

PRESENTACIÓN

Cuando finalicé los cursos de doctorado, a mediados de 1996, de mutuo acuerdo con el director de mi tesis doctoral, el Dr. Antonio Terceño, elegí como tema de estudio la aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos en el análisis de los seguros de vida, en concreto, en la modelización de los tipos de interés para su valoración. Dicha teoría, de indiscutible utilidad y actualidad en la modelización de problemas económicos, tomó carta de naturaleza con la publicación en 1965 del artículo del profesor L.A. Zadeh “Fuzzy Sets”, en la revista *Information and Control*.

Así pues, hemos considerado que la cuantificación de los tipos de interés futuros difícilmente puede realizarse de forma cierta o aleatoria, justificándose en esta parte introductoria que es un supuesto, más realista, suponer que vienen estimados subjetivamente por expertos, a través de números borrosos. Una cuestión que abordaremos es la estimación de forma subjetiva de los tipos de interés futuros para realizar la valoración financiero-actuarial, cuestión que, evidentemente, es se puede hacer extensible a la valoración financiera en general. En nuestro caso, hemos considerado que los expertos son los actuantes en los mercados de renta fija, los cuales, al determinar los precios de los activos, basándose en la información disponible implícitamente expresan sus expectativas sobre los tipos de interés que regirán en un futuro. Sobre esta base, analizaremos la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos, de forma que la determinación de los tipos de interés que se anticipan en el mercado para el futuro, también pueda ser realizada a través de números borrosos.

La elección del tema o los temas de la tesis, por supuesto, no fue fruto del azar, sino que se enmarca dentro de una de las líneas de investigación del Departamento de Empresa de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Rovira i Virgili, que tiene como núcleo el estudio de problemas de gestión y valoración financiera utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos. Esta línea ha dado lugar a un grupo de investigación estable que ha producido un buen número de trabajos presentados en congresos y artículos en revistas científicas, así como varias tesis doctorales evaluadas con la máxima calificación. De esta forma, se trata de una línea de investigación consolidada en la Universidad Rovira i Virgili, y creemos que contrastada.

Así, aunque el responsable último de una tesis doctoral sea el doctorando, y subsidiariamente, su director, es evidente que en este caso, también es fruto de un trabajo en equipo, ya que es deudor

de una estrecha relación personal y científica con el resto de compañeros que en el departamento al que pertenezco comparten las mismas inquietudes y campo de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

La gestión y valoración de los seguros de vida abarca cuestiones como la fijación de primas por parte del asegurador, el estudio de su posición de solvencia, determinación de las provisiones matemáticas etc. Las variables que esencialmente deben ser tenidas en cuenta en su modelización son:

- a) En primer lugar un fenómeno que podríamos determinar como “natural”: el comportamiento de la mortalidad, morbilidad etc. en la cabeza asegurada. En condiciones normales dicho comportamiento está condicionado únicamente por la edad y el sexo de la persona en cuestión, variables, por otra parte, objetivas. No existe, actualmente, ninguna controversia sobre su naturaleza estocástica. De hecho, los actuarios analizan dicho fenómeno con el marco conceptual y matemático construido en los albores de la ciencia actuarial, siglos XVII-XVIII.
- b) El segundo fenómeno que incide en el análisis de los seguros de vida, es el fenómeno financiero, en concreto, la determinación del interés que el asegurador debe ofrecer al asegurado denominado como interés técnico, el cual debe ser estimado por el actuario. Éste deberá estar relacionado con el interés que la compañía de seguros puede conseguir invirtiendo las primas satisfechas por el asegurado a largo plazo dada la gran duración de los seguros de vida.

Respecto a este segundo fenómeno la literatura actuarial ha venido suponiendo que se trata de un parámetro cierto, que basta con cuantificarlo de forma prudentemente. Así, si suponemos que en un contexto económico dado, un interés prudente puede ser “aproximadamente el 4%”, el interés técnico utilizado sería el 4%. En fechas relativamente recientes, el problema de la incertidumbre fue abordado desde una óptica de riesgo, esto es, suponiendo la naturaleza aleatoria de los tipos de interés que rigen en los mercados financieros.

Sin embargo, si bien no es descabellado suponer una naturaleza aleatoria para el interés a corto plazo, diversos autores como Gerber (1995) en su libro “Life Insurance Mathematics”, rechazan la posibilidad de modelizar estocásticamente el tipo de interés que debe utilizarse en la valoración actuarial, sobre todo, en pólizas de larga duración.

Asimismo, y respecto al tipo de interés técnico a aplicar en los seguros de vida Lemaire apunta en su trabajo "Fuzzy Insurance" publicado en *Astin Bulletin* en 1990, páginas 36-37:

“Estimar el tipo de interés es indudablemente uno de los problemas de modelización más complejos (...). Calcular primas de seguros de vida que duran, por ejemplo, cuarenta años con un tipo de interés fijo parece un ejercicio fútil. Consideramos que la introducción de los tipos de interés borrosos como mínimo nos permitirán obtener una medida parcial a pesar de nuestra ignorancia”

Tomando como base estas reflexiones, nosotros también consideramos que un enfoque más realista en la modelización del tipo de interés es suponer que viene estimado a través de números borrosos, dada la subjetividad inherente a la fijación del tipo de interés y por tanto, que su manipulación con operadores blandos tipo “máximo-mínimo” – la utilización del principio de extensión de Zadeh- es más acorde con la información débil que se dispone sobre dicha variable. En cualquier caso, la utilización de operadores max-min es más adecuada que los operadores duros como los “suma-producto”, asociados a la modelización estocástica, los cuales se utilizarían si datos pasados se proyectaran al futuro, lo cual no creemos que sea adecuado en el contexto económico actual, o bien porque el tipo de interés se hubiera modelizado haciendo uso de probabilidades subjetivas.

Tras realizar la preceptiva exploración bibliográfica, comprobamos que la preocupación sobre el problema que implica la incertidumbre sobre el tipo de interés de valoración en los seguros de vida era relativamente reciente, y que en la mayor parte de trabajos se introducía dicha incertidumbre asignando al tipo de interés una distribución de probabilidad, metodología, que ya hemos reseñado que nos parecía discutible.

Sin embargo, no debemos olvidar que también algunos autores habían analizado la valoración de los contratos de seguros de vida utilizando intereses borrosos, algunos de ellos españoles como M. Jiménez o J.C. Ferrer, o mismamente A. Terceño; y también autores extranjeros de reputación incuestionable en la ciencia actuarial como J. Lemaire o K. Ostasiewski. En todos estos trabajos, el denominador común era la utilización de la denominada “Teoría Estática”, basada en la reducción del fenómeno de la mortalidad a sus valores esperados y la introducción de la incertidumbre en el tipo de interés mediante números borrosos. De esta forma, el problema de valoración actuarial quedaba reducido a un problema de valoración financiera con interés borroso, cuyos primeros desarrollos se deben a A. Kaufmann y J. Gil Aluja, y que posteriormente han ampliado autores como J.J. Buckley, A. Terceño o M. Jiménez.

Sin embargo, observamos que existían dos lagunas en este tratamiento de la valoración en los seguros de vida. La primera de ellas estaba en la reducción de la aleatoriedad de la mortalidad a sus valores esperados, y la segunda estaba relacionada con el procedimiento que se debía seguir en la estimación del interés o intereses borrosos a utilizar.

Respecto a la primera cuestión, el instrumental borroso existente permite trabajar con toda la incertidumbre que proviene del interés (en concreto, con los α -cortes de las estimaciones o la función de pertenencia); pero la mortalidad, y por tanto, los capitales que devengan ante cada suceso contemplado sobre la vida del asegurado quedaban reducidos a su esperanza matemática. Así, con estos instrumentos se pierde gran parte de la información relativa a la mortalidad. Por tanto, era necesario modelizar el proceso de valoración de los seguros de vida utilizando algún instrumento matemático que permitiera trabajar conjuntamente con la aleatoriedad y la borrosidad inherente a dicho fenómeno. Asimismo, el profesor J. Gil Aluja en su trabajo "Towards a new concept of economic research" publicado en la revista *Fuzzy Economic Review* en 1995, afirma en la página 21:

“Una de las características de la realidad actual es que en los problemas encontramos simultáneamente información blanda y dura, es decir, borrosa y aleatoria. Nosotros conocemos perfectamente como asociar dichos datos de diferente naturaleza sin perder información.”

Así pues, tan sólo hacía falta aplicar uno de los instrumentos de análisis de los procesos híbridos que reflejara la doble vertiente aleatoria e incierta que implica la valoración actuarial. Dichos instrumentos se encuentran desarrollados en trabajos dispersos, pero muchos de ellos son rigurosamente expuestos en la obra de los profesores A. Kaufmann y J. Gil Aluja “Las matemáticas del azar y de la incertidumbre” de 1990 y en la de A. Kaufmann, J. Gil Aluja y A. Terceño “Matemática para la economía y la gestión de empresas”, publicada en 1994. En nuestro caso, el instrumento que utilizaremos para llevar a cabo el análisis que pretendemos realizar es el concepto de *variable borroso aleatoria* que podríamos definir grosso modo como una variable aleatoria con realizaciones borrosas. Dicho instrumental se encuentra profusamente glosado en la obra de R. Kruse y K.D. Meyer “Statistics with vague data” publicada en 1987, y la base para su desarrollo fue expuesta por H. Kwakernaak en sus trabajos “Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems” y “Fuzzy random variables-II. Algorithms and examples for the discrete case”, publicados respectivamente en 1978 y 1979 en la revista *Information Sciences*.

Respecto a la segunda laguna detectada, la estimación del tipo de interés de valoración, observamos que era un aspecto que en ambiente borroso estaba poco abordado tanto en los

trabajos de valoración actuarial como en los trabajos de valoración financiera. Así, aunque nosotros compartíamos la opinión de que en nuestro problema es más realista modelizar la incertidumbre a través de los instrumentos que proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos, nuestra preocupación se centraba en como los “expertos”, basándose en su experiencia, expectativas, etc. estimaban los intereses que regirían durante el periodo de valoración. Por esta razón proponemos un método para la estimación de los tipos de interés a través de números borrosos, partiendo del concepto de ETTI.

Generalmente se toma como interés de referencia para realizar la valoración de cualquier activo, financiero o no, el denominado como “libre de riesgo”, es decir, el de la deuda pública, y ello es especialmente claro en los seguros de vida, ya que los aseguradores suelen cubrir sus obligaciones utilizando en un porcentaje muy elevado títulos de deuda pública. Así pues, consideramos que los expertos son los actuantes en el mercado de deuda pública, los cuales, al fijar los precios y rendimientos de los instrumentos (letras, bonos, obligaciones) que en dichos mercados se negocian, expresan implícitamente sus expectativas sobre los tipos de interés futuros. A través de las rentabilidades de los títulos de renta fija, aunque no de forma directa, se puede hallar la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) que rige en el mercado de deuda que estemos analizando, es decir, los tipos de interés con que el mercado descuenta el dinero en función de su vencimiento, también denominados tipos al contado, tipos spot o tipos cupón cero. A partir del conocimiento de la estructura temporal de los tipos de interés, podemos derivar los tipos implícitos o forward, que según la teoría de las expectativas racionales son los que el mercado anticipa para el futuro.

El instrumento matemático más utilizado para estimar la ETTI son los modelos econométricos, en nuestra opinión, dicho instrumento no es del todo adecuado en la estimación de la ETTI. La primera razón es el carácter fuertemente subjetivo de las estimaciones de los agentes económicos sobre el devenir de los tipos de intereses futuros, que es lo que reflejan los precios y las rentabilidades de los instrumentos negociados en los mercados de renta fija. Un segundo motivo se basa en que para cada una de las referencias negociadas en el mercado rara vez se negocia un único precio, sino una horquilla de precios (y por tanto, de rentabilidades), lo cual puede interpretarse como que los actuantes tienen distintas expectativas sobre la evolución futura de los tipos de interés. Este segundo problema había sido solucionado por la econometría reduciendo dicha horquilla a un único precio, con la pérdida de información que dicho proceder implica. Un instrumento alternativo y por otra parte más flexible y acorde con la modelización del problema que pretendíamos resolver era utilizar algún modelo de regresión borrosa en la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés. Ello nos permitirá desarrollar una metodología que permitirá obtener la relación tipos al contado-plazo cuantificada a través de números borrosos, lo

cual es más acorde con la realidad, ya que las rentabilidades de los instrumentos de deuda pública no son únicas, sino que se mueven dentro de una horquilla de valores, siendo por tanto lógico que la ETTI tenga la misma naturaleza. De esta forma, los tipos forward que define la ETTI –los tipos anticipados por los actuantes para el futuro- también serán números borrosos. Si aceptamos que dichos tipos son los tipos que el mercado anticipa para el futuro, la segunda laguna detectada estaría, al menos parcialmente, solucionada.

2. ESTRUCTURA Y METODOLOGÍA DE LA TESIS

Sobre la base de los razonamientos y motivaciones expuestas en la presentación de la tesis, hemos dividido ésta en tres partes, que si bien pueden ser leídas de forma independiente, la motivación de cada una de ellas es la misma: proporcionar unos instrumentos que permitan al asegurador de vida un análisis más realista de su cartera de seguros. Éstas son:

- 1) Primera parte: Instrumentos matemáticos de la teoría de los subconjuntos borrosos
- 2) Segunda parte: Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos y estimación de los tipos de interés futuros.
- 3) Tercera parte: Análisis de la determinación de las primas en los seguros de vida y de la solvencia dinámica cuando los tipos de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos.

Tras desarrollar los tres bloques que conforman el cuerpo de la tesis, terminamos con el preceptivo apartado de conclusiones, en el cual expondremos cuales creemos que son los principales resultados a los que hemos llegado y las cuestiones que consideramos que deben ser objeto de posteriores trabajos de investigación.

Realizamos a continuación una breve exposición del contenido de las diferentes partes de la tesis y la metodología que se ha seguido en el desarrollo de las mismas.

PARTE I: INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

En este apartado nos limitamos a exponer los conceptos y algunos de los instrumentos que derivan de la teoría de los subconjuntos borrosos, y que son utilizadas a lo largo de la tesis. Su común denominador es que nos van a permitir manipular información que total o parcialmente tiene carácter incierto o subjetivo, y que además es cuantitativa. Es decir, se enmarcan dentro de la matemática numérica de la incertidumbre.

En la exposición que realizamos no seremos exhaustivos, ya que no se pretende realizar ninguna aportación relevante sino que se recopilan los instrumentos o tópicos más significativos que son necesarios para el posterior desarrollo de la tesis. Asimismo, también somos conscientes de que algunas de las cuestiones que se presentan no son deducibles directamente, sino que es necesario un desarrollo matemático sobre la base de teoremas, proposiciones, corolarios, etc. para llegar a ellos. Dichos desarrollos pueden ser encontrados en los trabajos citados.

Este primer apartado se ha estructurado en cuatro capítulos que son:

- 1) Elementos básicos de la teoría de los subconjuntos borrosos
- 2) Algunos modelos de regresión borrosa
- 3) Diversas asociaciones entre aleatoriedad e incertidumbre
- 4) Valoración financiera con intereses borrosos

En el primero de los capítulos recogeremos las cuestiones fundamentales, y seguramente, ampliamente conocidas por aquéllos investigadores familiarizados con la teoría de los subconjuntos borrosos. En él exponemos el concepto de subconjunto borroso, de número borroso, analizamos la evaluación de funciones con variables cuantificadas a través de números borrosos, etc. Asimismo hacemos un especial énfasis sobre la forma de operar con números borrosos triangulares y trapezoidales, y de forma más general, sobre los L-R de Dubois y Prade, que los generalizan, ya que son los que por sus especiales características, como su mayor operatividad y su fácil interpretación, presentan gran capacidad para representar cuantías estimadas subjetivamente, por ello son muy utilizados en los modelos que incorporan números borrosos en su elaboración. Por este motivo, son los que utilizaremos para representar las variables que cuantificaremos a través de números borrosos. Por esta misma razón exponemos métodos que permiten aproximar cualquier número borroso a través de uno L-R de Dubois y Prade y de forma más particular, a través de uno triangular o trapezoidal. Finalizamos exponiendo diversas metodologías de desfuzzyficación de números borrosos.

En el segundo capítulo hemos recogido el concepto de regresión borrosa a través de la exposición de los modelos básicos que han sido desarrollados en la literatura. Si bien, la idea subyacente de esta técnica es similar a la que motiva las técnicas de regresión estadística, existe una diferencia fundamental: en el caso de la regresión convencional, los errores que se cometen al suponer una relación estrictamente lineal entre la variable explicada y las explicativas se suponen aleatorios. Ello implica que las estimaciones que se pueden realizar después de ajustar los coeficientes del hiperplano que describe la relación entre variables son también variables aleatorias. En contraposición, al utilizar una regresión borrosa suponemos que las divergencias que se producen

tras ajustar los coeficientes del hiperplano que relaciona la variable explicada y las explicativas son debidas la existencia de una relación borrosa entre ellas. Con este instrumento, el "error" no se incorpora como un sumando aleatorio, sino que queda reflejado en los coeficientes del hiperplano que ajustamos, que vienen estimados por números borrosos. Por tanto, las predicciones que realicemos tras ajustar dichos coeficientes serán números borrosos.

En nuestra opinión, y tal como sostienen Mario Fedrizzi, Michelle Fedrizzi y Walenty Ostasiewicz en su trabajo de 1993 "Towards a fuzzy modelling in economics" publicado en *Fuzzy Sets and Systems*, página 267, aunque las técnicas de regresión borrosa están menos fundamentadas matemáticamente que las econométricas, también son instrumentos más adecuados que las econométricas para modelizar y cuantificar relaciones entre variables de naturaleza económica, dada su flexibilidad y al alto contenido subjetivo de la información que en muchas ocasiones es necesario manejar. Asimismo, en muchas ocasiones las variables que son observadas (por ejemplo, el precio de los activos financieros un día concreto) no son magnitudes ciertas, sino que vienen dados por una horquilla de valores. La solución que a este problema ha dado la econometría es la reducción de dicha horquilla a un único valor cierto representativo, lo cual supone una importante pérdida de información. Utilizando técnicas de regresión borrosa, podemos trabajar con toda la horquilla de valores observada sobre las variables estudiadas, si es que éstas se manifiestan como intervalos de confianza, por lo que no existe pérdida de información. En nuestra opinión, un manual esencial sobre este tema es "Fuzzy regression analysis", publicado en 1992 y cuyos editores son J. Kacprzyk y M. Fedrizzi, donde se recogen los principales modelos de regresión borrosa y algunas interesantes aplicaciones.

En el tercer capítulo analizamos algunos instrumentos diseñados para manipular la información cuantitativa cuando ésta tiene un doble carácter aleatorio y borroso –denominados por algunos autores "híbridos"-. El instrumento híbrido que se aplica en esta tesis es el concepto de variable borrosa aleatoria, desarrollado ampliamente en la citada obra de R. Kruse y K.D. Meyer.

En el último capítulo de la primera parte de la tesis analizamos la valoración financiera cuando las variables que intervienen vienen cuantificadas a través de números borrosos. Aunque somos conscientes que no se trata de un instrumento que derive directamente de la teoría de los subconjuntos borrosos, sino que se trata más bien de una aplicación a la economía financiera de esta teoría, creemos que dada la abundancia y profundidad de trabajos producidos en este campo introduciendo la incertidumbre mediante los instrumentos de la teoría de los subconjuntos borrosos, la "matemática financiera borrosa" se ha convertido en un instrumento más de los que proporciona dicha teoría, en este caso para modelizar fenómenos financieros. Por ello, algunos de sus desarrollos son expuestos en esta primera parte de la tesis dado el carácter instrumental de la

misma. Dedicaremos una especial atención al supuesto en que los datos de partida (especialmente los intereses) vengan dados a través de números borrosos triangulares, lo cual es habitual en los trabajos que analizan la valoración financiera en incertidumbre. Analizaremos asimismo la validez de la aproximación triangular de las magnitudes que obtengamos tras aplicar en el proceso de valoración financiera intereses borrosos triangulares, lo cual será de utilidad en los desarrollos que se realicen en apartados posteriores.

PARTE II: ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS A TRAVÉS DE SUBCONJUNTOS BORROSOS Y ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS

El objetivo de la segunda parte de esta tesis es desarrollar una serie de metodologías que permitan estimar los tipos de interés futuros a través de números borrosos. Partiremos de la información que es directamente observable en los mercados de renta fija pública (y por tanto, libres del riesgo de insolvencia): el precio y la rentabilidad de los instrumentos que en dichos mercados se negocian. La herramienta básica para la estimación de dichos tipos de interés, será la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), siendo los tipos implícitos que define los que asimilaremos a los que el mercado anticipa para el futuro.

En concreto, hemos estructurado esta segunda parte de la tesis en cuatro capítulos:

- 1) Estimación de los intereses futuros mediante números borrosos
- 2) Métodos econométricos de estimación de la ETTI
- 3) Estimación de la ETTI mediante el empleo de una regresión posibilística
- 4) Predicción de los tipos de interés futuros a través de números borrosos

El primer capítulo es introductorio, y su objetivo es motivar y justificar la necesidad de la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés mediante números borrosos. Para ello empezamos diferenciando los diversos intereses que rigen en los mercados de renta fija: la tasa de rendimiento interno de un título, los tipos al contado y los tipos de interés forward.

Posteriormente analizamos las diversas teorías explicativas de la ETTI, justificándose de esta forma cual de ellas estamos asumiendo implícitamente al identificar los tipos forward como los tipos que en el mercado se anticipan en un futuro, que es la Teoría de las Expectativas Racionales.

Se estudian las diversas técnicas existentes para estimar la ETTI, ya que las que propondremos nosotros, si bien se basan en utilizar instrumentos de regresión borrosa, se inspirarán en las

econométricas. Ello es debido a que la utilización de instrumentos de regresión borrosa ofrece ciertas ventajas sobre los estadísticos convencionales, tal como fue comentado, a la vez que nos llevará a la solución que pretendemos resolver finalmente: traducir la débil información que proporcionan los mercados sobre las expectativas de los tipos de interés futuros en estimaciones cuantitativas de los mismos, a través de números borrosos.

En el segundo apartado analizamos los principales métodos econométricos orientados a estimar la ETTI, y en los cuales basaremos nuestras propuestas. Diferenciamos dentro de estos métodos dos grandes grupos:

- a) Aquéllos que se basan en estimar una relación lineal tasa de rendimiento de las referencias- vencimiento, en el mercado de deuda pública y que se denomina curva de rentabilidades. Dicha relación no es estrictamente la ETTI ya que los bonos y las obligaciones incorporan el cobro de flujos intermedios – los intereses o cupones-. Para acabar estimando la ETTI será necesario complementar la curva de rentabilidades con la técnica del bono par, que en cualquier caso no nos permitirá obtener una ETTI continua, sino discreta.
- b) El segundo tipo de metodologías, más atractivas teóricamente, se basarán en la estimación directa de la función de descuento que describen los tipos cupón cero, que serán funciones, lógicamente, también del vencimiento. A partir de dicha función de descuento es inmediato hallar la ETTI que define. Los modelos expuestos son los que se encuadran dentro de la familia de los splines, en concreto el de H. McCulloch, propuesto en su trabajo "Measuring the term structure of interest rates", publicado en 1971 en la revista *Journal of Business* y el de O.A. Vasicek y G. Fong "Term structure modelling using exponential splines" publicado en 1982 en *Journal of Finance*.

En cualquier caso, una vez estimada la ETTI por cualquiera de los métodos econométricos propuestos, la determinación de los tipos implícitos es inmediata, ya que se trata de resolver un simple sistema de ecuaciones con coeficientes ciertos.

Con el fin de ejemplificar los métodos propuestos, y poder comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen con técnicas de regresión borrosa, hemos realizado la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés y de los tipos forward correspondiente a la sesión del 22-1-1999. Somos conscientes de que dicha sesión puede estar un poco alejada en el tiempo respecto a la fecha de lectura de la tesis. Sin embargo consideramos que el día elegido para realizar las correspondientes estimaciones no tiene mayor importancia, ya que el único fin del ejemplo es mostrar que las estimaciones que se obtiene con las técnicas propuestas son "razonables", y realizar una comparación empírica de los resultados que se obtengan frente a las estimaciones que realicemos con nuestra propuesta.

En el capítulo 3 propondremos diversas metodologías de estimación de una ETTI borrosa inspiradas en los métodos expuestos en el capítulo anterior y basándonos en el uso de una regresión posibilística. Todos los desarrollos efectuados se ejemplificarán estimando la ETTI, igual que antes, en el 22-1-1999, analizándose si los resultados obtenidos utilizando la regresión borrosa son coherentes respecto a los obtenidos mediante métodos econométricos. Por ejemplo, si obtenemos mediante uno de los métodos econométricos que el tipo spot a tres años es del 4%, es de esperar que en la correspondiente estimación borrosa, el interés cierto del 4% tenga un alto nivel de presunción, pero al mismo tiempo la estimación borrosa nos aportará información sobre otros tipos de interés que tienen también "posibilidad" de ocurrencia

El último capítulo de esta segunda parte de la tesis, se dedica a analizar la estimación de los tipos anticipados por el mercado cuando la ETTI es borrosa, de tal forma que los tipos forward también serán números borrosos. Este problema, que en certeza es trivial, no lo será en borrosidad, ya que se trata de resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes estimados a través de números borrosos. En este caso también analizaremos los resultados obtenidos utilizando la metodología borrosa en la sesión que ha sido escogida para la estimación de la ETTI, y los contraponemos con los resultados obtenidos en el capítulo 2, es decir, los obtenidos utilizando técnicas de regresión convencionales.

Reseñamos que la metodología de estimación de la ETTI y los tipos implícitos planteada en los apartados 3 y 4 puede ser implementada para cualquier tipo de número borroso L-L de Dubois y Prade – es decir, con idéntica función forma derecha e izquierda- pero hacemos especial hincapié, por su gran utilización en aplicaciones prácticas, en la implementación de dichos métodos mediante números borrosos triangulares, de forma que la estimación de las diversas magnitudes que se derivan de la ETTI, especialmente, los tipos spot y los tipos forward puedan serlo, bien porque puedan ser estimados de forma directa triangularmente o porque puedan ser aproximados.

PARTE III: FIJACIÓN DE LAS PRIMAS DE LOS SEGUROS DE VIDA Y DE LA SOLVENCIA DINÁMICA DEL ASEGURADOR CUANDO LOS TIPOS DE INTERÉS DE VALORACIÓN VIENEN DADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

El estudio que se realiza en la tercera parte de la tesis, dedicada a la valoración de los seguros de vida con tipo de interés incierto, es el objetivo de esta tesis. Para acotar el campo de estudio hemos supuesto que las cuantías aseguradas ante cada evento sobre la vida del asegurador vienen

prefijadas desde el inicio del contrato, y que los sucesos considerados son únicamente el fallecimiento o la supervivencia del asegurado.

En la presentación de la tesis doctoral ya comentamos que los fenómenos básicos que determinan la valoración actuarial son: el fenómeno biométrico, en nuestro caso, la mortalidad y el fenómeno financiero. Por las razones ya expuestas al primero le damos un tratamiento probabilístico. En cuanto al segundo, se plasma en la decisión que debe tomar el asegurador respecto a la rentabilidad que debe ofrecer a sus asegurados, - interés técnico- y que lo modelizaremos utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos.

El objetivo final en nuestro análisis será proponer una metodología que permita, en primer lugar, realizar la valoración financiero-actuarial de los seguros de vida teniendo en cuenta la doble vertiente probabilística y borrosa, que comprende el fenómeno. Dicha modelización se sustentará en la utilización del concepto de variable borroso-aleatoria. Aunque dicha metodología sea aplicada a la determinación de las primas del seguro, el instrumento propuesto debe ser igualmente válido para determinar las provisiones a constituir en un momento intermedio de la vida del contrato y debe permitir valorar la posición de solvencia del asegurador medida como probabilidad de quiebra y asignar a cada posición un nivel de presunción que vendrá dado por el de la trayectoria de los tipos de interés a que dicho nivel de solvencia esté ligado.

El desarrollo de estos objetivos nos ha llevado a estructurar esta tercera parte de la tesis en los siguientes seis capítulos:

- 1) Conceptos introductorios
- 2) Análisis de las principales estructuras actuariales con certeza en el tipo de interés de valoración
- 3) Análisis de las principales estructuras actuariales con el tipo de interés estimado a través de números borrosos
- 4) Fijación de las primas y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida para diversas modalidades de estructuras actuariales bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera
- 5) Fijación de la prima única y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida a través de la teoría clásica del riesgo
- 6) Fijación de la prima única y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida utilizando simulación estocástica

El primer apartado va dedicado a dar el marco general que utilizaremos a la hora de plantear nuestra propuesta metodológica en el análisis de los seguros de vida. En él, y tras definir el concepto de seguro de vida, analizamos brevemente el tratamiento que la matemática actuarial ha

dado tradicionalmente al fenómeno de la mortalidad. Dicho fenómeno debe enmarcarse en un contexto de riesgo, ya que a los estados posibles (edades de fallecimiento) se les puede asignar una probabilidad de ocurrencia, tal como ya hemos comentado.

Posteriormente, y dado que un seguro de vida también es un instrumento de ahorro, realizamos un detallado análisis del interés técnico y justificamos la necesidad de la utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos para su modelización. Para ello exponemos las reflexiones y concepciones de diferentes autores sobre dicha variable y las diversas soluciones que la literatura ha dado en la modelización de la incertidumbre del rendimiento que el asegurador obtendrá invirtiendo las primas. Dichas soluciones se han concretado, básicamente, en considerar intereses aleatorios (en la gran mayoría de casos) o suponer que los intereses son borrosos. Como ya hemos comentado, nos inclinamos por esta segunda opción, dada la naturaleza de la variable objeto de cuantificación. Posteriormente proponemos diversos métodos orientados a determinar el interés o los intereses de actualización a través de números borrosos. Dado que la referencia fundamental debe ser el interés que podrá obtener con la cartera activa, que se compone en gran parte por deuda pública, creemos que una referencia válida para determinar dicho interés debe ser la ETTI del mercado de deuda pública, estimada a través de números borrosos en la segunda parte de la tesis.

También en este primer apartado formulamos el principio de equivalencia estático de valoración actuarial y suponiéndose incertidumbre en el tipo de interés, consiste en reducir los capitales financieros que intervienen en la operación, cuyo devengo depende de un determinado suceso sobre la vida del asegurado, a su esperanza matemática. Ello es debido a que en dicho principio se han basado los trabajos que han modelizado la incertidumbre en el interés de valoración a través de números borrosos.

Consideramos que un punto débil de esta metodología es que se reduce la aleatoriedad del fenómeno biométrico a sus valores esperados, por lo que hace difícil abordar problemas como la fijación de recargos sobre las primas para desviaciones de la mortalidad o analizar la posición de solvencia del asegurador. Por esa razón finalizamos este capítulo analizando el denominado enfoque estocástico en la valoración de los seguros de vida, basado en la variable aleatoria "número de periodos enteros de vida" para una persona. A partir de esta variable aleatoria se define la variable aleatoria "pérdida para el asegurador", que cuantifica el valor actual de las pérdidas que puede sufrir el asegurador tras cobrar una determinada prima. Si el tipo de interés utilizado en la actualización de los flujos asociados a un contrato de seguro es borroso, las realizaciones de dicha variable aleatoria serán números borrosos y por tanto nos encontraremos ante una variable borroso aleatoria.

En el segundo capítulo analizaremos la valoración de las estructuras actuariales más usuales en la práctica, suponiéndose certeza en el interés o intereses de valoración, desde el marco conceptual que proporciona la teoría estocástica y obteniéndose la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar del valor actual de las prestaciones de las mismas. En todos los casos estos parámetros son funciones del tipo de interés de valoración, siendo también analizado el comportamiento de éstos respecto al tipo o tipos de interés de valoración. Los resultados que obtengamos facilitarán la posterior aplicación de intereses cuantificados a través de números borrosos.

En el tercer capítulo realizamos un análisis análogo al del apartado 2, pero suponiéndose que los intereses de valoración vienen estimados a través de números borrosos. Así, el valor actual de las prestaciones asociadas a cada estructura será una variable borroso aleatoria, ya que los valores actuales de las prestaciones correspondientes ante cada suceso contemplado en el contrato lo son, y la esperanza matemática, varianza y desviación estándar también. Realizaremos también un análisis particular para el caso en que el tipo de interés venga dado a través de un número borroso triangular, así como la viabilidad de aproximar triangularmente esperanza matemática, varianza y desviación estándar.

En el cuarto apartado analizaremos, en primer lugar, la fijación de la prima pura única que debe cargar el asegurador, que será la esperanza matemática de las prestaciones. Para ello será necesario desfuzzyficar dicha esperanza matemática, siendo el procedimiento propuesto el cálculo del valor esperado, ya que por una parte se utiliza toda la información que proporciona el número borroso y adicionalmente se permite introducir de forma sencilla la aversión al riesgo de interés del asegurador. Posteriormente analizamos la fijación de recargos suponiendo carteras de un único asegurado, supuesto, que si bien no es realista, facilita la descripción de la metodología que seguiremos, y motiva el análisis completo de la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador, análisis que no tan sólo debe permitir la determinación de recargos, sino también la posición de solvencia para carteras de un único asegurado.

En los últimos capítulos de esta tercera parte de la tesis, el 5 y el 6, propondremos una metodología que permita realizar el análisis de la solvencia del asegurador y la fijación de recargos para desviaciones de siniestralidad. Si bien el valor de la prima pura única es independiente del tamaño del colectivo asegurado, el hecho de disponer de una cartera de asegurados (más de uno) debe permitir cargar al asegurado un recargo para la desviaciones de la siniestralidad menores que si consideramos a cada asegurado como un único negocio, ya que la

ley de los grandes números indica que la mortalidad debe tender a comportarse conforme a lo esperado.

En el apartado 5 partiremos del marco conceptual de la Teoría Clásica del Riesgo, lo cual implica aceptar que el valor actual de las pérdidas para el asegurador se distribuye según una variable aleatoria normal. Por supuesto, ello sólo es aplicable si la cartera de asegurados se compone de un gran número de pólizas homogéneas. Si el tipo de interés es borroso, dicho planteamiento deberá ser adaptado a que la media y la desviación estándar son borrosas, por lo que acabaremos utilizando variables borroso aleatorias normales. Bajo estos supuestos, la descripción completa de la variable borroso aleatoria pérdidas permitirá determinar, de forma rigurosa los recargos a aplicar por parte del asegurador para conseguir cierto nivel de solvencia, y determinar la posición de solvencia del asegurador una vez ha cuantificado la prima pura y el recargo a repercutir.

Basándonos en los mismos planteamientos del apartado 5, en el capítulo 6 realizamos un estudio similar para carteras homogéneas de tamaño reducido. Dado que en este caso no es realista suponer que el valor actual de las pérdidas se comporta como una variable aleatoria normal, propondremos hallar, simulando estocásticamente la mortalidad, la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas de forma empírica. Con dicha variable borroso aleatoria empírica, podremos realizar los análisis propuestos en los capítulos 4 y 5.

Asimismo, hemos creído conveniente para el desarrollo de los apartados 3, 4 y 5, realizar diversas aplicaciones numéricas, con el fin de mostrar la aplicabilidad de los desarrollos efectuados.

CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA

La penúltima cuestión que abordaremos en la presenta tesis doctoral será el preceptivo apartado de conclusiones, sintetizándose en primer lugar las que a nuestro juicio son más relevantes. Posteriormente desarrollaremos un apartado que podríamos denominar como "conclusiones proyectivas". Ello es debido a nuestra convicción de que una tesis doctoral es necesariamente una obra incompleta, de forma que los objetivos que llevan a su elaboración no están totalmente cumplidos si durante el largo periodo de tiempo que es necesario para su elaboración, al doctorando y al director no se le plantean nuevas inquietudes e interrogantes sobre el tema analizado o sobre cuestiones afines. Por esta razón, creemos que es necesario exponer las vías de investigación que consideramos que pueden seguirse tras la elaboración del trabajo, y los interrogantes e inquietudes que nos ha suscitado su elaboración.

Finalizamos con el apartado de bibliografía, donde han sido incluidos aquellos libros, artículos, documentos de trabajo etc. que han sido consultados en la elaboración de la tesis. Por supuesto, algunos han sido utilizados intensivamente pero de otros únicamente hemos aprovechado alguna idea o alguna reflexión de los autores, lo cual, por otra parte, creemos que no es despreciable. Asimismo, hemos optado por no separar la bibliografía en función de los tres grandes bloques que configuran la tesis, y presentar una bibliografía unificada. Ello es debido, en primer lugar, a que a pesar de que estos tres bloques pueden leerse independientemente, han sido redactados partiendo de un único objetivo: realizar alguna aportación en el campo de la valoración actuarial en incertidumbre. Así pues, aunque algunas referencias son específicas de una de las partes que configuran la tesis, una gran cantidad de ellas es necesaria para el desarrollo de todas las cuestiones abordadas.