1.5. DESFUZZYFICACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS

En muchos problemas, aunque estimemos las variables que lo describen mediante números borrosos, será necesario acabar cuantificando las magnitudes que pretendemos estimar finalmente mediante un valor cierto, es decir, debemos asignarlas un valor crisp. Esto es lo que en la literatura borrosa se conoce como "desfuzzyficar" números borrosos, o lo que los profesores Kaufmann y Gil Aluja denominan como "hacer caer la entropía". Ello será necesario, por ejemplo, si queremos ordenar números borrosos: los números borrosos, al contrario que los ciertos, no admiten un orden total. Si pretendemos ordenarlos, una alternativa es reducir dichos números borrosos a unos valores ciertos representativos, pudiéndose establecer para ellos un orden total. Otro ejemplo de la necesidad de desfuzzyficar números borrosos se da en la fijación de primas únicas para los seguros de vida, problema abordado en Terceño *et al.* (1996). El precio de un seguro –su prima- viene dado por el valor actual de las prestaciones que se compromete a dar el asegurador. Éstas pueden venir prefijadas, pero lo que el asegurador no conoce es el interés que obtendrá invirtiendo la prima o primas que perciben. Si el interés se estima subjetivamente mediante números borrosos, al descontar el valor de las prestaciones, el asegurador obtiene una prima única borrosa si el contrato se pacta a prima única. Sin embargo, en el momento de formalizarse el contrato, el asegurado debe conocer exactamente la prima que debe pagar. Así pues, el asegurador deberá desfuzzyficar la prima borrosa y convertirla en cierta para determinar el precio a cobrar por la cobertura ofrecida.

La literatura borrosa da diversas alternativas para la desfuzzyficación de números borrosos, algunas de las cuales son descritas y analizadas en este apartado.

a) En primer lugar, aquéllas que podríamos denominar como clásicas, y estudiadas en profundidad por Zhao y Govind (1991):
   - a.1) La basada en el núcleo del número borroso, conocida como MOM –acrónimo de "mean of maxima"-.
   - a.2) La basada en el concepto del centro del área, conocida como COA –acrónimo de "center of area"-.
   - a.3) La denominada como media borrosa, FM, siendo éstas iniciales las correspondientes a "fuzzy mean".

b) El concepto de valor de un número borroso de Delgado *et al.* (1998a) expuesto en el apartado 1.4.

c) La basada en el concepto de intervalo esperado, que se denomina como valor esperado, la cual ha sido analizada entre otros por Dubois y Prade (1985), Campos y González (1989a), González (1990) o Heilpern (1992) y (1995).

Con todos los métodos se pretende determinar un número cierto que denominaremos como A, que represente razonablemente bien a un número borroso $\widetilde{A}$ que supondremos que vendrá dado por:

$$\widetilde{A} = \{x, \mu_{\widetilde{A}_i}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$

Así pues, desfuzzyficar un número borroso implicará establecer una aplicación:

$$g: F(R) \to R$$
$$\widetilde{A} \in F(R) \to A \in R$$

donde por F(R) notamos al conjunto de los números borrosos.

1.5.1. Métodos de desfuzzyficación clásicos

1.5.1.1. Mean of maxima (MOM)

Para un número borroso $\widetilde{A}$, su número equivalente cierto A es un valor crisp que pertenece el núcleo de $\widetilde{A}$, es decir:

$$A = x \mid x \in \mathrm{Nucl}(\widetilde{A})$$

En el caso en que el núcleo del número borroso se componga únicamente de un valor, la determinación de A es inmediata. Sin embargo, si el núcleo es un intervalo de confianza, el decisor deberá elegir arbitrariamente un valor de los que componen el núcleo. Obsérvese, que este método se basa en la idea estadística de la moda.

Respecto a las ventajas de este método, podemos señalar que es de fácil implementación. Sin embargo, no utiliza toda la información del número borroso y permite la introducción de la aversión al riesgo del decisor de forma muy limitada, ya que si el núcleo es un único número, su MOM queda ya prefijada, y si es un intervalo, el decisor tiene cierto margen para elegir un valor prudente, pero dicho valor sólo puede ser uno de los que conforman el núcleo.

1.5.1.2. Centro de área (COA)

Para un número borroso $\widetilde{A}$, su equivalente cierto A es aquél que acumule el 50% del área que delimita su función de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ con el eje de las abscisas. Es decir, A es aquel valor que:

$$A = X| \int_{A^1(0)}^{X} \mu_{\tilde{A}}(x)dx = \frac{1}{2} \int_{sop(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)dx$$

Obsérvese, que este método se basa en la idea estadística de la mediana. Si bien es de más difícil implementación que el MOM, utiliza toda la información del número borroso que se desfuzzyfica. Este método no permite introducir la aversión al riesgo del decisor, sin embargo ello tiene fácil arreglo, sin más que ir variando el área que $\mu_{\tilde{A}}(x)$ debe acumular a su izquierda. Si $\tilde{A}$ cuantifica una utilidad –por ejemplo, un beneficio-, un adverso al riesgo considerará para $\tilde{A}$ valores poco elevados –una acumulación del 25%, por ejemplo-, si es propenso al riesgo, se considerará para $\tilde{A}$ valores elevados (por ejemplo, un A que acumule a su izquierda el 80% del área) y si se es neutral al riesgo se utilizará el COA.

1.5.1.3. Media borrosa (FM)

Según este método el valor cierto representativo A de un número borroso $\tilde{A}$, se halla como una media ponderada de los valores que forman parte del soporte de $\tilde{A}$, $x \in sop(\tilde{A})$, por su nivel de presunción $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Es decir, el valor representativo de $\tilde{A}$ se hallará como:

$$A = \frac{\int_{sop(\tilde{A})} x \cdot \mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{sop(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)dx}$$

Obsérvese que se basa en la idea estadística de la media aritmética ponderada.

Aunque de más difícil implementación que el MOM, también se utiliza toda la información del número borroso que se desfuzzyfica, $\tilde{A}$. Igual que en los casos anteriores, no se permite introducir la aversión al riesgo del decisor. Una versión, donde si se permite introducir aversión al riesgo del decisor, es la propuesta por Yager, analizada en Bortolan y Degani (1985). En este caso se propone:

$$A = \frac{\int_{sop(\tilde{A})} g(x) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{sop(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)dx}$$

donde g(x) es una función que pondera los valores de x.

Sin embargo, aunque esta modificación puede ser útil en la ordenación de números borrosos, puede no serlo tanto en la desfuzzyficación. Dependiendo de la función g(x) que se utilice, el valor A puede no pertenecer al soporte del número borroso que desfuzzyficamos, por lo que no podemos decir que A sea un valor representativo. Por otra parte, creemos que esta forma de introducción de la aversión al riesgo se realiza de manera poco intuitiva para el decisor.

1.5.2. El indicador de valor de Delgado *et al.* (1998a)

Estos autores proponen para hallar el valor representativo de $\widetilde{A}$ como:

$$A = \int_0^1 s(\alpha)\left[A^1(\alpha) + A^2(\alpha)\right]d\alpha$$

donde las propiedades de s(α) ya fueron expuestas en 1.4.3.

Aunque en ocasiones el valor de $\widetilde{A}$ puede ser de difícil cálculo, como ventajas de este método podemos mencionar que se trabaja con toda la información del número borroso y que se permite ponderar la importancia de los extremos de los α-cortes en función del nivel de presunción que presenten. Sin embargo, esta medida de valor no permite introducir la aversión al riesgo del decisor pero ello puede hacerse sin más que introducir un coeficiente $0 \leq \beta \leq 1$ en la expresión de A expuesta anteriormente, de forma que:

$$A = \int_0^1 s(\alpha)\left[(1-\beta)A^1(\alpha) + \beta A^2(\alpha)\right]d\alpha$$

donde si $\widetilde{A}$ cuantifica una utilidad, β indica propensión al riesgo del decisor –a mayor β el decisor se decanta por valores más elevados de los α-cortes de $\widetilde{A}$ -, y si $\widetilde{A}$ es una desutilidad, β indica aversión al riesgo -se da mayor peso a las peores realizaciones de $\widetilde{A}$ al hallar A-.

1.5.3. El valor esperado

Este método se basa en el concepto de intervalo esperado de un número borroso, cuya conceptualización mezcla conceptos estadísticos y de la teoría de los subconjuntos borrosos. El intervalo esperado de un número borroso $\widetilde{A}$, EI[$\widetilde{A}$], se define como:

$$EI\left[\widetilde{A}\right] = \left[E\left[A^1(\alpha)\right], E\left[A^2(\alpha)\right]\right] = \left[E^1\left[\widetilde{A}\right], E^2\left[\widetilde{A}\right]\right]$$

Donde como E[·] notamos al operador esperanza matemática. Para hallar el intervalo esperado de $\tilde{A}$, deberemos asumir que los niveles de presunción $\alpha\in[0,1]$ siguen alguna distribución de probabilidad (uniforme, beta, etc.), que vendrá predefinida subjetivamente por el decisor. De esta forma, podemos hallar el intervalo esperado de un número borroso $\tilde{A}$ utilizando la integral de Riemann-Stieljes como:

$$EI\left[\tilde{A}\right]=\left[\int_0^1 A^1(\alpha)dF(\alpha), \int_0^1 A^2(\alpha)dF(\alpha)\right]$$

donde $F(\alpha)$ es la función de distribución considerada para α.

Usualmente, en aplicaciones prácticas se suele considerar que el nivel de presunción $\alpha\in[0,1]$ se comporta según una distribución uniforme U(0,1) –ver por ejemplo, en programación lineal posibilística, Arenas *et al.* (1997)-. En este caso, el intervalo esperado de $\tilde{A}$ es:

$$EI\left[\tilde{A}\right]=\left[\int_0^1 A^1(\alpha)d\alpha, \int_0^1 A^2(\alpha)d\alpha\right]$$

Ya conocido el intervalo esperado, podemos hallar el valor esperado de $\tilde{A}$, que denotaremos como $EV[\tilde{A}, \beta]$, donde, obviamente, $EV[\tilde{A},\beta] = A$. El valor esperado se halla sin más que introducir la aversión al riesgo del decisor en el sentido de Hurwicz, ponderando con un parámetro $0\leq\beta\leq1$ los extremos del intervalo esperado, de forma que β cuantifica la aversión al riesgo del decisor. De forma general:

$$A=EV[\tilde{A}, \beta]= (1-\beta)E\left[A^1(\alpha)\right]+\beta E\left[A^2(\alpha)\right]$$

Y si asumimos para α una ley uniforme:

$$EV[\tilde{A}, \beta]= (1-\beta)\int_0^1 A^1(\alpha)d\alpha+\beta\int_0^1 A^2(\alpha)d\alpha$$

Evidentemente, si $\tilde{A}$ es una desutilidad, β indica aversión al riesgo, ya que, a valores más elevados de β, el decisor pondera más los valores más pesimistas del intervalo esperado que los más optimistas.

Aunque en ocasiones el valor de $\tilde{A}$ puede ser de difícil cálculo, como ventajas de este método podemos mencionar, en primer lugar, que se trabaja con toda la información del número borroso. Adicionalmente se permite ponderar la importancia de los extremos de los α-cortes en función del nivel de presunción que presenten, sin más que asumir para α una distribución de probabilidad pertinente (por ejemplo, dando mayor densidad a valores de α elevados). Asimismo este método permite introducir la aversión al riesgo del decisor de una forma intuitiva y sencilla. Para finalizar queremos comentar que en el supuesto, muy habitual en aplicaciones prácticas, que $\tilde{A}$ sea triangular, es decir, $\tilde{A} = (a^1, a^2, a^3)$, y se asuma una distribución uniforme de α e indiferencia al riesgo del decisor, es decir, $\beta=\frac{1}{2}$, el resultado que se obtiene para A es el muy utilizado:

$$A = VE\left[\tilde{A}, \frac{1}{2}\right] = \frac{a^1 + 2a^2 + a^3}{4}$$

ver por ejemplo Kaufmann. (1986b) o Kaufmann y Gil Aluja (1993, p. 207).