# CAPÍTULO 3:

## DIVERSAS ASOCIACIONES ENTRE LA ALEATORIEDAD Y LA INCERTIDUMBRE

### 3.1. CONSIDERACIONES PREVIAS

Como señalamos al principio de esta tesis, cuando sobre un determinado fenómeno se dispone de información objetiva de los diferentes estados que puede adoptar y de la frecuencia con que son adoptados, es decir, dicho fenómeno es medible, su cuantificación debe ser hecha en certeza o debe estudiarse mediante la estadística. Sin embargo, en ciencias como la economía, la gestión de empresas –en general, las ciencias sociales-, en muchas ocasiones no podemos medir dicho fenómeno. En este caso, el analista debe partir únicamente de la vaga información que se dispone del fenómeno realizando estimaciones subjetivas en base a su experiencia y conocimientos, siendo en este contexto un instrumento más válido y realista para la manipulación de la información de que se dispone la teoría de los subconjuntos borrosos que la teoría de la probabilidad.

Sin embargo, en el fenómeno que pretendemos estudiar inciden variables de diferente naturaleza, unas de carácter objetivo y medibles, por tanto son modelizables mediante la teoría de la probabilidad, pero otras tienen un carácter vago y subjetivo, siendo lo más adecuado modelizarlas como subconjuntos borrosos. En este caso deberemos aceptar en el estudio de dicho fenómeno la aleatoriedad y la borrosidad conjuntamente si queremos representar fielmente el problema que analizamos. Por tanto, para llegar a una solución más o menos realista, será necesario, por tanto, combinar instrumentos y conceptos de la teoría de la probabilidad y de la teoría de los subconjuntos borrosos.

En estas circunstancias, la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, dispone de diversas herramientas que permiten manipular la información cuando esta tiene carácter borroso y aleatorio a la vez, es decir, híbrido. Dichas herramientas permiten, por una parte, que la pérdida de información durante la manipulación de la misma sea mínima, y por otra, que las operaciones a realizar puedan ser implementadas con cierta facilidad. Para cumplir el primer objetivo planteado, estos instrumentos tratarán a la información borrosa, con operadores maxmin, mucho más adecuados a su carácter “blando”, y a la información de carácter aleatorio con operadores suma-producto.

De entre los instrumentos que se han desarrollado para manipular datos híbridos (borrosos y aleatorios a la vez), en este apartado analizaremos los siguientes instrumentos:

a) Subconjuntos aleatorios borrosos

b) El concepto de evento borroso

c) El concepto de número híbrido

d) Haz de números borrosos

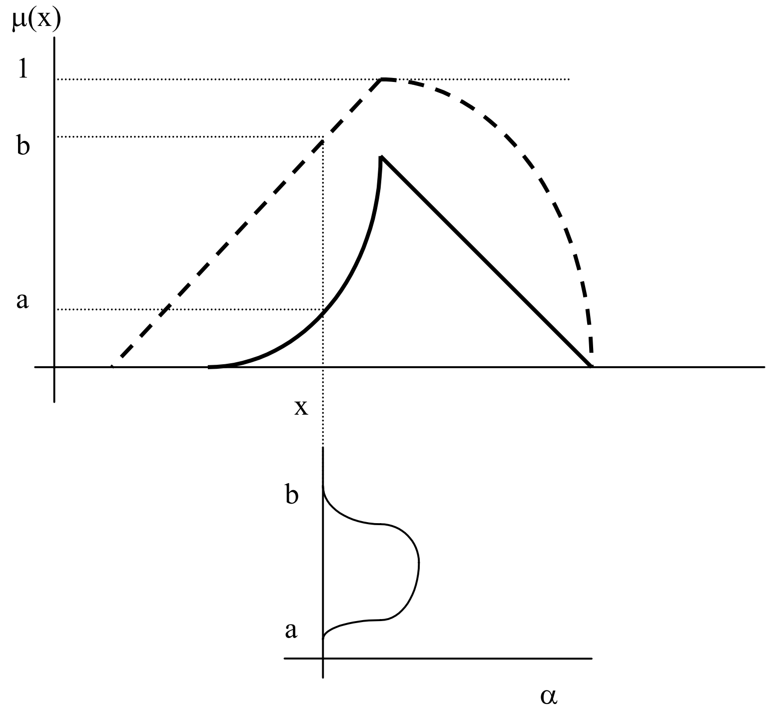
e) Las variables borroso aleatorias

f) Las variables aleatorias normales con media y varianza cuantificada a través de números borrosos

## 3.2. SUBCONJUNTOS ALEATORIO BORROSOS

Este instrumento ha sido desarrollado, entre otros, por Hirota (1981) y Kaufmann y Gil Aluja (1990). Si un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido en un conjunto referencial X viene dado por su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, que indica el grado de pertenencia de x a $\tilde{A}$, con $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, y dicha pertenencia es un valor cierto; en contraposición, en un subconjunto aleatorio borroso, que notaremos como $\dot{\tilde{A}}$, el nivel de pertenencia de un valor x vendrá dado por una distribución de probabilidad. Así, la pertenencia de un valor x a $\dot{\tilde{A}}$, $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$, será aleatoria, y vendrá dada por $f\left(\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)=\alpha\right)$, siendo $f\left(\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)=\alpha\right)$ una probabilidad si $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ es una variable aleatoria discreta y una función de densidad, si el nivel de pertenencia de x esr una variable aleatoria continua.

Podemos representar un subconjunto aleatorio borroso con la siguiente figura:



De esta forma, los operadores básicos para subconjuntos borrosos como el mínimo y el máximo, -correspondientes a la intersección y unión de conjuntos- se ven afectados por las leyes de la probabilidad, ya que el nivel de pertenencia de un valor x a un subconjunto aleatorio borroso viene dado por una ley de probabilidad. Es decir, si operamos con subconjuntos aleatorios borrosos no podremos hallar, lógicamente, el nivel de pertenencia de un elemento x al conjunto unión, intersección o al conjunto complementario, sino de la probabilidad de que su nivel de pertenencia al conjunto unión, intersección y complementario tome un determinado valor.

De esta forma, sea $x \in X$, y dos subconjuntos borroso aleatorios $\dot{\tilde{A}}$ y $\dot{\tilde{B}}$, para los cuales el nivel de pertenencia de x viene dado por $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x) = \mu_1$ y $\mu_{\dot{\tilde{B}}}(x) = \mu_2$, que son variables aleatorias. Para el operador mínimo, si denotamos como p una medida de probabilidad, se obtiene:

$$p(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = p(\mu_1 = \alpha)\, p(\mu_2 > \alpha) + p(\mu_2 = \alpha)\, p(\mu_1 > \alpha) + p(\mu_1 = \alpha)\, p(\mu_2 = \alpha)$$

Por otra parte, para el operador máximo, los resultados son:

$$p(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = p(\mu_1 = \alpha)\, p(\mu_2 < \alpha) + p(\mu_2 = \alpha)\, p(\mu_1 < \alpha) + p(\mu_1 = \alpha)\, p(\mu_2 = \alpha)$$

y para el complementario obtenemos

$$p\left(\mu_{\dot{\tilde{A}}^C}(x) = \alpha\right) = p(\mu_1 = 1-\alpha)$$

Si $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ y $\mu_{\dot{\tilde{B}}}(x)$ son variables aleatorias continuas, donde notamos como $f_1(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$, y $f_2(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\dot{\tilde{B}}}(x)$, entonces, las funciones de densidad del nivel de presunción resultante de realizar las operaciones mínimo, máximo y complementación son:

$$f(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = f_1(\alpha)\int_\alpha^1 f_2(\mu)d\mu + f_2(\alpha)\int_\alpha^1 f_1(\mu)d\mu$$

$$f(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = f_1(\alpha)\int_0^\alpha f_2(\mu)d\mu + f_2(\alpha)\int_0^\alpha f_1(\mu)d\mu$$

$$f\left(\mu_{\dot{\tilde{A}}^C}(x) = \alpha\right) = f_1(1-\alpha)$$

Asimismo, podemos definir estas operaciones, de forma que se simplifique la notación, a través de las funciones de distribución complementarias de $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ y $\mu_{\dot{\tilde{B}}}(x)$, las cuales notaremos respectivamente como $F_1(\alpha)$ y $F_2(\alpha)$. Para $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$, si ésta es una variable aleatoria discreta, obtenemos $F_1(\alpha)$ como:

$$F_1(\alpha) = \sum_{\forall \mu \geq \alpha} p(\mu)$$

y si $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ es una variable aleatoria continua:

$$F_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f_1(\mu) d\mu$$

De esta forma, podemos hallar las funciones de distribución complementarias de $\mu_1 \wedge \mu_2$, $\mu_1 \vee \mu_2$ y la de $\mu_{\dot{\tilde{A}}^C}(x)$ como:

$$F(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha) F_2(\alpha)$$

$$F(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha) - F_1(\alpha) \cdot F_2(\alpha)$$

$$F\left(\mu_{\dot{\tilde{A}}^C}(x) = \alpha\right) = 1 - F_1(1-\alpha)$$

Por otra parte, para el subconjunto borroso $\dot{\tilde{A}}$ podemos hallar su valor esperado, E[$\dot{\tilde{A}}$], que será un subconjunto borroso ordinario, ya que $\forall x$ su nivel de pertenencia en $\dot{\tilde{A}}$ queda reducido a un valor cierto. De esta forma:

$$\mu_{E\left[\dot{\tilde{A}}\right]}(x) = \int_{0}^{1} \mu f_1(\mu) d\mu$$

Para finalizar, esbozamos el concepto de número aleatorio borroso. Para ello partimos de que para un subconjunto aleatorio borroso $\dot{\tilde{A}}$, podemos generar un subconjuto borroso ordinario para cada uno de los niveles de $\alpha \in [0,1]$, pudiendo estos ser notados como $\tilde{A}^{(\alpha)}$. Para dicho subconjunto definiremos su función de pertenencia como:

$$\mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = F(\alpha)$$

donde notamos como $F(\alpha)$ al valor de la función de distribución complementaria de $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ en $\alpha$.

De esta forma, diremos que $\dot{\tilde{A}}$ será un número aleatorio borroso si $\tilde{A}^{(\alpha)}$ $\forall \alpha$ es un número borroso, es decir, si:

a) El conjunto referencial de $\dot{\tilde{A}}$ son los reales.

b) $\forall \alpha$, $\tilde{A}^{(\alpha)}$ es normal y convexo. Así:

b.1) $\sup_{\forall x \in X} \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = 1 \quad \forall \alpha \in [0,1]$

b.2) $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \alpha \in [0,1]$ $\mu_{\tilde{A}(\alpha)}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \mu_{\tilde{A}(\alpha)}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}(\alpha)}(x_2)$.

## 3.3. LA PROBABILIDAD DE EVENTOS BORROSOS

Para definir el concepto de probabilidad de un evento borroso, empezaremos enunciando para un conjunto probabilizable $\Omega$, donde $\Omega$ es el conjunto de sucesos elementales, el concepto de probabilidad, que es una aplicación tal que:

$$p: \Omega \rightarrow R^+$$
$$A \subset \Omega \rightarrow p(A)$$

donde A es un conjunto nítido de $\Omega$, o un evento nítido.

Los axiomas que rigen a la probabilidad, suponiéndose, en cualquier caso, que los conjuntos que definimos sobre $\Omega$ son booleanos son:

1) $p(A) \geq 0$
2) $\forall A \in \Omega$ y $\forall B \in \Omega$ y $A \cap B = \varnothing$
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estos axiomas, deducimos fácilmente las siguientes propiedades:

4) $p(\varnothing) = 0$
5) $p(A^C) = 1 - p(A)$
6) $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$
7) Si $B \subset A \Rightarrow p(B) \leq p(A)$

Zadeh (1968) denomina como evento borroso a un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido sobre el conjunto de sucesos elementales $\Omega$. Por supuesto, para $\tilde{A}$ la pertenencia de un elemento $\omega \in \Omega$ tiene asignado un nivel de verdad que vendrá dado por su función característica, $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$. Zadeh propone hallar la probabilidad de un evento borroso, $p(\tilde{A})$, como:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(\omega) p(\omega)$$

Si el conjunto referencial sobre el que definimos la distribución de probabilidad fueran los números reales, es decir $\Omega \subset R$ y si para éste denotamos como un suceso elemental al número crisp x, la probabilidad del evento borroso $\tilde{A}$ será, en general:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) dF(x)$$

donde F(x) es la función de probabilidad acumulada. Si el conjunto $\Omega$ es discreto, y denotamos como p(x) a la probabilidad de un elemento x, entonces:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) p(x)$$

y si es continuo:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) f(x) dx$$

La probabilidad definida para eventos borrosos cumple asimismo los axiomas de la probabilidad:

1) $p(\tilde{A}) \geq 0$
2) $\forall \tilde{A} \in \Omega$ y $\forall \tilde{B} \in \Omega$ si $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset \Rightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\omega) = \mu_{\tilde{A}}(\omega) \wedge \mu_{\tilde{B}}(\omega) = 0 \ \forall \omega$

   $p(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = p(\tilde{A}) + p(\tilde{B})$
3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estas propiedades se deduce fácilmente:

4) $p(\emptyset) = 0$
5) $p(\tilde{A}^C) = 1 - p(\tilde{A})$, donde $\mu_{\tilde{A}^c}(\omega) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\omega)$
6) $p(\tilde{A}) + p(\tilde{B}) = p(\tilde{A} \cap \tilde{B}) + p(\tilde{A} \cup \tilde{B})$, donde $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\omega) = \mu_{\tilde{A}}(\omega) \vee \mu_{\tilde{B}}(\omega)$
7) Si $\tilde{B} \subset \tilde{A} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(\omega) \geq \mu_{\tilde{B}}(\omega) \ \forall \omega$, se cumple que $p(\tilde{B}) \leq p(\tilde{A})$

## 3.4. NÚMEROS HÍBRIDOS

Sobre el concepto de número híbrido, del que daremos a continuación unos breves apuntes, puede consultarse, para una exposición más detallada, Kaufmann y Gupta (1985), Kaufmann (1986a) o Kaufmann *et al.* (1994).

Un número híbrido se construye sumando a una cuantía borrosa –siendo su representación por excelencia un número borroso- y que denotaremos por $\tilde{A}$, una cuantía aleatoria M. A un número híbrido lo notaremos por el par ($\tilde{A}$, M) donde:

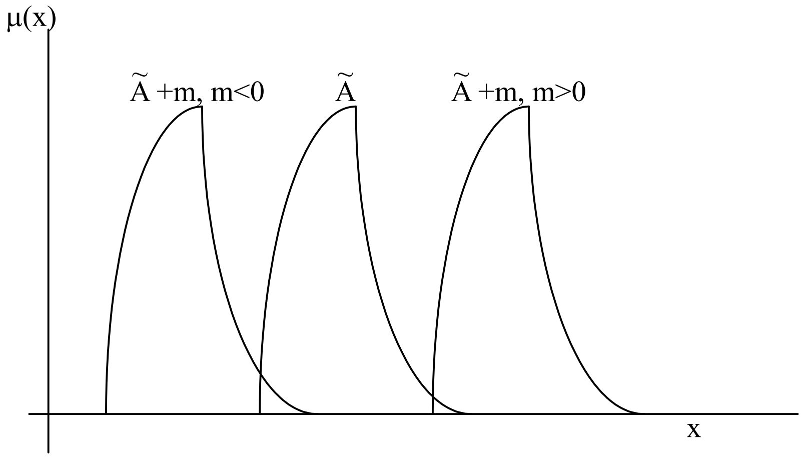
$$(\tilde{A}, M) = \tilde{A} + M$$

donde $\tilde{A}$, por ser un número borroso, viene caracterizado por:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$

y M, por ser una variable aleatoria, que supondremos que es continua, viene caracterizada por su función de densidad f(m).

Para una determinada realización de M, m, obtenemos la suma de un número borroso con una constante, $\tilde{A}$+m –lo que muchos autores denominan "traslación"-, operación que puede ser representado gráficamente como:




De esta forma:

$$\mu_{\tilde{A}+m}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x - m)$$

y

$$A_\alpha + m = [A^1(\alpha) + m, A^2(\alpha) + m]$$

De esta forma, la suma $A_\alpha$ + M es un intervalo de confianza aleatorio, siendo para una realización $A_\alpha$ + m, la correspondiente a la que toma m en la variable aleatoria de la que proviene, f(m). De esta forma:

$$f(A_\alpha + m) = f([A^1(\alpha)+m, A^2(\alpha)+m)]) = f(m)$$

Por otra parte, la suma de dos números híbridos ($\tilde{A}_1$, $M_1$) y ($\tilde{A}_2$, $M_2$) cuya resultante es otro número híbrido que notamos como ($\tilde{A}$, M), se realiza de la siguiente forma:

$$(\tilde{A}, M) = (\tilde{A}_1, M_1) + (\tilde{A}_2, M_2) = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, M_1 +' M_2)$$

Donde como "+" notamos a la suma realizada mediante la convolución maxmin, y como " +' " a la suma realizada mediante la convolución suma-producto. De esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ se hallará a través de $\mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$ y $\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)$ como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{x=x_1+x_2} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right)$$

Y la función de densidad de M, f(m), se halla a través de la de $M_1$, $f_1(m_1)$ y de la de $M_2$, $f_2(m_2)$, de forma que:

$$f(m) = \int_R f_1(m - m_2) f_2(m_2) dm \;= \int_R f_1(m_1) f_2(m - m_1) dm$$

Así, un número borroso $\tilde{A}$, es un caso particular de un número híbrido $\tilde{A} = (\tilde{A}, 0)$, siendo 0 un número cierto donde su distribución de probabilidad es:

$$p(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una variable aleatoria M es un caso particular de número híbrido (0, M). En este caso, la función de pertenencia del número cierto 0 es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## 3.5. HAZ DE NÚMEROS BORROSOS

Sobre el concepto de haz de números borrosos, puede ser consultado por ejemplo, en Kaufmann y Gupta (1985) o Kaufmann *et al.* (1994). Un haz de números borrosos es un instrumento que generaliza el concepto de variable aleatoria. Así, para definir el concepto de haz partiremos de la definición de variable aleatoria. Una variable aleatoria se construye realizando una aplicación sobre el conjunto de sucesos elementales $\Omega$:

$$X: \Omega \rightarrow R$$

$$\omega \in \Omega \rightarrow x = X(\omega)$$

Así X es una variable aleatoria porque involucra los resultados del espacio muestral y, asimismo, X es una función de realizaciones reales, es decir, transforma todos los posibles resultados de Ω, ω, en puntos sobre la recta de los reales.

Un haz de números borrosos generaliza el concepto de variable aleatoria, porque en este caso, mediante la función X(ω) no hacemos corresponder a ω una valor real x, sino un número borroso $\widetilde{A}_\omega$, que es un caso más general de número cierto. Así, $\widetilde{A}_\omega$ puede ser representado como:

$$\widetilde{A}_\omega = \left\{x, \mu_{\widetilde{A}_\omega}(x)\right\} = \left\{A_\omega = \left[A^1_\omega(\alpha), A^2_\omega(\alpha)\right] \mid 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

Bien es cierto que no podemos afirmar que el fin último de un haz de números borrosos sea generalizar el concepto de variable aleatoria, sino crear una herramienta que sea útil para la agregación, de forma objetiva, de estimaciones realizadas por expertos –por lo tanto, subjetivas- cuya representación se realiza a través de números borrosos. Por supuesto, con dicha agregación se pretende obtener una estimación subjetiva que represente a la de todos lo expertos, y por tanto sea más fiable que la de cada uno de ellos. Una aplicación importante de un haz de números borrosos se encuentra en el ámbito de los métodos de previsión borrosos, como por ejemplo en el sistema Fuzzy-Delphi, que generaliza el método Delphi convencional, y es desarrollado por Kaufmann y Gil Aluja (1986).

Si suponemos que el espacio muestral está forma por los expertos, siendo entonces Ω={1,2,...,i,...,n}, para la i-ésima realización de dicho espacio, es decir, la opinión emitida por el i-ésimo experto, esta queda cuantificada no por un valor real x, sino por un número borroso $\widetilde{A}_i$, i=1,2,...,n, donde:

$$\widetilde{A}_i = \left\{x_i, \mu_{\widetilde{A}_i}(x_i)\right\} = \left\{A_i = \left[A^1_i(\alpha), A^2_i(\alpha)\right] \mid 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

Las probabilidades de {1,2,...,i,...,n}, {$p_1$, $p_2$, ...,$p_i$,...,$p_n$} pueden venir dadas por la importancia que se asigne a cada experto, donde en cualquier caso $\sum_{i=1}^{n} p_i$ =1, de forma que la probabilidad o peso probabilístico que se da a $\widetilde{A}_i$ es $p_i$. Asimismo, si otorgamos a todos los expertos el mismo peso probabilístico –les asignamos la misma fiabilidad-, $p_i = \frac{1}{n}, i = 1,2,...,n$ .

La agregación de todas las estimaciones se realizará a través del número borroso medio, $\overset{m}{\widetilde{A}}$, que deberá ser hallado en el caso en que $p_i = \frac{1}{n}$:

$$\overset{m}{\widetilde{A}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i$$

Cuya función de pertenencia vendrá dada por:

$$\mu_{\overset{m}{\widetilde{A}}}(x) = \bigvee_{x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2) \wedge ... \wedge \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right)$$

y sus $\alpha$-cortes:

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i^1(\alpha), \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} A_i^2(\alpha)\right]$$

Asimismo, si no asignamos la misma probabilidad a todos los expertos, es decir, discriminamos entre expertos más fiables y menos fiables, el número borroso medio $\overset{m}{\widetilde{A}}$ se halla como:

$$\overset{m}{\widetilde{A}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \widetilde{A}_i$$

Siendo su función de pertenencia, $\mu_{\overset{m}{\widetilde{A}}}(x)$:

$$\mu_{\overset{m}{\widetilde{A}}}(x) = \bigvee_{x=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \left(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2) ... \wedge \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right)$$

y sus $\alpha$-cortes:

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i A_i^1(\alpha), \sum_{r=1}^{n} p_i A_i^2(\alpha)\right]$$

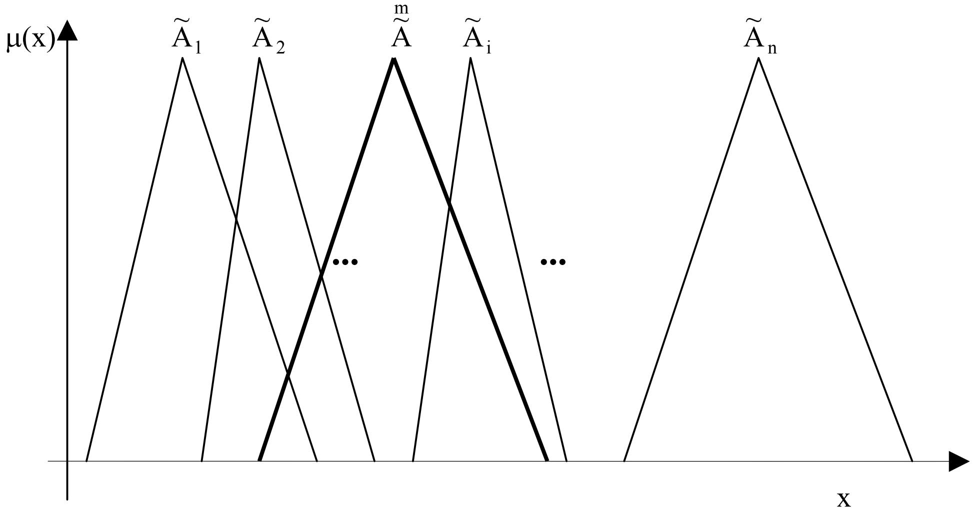
Una forma sencilla y razonable de expresar las estimaciones de los expertos es cuantificarlos mediante números trapezoidales o triangulares, de forma que, en el primer caso –más general-, vendrán dadas por las cuartetas $\widetilde{A}_i = \left(a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4\right)$, i=1,2,...,n. En este caso, el número borroso que agrega todas las opiniones, $\overset{m}{\widetilde{A}}$, también será trapezoidal –o triangular-. En concreto, si asignamos la misma probabilidad a todos los expertos:

$$\overset{m}{\widetilde{A}} = \left( \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^3, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \right)$$

y de forma más general, si consideramos que los distintos opinantes merecen distinta confianza:

$$\overset{m}{\widetilde{A}} = \left( \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^1, \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2, \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^3, \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^4 \right)$$

Finalmente representamos el concepto de haz y de número borroso medio en la siguiente figura:




### 3.6. VARIABLES BORROSO ALEATORIAS

#### 3.6.1. Conceptos y definiciones

El concepto de variable borroso aleatoria ha sido desarrollado, de forma dispersa en diferentes trabajos, siendo los más representativos Kwakernaak (1978) y (1979), Nahmias (1979), Puri y Ralescu (1986) y Kruse y Meyer (1987). En ellos se analiza como trasponer y generalizar a las variables aleatorias y los conceptos que de dicho instrumento se derivan al caso en que las realizaciones de la misma sean subconjuntos borrosos en R. Como la herramienta por excelencia para expresar cuantías borrosas son los números borrosos, nosotros únicamente analizaremos el caso en que las realizaciones de las variables borroso aleatorias sean números borrosos.

Una variable borroso aleatoria se construye realizando la siguiente aplicación sobre el conjunto de sucesos elementales Ω, sobre los que se ha definido una ley de probabilidad:

$$\widetilde{X} : \Omega \to F(R)$$

$$\omega \in \Omega \to \widetilde{A}_\omega$$

donde F(R) es el conjunto de números borrosos y $\tilde{A}_\omega$ es el número borroso asociado al suceso elemental ω, y por tanto, puede venir representado por:

$$\tilde{A}_\omega = \{x, \mu_{\tilde{A}_\omega}(x)\} = \{A_\omega = [A^1_\omega(\alpha), A^2_\omega(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$

En nuestro caso, únicamente estudiaremos las variables borroso aleatorias discretas, y que provienen de un espacio de sucesos elementales $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,...,\omega_i,...,\omega_n\}$. Así, para $\omega_i$, el número borroso asociado a dicho suceso será notado como $\tilde{A}_i$, donde:

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)\} = \{A_{i_\alpha} = [A^1_i(\alpha), A^2_i(\alpha)] \mid 0 \le \alpha \le 1\},\ i=1,2,...,n.$$

A partir de las posibles realizaciones en que pueden concretarse cada uno de los sucesos, podemos definir dentro de $\tilde{X}$, variables aleatorias convencionales, X, cuyas realizaciones son $\{x_1, x_2,...,x_n\}$ y que deben llevar aparejadas consigo un nivel de presunción. Así, podemos hallar la función característica de una variable borroso aleatoria $\tilde{X}$, $\mu_{\tilde{X}}(X)$, como:

$$\mu_{\tilde{X}}(X) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)$$

que indicará el grado de verdad con que la variable aleatoria X reconstruye a la variable borroso aleatoria $\tilde{X}$.

Normalmente, como hemos comprobado a lo largo de todo este capítulo, cuando debamos manipular subconjuntos borrosos suele ser difícil trabajar con funciones de pertenencia, y en cambio es mucho más fácil trabajar con conjuntos de nivel,. De esta forma, podemos definir a $\tilde{X}$ a través de los conjuntos de nivel asociados a los α-cortes de $\tilde{A}_i$, i=1,2,...,n. Así, los α-cortes de $\tilde{X}$, $X_\alpha$, son aquéllas variables aleatorias cuyas realizaciones son:

$$X_\alpha = \{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \ge \alpha\}$$

Así, para $X_\alpha$, definimos como variable aleatoria inferior, $X^1(\alpha)$ aquélla que sus realizaciones son los extremos inferiores de los α-cortes de $A_{i\alpha}$, i=1,2,...n., y como variable aleatoria superior, $X^2(\alpha)$ aquélla cuyas realizaciones son sus extremos superiores. Así:

$$X^1(\alpha) = \inf\{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \ge \alpha\} = A^1_i(\alpha),\ \text{con } p_i, i = 1,2,...,n$$

$$X^2(\alpha) = \sup\{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \ge \alpha\} = A^2_i(\alpha), \text{con } p_i, i = 1,2,...,n$$