y esta aproximación del producto sí mantiene el soporte del número borroso $\widetilde{C}$.

7. *División*. Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \div \widetilde{B}$, el resultado que obtenemos, igual que en el caso del producto, no es un número borroso L-R de Dubois y Prade. Sin embargo, Dubois y Prade proponen la siguiente aproximación, suponiéndose que $sop(\widetilde{B})$ y $sop(\widetilde{A}) \subset R^+$:

$$\widetilde{C} = (a_{1C},a_{2C},l_A,r_A)_{LR} \div (b_{1C},b_{2C},l_B,r_B)_{LR} \approx \left(\frac{a_{1C}}{b_{2C}},\frac{a_{2C}}{b_{1C}},\frac{a_{1C}\cdot r_B + b_{2C}\cdot l_A}{(b_{2C})^2},\frac{a_{2C}\cdot l_B + b_{1C}\cdot r_A}{(b_{1C})^2}\right)_{LR}$$

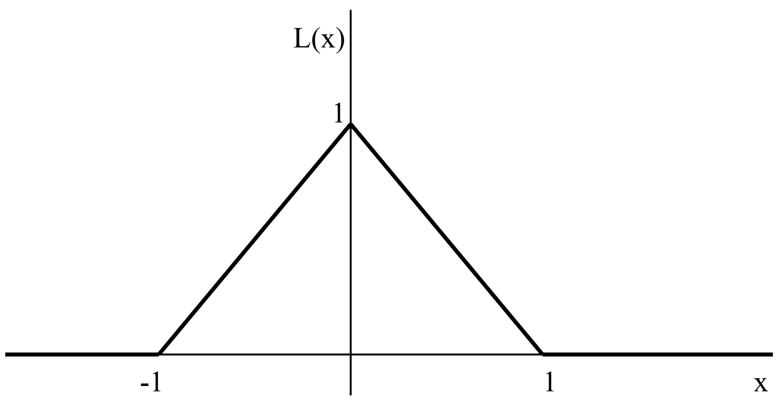
Puede comprobarse que la aproximación propuesta, aunque mantiene la naturaleza de los números borrosos de partida, vuelve a no conservar el soporte de $\widetilde{C}$. Si los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $sop(\widetilde{B})$ y $sop(\widetilde{A}) \subset R^+$, la aproximación que Dubois y Prade postulan para $\widetilde{C}$ es:

$$\widetilde{C} \approx \left(\frac{a_{1C}}{b_{2C}},\frac{a_{2C}}{b_{1C}},\frac{a_{1C}\cdot r_B + b_{2C}\cdot l_A}{b_{2C}(b_{2C}+r_B)},\frac{a_{2C}\cdot l_B + b_{1C}\cdot r_A}{b_{1C}(b_{1C}-l_B)}\right)_{LR}$$

En este caso sí que se mantiene el soporte del número borroso que aproximamos $\widetilde{C}$.

1.2.3.3. Números borrosos trapezoidales

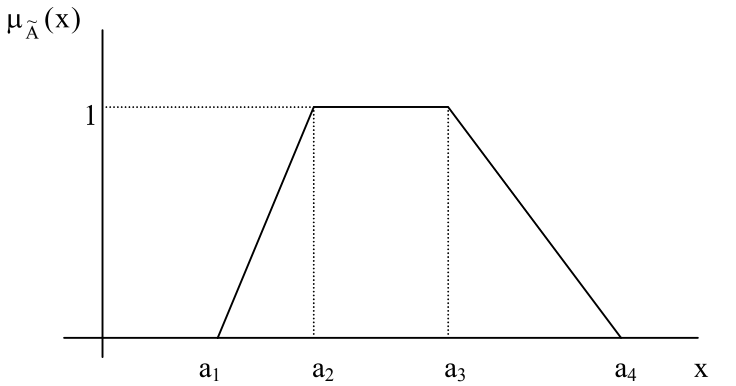
Un número borroso trapezoidal es un número borroso L-L de Dubois y Prade, cuya función de pertenencia viene definida por unas funciones forma L(x)=R(x) = Max{0, 1-|x|}, y cuyo núcleo es un intervalo de confianza. De esta forma, si $\widetilde{A}$ es trapezoidal, la función forma para el tramo derecho e izquierdo de la función de pertenencia es idéntico, y queda representada por:



Asimismo, si denominamos como $[a_1, a_4]$, al soporte del número borroso $\widetilde{A}$, y $[a_2, a_3]$ a $\mathrm{nucl}(\widetilde{A})$ dado que su radio izquierdo es $l_A = a_2 - a_1$ y su radio a la derecha, $r_A = a_4 - a_3$, la función de pertenencia, de $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 < x < a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo la representación gráfica de $\widetilde{A}$:



Es fácil comprobar que los α-cortes de $\widetilde{A}$, A_α, vienen dados por:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_4 - (a_4 - a_3)\alpha]$$

Notaremos a un número borroso trapezoidal, $\widetilde{A}$, o bien a través de su núcleo y sus radios como $\widetilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$, o alternativamente, a través de una cuarteta de confianza, donde los valores que la componen son el valor más pequeño posible, el valor inferior y el valor más elevado con presunción 1 y el extremo superior del 0-corte, de forma que:

$$\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Obsérvese que en este caso, la función que delimita el nivel de pertenencia de los valores inferiores al núcleo f(x), es la recta que pasa por los puntos $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y la que delimita el grado de pertenencia de valores más grandes que el núcleo, g(x), es la recta que pasa por los puntos $(a_3, 0)$ y $(a_4, 1)$

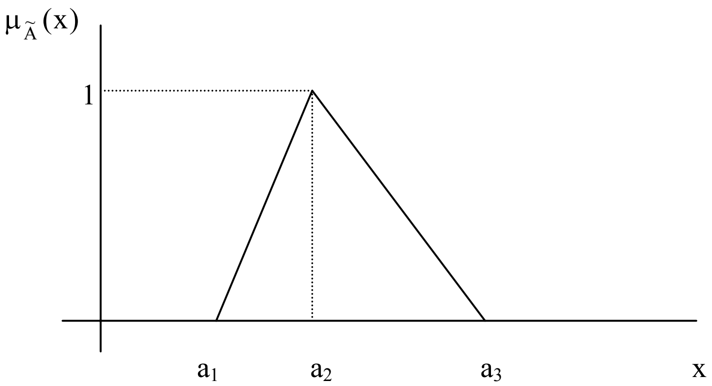
1.2.3.4. Números borrosos triangulares

Un número borroso triangular es un caso particular de número borroso trapezoidal cuyo núcleo es un valor cierto, es decir $a_2 = a_3$.

Asimismo, si denominamos como $[a_1, a_3]$, al soporte del número borroso $\widetilde{A}$, dado que su radio izquierdo es $l_A = a_2 - a_1$ y su radio a la derecha, $r_A = a_3 - a_2$, la función de pertenencia, $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, es:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 < x \le a_3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La representación gráfica del número borroso, $\widetilde{A}$ es pues:



y por tanto, los α-cortes de $\widetilde{A}$, A_α, vienen dados por:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha]$$

Notaremos a un número borroso triangular, $\widetilde{A}$, o bien a través de su centro y sus radios como $\widetilde{A}=(a_C, l_A, r_A)$, o alternativamente, a través de una tripleta de confianza, donde los valores que la componen son el valor más pequeño posible, el valor más posible y el valor más elevado posible, es decir, $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$. Obsérvese que la función de pertenencia de un número borroso triangular es también lineal. El tramo izquierdo es la recta que pasa por $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y el derecho la recta que toma valores en $(a_2, 1)$ y $(a_3, 0)$.

1.2.3.5. Operaciones con números borrosos trapezoidales y triangulares

A continuación exponemos los resultados que se obtienen cuando operamos con números borrosos trapezoidales o triangulares, de forma que para uno $\tilde{A}$ su expresión general es $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Por supuesto, los resultados que se obtendrían utilizando números borrosos triangulares se hallarán sin más que considerar que si $\tilde{A}$ es triangular $a_2 = a_3$.

1. *Opuesto*: $\tilde{B} = -\tilde{A} = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$

2. *Multiplicación por un escalar*: $\tilde{B} = k\tilde{A}$, son $k \in R^+$.
   2.1. Si k>0, $\tilde{B} =$ $(ka_1, ka_2, k\, a_3, k\, a_4)$
   2.2. Si k<0, $\tilde{B} = (ka_4, ka_3, k\, a_2, k\, a_1)$
   2.3. Si k=0, $\tilde{B} = (0, 0, 0, 0)$, es decir, el número cierto 0.

3. *Pseudo-Inverso*: $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$. En este caso $\tilde{B}$ no conserva su condición de número borroso trapezoidal, ya que su función de pertenencia es, suponiéndose que $0 \notin \mathrm{sop}(\tilde{A})$:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{a_4 - x^{-1}}{a_4 - a_3} & \dfrac{1}{a_4} < x \leq \dfrac{1}{a_3} \\ 1 & \dfrac{1}{a_3} < x \leq \dfrac{1}{a_2} \\ \dfrac{x^{-1} - a_1}{a_2 - a_1} & \dfrac{1}{a_2} < x < \dfrac{1}{a_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En Kaufmann (1986b), se propone como aproximación trapezoidal al inverso de $\tilde{A}^{-1}$, un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo. Normalmente será buena cuando los radios de $\tilde{A}$ no son elevados respecto a su núcleo $[a_2, a_3]$. En concreto:

$$\tilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right)$$

4. *Suma*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, donde $\tilde{A} =(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} =(b_1, b_2, b_3, b_4)$, se obtiene:

$$\tilde{C} = (a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

5. *Resta*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$, donde $\tilde{A} =(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} =(b_1, b_2, b_3, b_4)$, se obtiene:

$\widetilde{C} = (a_1, a_2, a_3, a_4) - (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$

6. *Multiplicación*. Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$, donde $\widetilde{A}$ =(a_1, a_2, a_3, a_4) y $\widetilde{B}$ = (b_1, b_2, b_3, b_4), el resultado que obtenemos no es un número borroso triangular. En concreto, si $\text{sop}(\widetilde{B}) \text{ y } \text{sop}(\widetilde{A}) \subset R^+$, la función de pertenencia de $\widetilde{C}, \mu_{\widetilde{C}}(x)$, es:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{-[a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)] + \sqrt{\begin{Bmatrix} [a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)]^2 - \\ -4(a_1 b_1 - x)(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \end{Bmatrix}}}{2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} & a_1 b_1 < x \le a_2 b_2 \\ 1 & a_2 b_2 < x \le a_3 b_3 \\ \dfrac{[a_4(b_4 - b_3) + b_4(a_4 - a_3)] - \sqrt{\begin{Bmatrix} [a_4(b_4 - b_3) + b_4(a_4 - a_3)]^2 - \\ -4(a_4 b_4 - x)(a_4 - a_3)(b_4 - b_3) \end{Bmatrix}}}{2(a_4 - a_3)(b_4 - b_3)} & a_3 b_3 < x < a_4 b_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, si $\widetilde{A} \text{ y } \widetilde{B}$ no tienen un radio elevado, $\widetilde{C}$ puede aproximarse a través de un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo, todo ello sin cometerse un excesivo error –ver Kaufmann (1986b)-. Así, si los valores de los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $\text{sop}(\widetilde{B}) \text{ y } \text{sop}(\widetilde{A}) \subset R^+$, podemos proponer como aproximación trapezoidal:

$$\widetilde{C} \approx (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4)$$

7. *División*. Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \div \widetilde{B}$, donde $\widetilde{A}$ =(a_1, a_2, a_3, a_4) y $\widetilde{B}$ = (b_1, b_2, b_3, b_4), el resultado que obtenemos vuelve a perder la condición de número borroso trapezoidal. En concreto, $\mu_{\widetilde{C}}(x)$ es, si $\text{sop}(\widetilde{A})$ y $\text{sop}(\widetilde{B})$ son positivos:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x b_4 - a_1}{(a_2 - a_1) + x(b_4 - b_3)} & \dfrac{a_1}{b_4} < x \le \dfrac{a_2}{b_3} \\ 1 & \dfrac{a_2}{b_3} < x \le \dfrac{a_3}{b_2} \\ \dfrac{a_4 - x b_1}{(a_4 - a_3) + x(b_2 - b_1)} & \dfrac{a_3}{b_2} < x < \dfrac{a_4}{b_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, si los valores de los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que del núcleo, y suponiéndose que $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset R^{+}$, podemos proponer como aproximación trapezoidal de $\tilde{C}$, tal como se indica en el mencionado trabajo de Kaufmann (1986):

$$\tilde{C} \approx \left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right)$$

1.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BORROSAS

En muchas ocasiones, el valor de una determinada magnitud que denominaremos x no vendrá dado a través de una relación funcional explícita de otras variables, sino a través de una relación funcional implícita $b=f(x, a_1, a_2,\dots,a_n)$. Si queremos hallar esta magnitud –suponemos que sólo se trata de una ecuación con una variable-, deberemos despejar el valor x de la ecuación, obteniéndose $x=h(b, a_1, a_2,\dots,a_n)$. En muchas ocasiones, estas ecuaciones tienen una forma sencilla, del tipo $a+x=b$, $a\cdot x=b$, por lo que, si trabajamos en certeza, su resolución no suele plantear ningún problema.

Sin embargo, si los datos de partida vienen dados por números borrosos, de forma que los parámetros a_i, i=1,2,...,n vienen dados por:

$$\tilde{A}_i = \left\{ x_i, \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \right\} = \left\{ A_{i_\alpha} = \left[A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha) \right] \mid 0 \le \alpha \le 1 \right\} \; i=1,2,...,n.$$

y el parámetro b viene dado por:

$$\tilde{B} = \left\{ x, \mu_{\tilde{B}}(y) \right\} = \left\{ B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha) \right] \mid 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

La relación funcional que debemos resolver es:

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n \right)$$

en concreto, deberemos hallar el subconjunto borroso $\tilde{X}$. Aunque a veces será más operativo hallarlo a través de sus α-cortes, $X_\alpha = \left[X^1(\alpha), X^2(\alpha) \right]$, el problema es que en muchas ocasiones la ecuación anterior no tendrá resolución, ni siquiera para expresiones sencillas del tipo $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ o $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$, debido al problema que representa la no existencia en sentido estricto del elemento opuesto en la suma de números borrosos y del elemento inverso en el producto. A continuación analizamos las dos formas de enfocar este problema por la matemática borrosa. Asimismo únicamente estudiamos ecuaciones con una incógnita, y ponemos especial atención a las ecuaciones $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ y $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$, que son las que a nosotros finalmente nos interesarán.