CAPÍTULO 4:

VALORACIÓN FINANCIERA CON INTERESES BORROSOS

4.1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones de la valoración financiera es hallar el precio en un momento dado de cualquier derecho u obligación económico, por tanto traducibles a un devengo de cuantías monetarias con un diferimiento futuro, teniéndose en cuenta el grado de preferencia por la liquidez que exigirá el valorador hasta el devengo de dichas cuantías. El instrumento por excelencia de la valoración financiera es el interés compuesto, y será por tanto este instrumento de valoración el que analizaremos nosotros en este apartado, suponiéndose que el interés de valoración viene estimado por números borrosos.

Como ya comentamos en la introducción de la tesis, en el análisis económico en general y en en el financiero en particular, resulta en muchas ocasiones imposible recoger con precisión y certeza los hechos y las variables que influyen en el fenómeno de estudio, surgiendo entonces la necesidad de trabajar con datos estimados de forma subjetiva por parte del decisor. Creemos que en estos casos, es mucho más realista modelizar las estimaciones subjetivas a través de números borrosos que a través de probabilidades subjetivas, que es lo que tradicionalmente se ha venido utilizando en estos casos. Abundando en esta afirmación y respecto al uso de la estadística en la matemática financiera para modelizar la incertidumbre, en Rodríguez (1984, p.20) se indica: "*El análisis de la incertidumbre financiera exige el uso de una metodología adecuada. Los métodos estadísticos suponen una importante colaboración a este respecto. No obstante, no parece que tales métodos hayan cubierto plenamente el reto metodológico planteado por la incertidumbre a las ciencias del comportamiento humano, entre las que se insertan las económicas*".

En nuestro caso, el análisis se centrará en la valoración financiera de cuantías ciertas, que será el supuesto en el que nos encontraremos a lo largo de la tesis, cuando el decisor estima el grado de preferencia por la liquidez en el futuro a través de números borrosos. En todos los casos supondremos que el régimen financiero utilizado para realizar dicha valoración, tal como ya se ha comentado es el interés compuesto.

En la actualidad, existen numerosos trabajos que estudian la valoración financiera mediante interés compuesto, cuando varias de las magnitudes que intervienen en el proceso de valoración vienen dadas a través de números borrosos. En Kaufmann (1986b), Kaufmann y Gil Aluja (1986) y Gil Aluja (1998) se analiza la valoración con interés compuesto aplicada a la selección de proyectos de inversión cuando una o varias de las variables asociadas a dicho proyecto o al ambiente económico en que se desarrollará (beneficios, coste de capital, inflación, etc.) vienen estimados subjetivamente a través de números borrosos. En Buckley (1987) se estudia la valoración financiera de cuantías y de rentas constantes, cuando las cuantías, el tipo de interés y/o los diferimientos de las primeras vienen dados por números borrosos. Jiménez (1996), adicionalmente analiza la valoración de rentas variables en progresión geométrica con datos borrosos, pero supone certeza en los vencimientos de los capitales. Por otra parte, Terceño (1995), sistematiza y analiza la valoración financiera no tan sólo con interés compuesto, sino también con otros regímenes típicos en la práctica como el descuento compuesto, interés simple vencido, y cuando cualquiera de las magnitudes que intervienen en la valoración es borrosa. Adicionalmente, en dicho trabajo se construye una teoría de valoración de rentas financieras con interés compuesto, que contempla la borrosidad en cualquiera de las variables características de las mismas (interés de valoración, número de términos, la razón de variación de la renta si los términos de la renta varían en progresión geométrica o aritmética, etc.). Finalmente, en Li Calzi (1990) se estudia, de forma más general, las propiedades de los factores de descuento y capitalización cuando estos son borrosos.

Ya en el campo financiero-actuarial, aunque de forma menos exhaustiva que en el campo estrictamente financiero, también diversos autores han introducido la incertidumbre en el interés de valoración modelizándolo mediante números borrosos. Entre ellos podemos mencionar a Lemaire (1990), Ostasiewski (1993), Terceño *et al.* (1996), Betzuen *et al.* (1997) o Bonet *et al.* (1999).

En este apartado, expondremos algunas cuestiones ya resueltas en los trabajos reseñados anteriormente sobre valoración estrictamente financiera. Éstos resultados serán utilizados posteriormente en las siguientes dos partes de la tesis. Dada la abundancia de trabajos producidos en este campo introduciendo la incertidumbre mediante los instrumentos de la teoría de los subconjuntos borrosos, no tan sólo creemos que la matemática financiera –no tanto la actuarial- ha dejado de ser un campo donde se debe estudiar la transposición de sus conceptos a un ambiente difuso, sino que lo que podríamos denominar como “matemática financiera borrosa” se ha convertido en un instrumento más de los que proporciona la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, en este caso para modelizar fenómenos financieros. Es por esta razón por la que algunos de sus conceptos son expuestos en esta primera parte de la tesis, que es instrumental.

En concreto nosotros analizaremos las siguientes dos cuestiones, donde únicamente introduciremos la borrosidad en el interés de valoración:

a) Análisis del factor de descuento con interés compuesto y difuso, y su aproximación triangular cuando los intereses de valoración vienen dados por números borrosos triangulares.
b) El cálculo del valor actual de rentas y de forma más particular de rentas constantes y variables en progresión geométrica, cuando las cuantías sean ciertas pero sean valoradas con interés borroso. Debemos reseñar que es un supuesto muy habitual en la práctica financiera que las cuantías a descontar sean ciertas aunque el interés futuro no lo sea, y adicionalmente que la problemática que abordaremos contemplará únicamente esta circunstancia. También estudiaremos la conveniencia de la aproximación triangular del valor actual de dichas rentas cuando el interés de valoración sea triangular.

4.2. ANÁLISIS DEL FACTOR DE DESCUENTO CON INTERÉS BORROSO

4.2.1. Planteamiento general

Partiremos de que el decisor estima el interés a aplicar para los periodos de los que consta su horizonte planificador, que son t periodos enteros de duración P años, a través de un conjunto de tantos efectivos de la misma periodicidad y frecuencia que vienen dados por:

$$\tilde{i}_r = \{x, \mu_{\tilde{i}_r}(x)\} = \{i_{r_\alpha} = [i_r^1(\alpha), i_r^2(\alpha)], 0 \le \alpha \le 1\},\ r=1,2,...,t.$$

siendo $\tilde{i}_r$ el tanto efectivo a aplicar durante el periodo r-ésimo.

Así, en el caso en que $\tilde{i}_r = \tilde{i}_{r+1} = \tilde{i}\ \ \forall r$, estaríamos suponiendo que el interés correspondiente a cada año se mantiene "constante", lo cual, por otra parte, es bastante habitual en la práctica financiera.

A partir de los intereses de cada uno de los diferentes períodos podemos expresar el factor de actualización correspondiente a una cuantía con vencimiento en t periodos, es decir, tP años, $\tilde{f}_t$ (o lo que es lo mismo, el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento en el periodo t) como:

$$\tilde{f}_t = \prod_{r=1}^{t} \left(1 + \tilde{i}_r\right)^{-1}$$

De esta forma, la función de pertenencia del factor de actualización será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \bigvee_{x=\prod_{r=1}^{t}(1+x_t)^{-1}} \left(\bigwedge_{r=1}^{t} \mu_{i_r}(x_t) \right)$$

Es inmediato comprobar que los α-cortes del factor de actualización son, dada la relación monótona decreciente entre los intereses correspondientes a cada periodo y el factor de descuento:

$$f_{t\alpha} = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] = \left[\prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^2(\alpha)\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^1(\alpha)\right)^{-1} \right]$$

En el caso en que el interés estimado sea el mismo número borroso para todos los años, podemos obtener el factor de actualización para una cuantía que venza dentro de t periodos como:

$$\tilde{f}_t = \prod_{r=1}^{t} \left(1 + \tilde{i}_r\right)^{-1} = \left(1 + \tilde{i}\right)^{-t}$$

Su función de pertenencia se hallará inmediatamente sin más que plantear:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}}\left(x^{-\frac{1}{t}} - 1 \right)$$

y sus α-cortes son en este caso:

$$f_{t\alpha} = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] = \left[\left(1 + i^2(\alpha)\right)^{-t}, \left(1 + i^1(\alpha)\right)^{-t} \right]$$

De esta forma, el valor actual de la cuantía que vence dentro de t periodos, C_t, se hallará fácilmente sin más que multiplicarla por el factor de actualización asociada al vencimiento de la misma. Si denominamos a dicho valor como $\tilde{Z}_t$, este se obtendrá como: $\tilde{Z}_t = C_t \tilde{f}_t$. Así, es fácil hallar su función de pertenencia a través de la función de pertenencia del factor de actualización, resultando:

$$\mu_{\tilde{Z}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{C_t} \right)$$

igualmente hallaremos sus α-cortes de la forma $Z_{t\alpha} = C_t f_{t\alpha}$, cuyo resultado es inmediato ya que se trata del producto de una constante positiva por un intervalo de confianza, cuyos valores son positivos.

4.2.2. Análisis del factor de descuento cuando el interés a aplicar viene estimado a través de números borrosos triangulares

En este caso, podemos representar el interés estimado para cada uno de los r periodos que comprenden el horizonte de valoración como un número borroso triangular variable $\widetilde{i}_r = \left(i_r^1, i_r^2, i_r^3\right)$, $r = 1,2,...,t$, siendo el valor de máxima presunción para el interés correspondiente al r-ésimo periodo i_r^2, y los valores que como máximo y como mínimo consideramos que pueden tomar dicho interés i_r^3 e i_r^1.

Si el interés es variable no podemos obtener la expresión analítica de la función de pertenencia de $\widetilde{f}_t$. Sin embargo, si que podemos hallar sus α-cortes, sin más que sustituir $i_r^1 + \left(i_r^2 - i_r^1\right)\alpha$ y $i_r^3 - \left(i_r^3 - i_r^2\right)\alpha$, r=1,2,...,t en los extremos superiores e inferiores del factor de actualización. Estos serán, pues:

$$f_{t\alpha} = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] = \left[\prod_{r=1}^{t}\left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t}\left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-1}\right]$$

En el caso en que supongamos que el interés correspondiente a cada período se mantiene "constante", es decir, éste es $\widetilde{i} = \left(i^1, i^2, i^3\right)$ para todos los periodos, si que podemos obtener su función de pertenencia y sus α-cortes. La función de pertenencia es:

$$\mu_{\widetilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{i^3 + 1 - x^{-1/t}}{i^3 - i^2} & (1+i^3)^{-t} \le x < (1+i^2)^{-t} \\ \dfrac{x^{-1/t} - 1 - i^1}{i^2 - i^1} & (1+i^2)^{-t} \le x < (1+i^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α-cortes:

$$f_{t\alpha} = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] = \left[\left(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha\right)^{-t}, \left(1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha\right)^{-t}\right]$$

De esta forma, el valor actual de C_t unidades monetarias con vencimiento en t años, $\widetilde{Z}_t$, podrá ser expresado únicamente a través de sus α-cortes si el interés es variable. Por otra parte, si dicho interés es constante, la obtención de su función de pertenencia y la expresión de sus α-cortes es inmediata.

4.2.3 Aproximación triangular del factor de actualización cuando los intereses futuros vienen dados por números borrosos triangulares

4.2.3.1. Aproximación triangular del factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es variable a lo largo del tiempo

En muchas ocasiones será de gran utilidad poder aproximar el factor de descuento mediante un número borroso triangular, si los intereses correspondientes a cada periodo vienen dados por números borrosos triangulares. Por ejemplo, tanto el valor actual de una cuantía futura cierta como el valor actual de una renta cierta podrán ser fácilmente expresados como números borrosos triangulares, ya que los números borrosos resultantes del producto de un números borroso triangular por un número real y de la suma de números borrosos triangulares mantienen la naturaleza triangular de los números borrosos de los que partimos.

Para comprobar la calidad de la aproximación triangular, seguiremos la metodología expuesta en el apartado 1.4.2. De esta forma estamos aceptando, implícitamente, que las características representativas del número borroso que aproximamos por uno triangular son su soporte y su núcleo. Así el número borroso triangular que aproxime el factor de descuento deberá tener el mismo 0-corte y el mismo 1-corte que el original. Es decir, proponemos una aproximación triangular al factor de descuento que venga dada por la tripleta:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t{}' = \left(\prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^3\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^2\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^1\right)^{-1} \right)$$

El error que cometemos al estimar los extremos de los α-cortes del factor de actualización tomando la aproximación triangular dependerá del nivel de presunción α que establezcamos para su cálculo. Así, la desviación que se produce a la izquierda por tomar $f_t{}'$, $D_{It}(\alpha)$ y la que se produce a la derecha por tomar dicha aproximación, $D_{Dt}(\alpha)$ serán funciones de α cuya expresión es:

$$D_{It}(\alpha) = \left| f_t^1(\alpha) - f'^1_t(\alpha) \right| = \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^3\right)^{-1} + \left[\prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^2\right)^{-1} - \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^3\right)^{-1} \right] \alpha - \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^{-1}$$

$$D_{Dt}(\alpha) = \left| f_t^2(\alpha) - f'^2_t(\alpha) \right| = \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^1\right)^{-1} - \left[\prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^1\right)^{-1} - \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^2\right)^{-1} \right] \alpha - \prod_{r=1}^{t} \left(1+i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-1}$$

Podemos observar que a pesar de eliminar el indicador de valor absoluto, las desviaciones definidas son siempre positivas para $\alpha \in (0,1)$. Notemos a los extremos de los α-cortes de $\tilde{f}_t$, $f_t^1(\alpha)$ o $f_t^2(\alpha)$ como $f_t(\alpha)$, y a los extremos de los α-cortes del número borroso triangular que los aproxima $\tilde{f}_t'$, $f_t^1{}'(\alpha)$ o $f_t^2{}'(\alpha)$ como $f_t'(\alpha)$. Podemos observar que los α cortes que se obtienen con la aproximación triangular son:

$$f'_t(\alpha) = \alpha f_t(1) + (1-\alpha) f_t(0),\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Entonces, dado que $\frac{d^2 f_t(\alpha)}{d\alpha^2} \ge 0$, (son funciones conexas), se cumple que:

$$f'_t(\alpha) = \alpha f_t(1) + (1-\alpha) f_t(0) = f_t(0) + \alpha[f_t(1) - f_t(0)] \ge f_t[1 \cdot \alpha + (1-\alpha) \cdot 0] = f_t(\alpha)$$

Demostremos ahora que $\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2} \ge 0$ y $\frac{d^2 f_t^2(\alpha)}{d\alpha^2} \ge 0$.

Para $\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha}$, se obtiene:

$$\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{r=1}^{t} (i_r^3 - i_r^2)\left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)á\right)^{-2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \ne r}}^{t} \left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)á\right)^{-1}$$

y la derivada del r-ésimo sumando de $\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha}$ es:

$$2(i_r^3 - i_r^2)^2 \left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^{-3} \prod_{\substack{s=1 \\ s \ne r}}^{t} \left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha\right)^{-1} +$$

$$+ (i_r^3 - i_r^2)\left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^{-2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \ne r}}^{\tau} (i_s^3 - i_s^2)\left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha\right)^{-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne s \\ j \ne r}}^{t} \left(1 + i_j^3 - (i_j^3 - i_j^2)\alpha\right)^{-2}$$

que es siempre positivo, por lo que la suma de los t sumandos que componen $\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2}$ también es positiva, es decir:

$$\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2} \ge 0.$$

Para $\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha}$ se obtiene:

$$\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha} = -\sum_{r=1}^{t}(i_r^2 - i_r^1)\left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-2}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{t}\left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-1}$$

y la derivada del r-ésimo sumando de $\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha}$ es:

$$2(i_r^2 - i_r^1)^2\left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{t}\left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-1} +$$

$$+ (i_r^2 - i_r^1)\left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-2}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{t}(i_s^2 - i_s^1)\left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s\\ j\neq r}}^{t}\left(1 + i_j^1 + (i_j^2 - i_j^1)á\right)^{-1} \geq 0$$

es decir, es positivo, por lo que $\frac{d^2 f_t^2(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0$.

Para hallar el máximo error que en el nivel de pertenencia de un valor se comete por realizar la aproximación triangular, deberemos hallar el máximo global de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$, es decir, el nivel de presunción en el que se comete el máximo error en los extremos izquierdos de los α-cortes, $\alpha_I^* \in]0,1[$, cuyo valor notaremos como $D_I^*(t) = D_{It}(\alpha_I^*)$ y el máximo de $D_{Dt}(\alpha)$, que se comete en α_D^*, siendo este máximo notado por $D_D^*(t) = D_{Dt}(\alpha_D^*)$.

Es inmediato comprobar que ambas funciones poseen un máximo local y global α_I^*, $\alpha_D^* \in]0,1[$. Lo demostraremos únicamente para la función $D_{It}(\alpha)$, ya que para la desviación a la derecha, $D_{Dt}(\alpha)$, la demostración es análoga.

1) Podemos comprobar que $D_{It}(0) = D_{It}(1) = 0$ y que dicha función cumple los requisitos de continuidad y derivabilidad exigidos por el teorema de Rolle. Así, podemos asegurar la existencia de un punto crítico $\alpha_I^* \in [0,1]$, es decir $\frac{dD_{It}(\alpha)}{d\alpha}\left(\alpha_I^*\right) = 0$.

2) Dado que la función que analizamos es estrictamente cóncava, ya que $f_t^1(\alpha)$ es estrictamente convexa, por el teorema local-global, queda demostrado que α_I^* es un máximo global estricto de $D_{It}(\alpha)$, ya que el hecho de que sea estacionario es condición suficiente para su optimalidad.

Para hallar α_I^* y α_D^* deberemos resolver finalmente las siguientes ecuaciones

$$\prod_{r=1}^{t}\left(1+i_r^2\right)^{-1}-\prod_{r=1}^{t}\left(1+i_r^3\right)^{-1}-\sum_{r=1}^{t}(i_r^3-i_r^2)\left(1+i_r^3-(i_r^3-i_r^2)\alpha_I^*\right)^{-2}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{t}\left(1+i_s^3-(i_s^3-i_s^2)\alpha_I^*\right)^{-1}=0$$

$$\prod_{r=1}^{t}\left(1+i_r^1\right)^{-1}-\prod_{r=1}^{t}\left(1+i_r^2\right)^{-1}-\sum_{r=1}^{t}(i_r^2-i_r^1)\left(1+i_r^1-(i_r^2-i_r^1)\alpha_D^*\right)^{-2}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{t}\left(1+i_s^1-(i_s^2-i_s^1)\alpha_D^*\right)^{-1}=0$$

Así, el error que podemos cometer como máximo en el nivel de pertenencia por tomar como número borroso representativo del valor actual de 1 unidad monetaria con vencimiento en t a $\tilde{f}_t'$ en lugar de $\tilde{f}_t$ vendrá acotado, tal como comprobamos en el apartado 1.4.2. por:

$$\left|\mu_{\tilde{f}_t}(x)-\mu_{\tilde{f}_t'}(x)\right|\leq \mathrm{Max}\left\{\frac{D_I^*(t)}{f_t^1(1)-f_t^1(0)},\frac{D_D^*(t)}{f_t^2(0)-f_t^2(1)}\right\}=\varepsilon_t\ \forall x.$$

El problema que se nos presenta a continuación es que no es posible dar una expresión analítica a α_I^* y α_D^*. Para ello, deberíamos aplicar algún método numérico que nos permitiera aproximar la raíz de la función derivada que estudiamos, como por ejemplo el método de Newton-Rapson. La alternativa que proponemos nosotros es el análisis a través de polinomios interpolantes, y ya utilizada para un problema similar en Terceño *et al.* (1994). Para ello analizaremos la tabla de diferencias de los extremos de los α-cortes de los factores de actualización tomando valores de su argumento, α, equidistantes para intentar aproximar los α-cortes a través de un polinomio, de forma que a partir del orden de las diferencias en los que éstas sean constantes, nos indicará que grado del polinomio a aproximar es precisamente igual al orden donde esto ocurre.

A continuación realizamos una aplicaciones numéricas siguiendo esta metodología, donde $\Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i=0'1$, por lo que i=0,1,...,10 y $\alpha_0 = 0$. Asimismo analizamos el caso en que la periodicidad de valoración sea anual y que los intereses que el decisor estima vengan dados por los números borrosos triangulares (0'015+0'005(r-1), 0'02+0'005(r-1), 0'025+0'005(r-1)), r=1,2,...,10, siendo el interés a aplicar a partir del décimo año el número borroso triangular constante (0'06, 0'065, 0'07). Posteriormente analizamos el comportamiento de los factores de actualización para cuantías con vencimiento a 3, 5, 15 y 50 años, y su aproximación triangular. En primer lugar calculamos las diferencias de los extremos de los α-cortes hasta un segundo orden. Para $\tilde{f}_3$ se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,915163	0,942345	0,001334	-0,001384	0,000003	0,000003

0'1	0,916497	0,940961	0,001337	-0,001382	0,000003	0,000003
0'2	0,917834	0,939579	0,001339	-0,001379	0,000003	0,000003
0'3	0,919173	0,938200	0,001342	-0,001376	0,000003	0,000003
0'4	0,920515	0,936823	0,001344	-0,001374	0,000003	0,000003
0'5	0,921860	0,935450	0,001347	-0,001371	0,000003	0,000003
0'6	0,923207	0,934079	0,001350	-0,001368	0,000003	0,000003
0'7	0,924556	0,932710	0,001352	-0,001366	0,000003	0,000003
0'8	0,925909	0,931345	0,001355	-0,001363	0,000003	0,000003
0'9	0,927264	0,929982	0,001358	-0,001360		
1	0,928622	0,928622				

Para el factor de actualización a cinco años, los resultados son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,842071	0,883959	0,002037	-0,002153	0,000006	0,000006
0'1	0,844108	0,881807	0,002043	-0,002147	0,000006	0,000006
0'2	0,846151	0,879660	0,002049	-0,002140	0,000006	0,000006
0'3	0,848200	0,877519	0,002055	-0,002134	0,000006	0,000006
0'4	0,850255	0,875385	0,002061	-0,002128	0,000006	0,000006
0'5	0,852316	0,873257	0,002067	-0,002122	0,000006	0,000006
0'6	0,854383	0,871136	0,002073	-0,002116	0,000006	0,000006
0'7	0,856456	0,869020	0,002079	-0,002109	0,000006	0,000006
0'8	0,858534	0,866911	0,002085	-0,002103	0,000006	0,000006
0'9	0,860619	0,864808	0,002091	-0,002097		
1	0,862710	0,862710				

Para el factor de actualización con vencimiento a 15 años los resultados de las primeras y segundas diferencias de los α-cortes son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,448693	0,517614	0,003203	-0,003702	0,000024	0,000028
0'1	0,451895	0,513912	0,003227	-0,003673	0,000025	0,000028
0'2	0,455122	0,510239	0,003252	-0,003645	0,000025	0,000028
0'3	0,458374	0,506593	0,003276	-0,003618	0,000025	0,000028
0'4	0,461650	0,502976	0,003301	-0,003590	0,000025	0,000027
0'5	0,464952	0,499386	0,003327	-0,003563	0,000025	0,000027
0'6	0,468278	0,495823	0,003352	-0,003536	0,000026	0,000027
0'7	0,471630	0,492287	0,003378	-0,003509	0,000026	0,000027
0'8	0,475008	0,488778	0,003403	-0,003482	0,000026	0,000026
0'9	0,478411	0,485296	0,003429	-0,003456		
1	0,481841	0,481841				

Y si el vencimiento son 50 años, se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,042026	0,067344	0,000998	-0,001576	0,000024	0,000038
0'1	0,043024	0,065768	0,001022	-0,001539	0,000025	0,000037
0'2	0,044046	0,064230	0,001047	-0,001502	0,000025	0,000036
0'3	0,045093	0,062728	0,001072	-0,001466	0,000026	0,000035
0'4	0,046166	0,061262	0,001098	-0,001431	0,000027	0,000034
0'5	0,047264	0,059831	0,001125	-0,001397	0,000027	0,000033

0'6	0,048389	0,058434	0,001152	-0,001364	0,000028	0,000032
0'7	0,049542	0,057070	0,001180	-0,001331	0,000029	0,000032
0'8	0,050722	0,055738	0,001209	-0,001300	0,000029	0,000031
0'9	0,051931	0,054439	0,001239	-0,001269		
1	0,053170	0,053170				

En cualquier caso, podemos comprobar que las segundas diferencias son constantes para los vencimientos más cercanos (3 y 5 años), y prácticamente constantes para los vencimientos más alejados, y, por tanto, las diferencias de orden superior en los vencimientos más alejados son prácticamente despreciables respecto a las de primer o segundo orden. Así podemos aproximar[1] los extremos de los α-cortes a partir de una expresión cuadrática de α de forma prácticamente perfecta, de tal forma que los extremos superior e inferior de los α-cortes son un polinomio de grado dos que toma idénticos valores en α=0, 0'5 y 1 que $f_t^i(\alpha)$, i=1,2. Así los α-cortes de $f_t^i(\alpha)$, i=1,2 quedan aproximados de forma prácticamente perfecta por:

$$f_t^i(\alpha) = f_t^i(0) + \frac{f_t^i(0'5) - f_t^i(0)}{1!\cdot 0'5}\alpha + \frac{f_t^i(1) - 2f_t^i(0'5) + f_t^i(0)}{2!\cdot 0'5^2}\alpha(\alpha - 0'5),\ i=1,2.$$

Tal como se demuestra en Terceño *et al.* (1995), las desviaciones máximas en los extremos de los α-cortes se producen, aproximadamente, ya que los α-cortes son casi cuadráticos, para unos niveles de presunción $\alpha_I^* = \alpha_D^* = 0'5$. En este caso, las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^*(t) \approx D_{It}(0'5) = \frac{1}{2}\left|f_t^1(1) - 2f_t^1(0'5) + f_t^1(0)\right| \text{ y } D_D^*(t) \approx D_{Dt}(0'5) = \frac{1}{2}\left|f_t^2(1) - 2f_t^2(0'5) + f_t^2(0)\right|$$

De esta forma, los errores que pueden cometerse como máximo se cometen en el nivel de presunción 0'5 por tomar la función de pertenencia de $\tilde{f}_t$ definida a través de la del número borroso triangular $\tilde{f}_t'$ son:

t	ε_t
3	0,002
5	0,004
15	0,010
50	0,030

Si tomamos como referencia de los valores de verdad que puede tomar un valor en una escala endecadaria, observamos que, en todos los casos, el error que podemos cometer por aproximar triangularmente el factor de actualización están por debajo de 0'1, por lo que podemos aceptar como válida la aproximación triangular.

[1] Sobre polinomios interpolantes, puede consultarse a Burden y Faires (1985, p. 94-147).

A continuación analizamos el caso en que la periodicidad de valoración sea anual y que los intereses que el decisor estima vengan dados por los números borrosos triangulares (0’01+0’005(r-1), 0’03+0’005(r-1), 0’05+0’005(r-1)), r=1,2,...,10, siendo el interés a aplicar a partir de r=10 el número borroso triangular (0’055, 0’075, 0’095). Asimismo, analizamos el comportamiento de los factores de actualización para cuantías con vencimientos dentro de 3, 5, 15 y 50 años, como en el caso anterior y posteriormente su aproximación triangular. Calculamos en primer lugar las diferencias de los extremos de los α-cortes hasta un segundo orden para los extremos de los α-cortes de $\tilde{f}_3$ y obtenemos:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,851633	0,956340	0,004862	-0,005631	0,000037	0,000044
0'1	0,856495	0,950709	0,004899	-0,005587	0,000037	0,000044
0'2	0,861394	0,945122	0,004936	-0,005543	0,000038	0,000043
0'3	0,866330	0,939579	0,004974	-0,005500	0,000038	0,000043
0'4	0,871304	0,934079	0,005012	-0,005457	0,000039	0,000042
0'5	0,876317	0,928622	0,005051	-0,005415	0,000039	0,000042
0'6	0,881368	0,923207	0,005090	-0,005373	0,000039	0,000042
0'7	0,886457	0,917834	0,005129	-0,005331	0,000040	0,000041
0'8	0,891586	0,912503	0,005169	-0,005290	0,000040	0,000041
0'9	0,896755	0,907213	0,005209	-0,005249		
1	0,901964	0,901964				

Para el factor de actualización a cinco años, los resultados son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,747341	0,905840	0,007091	-0,008829	0,000081	0,000103
0'1	0,754432	0,897010	0,007172	-0,008726	0,000082	0,000102
0'2	0,761604	0,888284	0,007254	-0,008624	0,000083	0,000100
0'3	0,768857	0,879660	0,007337	-0,008524	0,000084	0,000099
0'4	0,776194	0,871136	0,007421	-0,008425	0,000085	0,000098
0'5	0,783615	0,862710	0,007506	-0,008328	0,000086	0,000096
0'6	0,791121	0,854383	0,007593	-0,008231	0,000088	0,000095
0'7	0,798714	0,846151	0,007680	-0,008136	0,000089	0,000094
0'8	0,806394	0,838015	0,007769	-0,008043	0,000090	0,000092
0'9	0,814163	0,829972	0,007859	-0,007950		
1	0,822022	0,822022				

Para el factor de actualización con vencimiento a 15 años los resultados de las primeras y segundas diferencias de los α-cortes son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,315752	0,556234	0,008904	-0,015805	0,000268	0,000478
0'1	0,324656	0,540429	0,009172	-0,015327	0,000277	0,000463
0'2	0,333828	0,525102	0,009449	-0,014864	0,000286	0,000448
0'3	0,343278	0,510239	0,009735	-0,014416	0,000295	0,000434
0'4	0,353013	0,495823	0,010030	-0,013982	0,000305	0,000420

0'5	0,363044	0,481841	0,010335	-0,013562	0,000314	0,000406
0'6	0,373378	0,468278	0,010649	-0,013156	0,000325	0,000394
0'7	0,384028	0,455122	0,010974	-0,012762	0,000335	0,000381
0'8	0,395002	0,442360	0,011309	-0,012381	0,000346	0,000369
0'9	0,406311	0,429978	0,011655	-0,012012		
1	0,417966	0,417966				

Y si el vencimiento son 50 años, se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,013178	0,085393	0,001267	-0,007748	0,000124	0,000716
0'1	0,014445	0,077645	0,001391	-0,007032	0,000137	0,000648
0'2	0,015836	0,070613	0,001528	-0,006384	0,000151	0,000588
0'3	0,017365	0,064230	0,001679	-0,005796	0,000166	0,000533
0'4	0,019044	0,058434	0,001845	-0,005263	0,000183	0,000483
0'5	0,020889	0,053170	0,002028	-0,004781	0,000201	0,000438
0'6	0,022917	0,048389	0,002229	-0,004343	0,000222	0,000397
0'7	0,025146	0,044046	0,002450	-0,003946	0,000244	0,000360
0'8	0,027596	0,040100	0,002695	-0,003586	0,000269	0,000327
0'9	0,030291	0,036514	0,002963	-0,003260		
1	0,033254	0,033254				

Si bien, las segundas diferencias dejan de ser constantes, son prácticamente constantes en $\tilde{f}_3$ y $\tilde{f}_5$ aunque no podemos ser tan categóricos si consideramos los factores de actualización con vencimiento a 15 y 50 años. Sin embargo, en este último supuesto y también en los anteriores, las diferencias de orden superior a 2 son prácticamente despreciables respecto a las dos primeras. Por ello volvemos a aceptar que el ajuste de $f_t^i(\alpha)$, i=1,2, por un polinomio de segundo grado que tome los mismo valores en α=0, 0'5 y 1 es casi perfecto.

De esta forma, el máximo global de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$ vuelve a estar aproximadamente en los niveles de presunción $\alpha_I^* = \alpha_D^* = 0'5$. Las máximas desviaciones de los α-cortes a la izquierda y a la derecha que se producen por tomar $\tilde{f}_t'$ en lugar de $\tilde{f}_t$ vuelven a ser pues $D_{It}(0'5)$ y $D_{Dt}(0'5)$. De esta forma, el error que como máximo se puede cometer por tomar la aproximación triangular a $\tilde{f}_t$, $\tilde{f}_t'$ es:

t	ε_t
3	0,010
5	0,015
15	0,038
50	0,118

Como conclusiones sobre los ejemplos numéricos expuestos, podemos comprobar que casi siempre, pero no siempre, la aproximación triangular al factor de descuento es aceptable si tomamos como referencia la escala endecadaria, escala que por otra parte es la más "exigente" de entre las que habitualmente se utilizan. Sin embargo, la validez del ajuste triangular va disminuyendo conforme aumenta el radio de los intereses futuros o el vencimiento asociado al factor de descuento que aproximamos. Así, puede darse el caso, si los intereses de valoración son relativamente inciertos (el segundo caso) y los vencimientos largos, (50 años, vencimiento que puede darse en un seguro de vida) que el ajuste triangular no sea válido.

En el caso en que sea razonable aproximar al factor de descuento para un vencimiento t, $\tilde{f}_t$, por un número borroso triangular, $\tilde{f}_t$ la aproximación triangular del valor actual de una cuantía crisp con vencimiento en t, C_t que se halla como producto de dicha cuantía por un número borroso triangular, es decir, $\tilde{Z}_t = C_t \tilde{f}_t$ también debe ser aceptada. Es fácil comprobar que el error relativo que como máximo podemos cometer en el nivel de pertenencia de un valor, al tomar $\tilde{Z}_t$ como un números borroso triangular, $\tilde{Z}_t'$ es exactamente el mismo que el que se comete al aproximar triangularmente el factor de descuento con el que fue obtenido. De esta forma, si aceptamos que:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t' = \left(\prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^3\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^2\right)^{-1}, \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^1\right)^{-1} \right)$$

debe ser aceptado que:

$$\tilde{Z}_t \approx \tilde{Z}_t' = \left(C_t \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^3\right)^{-1}, C_t \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^2\right)^{-1}, C_t \prod_{r=1}^{t} \left(1 + i_r^1\right)^{-1} \right)$$

4.2.3.2. Aproximación triangular al factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es constante a lo largo del tiempo

Si bien, las cuestiones comentadas en el punto 4.2.3.1. pueden hacerse extensibles a este epígrafe, dado que el supuesto de interés constante y triangular tiene especial relevancia desde el punto de vista de la valoración financiera –y también en la valoración financiero-actuarial-, creemos que debemos dedicar a este supuesto un punto aparte.

En este caso, y continuando con la metodología expuesta en el apartado 1.4.2., en este caso el problema se reduce a aproximar un número borroso triangular a $\tilde{A}^n$ con n negativo (en concreto, -t) y siendo $\tilde{A}$ un número borroso triangular, ya que $\tilde{A} = \left(1 + \tilde{i}\right)$. De esta forma, el número borroso triangular que pretendemos aproximar a través de un número borroso triangular es:

$$\tilde{f}_t = \left(1 + \tilde{i}\right)^{-t}$$

donde $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$ es:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t' = \left((1+i^3)^{-t}, (1+i^2)^{-t}, (1+i^1)^{-t} \right)$$

En este caso, las desviaciones que se cometen a la derecha y a la izquierda de los α-cortes por el hecho de aproximarlos linealmente son respectivamente, $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$:

$$D_{It}(\alpha) = (1+i^3)^{-t} + \left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right]\alpha - \left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha\right)^{-t}$$

$$D_{Dt}(\alpha) = (1+i^1)^{-t} - \left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right]\alpha - \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha\right)^{-t}$$

y a partir de los resultados expuestos en el apartado 1.4.2., es inmediato comprobar que las desviaciones máximas que se producen en los extremos de los α-cortes por tomar una aproximación triangular con el mismo centro y radio deberían hallarse a través de los niveles de presunción en los cuales se produce la mayor desviación a la izquierda, α_I^* y a la derecha, α_D^*. Éstos se obtendrán igualando la primera derivada de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$ a cero. Concretamente obtendremos que:

$$\alpha_I^* = \frac{1+i^3}{i^3 - i^2} - \left(\frac{\left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right]}{t(i^3 - i^2)^{-t}} \right)^{-\frac{1}{t+1}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{\left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right]}{t(i^2 - i^1)^{-t}} \right)^{-\frac{1}{t+1}} - \frac{1+i^1}{i^2 - i^1}$$

Así, las máximas desviaciones a la izquierda, $D_I^*(t)$, y a la derecha, $D_D^*(t)$ son:

$$D_I^*(t) = (1+i^3)^{-t} + \left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right]\alpha_I^* - \left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha_I^*\right)^{-t}$$

$$D_D^*(t) = (1+i^1)^{-t} - \left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right]\alpha_D^* - \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha_D^*\right)^{-t}$$

El error máximo que puede ser cometido en el nivel de presunción de un valor x, ε_t, por tomarse $\tilde{f}_t'$, se calculará en este caso como:

$$\left| \mu_{\tilde{f}_t'}(x) - \mu_{\tilde{f}_t}(x) \right| \le \mathrm{Max}\left\{ \frac{D_I^*(t)}{(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t}}, \frac{D_D^*(t)}{(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t}} \right\} = \varepsilon_t$$

A continuación presentamos los resultados de los errores que cometemos realizando una aproximación triangular del factor de actualización definidos por intereses triangulares simétricos con diferentes radios –diferentes niveles de incertidumbre- y para diversos vencimientos. En concreto, los centros de los tipos de interés que consideraremos son {2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 7%, 8%, 9%} siendo los radios del 0'5% y del 2%. Para un radio del 0'5%, el valor de ε_t para t=3,5,15 y 50 es:

Radio=0,005

t/centros	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
3	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
5	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003
15	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009
50	0,031	0,031	0,031	0,030	0,030	0,030	0,030	0,029

Y si el radio del interés borroso es del 2%, entonces obtenemos:

Radio=0,02

t/centros	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
3	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009
5	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
15	0,040	0,039	0,039	0,038	0,038	0,038	0,037	0,037
50	0,125	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117

En cualquier caso, podemos observar que: