFM/MFP #077			
Epistémico Epistemic	– Contextualització: Les activitats estan enfocades al món real i a la vida quotidiana. S’han plantejat activitats enfocades al món real, com poden ser trobar les probabilitats al llençar daus o la probabilitat de guanyar a determinats jocs (p. 9). Resolució de problemes: Donar solució a problemes matemàtics mitjançant diverses resolucions. Els alumnes han resolt problemes que es podrien resoldre amb la regla de Laplace o amb un diagrama d’arbre. [...]. Modelització: Elaborar un model que representi o descriuï un fenomen, objecte o procés de la realitat. S’ha treballat el diagrama d’arbre com a model de resolució dels problemes i a les activitats (p. 10). [IE3].	– Contextualización: Las actividades están enfocadas al mundo real y a la vida cotidiana. Se plantearon actividades enfocadas al mundo real, como pueden ser encontrar las probabilidades al lanzar dados o la probabilidad de ganar en determinados juegos (p. 9). Resolución de problemas: Dar solución a problemas matemáticos mediante diversas resoluciones. Los estudiantes resolvieron problemas que podían resolverse con la regla de Laplace o con un diagrama de árbol. [...]. Modelización: Elaborar un modelo que represente o describa un fenómeno, objeto, o proceso de la realidad. Se trabajó el diagrama de árbol como modelo de resolución de los problemas y actividades (p. 10). [IE3]	– Contextualisation: The activities are focused on the real world and everyday life. Activities focused on the real world were proposed, such as finding the probabilities when throwing dice or the probability of winning in certain games (p. 9). Problem solving: Providing solutions to mathematical problems through various solving procedures. The students solved problems that could be solved with Laplace’s rule or a tree diagram. [...]. Modelling: Developing a model that represents or describes a phenomenon, object, or process of reality. The tree diagram was worked on as a model for solving problems and activities (p. 10). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Idoneïtat epistèmica: [...]. També es podria millorar la unitat, utilitzant altres mirades com el significat subjectiu, potser amb problemes més contextualitzats com per exemple, els diagnòstics mèdics o les decisions en economia (p. 21).	– Idoneidad epistémica: [...]. También podría mejorarse la unidad utilizando otras miradas, como el significado subjetivo, quizás con problemas más contextualizados como, por ejemplo, los diagnósticos médicos o las	– Epistemic suitability: [...]. The unit could also be improved by using other perspectives, such as subjective meaning, perhaps with more contextualised problems such as, for example, medical diagnoses or

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>– Problemes nous: Per millorar la idoneïtat ecològica, es faran problemes més contextualitzats i adaptats a la vessant sociolaboral. En paral·lel també millorarà la idoneïtat emocional al aconseguir motivar més als alumnes, al fer problemes més relacionats amb el món real i la idoneïtat ecològica al millorar la seva utilitat sociolaboral. [...]. L'atzar i la incertesa estan molt presents al nostre entorn, la probabilitat s'utilitza en diferents contextos de la vida quotidiana i professional (p. 25).</p> <p>– Les matemàtiques s'han de contextualitzar al món real, per fer-les més properes e interessants als alumnes i s'han d'intentar connectar amb altres assignatures (p. 33).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: El màster m'ha fet veure la importància de contextualitzar les matemàtiques i de relacionar-les amb altres matèries (p. 34).</p> <p>– Annex V: Nous problemes (p. 69).</p>	<p>decisiones en economía (p. 21).</p> <p>– Problemas nuevos: Para mejorar la idoneidad ecológica, se realizarán problemas más contextualizados y adaptados a la vertiente sociolaboral. En paralelo, también mejorará la idoneidad afectiva, al conseguir motivar más a los estudiantes, al realizar problemas más relacionados con el mundo real, y la idoneidad ecológica, al mejorar su utilidad sociolaboral. [...]. El azar y la incertidumbre están muy presentes en nuestro entorno, cuya probabilidad se utiliza en diferentes contextos de la vida cotidiana y profesional (p. 25).</p> <p>– La matemática debe contextualizarse en el mundo real para hacerla más cercana e interesante para los estudiantes y debe intentar conectarse con otras asignaturas (p. 33).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: El máster me ha mostrado la importancia de contextualizar la matemática y de relacionarla con otras materias (p. 34).</p> <p>– Anexo V: Nuevos problemas (p. 96).</p>	<p>decisions in economics (p. 21).</p> <p>– New problems: To improve ecological suitability, more contextualised problems will be made and adapted to the social and labour aspect, In parallel, affective suitability will also improve, by motivating the students more, by solving problems more related to the real world, and ecological suitability, by improving their social and labour usefulness. [...]. Chance and uncertainty are very present in our environment, whose probability is used in different contexts of daily and professional life (p. 25).</p> <p>– Mathematics must be contextualised in the real world to make it closer and more interesting to students and must try to be related to other subjects (p. 33).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: The master's programme has shown me the importance of contextualising mathematics and relating it to other subjects (p. 34).</p> <p>– Annex V: New problems (p. 96).</p>
TFM/MFP #087			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Resolució de problemes: Procés de donar solució a problemes matemàtics mitjançant diverses resolucions. Els alumnes van resoldre molts dels problemes del Dossier d'activitats de la UD, alguns els van arribar a fer tots. Van haver d'aplicar diversos mètodes diferents de resolució (p. 6). Contextualització: Procés d'utilitzar exemples reals</p>	<p>– Resolución de problemas: Proceso de dar solución a problemas matemáticos mediante diversas resoluciones. Los estudiantes resolvieron muchos de los problemas del Dossier de actividades de la UD, algunos llegaron a hacerlos todos. Debieron aplicar varios métodos distintos de resolución (p. 6). Contextualización: Proceso de utilizar</p>	<p>– Problem solving: Process of providing solutions to mathematical problems through various solving procedures. The students solved many of the problems in the Activities Dossier of the DU, some were able to solve them all. They had to apply several different solving methods (p. 6). Contextualisation: Process of using real examples in</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>en la resolució de problemes i explicació de conceptes matemàtics. Present a l'activitat de trobar la llargada i l'amplada del Canal Olímpic de Catalunya a Castelldefels. [...]. Modelització: Procés de elaborar un model que representi o descrigui adequadament (un fenomen, un objecte o un procés de la realitat). Per exemple, la semblança de triangles modela el “zoom” que fan els alumnes contínuament al mòbil (p. 7). [IE3]</p>	<p>ejemplos reales en la resolución de problemas y explicación de conceptos matemáticos. Presente en la actividad de encontrar la longitud y la anchura del Canal Olímpico de Cataluña en Castelldefels. [...]. Modelización: Proceso de elaborar un modelo que represente o describa adecuadamente un fenómeno, un objeto, o un proceso de la realidad. Por ejemplo, la semejanza de triángulos modeliza el “zoom” que realizan los estudiantes continuamente en el teléfono móvil (p. 7). [IE3]</p>	<p>solving problems and explaining mathematical concepts. Present in the activity of finding the length and width of the Olympic Canal of Catalonia in Castelldefels. [...]. Modelling: Process of developing a model that adequately represents or describes a phenomenon, an object, or a process in reality. For example, the similarity of triangles models the zoom in/out that the students continuously perform on the mobile phone (p. 7). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational	<p>– S’analitza si les definicions i propietats són contextualitzades i motivades fent servir situacions i models concrets de visualitzacions, i sí, s’han contextualitzat els exercicis d’escalas [...]. També s’ha contextualitzat un problema on es treballava el Teorema de Tales i el de Pitàgores [...], modificant un problema qualsevol per adaptar-lo a un context d’una sèrie de Netflix (p. 14). [IM1]</p>	<p>– Se analiza si las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas utilizando situaciones y modelos concretos de visualizaciones, y si se contextualizaron los ejercicios de escalas [...]. También se contextualizó un problema en el que se trabajaba el teorema de Tales y el de Pitágoras [...], modificando un problema cualquiera para adaptarlo al contexto de una serie de Netflix (p. 14). [IM1]</p>	<p>– It is analysed whether the definitions and properties are contextualised and motivated using specific situations and visualisation models, and whether the scale exercises were contextualised [...]. A problem in which the Thales’ and Pythagorean theorems were worked on was also contextualised [...], modifying any problem to adapt it to the context of a Netflix series (p. 14). [MS1]</p>
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	<p>– Problema de l’incendi a l’hospital: [...]. Per aquest apartat seria interessant poder modelitzar amb GeoGebra el problema de l’escala de l’hospital (p. 19). – Contextualització i valor interdisciplinari: Durant el pràcticum és quan</p>	<p>– Problema del incendio en el hospital: [...]. Para este apartado sería interesante poder modelizar con GeoGebra el problema de la escala del hospital (p. 19). – Contextualización y valor interdisciplinario: Durante las prácticas es</p>	<p>– The fire in the hospital problem: [...]. For this section, it would be interesting to be able to model the problem of the hospital scale with GeoGebra (p. 19). – Contextualisation and interdisciplinary value: During the internship</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>realment considero que he pogut millorar la contextualització, és quan l'he pogut posar en pràctica i a més observar com les tasques contextualitzades acostumen a generar més interès en els alumnes i per tant m'he esforçat per intentar donar-li valor a les meves sessions (p. 23). – Problema de l'incendi a l'hospital (p. 97).</p>	<p>cuando realmente considero que pude mejorar la contextualización, es cuando la pude poner en práctica y, además, observar cómo las tareas contextualizadas suelen generar más interés en los estudiantes y, por lo tanto, me esforcé por intentar darle valor a mis sesiones (p. 23). – Problema del incendio en el hospital (p. 97).</p>	<p>period is when I really consider that I was able to improve contextualisation, it is when I was able to put it into practice and, in addition, observe how contextualised tasks usually generate more interest in the students and, therefore, I made an effort for trying to give value to my sessions (p. 23). – The fire in the hospital problem (p. 97).</p>
TFM/MFP #088			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Seguidament, modelar ha estat un procés significatiu sobretot en la segona unitat didàctica. Molts problemes del dossier de l'alumnat són situacions de la vida quotidiana. [...]. En quart lloc, sens dubte que plantejar i resoldre problemes ha estat una peça clau de tot el pràcticum. En la primera unitat, trobem problemes més geomètrics [...]. En la segona, els problemes ja eren més llargs, molt procedimentals i per altra banda, [...] els alumnes treballen un estil de problema completament diferent, més lúdic (p. 7). Modelar: Inclou estructurar la situació que es modela, traduir la realitat a una estructura matemàtica, treballar amb un model matemàtic, validar el model, reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i als seus resultats (p. 28). [IE3]</p>	<p>– Seguidamente, modelizar fue un proceso significativo, sobre todo, en la segunda unidad didáctica. Muchos problemas del dossier de los estudiantes son situaciones de la vida cotidiana. [...]. En cuarto lugar, sin duda alguna que plantear y resolver problemas fue una pieza clave de todo el periodo de prácticas. En la primera unidad encontramos problemas más geométricos [...]. En la segunda, los problemas ya eran más largos, muy procedimentales y, por otra parte, [...] los estudiantes trabajan un estilo de problema completamente diferente, más lúdico (p. 7). Modelizar: Incluye estructurar la situación que se modeliza, traducir la realidad a una estructura matemática, trabajar con un modelo matemático, validar el modelo, reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y a sus resultados (p. 28). [IE3]</p>	<p>– Next, modelling was a significant process, especially in the second didactic unit. Many problems in the students' dossier are situations from everyday life. [...]. Fourthly, without a doubt, posing and solving problems was a key part of the entire internship period. In the first unit, we find more geometric problems [...]. In the second unit, the problems were already longer, very procedural and, on the other hand, [...] the students worked on a completely different style of problem, more playful (p. 7). Modelling: Includes structuring the situation that is modelled, translating reality into a mathematical structure, working with a mathematical model, validating the model, reflecting, analysing, and raising criticisms of a model and its results (p. 28). [ES3]</p>
<p>Cognitivo Cognitive</p>	X	X	X
<p>Interaccional Interactional</p>	X	X	X
<p>Mediacional Mediational</p>	X	X	X

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
 Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Aquesta competència l’he potenciat gràcies als problemes de funcions lineals que es relacionaven amb situacions extra matemàtiques i quotidianes (p. 40).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Esta competencia la he potenciado gracias a los problemas de funciones lineales que se relacionaban con situaciones extra-matemáticas y cotidianas (p. 40).	– Contextualisation and interdisciplinary value: I have enhanced this competency thanks to the problems of linear functions that were related to extra-mathematical and everyday situations (p. 40).
TFM/MFP #094			
Epistémico Epistemic	– Modelització: En l’activitat “Modelització de la pandèmia”, tot i que a la pràctica va ser molt guiada. [...]. Resolució de problemes: Els problemes són força presents en tot el disseny original de la unitat didàctica. A la pràctica, no es van abordar. Sí que en va aparèixer uno a la prova final, i es podria discutir si això va ser una bona decisió (p. 9). [IE3]	– Modelización: En la actividad “Modelización de la pandemia”, aunque en la práctica fue muy guiada. [...]. Resolución de problemas: Los problemas están bastante presentes en todo el diseño original de la unidad didáctica. En la práctica, no se abordaron. Sí apareció uno en la prueba final, y podría discutirse si esto fue una buena decisión (p. 9). [IE3]	– Modelling: In the “Modelling of the pandemic” activity, although in practice it was very guided. [...]. Problem solving: The problems are quite present throughout the original design of the didactic unit. In practice, these problems were not addressed. One problem did appear in the final test, and it could be argued whether this was a good decision (p. 9). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational	– Finalment, cal mencionar que els alumnes també van aprofitar els seus ordinadors per fer algunes tasques, com ara les de l’Activitat “Modelització de la pandèmia” (p. 13). [IM1]	– Finalmente, cabe mencionar que los estudiantes también aprovecharon sus computadores para realizar algunas tareas, como las de la Actividad “Modelización de la pandemia” (p. 13). [IM1]	– Finally, it is worth mentioning that the students also took advantage of their computers to do some activities, such as those of the “Modelling of the pandemic” activity (p. 13). [MS1]
Afectivo Affective	– Algunes de les activitats incloses, com “Modelització de la pandèmia” [...], tenien una relació directa amb la realitat immediata dels alumnes. Creiem que això va ajudar-los a establir relacions entre els conceptes treballats i la vida quotidiana (p. 14). [IA1]	– Algunas de las actividades incluidas, como “Modelización de la pandemia” [...], tenían una relación directa con la realidad inmediata de los estudiantes. Creemos que esto les ayudó a establecer relaciones entre los conceptos trabajados y la vida cotidiana (p. 14). [IA1]	– Some of the activities included, such as “Modelling of the pandemic” [...], had a direct relationship with the immediate reality of the students. We believe that this helped them establish relationships between the concepts worked on and everyday life (p. 14). [AS1]

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
Ecológico Ecological	– En la implementació es van perdre la majoria de connexions interdisciplinaris, però es va conservar alguna connexió interdisciplinari rellevant (per exemple amb l'epidemiologia, a "Modelització de la pandèmia") (p. 15). [IEc2]	– En la implementación se perdió la mayoría de las conexiones interdisciplinarias, pero se conservó alguna conexión interdisciplinaria relevante (por ejemplo, con la epidemiología en la "Modelización de la pandemia") (p. 15). [IEc2]	– Most interdisciplinary connections were lost in the implementation, but some relevant interdisciplinary connections were preserved (for example, with epidemiology in the "Modelling of the pandemic" activity) (p. 15). [IEc2]
Otros Others	– La contextualització (justificada) de les matemàtiques juga doncs, al capdavall, un paper difícil de substituir (p. 18). – Contextualització i valor interdisciplinari: Tot i que apreciem algunes virtuts de la contextualització de les matemàtiques i de l'establiment de relacions amb altres disciplines, constatem que, ni el valor que els atorguem no deixa de ser força relatiu, ni hem après a fer-ho a plaer d'una manera que ens satisfaci. El que solem fer és aprofitar-nos de situacions més o menys fortuïtes en què les matemàtiques apareixen ja contextualitzades, tal com, sovint, els humans traïem de la natura el que no sabem fabricar nosaltres mateixos (p. 22). – Modelització de la pandèmia (pp. 36, 43).	– La contextualización (justificada) de la matemática juega, al fin y al cabo, un papel difícil de sustituir (p. 18). – Contextualización y valor interdisciplinario: Aunque apreciamos algunas virtudes de la contextualización de la matemática y del establecimiento de relaciones con otras disciplinas, constatamos que, ni el valor que les otorgamos deja de ser bastante relativo, ni hemos aprendido a hacerlo a placer de una forma que nos satisfaga. Lo que solemos hacer es aprovecharnos de situaciones más o menos fortuitas en las que la matemática aparece ya contextualizada, tal y como, a menudo, los humanos sacamos de la naturaleza lo que no sabemos fabricar nosotros mismos (p. 22). – Modelización de la pandemia (pp. 36, 43).	– The (justified) contextualisation of mathematics plays, after all, a role that is difficult to replace (p. 18). – Contextualisation and interdisciplinary value: Although we appreciate some virtues of the contextualisation of mathematics and the establishment of relationships with other disciplines, we note that neither the value we give them is quite relative, nor have we learned to do it at will in a way that satisfies us. What we usually do is take advantage of more or less fortuitous situations in which mathematics appears already contextualised, just as humans often take from nature what we do not know how to make ourselves (p. 22). – Modelling of the pandemic (pp. 36, 43).
TFM/MFP #098			
Epistémico Epistemic	– Modelització: La modelització juga un paper clau en el tema de la meua UD. En tot moment es fan canvis de representacions dels objectes amb els que ens trobem. Per exemple, de l'objecte real, a una representació 2D com podria ser un dibuix a una representació algebraica	– Modelización: La modelización juega un papel clave en el tema de mi UD. En todo momento se realizan cambios de representaciones de los objetos con los que nos encontramos. Por ejemplo, del objeto real a una representación 2D, como podría ser un dibujo, a una	– Modelling: Modelling plays a key role in the topic of my DU. At all times, changes are made to the representations of the objects which we found. For example, from a real object to a 2D representation, such as a drawing, to an algebraic representation of a

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	d'un problema. [...]. Resolució de problemes: Els alumnes es passaven la gran part del temps resolent problemes. Alguns d'aquests problemes estaven presentats de forma explícita i tradicional i alguns se'ls trobaven quan volien resoldre algun problema més gran (p. 7). [IE3]	representación algebraica de un problema. [...]. Resolución de problemas: Los estudiantes se pasaban la mayor parte del tiempo resolviendo problemas. Algunos de estos problemas estaban presentados de forma explícita y tradicional, y algunos se les encontraban cuando querían resolver algún problema mayor (p. 7). [IE3]	problem. [...]. Problem solving: The students spent most of their time solving problems. Some of these problems were presented in an explicit and traditional way, and some were encountered when they wanted to solve some larger problem (p. 7). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– En gairebé tot moment es busca treballant contextualitzadament, buscant la relació entre el món real i les matemàtiques amb l'objectiu de despertar els interessos dels alumnes i fer-los veure que entre altres coses, les matemàtiques poden ser una eina per ajudar-los a cobrir alguna necessitat que es puguin trobar (p. 14). [IA1]	– En casi todo momento se busca trabajando contextualmente, buscando la relación entre el mundo real y la matemática con el objetivo de despertar los intereses de los estudiantes y hacerles ver que, entre otras cosas, la matemática puede ser una herramienta para ayudarles a cubrir alguna necesidad que puedan encontrarse (p. 14). [IA1]	– At almost all times, we seek to work contextually, seeking the relationships between the real world and mathematics with the aim of awakening the interests of the students and making them see that, among other things, mathematics can be a tool to help them cover some need that may be found (p. 14). [AS1]
Ecológico Ecological	– A més, el fet de contextualitzar algun problema ha fet que els alumnes veiessin certes connexions existents entre les matemàtiques i altres assignatures de la seva etapa educativa com física o tecnologia [...]. Tot i tenir aquests exemples de connexions, crec que n' existeixen moltes més que no s'han arribat a expressar (p. 18). [IEc2] – En aquest àmbit no s'ha fet més que contextualitzar els problemes per reflectir el que potser es podrien trobar al món professional (p. 18). [IEc3]	– Además, el hecho de contextualizar algún problema hizo que los estudiantes vieran ciertas conexiones existentes entre la matemática y otras asignaturas de su etapa educativa, como física o tecnología [...]. A pesar de tener estos ejemplos de conexiones, creo que existen muchas más de las que se llegaron a expresar (p. 18). [IEc2] – En este ámbito, no se hizo más que contextualizar los problemas para reflejar lo que quizás podrían encontrarse en el mundo profesional (p. 18). [IEc3]	– Furthermore, the fact of contextualising a problem made the students see certain connections between mathematics and other subjects in their educational stage, such as physics and technology [...]. Despite having these examples of connections, I believe that there are many more than were expressed (p. 18). [EcS2] – In this area, nothing more than contextualise the problems was done to reflect what they could perhaps find in the professional world (p. 18). [EcS3]

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	– La UD està basada en la innovació didàctica, en forma d'activitats amb recursos manipulatiu, contextualitzats i treball cooperatiu (p. 18). [IEc4]	– La UD está basada en la innovación didáctica en forma de actividades con recursos manipulativos, contextualizados, y trabajo cooperativo (p. 18). [IEc4]	– The DU is based on didactic innovation in the form of activities with manipulative and contextualised resources, and collaborative work (p. 18). [EcS4]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Personalment sempre he valorat més les matemàtiques que són útils de forma immediata que les que són purament teòriques. És per això que he donat molt èmfasi a la contextualització i la modelització matemàtica. El màster ens ha donat eines per ampliar els mètodes per arribar a aquesta contextualització, sobretot des de l'assignatura d'Ensenyament i Aprenentatge (p. 27).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Personalmente, siempre he valorado más a la matemática que es útil de forma inmediata que a la que es puramente teórica. Por eso di mucho énfasis a la contextualización y la modelización matemática. El máster nos proporcionó herramientas para ampliar los métodos para llegar a esta contextualización, sobre todo, desde la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje (p. 27).	– Contextualisation and interdisciplinary value: Personally, I have always valued mathematics that is immediately useful more than that which is purely theoretical. That is why I gave a lot of emphasis to contextualisation and mathematical modelling. The master's programme provided us with tools to expand the methods to achieve this contextualisation, especially from the Teaching and Learning subject (p. 27).
TFM/MFP #099			
Epistémico Epistemic	– En tercer lloc, modelar ha esdevingut una altra peça clau en el desenvolupament de la unitat, especialment per tractar el teorema de Tales. L'activitat central es va dur a terme al pati on es van realitzar càlculs d'alçades d'objectes del pati a partir de la seva ombra. El fet de poder modelar escenaris quotidians o tangibles per les alumnes va ser molt motivador. En quart lloc, plantejar i resoldre problemes, per poder assolir els conceptes proposats es van proposar quatre sessions exclusivament de resolució de problemes. La principal intenció era presentar problemes amb escenaris diferents i particularitats diverses, però el ritme d'assoliment era tant dispers que es va haver de	– En tercer lugar, modelizar se convirtió en otra pieza clave para el desarrollo de la unidad, especialmente, para tratar el teorema de Tales. La actividad central se llevó a cabo en el patio, donde se realizaron cálculos de alturas de objetos del patio a partir de su sombra. El hecho de poder modelizar escenarios cotidianos o tangibles para los estudiantes fue muy motivador. En cuarto lugar, plantear y resolver problemas, para poder alcanzar los conceptos propuestos, se propusieron cuatro sesiones exclusivamente para la resolución de problemas. La principal intención era presentar problemas con escenarios diferentes y particularidades diversas, pero el ritmo de logro era tan disperso que hubo que	– Thirdly, modelling became another key piece for the development of the unit, especially to deal with Thales' theorem. The central activity took place in the schoolyard, where calculations of the heights of objects in the schoolyard were made from their shadows. The fact of being able to model every day or tangible scenarios for the students was very motivating. Fourthly, posing and solving problems, in order to achieve the proposed concepts, four sessions were proposed exclusively or problem solving. The main intention was to present problems with different scenarios and diverse particularities, but the pace of achievement was so dispersed that the difficulty had to be regulated to avoid

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	regular la dificultat per no generar ambigüitats. [...]. En cinquè lloc, contextualització, per descobrir el teorema de Tales, es van posar un escenari en context a la pissarra, on Tales calculava l'alçada de la piràmide de Keops. Aquest experiment teòric el vam traslladar al pati amb una cistella de bàsquet i posteriorment el van aplicar a un objecte que de forma lliure va triar cada grup. Per últim, la representació, s'han proposat problemes on havien de modelar un escenari de la vida real a un esquema representatiu per finalment traduir a una expressió algebraica (p. 11). [IE3]	regular la dificultad para no generar ambigüedades. [...]. En quinto lugar, contextualización, para descubrir el teorema de Tales, se propuso un escenario contextualizado en la pizarra, donde Tales calculaba a altura de la pirámide de Keops. Este experimento teórico lo trasladamos al patio con una cesta de baloncesto y, posteriormente, se aplicó a un objeto que, de forma libre, eligió cada grupo. Por último, la representación, se propusieron problemas en los que debían modelizar un escenario de la vida real a un esquema representativo para, finalmente, traducir a una expresión algebraica (p. 11). [IE3]	generating ambiguities. [...]. Fifthly, contextualisation, to discover Thales' theorem, a contextualised scenario was proposed on the blackboard, where Thales calculated the height of the Cheops' pyramid. We transferred this theoretical experiment to the schoolyard with a basketball basket and, later, it was applied to an object that each group freely chose. Finally, representation, problems were proposed in which they had to model a real-life scenario into a representative scheme to, finally, translate it into an algebraic expression (p. 11). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– Un dels objectius de la unitat didàctica és resoldre problemes de la vida quotidiana utilitzant els teoremes de Tales i Pitàgores. S'han realitzat problemes de caràcter quotidià però sense parlar de la realitat de l'escenari (p. 20). [IEc3]	– Uno de los objetivos de la unidad didáctica es resolver problemas de la vida cotidiana utilizando los teoremas de Tales y Pitágoras. Se realizaron problemas de carácter cotidiano, pero sin hablar de la realidad del escenario (p. 20). [IEc3]	– One of the objectives of the didactic unit is to solve everyday life problems using the Thales' and Pythagorean theorems. Daily problems were solved, but without talking about the reality of the scenario (p. 20). [EcS3]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Tenim la sort que les matemàtiques connecten amb moltes altres disciplines i amb el màster he après a realitzar aquestes connexions, de fet tinc ganes de posar-les en pràctica (p. 30).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Tenemos la suerte de que la matemática conecta con muchas otras disciplinas y con el máster aprendí a realizar estas conexiones, de hecho, tengo ganas de ponerlas en práctica (p. 30).	– Contextualisation and interdisciplinary value: We are lucky that mathematics connects with many other disciplines and with the master's programme I learned to make these connections, in fact, I want to put them into practice (p. 30).

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
TFM/MFP #100			
Epistémico Epistemic	<p>– Contextualització: És el procés d'utilitzar exemples reals en la resolució i explicació de conceptes matemàtics. Sí, una bona part de les activitats de la UD entraven dins un context extra-matemàtic. [...]. Resolució de problemes: És el procés de donar solució a problemes matemàtics mitjançant diverses resolucions o vies. Sí, estava present en activitats com el Bingo, on l'alumnat havia de resoldre petits problemes o qüestions utilitzant els coneixements assolits fins el moment, o en d'altres com l'activitat final, que buscava la fórmula del canvi de la temperatura de graus Celsius a graus Fahrenheit. [...]. Modelització: És el procés d'elaborar un model que representi o descrigui adequadament un fenomen o procés de la realitat. Sí, però només en l'activitat final del canvi de temperatura (p. 6). [IE3]</p>	<p>– Contextualización: Es el proceso de utilizar ejemplos reales en la resolución y explicación de conceptos matemáticos. Sí, buena parte de las actividades de la UD entraban en un contexto extra-matemático. [...]. Resolución de problemas: Es el proceso de dar solución a problemas matemáticos mediante diversas resoluciones o vías. Sí, estaba presente en actividades como el Bingo, donde los estudiantes debían resolver pequeños problemas o preguntas utilizando los conocimientos adquiridos hasta el momento, o en otros, como en la actividad final, que buscaba la fórmula del cambio de la temperatura de grados Celsius a Fahrenheit. [...]. Modelización: Es el proceso de elaborar un modelo que represente o describa adecuadamente un fenómeno o proceso de la realidad. Sí, pero sólo en la actividad final del cambio de la temperatura (p. 6). [IE3]</p>	<p>– Contextualisation: It is the process of using real examples in the solving and explanation of mathematical concepts. Yes, a good part of the activities in the DU entered into an extra-mathematical context. [...]. Problem solving: It is the process of providing solutions to mathematical problems through various solving procedures or ways. Yes, it was present in activities such as Bingo, where the students had to solve small problems or questions using the knowledge acquired so far, or in other activities, such as in the final one, which sought the formula for the change in temperature from degrees Celsius to Fahrenheit. [...]. Modelling: It is the process of developing a model that adequately represents or describes a phenomenon or process in reality. Yes, but only in the final activity of the change in temperature (p. 6). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– Finalment, l'avaluació sumativa va estar constituïda principalment per una activitat final de modelització d'un fenomen amb comportament afí, realitzada a classe i de forma grupal (p. 10). [IC3] – Respecte a l'activació de processos cognitius rellevants, [...], les diferents activitats de la unitat han mirat de treballar certs processos matemàtics complexos, com els canvis de representació [...], la modelització, l'argumentació matemàtica</p>	<p>– Por último, la evaluación sumativa estuvo constituida principalmente por una actividad final de modelización de un fenómeno con comportamiento afín, realizada en clase y de forma grupal (p. 10). [IC3] – Respecto a la activación de procesos cognitivos relevantes, [...], las diferentes actividades de la unidad trataron de trabajar ciertos procesos matemáticos complejos, como los cambios de representación [...], la modelización, la argumentación matemática</p>	<p>– Finally, the summative evaluation consisted mainly of a final activity of modelling a phenomenon with affine behaviour, carried out in class and in groups (p. 10). [CS3] – Regarding the activation of relevant cognitive processes, [...], the different activities of the unit tried to work on certain complex mathematical processes, such as changes in representation [...], modelling, mathematical argumentation of</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	d'afirmacions, etc. (p. 10). [IC4]	de afirmaciones, etc. (p. 10). [IC4]	statements, etc. (p. 10). [CS4]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational	– Finalment, en quant a recursos manipulatiu, aquest estigueren presents en l'activitat del Bingo, [...], i en també en l'activitat final de modelització, on es varen aprofitar els termòmetres electrònics de l'institut, per a prendre dades de temperatura de diferents objectes i realitzar la taula de valors (p. 14). [IM1]	– Finalmente, en cuanto a los recursos manipulativos, éstos estuvieron presentes en la actividad del Bingo, [...], y también en la actividad final de modelización, donde se aprovecharon los termómetros electrónicos del instituto para tomar datos de temperatura de distintos objetos y realizar la tabla de valores (p. 14). [IM1]	– Finally, regarding the manipulative resources, these were present in the Bingo activity, [...], and also in the final modelling activity, where the electronic thermometers in the institute were used to make temperature data from different objects and carry out the table of values (p. 14). [MS1]
Afectivo Affective	– Una bona part de les activitats de la unitat didàctica estaven emmarcades baix contextos extra-matemàtics, relacionats amb situacions de la vida quotidiana que pogueren ser properes a l'alumnat (p. 15). [IA1]	– Una buena parte de las actividades de la unidad didáctica estaban emmarcadas en contextos extra-matemáticos, relacionados situaciones de la vida cotidiana que pudieran ser cercanas a los estudiantes (p. 15). [IA1]	– A good part of the activities in the didactic unit were framed in extra-mathematical contexts, related to everyday life situations that could be close to the students (p. 15). [AS1]
Ecológico Ecological	– Per altra, s'ha tingut en compte també la forma d'avaluació dictada pel Departament de Matemàtiques de l'institut on s'implementà, consistent en la valoració del nivell d'assoliment dels dos indicadors –basats en les competències matemàtiques– següents: Representa estratègicament de diverses formes una funció per a modelitzar situacions de la vida quotidiana; Usa aplicacions matemàtiques com el GeoGebra per a visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics (pp. 16–17). [IEc1] – En segon lloc, s'ha tractat de realitzar el major nombre possible d'activitats contextualitzades, treballant una visió més	– Por otra parte, se tuvo en cuenta también la forma de evaluación dictada por el Departamento de Matemática del instituto donde se implementó, consistente en la valoración del nivel de consecución de los dos indicadores – basados en las competencias matemáticas – siguientes: Representa estratégicamente las diversas formas de una función para modelizar situaciones de la vida cotidiana; Usa aplicaciones matemáticas, como GeoGebra, para visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos (pp. 16–17). [IEc1] – En segundo lugar, se trató de realizar el mayor número posible de actividades contextualizadas,	– On the other hand, the form of evaluation dictated by the Department of Mathematics of the institute where the DU was implemented was also taken into account, consisting of the assessment of the level of achievement of the following two indicators (based on mathematical competencies): Strategically represents the various forms of a function to model everyday life situations; Uses mathematical applications, such as GeoGebra, to visualise and structure mathematical ideas or processes (pp. 16–17). [EcS1] – Secondly, we tried to carry out as many contextualised activities as possible, working on a more empirical vision of

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>empírica de les matemàtiques. [...]. Per altra, també s'ha volgut incloure a la unitat el treball de processos matemàtics com la resolució de problemes, els canvis de representació o la modelització. Aquest últim, no obstant, estigué present finalment en un grau menor del desitjat (p. 19). [IEc4]</p>	<p>trabajando una visión más empírica de la matemática. [...]. Por otra parte, también se quiso incluir en la unidad el trabajo con procesos matemáticos, como la resolución de problemas, los cambios de representación, o la modelización. Este último, sin embargo, estuvo presente finalmente en un grado menor del deseado (p. 19). [IEc4]</p>	<p>mathematics. [...]. On the other hand, we also wanted to include in the unit some mathematical processes, such as problem solving, changes in representation, or modelling. The latter, however, was ultimately present to a lesser degree than desired (p. 19). [EcS4]</p>
<p>Otros Others</p>	<p>– Les funcions serveixen per a estudiar els fenòmens de canvi i les relacions entre variables, i per tant, resulten models matemàtics amb una aplicació amplíssima a la vida real (p. 1). – Idoneïtat epistèmica: [...]. També, donar més pes al treball de la modelització –i així de tots els processos que inclou–, i millorar la representativitat del pendent (p. 20). – Buscant la millor tarifa: Es tracta d'una activitat d'introducció a la modelització, baix un context quotidià (p. 23). – Avaluació sumativa: En general, penso que l'activitat que constitueix l'avaluació sumativa és bastant adient, ja que requereix d'un grau d'assoliment dels coneixents de la unitat sòlid per portar-la a terme, al mateix temps que treballa processos matemàtics com la modelització (p. 25). – Les idees claus de la unitat giren entorn al concepte general de funció com l'expressió de relacions entre variables, a la funció lineal com a primer model de funció – relacionat amb la raó de proporcionalitat directa–, i</p>	<p>– Las funciones sirven para estudiar los fenómenos de cambio y las relaciones entre variables y, por lo tanto, resultan modelos matemáticos con una aplicación amplísima en la vida real (p. 1). – Idoneidad epistémica: [...]. También, dar más peso al trabajo de la modelización (y a todos los procesos que incluye), y mejorar la representatividad de la pendiente (p. 20). – Buscando la mejor tarifa: Se trata de una actividad de introducción a la modelización bajo un contexto cotidiano (p. 23). – Evaluación sumativa: En general, pienso que la actividad que constituye la evaluación sumativa es bastante adecuada, ya que requiere de un grado sólido de consecución de los conocimientos de la unidad para llevarla a cabo, al tiempo que trabaja procesos matemáticos como la modelización (p. 25). – Las ideas clave de la unidad giran en torno al concepto general de función como la expresión de relaciones entre variables, a la función lineal como primer modelo de función (relacionada con la razón de</p>	<p>– Functions are used to study phenomena of change and the relationships between variables and, therefore, result in mathematical models with a very wide application in real life (p. 1). – Epistemic suitability: [...]. Also, give more weight to the work of modelling (and all the processes it includes), and improve the representativeness of the slope (p. 20). – Looking for the best rate: This is an introductory activity to modelling in an everyday context (p. 23). – Summative evaluation: In general, I think that the activity that constitutes the summative evaluation is quite appropriate, since it requires a solid degree of achievement of the knowledge of the unit to carry it out, while working on mathematical processes such as modelling (p. 25). – The key ideas of the unit revolve around the general concept of function as the expression of relationships between variables, the linear function as the first function model (related to the direct proportionality ratio), and the affine function as a more general model of function</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>a la funció afi com a model més general de funció representat per una recta, destacant la diversitat de fenòmens modelitzats per aquests (p. 31). – Enfocament general de la intervenció: [...]. A través de la realització de problemes contextualitzats (majoritàriament), anirem caracteritzant aquest tipus, interpretant els paràmetres que intervenen en la seva fórmula, i construint les diferents representacions (p. 32). – Sessió 10 – Activitat final: Modelitzem experimentant (pp. 60–61). – Sessió 13 i 14: Modelització – Buscant la millor tarifa (pp. 74–75). – Contextualització i valor interdisciplinari: En la planificació de la Unitat didàctica, he posat èmfasi en la contextualització de les activitats matemàtiques per mostrar la seva funcionalitat, incorporant, a més, problemes de modelització sobre situacions extramatemàtiques (p. 86).</p>	<p>proporcionalidad directa), y a la función afin como modelo más general de función representado por una recta, destacando la diversidad de fenómenos modelizados por éstos (p. 31). – Enfoque general de la intervención: [...]. A través de la realización de problemas contextualizados (en su mayoría), iremos caracterizando este tipo, interpretando los parámetros que intervienen en su fórmula, y construyendo las diferentes representaciones (p. 32). – Sesión 10 – Actividad final: Modelizamos experimentando (pp. 60–61). – Sesión 13 y 14: Modelización – Buscando la mejor tarifa (pp. 74–75). – Contextualización y valor interdisciplinario: En la planificación de la Unidad Didáctica, puse énfasis en la contextualización de las actividades matemáticas para mostrar su funcionalidad incorporando, además, problemas de modelización sobre situaciones extra-matemáticas (p. 86).</p>	<p>represented by a straight line, highlighting the diversity of phenomena modelled by them (p. 31). – General approach of the intervention: [...]. Through carrying out contextualised problems (most of them), we will characterise this type, interpreting the parameters that intervene in its formula, and constructing the different representations (p. 32). – Session 10 – Final activity: We model by experimenting (pp. 60–61). – Session 13 and 14: Modelling – Looking for the best rate (pp. 74–75). – Contextualisation and interdisciplinary value: In planning the Didactic Unit, I placed emphasis on the contextualisation of mathematical activities to show their functionality, also incorporating modelling problems on extra-mathematical situations (p. 86).</p>
TFM/MFP #102			
<p>Epistémico Epistemic</p>	<p>– Es va decidir que només s'utilitzaria una opció fixa en el model matemàtic presentat i que, a partir d'aquí, el significat d'aïllar el percentatge de variació "r" s'observés exclusivament a partir del signe obtingut al resultat (p. 13). [IE2] – Modelització: Expressar de manera clara i precisa una idea o el conjunt de dades que facilitin la comprensió i resolució</p>	<p>– Se decidió que sólo se utilizaría una opción fija en el modelo matemático presentado y que, a partir de ahí, el significado de aislar el porcentaje de variación "r" se observara exclusivamente a partir del signo obtenido en el resultado (p. 13). [IE2] – Modelización: Expresar de forma clara y precisa una idea o conjunto de datos que faciliten la comprensión y resolución</p>	<p>– It was decided that only one fixed option would be used in the mathematical model presented and that, from there, the meaning of isolating the percentage of variation "r" would be observed exclusively from the sign obtained in the result (p. 13). [ES2] – Modelling: Expressing clearly and precisely an idea or set of data that facilitates the understanding and solving</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>d'un problema, per a posteriorment demostrar la veracitat de la idea o per resoldre el problema. Es va plantejar una activitat per treballar la modelització a partir de les variacions percentuals, però no es va poder realitzar. Tot i no ser un procés de modelització, es van treballar les progressions geomètriques i les seves sumes a partir de la llegenda del joc d'escacs, primer amb resolucions intuïtives i posteriorment amb la generalització matemàtica. [...]. Resolució de problemes: La capacitat d'un alumne de resoldre problemes implica resoldre diferents tipus de problemes matemàtics mitjançant diverses vies (p. 14). Contextualització: Ús de problemes del món real. Es van presentar diferents situacions reals per a treballar els continguts (p. 15).</p> <p>– Es va finalitzar amb la proposta de que calculesin els valors a partir del model matemàtic exposat i que comprovesin si els valors corresponien als que havien calculat prèviament, tant per a que veiessin si estava bé com la seva utilitat (p. 16). [IE4]</p>	<p>de un problema, para posteriormente demostrar la veracidad de la idea o para resolver el problema. Se planteó una actividad para trabajar la modelización a partir de las variaciones porcentuales, pero no pudo realizarse. Aunque no es un proceso de modelización, se trabajaron las progresiones geométricas y sus sumas a partir de la leyenda del juego de ajedrez, primero con resoluciones intuitivas y, posteriormente, con la generalización matemática. [...]. Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver problemas implica resolver distintos tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías (p. 14). Contextualización: Uso de problemas del mundo real. Se presentaron diferentes situaciones reales para trabajar los contenidos (p. 15).</p> <p>– Se finalizó con la propuesta de que calcularan los valores a partir del modelo matemático expuesto y que comprobaran si los valores correspondían a los que habían calculado previamente, tanto para que vieran si estaba bien como su utilidad (p. 16). [IE4]</p>	<p>of a problem, to later demonstrate the veracity of the idea or to solve the problem. An activity was proposed to work on modelling based on percentage variations, but it could not be carried out. Although it is not a modelling process, geometric progressions and their sums were worked on from the legend of the chess game, first with intuitive solving procedures and, later, with mathematical generalisation. [...]. Problem solving: A student's problem-solving ability involves solving different types of mathematical problems through various means (p. 14). Contextualisation: Use of real-world problems. Different real situations were presented to work on the contents (p. 15).</p> <p>– It ended with the proposal that they calculate the values from the mathematical model presented and check whether the values corresponded to those they had previously calculated, both to see if it was correct and its usefulness (p. 16). [ES4]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	<p>– Hi va haver la presentació de problemes en entorns reals</p>	<p>– Se presentaron problemas en entornos reales contextualizados (p. 19). [IEc3]</p>	<p>– Problems were presented in real-contextualised environments (p. 19). [EcS3]</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	contextualitzats (p. 19). [IEc3]		
Otros Others	<p>– També es va veure que en l’aplicació de les matemàtiques en contextos reals presentaven certes dificultats inicials però, una vegada feien les construccions i connexions adequades, la resolució ja era molt més senzilla (pp. 10–11).</p> <p>– Idoneïtat epistèmica: Per a millorar la idoneïtat didàctica plantejem dues activitats amb l’objectiu d’augmentar la qualitat de les matemàtiques que s’ensenyen. Ens centrem en dos punts a treballar, la representativitat i la modelització (p. 21).</p> <p>– Modelització (pp. 21–22).</p> <p>– Contextualització i valor interdisciplinari: [...]. Contextualitzar els continguts matemàtics sempre aporta riquesa en l’ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Per exemple, l’aprenentatge en la elaboració de la UD en plantejaven problemes per relacionar els continguts matemàtics amb conceptes econòmics-financers ha sigut molt enriquidor (p. 30).</p> <p>– Augments i disminucions percentuals: Activitat de modelització (pp. 62–63).</p>	<p>– También se vio que presentaban ciertas dificultades en la aplicación de la matemática a contextos reales, pero una vez realizaban las construcciones y conexiones adecuadas, la resolución era ya mucho más sencilla (pp. 10–11).</p> <p>– Idoneidad epistémica: Para mejorar la idoneidad didáctica, planteamos dos actividades con el objetivo de aumentar la calidad de la matemática que se enseña. Nos centramos en dos puntos para trabajar, la representatividad y la modelización (p. 21).</p> <p>– Modelización (pp. 21–22).</p> <p>– Contextualización y valor interdisciplinario: [...]. Contextualizar los contenidos matemáticos aporta siempre riqueza en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, el aprendizaje en la elaboración de la UD, donde se planteaban problemas para relacionar los contenidos matemáticos con conceptos económico-financieros, fue muy enriquecedor (p. 30).</p> <p>– Aumentos y disminuciones porcentuales: Actividad de modelización (pp. 62–63).</p>	<p>– It was also seen that they presented certain difficulties in applying mathematics to real contexts, but once they made the appropriate constructions and connections, the solving procedure was much simpler (pp. 10–11).</p> <p>– Epistemic suitability: To improve didactic suitability, we proposed two activities with the aim of increasing the quality of the mathematics that is taught. We focused on two points to work on, representativeness and modelling (p. 21).</p> <p>– Modelling (pp. 21–22).</p> <p>– Contextualisation and interdisciplinary value: [...]. Contextualising mathematical contents always provides richness in the teaching and learning of mathematics. For example, the learning in the development of the DU, where problems were posed to relate mathematical contents with economic-financial concepts, was very enriching (p. 30).</p> <p>– Percentage increases and decreases: Modelling activity (pp. 62–63).</p>
TFM/MFP #105			
Epistémico Epistemic	<p>– En primer lloc, a la UD vaig contextualitzar l’ús de funcions amb les reflexions sobre fotografies de les sessions introductòries [...]. En tercer lloc, la resolució de problemes es va treballar amb les activitats [...], però considero que caldria</p>	<p>– En primer lugar, en la UD contextualicé el uso de funciones con las reflexiones sobre fotografías de las sesiones introductorias [...]. En tercer lugar, la resolución de problemas se trabajó con las actividades [...], pero considero que debería</p>	<p>– Firstly, in the DU, I contextualised the use of functions with the reflections of photographs from the introductory sessions [...]. Thirdly, problem solving was worked on with the activities [...], but I believe that more work</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>haber-la treballat més (si hagués disposat de més sessions). [...]. Modelitzar: Reconec que en una UD sobre funcions hauria de tenir molt més pes el procés de modelització del que jo li he donat. Amb l'activitat [...] vam treballar el procés de modelització conjuntament amb el de manipulació, però considero que de forma limitada. El nombre de sessions conjuntament amb el fet que no havien treballat funcions a 2n d'ESO van ser factors limitant per poder desenvolupar més aquest procés (p. 8). Resolució de problemes: La capacitat d'un alumne de resoldre problemes implica resoldre diferents tipus de problemes matemàtics mitjançant diverses vies. Contextualitzar: Ús de problemes i exemples de l'entorn real i proper als alumnes. [...]. Modelitzar: Traduir a model matemàtics situacions quotidians o reals (p. 61). [IE3]</p>	<p>haberse trabajado más (si hubiera dispuesto de más sesiones). [...]. Modelizar: Reconozco que en una UD sobre funciones debería tener mucho más peso el proceso de modelización de lo que yo le di. Con la actividad [...] trabajamos el proceso de modelización conjuntamente con el de manipulación, pero considero que de forma limitada. El número de sesiones, junto con el hecho de que no habían trabajado funciones en 2º de ESO, fueron factores limitantes para poder desarrollar más este proceso (p. 8). Resolución de problemas: La capacidad de un estudiante de resolver problemas implica resolver distintos tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías. Contextualizar: Uso de problemas y ejemplos del entorno real y cercano a los estudiantes. [...]. Modelizar: Traducir situaciones cotidianas o reales a modelos matemáticos (p. 61). [IE3]</p>	<p>should have been done (if there had been more sessions). [...]. Modelling: I recognise that in a DU on functions, the modelling process should have much more weight than what I gave it. With the activity [...], we worked on the modelling process together with the manipulation process, but I think it was in a limited way. The number of sessions, together with the act that they had not worked on functions in the 2nd course of CSE, were limiting factors to be able to develop this process further (p. 8). Problem solving: A student's problem-solving ability involves solving different types of mathematical problems through various ways. Contextualising: Use of problems and examples from the real environment close to the students. [...]. Modelling: Translating every day or real situations into mathematical models (p. 61). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interactional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	<p>– En general, s'ha tingut cura que les activitats a l'aula fossin contextualitzades i que l'alumnat entengués la utilitat de les funcions en altres disciplines (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– En general, se cuidó que las actividades en el aula estuvieran contextualizadas y que los estudiantes entendieran la utilidad de las funciones en otras disciplinas (p. 17). [IEc3]</p>	<p>– In general, care was taken to ensure that classroom activities were contextualised and that the students understood the usefulness of the functions in other disciplines (p. 17). [IEc3]</p>
Otros Others	<p>– Idoneïtat epistèmica: És recomanable que les tasques proposades aportin més pes a la modelització i</p>	<p>– Idoneidad epistémica: Es recomendable que las tareas propuestas aporten más peso a la</p>	<p>– Ecological suitability: It is recommended that the proposed tasks provide more weight to modelling</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	<p>a l'exploració i conjectura (p. 18). – Contextualització i valor interdisciplinari: Abans de realitzar el Màster, era capaç de reconèixer contextos i situacions d'altres matèries (física, química) en els que s'utilitzen les Matemàtiques del currículum. El màster m'ha servit, principalment, per reflexionar sobre com portar a l'aula aquests contextos i situacions diverses i sobre lo important que és que l'alumnat faci connexions amb la seva vida quotidiana perquè l'aprenentatge sigui significatiu (p. 24). – Me n'he adonat, també, de la importància de ser creativa i contextualitzar les activitats d'ensenyament de Matemàtiques per tal de que enganxin a l'alumnat (p. 25).</p>	<p>modelización y a la exploración y conjetura (p. 18). – Contextualización y valor interdisciplinario: Antes de realizar el Máster, era capaz de reconocer contextos y situaciones en otras materias (física, química) en las que se utilizaba la Matemática del currículo. El máster me sirvió, principalmente, para reflexionar sobre cómo llevar al aula estos contextos y situaciones diversas, y sobre lo importante que es que los estudiantes hagan conexiones con su vida cotidiana para que el aprendizaje sea significativo (p. 24). – Me di cuenta, también, de la importancia de ser creativa y contextualizar las actividades de enseñanza de Matemática para que enganchen a los estudiantes (p. 25).</p>	<p>and exploration and conjectures (p. 18). – Contextualisation and interdisciplinary value: Before completing the Master's programme, I was able to recognise contexts and situations in other subjects (physics, chemistry) in which the Mathematics of the curriculum was used. The master's programme was mainly useful for me to reflect on how to bring these diverse contexts and situations into the classroom, and on how important it is for students to make connections with their daily lives so that learning is meaningful (p. 24). – I also realised the importance of being creative and contextualising Mathematics teaching activities so that they engage students (p. 25).</p>
TFM/MFP #106			
Epistémico Epistemic	<p>– Plantejar i resoldre problemes: Resoldre problemes fent servir les estratègies i conceptes matemàtics que calguin. En la majoria d'activitats hi havia problemes, i a les dues sessions de treball abans de l'avaluació sumativa es centrava específicament a la resolució de problemes. [...]. Modelitzar: Crear i comprendre models matemàtics de situacions de la vida real o aplicats a altres matèries. En les activitats [...] modelitzaven com es comporten les longituds, àrees i volums de les figures quan s'amplia alguna de les seves dimensions. [...]. Contextualitzar: Utilitzar</p>	<p>– Plantear y resolver problemas: Resolver problemas utilizando las estrategias y conceptos matemáticos necesarios. En la mayoría de las actividades había problemas, y las dos sesiones de trabajo anteriores a la evaluación sumativa se centraban específicamente en la resolución de problemas. [...]. Modelizar: Crear y comprender modelos matemáticos de situaciones de la vida real o aplicados a otras materias. En las actividades [...] modelizaban cómo se comportan las longitudes, áreas, y volúmenes de las figuras cuando se amplía alguna de sus dimensiones. [...]. Contextualizar:</p>	<p>– Posing and solving problems: Solving problems using the necessary mathematical strategies and concepts. There were problems in most of the activities, and the two work sessions prior to the summative assessment focused specifically on problem solving. [...]. Modelling: Creating and understanding mathematical models of real-life situations or applied to other subjects. In the activities [...], they modelled how the lengths, areas, and volumes of figures behave when any of their dimensions are enlarged. [...]. Contextualising: Using real-world problems close</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	problemes del món real i propers a l'alumnat. Les activitats [...] estaven lligades directament amb l'entorn o s'utilitzaven objectes comuns per l'alumnat (p. 10). [IE3]	Utilizar problemas del mundo real y cercanos a los estudiantes. Las actividades [...] estaban ligadas directamente con el entorno o se utilizaban objetos comunes por los estudiantes (p. 10). [IE3]	to students. The activities [...] were directly linked to the environment or common objects were used by the students (p. 10). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective	– Per això l'objectiu era que la manera de treballar els continguts fos utilitzant exemples i situacions properes a les seves vides diàries i en contextos familiars (p. 18). [IA1]	– Por eso, el objetivo era que, la forma de trabajar los contenidos, fuera utilizando ejemplos y situaciones cercanas a sus vidas diarias y en contextos familiares (p. 18). [IA1]	– Therefore, the objective was that the way of working on the content was using examples and situations close to their daily lives and in family contexts (p. 18). [AS1]
Ecológico Ecological	– La part d'escales és la que pot lligar més en un entorn laboral on es treballa amb mapes, plànols o dissenys de peces industrials. La resta d'activitats, tot i estar contextualitzades (com utilitzar la semblança de triangles per mesurar longituds) no deixen de tenir poca utilitat pràctica actual (p. 24). [IEc3]	– La parte de las escaleras es la que más puede ligar en un entorno laboral donde se trabaje con mapas, planos, o diseños de piezas industriales. El resto de actividades, a pesar de estar contextualizadas (como utilizar la semejanza de triángulos para medir longitudes), no dejan de tener poca utilidad práctica actual (p. 24). [IEc3]	– The part of the stairs is the one that can connect the most in a work environment where you work with maps, plans, or designs of industrial parts. The rest of activities, despite being contextualised (such as using the similarity of triangles to measure lengths), are still of little current practical use (p. 24). [EcS3]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: Des de l'inici de la confecció de la unitat didàctica un dels objectius principals va ser el d'introduir activitats contextualitzades que toquessin d'apropar el dia a dia de l'alumne. Aquesta visió ha estat reforçada al llarg del treball amb activitats competencials en el transcurs del Màster. Tinc una bona base per reconèixer les matemàtiques en altres matèries o disciplines i per presentar activitats que tinguin continguts extra matemàtics (p. 41).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Desde el inicio de la confección de la unidad didáctica, uno de los objetivos principales fue el de introducir actividades contextualizadas que trataran de acercarse al día a día del estudiante. Esta visión se reforzó a lo largo del trabajo con actividades competenciales en el transcurso del Máster. Tengo una buena base para reconocer la matemática en otras materias o disciplinas y presentar actividades que tengan	– Contextualisation and interdisciplinary value: From the beginning of the preparation of the didactic unit, one of the main objectives was to introduce contextualised activities that tried to get closer to the student's daily life. This vision was reinforced with competency activities during the master's programme. I have a good basis for recognising mathematics in other subjects or disciplines and for presenting activities that have extra-mathematical contents (p. 41).

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
		contenidos extra-matemáticos (p. 41).	
TFM/MFP #113			
Epistémico Epistemic	<p>– Al final de la unitat didàctica, l'alumnat en parelles o trios van exposar un problema de modelització on tots estaven contextualitzats amb el món real i a més proper a ells [...]. S'ha de dir que durant tota la unitat didàctica els problemes estaven modelats, [...]. En tercer lloc, plantejar i resoldre problemes és una part primordial en els sistemes d'equacions. Cal notar, però, que tot i tenir programat una gran quantitat diversos de problemes amb l'objectiu de resoldre diversos tipus de problemes amb els quatre mètodes de resolució d'un sistema d'equacions, no fou possible dedicar-hi tant temps com estava plantejat (p. 6). Modelar: Inclou estructurar la situació que es modela, traduir la "realitat" a una estructura matemàtica, treballar amb un model matemàtic, validar el model; reflexionar, analitzar i plantejar crítiques a un model i als seus resultats i monitoritzar i controlar el procés de modelatge. Plantejar i resoldre problemes: Compren plantejar, formular i definir diferents tipus de problemes matemàtics i resoldre diversos tipus de problemes utilitzant una varietat de mètodes (p. iii [35]). [IE3]</p>	<p>– Al final de la unidad didáctica, los estudiantes (en parejas o tríos) expusieron un problema de modelización donde todos estaban contextualizados en el mundo real y además cercano a ellos [...]. Hay que decir que, durante toda la unidad didáctica, los problemas estaban modelizados, [...]. En tercer lugar, plantear y resolver problemas es parte primordial en los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, hay que notar que, a pesar de tener programada una gran cantidad de problemas con el objetivo de resolver varios tipos de problemas con los cuatro métodos de resolución de un sistema de ecuaciones, no fue posible dedicarle tanto tiempo como estaba planteado (p. 6). Modelizar: Incluye estructurar la situación que se modeliza, traducir la "realidad" a una estructura matemática, trabajar con un modelo matemático, validar el modelo, reflexionar, analizar, y plantear críticas a un modelo y a sus resultados, y monitorizar y controlar el proceso de modelización. Plantear y resolver problemas: Comprende plantear, formular, y definir distintos tipos de problemas matemáticos y resolver varios tipos de problemas utilizando una variedad de métodos (p. iii [35]). [IE3]</p>	<p>– At the end of the didactic unit, the students (in pairs or trios) presented a modelling problem where all were contextualised in the real world and were also close to them [...]. It must be said that, throughout the didactic unit, the problems were modelled, [...]. Thirdly, posing and solving problems is a fundamental part of systems of equations. However, it should be noted that, despite having a large number of problems programmed with the objective of solving various types of problems with the four methods of solving a system of equations, it was not possible to dedicate as much time as planned (p. 6). Modelling: Includes structuring the situation being modelled, translating "reality" into a mathematical structure, working with a mathematical model, validating the model, reflecting, analysing, and criticising a model and its results, and monitoring and controlling the modelling process. Posing and solving problems: Includes posing, formulating, and defining different types of mathematical problems and solving various types of problems using a variety of methods (p. iii [35]). [ES3]</p>
Cognitivo Cognitive	<p>– Es van proposar diverses activitats voluntàries, com va ser la presentació d'un</p>	<p>– Se propusieron diversas actividades voluntarias, como fue la presentación</p>	<p>– Various voluntary activities were proposed, such as the presentation of</p>

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	problema contextualitzat [...] o tasques extres. Aquestes esforços per motivar-los van donar bona resposta atès que la gran majoria van ser participatius (p. 9). [IC2]	de un problema contextualizado [...] o tareas extras. Estos esfuerzos por motivarlos dieron buena respuesta, dado que la gran mayoría fueron participativos (p. 9). [IC2]	a contextualised problem [...] or extra tasks. These efforts to motivate them gave a good response, given that the vast majority were participatory (p. 9). [CS2]
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological			
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: És necessari mostrar a l'alumnat la utilitat i les aplicacions de les matemàtiques, i que tinguin la visió d'una eina en altres disciplines. Durant el màster s'ha posat accent en aquesta idea en l'assignatura de Modelització, entre d'altres. Vaig utilitzar contextos i situacions diverses per tal d'aplicar el contingut matemàtic de la meua unitat didàctica on els propis alumnes havien de construir el seu model de resolució d'un sistema d'equacions sense haver explicat prèviament res (p. iii [31]).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Es necesario mostrar a los estudiantes la utilidad y aplicaciones de la matemática, y que tengan la visión de una herramienta para otras disciplinas. Durante el máster se puso énfasis en esta idea en la asignatura de Modelización, entre otros. Utilicé contextos y situaciones diversas para aplicar el contenido matemático de mi unidad didáctica, donde los propios estudiantes debían construir su modelo de resolución de un sistema de ecuaciones sin haber explicado previamente nada (p. iii [31]).	– Contextualisation and interdisciplinary value: It is necessary to show students the usefulness and applications of mathematics, and to have the vision of a tool for other disciplines. During the master's programme, this idea was emphasised in the Modelling subject, among others. I used diverse contexts and situations to apply the mathematical content of my didactic unit, where the students themselves had to build their model for solving a system of equations without having previously explained anything (p. iii [31]).
TFM/MFP #116			
Epistémico Epistemic	– Modelització matemàtica: Construir unes vies, a través de les explicacions i els problemes, que relacionin el món real amb el món ideal de les matemàtiques. Resolució de problemes: Adoptar una estratègia sistemàtica per treballar la resolució de problemes a l'aula. Aquesta té la voluntat d'ajudar als alumnes a entendre millor els problemes. A més, facilita als docents	– Modelización matemática: Construir unas vías, a través de las explicaciones y problemas, que relacionen el mundo real con el mundo ideal de la matemática. Resolución de problemas: Adoptar una estrategia sistemática para trabajar la resolución de problemas en el aula. Ésta tiene la voluntad de ayudar a los estudiantes a entender mejor los problemas. Además, facilita a los docentes observar el qué	– Mathematical modelling: Build paths, through explanations, that relate the real world with the ideal world of mathematics. Problem solving: Adopt a systematic strategy to work on problem solving in the classroom. This is intended to help students better understand the problems. In addition, it makes it easier for teachers to observe where students may have “an error or

Anexo 6: Comentarios Evaluativos Analizados en el Tercer Artículo
Annex 6: Evaluative Comments Analysed in the Third Article

Criterio*	Original	Español	English
	observar en quin punt poden tenir “un error o conflicte” els alumnes. [...]. Contextualització: Relacionar el coneixement o concepte matemàtic amb el món real (p. 16). [IE3]	punto pueden tener “un error o conflicto” los estudiantes. [...]. Contextualización: Relacionar el conocimiento o concepto matemático con el mundo real (p. 16). [IE3]	conflict”. [...]. Contextualisation: Relate mathematical knowledge or concept to the real world (p. 16). [ES3]
Cognitivo Cognitive			
Interaccional Interaccional			
Mediacional Mediational			
Afectivo Affective			
Ecológico Ecological	– La unitat didàctica planteja connexions extramatemàtiques, com per exemple la construcció d’un estoig, o el desenvolupament de problemes de modelització on han de relacionar coneixements matemàtics per resoldre problemes extramatemàtics (p. 29). [IEc2]	– La unidad didáctica plantea conexiones extramatemáticas como, por ejemplo, la construcción de un estuche o el desarrollo de problemas de modelización en los que deben relacionar conocimientos matemáticos para resolver problemas extramatemáticos (p. 29). [IEc2]	– The didactic unit proposes extra-mathematical connections such as, for example, the construction of a pencil case or the development of modelling problems in which mathematical knowledge must be related to solve extra-mathematical problems (p. 29). [EcS2]
Otros Others	– Contextualització i valor interdisciplinari: S’ha potenciat als alumnes l’aprenentatge i la construcció de models matemàtics més senzills però que els poden ajudar entendre el concepte matemàtic. També s’han aplicat models matemàtics a partir de situacions extramatemàtics (p. 35).	– Contextualización y valor interdisciplinario: Se potenció en los estudiantes el aprendizaje y la construcción de modelos matemáticos más sencillos pero que les puedan ayudar a entender el concepto matemático. También, se aplicaron modelos matemáticos a partir de situaciones extramatemáticas (p. 35).	– Contextualisation and interdisciplinary value: Students were encouraged to learn and build simpler mathematical models that can help them understand the mathematical concept. Also, mathematical models were applied from extra-mathematical situations (p. 35).

Annex 7: English Translation for Chapter 8 –

Conclusions

This chapter presents the conclusions of this doctoral thesis. Taking into consideration that the studies presented in Chapters 3–7 already develop specific discussions, which are complemented by additional comments after each publication, this chapter does not develop new discussions about the results already presented, but rather, develops a meta-conclusion about this research. The first section presents a proposal for refining the modelling cycle; the second section presents a general overview of the presence of modelling in the didactic proposals of prospective teachers; the third section explains the limitations of this research; the fourth section proposes the future lines of this research; and the fifth section lists the publications derived from this doctoral thesis.

A7.1. Proposal for Refinement of the Modelling Cycle

In the studies presented in Chapters [3](#) and [7](#), the MMCCP was considered as the specific theoretical reference for modelling, which was used as a tool for analysing the modelling activity in such studies. This section intends to go one step further in reflecting on this cycle and an own perspective on its structure is proposed.

In the study presented in [Chapter 3](#), the structure of phases and transitions proposed by the MMCCP to explain the modelling activity and its coordination with the OSA to describe the mathematical activity underlying the modelling process are highlighted. For its part, in the study presented in [Chapter 7](#), the behaviour of the MMCCP is further explored, not only by adding the analysis in terms of mathematical connections, but also by reflecting on its structure. More specifically, [subsection 7.6.3](#) states that the representation of the MMCCP has set characteristics (similar to a Venn diagram), where a strict separation between «real world» and «mathematics» is suggested, which was not appreciated as such in the expert solutions of the *Bales of Straw Problem* developed in the studies presented in Chapters [3](#) and [7](#). Similarly, the descriptions of the MMCCP presented in subsections [3.3.1](#) and [7.3.3](#) use a natural language register, accompanied by the graphical representation of the cycle with a white region surrounding the «real world» and «mathematics», thus raising some question about its meaning. In other words, two explicit worlds («real world» and «mathematics») and one implicit world (the white region) are created.

Faced with this situation, two main positions can be assumed (see Font, 2003). On one hand, an empiricist position, in which mathematical thinking is a certain way of thinking about the «world of things» with which they have mutual dependence. On the other hand, a Platonist position, in which «mathematics» is part of a world different from the «world of things», where the symbols and other mathematical representation are the ostensive part of a series of mathematical objects that have an idealised and independent existence of individuals in a «mathematical world». The literature review conducted in section A1.2 demonstrated that the historical development of modelling research assumed the existence of two worlds from the beginning, in which the objects from the «mathematical world» allow explaining (and solving) a situation from the «real world», so the proposal presented in the following subsection assumes this same Platonist position.

A7.1.1. Presentation and description of a modelling cycle

In this study, in line with the modelling cycles adopted as specific theoretical frameworks for modelling, and which derive from the Blum/Kaiser-Messmer’s proposal, the existence of these two worlds is assumed: the real and the mathematical world. However, the existence of the white region in the representations used by the modelling cycles that establish this separation between two (or three) worlds is questioned. Therefore, the representation of a *Semiotic-Cognitive Mathematical Modelling Cycle* (SCMMC) is proposed, as shown in Figure 35.

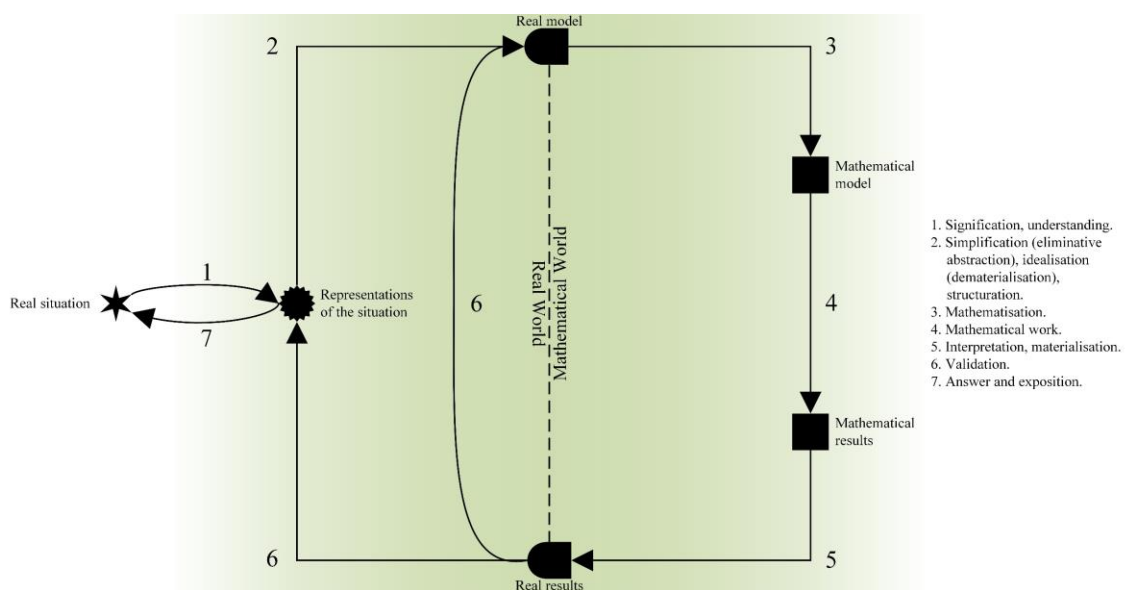


Figure 35. Semiotic-cognitive mathematical modelling cycle.
 Source: Author’s elaboration.

The SCMMC is based on the structure of six phases and seven transitions to explain the modelling process from the Blum/Kaiser-Messmer's proposal and its subsequent theoretical developments. Likewise, it refines the transitions based on the analyses of the mathematical activity underlying the modelling process developed in the studies presented in Chapters 3 and 7, supporting them in the modelling sub-competencies and refining the terminology of some of them. In this way, the SCMMC is described as follows:

The individual begins with a *real situation* (RS), which corresponds to a situation with a realistic and authentic context, which can use different types of representations, and which is already problematised. Then, the individual generates his *representations of the situation* (RoS) based on his understanding of the RS, taking into consideration his previous experiences, what is requested in the RS to be solved, and how it could be solved. To build a *real model* (RM), the individual must simplify (make eliminative abstractions) and idealise (dematerialise) the RS, taking into consideration the conditions and characteristics of the RS context, and structure it in a representation on which later to be able to work in mathematical terms. The *mathematical model* (MM) takes into consideration the mathematical objects involved in the modelling activity that allow the RS to be explained through the mathematisation of the RM. From the mathematical work with the MM, *mathematical results* (MR) emerge, which must be interpreted and materialised in the context of the RS to have *real results* (RR). Finally, the validation of the RR will occur through a comparison of the $RR \leftrightarrow RoS \leftrightarrow RM$ triad, which will lead to the formulation and presentation of a plausible answer.

A7.1.2. Representations in the SCMMC

One of the didactic criticisms of the Platonist position is about the little importance it attributes to ostensive representations (see Font & Peraire, 2001); however, the proposal of the SCMMC wants to address this issue. Unlike the Blum/Kaiser-Messmer's proposal and its subsequent theoretical developments, the graphical representation of the SCMMC in Figure 35 does not separate the «real» and «mathematical» worlds as two sets, but rather establishes a boundary between them. Therefore, it is intended to contribute to the refinement of the characterisation of the representations used in the transition of the $RS \rightarrow RoS \rightarrow RM \rightarrow MM$ phases, as shown in Figure 36.

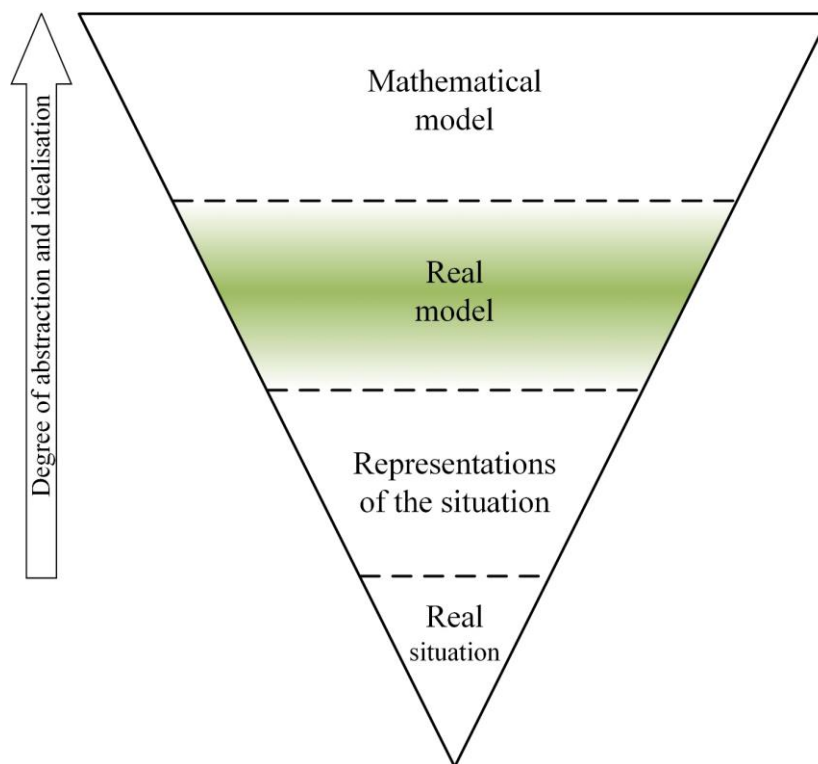


Figure 36. Representations in the SCMMC.
Source: Author's elaboration.

The *real situation* is the starting point of modelling activity, which can use different types of representations that include everything from experiencing the situation to working with a material representation, a statement with text and a picture, with only a picture, or with only text. These different representations are horizontal in nature, since they are located in the same «real world», in addition to being vicarious, that is, each one can act on behalf of the others. For example, if the problem consists of calculating the height of a mountain, there are different options to present the *real situation*, such as visiting the mountain (experiencing the situation), working with a scale model, such as a mock-up (material representation), with a photograph of the mountain scenery (statement with text and/or picture).

Now, understanding the *real situation* is a very complex process that requires the articulation of many cognitive elements to give it meaning and, in this way, generate *representations of the situation*. However, these *representations* (mental images, sketches, etc.) are already somewhat more general and abstract with respect to the *real situation*, but particular with respect to the *real model*, which is why they are understood as a necessary intermediate phase between the *real situation* and the *real model*.

The construction of the *real model* captures the essential elements of the *real situation* (simplification, eliminative abstraction) and idealises (dematerialises) them to enable subsequent work with a *mathematical model*. The structuring of the *real model* must be done in a convenient representation for such mathematical purposes. In other words, although the *real model* contains elements of the *real situation*, it is already a much more simplified and idealised representation (vertical representation), so it cannot be located completely in one world or another, but rather on the boundary between both worlds⁸⁶. For example, if the problem consists of calculating the height of a mountain, the *real model* would simplify some irregularities in the relief of the mountain and idealise it as a triangle or a set of polygons that make it possible to later calculate its height, structuring all this in some drawing made by hand or with graphing software.

Finally, the *mathematical model* is the (or the set of) mathematical object(s) that allows the *real situation* (located in the «real world») to be explained in the language and system of the «mathematical world» and that corresponds to a completely simplified and idealised representation of the *real situation* (vertical representation). For example, if the problem consists of calculating the height of a mountain, the *mathematical model* would correspond to the mathematical objects that allow it to be calculated.

A7.1.3. Didactic implications

The two tools proposed in this doctoral thesis for the analysis of the modelling process, namely, the SCMMC and the *Cognitive-Semiotic Analysis Model for the Mathematical Modelling Process*, in a complementary way, meet the characteristics to be placed in the educational modelling perspective. This is justified by the fact that, on one hand, the SCMMC provides a structure of phases and transitions that allows describing the modelling process in order to identify the development of the sub-competencies of this process and, on the other hand, the *Semiotic-Cognitive Analysis Model* provides the tools that allow describing the mathematical activity underlying the modelling process in order to identify the development of mathematical knowledge in this process.

⁸⁶ Something similar happens with *real results* that, although they are derived from the interpretation and materialisation of *mathematical results* in the context of the *real situation*, still contain mathematical elements.

A7.2. Presence of Modelling in the Didactic Proposals of the Prospective Teachers

In the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#), in addition to a modelling cycle, the DSC were considered as a theoretical reference, which were used as a tool to guide the prospective teachers' reflection on their teaching practice during the educational internship period. Methodologically, a content analysis was conducted on 239 MFPs prepared during the academic years 2019–2020 and 2020–2021 of a professionalising master's degree programme. As mentioned in subsections [4.7](#) and [5.7](#), the content analysis allowed it to obtain a large volume of data that was not possible to include it its entirety in both articles. For this reason, only the aspects of the mathematical teaching and learning process (criteria and components) that the prospective teachers prioritised in their reflections on modelling and with what mathematical content they decided to implement modelling were highlighted. This section summarises the results of both studies highlighting these two aspects.

A7.2.1. On the DSC criteria and components prioritised in the reflection

The fourth step of content analysis conducted in the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#) consisted of categorising the evaluative comments related to modelling according to the DSC components on which the prospective teachers reflected when they prepared each comment. This led to identifying 317 evaluative comments in the 82 MFPs that met the conditions to be considered for this analysis. Figure 37 presents a series of graphs that compare, between both academic years analysed, the general overview of criteria and the specific vision of each component of the DSC.

Global Comparison of Criteria

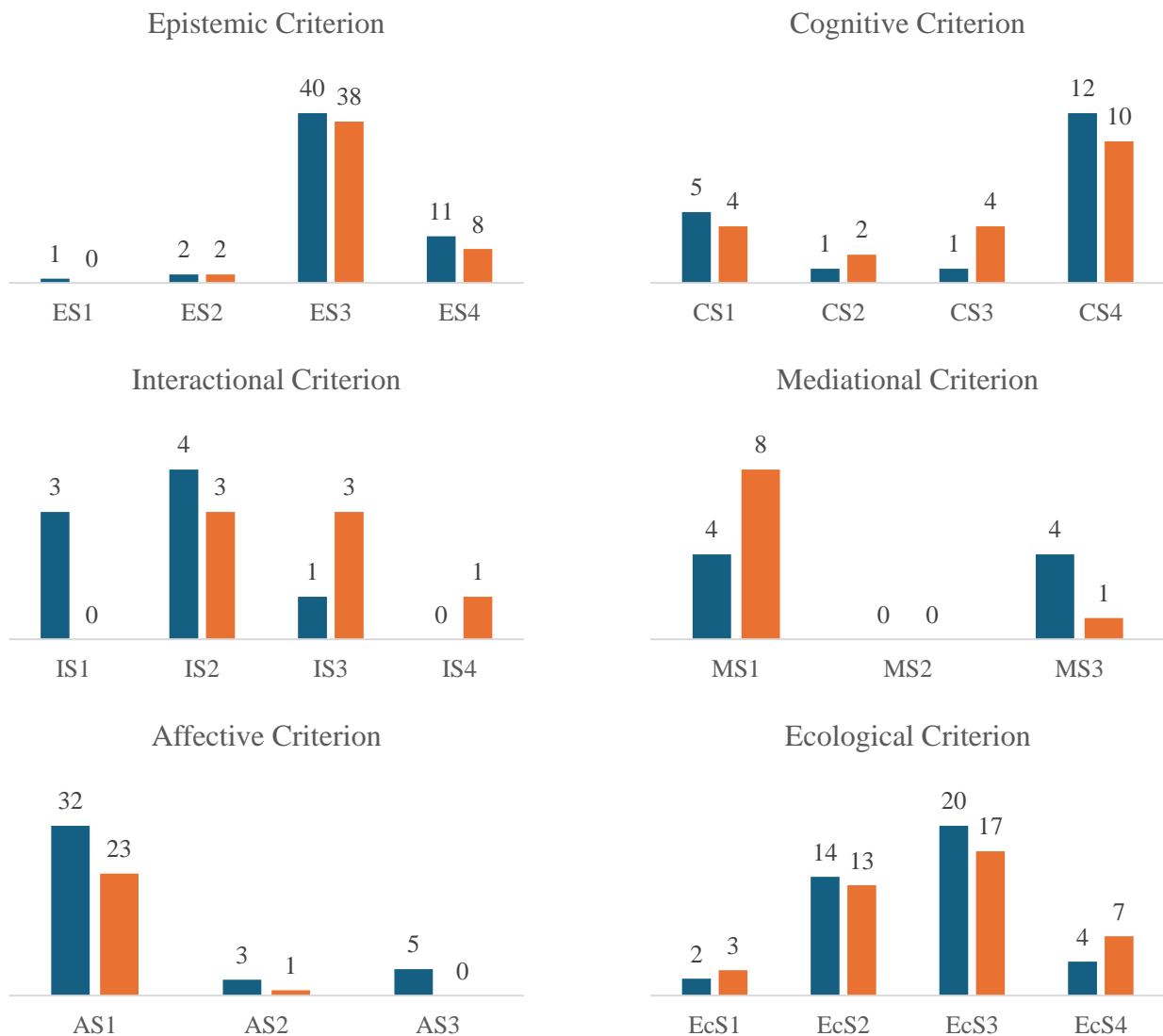
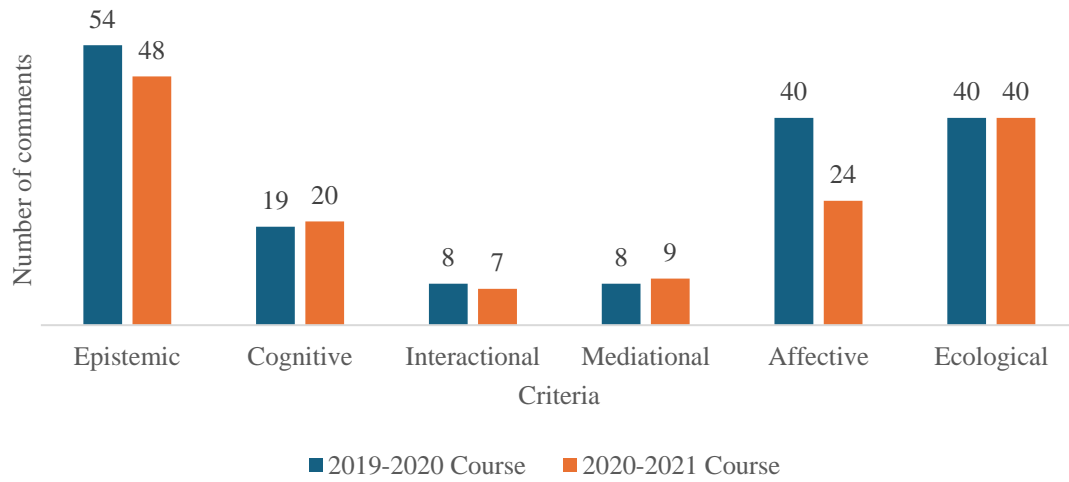


Figure 37. Comparison of DSC criteria and components in both studies.
Source: Author's elaboration based on the results of the studies presented in Chapters 4 and 5.

A7.2.2. On the mathematical contents in which modelling was implemented

The second step of content analysis conducted in the studies presented in Chapters 4 and 5 consisted of preparing a database with the MFPs of each academic year where one of the identifying data was the mathematical content addressed in each MFP. In this way, once the classification of the MFPs was developed according to the four levels of reference to modelling, the mathematical contents with which the prospective teachers implemented modelling were identified. Figure 38 presents a graph that compares, between both academic years analysed, the general overview of the mathematical contents with which this process was implemented, based on the curricular organisation in the context of this study.

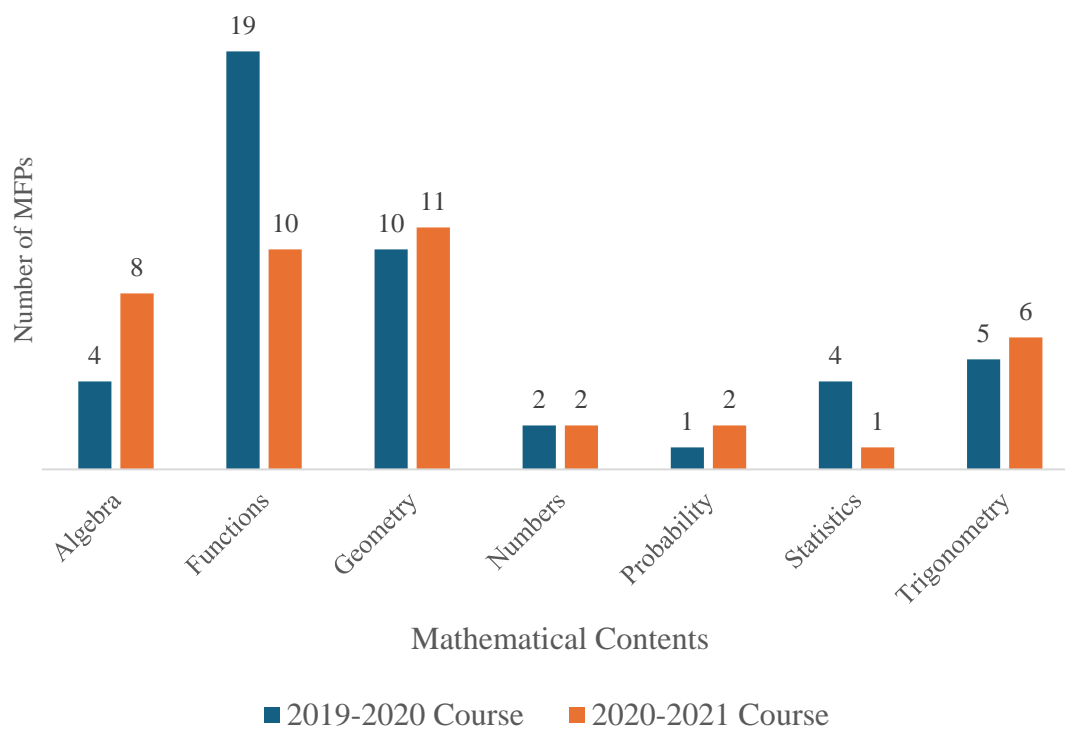


Figure 38. Comparison of the mathematical contents that implemented modelling in both studies.
Source: Author's elaboration based on the results of the studies presented in Chapters 4 and 5.

A7.2.3. Conclusions about the comparisons

The results of the studies presented in Chapters 4 and 5 show similarities in the two aspects that were highlighted in this research. Regarding the aspects of the mathematical teaching and learning process (DSC criteria and components), in both studies a prioritisation of the epistemic and ecological criteria was observed in the prospective teachers' reflections on modelling, as well as little consideration of the interactional and

mediational criteria in their reflections. Regarding the mathematical contents, in both studies a tendency to implement modelling with the topics of functions and geometry was observed, as well as little considerations of the topics of numbers, probabilities, and statistics.

In this section, no additional discussions or conclusions were drawn about the results of the studies presented in Chapters 4 and 5, but rather an overview that compares the results of both studies was presented. This is because each article already contains its specific discussions and conclusions and sections 4.7 and 5.7 make a commentary that expands and synthesises them. What is relevant to address are the limitations of these studies, which are discussed in the following section.

A7.3. Limitations of this Doctoral Research

This section presents some limitations of this research, fundamentally of a methodological nature. The studies presented in Chapters 3 and 7 are of a reflective-on-theory nature and were prepared following the *Networking of Theories* methodology. On the other hand, the studies presented in Chapters 4, 5, and 6 are of an interpretative nature and were prepared following the content analysis methodology. With the exception of the first article, the four remaining studies follow a naturalistic principle, that is, the researchers did not directly interfere in the field of study, since the second and third articles were dedicated to the analysis of the prospective teachers' MFPs, the book chapter to the analysis of the modelling tasks proposed in these MFPs, and the fourth article (like the first article) is a theoretical reflection among experts.

Although the studies presented in Chapters 3 and 7 did not need implementations in a specific field of study⁸⁷, given their reflective-on-theory focus, the studies presented in Chapters 4, 5, and 6 could have had different results if the researchers had been involved in the field of study. The literature review presented in subsections A1.2.3.2 and A1.2.3.3 includes, for the most part, empirical studies in which researchers took extensive advantage of institutionally established educational instances in modelling for prospective teachers (undergraduate seminars, continuous education workshops,

⁸⁷ In the case of the first article, this study had an implementation stage limited to the solving of a modelling problem in the context of an ad-hoc educational instance for this purpose, which was not specially designed for such purposes.

postgraduate experiences) or created scenarios to enable these educational instances (special modelling courses). This situation could not be possible with the studies presented in Chapters 4, 5, and 6 since, despite having considered in the initial doctoral project the observation of classes and, if possible, the direct intervention of the doctoral candidate in the master's programme, there were limitations that caused this objective to be discarded, such as the duration of the master's programme (one academic year), the reduced duration of four sessions of the submodule on modelling and its mainly expository work methodology, the COVID-19 pandemic (which led to a more enriching approach to these studies), the limitations of internship centres with the prospective teachers, among others. In other words, it would have been interesting to have intervened directly in the submodule on modelling or in any other instance created to enable the teaching of this process to prospective teachers.

Nevertheless, what is stated in this section is not intended, under any point of view, to be a criticism of the methodological approaches used or the results of the studies presented in this doctoral thesis, but rather, it offers a look that justifies why one methodology was chosen and not another, and a hypothetical scenario is proposed that, more than a limitation, is considered in retrospect as an instance for future projections of this research, a topic that will be addressed in the following section.

A7.4. Future Projections of this Doctoral Research

This section presents some projections to continue this research at different levels. In the first subsection (A7.4.1), future developments for the modelling cycle and the analysis model for this process proposed in this doctoral thesis are posed; in the second subsection (A7.4.2), future developments for reflection on and teacher education in modelling are posed; and in the third subsection (A7.4.3), future developments that transcend the results presented so far are posed.

A7.4.1. Future developments of the SCMMC and Semiotic-Cognitive Analysis

Model

This first line of development consists of testing both the SCMMC and the *Semiotic-Cognitive Analysis Model* in empirical studies. This is justified by the need to validate both tools not only at the level of the theoretical studies that have been developed so far

in Chapters [3](#) and [7](#), but also in different implementation contexts and educational levels.

An interesting line would be the articulation of the SCMMC with other relevant processes of mathematical activity, such as argumentation and representation, the latter with the objective of refining the representations proposed in Figure 36. At the same time, this would allow the *Semiotic-Cognitive Analysis Model* to be enriched by making it finer and more detailed in the analysis of the mathematical activity underlying this process.

Another interesting line would be the study of modelling sub-competencies in the SCMMC with the objective of refining (if necessary) the transitions of the cycle and identifying possible blockages or errors that individuals may experience when solving modelling problems. At the same time, this would allow the capability of the SCMMC to model modelling activity to be refined.

A7.4.2. Future developments in reflection on and teacher education in modelling

This second line of development consists of providing tools for reflection, both for prospective and practising teachers, on the implementation of modelling, as well as refining the development of professional competencies associated with this process. This is justified by the need to broaden the view on modelling beyond initial teacher education.

An interesting line would be the proposal of a guideline of criteria, components, and indicators of the DSC specifically designed for the implementation of modelling in mathematical teaching and learning processes. In the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#), the value of the DSC as principles of Mathematics Education is highlighted, while in subsection A1.2.1.2, the reflections on the arguments that justify the inclusion of modelling in mathematics education are highlighted. With these two elements, a preliminary reflection on the arguments that justify and the principles that guide the inclusion of modelling in mathematical teaching and learning processes was conducted (see Ledezma, Font et al., [2022](#)), with the objective of laying the foundations to create a DSC guideline specifically designed for the implementation of modelling.

Another interesting line would be the proposal of specific professional knowledge and competencies for modelling, based on the Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies Model (DMKC; proposed in the works of Godino et al., [2017](#); Pino-

Fan et al., [2023](#); among others) which emerges from the OSA. Although the issue of professional knowledge and competencies in modelling has already been widely addressed in the literature, the incorporation of the DMKC to this discussion would provide a different perspective that would also be complementary to both the proposal of a DSC guideline for modelling and the *Semiotic-Cognitive Analysis Model*.

Finally, as mentioned in [section 6.7](#), although the book chapter presented in this doctoral thesis used the same databases of MFPs created in the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#), an additional academic year was considered. This led to the creation of a new database for the MFPs of the 2021–2022 academic year, which required that a content analysis be conducted again with the 98 MFPs of the corresponding course. Nevertheless, the results of this last content analysis were not included in this doctoral thesis since they were not part of any publication in the planned compendium. Even so, it is planned to make a synthesis of the results of the studies presented in Chapters [4](#) and [5](#) to provide a broader view of the prospective teachers' reflection on the implementation of modelling in three teaching contexts: virtual (2019–2020 course), hybrid (2020–2021 course), and face-to-face context (2021–2022 course).

A7.4.3. Other projections

Finally, some lines of development that transcend the results presented in this doctoral thesis are proposed. An interesting line would be the study of the role played by transversal competences in the modelling process, as in the case of creativity or self-regulated learning⁸⁸. Another interesting line would be the design and implementation of didactic proposals that involve the use of advanced technological tools to solve modelling problems with the SCMMC, such as artificial intelligence, augmented and/or virtual reality, and also approaches with STEAM Education.

A7.5. Publications Derived from the Doctoral Thesis

In addition to the publications presented in Chapters 3–7, throughout this doctoral research, other studies were conducted that were in line with the doctoral project outlined. The publications listed in subsections A7.5.1 and A7.5.2 were intended to present

⁸⁸ A proposal on this line of development is presented in Ledezma, Hidalgo-Moncada, and Sánchez ([2024](#)).

progress of the work developed, allow methodological validations, or were simply derived from the content analyses conducted. Subsection A7.5.3 presents the academic instances in which the doctoral candidate was invited to show his work.

A7.5.1. Articles

The following two articles are derived from the analyses of two MFPs (from the academic years 2019–2020 and 2020–2021, respectively), where the content analysis methodology was tested with the use of the DSC:

Ledezma, C., Font, V., & Sala, G. (2021). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría [Analysis of a future teacher's reflection on the role of mathematical modelling for improving an instructional process for the teaching of trigonometry]. *PARADIGMA*, *XLII*(Extra 2), 290–312. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043>

Ledezma, C., Breda, A., & Sánchez, A. (2021). Reflexão de uma futura professora sobre o ensino de álgebra através da modelagem matemática [A prospective teacher's reflection on the teaching and learning of algebra through mathematical modelling]. *INTERMATHS*, *2*(2), 227–244. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.9644>

The following article is derived from the analysis of a MFP in terms of the argumentation made by its author in the reflection on the design and implementation of a modelling problem during his educational internship experience:

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., & Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics*, *10*(18), Article 3339. <https://doi.org/10.3390/math10183339>

A7.5.2. Conference proceedings

The following publications correspond to participation in academic events where progress of the first research objective was presented:

Ledezma, C., Font, V., & Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización [An onto-semiotic analysis of

mathematical activity in the modelling process]. In P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367–375). SEIEM.

Ledezma, C., Font, V., & Sala-Sebastià, G. (2023). Modelización matemática desde una articulación teórica entre los enfoques cognitivo y onto-semiótico [Mathematical modelling from a theoretical networking between the cognitive and onto-semiotic approaches]. In S. Caviedes, J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, & A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp. 129–137). Universidad de Los Lagos.

The following publications correspond to participation in academic events where progress of the second research objective was presented:

Ledezma, C., Font, V., & Llanes, A. (2021). Importancia de la modelización en las propuestas didácticas de futuros profesores de matemática [Importance of modelling in the prospective mathematics teachers' didactic proposals]. In A. Figueroa, G. Meza, M. Moya, S. Navarrete, M. Silva, & A. Quiroz (Eds.), *Actas XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 325–329). SOCHIEM; EEMIE-UCSH.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195–204). PME.

Ledezma, C., Breda, A., Sánchez, A., & Sala, G. (2022). Didactic suitability criteria related to reflection on the implementation of mathematical modelling in a virtual context. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3634–3641). Free University of Bozen-Bolzano; ERME.

Ledezma, C., Font, V., Sánchez, A., & Montoya-Delgadillo, E. (2023). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling in two transitional teaching contexts. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 386). PME.

Ledezma, C., Hidalgo-Moncada, D., Vargas, J. P., & Font, V. (2023). Reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática en los contextos de enseñanza virtual y presencial [Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the virtual and face-to-face teaching contexts]. In C. Jiménez-Gestal, Á. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 315–322). SEIEM.

The following publication correspond to participation in an academic event where a projection of the second research objective was presented:

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G., & Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica [Principles of mathematical modelling from the perspective of didactic suitability]. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.

The following publication correspond to participation in an academic event where progress of the third research objective was presented:

Ledezma, C., Sala-Sebastià, G., & Font, V. (2022). ¿Qué tipos de tareas proponen los futuros profesores para trabajar la modelización matemática? [What types of modelling tasks do prospective teachers propose to work on mathematical modelling?]. In G. Morales-Ramírez, J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, S. Caviedes, S. Retamal, & M. Márquez (Eds.), *Actas XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 451–456). SOCHIEM; Universidad de Los Lagos.

A7.5.3. Seminars, conferences, and other dissemination instances

Firstly, the seminars of the research group at the University of Barcelona where the doctoral candidate presented the progress of his research are listed below:

- Una mirada general vs una mirada específica sobre la actividad matemática de la modelización [A general view vs a specific view on the mathematical activity in modelling] (27th/February/2020).
- Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría [Analysis of a future teacher's reflection on the role of

mathematical modelling for improving an instructional process for the teaching of trigonometry] (17th/November/2020).

- Criterios de idoneidad didáctica relacionados a la reflexión sobre la implementación de la modelización matemática en un contexto virtual [Didactic suitability criteria related to the reflection on the implementation of mathematical modelling in a virtual context] (03rd/December/2021).
- Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica [Principles of mathematical modelling from the perspective of didactic suitability] (08th/April/2022).
- El papel de las conexiones extra-matemáticas en el proceso de modelización [The role played by extra-mathematical connections in the modelling process] (01st/March/2024).

Secondly, the conferences in which the doctoral candidate was invited as an expert in modelling are listed below:

- Modelización matemática: Interrogantes, perspectivas y un nuevo enfoque [Mathematical modelling: Questions, perspectives, and a new approach] (University of La Frontera, Chile, 11th/September/2020).
- Modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo [Mathematical modelling from a didactic-cognitive approach] (National Pedagogic University Francisco Morazán, Honduras, 11th/August/2021).
- Modelización matemática [Mathematical modelling] (University of Panama, 25th/June/2022).
- Modelización matemática [Mathematical modelling] (University of San Carlos de Guatemala, 12th/July/2022).
- La matemática y su relación con otras áreas – Modelización matemática [Mathematics and its relation to other areas – Mathematical modelling] (University of San Carlos de Guatemala, 18th/August/2022).
- Un enfoque para la modelización matemática [An approach to mathematical modelling] (University of Panama, 28th/October/2023).

Thirdly, the special presentation of the doctoral candidate in other academic instances are listed below:

- Una mirada a la modelización matemática desde un networking entre la perspectiva cognitiva y el EOS [A view on mathematical modelling from a networking between the cognitive perspective and the OSA] (OSA discussion group in RELME 35, Autonomous University of Santo Domingo, Dominican Republic, 06th/July/2022).
- A view on mathematical modelling from theoretical frameworks of Mathematics Education (Research colloquium, University of Kassel, Germany, 27th/April/2023).

