1.3.1. Método clásico de resolución de ecuaciones

1.3.1.1. Planteamiento general

Si partimos de la relación funcional:

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n\right)$$

La solución de esta ecuación en el sentido clásico parte de que los α-cortes de $\tilde{X}$ deben permitir que:

$$B_\alpha = \left\{y \in R \mid y = f\left(x, a_1, ..., a_n\right), a_i \in A_{i_\alpha}, i = 1,2,.., n, x \in X_\alpha\right\}$$

Por tanto, la solución será todo número borroso $\tilde{X}$ cuyos α-cortes $X_\alpha = \left[X^1(\alpha), X^2(\alpha)\right]$ permitan que, por una parte:

Min $f(x, a_1, a_2,\ldots,a_n)$ sujeto a $a_i \in \left[A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)\right]$, $i=1,2,...,n$ y $x \in \left[X^1(\alpha), X^2(\alpha)\right]$ de ser el extremo inferior de B_α, $B^1(\alpha)$.

Max $f(x, a_1, a_2,\ldots,a_n)$ sujeto a $a_i \in \left[A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)\right]$, $i=1,2,...,n$ y $x \in \left[X^1(\alpha), X^2(\alpha)\right]$ debe ser el extremo superior de B_α, $B^2(\alpha)$. Además, se debe verificar que $\tilde{X}$ sea un número borroso, es decir:

a) $X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \forall\alpha$

b) $X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha')$ y $X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha')$ $\forall \alpha \leq \alpha'$.

Utilizando esta metodología, en muchas ocasiones no existirá solución para la ecuación que pretendemos resolver. A continuación analizamos las condiciones que requiere la existencia de solución en sentido clásico de las ecuaciones:

$$\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$$

denominadas por Kaufmann y Gupta (1985) como “desconvolución de la suma” y “desconvolución del producto” respectivamente.

1.3.1.2. Desconvolución de la suma y del producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas.

En Kaufmann y Gupta (1985) se dan las condiciones para que exista solución en sentido clásico de $\widetilde{X}$ -es decir, que realmente se trate de un número borroso- para las ecuaciones $\widetilde{A} + \widetilde{X} = \widetilde{B}$ y $\widetilde{A} \otimes \widetilde{X} = \widetilde{B}$ donde:

$$\widetilde{A} = \{x, \mu_{\widetilde{A}}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$

$$\widetilde{B} = \{x, \mu_{\widetilde{B}}(y)\} = \{B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$

En la ecuación $\widetilde{A} \otimes \widetilde{X} = \widetilde{B}$ supondremos que $\text{sop}(\widetilde{A})$ y $\text{sop}(\widetilde{B}) \in R^+$. Si bien es un supuesto un tanto restrictivo, en esta tesis no pretendemos analizar las condiciones de solución de ecuaciones borrosas en cualquier circunstancia, sino las de aquéllas que deberemos resolver en los problemas econométricos que proponemos, y en nuestro caso siempre se cumplirá dicha condición.

Respecto a la desconvolución de la suma, la ecuación a resolver expresada a través de los α-cortes es:

$$[A^1(\alpha), A^2(\alpha)] + [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica indica que:

a) $X^1(\alpha) = B^1(\alpha) - A^1(\alpha)$

b) $X^2(\alpha) = B^2(\alpha) - A^2(\alpha)$

y es condición necesaria para la existencia de solución clásica que:

$$X^1(\alpha) \le X^2(\alpha) \ \forall \alpha \in [0,1]$$

Y es condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha solución que:

$$X^1(\alpha) \le X^1(\alpha'),\ B^1(\alpha) - A^1(\alpha) \le B^1(\alpha') - A^1(\alpha'),\ \alpha, \alpha' \in [0,1],\ \alpha \le \alpha'$$

$$X^2(\alpha) \ge X^2(\alpha'),\ B^2(\alpha) - A^2(\alpha) \ge B^2(\alpha') - A^2(\alpha'),\ \alpha, \alpha' \in [0,1],\ \alpha \le \alpha'$$

Así, el cumplimiento de la segunda condición implica el cumplimiento automático de la primera, pero el de la primera no implica el cumplimiento automático de la segunda.

Respecto a la desconvolución del producto, la ecuación a resolver, expresada a través de α-cortes es:

$$[A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \cdot [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica es, bajo las restricciones impuestas a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$:

a) $X^1(\alpha) = \dfrac{B^1(\alpha)}{A^1(\alpha)}$

b) $X^2(\alpha) = \dfrac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)}$

Al igual que antes, la condición necesaria para la existencia de solución clásica es:

$X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha)\ \forall\alpha\in[0,1]$

Y la condición necesaria y suficiente:

$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha')$, es decir $\dfrac{B^1(\alpha)}{A^1(\alpha)} \leq \dfrac{B^1(\alpha')}{A^1(\alpha')}$ $\alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$

$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha')$ es decir $\dfrac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)} \geq \dfrac{B^2(\alpha')}{A^2(\alpha')}$ $\alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$

Como en el caso de la desconvolución de la suma, el cumplimiento de la segunda condición vuelve a implicar el cumplimiento automático de la primera, pero el de la primera no implica el cumplimiento de la segunda.

1.3.1.3. Desconvolución de la suma y del producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas cuando los parámetros que intervienen son números borrosos L-L de Dubois y Prade

En Buckley y Qu (1990a) se analiza las condiciones que deben exigirse a los números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ para que su solución, $\tilde{X}$ en sentido clásico sea un número borroso, es decir, para que exista solución en sentido clásico. De forma algo más general, supondremos que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos L-L de Dubois y Prade –la función forma a la derecha es idéntica a la función forma a la izquierda-, lo cual no es tampoco excesivamente restrictivo, ya que los números borrosos que usualmente se utilizan en la práctica –triangulares, trapezoidales o gausianos- suelen tener esta forma. Para simplificar la notación supondremos, asimismo, que se trata de números borrosos cuyo núcleo es un único número. Generalizar los resultados relajando esta última hipótesis es sencillo. Asimismo, volvemos a suponer que $\text{sop}(\tilde{A})$, $\text{sop}(\tilde{B}) \in R^+$ cuando analicemos la desconvolución del producto.

De esta forma, podemos expresar $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ como:

$$\widetilde{A} = (a_C, l_A, r_A)_L \text{ y } \widetilde{B} = (b_C, l_B, r_B)_L$$

a) Resolución de $\widetilde{A} + \widetilde{X} = \widetilde{B}$

Respecto a la desconvolución de la suma, la ecuación a resolver expresada a través de los α-cortes es en este caso:

$$[a_C - l_A L^{-1}(\alpha), a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] + [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [b_C - l_B L^{-1}(\alpha), b_C + r_B L^{-1}(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica es:

1) $X^1(\alpha) = [b_C - l_B L^{-1}(\alpha)] - [a_C - l_A L^{-1}(\alpha)] = b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha)$

2) $X^2(\alpha) = [b_C + r_B L^{-1}(\alpha)] - [a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] = b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha)$

La condición necesaria para la existencia de solución clásica es que $X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha)\ \forall\alpha\in[0,1]$, es decir:

$$b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \leq b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha)$$

y como $L^{-1}(\alpha)\geq 0$, esta se reduce a:

$$l_A + r_A \leq l_B + r_B$$

Lo cual era de esperar, ya que si $\widetilde{A} + \widetilde{X} = \widetilde{B}$, la amplitud de $\widetilde{B}$, que es el número borroso resultante de la suma de dos, $\widetilde{A}$ y $\widetilde{X}$ debe tener mayor amplitud –es más incierto-, que uno de sus sumandos, $\widetilde{A}$.

Es condición necesaria y suficiente para que exista solución en sentido clásico:

$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha')$ $\alpha, \alpha'\in[0,1]$, $\alpha\leq \alpha'$

$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha')$ $\alpha, \alpha'\in[0,1]$, $\alpha\leq \alpha'$

Respecto a la primera condición, la podemos escribir en este caso como:

$$b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \leq b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha')$$

es decir,

$$(l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \geq (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha')$$

y como $L^{-1}(\alpha)\geq L^{-1}(\alpha')$, debe cumplirse que $l_B \geq l_A$

Respecto a la segunda condición necesaria y suficiente queda escrita como:

$$b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha) \geq b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha')$$

es decir,

$$(r_B - r_A)L^{-1}(\alpha) \geq (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha')$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha')$, debe cumplirse que $r_B \geq r_A$

Estas dos condiciones también podían ser intuidas a priori. Como $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$, la amplitud de $\tilde{B}$, a la izquierda (a la derecha) se halla como la suma de los radios izquierdos (derechos) de $\tilde{A}$ y $\tilde{X}$. Así el radio izquierdo (derecho) de $\tilde{A}$ debe ser inferior a los radios del número borroso resultante de la suma, $\tilde{B}$. Asimismo, si existe solución, $\tilde{X}$ conserva la condición de número borroso L-L de Dubois y Prade, el cual podremos escribir como:

$$\tilde{X} = (x_C, l_X, r_X)_L = (b_C - a_C, l_B - l_A, r_B - r_A)_L$$

Obsérvese que el cumplimiento de la segunda condición (necesaria y suficiente) implica el cumplimiento automático de la condición necesaria. Si $r_B \geq r_A$ y $l_B \geq l_A \Rightarrow r_B + l_B \geq r_A + l_A$, que era lo que indicaba la condición necesaria.

b) Resolución de $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$

Respecto a la desconvolución del producto, la ecuación a resolver ya expresada a través de α-cortes es:

$$[a_C - l_A\, L^{-1}(\alpha), a_C + r_A\, L^{-1}(\alpha)] \cdot [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [b_C - l_B\, L^{-1}(\alpha), b_C + r_B\, L^{-1}(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica, bajo las restricciones impuestas a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ - positividad y son números L-L de Dubois y Prade con un soporte formado por un único número real- se obtiene como:

$$\text{a) } X^1(\alpha) = \frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)}$$

$$\text{b) } X^2(\alpha) = \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)}$$

es decir, en este caso la solución no será un número borroso L-L de Dubois y Prade.

Es condición necesaria para la existencia de solución clásica que:

$$X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \ \forall \alpha \in [0,1]$$

Es decir,

$$\frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)} \leq \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)}$$

o, alternativamente:

$$\left[b_C - l_B L^{-1}(\alpha)\right] \cdot \left[a_C + r_A L^{-1}(\alpha)\right] \leq \left[b_C + r_B L^{-1}(\alpha)\right] \cdot \left[a_C - l_A L^{-1}(\alpha)\right],$$

que es equivalente a:

$$b_C l_A + r_A - a_C l_B + r_B \leq L^{-1}(\alpha)\left[r_A l_B - l_A r_B\right]$$

Es condición necesaria y suficiente que:

$$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha') \ \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

$$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha') \ \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

Quedando escritas las dos premisas en nuestro caso como:

$$\frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)} \leq \frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha')}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha')} \ \text{y} \ \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)} \geq \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha')}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha')}$$

respecto a la primera premisa, podemos observar que exigimos que:

$$\left[b_C - l_B L^{-1}(\alpha)\right] \cdot \left[a_C - l_A L^{-1}(\alpha')\right] \leq \left[b_C - l_B L^{-1}(\alpha')\right] \cdot \left[a_C - l_A L^{-1}(\alpha)\right]$$

y desarrollando esta última expresión obtenemos:

$$a_C l_B \left[L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')\right] \geq b_C l_A \left[L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')\right]$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha') \geq 0 \Rightarrow L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha') \geq 0$, obtenemos que $a_C l_B \geq b_C l_A$, es decir, que se debe cumplir que $\frac{l_B}{l_A} \geq \frac{b_C}{a_C}$.

Para la segunda premisa, el procedimiento a seguir es análogo. Así, esta queda reescrita como:

$$\left[b_C + r_B L^{-1}(\alpha)\right] \cdot \left[a_C + r_A L^{-1}(\alpha')\right] \geq \left[b_C + r_B L^{-1}(\alpha')\right] \cdot \left[a_C + r_A L^{-1}(\alpha)\right]$$

y desarrollándola queda reducida a:

$$a_C r_B \left[L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')\right] \geq b_C r_A \left[L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')\right]$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha') \geq 0 \Rightarrow L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha') \geq 0$, obtenemos que $a_C r_B \geq b_C r_A$, es decir, que se debe cumplir que $\frac{r_B}{r_A} \geq \frac{b_C}{a_C}$.

Asimismo, el cumplimiento de esta segunda condición que es necesaria y suficiente conlleva el cumplimiento de la primera, aunque la afirmación inversa no es cierta.

1.3.2. Método de resolución de ecuaciones de Buckley y Qu

A continuación resumimos el método de resolución de ecuaciones borrosas propuesto en Buckley y Qu (1991) y Buckley (1992b). Dicho concepto de solución es aplicado posteriormente por Buckley a la resolución de sistemas de ecuaciones en Buckley (1991) y a determinadas ecuaciones o sistemas de ecuaciones típicos en economía como la TIR, las tablas input-output de Leontieff etc. en Buckley (1992a).

Para aplicar este método de solución de ecuaciones borrosas, deberemos partir de que una relación entre números borrosos $\tilde{B} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n\right)$, viene inducida por una relación crisp $b=f(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $\tilde{X}$ y x son las incógnitas, respectivamente. Su concepto de solución, se basa en tomar directamente la relación crisp implícita entre los parámetros b, a_1, a_2,...,a_n y la incógnita, x, es decir:

$$x=h(b, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

De esta forma, dado que los parámetros b, a_1, a_2,...a_n vienen dados por números borrosos, la solución propuesta para $\tilde{X}$ es:

$$\tilde{X} = h\left(\tilde{B}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n\right)$$

la cual puede ser evaluada a través del principio de extensión de Zadeh. En concreto, si $h(b, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una función continua en los soportes de $\tilde{B}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$, $\tilde{X}$ será un número borroso cuyos α-cortes son:

$$X_\alpha = \left[X^1(\alpha), X^2(\alpha)\right] = \left\{x \in R \mid x = h(b, a_1, ..., a_n), a_i \in A_{i_\alpha}, i = 1,2,..,n, b \in B_\alpha\right\}$$

Respecto a los α-cortes de la solución propuesta, realizamos las siguientes consideraciones:

a) En primer lugar, la solución de Buckley y Qu siempre existe. Para hallar los α-cortes de esta solución $\widetilde{X} = h\left(\widetilde{B}, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$, bastará con tener en cuenta las cuestiones apuntadas en el apartado 1.2.2.3. respecto a la evaluación de funciones de números borrosos.

b) Si denominamos como X_α^C a los α-cortes que se obtienen aplicando el concepto clásico de solución de ecuaciones borrosas y X_α^B a los que se obtienen aplicando el concepto de solución de Buckley y Qu, podemos observar que la solución clásica, si existe, está contenida dentro de la solución analizada en este apartado, es decir, $X_\alpha^C \subseteq X_\alpha^B$. Así, podemos entender que la solución de Buckley y Qu es una aproximación a la verdadera solución de la ecuación borrosa, aproximación, por otra parte, más incierta que la solución original. En nuestra opinión, creemos que, si se puede, es mejor utilizar la solución clásica, ya que la incertidumbre de $\widetilde{X}$ cuando se utiliza dicha solución es menor que si se utiliza la solución propuesta en este apartado.

c) Respecto a la solución con este concepto de:

$$\widetilde{A} + \widetilde{X} = \widetilde{B}$$

podemos observar que los α-cortes de $\widetilde{X}$ son:

$$X_\alpha=[X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^2(\alpha) - A^1(\alpha), B^1(\alpha) - A^2(\alpha)]$$

siendo $\widetilde{X}$ un número L-L de Dubois y Prade si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ lo son.

d) Respecto a la solución con esta metodología de:

$$\widetilde{A} \otimes \widetilde{X} = \widetilde{B}$$

los α-cortes que de $\widetilde{X}$ obtenemos, X_α, son:

$$X_\alpha=[X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = \left[\frac{B^1(\alpha)}{A^2(\alpha)}, \frac{B^2(\alpha)}{A^1(\alpha)}\right]$$

y $\widetilde{X}$ no es un número L-L de Dubois y Prade aunque $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ lo sean.