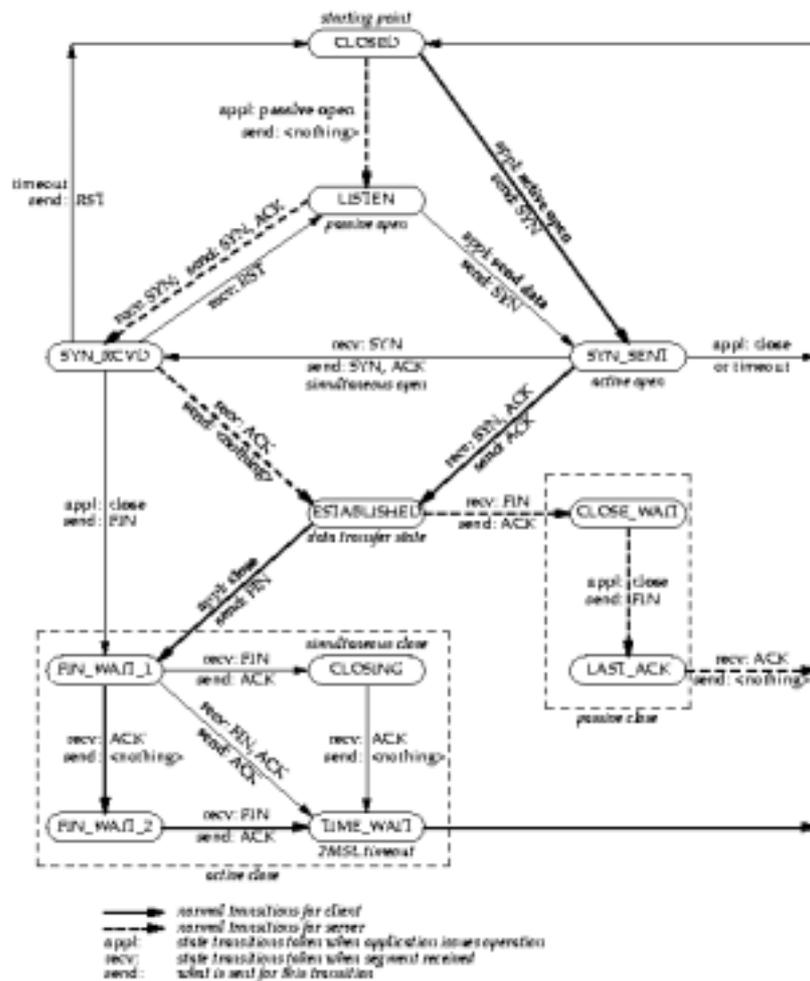


A MÁQUINA DE ESTADOS DE TCP



TCP state transition diagram.

B MODELADO DE CANALES MÓVILES

Varios son los estudios que han desarrollado modelos matemáticos basados en Cadenas de Markov que permiten simular el comportamiento de diferentes canales de comunicación. A continuación se detallan los más utilizados para modelar canales radio móviles.

B.1 MODELOS GENERADORES DE SECUENCIAS BINARIAS DE ERROR

Un sistema típico de comunicaciones digitales es el que se muestra en la Figura B.1

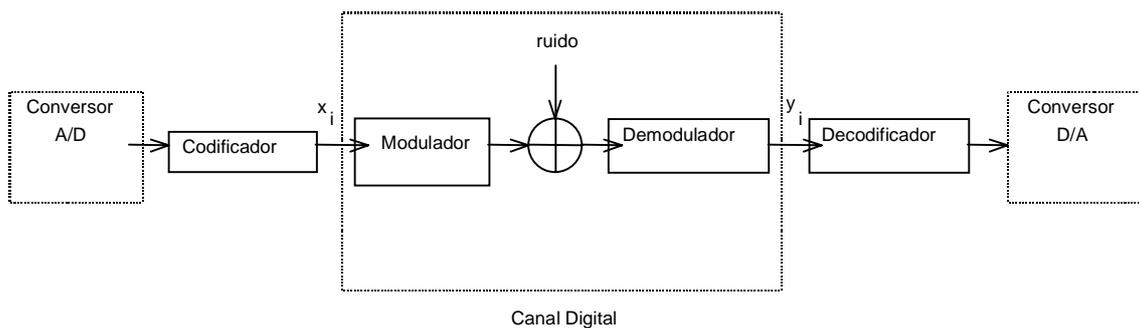


Figura B.1 Esquema de un sistema de comunicaciones

La descripción analítica del comportamiento a ráfagas del canal digital binario (que incluye, como vemos en la figura, tanto el medio físico como el equipo modulador/demodulador) en función de las características de cada una de las fuentes de error resulta extremadamente complicada. Por esta razón, es más conveniente trabajar con secuencias de error reales obtenidas a partir de pruebas realizadas transmitiendo datos a través del canal sometido a estudio de manera que, a partir de ellas, puedan parametrizarse modelos matemáticos capaces de generar secuencias similares.

Es necesario, pues, encontrar un modelo suficientemente representativo del comportamiento del canal real y desarrollar métodos que permitan parametrizarlo a partir de secuencias de error extraídas experimentalmente.

B.2 CARACTERIZACIÓN DE LA SECUENCIA DE ERROR

El esquema de un canal de comunicaciones digitales se muestra, de forma simplificada, en la Figura B.2.

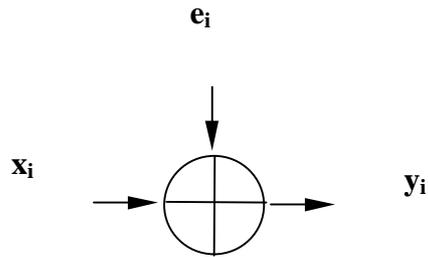


Figura B.2 Esquema simplificado de un canal de comunicaciones binario

La salida y_i es una secuencia binaria (restringimos nuestro estudio a canales binarios) resultado de la suma (función XOR) de la entrada, x_i , y la secuencia de ruido e_i de manera que:

$$e_i = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{no error} \\ 1 & \Rightarrow \text{error} \end{cases}$$

Para la caracterización estadística de la secuencia de error que introduce un determinado canal se definen una serie de conceptos:

- Gap de error (o sección de guarda): Región de la secuencia de error formada exclusivamente por bits no erróneos en una cantidad superior al denominado límite de ráfaga, l . l es un número de bits definido arbitrariamente. La longitud de un gap de error se denomina longitud de guarda.
- Longitud de bit: Número de bits desde un bit erróneo hasta el siguiente, excluyendo el primero de ellos. La suma de todas las longitudes de bit es igual a la longitud total de la secuencia de error.
- Ráfaga de error: Región de la secuencia de error delimitada, al principio y al final, por sendos gaps de error.

00000000000010010110010000000000000000

- Clúster: Secuencia de errores consecutivos. Como puede observarse, un clúster de errores constituye también una ráfaga de error con la restricción de que todos sus bits valen 1

00000000000011111111110000000000000000

En la Figura B.3 se muestran, sobre una posible secuencia de error de un canal que presenta errores a ráfagas, las definiciones de longitud de bit, longitud de guarda y longitud de ráfaga para un caso en el que se ha escogido como límite de ráfaga 7 bits.

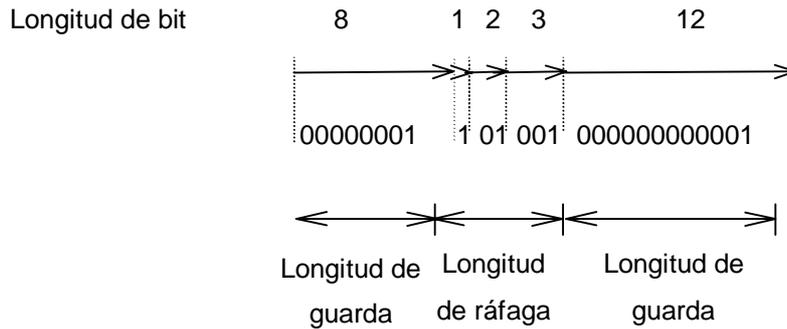


Figura B.3 Definición de longitud de bit, longitud de guarda y longitud de ráfaga para un límite de ráfaga establecido en 7 bits

La secuencia de error puede ser caracterizada, entonces, a partir de las siguientes distribuciones:

- Probabilidad de error en bit:

$$P_b = \frac{\text{Número de bits erróneos}}{\text{Número total de bits en la secuencia de error}}$$

- Distribución gap de error:

$$P_g(m) = P(\text{Gap de error} \leq m) = \sum_{j=1}^m \frac{N_g(j)}{N_g}$$

donde:

$N_g(j)$ es el número de gaps de error de longitud j

N_g es el número total de gaps.

- Distribución error free run: Caracteriza la probabilidad de que se produzcan al menos m bits no erróneos tras un error. Se representa como $P(0m|1)$ de manera que $P(0m|1) = 1$ para $m=0$. Esta distribución es muy útil porque especifica, de forma única, uno de los modelos matemáticos más utilizados.
- Distribución de ráfaga: Es la curva de la probabilidad de que haya una ráfaga de longitud menor o igual que m en función de la longitud m .
- Distribución intervalo entre ráfagas: El intervalo entre ráfagas es la región entre dos ráfagas consecutivas. Esta distribución mide la probabilidad de que se produzcan intervalos entre ráfagas de longitud menor o igual a m en función de m .

- Distribución clúster: Caracteriza la probabilidad de que se produzcan clústers de longitud m en función de m .

B.3 MODELOS BASADOS EN CADENAS DE MARKOV

La mayoría de los modelos generadores de secuencias de error, consisten en Cadenas de Markov con un número de estados finito o infinito entre los que se definen unas determinadas probabilidades de transición.

Las transiciones entre estados dan lugar a una secuencia de estados $\{S_i\}$ a la cual se le asocia una secuencia de bits $\{e_i\}$ de tal manera que a cada estado le corresponde un bit binario o bien un número dado de ellos.

Estos modelos permiten simular, con cierta aproximación, secuencias de error correspondientes a un canal real en el que se producen errores aleatorios y errores en ráfaga o agrupados. Sin embargo, a medida que se buscan modelos que representen con mayor precisión la realidad, la complejidad de su análisis matemático aumenta. Interesa, pues, encontrar modelos que representen de manera adecuada el comportamiento de canales reales y que, a la vez, sean matemáticamente tratables.

A lo largo de los años han ido apareciendo en la literatura gran cantidad de modelos basados en cadenas de Markov (Gilbert, Elliot, McCullough...[KaS78]). Uno de los más reconocidos y utilizados es el denominado *Modelo de Fritchman* [Fri67]. Debido a su amplia aceptación y a las razones que expondremos a continuación, es uno de los modelos que nosotros hemos escogido para simular las características del canal radio móvil.

B.3.1 Modelo de Fritchman

Fritchman investigó las características del caso general de una Cadena de Markov de N estados en la que se distinguen k estados de no-error y $N-k$ estados de error. Obtuvo un modelo relativamente simple, de fácil parametrización y flexible ya que el número de estados era variable.

La cadena de Markov planteada es estacionaria, es decir, las probabilidades de transición entre estados se mantienen constantes en el tiempo. Esta característica supone que las secuencias de error generadas por el modelo correspondan a intervalos de tiempo en los que el comportamiento del canal es estacionario. Hay que tener en cuenta que, en el caso real, la distribución de las ráfagas de error cambia a lo largo del tiempo debido a la movilidad de los terminales.

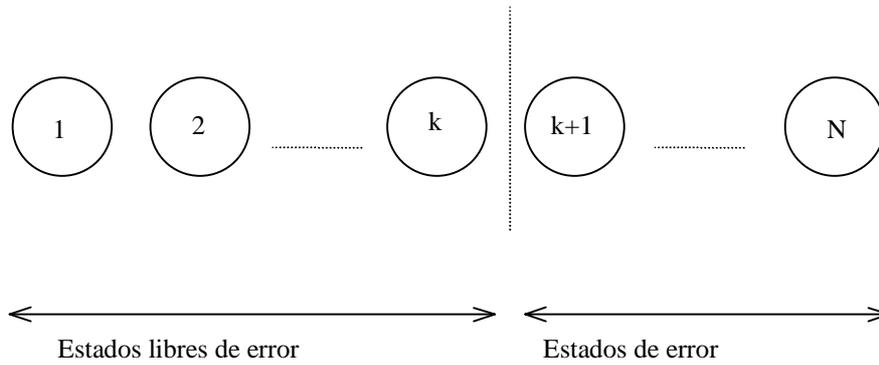


Figura B.4 Cadena de Markov de estados finitos del modelo de Fritchman (N,N-k)

A cada estado, S_i , se le asocia un bit binario según la función de mapeado:

$$Q(i) = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq k \\ 1 & k+1 \leq i \leq N \end{cases}$$

Puede demostrarse [Fri67] que la distribución *error free run* para este modelo responde a la expresión:

$$P(0^m | 1) = \sum_{n=1}^k \hat{f}(n) \hat{\lambda}_v^j \quad \text{para } j \geq 1 \quad (B.1)$$

donde $\hat{\lambda}_v^j$ son los valores propios de la matriz de probabilidades de transición entre los estados libres de error, y $\hat{f}(v)$ es una función de las probabilidades de estado y de transición de todos los estados así como de los valores propios de la matriz global de probabilidades de transición.

Esta expresión para $P(0^m | 1)$, además de ser difícil de tratar, no permite especificar de manera única el modelo debido a la multiplicidad de estados generadores de error. Existe, sin embargo, un caso particular del modelo de Fritchman mucho más sencillo y práctico: *el Modelo de Fritchman Simplificado*. Este modelo consiste en una cadena de Markov con un único estado de error y en la cual las transiciones entre estados libres de error están prohibidas.

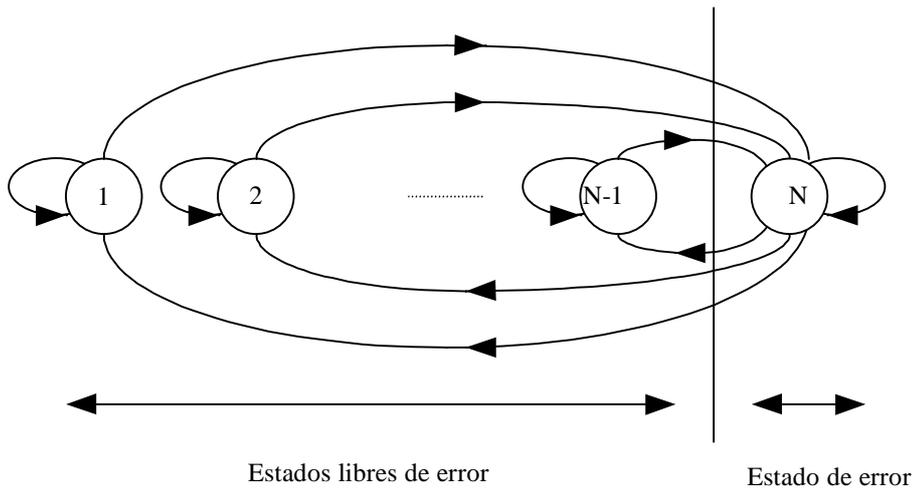


Figura B.5 Modelo de Fritchman Simplificado (N, 1)

Para este modelo la distribución *error free run* se reduce a:

$$P(0^m|1) = \sum_{v=1}^{N-1} \frac{p_{Nv}}{p_{vv}} (p_{vv})^j \quad \text{para } j \geq 1 \quad (B.2)$$

donde p_{ij} indica la probabilidad de transición desde el estado i al j .

Sin embargo, a diferencia del caso general, el modelo simplificado describe un proceso *renewal*. Esto significa que caracteriza la secuencia de error considerando que la probabilidad de error en un determinado bit es función, únicamente, del número de bits no erróneos habidos desde el último bit de error; en otras palabras, asume que los diferentes *gaps* de error están incorrelados.

En general, cualquier modelo que tenga este carácter *renewal* está unívocamente caracterizado por la función de distribución *error free run* [KaS78].

Puede demostrarse, que para el modelo general de *Fritchman* (N,k), existen $2k(N-k)$ parámetros independientes que lo caracterizan [KaS78]. Para el caso simplificado (N,1), éstos se reducen a $2(N-1)$ coincidiendo con el número de probabilidades de transición entre estados diferentes y con el número de ecuaciones independientes que pueden obtenerse de la distribución *error free run*.

La ecuación (B.2) permite, pues, parametrizar el modelo simplificado de *Fritchman* a partir de la distribución *error free run* obtenida experimentalmente para el canal concreto en estudio.

Una vez calculada $P(0^m|1)$, ésta se expresa como la suma de (N-1) exponenciales con los coeficientes adecuados mediante técnicas de aproximación de curvas. Este proceso se muestra en el siguiente ejemplo:

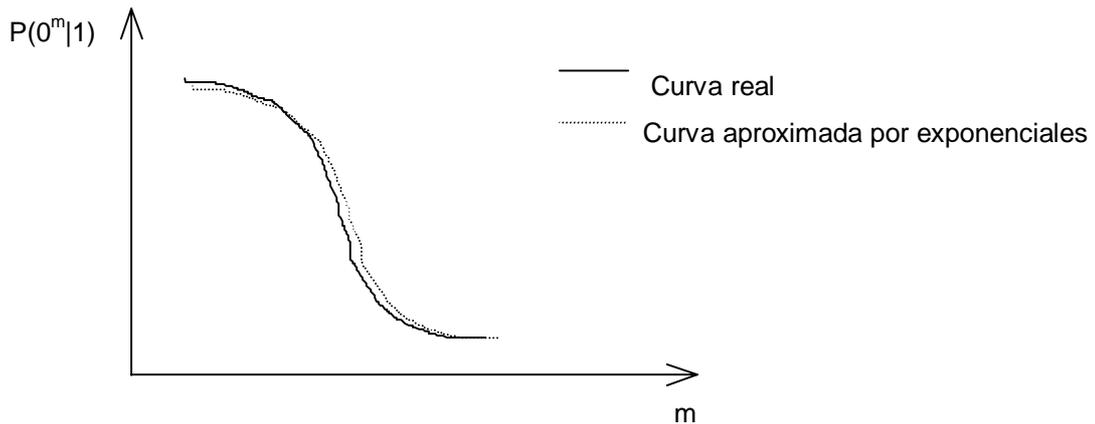


Figura B.6 Aproximación mediante exponenciales de la curva $P(0^m|1)$

Supongamos que, experimentalmente, obtenemos la distribución *error free run* que se muestra en la Figura B.7 para un canal que pretendemos modelar a partir del modelo simplificado de *Fritchman* (4,1).

Por métodos de aproximación de curvas, encontramos que puede expresarse como la suma de tres exponenciales de la siguiente forma:

$$P(0^m | 1) = ax^m + by^m + cz^m$$

donde a, b, c, x, y, z son conocidos.

Puesto que la curva teórica es:

$$P(0^m | 1) = \sum_{v=1}^3 \frac{p_{4v}}{p_{vv}} (p_{vv})^m = \frac{p_{41}}{p_{11}} (p_{11})^m + \frac{p_{42}}{p_{22}} (p_{22})^m + \frac{p_{43}}{p_{33}} (p_{33})^m$$

los parámetros del modelo (probabilidades de transición entre estados) resultan:

$$p_{11} = x \quad p_{41} = ax$$

$$p_{22} = y \quad p_{42} = by$$

$$p_{33} = z \quad p_{43} = cz$$

- **Parámetros de interés proporcionados por el modelo**

Una vez parametrizado un modelo, es posible extraer de él gran cantidad de información. Muchos son los estudios dedicados a obtener información a partir del modelo de *Fritchman*. A continuación veremos cómo obtener la tasa media de error en bit (BER), la longitud media de guarda (L_G), la longitud media de ráfaga (L_R) y la longitud media de clúster (L_C) para canales representados por modelos simplificados de *Fritchman*.

- **Tasa media de error en bit (BER)**

La BER del sistema simulado por el modelo simplificado de *Fritchman* coincide con la probabilidad de estado del único estado de error, π_3 .

Puesto que se trata de una Cadena de Markov estrictamente estacionaria, existe una distribución estacionaria de probabilidades de estado calculables a partir de la ecuación de balance:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij} \quad j=1,2,3,\dots,N$$

donde:

$$\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$$

Para el modelo que utilizaremos en nuestras pruebas (3,1), la probabilidad de los diferentes estados se calcula como:

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} = \pi_1 p_{11} + \pi_3 p_{31} \quad (B.3)$$

$$\pi_2 = \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} \quad (B.4)$$

$$\pi_3 = \pi_1 p_{31} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} \quad (B.5)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

De (B.3)

$$\pi_1 = \pi_3 \frac{p_{31}}{1 - p_{11}} \quad (B.6)$$

De (B.4)

$$\pi_2 = \pi_3 \frac{p_{32}}{1 - p_{22}} \quad (B.7)$$

Finalmente, de (B.5), (B.6) y (B.7)

$$\pi_3 = \frac{1}{1 + \frac{p_{31}}{1 - p_{11}} + \frac{p_{32}}{1 - p_{22}}} = BER$$

- **Longitud media de guarda (L_G)**

La longitud media de guarda puede calcularse como el cociente entre el número total de bits de guarda y el número total de gaps de error.

$$\text{Numero total de bits de guarda} = N_e \sum_{i=1}^{\infty} (l+i)P(l+i)$$

$$\text{Numero total de gaps de error} = N_e \sum_{i=1}^{\infty} P(l+i)$$

donde P(l+1), P(l+2), ... son las probabilidades de que ocurran longitudes de bit de valor l+1, l+2,... y N_e indica el número de errores presentes en la secuencia de error.

Por tanto

$$L_G = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (l+i)P(l+i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(l+i)} = l + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} iP(l+i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(l+i)}$$

Expresando las probabilidades P(l+i) en función de las probabilidades de transición entre estados se llega a la siguiente expresión [STK91]:

$$L_G = l + \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_{Ni}}{P_{iN}} p_{ii}^{l-1}}{\sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni} p_{ii}^{l-1}}$$

Para el modelo simplificado, esta expresión se reduce a:

$$L_G = l + \frac{\frac{p_{31}}{p_{13}} p_{11}^{l-1} + \frac{p_{32}}{p_{23}} p_{22}^{l-1}}{p_{31} p_{11}^{l-1} + p_{32} p_{22}^{l-1}}$$

- **Longitud media de ráfaga (L_R)**

La longitud media de ráfaga puede definirse como:

$$L_B = \frac{\text{Numero total de bits} - L_G \times \text{Numero total de gaps de error}}{\text{Numero total de rafagas de error} (= \text{Numero total de gaps de error})}$$

donde

$$\text{Numero total de gaps de error} = \text{Numero total de bits} \times BER \times \sum_{i=1}^{\infty} P(l+i)$$

En función de las probabilidades de transición del sistema, L_B puede expresarse como:

$$L_B = \left[1 - \left(I + \frac{\sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni} p_{ii}^{l-1}}{\sum_{i=1}^{N-1} p_{iN}} \right) \frac{\sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni} p_{ii}^{l-1}}{\sum_{i=1}^N p_{iN}} \right] \frac{\sum_{i=1}^N p_{Ni}}{\sum_{i=1}^{N-1} p_{iN} p_{ii}^{l-1}}$$

Para el modelo simplificado y haciendo uso de las definiciones de L_G y BER, podemos reducir esta expresión a:

$$L_B = \frac{1 - L_G \times BER \times \left(\frac{p_{31}}{p_{13}} p_{11}^{l-1} + \frac{p_{32}}{p_{23}} p_{22}^{l-1} \right)}{BER \times \left(\frac{p_{31}}{p_{13}} p_{11}^{l-1} + \frac{p_{32}}{p_{23}} p_{22}^{l-1} \right)}$$

- **Longitud media de clúster (L_C)**

La longitud media de clúster se define como el número medio de bits que constituyen un clúster en la secuencia de error. Un clúster de longitud l se genera cuando la cadena de Markov que representa al modelo (ver Figura. B.6) pasa l veces consecutivas por el estado de error.

Esta situación está caracterizada por una variable geométrica que puede tomar los valores 1 (error) con probabilidad p_{NN} ó 0 (no-error) con probabilidad $1-p_{NN}$. La probabilidad de que se generen l unos consecutivos es, entonces:

$$P(N^{\circ} de 1 = l) = p_{NN}^l (1 - p_{NN})$$

El valor medio de esta variable aleatoria geométrica (L_C) es:

$$L_C = \frac{1}{1 - p_{NN}}$$

- **Ventajas del modelo de *Fritchman***

El modelo de *Fritchman* es uno de los modelos de simulación de canales más utilizados. Entre sus muchas ventajas podemos destacar las siguientes:

- Resulta útil para representar el comportamiento de un gran número de canales de comunicación reales. Varios estudios [Fri67, Tsa69, WaM95, SwF94], demuestran que las secuencias de error generadas por este modelo y las correspondientes a canales reales como el radio, tienen parámetros estadísticos muy similares.

- Preserva la simplicidad matemática propia de las cadenas de Markov.
- La parametrización del modelo simplificado de Fritchman requiere únicamente de la obtención de la distribución *error free run* de una secuencia de error real obtenida experimentalmente en el canal bajo estudio.

En particular, resultados experimentales indican que, entre otros, los canales radio pueden ser caracterizados mediante el modelo simplificado de *Fritchman* de tres estados (1 de error y 2 libres de error).

Caso particular:

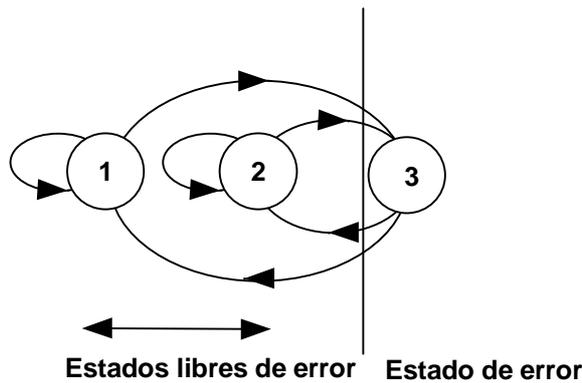


Figura B.7 Modelo de Fritchman simplificado (3,1)

En la Tabla B.1 se indican las probabilidades de transición escogidas para parametrizar el modelo de *Fritchman* en cada caso. Junto a cada tasa de error en bit se han calculado los valores de los factores L_R , L_G y L_C asociados. Para cada una de las tasas de error estudiadas, se generaron cinco secuencias de error diferentes, de manera que todos los resultados que se muestran corresponden a una media realizada a partir de la experimentación con estas cinco secuencias.

BER	1/100000	1/75000	1/50000	1/25000	1/15000
Prob. Transición					
p_{13}	0.000005	0.000006	0.000008	0.00001	0.00001
p_{23}	0.00005	0.00006	0.00008	0.0001	0.0001
p_{33}	0.05	0.1	0.15	0.3	0.4
p_{32}	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Factores de interés					
L_R	100.2	100.3	100.4	100.8	101.1
L_G	105466.1	83534.4	59020.8	35880.9	25113
L_C	1.05	1.1	1.2	1.4	1.7

Tabla B.1 Probabilidades de transición en el Modelo de Fritchman Simplificado

B.3.2 Modelos temporales

Otra forma de caracterizar los errores en forma de ráfagas en los canales móviles es mediante modelos temporales.

El más habitual, es el que se muestra en la Figura B.8

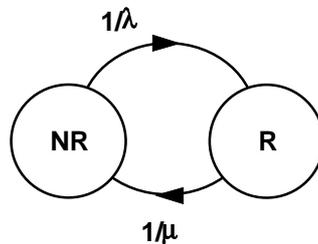


Figura B.8 Modelo temporal

Se trata de una cadena de Markov de dos estados: el estado de ráfaga y el de no-ráfaga. El primero de ellos (R) representa el tiempo durante el cual un canal está sometido a ráfagas de error mientras que el segundo (NR) representa el intervalo durante el cual el canal está libre de errores.

Las transiciones del estado R al NR se producen con una cierta probabilidad p . Las transiciones del estado NR al R se producen con probabilidad q .

En el estado NR, los paquetes transmitidos son recibidos correctamente con una muy alta probabilidad (nosotros consideraremos que esta probabilidad es 1). En el R, la mayoría de los paquetes resultan afectados por errores (nosotros consideraremos que, en este estado, la probabilidad de error en bit es $1/2$). Hay que tener en cuenta que un único bit erróneo se traduce, en ausencia de corrección de errores, en la pérdida de todo el paquete.

Además, el tiempo durante el cual el canal se encuentra en estado de error, puede llegar a ser suficientemente largo como para forzar un número de bits erróneos tal, que afecte a más de un paquete consecutivo.

Un modelo temporal resulta muy útil ya que, a menudo, las ráfagas de error presentes en los canales móviles, son función de interferencias electromagnéticas o movimientos que pueden, a su vez, ser modelados como funciones del tiempo.

En nuestro modelo, asumiremos que los intervalos de tiempo correspondientes a los estados NR y R están distribuidos exponencialmente alrededor de sendas medias $1/\lambda$ y $1/\mu$. En la mayoría de estudios que adoptan este modelo temporal de dos estados para sus simulaciones, se supone este tipo de distribución por ser la que más fielmente refleja la situación real.

- **Generación de una variable aleatoria exponencial**

La generación de una variable aleatoria exponencial puede llevarse a cabo utilizando una de tipo uniforme.

Dada una variable aleatoria X distribuida uniformemente en $[0,1)$, se verifica que:

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$$

es una variable aleatoria exponencial de media $1/\lambda$.

Demostración:

En general, cualquier variable aleatoria con función de distribución $F_Y(y)$ puede generarse a partir de una uniforme distribuida entre $[0,1)$ ya que:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq x) = F_X(x) = x$$

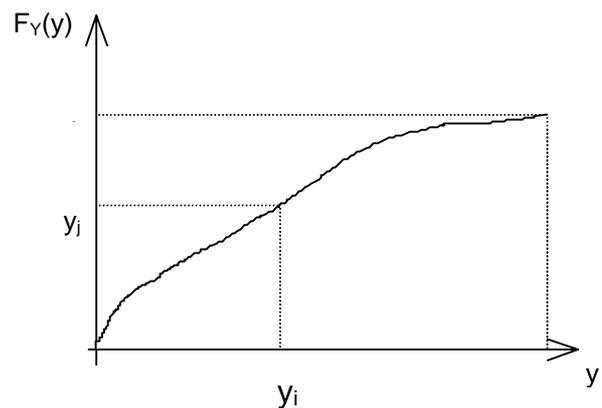
por tanto :

$$Y = F_Y^{-1}(F_Y(y)) = F_Y^{-1}(x)$$

para el caso exponencial :

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y} \Rightarrow F_Y^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$$



La variable aleatoria exponencial puede calcularse, entonces como :

$$Y = F_Y^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$$

- **Caudal máximo**

Al aplicar el modelo temporal de la Figura B.9, el Caudal máximo teórico que se puede conseguir es:

$$Caudal_{max\ teorico} = \pi_{NR} \times Caudal_{max}$$

donde π_{NR} es la probabilidad del estado de no ráfaga y Caudal_{\max} es el caudal máximo en ausencia de errores.

El cálculo de la probabilidad de estado para la cadena de Markov de la Figura B.9, puede llevarse a cabo de varias formas. A continuación expondremos la más intuitiva de ellas.

- **Cálculo de π_{NR} y π_R**

En la Figura B.9 se muestra el perfil de comportamiento del canal durante un cierto intervalo de tiempo que denominaremos Tiempo de Observación, T_{OBS}

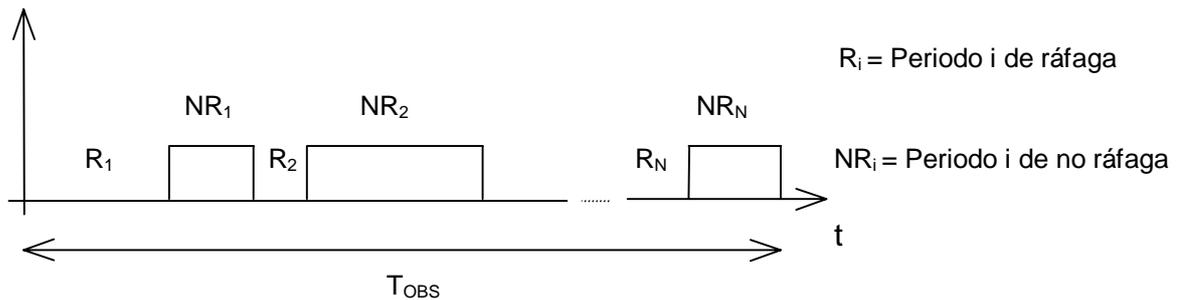


Figura B.9 Perfil de comportamiento del canal

A partir de esta figura podemos calcular las probabilidades de cada estado como:

$$\pi_{NR} = \frac{NR_1 + NR_2 + \dots + NR_N}{T_{OBS}} = \frac{N \times E(NR)}{T_{OBS}} = \frac{N \times \frac{1}{\lambda}}{T_{OBS}} \quad (B.8)$$

$$\pi_R = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_N}{T_{OBS}} = \frac{N \times E(R)}{T_{OBS}} = \frac{N \times \frac{1}{\mu}}{T_{OBS}} \quad (B.9)$$

donde:

$E(NR)$ = duración media del intervalo libre de errores (calculada a partir de las N muestras recogidas durante el tiempo de observación)

$$E(NR) = \frac{NR_1 + NR_2 + \dots + NR_N}{N}$$

$E(R)$ = duración media del intervalo de ráfaga (calculada a partir de las N muestras recogidas durante el tiempo de observación)

$$E(R) = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_N}{N}$$

Puesto que la suma de las probabilidades de estado ha de ser igual a la unidad, se tiene que:

$$\pi_{NR} + \pi_R = 1$$

$$\pi_{NR} + \pi_R = \frac{N}{T_{OBS}} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{N}{T_{OBS}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} \quad (B.10)$$

Finalmente, substituyendo (B.10) en (B.8) y (B.9) obtenemos:

$$\pi_{NR} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_R = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Por tanto,

$$Caudal_{max\text{teorico}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \times Caudal_{max} \quad (B.11)$$