



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

T 01128
1400354241



ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA
DE TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA

**Contribución a la Evaluación y Dimensionado de Nodos y
Enlaces en Redes de Alta Velocidad.**

TESIS DOCTORAL

UPC

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Tesis Doctoral presentada en la
Universidad Politècnica de Catalunya
para la obtención del título de Doctor
Ingeniero de Telecomunicación

Autor: **Esteve Pallarès Segarra**

Director: **Dr. Joan García Haro**

Año: **2001**

a Núria

Agradecimientos

Aprovecho estas líneas para agradecer a todas personas que me han ayudado, me han animado y me han soportado durante el desarrollo de este trabajo.

En primer lugar quiero hacer una mención especial a mi director de tesis Joan García Haro agradeciéndole todo su esfuerzo y dedicación, su apoyo incondicional y sus dosis de moral en los momentos difíciles.

También agradecer a Mónica Aguilar su ayuda incondicional, a Jorge Mata sus consejos mientras espera que se le enfríe un café con leche, a Alfonso Rojas sus acaloradas discusiones en la pizarra del despacho, a Emilio Sanvicente sus sabios consejos, a Luis Javier De la Cruz los buenos recuerdos, a Marta Solora sus ánimos desde la distancia, y a Jordi Forné su visión particular de las cosas.

Tampoco quiero olvidar a Josep Pegueroles, Marcos Postigo (últimamente mi compañero de viaje), Miquel Soriano, Francisco Rico, José Luis Melús y al recién incorporado José Luis Muñoz.

Agradecer finalmente a mi familia, y en especial a mis padres, todo su apoyo.

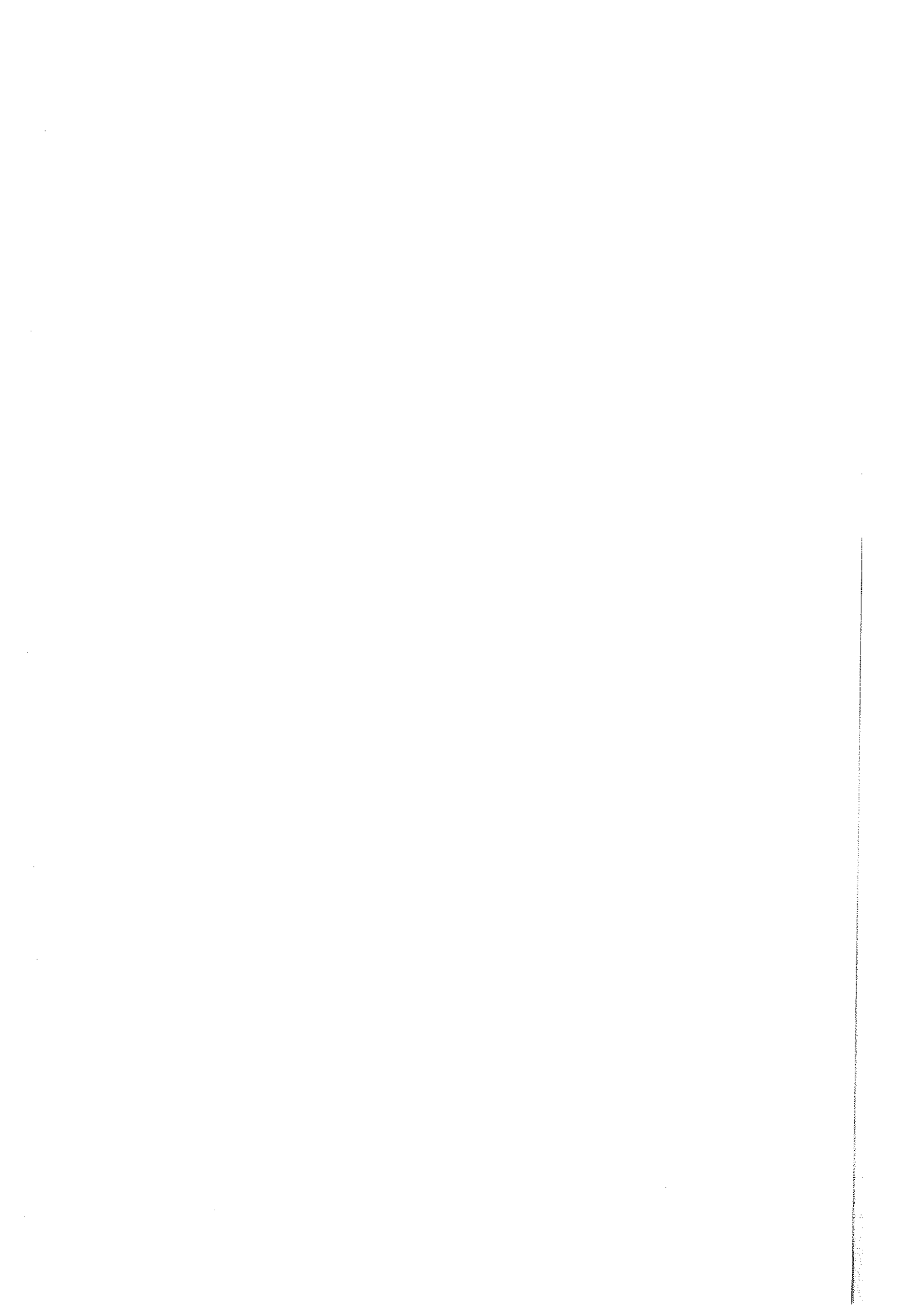
A todos muchas gracias.

Resumen

La tendencia de las redes actuales de telecomunicaciones es la integración de todo tipo de servicios los cuales demandan distintos criterios de calidad. A pesar de ello se siguen utilizando redes clásicas que originalmente fueron pensadas para soportar un único tipo de servicio. Dichas redes son adaptadas para poder soportar con mayor o menor éxito la demanda de nuevos servicios exigida por los usuarios. En este entorno parece lógico desarrollar nuevas herramientas que permitan evaluar el comportamiento de estas redes integradoras de servicios.

En este trabajo se han desarrollado nuevas herramientas de análisis para estudiar la de pérdida de información en el *buffer* de un multiplexor. Para caracterizar el tráfico agregado se ha utilizado un modelo de fluidos con fuentes ON-OFF heterogéneas. Así pues a partir de modelos fiables de tráfico real basados en fuentes ON-OFF es posible utilizar estas herramientas para el diseño y dimensionado de redes de telecomunicaciones. Se han desarrollado técnicas analíticas que permiten obtener una mayor precisión en el cálculo de la probabilidad de pérdida. En el caso de utilizar muchas fuentes, el cálculo de esta probabilidad puede ser una tarea computacionalmente muy costosa e incluso inabordable. En este trabajo se propone una expresión aproximada que facilita dicho cálculo, de manera que tenga un coste computacional razonable. Se han comparado los resultados obtenidos utilizando la expresión aproximada con los valores exactos, obteniendo un resultado bastante satisfactorio. Además la expresión propuesta también es de utilidad para el diseño y el dimensionamiento de nodos y enlaces en redes de telecomunicaciones.

Finalmente también se ha propuesto un algoritmo heurístico para el diseño de topologías de redes conmutadas en las cuales se quiera acotar la probabilidad de pérdida de la información. Dicho algoritmo consta de dos fases, primero se construye una topología inicial que cumpla con las restricciones de calidad de servicio impuestas a la red. En una segunda fase se intentan combinar pares de nodos para formar uno solo, siempre y cuando se sigan cumpliendo las restricciones de conectividad y de calidad de servicio. El objetivo es obtener una topología con el mínimo número de nodos y de enlaces posible.



Índice

Capítulo 1	Introducción.....	1
1	Motivación.....	1
2	Objetivos.....	2
3	Contenido.....	2
Capítulo 2	Modelo de Fluidos.....	5
1	Introducción.....	5
2	Fuentes ON-OFF.....	6
2.1	Caso homogéneo.....	7
2.2	Caso heterogéneo.....	9
3	Modelo de cola.....	12
3.1	Caso homogéneo.....	13
3.2	Caso heterogéneo.....	20
4	Conclusiones.....	24
Capítulo 3	Cálculo de la probabilidad de pérdida.....	27
1	Introducción.....	27
2	Probabilidades de pérdida.....	29
2.1	Probabilidad de <i>overflow</i>	30
2.2	Tasa de pérdida de fluido.....	36
2.3	Probabilidad de pérdida de fluido.....	42
3	Pruebas realizadas.....	43
4	Conclusiones.....	46
Capítulo 4	Cálculo del coeficiente α_1	49
1	Introducción.....	49
2	Cálculo del coeficiente α_1	50
2.1	Cálculo para un tamaño de <i>buffer</i> finito.....	53
2.2	Cálculo para un sistema sin <i>buffer</i>	54
2.3	Dependencia de α_1 con la capacidad del canal.....	55
2.4	Dependencia de α_1 con el tamaño del <i>buffer</i> m	59
3	Cálculo aproximado del coeficiente α_1	61
4	Cálculo aproximado de la probabilidad de pérdida.....	71
5	Conclusiones.....	76
Capítulo 5	Diseño de Topologías.....	79
1	Introducción.....	79
2	Diseño de Topologías.....	80
2.1	Diseño de la topología inicial.....	82
2.2	Mejora de la topología.....	86
3	Ejemplo de diseño.....	90
4	Conclusiones.....	106
Capítulo 6	Conclusiones y líneas futuras.....	107
1	Conclusiones.....	107
2	Líneas futuras.....	110
Apéndice A	113
1	Cálculo de los autovalores y los autovectores para el caso homogéneo.....	113
1.1	Cálculo de autovalores.....	114
1.2	Cálculo de los autovectores.....	119
Referencias	121

Capítulo 1 Introducción

1 Motivación

Originalmente las redes de telecomunicaciones convencionales estaban caracterizadas por su especialización en función del servicio que debían transportar. Así pues, podemos encontrar redes de conmutación de circuitos para el transporte de voz (RTC), redes de radiodifusión para señales de TV o redes dedicadas al transporte de datos (protocolos basados en X.25 en el dominio público o LANs en el privado). Cada una de estas redes fue diseñada específicamente para el servicio que debía ofrecer y normalmente no son capaces de soportar ningún otro tipo de servicio, y aún cuando ello es posible se tiene un uso ineficiente de la red (p.e. la transmisión de datos a través de la RTC mediante modems). Así pues podemos encontrar un gran número de redes independientes, cuyo dimensionado depende del tipo de servicio que ofrecen.

Además, por parte de los usuarios, ha aumentado la demanda de nuevos servicios que requieren mayores velocidades de transmisión (p.e. *Video-on-demand*, videofonía, transferencia de datos a alta velocidad, HDTV, etc). Dichos servicios generan sobre la red que los transporta nuevos requisitos de distintas naturalezas.

Así pues la tendencia actual es la integración de todos estos servicios y los posibles servicios que puedan aparecer en un futuro, de manera que las redes deben ser flexibles a los requisitos de los distintos servicios a integrar y que a su vez estos puedan utilizar los recursos de la red de una manera eficiente. Ello se traduce en que es necesario revisar los procedimientos de dimensionado y de diseño que se usaban en las redes convencionales ya que en muchos casos han dejado de ser válidos.

2 Objetivos

En este trabajo se utilizará un modelo de tráfico agregado, en concreto un modelo de fluidos con fuentes ON-OFF. Nuestro objetivo será estudiar la ocupación de un *buffer* de capacidad finita cuando es alimentado por un conjunto de dichas fuentes. El fluido almacenado en dicho *buffer* será drenado por un canal con una tasa constante. En concreto se pretende encontrar un modelo que permita evaluar la probabilidad de pérdida en un multiplexor cuando a éste llegan distintas clases de tráfico. Ya que el tráfico podrá ser de distintas naturalezas, se utilizará un modelo con fuentes ON-OFF heterogéneas. No forma parte de los objetivos de este trabajo el intentar modelar tráfico real mediante fuentes ON-OFF. Existen distintos modelos en la literatura para estos casos [Tuck88][Mat96]. Una vez analizada la probabilidad de pérdida de fluido en el modelo expuesto anteriormente, se propondrán soluciones aproximadas pero que son computacionalmente más sencillas que las habituales. A partir de dichas soluciones será posible desarrollar expresiones aproximadas que faciliten el diseño y dimensionado de las redes. En concreto para redes conmutadas en entornos locales, ya que es en este tipo de redes, donde es más fácil tener situaciones de congestión, siendo la probabilidad de pérdida un elemento de calidad de servicio a tener en consideración.

Además también se propondrá una metodología de diseño de topologías para redes conmutadas en entornos locales. Al algoritmo propuesto es de tipo heurístico y su propósito será obtener una topología de red que cumpla con las restricciones de calidad de servicio y que además minimice el número de nodos y enlaces de la red.

3 Contenido

En el Capítulo 2 se realizará una introducción a las fuentes ON-OFF y a los procesos de nacimiento y muerte que definen un conjunto de fuentes de este tipo independientes. Se estudiarán dos casos: el caso homogéneo y el caso heterogéneo. En el caso homogéneo todas las fuentes tienen los mismos parámetros que las

definen. En el caso heterogéneo las fuentes se agrupan en clases, de manera que las fuentes que pertenecen a una misma clase son iguales. A continuación se propondrá un modelo de multiplexor formado por un *buffer* y un canal que drena el fluido generado por las fuentes con tasa constante. Una vez definido el modelo se estudiará la ocupación de dicho *buffer* tanto para el caso homogéneo como para el caso heterogéneo. La nomenclatura definida en este capítulo será la utilizada en los capítulos restantes.

En el capítulo 3 se estudiará la probabilidad de pérdida de fluido en el modelo de multiplexor expuesto en el capítulo 2. Se estudiará la probabilidad de *overflow*, la cual es una aproximación sobre el tanto por ciento del tiempo que el *buffer* está perdiendo fluido y se indicarán cuáles son las aproximaciones más habituales para dicha pérdida que se utilizan habitualmente. A continuación se estudiará la probabilidad de pérdida de fluido la cual sí que es una medida de la cantidad de fluido que el sistema puede perder. Una de las principales contribuciones en este capítulo será la demostración de que dicha probabilidad depende de un único parámetro al que denominaremos α_1 , de manera que el conocimiento de dicho parámetro significará poder calcular la probabilidad de pérdida de manera sencilla.

En el capítulo 4 se expondrán distintas metodológicas para el cálculo del coeficiente α_1 . Los objetivos de dichas metodológicas son el facilitar el cálculo de dicho coeficiente y obtener resultados con el máximo de precisión. Finalmente se propondrá un método para el cálculo aproximado de dicho coeficiente. Dicho método está basado en el efecto del autovalor dominante y es una de las principales contribuciones de este trabajo. Se comparará el método aproximado con el método exacto para comprobar la bondad de dicha aproximación. Finalmente se indicarán cuáles son las ventajas de utilizar el método aproximado como se puede utilizar para el diseño y dimensionado de nodos y enlaces en redes conmutadas.

En el Capítulo 5 se propone una metodología heurística para el diseño de topologías para redes conmutadas en entornos locales. Dicha metodología también es una de las contribuciones a este trabajo. El objetivo de dicho método es encontrar una topología con el mínimo número de nodos y enlaces que garantice que la probabilidad de pérdida en cada nodo de la topología está acotada. El método propuesto es suficientemente genérico para poder utilizar alguna otra restricción de calidad de servicio.

Finalmente en el capítulo 6 se expondran las conclusiones más relevantes de este trabajo.

Capítulo 2 Modelo de fluidos

1 Introducción

Actualmente las redes de telecomunicaciones integran gran variedad de servicios multimedia, y todos ellos con distintos requerimientos de calidad de servicio. Para poder evaluar el comportamiento de estos servicios existe gran variedad de modelos de tráfico [Nik92]. Cada uno de estos modelos suele ser específico para un tipo de servicio en concreto, siendo difícil el estudio del comportamiento de un tráfico debido a la agregación de distintos servicios. Una posibilidad para poder estudiar tráfico integrado es la utilización del modelo para los distintos servicios soportados por la red. Entre estos modelos, uno de los más ampliamente utilizados desde ya hace tiempo [Kle76], es el modelo de fluidos con fuentes ON-OFF. En este caso, el tráfico es tratado como un fluido continuo, el cual fluye por los distintos enlaces de la red. Así pues, la agregación de tráfico es consecuencia de la superposición de fluido generado por un conjunto de fuentes ON-OFF independientes. La utilidad de dicho modelo para la multiplexación de fuentes de voz ha sido estudiada en [Tuc88]. También es posible utilizar un conjunto de fuentes ON-OFF para modelar un único tipo de servicio. Un ejemplo de ello lo encontramos en [Mat96], donde se utiliza un modelo con dos tipos de fuentes distintas para modelar tráfico de vídeo. El hecho de tratar el tráfico como un fluido

continuo hace que desaparezca el concepto de paquetización de la información, permitiendo que este modelo pueda ser utilizado de manera independiente a los protocolos de comunicaciones utilizados.

No es el objetivo de este trabajo, el modelar tipos específicos de tráfico mediante un modelo de fluidos con fuentes ON-OFF. No se pretende en ningún momento calcular los parámetros más adecuados para modelar los distintos servicios que puedan coexistir en una red. Los modelos utilizados en los distintos ejemplos son modelos muy simples formados únicamente por una única fuente ON-OFF para cada servicio. Lo que se pretende en este trabajo es desarrollar un conjunto de herramientas de uso genérico basadas en el modelo de fluidos y fuentes ON-OFF. Dichas herramientas facilitarán el cálculo de algunos de los parámetros que determinan la calidad de servicio en una red. Dichas herramientas deben ser de utilidad para evaluar el comportamiento de los nodos y enlaces de la red y para poder ser utilizadas en cuestiones de dimensionado de la red.

En este capítulo se hará una introducción a las fuentes ON-OFF y a los procesos de nacimiento y muerte asociados a un conjunto de fuentes independientes. En concreto se distinguirá entre dos casos, el homogéneo y el heterogéneo. En el primero se supondrán todas las fuentes ON-OFF iguales. En el segundo caso se supondrá que las fuentes son distintas y habrá que clasificarlas por clases. El desarrollo de las distintas expresiones matemáticas se hará para ambos casos pudiéndose considerar el caso heterogéneo como una extensión del homogéneo. A continuación se estudiará la ocupación de un *buffer* cuando es llenado por el fluido generado por un conjunto de fuentes ON-OFF independientes. En este caso también se distinguirá entre el caso homogéneo y el caso heterogéneo. También se indicarán cuáles son las principales dificultades de cálculo en las distintas expresiones obtenidas y las principales diferencias en el cálculo de ambos casos. La nomenclatura introducida en este capítulo será la que se utilizará en los capítulos restantes.

2 Fuentes ON-OFF

Una fuente ON-OFF es una fuente de tráfico que alterna entre dos estados, el estado ON y el estado OFF. Cuando la fuente está en ON genera fluido con una tasa constante r hasta que cambia al estado OFF. Para el caso que nos ocupa dicha tasa se define como unidades de información divididas por unidades de tiempo, por ejemplo bits/seg. Los tiempos de permanencia en cada uno de los estados son

variables aleatorias las cuales están distribuidas exponencialmente. Con este modelo se obtiene una cadena de Markov de dos estados siendo λ la tasa de transición desde ON hasta OFF y μ la tasa desde OFF hasta ON.

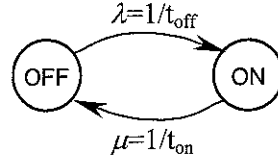


Figura 2.1 Modelo de fuente ON-OFF.

El tiempo medio de permanencia de cada uno de los estados es igual al inverso de su tasa de salida. De esta manera, cada fuente individual queda definida por estos tres parámetros: r , λ y μ . La probabilidad de cada uno de los dos estados viene dada por las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2).

$$P_{on} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (2.1.1)$$

$$P_{off} = \frac{t_{off}}{t_{on} + t_{off}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.1.2)$$

Consideramos ahora un conjunto de N fuentes ON-OFF independientes. Si todas las fuentes son iguales hablaremos del caso homogéneo, de lo contrario hablamos del caso heterogéneo. En el caso heterogéneo las fuentes se agrupan formando R clases distintas, de manera que todas las fuentes pertenecientes a una misma clase son iguales. Cada clase u ($1 \leq u \leq R$) está formada por n_u fuentes independientes con los mismos parámetros r_u , λ_u y μ_u . El caso homogéneo se puede interpretar como un caso particular del caso heterogéneo con una única clase ($R=1$).

2.1 Caso homogéneo

Al considerar un conjunto de N fuentes ON-OFF iguales obtenemos un nuevo proceso discreto en estado de manera que cada estado i indica el número de fuentes activas. Las transiciones entre estados se producen cuando se activa o desactiva una fuente. Debido a que los tiempos de conmutación entre ON y OFF de cada fuente están distribuidos exponencialmente y a que las fuentes son independientes, el tiempo de permanencia en cada estado para el nuevo proceso también está distribuido exponencialmente. Se obtiene así un proceso de nacimiento y muerte cuyo diagrama de estados está representado en la Figura 2.2.

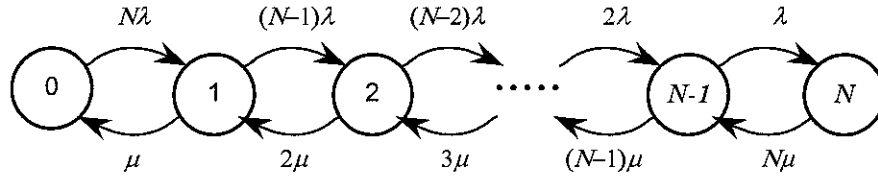


Figura 2.2 Cadena de Markov para el caso homogéneo.

La probabilidad de que aumente el número de fuentes activas es proporcional al número de fuentes inactivas, y la probabilidad de que el número de fuentes activas disminuya es proporcional al número de fuentes activas. Por lo tanto, las tasas de transición vienen expresadas por (2.2) y (2.3), siendo $r\{i, i+1\}$ y $r\{i, i-1\}$ las tasas de activación y desactivación de una fuente en el estado i .

$$r\{i, i+1\} = (N-i)\lambda \quad (2.2)$$

$$r\{i, i-1\} = i\mu \quad (2.3)$$

Para encontrar las probabilidades de estado en régimen estacionario del proceso de nacimiento y muerte es necesario resolver un sistema lineal de $N+1$ ecuaciones. Dichas ecuaciones se obtienen considerando que el flujo de probabilidad entrante en cada estado es igual al flujo saliente. Expresado matemáticamente se obtiene (2.4).

$$\begin{aligned} N\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 & i=0 \\ [(N-i)\lambda + i\mu]\pi_i &= [N-(i-1)]\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} & 1 \leq i \leq N-1 \\ \lambda\pi_{N-1} &= N\mu\pi_N & i=N \end{aligned} \quad (2.4)$$

Este sistema de ecuaciones es linealmente dependiente, de manera que sus soluciones se suelen expresar en función de π_0 tal como se indica en (2.5).

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{(N-k)\lambda}{(k+1)\mu} \quad (2.5)$$

Finalmente para calcular todas las probabilidades de estado se utiliza la propiedad (2.6).

$$\sum_{i=0}^N \pi_i = 1 \quad (2.6)$$

Los estados vecinos al estado S son aquellos para los cuales aumenta o disminuye en una unidad el número de fuentes activas, obteniendo así un proceso de nacimiento y muerte R -dimensional. Cada estado tiene como máximo $2R$ vecinos. Designamos con S_{u+} al estado vecino a S debido a la activación de una fuente de clase u , y designamos con S_{u-} al estado vecino a S debido a la desactivación de una fuente de clase u , tal como se muestra en (2.12) y (2.13).

$$S_{u+} = (s_1, s_2, \dots, s_u + 1, \dots, s_R) \quad (2.12)$$

$$S_{u-} = (s_1, s_2, \dots, s_u - 1, \dots, s_R) \quad (2.13)$$

En la Figura 2.3 se muestra parte de la cadena de Markov correspondiente a los estados vecinos de S .

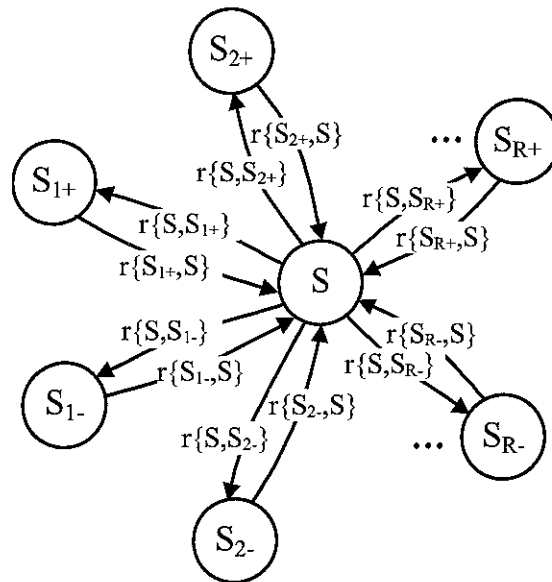


Figura 2.3 Diagrama de los estados vecinos a S .

El número total de estados de la cadena viene dado por la ecuación (2.14) .

$$n = \prod_{u=1}^R (n_u + 1) \quad (2.14)$$

La transición desde el estado S hacia un estado vecino puede ser debida a la activación o a la desactivación de una fuente. La tasa de transición debida a la activación de una fuente de clase u es proporcional al número de fuentes de clase u inactivas en el estado S . Análogamente la tasa de transición debida a la desactivación de una fuente de clase u es proporcional al número de fuentes de clase u activas en estado S . Si denotamos ambas tasas como $r\{S, S_{u+}\}$ y $r\{S, S_{u-}\}$

respectivamente (véase la Figura 2.3), podemos expresar las tasas de salida del estado S utilizando las expresiones (2.15) y (2.16)

$$r\{S, S_{u+}\} = \begin{cases} (n_u - s_u)\lambda_u & 0 \leq s_u \leq n_u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$r\{S, S_{u-}\} = \begin{cases} s_u\mu_u & 0 \leq s_u \leq n_u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.16)$$

De la misma forma, las tasas de entrada a S vienen dadas por las ecuaciones (2.17) y (2.18).

$$r\{S_{u+}, S\} = \begin{cases} [n_u - (s_u + 1)]\lambda_u & 0 \leq s_u \leq n_u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$r\{S_{u-}, S\} = \begin{cases} (s_u - 1)\mu_u & 0 \leq s_u \leq n_u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.18)$$

Otro parámetro de interés es la tasa total saliente del estado S la cual se puede expresar según la ecuación (2.19).

$$r^*\{S\} = \sum_{u=1}^R [s_u\mu_u + (n_u - s_u)\lambda_u] \quad 0 \leq s_u \leq n_u \quad (2.19)$$

En este caso también es posible calcular las probabilidades de estado en régimen estacionario (π_S) resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al igualar el flujo de probabilidad entrante con el flujo saliente, para cada estado. Cada una de las n ecuaciones lineales se puede expresar de forma compacta mediante la expresión (2.20).

$$r^*\{S\}\pi_S = \sum_{u=1}^R r\{S_{u+}, S\}\pi_{S_{u+}} + r\{S_{u-}, S\}\pi_{S_{u-}} \quad (2.20)$$

Cada una de las R clases se puede interpretar como un sistema homogéneo de fuentes ON-OFF. Como las fuentes son independientes la probabilidad de cada estado en el caso heterogéneo se puede calcular como el producto de las R probabilidades de estado de cada sistema homogéneo. Se obtiene así la expresión (2.22), siendo p_u y q_u las probabilidades de ON y OFF expresadas en (2.1.1) y (2.1.2) para una fuente perteneciente a la clase u .

$$\pi_S = \prod_{u=1}^R \binom{n_u}{s_u} p_u^{s_u} q_u^{n_u - s_u} \quad (2.21)$$

El sistema formado por las ecuaciones (2.20) también puede expresarse matricialmente, obteniendo la misma ecuación que en el caso homogéneo (2.8). En este caso el generador infinitesimal \mathbf{M} también es una matriz con muchos ceros pero no tiene una estructura diagonal. El valor de cada elemento m_{ij} de la matriz viene dado por (2.22).

$$m_{ij} = \begin{cases} -r^* \{S_i\}; & \text{si } i = j \\ r\{S_j, S_i\}; & \text{si } S_i \text{ y } S_j \text{ son estados vecinos} \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.22)$$

En el caso homogéneo el orden de los estados depende del número de fuentes activas. Para el caso heterogéneo este orden es arbitrario y depende de cómo se ordenen los estados en el vector de probabilidades (2.23).

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_S, \dots, \pi_n) \quad (2.23)$$

Tomando la columna j del generador infinitesimal \mathbf{M} se observa que, exceptuando el elemento perteneciente a la diagonal, el resto de elementos distintos de cero son el flujo saliente del estado S_j ($r\{S_j, S_i\}$). El elemento de la diagonal es el flujo total saliente del estado S_j cambiado de signo ($-r^*\{S_j\}$). De esta manera se observa que la suma una columna genérica de la matriz \mathbf{M} vale 0 al igual que pasaba en el caso homogéneo. Matricialmente se puede expresar esta propiedad como (2.24), siendo $\mathbf{1}$ un vector fila formado por todo unos.

$$\mathbf{1M} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

3 Modelo de cola

Suponemos ahora un conjunto de fuentes ON-OFF que alimentan a un *buffer* o depósito donde se almacena el fluido que generan. Dicho depósito es de capacidad finita m y se vacía a tasa constante C (Figura 2.4). Dicha tasa C representa la capacidad del enlace asociado al puerto de salida de un conmutador y estará expresada en unidades de información divididas por unidades de tiempo al igual que las tasas de generación de fluido de las fuentes.

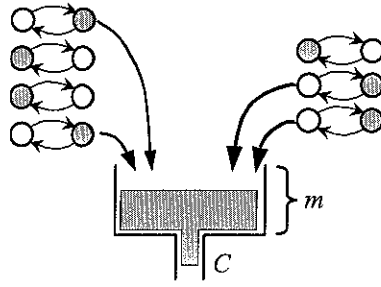


Figura 2.4 Modelo de fluidos con fuentes ON-OFF.

La condición para que el sistema sea estable es que el fluido medio generado por todas las fuentes sea menor que la capacidad del canal C , tal como se observa en la ecuación (2.25).

$$\sum_{u=1}^R n_u r_u \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \mu_u} < C \quad (2.25)$$

Nuestro objetivo será estudiar la ocupación de dicho *buffer* para poder calcular los parámetros de interés del sistema. En la teoría clásica de colas la variable que define la ocupación de un *buffer* es una variable discreta, la cual representa el número de elementos que están a la espera de ser servidos. Con los modelos de fluidos dicha ocupación está definida por una variable aleatoria continua la cual representa la cantidad de fluido almacenado en el depósito antes de ser drenado por el canal. Para realizar dicho análisis distinguiremos entre el caso homogéneo y el caso heterogéneo.

3.1 Caso homogéneo

Supongamos un sistema como el descrito anteriormente alimentado por un conjunto de N fuentes ON-OFF todas iguales e independientes. Como tenemos un proceso de nacimiento y muerte, si estudiamos la evolución del sistema en un intervalo Δt muy reducido este sólo podrá cambiar a un estado vecino o mantenerse en el mismo estado. Así pues, en el instante $t + \Delta t$ el sistema sólo se hallará en el estado i si ha ocurrido alguno de estos tres sucesos:

- En el instante t el sistema se hallaba en el estado $i-1$ y durante los Δt segundos siguientes se ha activado una fuente.
- En el instante t el sistema se hallaba en el estado i y durante los Δt segundos siguientes no se ha activado ninguna fuente.

- En el instante t el sistema se hallaba en el estado $i+1$ y durante los Δt segundos siguientes se ha desactivado una fuente.

Como el proceso es de Markov, la probabilidad de que se active o desactive una fuente en un intervalo infinitesimal Δt es proporcional a dicho intervalo, y el factor de proporcionalidad es la tasa de transición hacia un estado superior en el caso de una activación o hacia el inferior en el caso de una desactivación, tal como se expresa en (2.26) y (2.27). El suceso contrario a una transición es la permanencia, de manera que la probabilidad de que el sistema permanezca en el mismo estado será la probabilidad complementaria a las posibles transiciones. Las probabilidades de transición desde estado i debida a una activación es $r\{i, i+1\}$ y la a una desactivación es $r\{i, i-1\}$, así pues la probabilidad de permanencia en el estado i se expresa en (2.28).

$$r\{i-1, i\}\Delta t = [N - (i-1)]\lambda\Delta t \quad (2.26)$$

$$r\{i+1, i\}\Delta t = (i+1)\mu\Delta t \quad (2.27)$$

$$1 - (r\{i, i+1\} + r\{i, i-1\})\Delta t = 1 - [(N-i)\lambda + i\mu]\Delta t \quad (2.28)$$

Por otro lado también nos interesará conocer la evolución de la ocupación del *buffer* durante Δt . Denominamos estados de sobrecarga a aquellos estados para los cuales el fluido generado por las fuentes activas es superior a la capacidad del canal para drenarlo. Análogamente llamaremos estados de infracarga a aquellos estados para los cuales el fluido generado por las fuentes activas es inferior a la capacidad del canal. En los estados de sobrecarga la ocupación del *buffer* aumentará, pudiéndose producir una situación de pérdida de fluido. Sin embargo, en los estados de infracarga la ocupación del *buffer* disminuirá pudiendo quedar éste vacío.

Sea x la variable aleatoria que indica la cantidad de fluido almacenada. La cantidad neta de fluido que ha entrado en el *buffer* durante Δt , la cual denotaremos como Δx , dependerá del estado del sistema en el instante t . Si en el instante t el sistema está en el estado i el fluido neto que entra en el *buffer* es el fluido generado por las i fuentes activas menos la cantidad de fluido drenada por el canal, tal como se expresa en (2.29).

$$\Delta x = (ir - C)\Delta t \quad (2.29)$$

En los estados de sobrecarga Δx será positivo, mientras que en los estados de infracarga será negativo.

Sea $P_i(t, x)$; $0 \leq i \leq N$, $t \geq 0$, $0 < x < m$, la probabilidad de que en el instante t el sistema esté en el estado i (haya i fuentes activas) y la ocupación del *buffer* sea inferior a x . Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente $P_i(t+\Delta t, x)$ es igual a la suma de probabilidades de estar en un estado vecino en t , multiplicadas por la probabilidad de transición hacia i en Δt ; más la probabilidad de estar en el estado i en t multiplicada por la probabilidad de que el sistema permanezca en dicho estado durante Δt . Además habrá que considerar que la ocupación del *buffer* en t deberá ser igual a la diferencia entre x y el fluido neto entrante durante Δt . Se obtiene así la ecuación (2.30).

$$\begin{aligned} P_i(t + \Delta t, x) = & P_{i-1}(t, x - [(i-1)r - C]\Delta t)[N - (i-1)]\lambda\Delta t + \\ & + P_{i+1}(t, x - [(i+1)r - C]\Delta t)(i+1)\mu\Delta t + \\ & + P_i(t, x - [ir - C]\Delta t)\{1 - [(N-i)\lambda + i\mu]\Delta t\} + o\Delta t \end{aligned} \quad (2.30)$$

Despejando en el segundo miembro todo lo que es proporcional a Δt se obtiene (2.31)

$$\begin{aligned} P_i(t + \Delta t, x) - P_i(t, x) - [P_i(t, x - [ir - C]\Delta t) - P_i(t, x)] = \\ = P_{i-1}(t, x - [(i-1)r - C]\Delta t)[N - (i-1)]\lambda\Delta t - \\ - P_{i+1}(t, x - [(i+1)r - C]\Delta t)(i+1)\mu\Delta t + \\ + P_i(t, x - [ir - C]\Delta t)[(N-i)\lambda + i\mu]\Delta t + o\Delta t \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dividiendo ambos miembros por Δt y utilizando la ecuación (2.29) se obtiene (2.32).

$$\begin{aligned} \frac{P_i(t + \Delta t, x) - P_i(t, x)}{\Delta t} + (ir - C) \frac{P_i(t, x - \Delta x) - P_i(t, x)}{-\Delta x} = \\ = P_{i-1}(t, x - [(i-1)r - C]\Delta t)[N - (i-1)]\lambda + \\ + P_{i+1}(t, x - [(i+1)r - C]\Delta t)(i+1)\mu - \\ - P_i(t, x - [ir - C]\Delta t)[(N-i)\lambda + i\mu] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales (2.33)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i(t, x)}{\partial t} + (ir - C) \frac{\partial P_i(t, x)}{\partial x} = \\ = P_{i-1}(t, x)[N - (i-1)]\lambda + P_{i+1}(t, x)(i+1)\mu - P_i(t, x)[(N-i)\lambda + i\mu] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sólo estamos interesados en sistemas estables que cumplan la condición (2.25) y por tanto capaces de llegar a un régimen estacionario. Sea $F_i(x)$ la probabilidad en régimen estacionario de que el sistema se encuentre en el estado i y la ocupación del *buffer* sea inferior o igual a x . Eliminando la dependencia temporal de (2.33) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales (2.34) el cual nos permitirá obtener los valores de $F_i(x)$.

$$\begin{aligned}
 -C \frac{dF_0(x)}{dx} &= -N\lambda F_0(x) + \mu F_1(x) \\
 (ir - C) \frac{dF_i(x)}{dx} &= [N - (i - 1)]\lambda F_{i-1}(x) - [(N - i)\lambda + i\mu]F_i(x) + (i + 1)\mu F_{i+1}(x) \quad 0 < i < N \\
 (Nr - C) \frac{dF_N(x)}{dx} &= \lambda F_{N-1}(x) - N\mu F_N(x)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sea $\mathbf{F}(x)$ como el vector formado por las probabilidades $F_i(x)$ tal como se muestra en (2.35).

$$\mathbf{F}(x) = (F_0(x), F_1(x), \dots, F_i(x), \dots, F_N(x)) \tag{2.35}$$

Podemos expresar el sistema de ecuaciones (2.34) de forma matricial tal como se muestra en (2.36).

$$\mathbf{D} \frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{M} \mathbf{F}(x) \tag{2.36}$$

\mathbf{M} es el generador infinitesimal (2.9) del proceso de Markov debido a las N fuentes ON-OFF. \mathbf{D} es una matriz diagonal cuyos valores representan la tasa neta de entrada de fluido al sistema y cuya expresión se muestra en (2.37).

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{-C, r - C, \dots, Nr - C\} \tag{2.37}$$

Siempre que no haya ningún cero en la diagonal, la matriz \mathbf{D} es invertible pudiendo expresar la ecuación (2.36) como (2.38).

$$\frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{Q} \mathbf{F}(x) \tag{2.38}$$

Siendo \mathbf{Q} el producto de matrices expresado en (2.39).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \tag{2.39}$$

La solución al sistema de ecuaciones (2.38) viene dada por la expresión (2.40).

$$F(x) = a_1 e^{z_1 x} \Phi_1 + a_2 e^{z_2 x} \Phi_2 + \dots + a_j e^{z_j x} \Phi_j + \dots + a_{N+1} e^{z_{N+1} x} \Phi_{N+1} \quad (2.40)$$

Siendo z_j uno de los $N+1$ autovalores de la matriz \mathbf{Q} y Φ_j el correspondiente autovector. Los coeficientes a_j dependen de las condiciones de contorno. Estas condiciones se pueden obtener a partir de las siguientes observaciones:

- Si el fluido generado por las fuentes activas es superior a la capacidad del canal C , el sistema nunca puede estar vacío.
- Si el fluido generado por las fuentes activas es inferior a la capacidad del canal C , el sistema nunca puede estar totalmente lleno.

Sea $G_i(x)$ la probabilidad de que el sistema esté en el estado i y la ocupación del *buffer* sea superior a x . Esta nueva función es la complementaria a $F_i(x)$ respecto a la ocupación del *buffer*, de manera que la suma de ambas funciones es la probabilidad de que el sistema esté en el estado i tal como se muestra en (2.41).

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \text{prob}(i \cap \text{buffer} \leq x) \\ G_i(x) &= \text{prob}(i \cap \text{buffer} > x) \\ F_i(x) + G_i(x) &= \pi_i \end{aligned} \quad (2.41)$$

En los estados de infracarga se puede dar la situación de que la ocupación del *buffer* sea nula, ya que cuando se haya vaciado el exceso de fluido almacenado en el *buffer* durante los estados de sobrecarga, todo el fluido generado por las fuentes será drenado por el canal. Esta situación no se da para los estados de sobrecarga de manera que para dichos estados la probabilidad de que el *buffer* esté vacío es nula. Así pues la condición de contorno para estos casos es la mostrada en (2.42).

$$F_i(0^+) = 0 \Leftrightarrow G_i(0^+) = \pi_i; \quad ir > C \quad (2.42)$$

Por otro lado en los estados de sobrecarga se puede dar la situación que el depósito esté totalmente lleno y se pierda fluido en el momento que se supere la capacidad de almacenamiento del *buffer*. Esto no podrá ocurrir jamás en los estados de infracarga, de manera que la probabilidad de que se supere la capacidad del *buffer* en estos estados es nula. Se obtiene así la condición de contorno para los casos de infracarga, la cual se expresa en (2.43).

$$G_i(m^-) = 0 \Leftrightarrow F_i(m^-) = \pi_i; \quad ir < C \quad (2.43)$$

Las ecuaciones (2.42) y (2.43) permiten el cálculo de los coeficientes α_j en (2.40). Obsérvese que hay tantas condiciones de contorno como incógnitas. Como se ha dicho anteriormente la condición para que la matriz \mathbf{D} se pueda invertir es que no tenga ningún elemento nulo en su diagonal. Ello significa que no se considera ningún estado para el cual la tasa de fluido generado por las fuentes coincida con la capacidad del canal, de manera que el número de estados de sobrecarga e infracarga coincide con el número de ecuaciones en el sistema (2.38). En el caso que la capacidad del canal coincidiese con la tasa de fluido generado por las fuentes activas en alguno de los $N+1$ estados, será necesario arreglar el sistema de ecuaciones diferenciales (2.34). Supongamos de manera genérica que dicha situación se produce cuando hay k fuentes activas. La correspondiente ecuación de (2.34) quedaría en la forma expresada en (2.44).

$$0 = [N - (k - 1)]\lambda F_{k-1}(x) - [(N - k)\lambda + k\mu]F_k(x) + (k + 1)\mu F_{k+1}(x) \quad (2.44)$$

En este caso es posible expresar $F_i(x)$ como una combinación lineal de las funciones $F_j(x)$ correspondientes a los estados vecinos a i ($j = \pm i$), tal como se expresa en (2.45).

$$F_k(x) = \frac{1}{(N - k)\lambda + k\mu} \{ [N - (k - 1)]\lambda F_{k-1}(x) + (k + 1)\mu F_{k+1}(x) \} \quad (2.45)$$

Sustituyendo el valor de $F_k(x)$ expresado en (2.45) en el resto de ecuaciones de (2.34) se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones al cual le ha desaparecido la ecuación correspondiente al estado k y la incógnita $F_k(x)$. Ahora será posible resolver el sistema para el resto de $F_i(x)$ (con $i \neq k$). Una vez obtenidas las $F_i(x)$, se puede calcular $F_k(x)$ utilizando la expresión (2.45).

Estos cambios en el sistema de ecuaciones (2.34) se verán reflejados en las expresiones de las matrices \mathbf{D} y \mathbf{M} expresadas en (2.37) y (2.9) respectivamente. Por el hecho de eliminar la ecuación correspondiente al estado i se consigue eliminar la fila y la columna i de la matriz \mathbf{D} , eliminando así el cero en la diagonal que no nos permitía invertir la matriz. Así pues la matriz \mathbf{D} queda de la forma expresada en (2.46).

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{-C, r - C, \dots, (i - 1)r - C, (i + 1)r - C, \dots, Nr - C\} \quad (2.46)$$

Sea m_{ij} el elemento correspondiente a la fila i y la columna j del generador infinitesimal \mathbf{M} . Supongamos que hay un cero en la diagonal de la matriz \mathbf{D} en la

posición k -ésima Veamos cuáles son las modificaciones que hay que hacer sobre dicha matriz para poder expresar el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la expresión (2.36). Las modificaciones son las siguientes:

- Se toma la fila k de la matriz y se divide por su elemento diagonal m_{kk} cambiado de signo. De esta manera cada m_{kj} (con $j \neq k$) representa el coeficiente de $F_j(x)$ (siendo j un estado vecino a k) en la ecuación (2.45). El coeficiente m_{kk} pasa a valer -1 .
- A continuación a toda fila k (incluyendo la fila i) se le suma la nueva fila i multiplicada por el elemento m_{ki} . Este paso es el equivalente a sustituir la ecuación (2.45) en el resto de ecuaciones de (2.34).
- Una vez realizados los dos pasos anteriores, la nueva matriz \mathbf{M} ha quedado modificada de manera que su k -ésima fila y su k -ésima columna valen 0. Eliminando ambas se obtiene la nueva matriz \mathbf{M} .

Con estas modificaciones los nuevos elementos de la matriz \mathbf{M} , que denotaremos como m'_{ij} , se pueden expresar en función de los valores antiguos, que denotaremos como m_{ij} . Dicha relación se indica en la expresión (2.47).

$$m'_{ij} = m_{ij} - \frac{m_{ik}}{m_{kk}} m_{kj} \quad (2.47)$$

Con estas modificaciones sobre las matrices \mathbf{D} y \mathbf{M} es posible seguir utilizando las expresiones (2.38), (2.39) y (2.40) para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales. Además al eliminar una ecuación del sistema se consigue que el número de condiciones de contorno (2.42) y (2.43) coincida con el número de coeficientes a_j a resolver.

Por otro lado es interesante observar que en este caso también se cumple que la suma de una columna de la nueva matriz \mathbf{M} es nula, como se comprueba en (2.48).

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m'_{ij} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m_{ij} - \frac{m_{ik}}{m_{kk}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m_{kj} = -m_{ik} - \frac{m_{ik}}{m_{kk}} (-m_{ik}) = 0 \quad (2.48)$$

Análogamente también se cumple la relación (2.49).

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m'_{ij} \pi_j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m_{ij} \pi_j - \frac{m_{ik}}{m_{kk}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N m_{kj} \pi_j = -m_{ik} \pi_j - \frac{m_{ik}}{m_{kk}} (-m_{ik} \pi_j) = 0 \quad (2.49)$$

Así pues se siguen cumpliendo las propiedades (2.8) y (2.24).

Existen expresiones cerradas para poder calcular los autovalores de la ecuación. Dichos autovalores se obtienen como las raíces de un conjunto de ecuaciones de segundo grado, cuyos coeficientes se pueden expresar en función los parámetros que definen las fuentes y la capacidad del sistema [Ani82]. A partir de dichos autovalores, es posible obtener expresiones para los autovectores (véase Apéndice A). La principal dificultad en la obtención de la función expresada en (2.40) es el cálculo de los coeficientes α_j [Bla95].

3.2 Caso heterogéneo

Supongamos que el sistema se alimenta con un conjunto de fuentes ON-OFF heterogéneas. Al igual que en el caso homogéneo estudiamos el sistema en un intervalo Δt infinitesimal. En el instante $t+\Delta t$ el sistema se encontrará en el estado S si durante Δt se ha producido una transición hacia dicho estado desde un estado vecino, o bien si durante el intervalo el sistema ha permanecido en el estado S . Como es un proceso de Markov, la probabilidad de transición proporcional al intervalo, y el factor de proporcionalidad es igual a la tasa de transición. Utilizando (2.17), (2.18) y (2.19) se obtiene que la probabilidad de transición hacia S debida a la activación de una fuente es igual a (2.50), la probabilidad de transición debida a una desactivación es igual a (2.51) y la probabilidad de permanencia vale (2.52).

$$r\{S_{u-}, S\} \Delta t = (s_u - 1) \mu_u \Delta t \quad (2.50)$$

$$r\{S_{u+}, S\} \Delta t = [n_u - (s_u + 1)] \lambda_u \Delta t \quad (2.51)$$

$$1 - r^* \{S\} \Delta t = 1 - \sum_{u=1}^R [s_u \mu_u + (n_u - s_u) \lambda_u] \Delta t \quad (2.52)$$

Sea B_S la tasa de fluido generado por las fuentes activas en el estado S . Dicha tasa viene dada por la expresión (2.53).

$$B_S = \sum_{u=1}^R s_u r_u \quad (2.53)$$

Suponiendo que el instante t sistema está en el estado S , el aumento de la ocupación del *buffer* durante Δt viene dado por (2.54).

$$\Delta x = (B_S - C)\Delta t \quad (2.54)$$

Sea $P_s(t, x)$; $t > 0$ y $0 < x < m$ la probabilidad de que el sistema esté en el estado S y la ocupación del *buffer* sea inferior o igual a x . Al igual que en el caso homogéneo se pueden obtener las ecuaciones de estado considerando que $P_s(t+\Delta t, x)$ es igual a la suma de probabilidades de estar en un estado vecino en t multiplicadas por la probabilidad de transición hacia S en Δt , más la probabilidad de estar en el estado S en t multiplicada por la probabilidad de que el sistema permanezca en dicho estado durante Δt . Además habrá que considerar que la ocupación del *buffer* en t deberá ser igual a la diferencia entre x y el flujo neto entrante durante Δt .

$$\begin{aligned} P_s(t + \Delta t, x) = & \\ = \sum_{u=1}^R [P_{S_{u+}}(t, x - [B_{S_{u+}} - C]\Delta t) r\{S_{u+}, S\}\Delta t] + & \\ + \sum_{u=1}^R [P_{S_{u-}}(t, x - [B_{S_{u-}} - C]\Delta t) r\{S_{u-}, S\}\Delta t] + & \\ + P_S(t, x - [B_S - C]\Delta t) [1 - r^* \{S\}\Delta t] + o\Delta t & \end{aligned} \quad (2.55)$$

Operando como en el caso homogéneo, dividiendo por Δt y tomando el límite para $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales (2.56).

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_S(t, x)}{\partial t} + [B_S - C] \frac{\partial P_S(t, x)}{\partial x} = & \\ = \sum_{u=1}^R [P_{S_{u+}}(t, x) r\{S_{u+}, S\}] + \sum_{u=1}^R [P_{S_{u-}}(t, x) r\{S_{u-}, S\}] - P_S(t, x) r^* \{S\}; & \quad 0 < x < m \end{aligned} \quad (2.56)$$

Se define $F_S(x)$ como la probabilidad en régimen estacionario de que el sistema esté en el estado S y que la ocupación del *buffer* sea inferior o igual a x . Podemos calcular $F_S(x)$ a partir del sistema de ecuaciones que se obtiene al eliminar la dependencia temporal en (2.56). Se obtiene así el sistema de ecuaciones diferenciales (2.57).

$$\begin{aligned}
 [B_S - C] \frac{dF_S(x)}{dx} = & \\
 = \sum_{u=1}^R [F_{S_{u+}}(x)r\{S_{u+}, S\}] + \sum_{u=1}^R [F_{S_{u-}}(x)r\{S_{u-}, S\}] - F_S(x)r^* \{S\}; & \quad 0 < x < m
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Se obtiene en este caso un sistema de n ecuaciones diferenciales, siendo n la expresión (2.14). Para poder expresar las ecuaciones (2.57) de forma matricial, construimos un vector cuyos elementos son las funciones $F_S(x)$ tal como se expresa en (2.58). En el caso homogéneo el orden de los estados depende del número de fuentes activas. Tal como está formulado el caso heterogéneo, este puede ser arbitrario pero tiene que coincidir con el orden asignado a los estados cuando se define el vector de probabilidades (2.23).

$$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_S(x), \dots, F_n(x))
 \tag{2.58}$$

Podemos expresar el sistema de ecuaciones (2.57) con la misma formulación que se utilizaba en el caso homogéneo, obteniendo la expresión (2.59).

$$\mathbf{D} \frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{M} \mathbf{F}(x)
 \tag{2.59}$$

Siendo \mathbf{D} , también en este caso, una matriz diagonal cuyos elementos representan la tasa neta de fluido entrante al sistema en cada estado. El valor de dicha matriz se muestra en la expresión (2.60).

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{B_{S_1} - C, B_{S_2} - C, \dots, B_{S_i} - C, \dots, B_{S_n} - C\}
 \tag{2.60}$$

La matriz \mathbf{M} coincide también con el generador infinitesimal de la cadena de Markov de un conjunto de fuentes ON-OFF heterogéneas y cuya expresión viene dada por (2.22). Si el fluido generado por las fuentes activas en cada uno los posibles estados nunca coincide con la capacidad del canal C , la matriz \mathbf{D} es invertible. En este caso el sistema también se puede expresar como (2.61).

$$\frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{Q} \mathbf{F}(x)
 \tag{2.61}$$

Siendo \mathbf{Q} el producto de matrices expresado en (2.62).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}
 \tag{2.62}$$

Si la matriz \mathbf{D} no fuese invertible, sería necesario eliminar el cero de su diagonal. Ello se consigue eliminando la ecuación del sistema (2.57) correspondiente al estado para el cual la tasa de fluido generado por las fuentes activas coincide con la capacidad del canal. Al igual que se hacía en el caso homogéneo, se expresa la función $F_S(x)$ como combinación lineal de funciones $F_{S_{u+}}(x)$ y $F_{S_{u-}}(x)$ correspondientes a los estados vecinos al estado cuya ecuación se pretende eliminar, tal como se muestra en la expresión (2.63).

$$F_S(x) = \frac{1}{r * \{S\}} \sum_{u=1}^R [F_{S_{u+}}(x)r\{S_{u+}, S\}] + \sum_{u=1}^R [F_{S_{u-}}(x)r\{S_{u-}, S\}] \quad (2.63)$$

Finalmente sustituye dicho valor de $F_S(x)$ en el resto de ecuaciones eliminando así la ecuación que no permitía invertir la matriz \mathbf{D} . Las modificaciones realizadas en las matrices \mathbf{D} y \mathbf{M} son las mismas que las descritas para el caso homogéneo en el punto 2.1 de este mismo capítulo. Así pues, la expresión (2.47) sigue siendo válida para calcular los nuevos coeficientes de la matriz \mathbf{M} . Análogamente se siguen cumpliendo las propiedades (2.8) y (2.24). La única diferencia está en el hecho que para el caso homogéneo, sólo es posible que exista un estado para el cual la tasa de fluido generado por las fuentes activas coincida con la capacidad del canal, en cambio, para el caso heterogéneo es posible que haya más de un estado para el cual se produzca esta situación. Por ejemplo, supongamos dos fuentes ON-OFF con tiempos medios de ON y de OFF distintos, pero cuya tasa de fluido generado en el estado ON coincide. Tenemos un ejemplo de fuentes heterogéneas, formado por dos clases ($R=2$) con una fuente cada una de ellas. En total hay 4 estados posibles: ambas fuentes activadas, ambas desactivadas y dos estados correspondientes a la activación de una única fuente. En estos dos últimos casos el fluido generado por las fuentes activas coincide. Si además se diera la casualidad que también coincidiese con la capacidad del canal, aparecerían dos ceros en la matriz diagonal \mathbf{D} correspondiente al sistema de ecuaciones para este ejemplo. En este caso sería necesario eliminar dos ecuaciones, lo cual significaría tener que aplicar dos veces el procedimiento descrito en el punto 2.1 hasta que la matriz diagonal \mathbf{D} fuese invertible.

Una vez el sistema de ecuaciones diferenciales está arreglado de manera que se pueda expresar en la forma que aparece en la expresión (2.61) se obtiene su solución de manera inmediata con la expresión (2.64).

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{j=1}^n a_j e^{z_j x} \Phi_j \quad (2.64)$$

Siendo z_j uno de los autovalores de la matriz \mathbf{Q} y Φ_j su correspondiente autovector. Los coeficientes a_j dependen de las condiciones de contorno, las cuales se pueden expresar, al igual que en el caso homogéneo, en función de los estados de sobrecarga e infracarga. Dichas condiciones se muestran en (2.65) y (2.66).

$$F_S(0^+) = 0 \Leftrightarrow G_S(0^+) = \pi_S; \quad B_S > C \quad (2.65)$$

$$F_S(m^-) = \pi_S \Leftrightarrow G_S(m^-) = 0; \quad B_S < C \quad (2.66)$$

Donde las funciones $F_S(x)$ y $G_S(x)$ cumplen la relación (2.67).

$$F_S(x) + G_S(x) = \pi_S; \quad 0 < x < m \quad (2.67)$$

Es posible encontrar algoritmos para el cálculo de los autovalores expresados en (2.64). Entre ellos destaca uno en el cual los autovalores se obtienen mediante técnicas de interpolación [Kos84]. Una vez conocidos los autovalores es posible calcular los autovectores. A pesar de ello, la dificultad para calcular la función (2.64) reside en el cálculo de los coeficientes a_j . Para el caso heterogéneo el número de coeficientes a calcular puede ser muy elevado y para el caso de tener muchas fuentes se puede convertir en un problema computacionalmente inabordable.

4 Conclusiones

En este capítulo se han presentado las herramientas de análisis para estudiar la ocupación de un *buffer* cuando es alimentado por el fluido generado por un conjunto de fuentes ON-OFF y cuyo contenido es drenado por un canal a tasa constante. El análisis se ha realizado para tanto para el caso homogéneo como para el caso heterogéneo, pudiéndose considerar el primero como un caso particular del segundo. Para poder calcular dicha ocupación es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden. La resolución de dicho sistema conlleva el cálculo de todos los autovalores y autovectores de la matriz que define el sistema de ecuaciones diferenciales. Además es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones para encontrar los coeficientes que hacen que el sistema cumpla las condiciones de contorno. Para el caso homogéneo existen expresiones cerradas para el cálculo de los autovalores y autovectores, siendo posible la obtención de los mismos

sin necesidad de resolver las raíces del polinomio característico [Çin75]. Para el caso heterogéneo Es posible calcular los autovalores con el grado de precisión que se desee mediante la utilización de técnicas de interpolación. A pesar de ello, por el hecho de utilizar una técnica iterativa, dicho cálculo puede resultar computacionalmente costoso. Una vez obtenidos los autovalores también es posible calcular los autovectores mediante expresiones cerradas. Para el cálculo de los coeficientes no existen soluciones cerradas, siendo necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones. El caso heterogéneo presenta un mayor número de estados, lo que se traduce en un mayor número de ecuaciones a resolver y por tanto una mayor complejidad computacional.

Capítulo 3 Cálculo de la probabilidad de pérdida

1 Introducción

La incorporación de nuevos servicios telemáticos que requieren mayor ancho de banda hace que las tecnologías de red utilizadas deban estar preparadas para soportar este aumento del tráfico.

En las redes de área extendida es necesario dimensionar adecuadamente las capacidades de los enlaces que conectan los nodos de conmutación. El principal parámetro de calidad de servicio para este tipo de redes es el retardo que pueda sufrir la información. Existen técnicas de asignación óptima de capacidades que permiten minimizar dicho retardo [San81][Kle76].

Por otro lado, en entornos locales, las nuevas exigencias de ancho de banda han conllevado un aumento de la capacidad de los enlaces. Como estas redes cubren un área geográfica reducida, el retardo de la información no suele ser un parámetro de calidad de servicio decisivo. Este tipo de redes suelen manejar grandes volúmenes de información, pudiéndose producir situaciones de congestión, siendo la probabilidad de pérdida de la información un parámetro de calidad de servicio a tener en consideración. Así pues, a la hora de dimensionar las exigencias de capacidad para

una red de este tipo será necesario tener en consideración la probabilidad de pérdida de la información.

En este capítulo se presenta el cálculo de la probabilidad de pérdida de la información cuando se utiliza un modelo de fluidos con fuentes ON-OFF heterogéneas. Debido a la dificultad computacional que presenta el cálculo de la ocupación de un *buffer* cuando hay un número elevado de fuentes y estas son muy diversas, algunos autores [Ani82][Kos84] [Cof91] [Ste91] utilizan la probabilidad de *overflow* para medir las pérdidas del sistema. Además, para el cálculo de dicha probabilidad utilizan una aproximación basada en el autovalor dominante. Esta aproximación está bastante aceptada y es utilizada con frecuencia por diversos autores [Sch96]. La probabilidad de *overflow* es una medida sobre el porcentaje de tiempo durante el cual el sistema está perdiendo fluido, pero no indica cuál es la cantidad de fluido que se ha perdido. Debido a que, en función del número de fuentes que estén activas, el sistema puede perder más o menos fluido, será necesario considerar cuál es la pérdida en cada uno de dichos estados. Así, pues se puede definir la tasa de pérdida de fluido como la tasa perdida en cada estado ponderada por la probabilidad de que en dicho estado se pierda fluido. En este capítulo se obtienen las expresiones que permiten calcular dicha tasa y a partir de ella se obtiene el cálculo de la probabilidad de pérdida de información. Dicha probabilidad resulta de más interés que la probabilidad de *overflow* ya que sí que es una medida de la cantidad de información que se puede perder en un enlace de una red. Siendo este valor el parámetro de calidad de servicio a tener en consideración para dimensionar los enlaces de una red de comunicaciones.

Una de las principales contribuciones de este trabajo es la demostración de que la probabilidad de pérdida de la información se puede expresar en función de un único coeficiente al cual denominamos α_1 . Éste coeficiente se corresponde con uno de los coeficientes que hay que calcular al aplicar las condiciones de contorno sobre el sistema de ecuaciones diferenciales que define la ocupación del *buffer* del sistema. De esta manera es posible obtener una expresión sencilla para la probabilidad de pérdida de la información si se conoce el valor de dicho coeficiente. Expresado de otra forma, podríamos decir que la manera en que las condiciones de contorno influyen en la pérdida de fluido en el sistema está resumida completamente en el coeficiente α_1 . El principal inconveniente de esta propiedad es que para conocer el valor del coeficiente α_1 será necesario encontrar todos los autovalores y autovectores del

sistema, de manera que el problema sigue siendo complejo computacionalmente hablando. En el próximo capítulo se desarrollarán técnicas para el cálculo de dicho coeficiente utilizando técnicas de aproximación por el autovalor dominante, al igual que se hace en el cálculo de la probabilidad de *overflow*.

2 Probabilidades de pérdida

En este capítulo nos proponemos calcular la cantidad de fluido medio perdido para un sistema como el descrito en el capítulo 2 cuando éste se alimenta con un conjunto de fuentes ON-OFF heterogéneas. Dicha pérdida dependerá, por un lado, de las fuentes y por lo tanto de los parámetros que las caracterizan r_u , λ_u y μ_u ($1 \leq u \leq R$). Por otro lado dependerá de los parámetros que definen al sistema de almacenamiento que son dos: el tamaño del *buffer* m y la tasa con que el canal es capaz de drenar fluido C (véase la Figura 3.1).

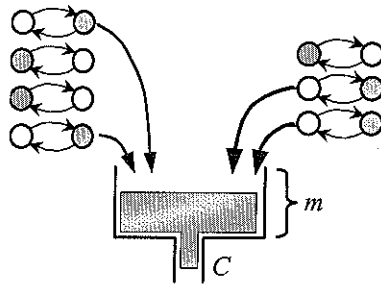


Figura 3.1 Modelo de fluidos con fuentes ON-OFF.

La pérdida de fluido sólo se producirá en los estados de sobrecarga mientras que para los estados de infracarga el fluido podrá ser drenado por el canal sin que se produzcan pérdidas. Para el caso de fuentes heterogéneas no existía, en principio, ningún criterio de ordenación de los estados. Para el caso homogéneo este criterio venía dado por el número de fuentes activas en un estado concreto. Este criterio no se puede aplicar en el caso heterogéneo ya que para un mismo número de fuentes activas es posible tener estados distintos si las fuentes pertenecen a clases diferentes. Nos resultará útil utilizar algún criterio de ordenación para los estados en el caso heterogéneo de manera que podamos numerarlos. Ya que nuestro objetivo es calcular la cantidad media de fluido perdido, parece lógico que el criterio de ordenación utilizado clasifique los estados en dos grupos. Por un lado los estados de infracarga y por el otro los estados de sobrecarga. Así pues, el criterio adoptado ordena los estados en función de la cantidad de fluido generado por las fuentes activas, siendo el primer estado aquel que tiene todas las fuentes desactivadas y el

último el correspondiente a la generación máxima de fluido con todas las fuentes activadas. De hecho se puede considerar que los estados en el caso homogéneo también están ordenados según este criterio. Así pues, la formulación desarrollada para el caso heterogéneo también será válida en caso homogéneo simplemente considerando que sólo existe una única clase de fuente ($R=1$). A partir de ahora, y en lo que resta del documento, para referirnos al estado S_i utilizaremos simplemente el subíndice i al igual que hacíamos en el caso homogéneo.

2.1 Probabilidad de *overflow*.

En el capítulo 2 habíamos definido la función $G_i(x)$ como la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado i y la ocupación del *buffer* sea superior a x . La relación existente entre $G_i(x)$ y $F_i(x)$ viene dada a través de la probabilidad de estado π_i tal como se muestra en la ecuación (3.1).

$$G_i(x) = \pi_i - F_i(x) \quad (3.1)$$

La evaluación de la función $G_i(x)$ cuando x tiende a la capacidad del *buffer* m nos dará información sobre el porcentaje de tiempo durante el cual el sistema está perdiendo fluido. Dicha función sólo está definida para valores de x dentro del rango $0 < x < m$. Para valores fuera de este rango podríamos tomar el convenio expresado en (3.2) y (3.3).

$$\text{si } x < 0 \quad \text{prob}(i \cap \text{buffer} \leq x) = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = 0 \Leftrightarrow G_i(x) = \pi_i \quad (3.2)$$

$$\text{si } x > m \quad \text{prob}(i \cap \text{buffer} > x) = 0 \Leftrightarrow G_i(x) = 0 \Leftrightarrow F_i(x) = \pi_i \quad (3.3)$$

A pesar del convenio tomado, los valores que tomaran las funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ en los extremos (0 y m) no tienen que coincidir con 0 o π_i como se podría presuponer a partir de (3.2) y (3.3). En estos puntos se producirán discontinuidades de manera que las funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ sólo estarán definidas en el origen cuando nos aproximemos a éste por la derecha, y en el punto m cuando nos acerquemos por la izquierda. Así pues, deberemos hablar de $G_i(0^+)$ y $F_i(0^+)$ cuando nos refiramos al origen y de $F_i(m^-)$ y $G_i(m^-)$ cuando hagamos referencia al punto $x = m$. Por la propia definición de las funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ es evidente que $F_i(x)$ es una función creciente y $G_i(x)$ es una función decreciente. En los estados de sobrecarga, la probabilidad de que la ocupación del *buffer* sea menor o igual a cero es nula, no ocurriendo lo mismo para los estados de infracarga. Cuando el sistema entra en un estado de infracarga

inicialmente el *buffer* se vacía (si estaba lleno) y en el momento en que queda vacío el sistema entra en una situación de infrautilización de la capacidad del canal, ya que se drena menos fluido del que se podría. El porcentaje de tiempo durante el cual el canal se está infrautilizando coincide con $F_i(0^+)$. En los estados de infracarga la probabilidad de que la ocupación del *buffer* supere su tamaño m vale cero, pero no ocurre lo mismo para los estados de sobrecarga. En el momento que el sistema entra en un estado de sobrecarga el *buffer* empieza a llenarse hasta el punto de que cuando se llene por completo se produce una situación de pérdida de fluido. El porcentaje de tiempo durante el cual se están produciendo pérdidas de fluido coincide con $G_i(m)$. Podemos representar gráficamente las funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ para los casos de sobrecarga e infracarga, tal como se muestra en la Figura 3.2 y la Figura 3.3 respectivamente.

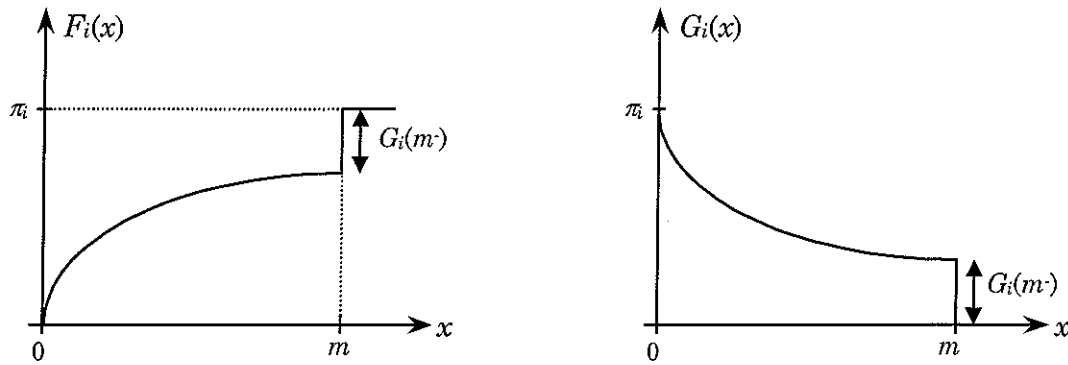


Figura 3.2 Funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ para un estado de sobrecarga.

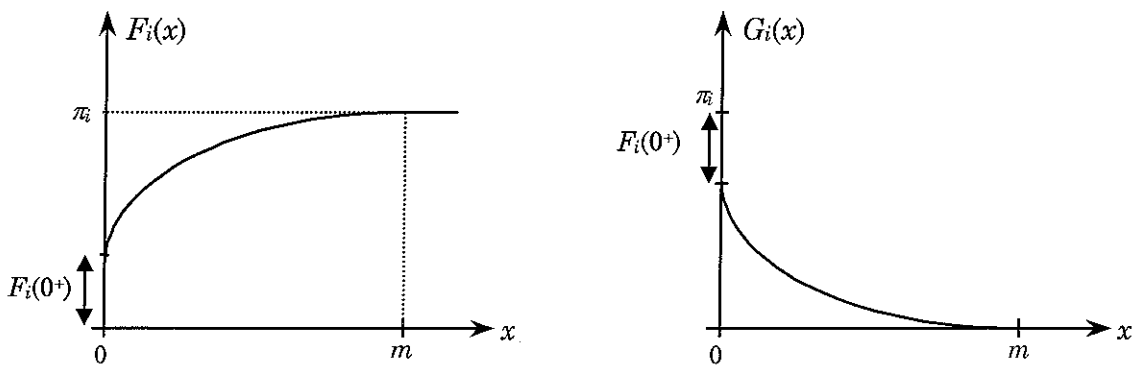


Figura 3.3 Funciones $F_i(x)$ y $G_i(x)$ para un estado de infracarga

Sea $F(x)$ a probabilidad de que la ocupación del *buffer* del sistema descrito en la Figura 3.1 sea inferior o igual a x . Dicha probabilidad se puede obtener sumando las funciones $F_i(x)$ para todos los estados posibles tal como se muestra en la ecuación (3.4).

$$F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \quad (3.4)$$

Análogamente se define $G(x)$ como la probabilidad de que la ocupación del *buffer* en el sistema descrito anteriormente sea superior a x , y cuya expresión se muestra en la ecuación (3.5).

$$G(x) = \sum_{i=1}^n G_i(x) \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta las definiciones (3.4) y (3.5), y la relación entre $F_i(x)$ y $G_i(x)$ expresada en (3.1), se comprueba fácilmente que la suma de ambas probabilidades vale 1, como se indica en (3.6).

$$F(x) + G(x) = \sum_{i=1}^n (F_i(x) + G_i(x)) = \sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \quad (3.6)$$

En la Figura 3.4 se muestra la representación gráfica de ambas funciones.

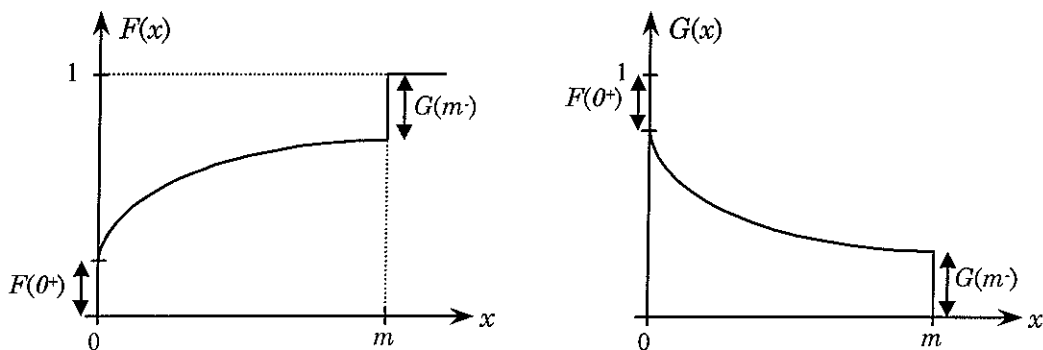


Figura 3.4 Funciones $F(x)$ y $G(x)$

El interés de ambas funciones está en las discontinuidades que presentan en ambos extremos. El salto de la discontinuidad en el origen nos indica la probabilidad de que la capacidad del canal se esté infrautilizando y su valor coincide con la fracción de tiempo durante la cual el canal está drenando menos fluido del que es capaz. El salto en la discontinuidad en el punto $x = m$ es la probabilidad de que el sistema esté perdiendo fluido e indica la fracción de tiempo durante la cual el sistema no puede almacenar el fluido generado por las fuentes de manera que este se pierda. Se define la probabilidad de *overflow* [Ani82] como el valor $G(m)$, como se muestra en (3.7).

$$\text{probabilidad de overflow} = \lim_{x \rightarrow m^-} G(x) \quad (3.7)$$

Para calcular dicha probabilidad se resuelve el sistema de ecuaciones (3.8) obteniendo vector solución $\mathbf{F}(x)$.

$$\mathbf{D} \frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{M} \mathbf{F}(x) \quad (3.8)$$

Dicho vector solución es de la forma expresada en (3.9) y tiene por componentes las funciones $F_i(x)$.

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{j=1}^n a_j e^{z_j x} \Phi_j \quad (3.9)$$

Siendo z_j los autovalores de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$, Φ_j los correspondientes autovectores y a_j los coeficientes que dependen de las condiciones de contorno. Una vez obtenidas las componentes de $\mathbf{F}(x)$, se suman obteniendo la función $F(x)$, como se muestra en (3.10).

$$F(x) = \sum_{j=1}^n \left[a_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \right] \quad (3.10)$$

El valor ϕ_{ji} representa la componente i del autovector asociado al autovalor z_j . Finalmente utilizando la propiedad (3.6) y tomando el límite cuando x tiende m^- se obtiene la expresión para la probabilidad de *overflow*. Dicha expresión se indica en (3.11).

$$\text{probabilidad de overflow} = G(m^-) = 1 - \lim_{x \rightarrow m^-} \sum_{j=1}^n \left[a_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \right] \quad (3.11)$$

Aprovechando algunas de las propiedades del generador infinitesimal \mathbf{M} se puede simplificar esta expresión. Tal como se vio en el capítulo 2 el generador infinitesimal \mathbf{M} y el vector de probabilidades de estado π cumplen la relación (3.12).

$$\mathbf{M}\pi = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Ello significa que el vector de probabilidades de estado π es un autovector por la derecha de la matriz \mathbf{M} y está asociado al autovalor 0. Dicho razonamiento es extensible a la matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ tal como se muestra en (3.13).

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Así pues $z=0$ es siempre autovalor de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ y el vector de las probabilidades de estado $\boldsymbol{\pi}$, uno de los posibles autovectores por la derecha asociado a dicho autovalor. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer en la ecuación (3.10) que dicho autovalor se corresponde con el subíndice $j=1$. Si además tenemos en cuenta el hecho de que todas las probabilidades de estado π_i suman uno, podemos reescribir la ecuación (3.10) como (3.14).

$$F(x) = \alpha_1 + \sum_{j=2}^n \left[\alpha_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \right] \quad (3.14)$$

Utilizando (3.14) obtenemos una nueva expresión para la probabilidad de *overflow*, tal como se expresa en (3.15).

$$\text{probabilidad de overflow} = (1 - \alpha_1) - \lim_{x \rightarrow m^-} \sum_{j=2}^n \left[\alpha_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \right] \quad (3.15)$$

La expresión (3.15) conlleva el cálculo de los n autovalores con sus correspondientes n autovectores de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$. Además será necesario también resolver un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas para calcular los coeficientes α_j . Para un número de fuentes moderado, el número de autovalores, autovectores y coeficientes a calcular puede ser un problema computacionalmente muy costoso. Este problema se acusa más para el caso de fuentes heterogéneas. Supongamos un ejemplo sencillo con ocho fuentes ON-OFF. Si todas ellas son iguales estaremos en el caso homogéneo, para el cual el número de autovalores del sistema es igual a $8+1=9$. Como conocemos que uno de los autovalores es el cero y su correspondiente autovector es el vector de probabilidades de estado, simplemente será necesario calcular ocho autovalores, con sus correspondientes autovectores. Afortunadamente existen expresiones cerradas que nos permiten calcularlos directamente (véase Apéndice A). Además también será necesario resolver un sistema lineal de nueve ecuaciones con nueve incógnitas para encontrar los valores de los coeficientes α_j . Para el mismo ejemplo pero con fuentes heterogéneas la dificultad aumenta enormemente. Supongamos que las ocho fuentes pertenecen a cuatro clases distintas, de manera que hay dos fuentes en cada una de ellas.

Aplicando la expresión (3.16) tenemos en este caso que n es igual a $(2+1)^4=81$. Si las ocho fuentes fueran distintas definirían un proceso con $n=2^8=256$ estados.

$$n = \prod_{u=1}^R (n_u + 1) \quad (3.16)$$

Muchos autores [Ani82][Kos84] utilizan expresiones aproximadas en el cálculo de la probabilidad de *overflow*. Para ello utilizan un modelo distinto al de la Figura 3.1 y suponen que la capacidad de almacenamiento del *buffer* es infinita. Finalmente definen la probabilidad de *overflow* como la probabilidad de que la ocupación de *buffer* sobrepase un cierto umbral m . En la Figura 3.5 se representa gráficamente la función $G(x)$ para el caso de *buffer* infinito, siendo $G(m)$ la probabilidad de *overflow*.

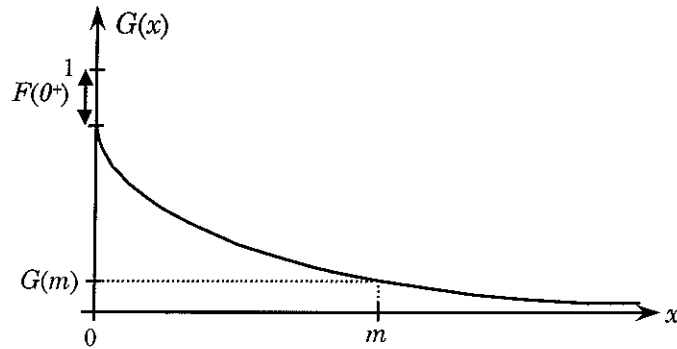


Figura 3.5 Función $G(x)$ para un tamaño de *buffer* infinito.

En este caso, los coeficientes α_j que multipliquen a una exponencial con un autovalor positivo deben valer cero, ya que sino la función $F(x)$ expresada en (3.10) no sería finita cuando x tiende a infinito. Por la propia definición de $F(x)$ como una probabilidad acumulada, ésta tiende a uno cuando la variable x tiende a infinito. De ello se deduce a partir de la expresión (3.14) que el coeficiente α_1 es igual a la unidad para el caso de *buffer* infinito. Así pues podemos expresar la probabilidad de que la ocupación del *buffer* sea menor o igual que x mediante la función (3.17).

$$F(x) = 1 + \sum_{j \in \{j/z_j < 0\}} \left[\alpha_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n \Phi_{ji} \right] \quad (3.17)$$

En este caso para determinar el valor de los coeficientes α_j , son necesarias tantas condiciones de contorno como autovalores negativos tenga la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$. En [Ani82] se demuestra que para el caso homogéneo el número de autovalores negativos coincide con el número de estados de sobrecarga, y el resto de autovalores

son todos positivos a excepción del cero. Esta propiedad es extensible al caso heterogéneo [Mit88]. Al considerar un *buffer* infinito desaparecen las condiciones de contorno en el valor $x=m$ quedando únicamente las condiciones de contorno en $x=0$. Como el número de condiciones en este punto coincide con el número de estados de sobrecarga, es posible encontrar los coeficientes a_j en la ecuación (3.17).

Sea z_d el autovalor negativo más cercano a cero, al cual llamaremos autovalor dominante. Si consideramos valores de x grandes, se puede aproximar el sumatorio de exponenciales decrecientes de la expresión (3.17) por la exponencial que decrece más lentamente. Dicha exponencial se corresponde con la del autovalor dominante, obteniendo así la aproximación (3.18).

$$F(x) \approx 1 + \left(a_d \sum_{i=1}^n \phi_{di} \right) e^{z_d x} \quad (3.18)$$

La nueva expresión obtenida resulta más cómoda de manipular que (3.14). Para el caso homogéneo existen expresiones cerradas tanto para calcular el autovalor dominante como para calcular la constante que multiplica a la exponencial [Ani82]. Para el caso heterogéneo es posible calcular el autovalor dominante utilizando técnicas de interpolación [Kos84].

Finalmente se utiliza la expresión (3.18) para expresar la probabilidad de *overflow* obteniendo la expresión (3.19).

$$\text{probabilidad de overflow} = G(m) = 1 - F(m) \approx \left(a_d \sum_{i=1}^n \phi_{di} \right) e^{z_d m} \quad (3.19)$$

En la referencia [Ani82] se compara la expresión aproximada (o asintótica) (3.19) con la expresión exacta (3.15) para el caso homogéneo. Para ello se realizan distintas pruebas calculando en cada una de ellas el valor exacto y el aproximado. Finalmente se realiza una comparación gráfica para comprobar la bondad de la aproximación. Estas aproximaciones son utilizadas posteriormente por otros autores incluyendo también el caso heterogéneo [Sch96][Mit88].

2.2 Tasa de pérdida de fluido.

La probabilidad de *overflow* nos indica la fracción de tiempo durante la cual el sistema está perdiendo fluido pero no nos indica cuál es la cantidad de fluido perdido. Es evidente que la pérdida de fluido sólo se produce en los estados de sobrecarga,

pero la tasa de fluido generado por las fuentes en cada estado es distinta. Dicha tasa viene dada por la expresión (3.20) donde s_u representa el número de fuentes activas de clase u en el estado i .

$$B_i = \sum_{u=1}^R s_u r_u \quad (3.20)$$

La tasa de fluido que no puede ser drenada por el canal cuando el *buffer* está lleno en un estado de sobrecarga i es igual a $B_i - C$.

Sea T el número de estados de infracarga y $n - T$ el número de estados de sobrecarga. Teniendo en cuenta la ordenación dada a los estados, T se corresponde con estado de infracarga con el subíndice más alto, de manera que el estado $T + 1$ es un estado de sobrecarga. Podemos calcular la tasa media de pérdida de fluido como la suma de las tasas de pérdida en cada estado de sobrecarga ponderadas por la probabilidad de que el sistema se halle en dicho estado y además esté perdiendo fluido tal como se muestra en (3.21).

$$\text{tasa de pérdida de fluido} = \sum_{i=T+1}^n (B_i - C) G_i(m^-) = \sum_{i=1}^n (B_i - C) G_i(m^-) \quad (3.21)$$

Como se observa en la Figura 3.3 en los estados de infracarga el valor $G_i(m^-)$ vale cero de manera que el sumatorio en (3.21), definido en principio únicamente para los estados de sobrecarga, puede extenderse a todos los estados del sistema. Utilizando la relación existente entre $F_i(x)$ y $G_i(x)$ dada en (3.1) podemos expresar la tasa de pérdida de fluido en función de $F_i(x)$ tal como se muestra en (3.22).

$$\text{tasa de pérdida de fluido} = \sum_{i=1}^n (B_i - C) \pi_i - \sum_{i=1}^n (B_i - C) F_i(m^-) \quad (3.22)$$

Los valores que aparecen en la expresión (3.22) son todos conocidos y fáciles de calcular, a excepción de las funciones $F_i(x)$, ya que a pesar de ser funciones conocidas, tal como se muestra en (3.9), su cálculo exige una dificultad computacional bastante grande para valores de n elevados. Una de las contribuciones de este trabajo es la simplificación de la expresión (3.22), de manera que, tal como se demostrará a continuación, se puede evitar conocer por completo el conjunto de funciones $F_i(x)$, siendo sólo necesario calcular el coeficiente α_1 . Dicho coeficiente es el que multiplica al término de (3.9) asociado al autovalor $z=0$ y en él está resumida toda la

información concerniente a la cantidad de fluido perdido en los estados de sobrecarga.

El sistema de ecuaciones (3.8) se puede expresar como (3.23).

$$[B_i - C] \frac{dF_i(x)}{dx} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [r\{j, i\} F_j(x)] - r^* \{i\} F_i(x); \quad 0 < x < m \quad (3.23)$$

Siendo $r\{j, i\}$ la tasa de transición desde el estado j hasta el estado i y $r^* \{i\}$ la tasa de transición total saliente del estado i expresada en (3.24).

$$r^* \{i\} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r\{i, j\} \quad (3.24)$$

Si sumamos todas las ecuaciones de (3.23) se obtiene (3.25).

$$\sum_{i=1}^n [B_i - C] \frac{dF_i(x)}{dx} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [r\{j, i\} F_j(x)] - \sum_{i=1}^n r^* \{i\} F_i(x) \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^n [B_i - C] \frac{dF_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^n F_j(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [r\{j, i\}] - \sum_{i=1}^n r^* \{i\} F_i(x)$$

Sustituyendo la expresión (3.24) en la ecuación (3.25), se obtiene finalmente la propiedad (3.26).

$$\sum_{i=1}^n [B_i - C] \frac{dF_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^n F_j(x) r^* \{j\} - \sum_{i=1}^n r^* \{i\} F_i(x) = 0 \quad (3.26)$$

La propiedad (3.26) es una consecuencia del hecho que las columnas del generador infinitesimal \mathbf{M} suman 0 tal como se muestra en (3.27) donde $\mathbf{1}$ representa un vector de n componentes todas iguales a 1.

$$\mathbf{1M} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Sumar todas las ecuaciones del sistema (3.23) es equivalente, matricialmente hablando, a multiplicar el vector $\mathbf{1}$ a ambos miembros de la ecuación (3.8), tal como se muestra en (3.28).

$$\mathbf{1D} \frac{d}{dx} \mathbf{F}(x) = \mathbf{1MF}(x) = \mathbf{0F}(x) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Así pues, se tiene que la suma de todas ecuaciones diferenciales de (3.23) es nula de donde se deduce la propiedad (3.29).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [B_i - C] \frac{dF_i(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n [B_i - C] F_i(x) \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n [B_i - C] F_i(x) = cte \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esta propiedad nos resultará de gran utilidad en la expresión (3.22). tal como se observa el sumatorio de funciones $F_i(x)$ ponderadas por $(B_i - C)$ no depende de la ocupación del *buffer* x siendo constante en todo el intervalo $0 < x < m$.

Sea Φ_k un autovalor derecho de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ asociado al autovalor z_k . En este caso se cumple (3.30).

$$\begin{aligned} z_k \Phi_k &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \Phi_k \\ z_k \mathbf{D} \Phi_k &= \mathbf{M} \Phi_k \end{aligned} \quad (3.30)$$

La ecuación i del sistema (3.30) se puede expresar como (3.31).

$$z_k (B_i - C) \Phi_{ki} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_{kj}; \quad 1 < i < n \quad (3.31)$$

Sumando todas las ecuaciones de (3.31) se obtiene (3.32).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_k (B_i - C) \Phi_{ki} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_{kj} \\ z_k \sum_{i=1}^n (B_i - C) \Phi_{ki} &= \sum_{j=1}^n \phi_{kj} \sum_{i=1}^n m_{ij} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como la suma de los elementos de una columna del generador infinitesimal \mathbf{M} es nula se tiene (3.33).

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 \quad (3.33)$$

Finalmente sustituyendo (3.33) en (3.32) se obtiene (3.34).

$$z_k \sum_{i=1}^n (B_i - C) \phi_{ki} = 0 \quad (3.34)$$

Sea \mathbf{B} un vector cuyas componentes son los elementos de la matriz diagonal \mathbf{D} , tal como se indica en (3.35).

$$\mathbf{B} = ((B_1 - C), (B_2 - C), \dots, (B_i - C), \dots, (B_n - C)) \quad (3.35)$$

Observando (3.34) se puede afirmar que para todo autovalor z_k distinto de cero, el vector \mathbf{B} y cualquier autovector derecho Φ_k de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ son ortogonales. Es decir su producto escalar vale cero, tal y como se indica en (3.36).

$$\mathbf{B} \bullet \Phi_k = \sum_{i=1}^n (B_i - C)\phi_{ki} = 0; \quad \text{si } z_k \neq 0 \quad (3.36)$$

De hecho el vector \mathbf{B} es un autovector por la izquierda de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ asociado también al autovalor 0, tal y como se demuestra a continuación. Como \mathbf{D} es una matriz diagonal, su inversa es otra matriz diagonal cuyos elementos son los recíprocos de los elementos de \mathbf{D} como se indica en (3.37).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} B_1 - C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 - C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n - C \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{B_1 - C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_2 - C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_n - C} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Al multiplicar por la izquierda la matriz \mathbf{D}^{-1} con el vector \mathbf{B} se obtiene un vector cuyas componentes son todo unos como se indica en (3.38).

$$\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{1} \quad (3.38)$$

Utilizando la propiedad (3.38) se obtiene que \mathbf{B} es un autovector por la izquierda de $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ y cuyo autovalor es el cero (3.39).

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} &= \mathbf{1}\mathbf{M} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) &= \mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.39)$$

El producto escalar entre un autovector izquierdo y un autovector derecho siempre vale cero a no ser que ambos estén asociados a un mismo autovalor [Çin75], de donde se deduce la propiedad (3.36).

Podemos aprovechar esta propiedad para calcular cuanto vale el sumatorio de las funciones $F_i(x)$ ponderadas por las componentes del vector \mathbf{B} . Utilizando (3.9) se

tiene que cada una de las componentes de la función $F(x)$ se puede expresar como (3.40).

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{z_j x} \phi_{ji} \quad (3.40)$$

Si ponderamos dichas funciones por $(B_i - C)$ y la sumamos se obtiene el siguiente resultado (3.41).

$$\sum_{i=1}^n (B_i - C) F_i(x) = \sum_{i=1}^n (B_i - C) \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{z_j x} \phi_{ji} = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{z_j x} \sum_{i=1}^n (B_i - C) \phi_{ji} \quad (3.41)$$

Como se muestra en (3.36), el sumatorio en i se anula para todo j que cumpla que z_j es distinto de cero. De ahí que la expresión (3.41) quede simplificada en la forma expresada en (3.42), siendo α_1 el coeficiente asociado al autovalor cero y π_i las probabilidades de estado, las cuales son las componentes del autovector asociado al autovalor cero [Pal00a].

$$\sum_{i=1}^n (B_i - C) F_i(x) = \alpha_1 \sum_{i=1}^n (B_i - C) \pi_i \quad (3.42)$$

De esta manera ya se ha obtenido el valor de la constante de la expresión (3.29). Utilizado el resultado (3.42) en la expresión (3.22) se obtiene que la tasa de pérdida de fluido sólo depende del coeficiente α_1 tal como se muestra en (3.43).

$$\text{tasa de pérdida de fluido} = (1 - \alpha_1) \sum_{i=1}^n (B_i - C) \pi_i \quad (3.43)$$

Para que el sistema de la Figura 3.1 sea estable se debe de cumplir que la tasa media de fluido generada por las fuentes debe ser inferior a la capacidad del canal C . Dicha condición se muestra en (3.44).

$$\sum_{i=1}^n B_i \pi_i < C \quad (3.44)$$

Teniendo en cuenta (3.44) se observa que en condiciones de estabilidad el sumatorio de la expresión (3.43) es negativo tal como se indica en (3.45).

$$\sum_{i=1}^n (B_i - C) \pi_i = \sum_{i=1}^n B_i \pi_i - C \sum_{i=1}^n \pi_i = \sum_{i=1}^n B_i \pi_i - C < 0 \quad (3.45)$$

Como la tasa de pérdida de fluido en (3.43) está definida como un valor positivo, tendremos que en condiciones de estabilidad se cumple que el coeficiente α_1 siempre es mayor que la unidad y tiende a uno cuando la tasa de pérdida de fluido tiende a cero. Ello se produce en dos casos, cuando el tamaño del *buffer* m tiende a infinito o cuando la capacidad del canal para drenar fluido C también tiende a infinito.

2.3 Probabilidad de pérdida de fluido.

En el punto 2.1 se definía la probabilidad de *overflow*. Esta probabilidad indicaba el porcentaje de tiempo durante el cual el sistema perdía fluido, pero en ningún caso era un parámetro que cuantificase la cantidad de fluido perdido. Para los sistemas de telecomunicaciones parece más interesante, a la hora de definir los distintos parámetros de calidad de servicio, disponer de parámetros que cuantifiquen el volumen de información perdida. En este punto se definirá la probabilidad de pérdida de fluido para el modelo de la Figura 3.1, la cual nos permitirá cuantificar la cantidad de fluido que pierde el sistema.

La tasa media de fluido generada por el sistema viene dada por la expresión (3.46).

$$\text{tasa de generación de fluido} = \sum_{i=1}^n B_i \pi_i \quad (3.46)$$

Si observamos el sistema en un tiempo de observación suficientemente grande T_{obs} , podemos aproximar la cantidad de fluido perdido por la tasa de pérdida multiplicada por el tiempo de observación

$$\text{fluido perdido} \approx \text{tasa de pérdida de fluido} \cdot T_{obs} \quad (3.47)$$

Análogamente el fluido generado se puede aproximar por la expresión (3.48).

$$\text{fluido generado} \approx \text{tasa de generación de fluido} \cdot T_{obs} \quad (3.48)$$

Ambas aproximaciones son más exactas cuanto mayor sea el tiempo de observación de manera que podemos definir la probabilidad de pérdida de fluido como el cociente entre ambos fluidos cuando el tiempo de observación tiende a infinito (3.49).

$$\text{probabilidad de pérdida} = \lim_{T_{obs} \rightarrow \infty} \frac{\text{fluido perdido}}{\text{fluido generado}} \quad (3.49)$$

Obteniendo finalmente que la probabilidad de pérdida es el cociente entre la tasa de pérdida y la tasa de generación de fluido (3.50).

$$\text{probabilidad de pérdida} = \frac{\text{tasa de pérdida de fluido}}{\text{tasa de generación de fluido}} \quad (3.50)$$

Sustituyendo las expresiones (3.43) y (3.46) en (3.50) se obtiene finalmente la expresión para la probabilidad de pérdida de fluido (3.51) [Pal00a].

$$\text{probabilidad de pérdida} = (\alpha_1 - 1) \left(\frac{C}{\sum_{i=1}^n B_i \pi_i} - 1 \right) \quad (3.51)$$

La expresión (3.51) sólo es válida si se cumple la condición de estabilidad (3.44). Evidentemente, si la capacidad del canal es mayor o igual al fluido generado por todas las fuentes activas (B_n), la probabilidad de pérdida también será nula. Así pues el rango de capacidades para el cual está definida la expresión (3.51) es el expresado en (3.52).

$$\sum_{i=1}^n B_i \pi_i < C < B_n \quad (3.52)$$

La principal ventaja de la expresión (3.51) es que la complejidad de su cálculo se reduce al cálculo del coeficiente α_1 , evitando el cálculo del resto de coeficientes. La principal desventaja es que para el cálculo del coeficiente α_1 es necesario calcular todos los autovalores y los autovectores de la matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$.

3 Pruebas realizadas

Para la realización de distintas pruebas se han considerado 4 clases de tráfico según muestra la Tabla 3.1 cuyos valores de t_{on} , t_{off} e i han sido obtenidos de [Onv95].

Tabla 3.1 Clases de tráfico

Clase	Servicio	λ^{-1} (s)	μ^{-1} (s)	r (Mbps)
1	Voz	260	100	0.064
2	Vídeo telefonía	5000	100	10
3	Fax de color	300	3	2
4	transferencia de ficheros	333	1	2

Cada uno de estos servicios ha sido tratado individualmente, combinados dos a dos o en distintas mezclas entre todos ellos. En el cálculo realizado se ha obtenido la probabilidad de pérdida para distintos valores de capacidad con un tamaño de buffer de 50 Mbits.

En todas las realizaciones destacan las siguientes características. La probabilidad de pérdida disminuye a medida que aumenta la capacidad. Dicha disminución puede aproximarse por una recta a tramos, cada tramo con una pendiente distinta. Los distintos tramos están delimitados por el valor de las intensidades de las fuentes que intervienen en cada mezcla. Cuando la capacidad es inferior a la intensidad de las fuentes, la probabilidad de pérdida es alta pero disminuye rápidamente. Cuando la capacidad supera el valor de la intensidad de alguna de las fuentes la probabilidad de pérdida sigue disminuyendo, aunque más suavemente. La variación de la pendiente correspondiente a las fuentes con menor intensidad, es, en algunos casos, poco apreciable quedando enmascarada por la pérdida de fluido de la clase que precisa más ancho de banda (Figura 3.6 y Figura 3.7). Si hay más de una fuente de la clase dominante se observa un cambio en la tendencia de la probabilidad de pérdida para cada valor de capacidad múltiplo de la intensidad de la fuente dominante. Si consideramos dos fuentes de clase 2 y una fuente de cada una de las otras clases se observa un cambio en la pendiente para los valores de capacidad 10 y 20 Mbps (Figura 3.8).

Las pérdidas de fluido debidas a la voz (clase 1) son despreciables. Ello es debido a dos razones, por un lado el tamaño de buffer utilizado para este tipo de servicio es suficientemente grande como para evitar sus pérdidas ($t_{on} \cdot i = 6,4 \text{ Mbits} \gg 50 \text{ Mbits}$). Por otro lado, las otras clases necesitan capacidades muy superiores a la intensidad de las fuentes de voz, con lo cual el buffer nunca se llena con este tipo de tráfico.

Podemos concluir diciendo que la clase que precisa más ancho de banda será la dominante a la hora de determinar la capacidad necesaria para garantizar una determinada probabilidad de pérdida.

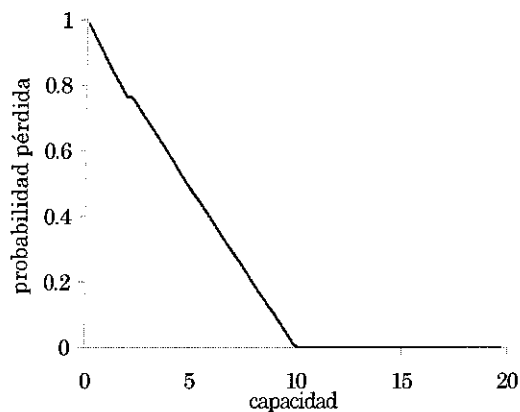


Figura 3.6 Mezcla con una fuente de clase 2 y una de clase 4 (escala lineal).

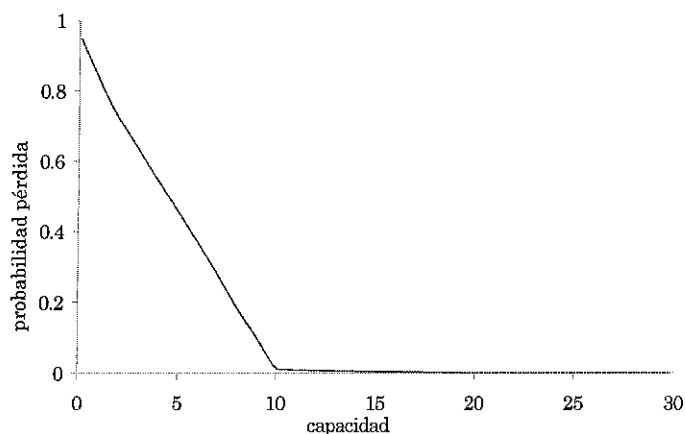


Figura 3.7 Mezcla con dos fuentes de clase 2 y una del resto de clases (escala lineal).

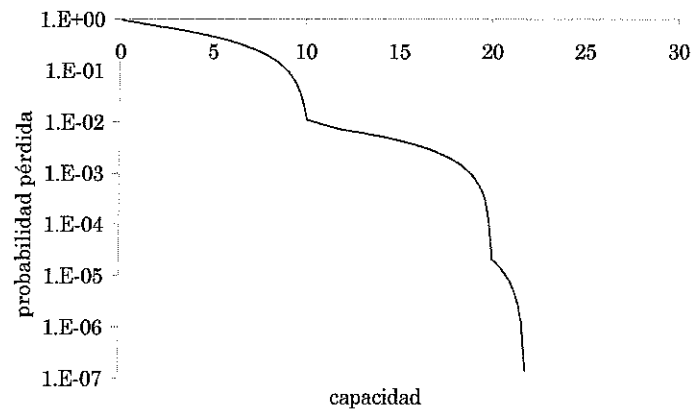


Figura 3.8 Mezcla con dos fuentes de clase 2 y una del resto de clases (escala logarítmica).

4 Conclusiones

En este capítulo se han obtenido las expresiones para la probabilidad de *overflow* y la probabilidad de pérdida de fluido. La diferencia entre ambas está en su interpretación física. La probabilidad de *overflow* es una medida del porcentaje de tiempo durante el cual el sistema está perdiendo fluido, mientras que la probabilidad de pérdida es una medida que indica la cantidad de fluido perdido. Es frecuente encontrar en la literatura una aproximación para el cálculo de la probabilidad de *overflow*. Dicha aproximación se basa en considerar un sistema con un *buffer* infinito y redefinir la probabilidad de *overflow* como la probabilidad de que la ocupación del *buffer* sobrepase un determinado umbral (el cual se correspondería con el tamaño real del *buffer*). El hecho de utilizar dicha suposición permite calcular la probabilidad de *overflow* mediante una aproximación basada en el autovalor dominante. Los inconvenientes que tiene este cálculo son dos. Por un lado el modelo utilizado no se corresponde con el modelo real por el hecho de estar suponiendo un *buffer* con capacidad infinita. Por otro lado esta probabilidad no es un parámetro indicativo de la cantidad de fluido que pierde el sistema.

Para poder medir la cantidad de fluido perdido es necesario utilizar la probabilidad de pérdida. Una de las contribuciones de este trabajo es el hecho de poder expresar dicha probabilidad en función de un único coeficiente α_1 , de manera que es posible calcular dicha probabilidad de manera sencilla si se conoce el valor de dicho coeficiente. El problema es que el cálculo del coeficiente no es una tarea computacionalmente sencilla.

También se han realizado distintas pruebas para el cálculo de la probabilidad de pérdida en función de las capacidades de los enlaces y se pueden extraer las siguientes conclusiones [Pal00c]:

- La probabilidad de pérdida decrece con la capacidad, siendo aproximable por rectas a tramos.
- Los tramos de dichas rectas están delimitados por los valores de capacidad que coinciden con la tasa de fluido generado por las fuentes activas en un determinado estado.
- El efecto de las fuentes que generan poco fluido queda enmascarado por las fuentes dominantes, siendo estas últimas las determinantes a la hora de imponer los requisitos de capacidad necesaria para acotar la probabilidad de pérdida.

Capítulo 4 Cálculo del coeficiente α_1

1 Introducción

Tal como se ha visto en el capítulo anterior es posible calcular la probabilidad de pérdida fácilmente si se conoce el valor del coeficiente α_1 . El cálculo de dicho coeficiente no es trivial, aunque es posible encontrar expresiones cerradas para casos extremos de tamaño de *buffer* y de capacidad del enlace. Para el resto de casos será necesario resolver un problema computacionalmente complejo, o bien utilizar expresiones aproximadas para el cálculo de dicho coeficiente [Bla95]. En este capítulo se desarrollarán distintos procedimientos para calcular el coeficiente α_1 . Primero se desarrollará el método genérico para su cálculo. Una de las contribuciones de este trabajo es la propuesta de una aproximación para el cálculo del coeficiente α_1 basada en el autovalor dominante. Con dicha aproximación será posible obtener un valor aproximado para la expresión de la probabilidad de pérdida. Al igual que otros autores [Ani82], compararemos el valor real y el valor aproximado de manera gráfica para comprobar la bondad de la aproximación en la probabilidad de pérdida. Finalmente se observará que la aproximación propuesta no sólo reduce la complejidad computacional para encontrar la probabilidad de pérdida, sino que además es de utilidad para el dimensionado de redes. Así pues se obtendrá una expresión para el dimensionado del tamaño de los *buffers* de los distintos dispositivos

que puede haber en una red. Análogamente se propondrá un procedimiento para el cálculo de las capacidades necesarias en los enlaces para acotar la probabilidad de pérdida de la información en la red.

2 Cálculo del coeficiente α_1

En el capítulo anterior se ha demostrado que de la probabilidad de pérdida se puede expresar en función de la capacidad del canal, del fluido medio generado por las fuentes que alimentan el sistema y del coeficiente α_1 , tal como se indica en la expresión (4.1).

$$\text{probabilidad de pérdida} = (\alpha_1 - 1) \left(\frac{C}{\sum_{i=1}^n B_i \pi_i} - 1 \right) \quad (4.1)$$

Dicho coeficiente es la constante multiplicativa del término asociado al autovalor cero en la función $F_i(x)$, cuando se utiliza como autovector el vector de probabilidades de estado π . Para calcular este coeficiente será necesario tomar el conjunto de las probabilidades $F_i(x)$ expresado en (4.2) y particularizar la variable x para valores conocidos de dichas funciones.

$$F_i(x) = \alpha_1 \pi_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j e^{z_j x} \phi_{ji} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.2)$$

Por tanto será necesario evaluar las $F_i(x)$ en los extremos de su dominio, en $x=m$ para los estados de infracarga y $x=0$ para los estados de sobrecarga, tal como se indica en las ecuaciones (4.3) y (4.4).

$$F_i(m^-) = \pi_i; \quad B_i < C \quad (4.3)$$

$$F_i(0^+) = 0; \quad B_i > C \quad (4.4)$$

Al particularizar los valores (4.3) y (4.4) en (4.2) se obtiene el sistema lineal de ecuaciones expresado en (4.5).

$$\alpha_1 \pi_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j e^{z_j m} \phi_{ji} = \pi_i; \quad \text{si } B_i < C \quad (4.5)$$

$$\alpha_1 \pi_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j \phi_{ji} = 0; \quad \text{si } B_i > C$$

Solucionando el sistema será posible conocer el valor de α_1 y calcular la probabilidad de pérdida. Existen distintos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, algunos de ellos solucionan el sistema de manera global, de tal forma que hasta que no finaliza el método no se conoce el valor de ninguna incógnita. También es posible encontrar la solución de incógnita por separado de manera que no es necesario solucionar completamente el sistema para conocer el valor de alguna incógnita en concreto. En nuestro caso sólo estamos interesados en conocer el valor de α_1 por lo que parece apropiado utilizar este tipo de metodología. La regla de Cramer [Wyl60] permite obtener soluciones de esta manera. Este método obtiene el valor de una incógnita como el cociente de dos determinantes. Si expresamos el sistema de ecuaciones (4.5) de manera matricial se obtiene (4.6) siendo T el número de estados de infracarga.

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,1}e^{z_N^m} \\ \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,2}e^{z_N^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,T}e^{z_N^m} \\ \pi_{T+1} & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_N & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_T \\ \alpha_{T+1} \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Aplicando la regla de Cramer se obtiene que el valor de la incógnita α_1 se puede expresar como (4.7).

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,1}e^{z_N^m} \\ \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,2}e^{z_N^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,T}e^{z_N^m} \\ 0 & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,1}e^{z_N^m} \\ \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,2}e^{z_N^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T}e^{z_2^m} & \cdots & \phi_{N,T}e^{z_N^m} \\ \pi_{T+1} & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_N & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N} \end{vmatrix}} \quad (4.7)$$

Desarrollando ambos determinantes con los menores complementarios a los elementos de la primera columna podemos expresar el valor de α_1 como se indica en (4.8).

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}} \quad (4.8)$$

Donde el $\text{cofactor}(\pi_i)$ es el menor con signo del elemento π_i , es decir el determinante que se obtiene al eliminar de la matriz del sistema la fila i -ésima y la primera columna, el cual cambia de signo si i es par (4.9).

$$\text{cofactor}(\pi_i) = (-1)^{i+1} \text{menor}(\pi_i) \quad (4.9)$$

El principal inconveniente de este método para encontrar el valor de la probabilidad de pérdida es la necesidad de calcular todos los autovalores y todos los autovectores del sistema para poder plantear el sistema de ecuaciones lineales (4.6).

A pesar de que existen soluciones cerradas para el cálculo de dichos valores para el caso homogéneo (véase el Apéndice A), la dificultad se hace más patente en el caso heterogéneo. En este caso es necesario calcular los autovalores mediante un proceso de interpolación [Kos84], siendo éste un problema computacionalmente inabordable si el número de estados es muy grande.

Existen casos particulares para los cuales el cálculo del valor α_1 se puede obtener de forma cerrada. Tal como se observa en la expresión (4.7) el valor de α_1 depende del tamaño del *buffer* m . De hecho, en la expresión de la probabilidad de pérdida (4.1) se ve que la dependencia de ésta con el tamaño del *buffer* está resumida en el coeficiente α_1 . Calculando este coeficiente para valores extremos del tamaño del *buffer* ($m=0$ y $m \rightarrow \infty$) se obtienen expresiones cerradas.

2.1 Cálculo de α_1 para un tamaño de *buffer* infinito.

Es evidente que la probabilidad de que el sistema esté en el estado i y la ocupación del *buffer* sea menor o igual que x , cuando ésta tiende al infinito, debe coincidir con la probabilidad de que el sistema se halle en el estado i tal como se indica en (4.10).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) = \pi_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.10)$$

Observando la expresión (4.2) se ve que para que se cumpla la condición (4.10) es necesario que los coeficientes asociados a los autovalores positivos se anulen (4.11).

$$\alpha_j = 0 \quad \text{si } z_j > 0 \quad (4.11)$$

En este caso la expresión (4.2) queda en la forma expresada en (4.12).

$$F_i(x) = \alpha_1 \pi_i + \sum_{j \in \{j/z_j < 0\}} \alpha_j e^{z_j x} \phi_{ji} \quad (4.12)$$

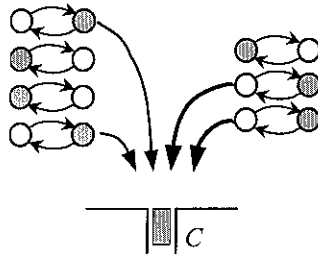
Tomando el límite para x tendiendo a infinito en la expresión (4.12) y comparándola con (4.10) se obtiene finalmente que el coeficiente α_1 es, en este caso, igual a la unidad (4.13).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) &= \alpha_1 \pi_i + \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j \in \{j/z_j < 0\}} \alpha_j e^{z_j x} \phi_{ji} = \alpha_1 \pi_i \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) &= \pi_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \quad (4.13)$$

Al sustituir este valor de α_1 en la expresión de la probabilidad de pérdida (4.1) se obtiene que ésta es nula, como era de esperar para el caso de un sistema con tamaño de *buffer* infinito.

2.2 Cálculo de α_1 para un sistema sin *buffer*.

El *buffer* nulo es el caso extremo cuando m tiende a cero. Para un sistema con estas características, cualquier tasa de fluido generada por las fuentes activas, que supere la capacidad del canal C se perderá.



En este caso tanto la condición de contorno para los estados de infracarga expresada en (4.3), como la de los estados de sobrecarga (4.4) se evalúan en el punto $x = 0^+$ tal como se expresa en (4.14) y (4.15).

$$F_i(0^+) = \pi_i; \quad i \leq T \tag{4.14}$$

$$F_i(0^+) = 0; \quad i > T \tag{4.15}$$

El hecho de conocer los valores de las funciones $F_i(x)$ sobre un mismo valor de x facilita el cálculo del coeficiente α_1 . En el capítulo anterior se demostró que la suma de las funciones $F_i(x)$ ponderada por la tasa excedente en cada estado ($B_i - C$) era constante para todo valor de x y cuyo valor se expresa en (4.16).

$$\sum_{i=1}^n (B_i - C)F_i(x) = \alpha_1 \sum_{i=1}^n (B_i - C)\pi_i \tag{4.16}$$

Particularizando la expresión (4.16) para $x = 0^+$ y utilizando los valores (4.14) y (4.15) se puede obtener el valor de, coeficiente α_1 como se demuestra en (4.17).

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (B_i - C)F_i(0^+) &= \alpha_1 \sum_{i=1}^n (B_i - C)\pi_i \\
 \sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i &= \alpha_1 \sum_{i=1}^n (B_i - C)\pi_i \\
 \alpha_1 &= \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=1}^n (B_i - C)\pi_i} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

En este caso se ha obtenido la expresión (4.8) para el caso en que $m=0$ como se indica en (4.18).

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1} & \cdots & \phi_{N,1} \\ \pi_2 & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{N,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T} & \cdots & \phi_{N,T} \\ 0 & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1} & \cdots & \phi_{N,1} \\ \pi_2 & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{N,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T} & \cdots & \phi_{N,T} \\ \pi_{T+1} & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_N & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N} \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)} = \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=1}^n (B_i - C)\pi_i} \tag{4.18}$$

2.3 Dependencia de α_1 con la capacidad del canal C .

La condición para que el modelo de fluidos estudiado sea estable es que el fluido medio generado por las fuentes sea menor que la capacidad del canal, tal como se expresa en (4.19).

$$\sum_{i=1}^n B_i \pi_i < C \quad (4.19)$$

Aplicando esta condición a la expresión de la probabilidad de pérdida (4.1) se obtiene que para que ésta sea mayor o igual a cero el coeficiente α_1 debe ser mayor o igual a la unidad. Teniendo en cuenta que la probabilidad de pérdida tomará valores entre 0 y 1, el coeficiente α_1 como máximo estará comprendido entre los valores expresados en (4.20).

$$1 < \alpha_1 < \frac{C}{C - \sum_{i=1}^n B_i \pi_i} \quad (4.20)$$

Se observa en (4.20) que a medida que el valor de la capacidad del canal C vaya aumentado, el coeficiente α_1 irá tendiendo a uno. Este hecho dificulta el cálculo de dicho coeficiente, ya que la información que aporta dicho coeficiente al cálculo de la probabilidad de pérdida está contenida en su parte fraccionaria y no en su parte entera. De hecho en la expresión (4.1) se observa que el valor que interesa realmente no es el coeficiente α_1 sino el valor $(\alpha_1 - 1)$, el cual se corresponde con su parte fraccionaria para valores grandes de capacidad.

En la 0 se comprueba este efecto. Para obtener dichos resultados se han utilizado dos clases de fuentes, cada una de ellas modela de manera sencilla un tipo de servicio tal como se indica en la Tabla 4.1. Los tiempos medios de ON y de OFF así como el valor de intensidad de las fuentes para cada servicio han sido obtenidas de [Onv95]. Cada clase consta de dos fuentes ON-OFF y se ha utilizado un tamaño de buffer $m=50$ Mbits. El rango de capacidades de interés comprendido entre la tasa media y la tasa máxima de fluido generada por las fuentes se expresa en (4.21).

$$0.4041 < C < 24 \quad (4.21)$$

En este caso se ha trabajado con una mantisa de diez dígitos. Tal como se observa en la 0 para capacidades superiores a los 20 Mbps es necesario disponer de mantisas superiores para conocer la parte fraccionaria del coeficiente α_1 . Aplicando los resultados de la 0 en la expresión (4.1) se obtiene que nunca se pierde fluido para capacidades superiores a los 20 Mbps.

Tabla 4.1 Clases de fuentes

Clase	Servicio	λ^{-1} (s)	μ^{-1} (s)	r (Mbps)
1	Vídeo telefonía	5000	100	10
2	transferencia de ficheros	333	1	2

Tabla 4.2 Cálculo del coeficiente a_1 y la probabilidad de pérdida

Capacidad	Coficiente a_1	Probabilidad de pérdida
0.6	2.7916404590	8.683366100000E-01
1.6	1.2608502600	7.718803219000E-01
2.6	1.1243877550	6.758642276000E-01
3.6	1.0733398750	5.799688337000E-01
4.6	1.0466346570	4.841793812000E-01
5.6	1.0302205490	3.885403833000E-01
6.6	1.0191220540	2.931651986000E-01
7.6	1.0111397720	1.983513755000E-01
8.6	1.0051848150	1.051487110000E-01
9.6	1.0009427400	2.145163512000E-02
10.6	1.0003193860	8.057787724000E-03
11.6	1.0002565780	7.108090211000E-03
12.6	1.0002042160	6.162802207000E-03
13.6	1.0001598700	5.220122430000E-03
14.6	1.0001218670	4.280789040000E-03
15.6	1.0000890050	3.346691434000E-03
16.6	1.0000604320	2.421848392000E-03
17.6	1.0000356340	1.516227735000E-03
18.6	1.0000147010	6.619046235000E-04
19.6	1.0000007340	3.486418966000E-05
20.6	1.0000000000	0.0000000000000000
21.6	1.0000000000	0.0000000000000000
22.6	1.0000000000	0.0000000000000000
23.6	1.0000000000	0.0000000000000000

Es posible solventar este problema reescribiendo el sistema lineal de ecuaciones (4.6). Si restamos a ambos miembros de cada ecuación el valor π se obtiene el sistema de ecuaciones (4.22) donde la incógnita a_1 se ha convertido en la incógnita (a_1-1) .

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,1}e^{z_N^m} \\ \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,2}e^{z_N^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_T & \phi_{2,T}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,T}e^{z_N^m} \\ \pi_{T+1} & \phi_{2,T+1} & \dots & \phi_{N,T+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_N & \phi_{2,N} & \dots & \phi_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_T \\ a_{T+1} \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\pi_{T+1} \\ \vdots \\ -\pi_N \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Aplicando la regla de Cramer en este caso se obtiene la expresión. (4.23).

$$a_1 - 1 = - \frac{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot cofactor(\pi_i)}{\sum_{i=1}^n \pi_i \cdot cofactor(\pi_i)} = \frac{-1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot cofactor(\pi_i)}{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot cofactor(\pi_i)}} \quad (4.23)$$

Utilizando esta nueva expresión con el ejemplo anterior se obtienen los valores de (a_1-1) expresados en la Tabla 4.3. En este caso se observa que se puede mejorar la precisión numérica del coeficiente (a_1-1) y por lo tanto de la probabilidad de pérdida [Pal00b].

Tabla 4.3 Cálculo del coeficiente a_1-1 y la probabilidad de pérdida.

Capacidad	Coficiente a_1-1	Probabilidad de pérdida
0.6	1.791640460000E+00	8.683366105000E-01
1.6	2.608502598000E-01	7.718803213000E-01
2.6	1.243877551000E-01	6.758642282000E-01
3.6	7.333987543000E-02	5.799688371000E-01
4.6	4.663465716000E-02	4.841793828000E-01
5.6	3.022054890000E-02	3.885403820000E-01
6.6	1.912205435000E-02	2.931652040000E-01
7.6	1.113977209000E-02	1.983513771000E-01
8.6	5.184814760000E-03	1.051487061000E-01
9.6	9.427404090000E-04	2.145164443000E-02
10.6	3.193857153000E-04	8.057780541000E-03
11.6	2.565780689000E-04	7.108092120000E-03
12.6	2.042158736000E-04	6.162798392000E-03

13.6	1.598704480000E-04	5.220137059000E-03
14.6	1.218673092000E-04	4.280799902000E-03
15.6	8.900481723000E-05	3.346684561000E-03
16.6	6.043193485000E-05	2.421845781000E-03
17.6	3.563414569000E-05	1.516233934000E-03
18.6	1.470097496000E-05	6.619034961000E-04
19.6	7.340273290000E-07	3.486548775000E-05
20.6	3.086381717000E-21	1.542367704000E-19
21.6	5.460066592000E-28	2.863682782000E-26
22.6	1.135185766000E-41	6.234689559000E-40
23.6	1.413731350000E-120	8.114341503000E-119

2.4 Dependencia de α_1 con el tamaño del *buffer* m .

La manera en que el tamaño del *buffer* del sistema afecta a la probabilidad de pérdida de fluido está completamente resumida en el coeficiente α_1 . Así pues, parece lógico estudiar como varia este coeficiente con el tamaño del *buffer*. Para realizar dicho estudio se han hecho distintas pruebas con diferentes clases de fuentes.

Observando las expresiones (4.8) y (4.17) parece lógico estudiar la dependencia del cociente (4.24) con el tamaño del *buffer* m .

$$\frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)} \quad (4.24)$$

Si presentamos gráficamente la expresión (4.24) en función del tamaño *buffer* se obtiene en todas las pruebas realizadas que dicha expresión es fácilmente aproximable por una exponencial. En la gráfica de la Figura 4.1 se muestra el valor del cociente expresado (4.24) en función del tamaño del *buffer*, para distintos valores de la capacidad del sistema. Para dicho cálculo se han utilizado dos fuentes de cada una de las clases expresadas en la Tabla 4.1 de manera que el rango válido de capacidades es el expresado en (4.21). Las capacidades que se han utilizado son 3, 7, 12 y 18 Mbps. El eje vertical está en escala logarítmica, y para ello se ha tomado el valor absoluto del cociente (4.24), ya que este es siempre negativo.

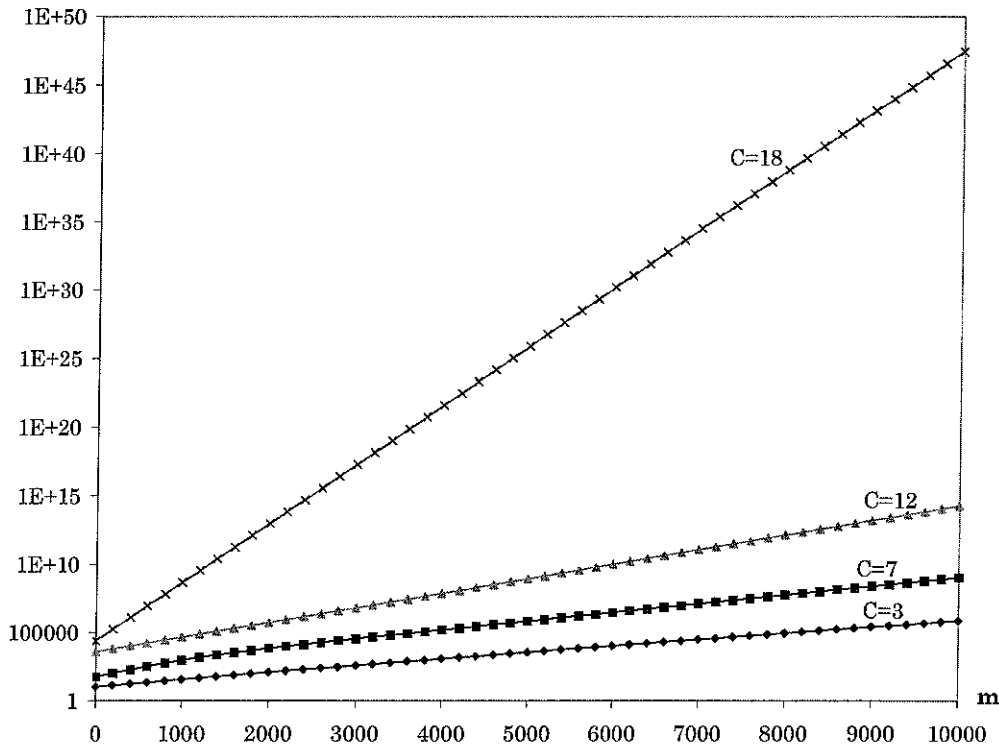


Figura 4.1 Variación del cociente (4.24) con el tamaño del buffer m .

Como se comprueba en la Figura 4.1 la representación logarítmica tiene un comportamiento lineal. Las zonas donde dicho comportamiento no es tan perfecto se dan para capacidades bajas y tamaños de *buffer* pequeños, a pesar de ello es posible utilizar la aproximación (4.25).

$$\frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)} \cong Ae^{Bm} \tag{4.25}$$

Ahora el problema ha quedado reducido a encontrar los valores óptimos para A y B . El valor A representa el valor que toma el cociente (4.24) cuando el tamaño del *buffer* es nulo. Dicho valor se puede obtener fácilmente por comparación de las ecuaciones (4.17) y (4.8). El coeficiente B se corresponde con las pendientes de las rectas de la Figura 4.1. En todas las pruebas realizadas se ha observado la existencia de una fuerte correlación entre dicha pendiente y el autovalor dominante. Así pues, será posible utilizar una expresión aproximada para el coeficiente α_1 basada en el autovalor dominante. Una vez aproximado el valor de α_1 se podrá aproximar la probabilidad de pérdida utilizando la expresión (4.1). Con este procedimiento se ha

encontrado un método que permite hacer aproximaciones similares a las realizadas habitualmente en el cálculo de la probabilidad de *overflow*, pero en este caso aplicadas al cálculo de la probabilidad de pérdida. El objetivo de dicho método será simplificar el número de operaciones necesario

Antes de aplicar la aproximación expresada en (4.25) será necesario encontrar algún tipo de justificación matemática que valide los resultados empíricos. Dicha justificación se expone en el siguiente apartado.

3 Cálculo aproximado del coeficiente α_1 .

Tal como se ha visto hasta ahora, para calcular el coeficiente α_1 es necesario resolver el sistema de ecuaciones (4.5). Dicho sistema consta de dos tipos de ecuaciones claramente diferenciados: las ecuaciones de infracarga y las ecuaciones de sobrecarga. En ambas, los coeficientes que multiplican a las incógnitas α_j son las componentes de los autovalores, pero en las ecuaciones de infracarga, además hay un término multiplicativo $e^{z_j m}$ correspondiente a la exponencial del autovalor multiplicado el tamaño del *buffer* m . Al aplicar la regla de Cramer para encontrar el coeficiente α_1 se obtienen dos determinantes, tal como se expresa en (4.7). Si nos fijamos en los elementos de una columna cualquiera del determinante se observa que algunos elementos están multiplicados por la exponencial y otros no. Si se diera el caso que todos los elementos de una columna estuvieran multiplicados por el mismo término exponencial, sería posible extraerlo del determinante, y éste aparecería como una constante multiplicando fuera del determinante. Dicha situación sólo se da cuando todos los estados son de infracarga, en este caso se obtiene que α_1 es igual a la unidad ya que el sistema nunca tendrá pérdidas.

En la expresión (4.8) se han desarrollado los determinantes mediante los menores complementarios a los elementos de la primera columna. Al hacer dicho desarrollo se pierde el orden que se disponía hasta ese momento de las exponenciales $e^{z_j m}$. En cierta manera se ha perdido el orden propuesto que separaba claramente los estados de infracarga de los estados de sobrecarga. Es posible desarrollar determinantes utilizando menores de cualquier orden. Supongamos por ejemplo que en el desarrollo de los determinantes de (4.7) se utilizan menores de orden T [Wyl60]. Para ello será necesario elegir T filas (o columnas cualesquiera) calcular todos los menores posibles de orden T formados por los elementos de dichas filas (o columnas). Finalmente habrá que multiplicar cada menor por su menor complementario con

signo y sumarlos todos ellos. El menor complementario se obtiene al calcular el determinante resultante de eliminar las filas y columnas correspondientes a los elementos que forman el menor. Para calcular el signo se suman los índices correspondientes a todas las filas y columnas de los elementos que forman el menor, si la suma es par el signo es positivo y si es impar negativo. Eligiendo las T primeras filas de los determinantes expresados en (4.7) se obtiene que todos los elementos columna de cada menor están multiplicados por la misma exponencial, siendo posible en este caso extraer los términos exponenciales de cada determinante. Así pues, aplicando esta metodología podemos expresar cada uno de los determinantes de (4.7) como una suma de exponenciales. Veámoslo con un ejemplo sencillo. Supongamos un sistema de cuatro estados ($n=4$) de manera que dos de ellos son de infracarga ($T=2$). En este caso el sistema de ecuaciones (4.6) se puede expresar como (4.26).

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \phi_{21}e^{z_2m} & \phi_{31}e^{z_3m} & \phi_{41}e^{z_4m} \\ \pi_2 & \phi_{22}e^{z_2m} & \phi_{32}e^{z_3m} & \phi_{42}e^{z_4m} \\ \pi_3 & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_4 & \phi_{24} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Aplicando la regla de Cramer para calcular el coeficiente a_1 obtenemos los dos determinantes expresados en (4.27).

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21}e^{z_2m} & \phi_{31}e^{z_3m} & \phi_{41}e^{z_4m} \\ \pi_2 & \phi_{22}e^{z_2m} & \phi_{32}e^{z_3m} & \phi_{42}e^{z_4m} \\ 0 & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 0 & \phi_{24} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21}e^{z_2m} & \phi_{31}e^{z_3m} & \phi_{41}e^{z_4m} \\ \pi_2 & \phi_{22}e^{z_2m} & \phi_{32}e^{z_3m} & \phi_{42}e^{z_4m} \\ \pi_3 & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_4 & \phi_{24} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix}} \quad (4.27)$$

Calculando ambos determinantes utilizando menores de orden $T=2$ en las dos primeras filas se obtiene (4.28) y (4.29).

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21}e^{z_2m} & \phi_{31}e^{z_3m} & \phi_{41}e^{z_4m} \\ \pi_2 & \phi_{22}e^{z_2m} & \phi_{32}e^{z_3m} & \phi_{42}e^{z_4m} \\ 0 & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ 0 & \phi_{24} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix} = \tag{4.28}$$

$$= \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{22} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_2m} - \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{31} & \phi_{23} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{32} & \phi_{24} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_3m} + \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{vmatrix} e^{z_4m}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21}e^{z_2m} & \phi_{31}e^{z_3m} & \phi_{41}e^{z_4m} \\ \pi_2 & \phi_{22}e^{z_2m} & \phi_{32}e^{z_3m} & \phi_{42}e^{z_4m} \\ \pi_3 & \phi_{23} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_4 & \phi_{24} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix} = \tag{4.29}$$

$$= \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{22} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_2m} - \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{31} & \phi_{23} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{32} & \phi_{24} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_3m} + \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{vmatrix} e^{z_4m} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \phi_{21} & \phi_{31} & \pi_3 & \phi_{43} \\ \phi_{22} & \phi_{32} & \pi_4 & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{(z_2+z_3)m} - \begin{vmatrix} \phi_{21} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{33} \\ \phi_{22} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{34} \end{vmatrix} e^{(z_2+z_4)m} + \begin{vmatrix} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{vmatrix} e^{(z_3+z_4)m}$$

Como se observa en el ejemplo ambos determinantes se expresan como una serie de exponenciales. Finalmente el coeficiente α_1 se obtiene en (4.30).

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{\begin{vmatrix} \phi_{21} & \phi_{31} & \pi_3 & \phi_{43} \\ \phi_{22} & \phi_{32} & \pi_4 & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{(z_2+z_3)m} - \begin{vmatrix} \phi_{21} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{33} \\ \phi_{22} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{34} \end{vmatrix} e^{(z_2+z_4)m} + \begin{vmatrix} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{vmatrix} e^{(z_3+z_4)m}}{\begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{21} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{22} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_2m} - \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{31} & \phi_{23} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{32} & \phi_{24} & \phi_{44} \end{vmatrix} e^{z_3m} + \begin{vmatrix} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{vmatrix} e^{z_4m}} \tag{4.30}$$

Expresión que coincide con el valor que se obtendría si aplicáramos (4.8), pero en este caso en lugar de desarrollar los determinantes con menores de orden uno, se han utilizado menores de orden T .

Una característica importante en el desarrollo del determinante (4.28) es que se han anulado todos los menores que no contenían la primera columna correspondiente a las probabilidades de estado π_i . Esta propiedad se puede generalizar para cualquier determinante del tipo (4.31).

$$\begin{vmatrix}
 \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,1}e^{z_Nm} \\
 \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,2}e^{z_Nm} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \pi_T & \phi_{2T}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,T}e^{z_Nm} \\
 0 & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N}
 \end{vmatrix} \quad (4.31)$$

Dado un menor de orden T formado por elementos pertenecientes a las T primeras filas del determinante (4.31) y que no contiene los elementos de la primera columna, se cumple siempre que su menor complementario tiene una columna que son todo ceros. Así pues el determinante del menor complementario es nulo. Esta propiedad hace que en el desarrollo del determinante mediante menores de orden T , todos sumandos que no contengan el menor con la primera columna sean nulos. Podemos generalizar esta propiedad expresándola como en (4.32) donde M'_i representa el producto de los menores con sus complementarios con signo a los cuales se les ha sacado como factor común el conjunto de exponenciales del tipo e^{z_jm} . En este caso Q_i es uno de posibles conjuntos formados por $T-1$ números enteros dentro del rango $[2, \dots, n]$.

$$\begin{vmatrix}
 \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,1}e^{z_Nm} \\
 \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,2}e^{z_Nm} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \pi_T & \phi_{2T}e^{z_2m} & \cdots & \phi_{N,T}e^{z_Nm} \\
 0 & \phi_{2,T+1} & \cdots & \phi_{N,T+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \phi_{2,N} & \cdots & \phi_{N,N}
 \end{vmatrix} = \sum_i M'_i e^{\sum_{j \in Q_i} z_j m} \quad (4.32)$$

Por otro lado, en el desarrollo del determinante (4.29) se distinguen dos tipos de exponenciales: unas con un único autovalor y otras con la suma de dos autovalores. Las que sólo tienen un autovalor se corresponden con aquellas en las cuales el menor contiene los elementos de la primera columna y además coinciden con las de la expresión (4.28). Las que tienen dos autovalores se corresponden a los menores que no incluyen la primera columna. De manera análoga al desarrollo de la expresión

(4.32), se puede obtener una expresión generalizada para el determinante del denominador de la ecuación (4.7), cuando éste se desarrolla utilizando menores de orden T con sus primeras T filas. Dicha expresión se muestra en (4.33).

$$\begin{vmatrix}
 \pi_1 & \phi_{2,1}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,1}e^{z_N^m} \\
 \pi_2 & \phi_{2,2}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,2}e^{z_N^m} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \pi_T & \phi_{2,T}e^{z_2^m} & \dots & \phi_{N,T}e^{z_N^m} \\
 \pi_{T+1} & \phi_{2,T+1} & \dots & \phi_{N,T+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \pi_N & \phi_{2,N} & \dots & \phi_{N,N}
 \end{vmatrix} = \sum_i M_i e^{\sum_{j \in P_i} z_j^m} + \sum_i M'_i e^{\sum_{j \in Q_i} z_j^m} \quad (4.33)$$

En este caso M_i y M'_i son el producto de los menores con sus complementarios con signo a los cuales se les ha sacado como factor común las exponenciales del tipo $e^{z_j^m}$. Los M_i son los menores que no incluyen la primera columna correspondiente a las probabilidades de estado π_i y los M'_i son los menores que sí la incluyen. En todos los menores que no incluyan la columna de probabilidades de estado es posible sacar un factor común del tipo $e^{z_j^m}$ para cada una de sus columnas. Así pues, como hay T columnas, estos menores están multiplicados por T exponenciales del tipo $e^{z_j^m}$. En los menores que se incluya la columna de probabilidades de estado, sólo se podrá sacar el factor común $e^{z_j^m}$ para el resto de columnas, de manera que dichos menores están multiplicados sólo por $T-1$ exponenciales. Así pues, P_i representa un conjunto entre todos los posibles formado por T números enteros en el rango $[2, \dots, n]$, y Q_i es un conjunto entre todos los posibles formado por $T-1$ números enteros en el rango $[2, \dots, n]$. El número de conjuntos posibles de tipo P_i viene dado por la expresión (4.34).

$$\binom{n-1}{T} \quad (4.34)$$

El número de conjuntos posibles de tipo Q_i viene dado por la expresión (4.35).

$$\binom{n-1}{T} \quad (4.35)$$

Las expresiones (4.34) y (4.35) también son el número de sumandos para del sumatorio de las M_i y M'_i respectivamente en la expresión (4.33).

Finalmente sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.7) se obtiene que el coeficiente α_1 se puede expresar de manera general tal como se indica en la ecuación (4.36).

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sum_i M_i e^{\sum_{j \in P_i} z_j m} + \frac{\sum_i M'_i e^{\sum_{j \in Q_i} z_j m}}{1}} \quad (4.36)$$

En los dos sumatorios de la expresión (4.36), para valores de m relativamente grandes, el efecto dominante vendrá dado por el sumando con mayor exponente. Así pues, al igual que hacen algunos autores para el cálculo de la probabilidad de *overflow* [Ani82][Kos84], podemos aquí aproximar ambos sumatorios por el sumando con mayor exponente, tal como se muestra en (4.37) y (4.38).

$$\sum_i M_i e^{\sum_{j \in P_i} z_j m} \approx M e^{\sum_{j \in P} z_j m} \quad (4.37)$$

$$\sum_i M'_i e^{\sum_{j \in Q_i} z_j m} \approx M' e^{\sum_{j \in Q} z_j m} \quad (4.38)$$

En este caso P es el conjunto de subíndices correspondientes a los T autovalores mas grandes y Q el conjunto de subíndices correspondientes a los $T-1$ autovalores mas grandes. De esta manera se puede definir $Z_1 = \{z_j / j \in P\}$ como el conjunto de los T autovalores más grandes y $Z_2 = \{z_j / j \in Q\}$ como el conjunto de los $T-1$ autovalores mayores. Tal como ya se ha mencionado anteriormente [Mit88] bajo la condición de estabilidad (4.19) existen $T-1$ autovalores positivos, de manera que todos ellos están incluidos en el conjunto Z_2 . El conjunto Z_1 , debe incluir además el autovalor negativo más cercano a cero, al cual llamamos autovalor dominante y designamos con z_d . Así pues la diferencia entre los conjuntos Z_2 y Z_1 es el autovalor dominante z_d tal como se expresa en (4.39).

$$Z_2 - Z_1 = \{z_d\} \quad (4.39)$$

Utilizando la propiedad (4.39) se obtiene (4.40).

$$\sum_{j \in P} z_j - \sum_{j \in Q} z_j = z_d \quad (4.40)$$

De esta manera al sustituir las aproximaciones (4.37) y (4.38) en (4.36) se obtiene la siguiente aproximación para el coeficiente α_1 (4.41).

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{M}{M'} e^{\left(\sum_{j \in P} z_j - \sum_{j \in Q} z_j\right)m}} = \frac{1}{1 + \frac{M}{M'} e^{z_d m}} \quad (4.41)$$

Finalmente evaluando la expresión (4.41) para un tamaño de *buffer* m nulo y comparándola con la expresión (4.17) se obtiene la aproximación (4.42) para el valor del coeficiente α_1 [Pal00b][Pal00d].

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i} e^{z_d m}} \quad (4.42)$$

Para clarificar mejor las aproximaciones realizadas, retomaremos el ejemplo anterior del sistema de ecuaciones (4.26). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que en dicho ejemplo se cumple la relación $z_2 < z_3 < z_4$. Con esta suposición las sumas de exponenciales que aparecen en la ecuación (4.30) se pueden aproximar tal como se expresa en (4.43) y (4.44).

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} \phi_{21} & \phi_{31} & \pi_3 & \phi_{43} \\ \phi_{22} & \phi_{32} & \pi_4 & \phi_{44} \end{array} \right| e^{(z_2+z_3)m} - \left| \begin{array}{cccc} \phi_{21} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{33} \\ \phi_{22} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{34} \end{array} \right| e^{(z_2+z_4)m} + \left| \begin{array}{cccc} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{array} \right| e^{(z_3+z_4)m} \approx \\ \approx \left| \begin{array}{cccc} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{array} \right| e^{(z_3+z_4)m} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{21} & \phi_{33} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{22} & \phi_{34} & \phi_{44} \end{array} \right| e^{z_2 m} - \left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{31} & \phi_{23} & \phi_{43} \\ \pi_2 & \phi_{32} & \phi_{24} & \phi_{44} \end{array} \right| e^{z_3 m} + \left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{array} \right| e^{z_4 m} \approx \\ \approx \left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{array} \right| e^{z_4 m} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación (4.30) obtenemos una expresión aproximada para el coeficiente α_1 (4.45).

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{\left| \begin{array}{cccc} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{array} \right| e^{(z_3+z_4)m}}{\left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{array} \right| e^{z_4 m}} = \frac{1}{1 + \frac{\left| \begin{array}{cccc} \phi_{31} & \phi_{41} & \pi_3 & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{42} & \pi_4 & \phi_{24} \end{array} \right| e^{z_3 m}}{\left| \begin{array}{cccc} \pi_1 & \phi_{41} & \phi_{23} & \phi_{33} \\ \pi_2 & \phi_{42} & \phi_{24} & \phi_{34} \end{array} \right| e^{z_4 m}} \quad (4.45)$$

Como el número de estados de infracarga para este ejemplo es $T=2$, tendremos que, en este caso, sólo habrá un autovalor positivo y evidentemente se corresponderá con el valor z_4 . El autovalor z_3 será un autovalor negativo, que en este caso, coincidirá con el autovalor dominante. En la expresión (4.45) aparecen algunas componentes de los autovalores del sistema. Para evitar el cálculo de dichos autovectores, se compara esta expresión con la ecuación (4.17) obteniendo la aproximación final del coeficiente a_1 expresada en (4.46).

$$a_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{(B_3 - C)\pi_3 + (B_4 - C)\pi_4}{(B_1 - C)\pi_1 + (B_2 - C)\pi_2} e^{z_3 m}} \quad (4.46)$$

Siendo (4.46) el equivalente a la expresión general (4.42) para el ejemplo que nos ocupa.

El resultado obtenido analíticamente en la expresión (4.42) se corresponde con el inverso de la expresión empírica propuesta en (4.25) tal como se muestra en (4.47) [Pal00d].

$$\frac{\sum_{i=1}^T \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)}{\sum_{i=T+1}^n \pi_i \cdot \text{cofactor}(\pi_i)} \cong A e^{Bm} = \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i} e^{-z_d m} \quad (4.47)$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i}; \quad B = -z_d$$

Los términos que aparecen en la expresión (4.42), son fáciles de calcular. Las probabilidades de estado π_i y el fluido generado en cada estado B_i se obtienen a partir de las expresiones (4.48) y (4.49) respectivamente, siendo s_u el número de fuentes activas de clase u en el estado i .

$$\pi_i = \prod_{u=1}^R \binom{n_u}{s_u} \frac{\lambda_u^{s_u} \mu_u^{n_u - s_u}}{(\lambda_u + \mu_u)^{n_u}} \quad (4.48)$$

$$B_i = \sum_{u=1}^R s_u r_u \quad (4.49)$$

La capacidad del canal C y el tamaño del *buffer* m son parámetros del sistema y el número de estados de infracarga T se obtiene directamente si los estados están ordenados según un criterio de generación de fluido creciente. La principal dificultad en el cálculo de (4.42) está en conocer cuál es el valor del autovalor dominante. En el caso homogéneo dicho autovalor se obtiene directamente utilizando la expresión cerrada (4.50). La obtención de dicha expresión se muestra en el Apéndice A.

$$z_d = -\frac{\mu + \lambda \left(1 - \frac{Nr}{C}\right)}{r - \frac{C}{r}} \quad (4.50)$$

En el caso heterogéneo la obtención del autovalor dominante no es inmediata. Para su cálculo se utiliza la expresión (4.51) en la cual se expresa el valor de la capacidad del sistema en función del autovalor dominante [Kos84].

$$C = \frac{1}{z_d} \sum_{u=1}^R \frac{n_u}{2} \left[z_d r_u + \mu_u + \lambda_u - \sqrt{(z_d r_u + \mu_u - \lambda_u)^2 + 4\lambda_u \mu_u} \right] \quad (4.51)$$

La expresión (4.51) no se puede invertir de manera que el autovalor dominante se pueda expresar como una función del resto de parámetros. A pesar de ello la capacidad es una función monótona decreciente para valores negativos de z_d . Ello permite utilizar técnicas de interpolación, proponiendo valores de z_d hasta obtener el valor de la capacidad del sistema deseado. Después de proponer un valor para el autovalor dominante, si la capacidad del sistema está por encima del valor esperado se propone un nuevo valor de z_d mayor (más cercano a cero) y, si está por debajo se propone un nuevo valor de z_d menor (más cercano a $-\infty$). Cuando el error obtenido en el cálculo de la capacidad es aceptable, también se acepta el autovalor z_d . Utilizando esta técnica se obtienen valores de capacidades que están en el rango expresado en (4.52).

$$\sum_{u=1}^R n_u r_u \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \mu_u} < C < \sum_{u=1}^R n_u r_u \quad (4.52)$$

El valor mínimo de dicho rango se corresponde con la condición de estabilidad (4.19) y el valor máximo se corresponde al caso de máximo fluido generado cuando todas las fuentes están activas.

La expresión (4.42) es una expresión aproximada en la mayoría de los casos pero para algunas situaciones concretas es una expresión exacta. Dichas situaciones son:

- Para un tamaño de *buffer* nulo.
- Para un tamaño de *buffer* infinito.
- Cuando la capacidad del sistema C tiende al flujo máximo generado cuando todas las fuentes están activas.
- Para una única fuente ON-OFF.

Tal como se ha indicado, si el tamaño del buffer es nulo, la expresión aproximada (4.42) y la expresión exacta (4.17) coinciden.

También para el caso en el que el tamaño del *buffer* tiende a infinito el valor de α_1 expresado en (4.42) tiende a uno, ya que el autovalor dominante es negativo. Este resultado expresado en (4.53) coincide con el valor exacto del coeficiente α_1 obtenido en (4.13).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i} e^{z_d m}} = 1 \quad (4.53)$$

Cuando la capacidad del sistema tiende al fluido máximo generado cuando todas las fuentes están activas, todos los estados del sistema (excepto el último) son de infracarga. Así pues, se puede expresar la ecuación (4.42) tal como se indica en (4.54) obteniendo que el coeficiente α_1 tiende a uno. Este hecho ya se había observado en la sección 2.3.

$$\lim_{C \rightarrow B_n} \frac{1}{1 + \frac{(B_n - C)\pi_n}{\sum_{i=1}^{n-1} (B_i - C)\pi_i} e^{z_d m}} = 1 \quad (4.54)$$

Para el caso de una única fuente ON-OFF, la expresión (4.42) también es exacta. En este caso sólo existen dos estados, uno de sobrecarga y otro de infracarga ($T=1$). Ello significa que el número de autovalores positivos es igual a $T-1=0$. Así pues, de los dos autovalores que tiene el sistema, uno es el cero y el negativo se

corresponde con autovalor dominante. De esta forma la expresión exacta (4.36) se puede expresar en este caso como (4.55).

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{M}{M'} e^{z_d m}} \quad (4.55)$$

Particularizando la expresión (4.55) para el caso que m tienda a cero y comparándola con la expresión (4.17) se obtiene (4.56).

$$\frac{M}{M'} = \frac{-C\pi_0}{(r-C)\pi_1} \quad (4.56)$$

Substituyendo (4.56) en (4.55) podemos expresar el valor de α_1 para el caso de una única fuente ON-OFF tal como se indica en la expresión (4.57). Esta expresión coincide con (4.42) para el caso de una única fuente ON-OFF.

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{-C\pi_0}{(r-C)\pi_1} e^{z_d m}} \quad (4.57)$$

Tal como se ha expresado en la sección 2.3 es preferible trabajar con el valor (α_1-1) , en lugar del valor α_1 , ya que con el primero se obtienen resultados más precisos. Podemos utilizar el mismo razonamiento que el expresado anteriormente pero, en lugar de partir del sistema de ecuaciones (4.6), partiendo del sistema (4.22). En este caso se obtiene que el valor (α_1-1) se puede aproximar por (4.58).

$$\alpha_1 - 1 \approx \frac{-1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C)\pi_i}{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C)\pi_i} e^{-z_d m}} \quad (4.58)$$

La expresión (4.58) también se puede obtener de forma directa restando uno a la formula (4.42).

4 Cálculo aproximado de la probabilidad de pérdida.

Finalmente se puede obtener una expresión aproximada para la probabilidad de pérdida, simplemente substituyendo el valor aproximado obtenido en (4.58) en la expresión (4.1) obteniendo la expresión (4.59) [Pal00b][Pal00d].

$$\text{probabilidad de pérdida} \approx \frac{1 - \frac{C}{\sum_{i=1}^n B_i \pi_i}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C) \pi_i}{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C) \pi_i} e^{-z_a m}} \quad (4.59)$$

La principal ventaja de esta ecuación es que permite calcular la probabilidad de pérdida sin necesidad de calcular todos los autovalores, autovectores y coeficientes α_j de la solución general expresada en (4.2). Además tal como se ha mencionado en la sección anterior, para aquellos casos para los cuales la aproximación del coeficiente α_1 sea exacta la expresión de la probabilidad de pérdida también lo es. Así pues (4.59) es exacta para un tamaño de *buffer* nulo, para un tamaño de *buffer* infinito, y para capacidades tendiendo al máximo flujo generado por todas las fuentes del sistema. También coincide con la probabilidad de pérdida en el caso de trabajar con una única fuente ON-OFF.

Para comprobar la bondad de la expresión obtenida para la probabilidad de pérdida se han realizado distintas pruebas, calculando el valor exacto y el valor aproximado para distintas mezclas de fuentes ON-OFF. Para ello se han utilizado cuatro clases de fuentes ON-OFF, cada una de ellas como un modelo sencillo de un servicio telemático. Los valores de λ , μ y r han sido obtenidos de [Onv95] y se muestran en la Tabla 4.4.

La Figura 4.2, la Figura 4.3 y la Figura 4.4 representan gráficamente los resultados obtenidos en el cálculo de la probabilidad de pérdida, comparando el valor exacto de la expresión (4.1) con el valor aproximado de la expresión (4.59). En todas ellas la probabilidad de pérdida se representa en un eje logarítmico y se ha tomado un tamaño de *buffer* de 50 Mbits. La Figura 4.2 corresponde al caso homogéneo con cinco fuentes de video-telefonía, generando cada una de ellas una tasa de información de 10 Mbps. En la Figura 4.3 se representa el caso heterogéneo con dos fuentes de video-telefonía y dos de un servicio de transferencia de ficheros. Finalmente en la Figura 4.4 se representa una mezcla formada por dos fuentes de video telefonía, dos fuentes para un servicio de fax de color y otras dos para un servicio de transferencia de ficheros.

Tabla 4.4 Clases de fuentes ON-OFF usadas en las distintas mezclas.

Clase	Servicio	λ^{-1} (s)	μ^{-1} (s)	r (Mbps)
1	Voz	260	100	0.064
2	Vídeo telefonía	5000	100	10
3	Fax de color	300	3	2
4	transferencia de ficheros	333	1	2

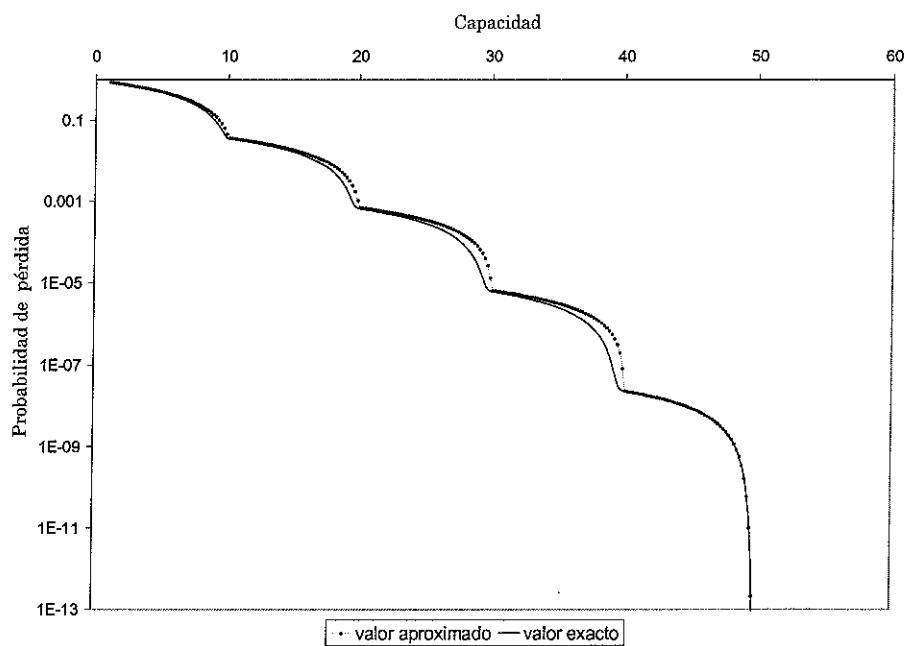


Figura 4.2 Probabilidad de pérdida en función de la capacidad del canal para el caso homogéneo con cinco fuentes de clase 2 y un buffer de 50 Mbps.

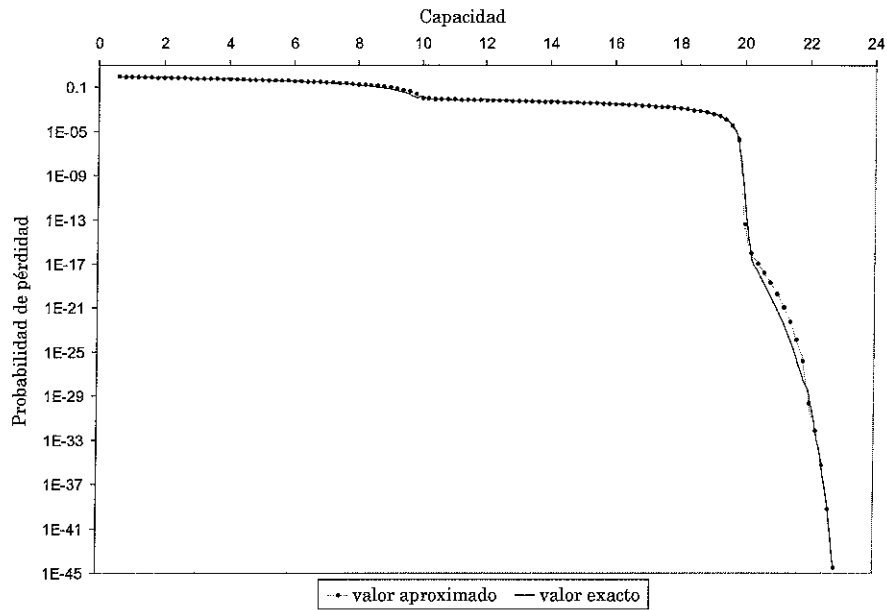


Figura 4.3 Probabilidad de pérdida en función de la capacidad del canal una mezcla de dos fuentes de clase 2 y dos fuentes de clase 4 con un buffer de 50 Mbps.

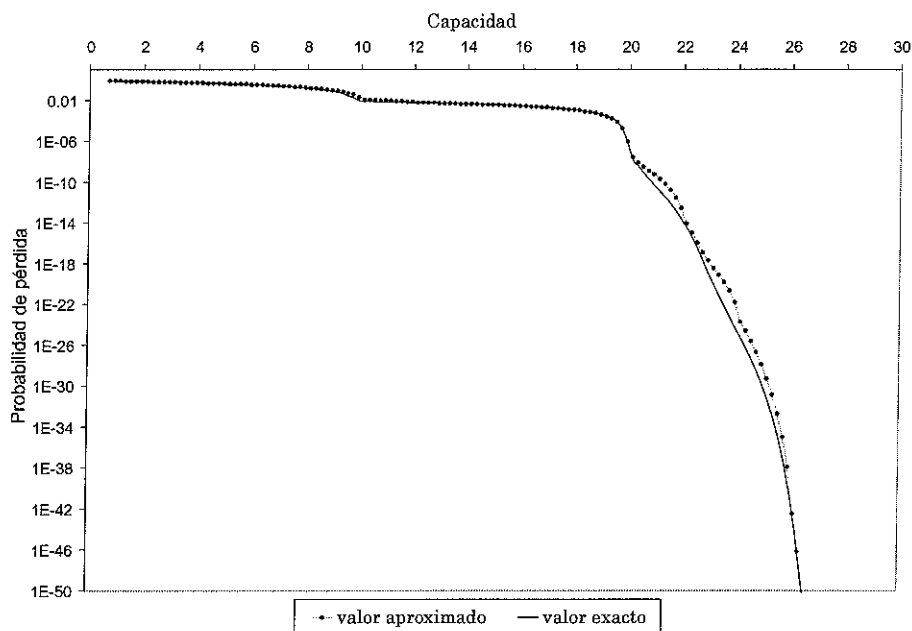


Figura 4.4 Probabilidad de pérdida en función de la capacidad del canal una mezcla de dos fuentes de clase 2, dos fuentes de clase 3 y dos fuentes de clase 4 con un buffer de 50 Mbps.

En todos los casos se observa que la probabilidad de pérdida decrece más rápidamente cuando la capacidad alcanza un valor coincidente con la tasa de fluido generada por las fuentes en algún determinado estado. Las fuentes de video-telefonía generan mayor tasa de información que el resto de fuentes produciendo un efecto de

enmascaramiento sobre éstas. Cuando la capacidad del sistema aumenta hasta el punto de poder drenar el fluido generado por las fuentes de este tipo, la probabilidad de pérdida de información disminuye mucho más rápidamente que en otros casos. En concreto para el caso homogéneo de la Figura 4.2 este fenómeno se produce para capacidades de 10, 20, 30, 40 y 50 Mbps, y para los casos heterogéneos de la Figura 4.3 y la Figura 4.4 se produce para capacidades de 10 y 20 Mbps.

La expresión aproximada (4.59) se ajusta bastante bien al valor exacto demostrando la misma tendencia en todos los casos probados. Es en los casos en que la probabilidad de pérdida decrece más rápidamente, la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado es mayor. Es en estos casos cuando el valor de los términos despreciados en las aproximaciones tienen mayor significado.

No obstante, se puede observar que la expresión es de utilidad para dimensionar las capacidades de los enlaces de interconexión entre nodos, cuando se requiere acotar la probabilidad de pérdida de la información. Tal como se muestra en las figuras anteriores si fijamos la probabilidad de pérdida, la diferencia entre el valor de capacidad exacto y el que se obtiene con la expresión aproximada es relativamente pequeña, siendo el valor aproximado suficientemente orientativo para dimensionar los enlaces. En todas las pruebas realizadas el error relativo para dichas capacidades está alrededor de un 2% en los peores casos. Como se observa en figuras anteriores la probabilidad de pérdida de información es una función monótona de creciente con la capacidad del enlace. Así pues, para dimensionar enlaces se puede utilizar una técnica de interpolación, proponiendo valores de capacidad hasta conseguir la probabilidad de pérdida deseada. Si para dicha interpolación se utiliza la expresión exacta de la probabilidad de pérdida será necesario recalcular todos los autovalores, autovectores y coeficientes α_j en cada iteración, lo cual puede resultar una tarea bastante tediosa. Por el contrario utilizando la expresión aproximada será posible encontrar rápidamente el valor de capacidad deseado, ya que en este caso sólo hay que recalcular el número de estados de infracarga T y el autovalor dominante. El número de estados de infracarga se obtiene de manera inmediata si los estados están ordenados. El autovalor dominante se obtiene de manera inmediata en el caso homogéneo aplicando (4.50) y para el caso heterogéneo será necesario recurrir a técnicas de interpolación con la expresión (4.51).

Si lo que se pretende es dimensionar los conmutadores calculando el tamaño de sus *buffers* de manera que la probabilidad de pérdida de información esté acotada, la expresión aproximada (4.59) es de mucha utilidad. En este caso es posible obtener una expresión cerrada que nos permita calcular el tamaño mínimo de *buffer* para acotar la probabilidad de pérdida. Dicha expresión se muestra en (4.60).

$$m \approx \frac{1}{z_d} \ln \left[\frac{\left(\text{probabilidad de pérdida} \cdot \sum_{i=1}^n B_i \pi_i \right) \sum_{i=1}^T (B_i - C) \pi_i}{\left((1 - \text{probabilidad de pérdida}) \sum_{i=1}^n B_i \pi_i \right) - C \sum_{i=T+1}^n (B_i - C) \pi_i} \right] \quad (4.60)$$

5 Conclusiones

En este capítulo se ha expuesto la metodología general para el cálculo coeficiente α_1 . A continuación se ha presentado un método que permite obtener una gran precisión en los cálculos de dicho coeficiente. Dicho método se basa en arreglar el sistema de ecuaciones lineales de manera que el valor calculado sea $\alpha_1 - 1$, en lugar de α_1 . Está técnica aprovecha la representación numérica en coma flotante para los números reales obteniendo resultados más precisos sin la necesidad de utilizar mantisas grandes. Ello se ha reflejado en los distintos cálculos realizados para evaluar la probabilidad de pérdida, pudiendo obtener tanta precisión como se desee. También se ha desarrollado una expresión aproximada que permite obtener el valor de α_1 . Dicha aproximación es computacionalmente factible, de manera que permite calcular el coeficiente α_1 con la potencia de cálculo de actual de los ordenadores, incluso para un número muy elevado de fuentes. La utilización de dicha aproximación para el cálculo de la probabilidad de pérdida nos permite obtener una expresión de gran utilidad en el diseño y dimensionado de redes para el caso en que se quiera acotar la probabilidad de pérdida. Dicha expresión de la probabilidad de pérdida es una de las contribuciones más importantes de este trabajo. Se ha comparado gráficamente el valor de la expresión aproximada con el valor real. En las comparaciones se ha visto que el peor comportamiento de la aproximación se produce para valores de capacidad que coinciden con la tasa de fluido generada por las fuentes dominantes en alguno de los estados. Es alrededor de estos valores de capacidad cuando la probabilidad de pérdida decrece más rápidamente. En estos casos de gran velocidad de decrecimiento, es cuando la expresión aproximada tiene más dificultad para seguir a la expresión exacta. A pesar de todo ello, fijada una

probabilidad de pérdida, en los peores casos, la mayor diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado está alrededor de un 2% en todas las pruebas realizadas. También se ha visto que la expresión aproximada coincide con la exacta en algunos casos específicos: para los valores extremos del tamaño del *buffer*, para el valor máximo de capacidad, y para el caso que se esté trabajando con una única fuente.

Otra de las ventajas de utilizar la expresión aproximada es que permite dimensionar fácilmente el tamaño de un *buffer* cuando se pretende acotar la probabilidad de pérdida de la información. También permite dimensionar las capacidades de los enlaces mediante una técnica de interpolación, proponiendo distintos valores de capacidad hasta encontrar la probabilidad de pérdida deseada.

Capítulo 5 Diseño de Topologías

1 Introducción

En los entornos de redes locales, las nuevas exigencias de ancho de banda han conllevado un aumento de la capacidad de los enlaces y una mayor segmentación de dichas redes. De esta forma, las redes de área local que originalmente eran de medio compartido tienden a convertirse en redes conmutadas. Además, estas redes cubren un área geográfica reducida de manera que el retardo de la información no suele ser un parámetro de calidad de servicio decisivo. Este tipo de redes suelen manejar grandes volúmenes de información, pudiéndose producir situaciones de congestión, siendo la probabilidad de pérdida de la información un parámetro de calidad de servicio a tener en consideración.

Existen muchas y diversas técnicas para el diseño y dimensionado de redes [Cah98][Ker93]. Todas ellas proporcionan algoritmos y métodos que en algunos casos optimizan alguna figura de mérito de la red bajo ciertas restricciones. El diseño de una topología está intrínsecamente relacionado con el encaminamiento de la información en ésta. Dependiendo de las rutas que siga la información, los retardos en los enlaces y las posibles congestiones en los nodos pueden variar. Es por ello que muchas veces sea difícil encontrar una solución óptima. En estos casos se suelen

utilizar algoritmos heurísticos que, aunque no garantizan la convergencia hacia un óptimo, permiten encontrar soluciones pseudo-óptimas. Un ejemplo de ello lo podemos encontrar en [Elb96], donde se utilizan algoritmos genéticos [Sri94] para optimizar la segmentación de una red de área local.

En este capítulo se propone un procedimiento heurístico para el diseño de topologías de redes conmutadas en entornos locales. En este caso, las restricciones impuestas a la red están relacionadas con la probabilidad de pérdida de la información en los nodos de conmutación [Pal00f]. Para el cálculo de las probabilidades de pérdida se utilizarán las herramientas desarrolladas en capítulos anteriores. A pesar de ello, la metodología aquí propuesta es suficientemente genérica como para considerar otros parámetros de calidad de servicio. Así pues, nuestro objetivo será diseñar la topología de una red conmutada que cumpla las restricciones de calidad de servicio intentando minimizar el número de nodos y enlaces presentes en la red.

El tráfico se modelará con fluidos utilizando los procedimientos desarrollados en capítulos anteriores. En este caso, el concepto de paquete desaparece, de manera que al considerar el tráfico como un fluido continuo, es posible independizar su caracterización de los protocolos utilizados para la transmisión de la información. El tráfico agregado saliente por cada puerto de cada nodo de conmutación se modelará como una superposición de fuentes ON-OFF. Dichas fuentes modelan el tráfico generado por las estaciones y que es encaminado por dicho puerto. A pesar de que en general el tráfico saliente de un nodo de conmutación no pueda ser considerado nuevamente como un tráfico ON-OFF [Aal98], realizaremos esta aproximación. De hecho el tráfico saliente de un nodo de conmutación será más suave que el generado por fuentes las ON-OFF, ya que su valor de máximo nunca superará la capacidad del canal. Así pues al utilizar esta hipótesis estaremos suponiendo un caso desfavorable de manera que se seguirán cumpliendo las restricciones de calidad de servicio.

2 Diseño de topologías

Para el diseño de las topologías de red se utiliza un algoritmo heurístico. Dicho algoritmo consta de dos fases. En una primera fase se genera una topología inicial la cual cumple los requisitos de conexión entre estaciones y de calidad de servicio, en este caso se pretende acotar la probabilidad de pérdida de la información. En una segunda fase se intenta disminuir el número de nodos y enlaces que forman la

topología. Para ello se intentan combinar pares de nodos formando uno único, el cual seguirá cumpliendo con los criterios de conexión y de calidad de servicio de la red.

En el método propuesto se suponen las siguientes figuras de diseño:

- Los enlaces de la red son bidireccionales y todos iguales con la misma capacidad.
- Los conmutadores también son todos iguales, con el mismo número de puertos y el mismo tamaño para todos sus *buffers*.

Además se impone como restricción para garantizar una determinada calidad de servicio que la probabilidad de pérdida de la información en los enlaces de la red esté acotada [Pal00e][Pal00f].

Antes de realizar el diseño es necesario conocer y modelar los distintos servicios que debe soportar la red. Cada servicio es modelado como una o varias fuentes ON-OFF. La integración de los distintos servicios en cada enlace de la red se obtendrá simplemente agregando las fuentes que modelan dichos servicios. Así pues, para cada servicio será necesario determinar su tiempo de actividad (t_{on}), su tiempo de inactividad (t_{off}) y la intensidad de fluido generado (r), la cual estará expresada en unidades de transmisión de información, por ejemplo bits/segundo. Supondremos que a la salida de cada puerto existe una cola donde se almacena el fluido que debe ser drenado por cada enlace. El tamaño de dicha cola (m) es una figura de diseño del método.

También se supone conocido el número de servicios que se debe soportar entre cada par de estaciones. Ambas estaciones podrán ejercer tanto el papel de transmisor como de receptor de manera que habrá que tener en consideración tanto los servicios en sentido ascendente como descendente.

Con este modelo es posible utilizar las expresiones desarrolladas en capítulos anteriores para realizar el cálculo de la probabilidad de pérdida de información en cada enlace. Para facilitar los cálculos se utilizarán las expresiones aproximadas. Como se verá más adelante, con el método de diseño propuesto, será necesario unir flujos de información canalizándolos por un mismo enlace. En estos casos habrá que calcular si la capacidad de los enlaces puede soportar dicho flujo de información sin que la probabilidad de pérdida de la información sobrepase cierto umbral. Ya que el tipo de decisiones a tomar son booleanas (SI o NO), parece lógico utilizar expresiones

aproximadas en los cálculos, ya que lo que se pretende calcular no es la probabilidad de pérdida con exactitud, sino si ésta sobrepasa un determinado umbral o no. El hecho de emplear expresiones aproximadas permitirá que el tiempo de computación sea razonable en el caso de que se trabaje con gran cantidad de servicios. Así pues para el cálculo de la probabilidad de pérdida se utilizará la expresión (5.1).

$$\text{probabilidad de pérdida} \approx \frac{1 - \frac{C}{\sum_{i=1}^n B_i \pi_i}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^T (B_i - C) \pi_i}{\sum_{i=T+1}^n (B_i - C) \pi_i}} e^{-z_d m} \quad (5.1)$$

También se puede utilizar la expresión (5.1) para calcular la capacidad necesaria de un enlace para poder soportar un determinado flujo de tráfico utilizando técnicas de interpolación.

2.1 Diseño de la topología inicial

Para el diseño de la topología inicial se toma cada una de las estaciones de la red y se construye una subtopología con estructura de árbol. Las extremidades de dicho árbol representan los puntos de conexión con el resto de subtopologías. Ello significa que si en la subtopología i hay una extremidad con un punto de conexión que apunta a la subtopología j , todo el tráfico intercambiado entre las estaciones i y j fluirá por dicha extremidad. Es decir, el punto de conexión j indica el camino a seguir para alcanzar la estación j .

En la Figura 5.1 se muestra un ejemplo de subtopología, las formas cuadradas representan estaciones, las redondas nodos de conmutación y las trapezoidales puntos de conexión con otras subtopologías. En este ejemplo sencillo se supone una red formada por seis estaciones, además los nodos de conmutación tienen tres puertos bidireccionales cada uno. Inicialmente se une la estación a un nodo de acceso (en el ejemplo de la Figura 5.1 se une la estación 1 al nodo 7). El enlace que une ambos dispositivos deberá cumplir las restricciones de calidad de servicio. Utilizando la expresión (5.1), y teniendo en cuenta que la probabilidad de pérdida es una función decreciente con la capacidad, se puede interpolar el valor de capacidad mínimo para dicho enlace que cumple los requisitos de calidad de servicio. Dado que los enlaces son bidireccionales, dicho cálculo debe realizarse tanto para el tráfico

ascendente, como para el tráfico descendente. Una vez realizado el cálculo para todas las estaciones, se considerará el peor caso, o sea el valor máximo de capacidad. Dicho valor será el valor mínimo de capacidad que deberán tener los enlaces de la red. En el caso que las capacidades de diseño fueran inferiores a dicho mínimo sería necesario modificarlas, o bien, redefinir los servicios soportados entre las distintas estaciones de la red. Debido a la propia estructura arbórea de las subtopologías, por el resto de enlaces de cada subtopología transitará un tráfico inferior al tráfico que circula por el enlace de acceso. Por lo tanto, si el enlace de acceso cumple las restricciones de calidad de servicio, el resto de enlaces de cada subtopología también lo cumplirá.

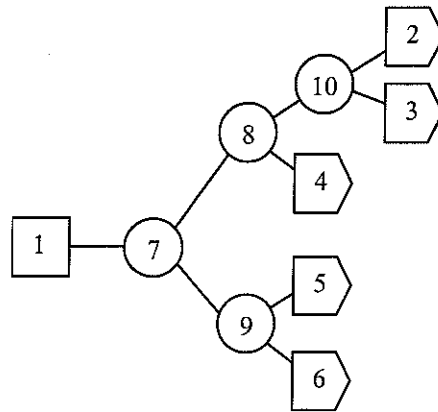


Figura 5.1 Subtopología asociada a la estación 1.

La profundidad del árbol, definida como el número de nodos que hay entre la estación y el punto de conexión más alejado de la misma, dependerá del número de puntos de conexión que haya en cada subtopología. Dada una profundidad p el número máximo de destinos viene dado por (5.2).

$$\text{numero max destinos} = (\text{puertos} - 1)^p \quad (5.2)$$

Siendo puertos , el número de puertos en cada nodo. Para un número de puntos de conexión con otras subtopologías igual a conexiones y despejando el valor de p en (5.2) se obtiene la expresión (5.3) para calcular la profundidad de una topología.

$$p = \left\lceil \frac{\ln(\text{conexiones})}{\ln(\text{puertos} - 1)} \right\rceil \quad (5.3)$$

El diseño de la subtopología se realiza de manera que sólo queden puertos libres en aquellos nodos más alejados de la estación. Ello facilitará la posterior combinación de estos nodos más alejados. En el ejemplo de la Figura 5.1 al trabajar

con nodos que sólo tienen tres puertos (valor mínimo para esta variable) es imposible que ningún puerto quede libre, pero para nodos con mayor número de puertos ello sí es posible. Si sólo hubiese $p-1$ niveles sólo podría haber $(puertos-1)^{p-1}$ puntos de conexión con otras topologías, siendo necesario añadir nuevos nodos de nivel p hasta conseguir los puntos de conexión que faltan. Dicho número de puntos de conexión es la diferencia entre el número total de puntos de conexión y el máximo permitido en el nivel $p-1$, tal como se expresa en (5.4).

$$conexiones - (puertos - 1)^{p-1} \quad (5.4)$$

Por cada nuevo nodo añadido, un punto de conexión de nivel $p-1$ pasará a nivel p . Así pues, teniendo en cuenta que el nuevo nodo gastará un puerto para conectarse a la subtopología y otro para el punto de conexión desplazado a nivel p , tenemos que cada vez que se añade un nodo es posible añadir $(puertos-2)$ puntos de conexión. Repartiendo el número de puntos de conexión necesarios expresados en (5.4) entre los puertos que se gana al añadir un nuevo nodo en el nivel p , se obtiene la cantidad de nodos necesarios en dicho nivel. Dicho valor se expresa en (5.5).

$$nodos\ nivel\ p = \left\lceil \frac{conexiones - (puertos - 1)^{p-1}}{(puertos - 2)} \right\rceil \quad (5.5)$$

El nivel $p-1$ deberá estar lleno, sin puertos libres, de lo que se deduce que el número de puntos de conexión con otras subtopologías en dicho nivel es igual al número de puertos disponibles en el nivel $p-1$ menos el número de nodos en el nivel p tal como se muestra en (5.6).

$$puntos\ conexión\ nivel\ p - 1 = (puertos - 1)^{p-1} - nodos\ nivel\ p \quad (5.6)$$

El resto de puntos de conexión se ubicarán en el nivel p tal como se indica en (5.7).

$$puntos\ conexión\ nivel\ p = conexiones - puntos\ conexión\ nivel\ p - 1 \quad (5.7)$$

En el ejemplo de la Figura 5.1 los nodos son de tres puertos cada uno y hay un total de 5 conexiones con otras subtopologías. En este caso se obtienen los resultados expresados en (5.8), los cuales coinciden con la propia figura.

$$\begin{aligned}
 p &= \left\lceil \frac{\ln(5)}{\ln(3-1)} \right\rceil = \lceil 2.32 \rceil = 3 \\
 \text{nodos nivel } p &= \left\lceil \frac{5 - (3-1)^{3-1}}{3-2} \right\rceil = 1 \tag{5.8} \\
 \text{puntos conexión nivel } p &= (3-1)^{3-1} - 1 = 3 \\
 \text{puntos conexión nivel } p &= 5 - 2 = 3
 \end{aligned}$$

Una vez conocido el número de puntos de conexión en cada uno de los niveles, es posible asignar dichos puntos de conexión. El orden con que se ubican los puntos de conexión en los nodos de las extremidades es aleatorio, pudiendo obtener distintas topologías iniciales para diferentes ordenaciones.

Una vez conocidos los puntos de conexión hay que conocer cual es el tráfico saliente en cada uno de los puertos de la red. Para ello se genera una lista en cada puerto formada por pares de estaciones [origen,destino], indicando cual es el tráfico saliente por dicho puerto. El tráfico que circulará por cada enlace será el tráfico saliente de cada uno de sus puertos extremos. En la Figura 5.2 se muestra el tráfico que circula por el enlace que une a los nodos 8 y 10 de la Figura 5.1.

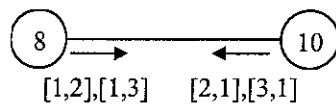


Figura 5.2 Tráfico entre los nodos 8 y 10

Es evidente que para poder determinar dichos tráfico es necesario haber asignado previamente cuáles son los puntos de conexión de cada subtopología. Conociendo cuáles son los servicios definidos entre cada par de estaciones y sabiendo modelar cada uno de ellos mediante fuentes ON-OFF se podrá confeccionar el conjunto total de fuentes ON-OFF que generarán el tráfico que fluirá por cada enlace.

Una vez generada la subtopología asociada a cada una de las estaciones, se procede a la construcción de la topología inicial. Para ello se unen los puntos de conexión de cada una de las subtopologías. En la Figura 5.3 se muestra un ejemplo en el cual se interconectan 6 subtopologías formando la topología inicial de la Figura 5.4.

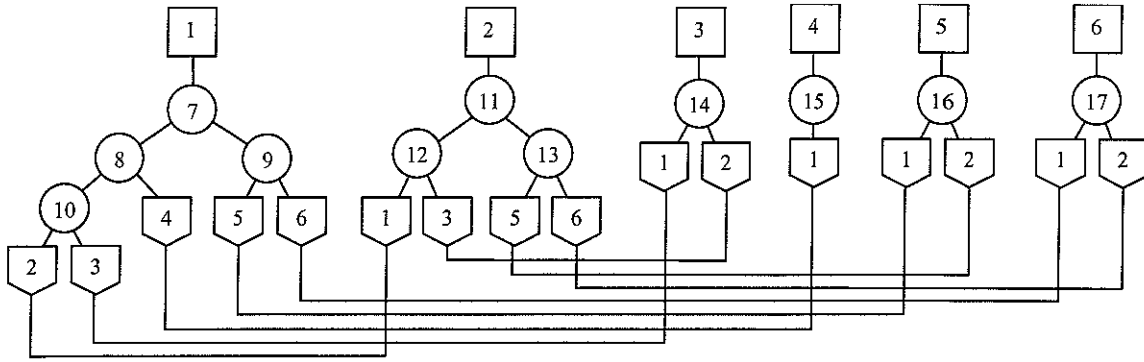


Figura 5.3 Unión de subtopologías.

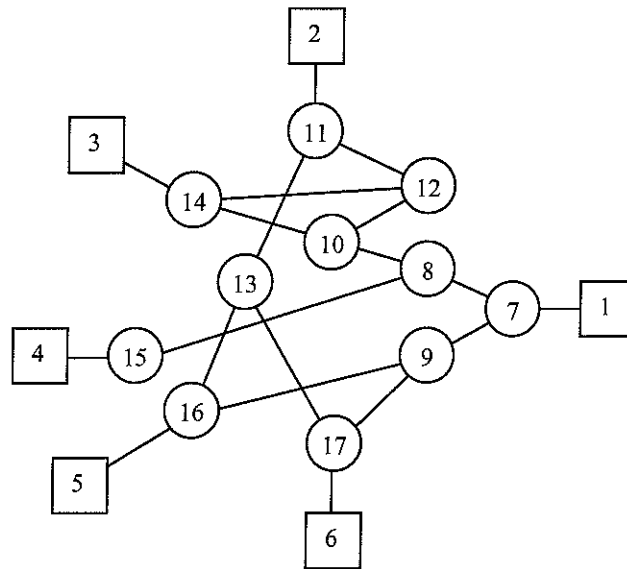


Figura 5.4 Topología inicial.

Esta topología inicial cumple con las restricciones de calidad de servicio impuestas a la red; en este caso que la probabilidad de pérdida de cada uno de los enlaces de la red esté acotada. Además también garantiza la existencia de un camino de comunicación entre aquellos pares de estaciones que lo precisen.

2.2 Mejora de la topología

Como se observa en el ejemplo de la Figura 5.4, a pesar de que la topología obtenida inicialmente cumple los requisitos de diseño, el número de nodos y enlaces obtenidos es muy elevado. Así pues, a continuación se procede a simplificar esta topología eliminando nodos y enlaces de manera que se sigan cumpliendo tanto los requisitos de conexión de la red, como los requisitos de calidad de servicio. Dicha simplificación se realiza combinando pares de nodos vecinos. Dos nodos son considerados vecinos cuando están conectados directamente (Figura 5.5 a), cuando

están conectados a un nodo común (Figura 5.5 b) o bien, si se cumplen ambas condiciones (Figura 5.5 c).

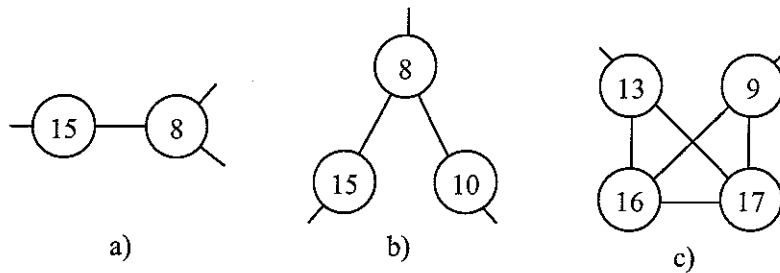


Figura 5.5 : Nodos vecinos.

Al combinar dos nodos conectados directamente se produce un ahorro de un nodo y un enlace. La única condición que se debe cumplir para que dicha combinación sea posible es que el nuevo nodo disponga de suficientes puertos para mantener las conexiones ya establecidas (Figura 5.6 a).

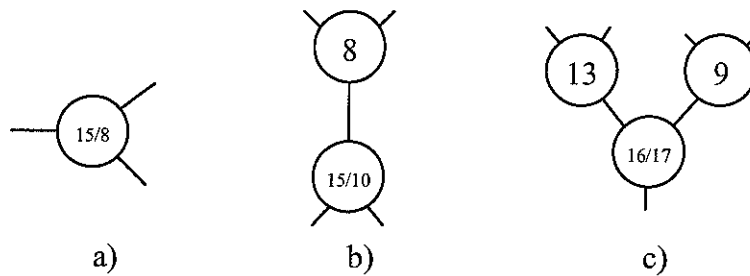


Figura 5.6 Unión de nodos vecinos.

Dicho de otra forma, que el número de conexiones del nuevo nodo con el resto de nodos de la red sea inferior o igual al número de puertos de un nodo. Al combinar dos nodos conectados a un mismo nodo común, al cual llamaremos nodo padre, también se produce el ahorro de un nodo y un enlace (Figura 5.6 b). Si un par de nodos tiene más de un padre se produce el ahorro de un enlace por cada nodo padre (Figura 5.6 c). Para que dichas combinaciones sean posibles es necesario que el nuevo nodo combinado disponga de suficientes puertos para mantener las conexiones ya establecidas, pero además también deben cumplirse las condiciones de calidad de servicio en los enlaces que unen el nodo combinado con sus padres. Cada uno de estos enlaces es la unión de otros dos, por lo tanto, el tráfico que circula por cada uno de ellos es la agregación de los tráfico de los enlaces originales. Por ejemplo, en la Figura 5.6 c el tráfico que circula por el enlace que une los nodos 13 y 16/17 es la agregación del tráfico que circulaba por dos enlaces: el que unía el nodo 13 con el 16

y el que unía el nodo 13 con el 17. En estos casos es necesario calcular la probabilidad de pérdida en el nuevo enlace y comprobar que se cumplan los criterios de calidad de la red. Si dichos criterios no se cumplen, no será posible unir los enlaces que se conectan al nodo padre. En este caso, si el número de puertos disponibles lo permite, se puede tener un doble enlace entre el nodo combinado y su padre. Aunque esta situación no se corresponda con una situación real, el algoritmo de combinación de nodos lo permite, ya que muy probablemente en el siguiente intento se puedan combinar los nodos unidos por el doble enlace, de forma que éste desapareciera. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 5.7.

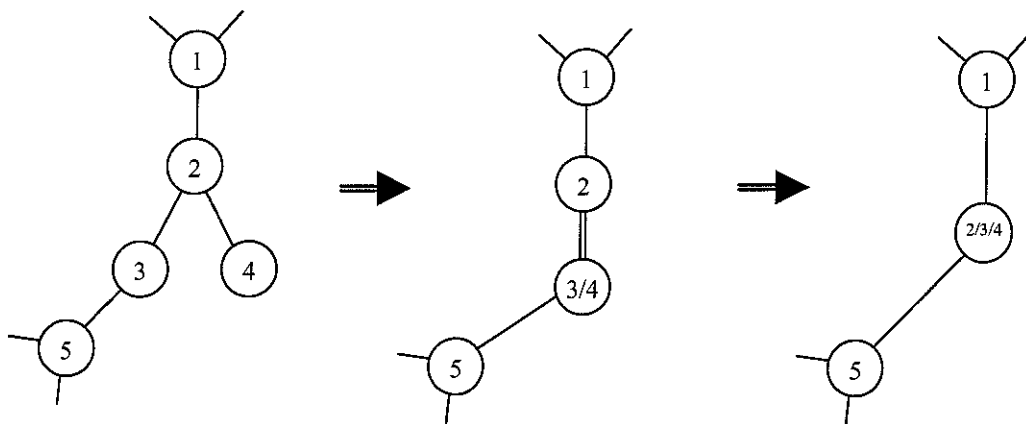


Figura 5.7 Unión de dos nodos mediante un doble enlace.

Tal como se ha mencionado anteriormente, el tráfico que circulará por un enlace obtenido a partir de la unión de otros dos, será la agregación de los tráficos de los enlaces originales. A la hora de calcular este nuevo tráfico hay que evitar que se formen bucles cerrados de flujos de tráfico. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 5.8.

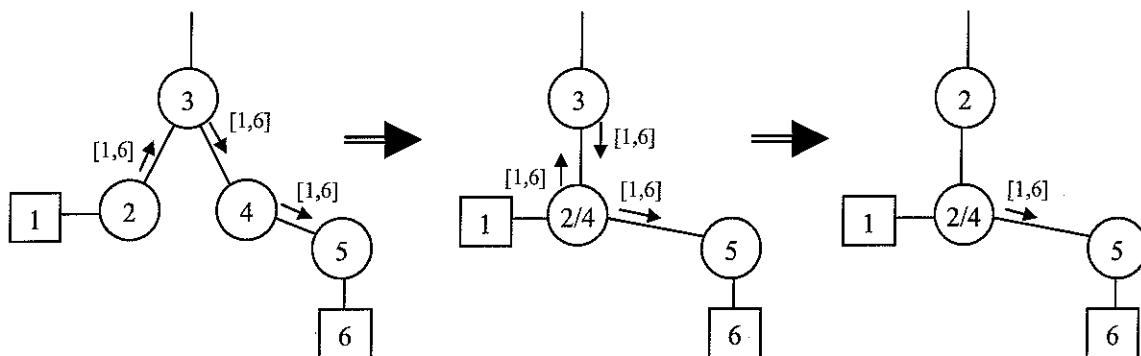


Figura 5.8 Ejemplo de bucle cerrado de tráfico

En este ejemplo el tráfico generado por la estación 1 destinado a la estación 5 sigue la ruta $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Al combinar los nodos 2 y 4, si recalculamos el tráfico que circula por cada enlace simplemente por agregación de tráficos se puede dar la situación de que un mismo tráfico circule en ambos sentidos por un mismo enlace. Es evidente que la ruta que seguirá el tráfico será $1 \rightarrow 2/4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, evitando su paso por el nodo 3. Así pues, si se da una situación en la que después de la agregación de tráficos se obtiene un bucle cerrado este debe ser eliminarlo. Ello se consigue eliminando el tráfico que circula simultáneamente en ambos sentidos por un mismo enlace.

El algoritmo parte de una topología inicial, en este punto calcula para cada nodo cuáles son sus vecinos y las posibles combinaciones con ellos. Sólo se aceptan aquellas combinaciones que son topológicamente posibles, es decir, que el nuevo nodo disponga de suficientes puertos para poder mantener las mismas conexiones que había antes de su combinación. Además calcula cuál es el número de enlaces ahorrados en cada caso, seleccionando aquellas combinaciones que ahorren el mayor número de enlaces. En el ahorro de cada enlace quedarán dos puertos libres, de manera que cuanto mayor sea el número de enlaces ahorrados, mayor será el número de puertos liberados. El hecho de liberar el máximo número de puertos facilitará que se puedan producir nuevas combinaciones de nodos en las siguientes iteraciones. Una vez calculados los pares de nodos que ahorran el mayor número de enlaces, se elige un par al azar y se intenta combinar. Es en este punto cuando se calcula si los enlaces serán capaces de soportar los nuevos tráficos agregados sin que se supere la cota de probabilidad de pérdida de la información. En el caso de que la probabilidad de pérdida fuese mayor a la aceptada dicho par de nodos será eliminado de la lista de nodos candidatos a ser combinados. Llegados a este punto será necesario elegir un nuevo par al azar entre los nodos que siguen siendo candidatos y ahorran el máximo número de enlaces.

Las simplificaciones de la topología se repiten de forma iterativa hasta que no son posibles más combinaciones entre nodos vecinos. Llegado este punto, se guarda la topología obtenida y se vuelve a repetir el algoritmo para la misma topología inicial. Dado que el algoritmo debe elegir pares de nodos de manera aleatoria, cada vez se obtiene una solución distinta. La bondad de cada solución depende del número de nodos que forman la topología final, eligiendo aquellas soluciones para las cuales dicho número sea mínimo. En caso de empate, también se contempla el número de

enlaces, eligiendo los casos en los cuales éste sea mínimo. El algoritmo finaliza cuando después de un número razonable de iteraciones la solución final no mejora.

Debido a que la topología de partida no es única, depende de cómo se ordenan los puntos de conexión en las extremidades de las subtopologías, es posible generar una nueva topología inicial y reiniciar el algoritmo de combinación de nodos. Este proceso también se repite de forma iterativa hasta que después de un número razonable de intentos no se obtienen mejoras en la solución final.

3 Ejemplo de diseño

Para el desarrollo de este ejemplo se ha utilizado la herramienta Maple V. Con dicha herramienta se ha implementado la función de cálculo de la probabilidad de pérdida, así como y la función del cálculo de la capacidad necesaria en los enlaces para acotar la probabilidad de pérdida. A continuación a partir de la definición de los servicios entre distintas estaciones se calcula una topología inicial, la cual se va mejorando obteniendo distintas soluciones.

- Para este ejemplo se han definido 4 clases de tráfico, las cuales se muestran en la Tabla 5.1. Los valores de t_{on} , t_{off} y la intensidad de fluido r se han obtenido de la referencia [Onv95].

Tabla 5.1 Clases de fuentes ON-OFF usadas en las distintas mezclas.

Clase	Servicio	λ^{-1} (s)	μ^{-1} (s)	r (Mbps)
1	Voz	260	100	0.064
2	Vídeo telefonía	5000	100	10
3	Fax de color	300	3	2
4	transferencia de ficheros	333	1	2

Se supone una red con seis estaciones y los siguientes servicios:

- Un servicio unidireccional de transferencia de ficheros entre la estación 1 y el resto de estaciones.
- Un servicio unidireccional de fax de color entre todas las estaciones y la estación 1.

- Un servicio bidireccional de video-telefonía entre las estaciones 2 y 3.
- Un servicio bidireccional de voz entre las estaciones 2, 3, 4 y 5.

Suponiendo una probabilidad de pérdida de la información de 10^{-13} se obtiene que el caso más restrictivo de capacidad se produce en los enlaces de acceso de las estaciones 2 y 3. En ambos casos, la capacidad mínima debe valer 11,37 Mbps. Imponiendo que las capacidades de los enlaces sea de 12 Mbps. Y considerando nodos con cuatro puertos cada uno, se obtiene la topología inicial mostrada en la Figura 5.9, con 6 estaciones, 11 nodos y 22 enlaces.

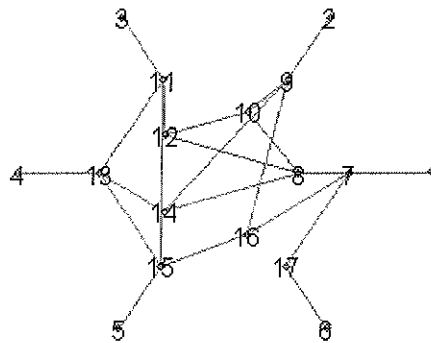


Figura 5.9 Topología inicial

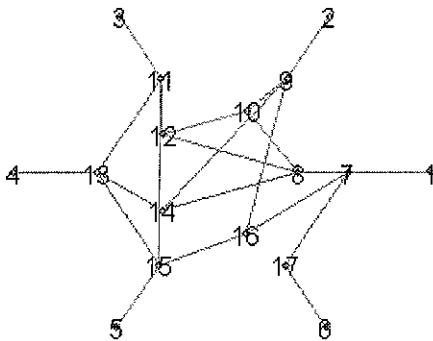
A continuación se muestran unas trazas de una realización con las consiguientes topologías obtenidas al aplicar el algoritmo de mejora sobre la topología inicial. Tal como muestran las trazas de la realización, el desarrollo del algoritmo es el siguiente:

- Se calculan los vecinos de todos los nodos que no son estaciones.
- Se miran aquellos pares de vecinos que sean topologicamente combinables, es decir, para evitar cálculos innecesarios no se comprueba que la probabilidad de pérdida en los nuevos enlaces cumpla las restricciones impuestas a la red.
- Se construye una lista de candidatos con aquellos pares de nodos que ahorran el máximo número de enlaces y se elige uno al azar.
- Se comprueba que el par elegido sea combinable, es decir, que al combinarlos se cumplan las restricciones de calidad de servicio. Si alguno de los enlaces no se puede combinar se crea un doble enlace entre nodos de manera que el número de enlaces ahorrados disminuye.

- Si no es combinable se elimina el par de la lista de candidatos y se elige un nuevo par.
- Tras combinar ambos nodos, uno de ellos desaparece de la topología.
- El algoritmo se repite hasta que no aparecen mas candidatos.

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
 nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]
 resto de nodos [8, 10, 12, 14, 16]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 10, 12, 14, 16, 15, 9, 17]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 16, 17, 10, 9, 12, 11, 14, 13]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 8, 12, 14, 13, 16, 15, 7]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 14, 16, 8, 7, 12, 11]
 PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [12, 8, 10, 13, 14, 15, 16]
 PARA EL NODO 12 LOS VECINOS SON [11, 13, 15, 8, 7, 10, 14, 9]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 8, 9, 11, 12, 15, 16]
 PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 11, 15, 8, 7, 10, 12, 9, 16]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [16, 7, 9, 11, 12, 13, 14]
 PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON [15, 11, 13, 7, 8, 17, 9, 10, 14]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [7, 8, 16]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{16, 17} 1
 {8, 10} 2
 {8, 12} 2
 {7, 17} 1
 {10, 12} 2
 {10, 14} 2

LISTA DE CANDIDATOS [[10, 12], [8, 12], [8, 10], [10, 14]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [8, 12] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 8 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 8-12 y el nodo 10: [[3, 2], [1, 2]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 8-12 y el nodo 10: .4403494786e-351

tráfico entre el nodo 10 y el nodo 8-12: [[2, 3], [2, 1]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 10 y el nodo 8-12: .2284719823e-124

FINALMENTE SE AHORRAN 2 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 8 12

DESAPARECE EL NODO 12

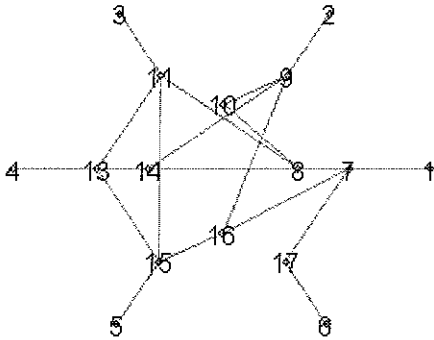
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6] Y TIENE 16 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]

resto de nodos [8, 10, 14, 16]



-
- PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 10, 14, 11, 16, 15, 9, 17]
 - PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 16, 17, 10, 9, 14, 13, 11, 15]
 - PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 8, 14, 13, 16, 15, 7]
 - PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 14, 16, 8, 7, 11]
 - PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [8, 7, 10, 14, 13, 15, 16]
 - PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 8, 9, 11, 15, 16]
 - PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 11, 15, 8, 7, 10, 9, 16]
 - PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [16, 7, 9, 11, 8, 13, 14]
 - PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON [15, 11, 13, 7, 8, 17, 9, 10, 14]
 - PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [7, 8, 16]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {9, 10} 1
- {16, 17} 1
- {7, 17} 1
- {10, 14} 2
- {10, 16} 1
- {8, 10} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[10, 14]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [10, 14] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 10 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 10-14 y el nodo 9: [[3, 2], [4, 2], [1, 2]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 10-14 y el nodo 9: .1851050900e-179

tráfico entre el nodo 9 y el nodo 10-14: [[2, 4], [2, 3], [2, 1]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 9 y el nodo 10-14: .8131059693e-66

tráfico entre el nodo 10-14 y el nodo 8: [[4, 1], [2, 3], [2, 1]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 10-14 y el nodo 8: .3135274236e-11

tráfico entre el nodo 8 y el nodo 10-14: [[3, 2], [1, 2], [1, 4]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 8 y el nodo 10-14: .7147956071e-26

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 10 14

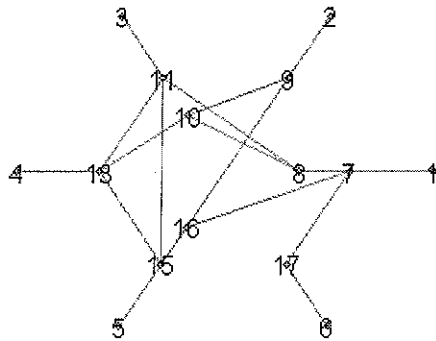
DESAPARECE EL NODO 14

LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6] Y TIENE 15 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]
 resto de nodos [8, 10, 16]



-
- PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 10, 11, 16, 15, 9, 17]
 - PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 16, 17, 10, 9, 13, 11, 15]
 - PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 8, 13, 16, 15, 7]
 - PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 16, 8, 7, 11, 13, 15]
 - PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [8, 7, 10, 13, 15, 16]
 - PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [10, 9, 8, 11, 15, 16]
 - PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [16, 7, 9, 11, 8, 13, 10]
 - PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON [15, 11, 13, 7, 8, 17, 9, 10]
 - PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [7, 8, 16]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {9, 10} 1
- {16, 17} 1
- {7, 17} 1
- {8, 17} 1
- {9, 16} 1
- {8, 10} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[9, 10], [16, 17], [9, 16], [8, 10], [7, 17], [8, 17]]

ENLACES AHORRADOS 1

ESCOGEMOS LA PAREJA [8, 10] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 8 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 8 10

DESAPARECE EL NODO 10

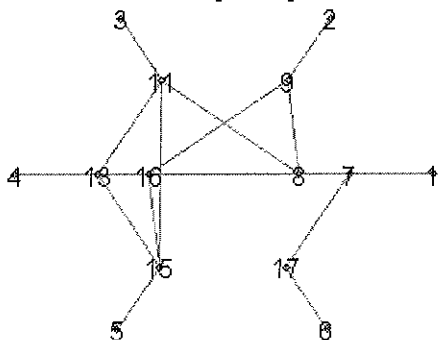
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6] Y TIENE 14 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

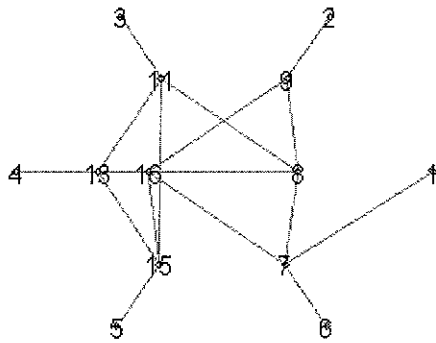
nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]

resto de nodos [8, 16]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 11, 9, 13, 16, 15, 17]

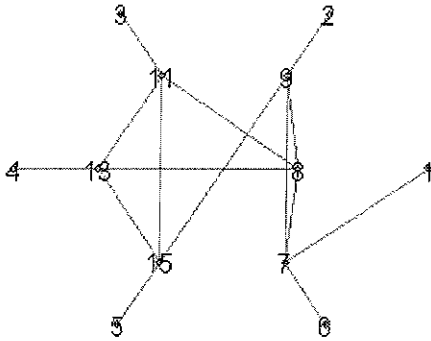
PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 16, 17, 11, 13, 15, 9]
PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [8, 7, 11, 13, 16, 15]
PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [8, 7, 9, 13, 15, 16]
PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [8, 7, 11, 9, 15, 16]
PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [16, 7, 9, 11, 8, 13]
PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON [15, 11, 13, 7, 8, 17, 9]
PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [7, 8, 16]
POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS
{16, 17} 1
{7, 17} 1
{9, 16} 1
{11, 13} 3
LISTA DE CANDIDATOS [[11, 13]]
ENLACES AHORRADOS 3
ESCOGEMOS LA PAREJA [11, 13] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS
VECINOS DE 11 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 8: [[3, 2], [4, 2], [3, 1], [4, 1]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 8: .6622806168e-11
tráfico entre el nodo 8 y el nodo 11-13: [[2, 4], [2, 3], [1, 3], [1, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 8 y el nodo 11-13: .4320277171e-25
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 15: [[3, 5], [4, 5]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 15: 0
tráfico entre el nodo 15 y el nodo 11-13: [[5, 3], [5, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 15 y el nodo 11-13: 0
LOS NODOS 11 I 13 NO SE PUEDEN JUNTAR
LA PAREJA DE NODOS {11, 13} SE HA ELIMINADO DEL CONJUNTO DE
NODOS POSIBLES
POSIBLES AGRUPACIONES I ENLACES AHORRADOS
{16, 17} 1
{7, 17} 1
{9, 16} 1
RENOVACIÓN DE LOS CANDIDATOS
POSIBLES AGRUPACIONES I ENLACES AHORRADOS
{16, 17} 1
{7, 17} 1
{9, 16} 1
LISTA DE CANDIDATOS [[16, 17], [7, 17], [9, 16]]
ENLACES AHORRADOS 1
ESCOGEMOS LA PAREJA [7, 17] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS
DE 7 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES
FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES
JUNTAMOS LOS NODOS: 7 17
DESAPARECE EL NODO 17
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6] Y
TIENE 13 NODOS
GRAFO:
estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 7]
resto de nodos [8, 16]



```

-----
PARA EL NODO 7  LOS VECINOS SON  [8, 11, 9, 13, 16, 15]
PARA EL NODO 8  LOS VECINOS SON  [7, 16, 11, 13, 15, 9]
PARA EL NODO 9  LOS VECINOS SON  [8, 7, 11, 13, 16, 15]
PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON  [8, 7, 9, 13, 15, 16]
PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON  [8, 7, 11, 9, 15, 16]
PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON  [16, 7, 9, 11, 8, 13]
PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON  [15, 11, 13, 7, 8, 9]
POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS
{9, 16} 1
{11, 13} 3
LISTA DE CANDIDATOS  [[11, 13]]
ENLACES AHORRADOS  3
ESCOGEMOS LA PAREJA  [11, 13]  Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS
VECINOS DE 11 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 8:  [[3, 2], [4, 2], [3, 1], [4, 1]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 8:  .6622806168e-11
tráfico entre el nodo 8 y el nodo 11-13:  [[2, 4], [2, 3], [1, 3], [1, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 8 y el nodo 11-13:  .4320277171e-25
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 15:  [[3, 5], [4, 5]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 15:  0
tráfico entre el nodo 15 y el nodo 11-13:  [[5, 3], [5, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 15 y el nodo 11-13:  0
LOS NODOS 11 Y 13 NO SE PUEDEN JUNTAR
LA PAREJA DE NODOS  {11, 13}  SE HA ELIMINADO DEL CONJUNTO DE
NODOS POSIBLES
POSIBLES AGRUPACIONES I ENLACES AHORRADOS
{9, 16} 1
RENOVACIÓN DE LOS CANDIDATOS
POSIBLES AGRUPACIONES I ENLACES AHORRADOS
{9, 16} 1
LISTA DE CANDIDATOS  [[9, 16]]
ENLACES AHORRADOS  1
ESCOGEMOS LA PAREJA  [9, 16]  Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS
DE 9 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES
FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES
JUNTAMOS LOS NODOS:  9 16
DESAPARECE EL NODO 16
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE  [7, 8, 9, 11, 13, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6]  Y
TIENE 12 NODOS
GRAFO:
estaciones:  [1, 2, 3, 4, 5, 6]
nodos de acceso:  [7, 9, 11, 13, 15, 7]
resto de nodos  [8]

```



```

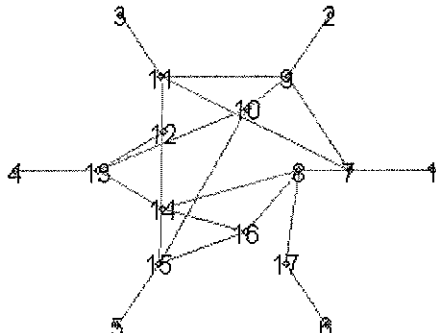
-----
PARA EL NODO 7  LOS VECINOS SON [8, 11, 9, 13, 15]
PARA EL NODO 8  LOS VECINOS SON [7, 9, 11, 13, 15]
PARA EL NODO 9  LOS VECINOS SON [8, 7, 11, 13, 15]
PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [8, 7, 9, 13, 15]
PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [8, 7, 11, 9, 15]
PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [9, 8, 7, 11, 13]
POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS
{11, 13} 3
LISTA DE CANDIDATOS  [[11, 13]]
ENLACES AHORRADOS  3
ESCOGEMOS LA PAREJA  [11, 13]  Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS
VECINOS DE 11 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 8:  [[3, 2], [4, 2], [3, 1], [4, 1]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 8:  .6622806168e-11
tráfico entre el nodo 8 y el nodo 11-13:  [[2, 4], [2, 3], [1, 3], [1, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 8 y el nodo 11-13:  .4320277171e-25
tráfico entre el nodo 11-13 y el nodo 15:  [[3, 5], [4, 5]]
probabilidad de pérdida entre los nodos 11-13 y el nodo 15:  0
tráfico entre el nodo 15 y el nodo 11-13:  [[5, 3], [5, 4]]
probabilidad de pérdida entre el nodo 15 y el nodo 11-13:  0
LOS NODOS 11 Y 13 NO SE PUEDEN JUNTAR
LA PAREJA DE NODOS  {11, 13}  SE HA ELIMINADO DEL CONJUNTO DE
NODOS POSIBLES
POSIBLES AGRUPACIONES I ENLACES AHORRADOS
    
```

En este caso se observa como el algoritmo ha llegado a una solución final la cual no parece muy óptima. Durante diversas iteraciones se ha intentado unir los nodos 11 y 13, pero a pesar de que dicha unión era topológicamente posible, dicha unión no se ha llevado a cabo ya que no se cumplían las condiciones de calidad de servicio impuestas a la red.

En la siguiente realización se parte de una topología inicial distinta. Ello es debido a que durante la generación de las subtopologías iniciales, la ordenación de los puntos de conexión ha sido distinta que en el caso anterior. En este caso al aplicar el algoritmo de combinación de nodos se obtiene una topología simplificada formada solamente por dos nodos y siete enlaces.

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
 nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]
 resto de nodos [8, 10, 12, 14, 16]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 14, 16, 17, 9, 10, 11, 12]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 11, 14, 13, 16, 15, 17]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 15, 7, 8, 11, 12]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 11, 13, 14, 12, 15, 16]
 PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [12, 13, 15, 7, 8, 9, 10]
 PARA EL NODO 12 LOS VECINOS SON [11, 7, 9, 13, 14, 10, 15, 16]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 16, 8, 10, 9, 15, 12, 11]
 PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 10, 12, 16, 15, 8, 7, 17]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [16, 14, 8, 10, 9, 13, 12, 11]
 PARA EL NODO 16 LOS VECINOS SON [15, 10, 12, 14, 13, 8, 7, 17]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 16]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {14, 16} 2
- {14, 17} 1
- {16, 17} 1
- {8, 14} 2
- {8, 17} 1
- {8, 16} 2
- {10, 12} 2

LISTA DE CANDIDATOS [[10, 12], [8, 16], [8, 14], [14, 16]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [8, 16] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 8 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 8-16 y el nodo 14: [[1, 4], [5, 4]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 8-16 y el nodo 14: 0

tráfico entre el nodo 14 y el nodo 8-16: [[4, 5], [4, 1]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 14 y el nodo 8-16: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 2 ENLACES

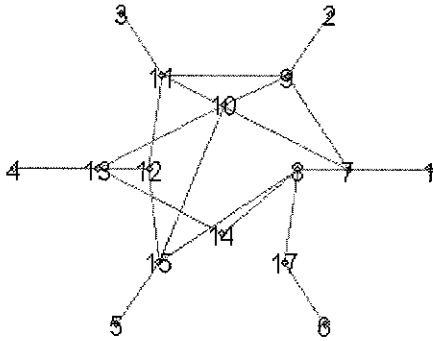
JUNTAMOS LOS NODOS: 8 16

DESAPARECE EL NODO 16

LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 16 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
 nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]
 resto de nodos [8, 10, 12, 14]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 14, 17, 15, 9, 10, 11, 12]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 11, 14, 13, 17, 15, 10, 12]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 15, 7, 8, 11, 12]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 11, 13, 14, 12, 15, 8]
 PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [12, 13, 15, 7, 8, 9, 10]
 PARA EL NODO 12 LOS VECINOS SON [11, 7, 9, 13, 14, 10, 15, 8]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 8, 10, 9, 15, 12, 11]
 PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 10, 12, 8, 7, 17, 15]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 17, 10, 9, 13, 12, 11]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 15]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {14, 17} 1
- {8, 17} 1
- {10, 12} 2
- {10, 14} 1
- {8, 14} 1
- {13, 14} 1
- {12, 14} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[10, 12]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [10, 12] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 10 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 10-12 y el nodo 13: [[3, 4], [2, 4]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 10-12 y el nodo 13: 0

tráfico entre el nodo 13 y el nodo 10-12: [[4, 3], [4, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 13 y el nodo 10-12: 0

tráfico entre el nodo 10-12 y el nodo 15: [[3, 5], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 10-12 y el nodo 15: 0

tráfico entre el nodo 15 y el nodo 10-12: [[5, 3], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 15 y el nodo 10-12: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 2 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 10 12

DESAPARECE EL NODO 12

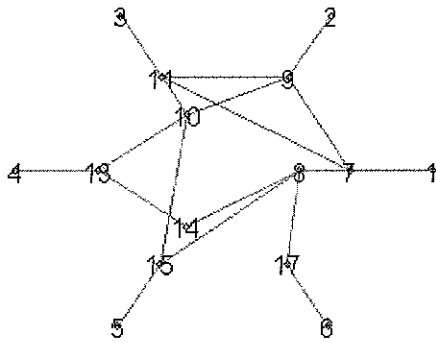
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 15 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 11, 13, 15, 17]

resto de nodos [8, 10, 14]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 14, 17, 15, 9, 10, 11]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 11, 14, 13, 17, 15, 10]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 15, 11, 7, 8]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 11, 13, 14, 15, 8]
 PARA EL NODO 11 LOS VECINOS SON [10, 9, 13, 15, 7, 8]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 8, 10, 9, 15, 11]
 PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 10, 8, 7, 17, 15]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 17, 10, 9, 13, 11]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 15]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {15, 17} 1
- {14, 15} 1
- {14, 17} 1
- {8, 17} 1
- {8, 14} 1
- {13, 14} 1
- {9, 11} 3

LISTA DE CANDIDATOS [[9, 11]]

ENLACES AHORRADOS 3

ESCOGEMOS LA PAREJA [9, 11] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 9 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 9-11 y el nodo 10: [[3, 4], [3, 5], [2, 4], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 9-11 y el nodo 10: 0

tráfico entre el nodo 10 y el nodo 9-11: [[4, 3], [5, 3], [4, 2], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 10 y el nodo 9-11: 0

tráfico entre el nodo 9-11 y el nodo 7: [[2, 1], [3, 1]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 9-11 y el nodo 7: 0

tráfico entre el nodo 7 y el nodo 9-11: [[1, 3], [1, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 7 y el nodo 9-11: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 3 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 9 11

DESAPARECE EL NODO 11

LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 1, 2, 3]

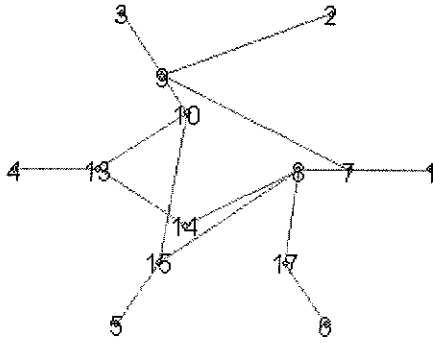
Y TIENE 14 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 13, 15, 17]

resto de nodos [8, 10, 14]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 14, 17, 15, 9, 10]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 14, 13, 17, 15, 10]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 15, 7, 8]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 13, 14, 15, 8]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [14, 8, 10, 9, 15]
 PARA EL NODO 14 LOS VECINOS SON [13, 10, 8, 7, 17, 15]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 17, 10, 9, 13]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 14, 15]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

- {15, 17} 1
- {14, 15} 1
- {14, 17} 1
- {8, 17} 1
- {7, 14} 1
- {8, 14} 1
- {13, 14} 1
- {10, 14} 1
- {10, 13} 1
- {10, 15} 1
- {7, 17} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[15, 17], [14, 15], [14, 17], [13, 14], [8, 14], [8, 17], [7, 14], [10, 13], [10, 15], [10, 14], [7, 17]]

ENLACES AHORRADOS 1

ESCOGEMOS LA PAREJA [8, 14] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 8 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 8 14

DESAPARECE EL NODO 14

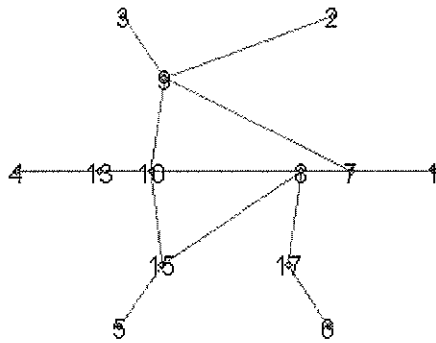
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 13 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 13, 15, 17]

resto de nodos [8, 10]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 15, 17, 13, 9, 10]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 15, 10, 17, 13]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 15, 7, 8]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 13, 8, 15]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [8, 7, 15, 17, 10, 9]
 PARA EL NODO 15 LOS VECINOS SON [8, 7, 17, 13, 10, 9]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 15, 13]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{15, 17} 1
 {8, 17} 1
 {13, 17} 1
 {13, 15} 2
 {10, 13} 1
 {10, 15} 1
 {7, 17} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[13, 15]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [13, 15] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 13 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 13-15 y el nodo 8: [[4, 1], [5, 1]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 13-15 y el nodo 8: 0

tráfico entre el nodo 8 y el nodo 13-15: [[1, 4], [1, 5]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 8 y el nodo 13-15: 0

tráfico entre el nodo 13-15 y el nodo 10: [[4, 3], [5, 3], [4, 2], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 13-15 y el nodo 10: 0

tráfico entre el nodo 10 y el nodo 13-15: [[3, 4], [3, 5], [2, 4], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 10 y el nodo 13-15: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 2 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 13 15

DESAPARECE EL NODO 15

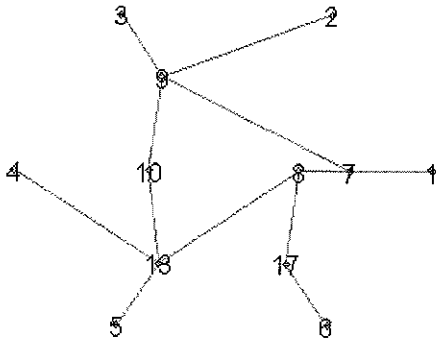
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 12 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 13, 13, 17]

resto de nodos [8, 10]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 13, 17, 9, 10]
 PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 13, 10, 17]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [10, 13, 7, 8]
 PARA EL NODO 10 LOS VECINOS SON [9, 7, 13, 8]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [8, 7, 17, 10, 9]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 13]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{8, 17} 1
 {7, 10} 1
 {7, 8} 1
 {9, 10} 1
 {8, 10} 1
 {10, 13} 1
 {7, 17} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[7, 8], [9, 10], [8, 10], [8, 17], [7, 10], [10, 13], [7, 17]]

ENLACES AHORRADOS 1

ESCOGEMOS LA PAREJA [8, 10] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 8 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 8-10 y el nodo 13: [[1, 4], [1, 5], [3, 4], [3, 5], [2, 4], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 8-10 y el nodo 13: 0

tráfico entre el nodo 13 y el nodo 8-10: [[4, 1], [5, 1], [4, 3], [5, 3], [4, 2], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 13 y el nodo 8-10: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 8 10

DESAPARECE EL NODO 10

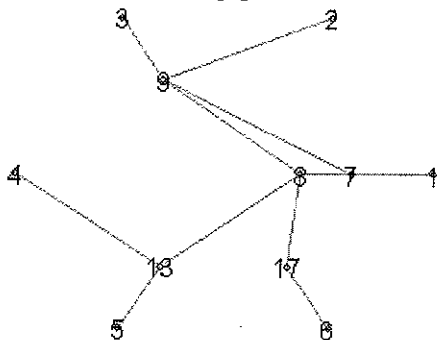
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 11 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 13, 13, 17]

resto de nodos [8]



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [8, 13, 17, 9]

PARA EL NODO 8 LOS VECINOS SON [7, 9, 13, 17]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [8, 7, 13, 17]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [8, 7, 17, 9]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [8, 7, 13, 9]
 POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{7, 9} 2
 {8, 17} 1
 {13, 17} 1
 {7, 17} 1
 {7, 8} 2

LISTA DE CANDIDATOS [[7, 9], [7, 8]]

ENLACES AHORRADOS 2

ESCOGEMOS LA PAREJA [7, 8] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 7 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 7-8 y el nodo 9: [[1, 3], [1, 2], [4, 3], [5, 3], [4, 2], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 7-8 y el nodo 9: 0

tráfico entre el nodo 9 y el nodo 7-8: [[2, 1], [3, 1], [3, 4], [3, 5], [2, 4], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 9 y el nodo 7-8: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 2 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 7 8

DESAPARECE EL NODO 8

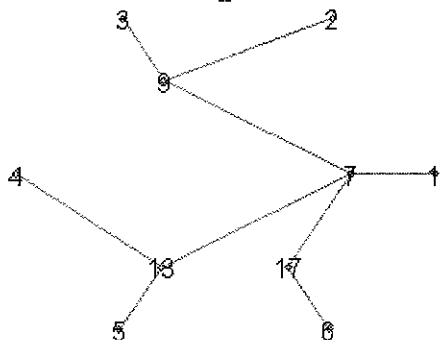
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 9, 13, 17, 1, 2, 3] Y TIENE 10 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 13, 17]

resto de nodos []



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [9, 17, 13]
 PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [7, 17, 13]
 PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [7, 9, 17]
 PARA EL NODO 17 LOS VECINOS SON [7, 9, 13]
 POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{13, 17} 1
 {7, 17} 1
 {9, 17} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[13, 17], [7, 17], [9, 17]]

ENLACES AHORRADOS 1

ESCOGEMOS LA PAREJA [9, 17] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 9 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

tráfico entre el nodo 9-17 y el nodo 7: [[2, 1], [6, 1], [3, 1], [3, 4], [3, 5], [2, 4], [2, 5]]

probabilidad de pérdida entre los nodos 9-17 y el nodo 7: 0

tráfico entre el nodo 7 y el nodo 9-17: [[1, 3], [1, 6], [1, 2], [4, 3], [5, 3], [4, 2], [5, 2]]

probabilidad de pérdida entre el nodo 7 y el nodo 9-17: 0

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 9 17

DESAPARECE EL NODO 17

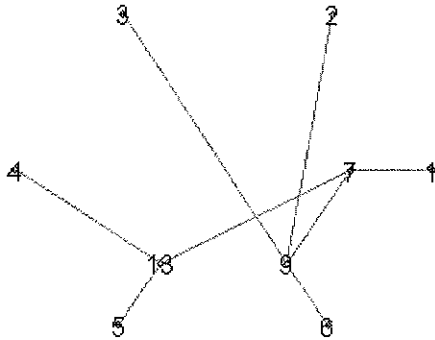
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 9, 13, 1, 2, 3] Y TIENE 9 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 13, 13, 9]

resto de nodos []



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [9, 13]

PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [7, 13]

PARA EL NODO 13 LOS VECINOS SON [7, 9]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

{7, 13} 1

LISTA DE CANDIDATOS [[7, 13]]

ENLACES AHORRADOS 1

ESCOGEMOS LA PAREJA [7, 13] Y VOLVEMOS A CALCULAR LOS VECINOS DE 7 TENIENDO EN CUENTA LAS CAPACIDADES

FINALMENTE SE AHORRAN 1 ENLACES

JUNTAMOS LOS NODOS: 7 13

DESAPARECE EL NODO 13

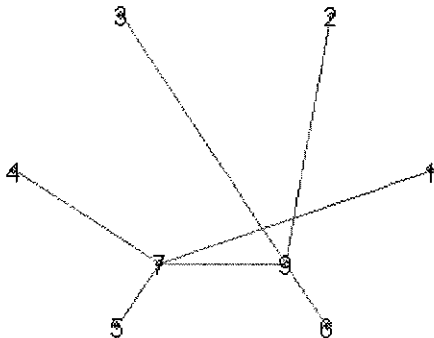
LA NUEVA LISTA DE NODOS VALE [4, 5, 6, 7, 9, 1, 2, 3] Y TIENE 8 NODOS

GRAFO:

estaciones: [1, 2, 3, 4, 5, 6]

nodos de acceso: [7, 9, 9, 7, 7, 9]

resto de nodos []



PARA EL NODO 7 LOS VECINOS SON [9]

PARA EL NODO 9 LOS VECINOS SON [7]

POSIBLES AGRUPACIONES Y ENLACES AHORRADOS

LISTA DE CANDIDATOS []
ENLACES AHORRADOS 0

En la realización se observa como las estaciones 2 y 3 comparten el mismo nodo de acceso, de manera que el tráfico de video-telefonía, el cual necesita más ancho de banda que el resto de servicios, sólo transita por los enlaces de acceso a dicho nodo. Ello evita que dicho servicio congestione otros enlaces de la red, así pues, la topología diseñada cumple con las restricciones de calidad de servicio impuestas a la red.

4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una metodología heurística para el diseño de topologías de redes conmutadas en entornos locales. En dicho diseño se contemplan los requisitos de calidad de servicio impuestos a la red, en este caso que la probabilidad de pérdida de información esté acotada. Los servicios soportados por la red son modelados mediante fuentes ON-OFF y para el tráfico se utiliza un modelo de fluidos. Ello permite independizar el diseño de la red de los protocolos utilizados en la transmisión de la información. Todos los nodos y puertos se suponen iguales. Los parámetros de diseño de la red son: la capacidad de los enlaces, el número de puertos de cada nodo, el tamaño de los *buffers* de los puertos y la máxima probabilidad de pérdida de información admitida en cada enlace. El método heurístico se basa en la mejora de una topología inicial que cumple los requisitos de conexión y de calidad de servicio de la red. Dicha mejora se consigue mediante la combinación de nodos vecinos con el consecuente ahorro de nodos y enlaces. Se eligen aquellas combinaciones que ahorran el máximo número de enlaces. El algoritmo se repite de manera iterativa hasta que tras un número razonable de intentos no se consiguen mejoras en las topologías resultantes obtenidas. Finalmente, también se ha presentado un ejemplo de funcionamiento del algoritmo.

Capítulo 6 Conclusiones y líneas futuras

1 Conclusiones

La tendencia de las redes actuales de telecomunicaciones es la integración de todo tipo de servicios los cuales demandan distintos criterios de calidad. A pesar de ello se siguen utilizando redes clásicas que originalmente fueron pensadas para soportar un único tipo de servicio. Dichas redes se adaptan para poder soportar con mayor o menor éxito la demanda de nuevos servicios exigida por los usuarios. En este entorno parece lógico desarrollar nuevas herramientas que permitan evaluar el comportamiento de estas redes integradoras de servicios.

En este trabajo se han desarrollado nuevas herramientas de análisis para estudiar la de pérdida de información en un *buffer* cuando éste es alimentado por el fluido generado por un conjunto de fuentes ON-OFF. Así pues a partir de modelos fiables de tráfico real basados en fuentes ON-OFF es posible utilizar estas herramientas para el diseño y dimensionado de redes de telecomunicaciones.

Inicialmente se ha presentado el modelo de fluidos y el modelo de multiplexor en el cual se almacenará el tráfico agregado antes de ser transmitido. También se ha mostrado la solución analítica para estudiar la ocupación de dicho *buffer* y las principales desventajas computacionales que ésta presenta. La resolución de dicho

problema conlleva el cálculo de todos los autovalores y autovectores de la matriz cuya dimensión depende del número de fuentes ON-OFF y de la cantidad de clases distintas. Además es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones de la misma magnitud. Si se pretende trabajar con gran variedad de tráfico la solución analítica puede ser un problema computacionalmente muy costoso.

Seguidamente se ha abordado el cálculo de la probabilidad de pérdida de la información. Se ha visto que la probabilidad de *overflow*, no proporcionaba información sobre la cantidad de fluido que perdía el sistema y que sólo indicaba el porcentaje de tiempo durante el cual el sistema pierde fluido. A pesar de ello, en su cálculo es necesario conocer la ocupación del *buffer*, de manera que el problema sigue siendo computacionalmente costoso. Debido a ello algunos autores utilizan expresiones aproximadas, basadas en el efecto dominante del autovalor negativo más cercano a cero respecto el resto de autovalores. Estas aproximaciones están ampliamente aceptadas para el cálculo de ésta probabilidad. Si se quiere tener una medida real de la fracción de fluido perdida es necesario definir la probabilidad de pérdida de la información de manera que se tenga en cuenta la tasa de pérdida de fluido. Calcular esta probabilidad también supone resolver el problema de la ocupación del *buffer* con la complejidad que ello conlleva. A pesar de ello en este trabajo se ha demostrado que dicha solución es simple si se conoce únicamente el valor de uno de los coeficientes obtenidos en la solución final del problema al aplicar las condiciones de contorno del sistema. A dicho coeficiente lo hemos denominado α_1 . El problema para encontrar dicho coeficiente radica en el hecho que las condiciones de contorno están repartidas entre los dos extremos del tamaño del *buffer*. Para casos sencillos en los cuales se puede eliminar uno de éstos dos extremos la solución es simple. De esta manera es fácil obtener el valor de α_1 cuando el tamaño del *buffer* es infinito o cuando es nulo. Para el resto de casos el cálculo del coeficiente α_1 sigue siendo un problema costoso. A pesar de ello, por el hecho de tener que calcular un único coeficiente los resultados obtenidos son de gran precisión. También se ha observado que teniendo en cuenta los márgenes de valores posibles para dicho coeficiente es posible mejorar su precisión calculando directamente el valor α_{1-1} en lugar de α_1 . Ello se consigue modificando un sistema lineal de ecuaciones.

A continuación se ha propuesto una solución aproximada para calcular el valor del coeficiente α_1 . Dicha solución está basada en el efecto dominante del autovalor negativo más cercano a cero. Utilizando la aproximación con la relación entre la

probabilidad de pérdida y el coeficiente α_1 se ha obtenido una solución aproximada para la probabilidad de pérdida. A falta de una expresión analítica que determine cuál es el error cometido al utilizar la formulación aproximada, se ha comparado gráficamente el valor real y el aproximado. Éste es el método de validación utilizado también por algunos autores en la aproximación de la probabilidad de *overflow*. Los resultados de la comparación han sido bastante satisfactorios obteniendo que el máximo error entre los dos valores se produce cuando la probabilidad de pérdida varia más rápidamente con la capacidad de los enlaces. Estos casos se dan para valores de capacidad iguales al fluido generado por aquellas fuentes que generan mayor intensidad de fluido. Finalmente se han indicado cuáles son las ventajas de utilizar la expresión aproximada. En primer lugar permite obtener valores de la probabilidad de pérdida de la información con costes computacionales razonables. Además, es posible invertir la expresión de la probabilidad de pérdida de manera que se pueda evaluar cuál es el tamaño de *buffer* necesario en un multiplexor cuando se requiere acotar las pérdidas. No es posible invertir esta expresión para calcular las capacidades de los enlaces que acotan la probabilidad de pérdida. A pesar de ello, es posible utilizar técnicas de interpolación que permitan realizar dicho cálculo de manera sencilla y poco costosa. Así pues la aproximación presentada es de utilidad para la evaluación y dimensionado nodos en redes de telecomunicaciones.

Finalmente se ha propuesto un método de diseño de redes conmutadas en entornos locales. En el diseño de dichas redes la ubicación y el número de nodos no viene impuesta por condicionamientos geográficos ni de población. Además al ser entornos reducidos el retardo que sufre la información no es un factor tan determinante como la posibilidad de congestión. Así pues se ha tomado como condición de diseño que la probabilidad de pérdida en los nodos esté acotada. Pudiendo de esta manera utilizar las herramientas desarrolladas anteriormente. El método de diseño supone que todos los enlaces de la red tienen son bidireccionales y con la misma capacidad. Además también se suponen todos los conmutadores iguales, es decir, todos ellos tiene el mismo número de puertos y el tamaño de sus *buffers* es el mismo para todos sus puertos. Antes de diseñar la topología puede ser necesario evaluar cuál debe ser el tamaño mínimo de los *buffers* o el valor mínimo de las capacidades. Para ello se consideran los volúmenes de tráfico mayores y que por tanto puedan ocasionar congestión. Utilizando las técnicas arriba descritas será posible conocer los valores mínimos de diseño. El diseño de la topología se realiza en

dos fases, inicialmente se construye una topología inicial que cumpla con las restricciones de calidad de servicio impuestas a la red. Una vez obtenida dicha topología se intenta simplificar disminuyendo el número de nodos y enlaces que la forman. Para ello se intentan combinar aquellos nodos que son vecinos formando un único nodo. Las combinaciones se realizan de manera que se ahorre el máximo número de enlaces. Cuando ya no es posible combinar ningún otro nodo el método vuelve a realizar una nueva iteración intentando encontrar una solución mejor. Una solución es mejor que otra cuando está formada por un número inferior de nodos e enlaces. El algoritmo finaliza cuando tras un número razonable de intentos la solución no mejora.

A modo de conclusión final podemos decir que las principales contribuciones de este estudio son, el desarrollo de métodos que permiten obtener mayor precisión en el cálculo de la probabilidad de pérdida en un multiplexor cuando se utiliza un modelo de fluidos. La obtención de expresiones aproximadas para dicha probabilidad que hacen que su cálculo sea un problema computacionalmente razonable. La utilización de la expresión aproximada para la evaluación y diseño de nodos y enlaces en redes de comunicaciones. El desarrollo de una metodología heurística para el diseño de topología para redes conmutadas en entornos locales cuando se tienen unas restricciones en el valor máximo de probabilidad de pérdida de información.

2 Líneas futuras

Una posible línea futura a seguir para la evaluación del comportamiento de los nodos de comunicación cuando por ellos fluye tráfico agregado, sería utilizar el mismo modelo e intentar obtener expresiones aproximadas como las aquí propuestas para la evaluación del retardo. Si bien es cierto que el retardo máximo que sufre la información viene dado por el tamaño del *buffer*, la obtención de una expresión para calcular el retardo medio implica el cálculo de la ocupación media del *buffer*. Dicho cálculo es un problema posible de resolver pero con un coste computacional elevado. Así pues, parece interesante plantearse la posibilidad de obtener expresiones aproximadas para evaluar dicho retardo.

Por otro lado, el algoritmo de diseño de topología propuesto basa la mejora de la topología en la combinación de pares de nodos. Posiblemente, existan grupos formados por más de dos nodos que sean fáciles de combinar y que proporcionen un mayor ahorro de enlaces en la topología. No existe ninguna certeza de que agrupando

de dos en dos cada uno de los nodos del grupo se pudiera obtener un único nodo, siendo quizás posible obtenerlo si se intentan agrupar todos los nodos juntos.

Además sería interesante estudiar los tipos de topología obtenidos cuando se plantean grandes asimetrías entre los tráficos entre estaciones. Por ejemplo en los entornos cliente-servidor, todo el tráfico se concentra en puntos concretos de la red (donde están los servidores) y además el tráfico que fluye en el sentido servidor cliente es mucho mayor que el que fluye en sentido contrario. Habría que comprobar también en estos casos la utilización de asimetrías en las condiciones de diseño, es decir, suponer enlaces de mayor capacidad en puntos concretos de la red, así como nodos con mayor número de puertos cerca de los servidores, obteniendo posiblemente en estos casos una topología jerárquica.

Apéndice A

1 Cálculo de los autovalores y los autovectores para el caso homogéneo.

Dada una fuente ON-OFF, podemos definir sin pérdida de generalidad, la unidad de tiempo como el tiempo de permanencia en el estado de ON (A.1):

$$u_t = t_{ON} \quad (A.1)$$

Análogamente, se puede definir la unidad de fluido (u_f) de manera que la tasa de generación de fluido de una fuente (r) sea igual a una unidad de fluido por unidad de tiempo (A.2).

$$r = 1 \cdot u_f / u_t \Rightarrow u_f = r \cdot t_{ON} \quad (A.2)$$

Con estas unidades se obtiene que $\mu=1$ y $r=1$.

Dadas N fuentes todas iguales, definen un proceso de Markov como el de la Figura A.1.

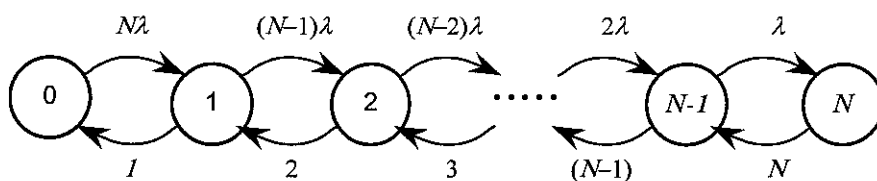


Figura A.1 Proceso de nacimiento y muerte para el caso homogéneo.

Siendo i el número de fuentes activas, el cual coincide con el fluido total generado por el sistema.

En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales que permite calcular las funciones $F_i(x)$ se puede expresar según la ecuación (A.3).

$$(i-c) \cdot \frac{dF_i(x)}{dx} = [N - (i-1)] \cdot \lambda \cdot F_{i-1}(x) - [(N-i) \cdot \lambda + i] \cdot F_i(x) + (i+1) \cdot F_{i+1}(x) \quad (\text{A.3})$$

Cuya solución es de la forma (A.4)

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{N+1} a_j \cdot e^{z_j x} \cdot \phi_{ji} \quad (\text{A.4})$$

Siendo z_j un autovalor de la matriz $\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{M}$ y ϕ_{ji} la componente i del autovector asociado al autovalor z_j .

1.1 Cálculo de autovalores

Sea z un autovalor de $\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{M}$ cuyo autovector es ϕ , para los cuales se cumple (A.5).

$$\begin{aligned} z\Phi &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \cdot \Phi \\ z \cdot \mathbf{D} \cdot \Phi &= \mathbf{M} \cdot \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Cada una de las ecuaciones del sistema (A.5) se puede expresar en la forma (A.6).

$$z \cdot (i-c) \cdot \phi_i = \lambda \cdot (N+1-i) \cdot \phi_{i-1} - [(N-i) \cdot \lambda + i] \cdot \phi_i + (i+1) \cdot \phi_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (\text{A.6})$$

Donde por convenio se define $\phi_i = 0$ si $i > N$ o $i < 0$.

Se define la función generatriz del autovector Φ como (A.7).

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^N \phi_i \cdot x^i \quad (\text{A.7})$$

Dicha función cumple la propiedad (A.8).

$$x \cdot \Phi'(x) = \sum_{i=0}^N i \cdot \phi_i \cdot x^i \quad (\text{A.8})$$

Multiplicando la i -ésima ecuación de (A.6) por x^i y sumando todas las ecuaciones desde $i=0$ hasta $i=N$, se obtiene (A.9).

$$z \cdot \left[\sum_{i=0}^N i \cdot \phi_i \cdot x^i - c \cdot \sum_{i=0}^N \phi_i \cdot x^i \right] = \lambda \cdot x \cdot \left[N \cdot \sum_{i=0}^N \phi_i \cdot x^i - \sum_{i=0}^N i \cdot \phi_i \cdot x^i \right] - N \cdot \lambda \cdot \sum_{i=0}^N \phi_i \cdot x^i + (\lambda - 1) \cdot \sum_{i=0}^N i \cdot \phi_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^N i \cdot \phi_i \cdot x^i \quad (\text{A.9})$$

Utilizando las expresiones (A.7) y (A.8), se obtiene la ecuación (A.10).

$$z \cdot [x \cdot \Phi'(x) - c \cdot \Phi(x)] = \lambda \cdot x \cdot [N \cdot \Phi(x) - x \cdot \Phi'(x)] - N \cdot \lambda \cdot \Phi(x) + (\lambda - 1) \cdot x \cdot \Phi'(x) + \Phi'(x) \quad (\text{A.10})$$

Que se puede expresar como (A.11),

$$\Phi'(x) \cdot [z \cdot x + \lambda \cdot x^2 - (\lambda - 1) \cdot x - 1] = \Phi(x) \cdot [z \cdot c + \lambda \cdot N \cdot x - N \cdot \lambda] \quad (\text{A.11})$$

Obteniendo finalmente la ecuación (A.12).

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{z \cdot c + \lambda \cdot N \cdot x - N \cdot \lambda}{\lambda \cdot x^2 + (z + 1 - \lambda) \cdot x - 1} \quad (\text{A.12})$$

Las raíces del denominador de (A.12), se pueden expresar como:

$$r_1 = \frac{-(z + 1 - \lambda) + \sqrt{Q(z)}}{2 \cdot \lambda} \quad (\text{A.13})$$

$$r_2 = \frac{-(z + 1 - \lambda) - \sqrt{Q(z)}}{2 \cdot \lambda}$$

Siendo $Q(z)$ el valor expresado en (A.14).

$$Q(z) = (z + 1 - \lambda)^2 + 4 \cdot \lambda \quad (\text{A.14})$$

Como $\lambda > 0$ tenemos que $Q(z)$ siempre es distinto de cero, de manera que las raíces r_1 y r_2 son diferentes. Además, se cumple que una raíz es positiva y la otra raíz es negativa.

La ecuación (A.12) se puede expresar como (A.15).

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{c_1}{x - r_1} + \frac{c_2}{x - r_2} \quad (\text{A.15})$$

Siendo los residuos c_1 y c_2 los expresados en la ecuación (A.16).

$$c_1 = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \cdot (x - r_1) \Big|_{x=r_1} = \frac{z \cdot c - N \cdot \lambda + N \cdot \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \quad (\text{A.16})$$

$$c_2 = \frac{z \cdot c - N \cdot \lambda + N \cdot \lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_2 - r_1)}$$

Además, se cumple la propiedad (A.17).

$$c_1 + c_2 = N \quad (\text{A.17})$$

Procediendo a la resolución de la ecuación diferencial (A.15) se obtiene la ecuación (A.18),

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{c_1}{x - r_1} + \frac{N - c_1}{x - r_2} \quad (\text{A.18})$$

de la cual se obtiene la ecuación (A.19),

$$\ln \Phi(x) = c_1 \cdot \ln(x - r_1) + (N - c_1) \cdot \ln(x - r_2) + C \quad (\text{A.19})$$

que se puede expresar como (A.20),

$$\ln \phi(x) = \ln \left[k \cdot (x - r_1)^{c_1} \cdot (x - r_2)^{N - c_1} \right] \quad (\text{A.20})$$

y finalmente se obtiene que la función generatriz (A.7) es igual a la ecuación (A.21).

$$\Phi(x) = k \cdot (x - r_1)^{c_1} \cdot (x - r_2)^{N - c_1} \quad (\text{A.21})$$

Dado un autovector de una matriz, cualquier otro vector proporcional a éste también es un autovector asociado al mismo autovalor. Aprovechando esta propiedad, podemos considerar sin pérdida de generalidad, que la componente N del autovector Φ es igual a la unidad. Imponiendo esta condición, se obtiene que la constante k es igual a la unidad, tal como se demuestra en (A.22).

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=0}^N \phi_i x^i \\ \phi_N &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi(x) = x^N + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i x^i \Rightarrow k = 1 \quad (\text{A.22})$$

Utilizando las expresiones (A.7) , (A.21) y (A.22), obtenemos que la función generatriz se puede expresar como (A.23).

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^N \phi_i \cdot x^i = (x - r_1)^{c_1} \cdot (x - r_2)^{N-c_1} \quad (\text{A.23})$$

Como r_1 y r_2 son diferentes, para que la expresión (A.23) sea polinómica tiene que cumplirse que la constante c_1 sea un número entero comprendido entre 0 y N , tal como se indica en (A.24).

$$k = \frac{z \cdot c - N \cdot \lambda + N \cdot \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)}, \quad k \in \{0, \dots, N\} \quad (\text{A.24})$$

El hecho de que k deba ser un número entero, significa que los valores de z no pueden ser cualesquiera, de manera que (A.24) es la condición que permite calcular los autovalores. Para ello se utiliza (A.13) y (A.14) sobre (A.24), obteniendo un conjunto de $N+1$ ecuaciones de segundo grado como la expresada en (A.25), y cuya incógnita es z .

$$A(k) \cdot z^2 + B(k) \cdot z + C(k) = 0, \quad k \in \{0, \dots, N\} \quad (\text{A.25})$$

Siendo los coeficientes de cada ecuación los expresados en (A.26).

$$\begin{aligned} A(k) &= \left[\left(\frac{N}{2} - k \right)^2 - \left(\frac{N}{2} - c \right)^2 \right] \\ B(k) &= \left[2 \cdot (1 - \lambda) \cdot \left(\frac{N}{2} - k \right)^2 - N \cdot (1 + \lambda) \cdot \left(\frac{N}{2} - c \right)^2 \right] \\ C(k) &= (1 + \lambda)^2 \cdot \left[\left(\frac{N}{2} - k \right)^2 - \left(\frac{N}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Para valores de k y k' cuya suma sea igual a N , las ecuaciones cuadráticas expresadas en (A.25) coinciden. De esta manera, es suficiente considerar los valores de k menores que $N/2$. Si N es par, también hay que considerar el caso $k=N/2$ como caso especial.

Para valores de k menores que $N/2$, el discriminante de las ecuaciones cuadráticas (A.25) es positivo, de manera que cada una de ellas tiene dos raíces reales y distintas. Si N es par, para el caso $k=N/2$ el discriminante es nulo, obteniéndose en este caso una raíz doble. Además, para dos valores k y k' menores que $N/2$, se cumple la relación (A.27).

$$k < k' \Rightarrow A(k) \cdot z^2 + B(k) \cdot z + C(k) > A(k') \cdot z^2 + B(k') \cdot z + C(k') \quad (\text{A.27})$$

Así pues, las parábolas descritas por las ecuaciones cuadráticas nunca se cortan. De lo dicho anteriormente, se deduce que las raíces de las ecuaciones cuadráticas para k menor que $N/2$, son todas reales y distintas. Por lo tanto coinciden con los autovalores buscados. Si N es par, además hay que tener en cuenta la solución doble de la ecuación correspondiente al caso $k=N/2$.

También se puede comprobar que si el sistema de ecuaciones es estable, el número de raíces positivas coincide con el número de estados de infracarga. Además, siempre existe la raíz cero y el resto de raíces son negativas.

La raíz cero se obtiene para el caso $k=0$. La otra raíz de esta misma ecuación cuadrática se corresponde con el autovalor negativo más cercano a cero (autovalor dominante) y cuyo valor se expresa en (A.28).

$$z_d = -\frac{\left(1 + \lambda - \frac{N \cdot \lambda}{c}\right)}{1 - \frac{c}{N}} \quad (\text{A.28})$$

La ecuación (A.28) se cumple para el caso de que las unidades de tiempo estén normalizadas a t_{0N} y las unidades de tasa de fluido a r . Para deshacer estas normalizaciones, es necesario hacer los cambios expresados en (A.29).

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{N} \quad ; \quad c \rightarrow \frac{c}{r} \quad ; \quad z \rightarrow \frac{z \cdot r}{N} \quad (\text{A.29})$$

Así pues, la ecuación (A.28) se puede desnormalizar obteniendo finalmente la ecuación (A.30).

$$z_d = -\frac{\left(\mu + \lambda - \frac{\lambda \cdot r \cdot N}{c}\right)}{r - \frac{c}{N}} \quad (\text{A.30})$$

Si representamos gráficamente los autovalores normalizados en función de la capacidad C , se obtiene un conjunto de gráficas con forma de hipérbola, como se muestra en la Figura A.2.

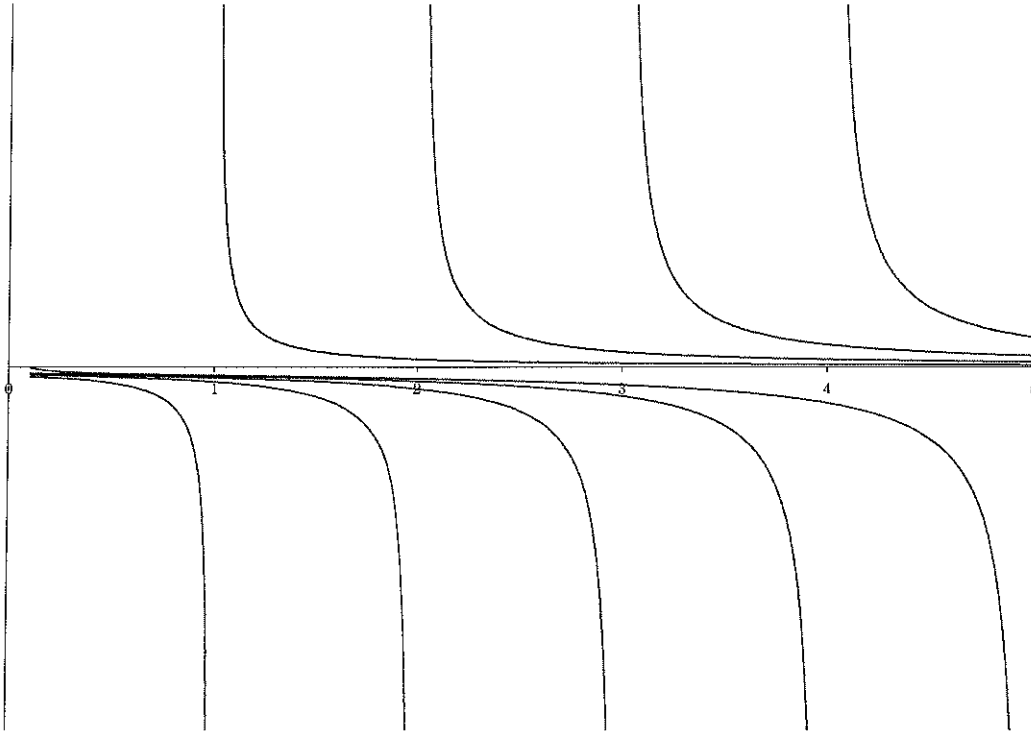


Figura A.2 Autovalores en función de la capacidad

En este ejemplo se ha utilizado un conjunto de $N=5$ fuentes. Cada hipérbola tiene una asíntota vertical en los puntos $C=1, 2, 3, \dots$, los cuales se corresponden con el fluido generado por las fuentes activas en los estados $1, 2, 3, \dots$. Si numeramos los autovalores de manera que z_k representa el autovalor cuya asíntota vertical está centrada en $N-k$, se tiene que los autovalores z_k y z_{N-k} se corresponden a la misma ecuación cuadrática asociada al parámetro k . Utilizando las expresiones (A.16), (A.13) y (A.14) es posible expresar la capacidad normalizada como una función del autovalor z_k tal y como se expresa en la ecuación (A.31).

$$C = \Gamma(z_k, N, \lambda, k) = \frac{1}{2 \cdot z_k} \cdot \left[N \cdot (z_k + 1 + \lambda) + \text{sgn}(z_k) \cdot (N - 2 \cdot k) \cdot \sqrt{Q(z_k)} \right] \quad (\text{A.31})$$

1.2 Cálculo de los autovectores

Para el cálculo de los autovectores se utiliza la expresión (A.23). Dado un autovalor z_k se pueden calcular los valores r_1 y r_2 utilizando la expresión (A.13). Sustituyendo estos valores en (A.16) se obtiene el valor c_1 el cual coincide con el valor de k . Conocidos r_1 , r_2 y k los sustituimos en (A.23) obteniendo un polinomio cuyos coeficientes se corresponden con las componentes del autovector Φ asociado al autovalor z_k .

Las componentes de dicho autovector ϕ_i , se expresan en (A.32).

$$\phi_i = (-1)^{N-i} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot \binom{N-k}{i-j} \cdot r_1^{k-j} \cdot r_2^{N-k-i+j}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (\text{A.32})$$

Referencias

- [Aal98] S. Aalto, "Output of a Multiplexer Loaded by Heterogeneous ON-OFF Sources", *Commun Statist. _Stochastic Models*, vol 14, pp 993-1005, (1998).
- [Ani82] D. Anick, D. Mitra and M.M. Sondhi, "Stochastic Theory of a Data-Handling System with Multiple Sources", *Bell Sys. Tech. J.*, pp. 1871-1894, (1982).
- [Apo80] T.M. Apostol. "*CALCULUS Volumen 2*", Segunda Edición. Editorial Reverté (1980).
- [Bla95] S. Blaabjerg, H. Andersson, H. Andersson, "Approximating the Heterogeneous Fluid Queue with a Bird-Death Fluid Queue", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 5, pp. 1884-1887, (May 1995).
- [Cah98] R.S., Cahn, "Wide Area Network Design, Concepts and Tools for Optimization", Morgan Kaufmann, (1998).
- [Cof91] E. G. Coffman, Jr., B. Igel'nik and Ya. Kogan, "Controlled stochastic model of a communication system with multiple sources", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol 37, pp 1379-1387, (1991)
- [Çin75] E. Çinlar, "Introduction to Stochastic Processes", Prentice Hall (1975).
- [Elb96] R. Elbaum and M. Sidi, "Topological Design of Local-Area Networks Using Genetic Algorithms", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol 4, no 5, pp 766-778, (1996).

- [Ige95] B. Igel'nik, Y. Kogan, V. Kriman and D. Mitra, "A new computational approach for stochastic fluid models of multiplexers with heterogeneous sources", *Queueing Systems*, vol. 20, pp. 85-116, (1995).
- [Ker93] A. Klersenbaum, "Telecommunications Network Design Algorithms", McGraw-Hill, (1993).
- [Kle76] L. Kleinrock, "Queueing Systems Volume II: Computer Applications", John Wiley & Sons, (1976).
- [Kos84] L. Kosten, "Stochastic Theory of a Data-Handling Systems with Groups of Multiple Sources". *Proc. Performance of Computer Communications Systems*, IFIP, pp. 321-331, (1984).
- [Lim94] C-K. Lim, , "A Methodology for Designing Local Area Networks". MSc Dissertation, University of Alberta, (1994).
- [Lim95] C-K. Lim and J. Harms, "A Methodology for Designing Local Area Networks", *Proceedings of the ICC'95*, pp. 1925-1929, (1995).
- [Mat96] J. Mata, "Contribuci3n a la Gesti3n Din3mica de Recursos Aplicada al Control de Fuentes de Video de Velocidad Variable en la Red Digital de Servicios Integrados de Banda Ancha", *Tesis Doctoral, Universitat Polit3cnica de Catalunya*, (1996).
- [Mit88] D. Mitra, "Stochastic Theory of a Fluid Model of Producers and Consumers Coupled by a Buffer", *Advances in Applied Probability*, vol. 20, pp. 646-676, (1988).
- [Nik92] I. Nikolaidis and I. Akyildiz, "Source Characterization and Statistical Multiplexing in ATM Networks", *College of Computing, Georgia Institute of Technology*, (1992).
- [Onv95] R. Onvural, "Asynchronous Transfer Mode Networks: Performance Issues", Second Edition, Artech House (1995).
- [Pal00a] E. Pallar3s and J. Garcia-Haro, "Mathematical Approach to Designing Switched LAN's. An Alternative Solution to Compute the Loss Probability in an Heterogeneous Traffic Environment", *Proceedings of the MELECON'2000*, vol. 1, pp. 11-14, (May 2000).
- [Pal00b] E. Pallares and J. Garcia-Haro, "Fluid-Flow Approximation of the Information Loss Probability for a Switching System with Finite Buffering under Heterogeneous ON/OFF Input Traffic Sources", *Proc. QNETs 2000, Fourth International Workshop on Queueing Networks with Finite Capacity*, pp. 35/1-35/10, (July 2000).
- [Pal00c] E. Pallar3s, L.J. De la Cruz y Joan Garc3a, "Estudio de la Probabilidad de P3rdida en un nodo de Conmutaci3n Mediante modelos de Fluidos", *Actas del XV Simposium Nacional de la Uni3n Cient3fica Internacional de Radio*, pp. 407-408, (2000).

- [Pal00d] E. Pallarès y Joan García, "Fluid -Flow Approach to Evaluate the Information Loss Probability in a Finite-buffering Switching Node under Heterogeneous ON/OFF Input Traffic Sources", *"Special Issue of the International Journal of PERFORMANCE EVALUATION (PE) on Queueing Networks with Blocking"*. Pendiente de aceptación.
- [Pal00e] E. Pallarès and J. Garcia-Haro "An Efficient Heuristic Methodology to Design Switched LANs". *2001 IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*. (August 2001) Aceptado, pendiente de publicación.
- [Pal00f] E. Pallarès y Joan García, "Metodología de Diseño para la Planificación de Redes Conmutadas en Entornos Locales.", *III Jornadas de Ingeniería Telemática, Jitel'01*" (Septiembre 2001). Pendiente de aceptación.
- [Pal00g] E. Pallarès , L.J. De la Cruz y Joan García, "Análisis de una Metodología de Diseño de Redes Conmutadas de Área Local.", *II Jornadas de Ingeniería Telemática, Jitel'99*" (Septiembre 1999).
- [San81] E. Sanvicente, "Análisis y Diseño de Redes de Comunicación de Ordenadores", *NOVATICA*, vol. VII, num. 37, pp. 43-54, (1981).
- [Sch96] M. Schwartz, "Broadband Integrated Networks". Prentice Hall, 1996.
- [Sri94] M. Srinivas, L.M. Patnaik, "Genetic Algorithms: A Survey", *IEEE Computer*, vol 27, no 6, pp 28-43.
- [Ste91] T.E. Stern and A. I. Elwalid, "Analysis of Separable Markov-modulated Models for Information Handling Systems" *Advances in Applied Probability*, vol 23, pp 05-139 (1991).
- [Tuck88] R.C.F. Tucker, "Accurate Method for Analysis of a Packet-Speech Multiplexer with Limited Delay", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, no. 4, pp. 479-483, (April 1988).
- [Wyl60] C. R. Wylie, "Advanced Engineering Mathematics", Second Edition, McGraw-Hill (1960).

