a) A medida que aumenta el radio y/o el vencimiento del factor de descuento la aproximación triangular es cada vez peor. Aunque en la mayor parte de casos aceptaríamos, la aproximación triangular si adoptaramos una escala endecadaria o una menos detallada, podemos comprobar que para un vencimiento de 50 años y un radio del 2% la aproximación triangular no puede ser aceptada con dicha escala.

b) A medida que aumenta la magnitud del interés de valoración, si entendemos como medida de dicha magnitud su centro, y para un radio y vencimiento dados, aumenta la validez de la aproximación de $\tilde{f}_t$ mediante un número borroso triangular, esto es, disminuye el error que se comete en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomar como factor de descuento su número borroso triangular aproximado.

4.3. VALORACIÓN DE RENTAS FINANCIERAS CON CUANTÍAS Y NÚMERO DE TÉRMINOS CIERTOS CON INTERESES ESTIMADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

4.3.1. Planteamiento general

Definimos como renta a un conjunto de capitales financieros que devengan según una periodicidad predeterminada, P, expresada en años. En este epígrafe, aunque supondremos que el interés o intereses de valoración son borrosos, consideraremos que las cuantías serán ciertas y que las rentas serán, en cualquier caso, temporales y con un número conocido de términos.

Podemos notar al conjunto de capitales financieros que conforman una renta como $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,...,n}$ donde t_{r+1}-t_r = P $\forall$r=1,2,...,n-1, siendo n el número de términos de la renta. Si descomponemos el diferimiento del r-ésimo capital que conforma la renta como t_r = d+(r-1)]P, denotamos como dP al “diferimiento de la renta”. Obsérvese que hemos supuesto, en cualquier caso, que las rentas son de naturaleza, prepagables, ya que este es el supuesto más usual en las rentas actuariales. Asimismo, ello nos permitirá no distinguir entre rentas anticipadas y vencidas. Así, si la renta es inmediata y anticipada tomamos d=0 y si es inmediata y vencida, basta con tomar d=1. Asimismo, cualquier renta diferida, pueden tratarse con un diferimiento determinado. Para un diferimiento de d periodos, con d>1, una renta puede ser, desde el punto de vista clásico, diferida d peridos anticipada o bien diferida d-1 periodos y vencida.

A la hora de determinar las expresiones correspondientes al valor actual de las rentas, supondremos que el diferimiento de ésta es un número entero de periodos. Si bien es cierto que no habría problema en considerar el diferimiento de la renta como un número no entero de periodos, creemos que lo único que conseguiríamos es cargar más la notación sin aportar ningún aspecto relevante desde el punto de vista metodológico y conceptual..

De esta forma, como el interés o los intereses de valoración serán borrosos, el valor actual de una renta será un número borroso el cual simbolizaremos como ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$ donde d indica el diferimiento en periodos de la renta y n su número de términos. Dicho valor se hallará como la suma del valor actual de los n capitales que conforman la misma. Así, si el interés estimado a través de un tanto efectivo de la misma periodicidad y frecuencia para cada uno de los periodos de los que consta el horizonte planificador es:

$$\widetilde{i}_r = \{x, \mu_{\widetilde{i}_r}(x)\} = \{i_{r_\alpha} = [i_r^1(\alpha), i_r^2(\alpha)], 0 \le \alpha \le 1\}, \text{ r=1,2,...,d+n-1.}$$

el valor actual de la renta se obtiene como:

$${}_{d|}\widetilde{V}_0^n = \sum_{r=1}^{n} \widetilde{Z}_r = \sum_{r=1}^{n} C_r \widetilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=1}^{d+(r-1)} \left(1+\widetilde{i}_s\right)$$

Siendo entonces la función de pertenencia del valor actual, $\mu_{{}_{d|}\widetilde{V}_0^n}(x)$:

$$\mu_{\widetilde{f}_t}(x) = \bigvee_{x=\prod_{r=1}^{t}(1+x_r)^{-1}} \left(\bigwedge_{r=1}^{t} \mu_{i_r}(x_r) \right)$$

y sus α-cortes, ${}_{d|}V_{0_\alpha}^n$:

$${}_{d|}V_{0_\alpha}^n = \left[{}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} C_r f_{d+r-1}^1(\alpha), \sum_{r=1}^{n} C_r f_{d+r-1}^2(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=1}^{d+r-1} \left(1+i_s^2(\alpha)\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=1}^{d+r-1} \left(1+i_s^1(\alpha)\right)^{-1}\right] = \left[\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^2(\alpha)\right)^{-1} \sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^2(\alpha)\right)^{-1}, \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1(\alpha)\right)^{-1} \sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^1(\alpha)\right)^{-1}\right]$$

donde $\prod_{r=m}^{n} a_r = 1$ si n<m.

En el caso particular de una renta unitaria, es decir, $C_r = 1$ $\forall$r, notaremos al valor de una renta de n términos como ${}_{d|}\widetilde{\ddot{a}}_{\overline{n|}}$, siendo entonces sus α-cortes, ${}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}_\alpha}$:

$${}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}_\alpha} = \left[{}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}}^1(\alpha), {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}}^2(\alpha)\right] = \left[\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^2(\alpha)\right)^{-1} \sum_{r=1}^{n} \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^2(\alpha)\right)^{-1}, \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1(\alpha)\right)^{-1} \sum_{r=1}^{n} \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^1(\alpha)\right)^{-1}\right]$$

Asimismo, si la renta presenta un diferimiento d=1 –que en el estudio clásico de rentas calificaríamos de inmediata y vencida-, notamos a su valor actual como $\tilde{a}_{\overline{n}|}$, siendo sus α-cortes, $a_{\overline{n}|_\alpha}$:

$$a_{\overline{n}|_\alpha} = \left[a^1_{\overline{n}|}(\alpha), a^2_{\overline{n}|}(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{r}\left(1+i^2_s(\alpha)\right)^{-1}, \sum_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{r}\left(1+i^1_s(\alpha)\right)^{-1}\right]$$

y si es inmediata y anticipada (d=0), notamos al valor actual de dicha renta como $\tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|}$, siendo entonces sus α cortes, $\ddot{a}_{\overline{n}|_\alpha}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|_\alpha} = \left[\ddot{a}^1_{\overline{n}|}(\alpha), \ddot{a}^2_{\overline{n}|}(\alpha)\right] = \left[\left(1+i^2_1(\alpha)\right)\sum_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{r}\left(1+i^2_s(\alpha)\right)^{-1}, \left(1+i^1_1(\alpha)\right)\sum_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{r}\left(1+i^1_s(\alpha)\right)^{-1}\right]$$

Por supuesto, si se trata de una renta constante, C_r=C $\forall$r, supuesto muy usual en la práctica financiero, para hallar ${}_{d|}\tilde{V}^n_0$ bastará con multiplicar la cuantía de la renta por el valor actual de la renta unitaria, es decir, $C\ {}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|}$.

4.3.2. Valor actual de rentas temporales valoradas a través de números borrosos constantes a lo largo de todo el periodo de valoración

A continuación presentamos las expresiones del valor actual de aquellas rentas para las cuales el número borroso que cuantifica el interés correspondiente a cada año se mantiene constante, es decir, $\tilde{i}_r = \tilde{i}_{r+1} = \tilde{i}\ \forall r$. De forma más particular, estudiaremos las expresiones del valor actual correspondientes a las rentas constantes (C_{r+1}=C_r $\forall$r) y a las que sus cuantías son variables en progresión geométrica (C_{r+1}=C_rq $\forall$r).

De forma general, la expresión de ${}_{d|}\tilde{V}^n_0$ para un interés constante y borroso:

$${}_{d|}\tilde{V}^n_0 = \sum_{r=1}^{n}\tilde{Z}_r = \sum_{r=1}^{n}C_r\tilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^{n}C_r\left(1+\tilde{i}\right)^{-d-r+1}$$

siendo entonces sus α-cortes, ${}_{d|}V^n_{0_\alpha}$:

$$ {}_{d|}V^{n}_{0_\alpha} = \left[{}_{d|}V^{1,n}_{0}(\alpha), {}_{d|}V^{2,n}_{0}(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} C_r f^{1}_{d+r-1}(\alpha), \sum_{r=1}^{n} C_r f^{2}_{d+r-1}(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} C_r \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d-r+1}, \sum_{r=1}^{n} C_r \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d-r+1}\right] = $$

$$ = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1} \sum_{r=1}^{n} C_r \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-r}, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1} \sum_{r=1}^{n} C_r \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-r}\right] $$

De esta forma, para una renta constante y unitaria, su valor actual, ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|}$, vendrá dado a través de sus α-cortes como:

$$ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n}|_\alpha} = \left[{}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{n}|}(\alpha), {}_{d|}\ddot{a}^{2}_{\overline{n}|}(\alpha)\right] = \left[{}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{n}|i^2(\alpha)}, {}_{d|}\ddot{a}^{2}_{\overline{n}|i^1(\alpha)}\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1} \sum_{r=1}^{n} \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-r}, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1} \sum_{r=1}^{n} \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-r}\right] = $$

$$ = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1} \frac{1-\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{i^2(\alpha)}, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1} \frac{1-\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{i^1(\alpha)}\right] = \left[a^{1}_{\overline{n}|i^2(\alpha)}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}, a^{2}_{\overline{n}|i^1(\alpha)}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\right] $$

Si dicha renta unitaria es inmediata y vencida, entonces los α-cortes de $\tilde{a}_{\overline{n}|}$, $\tilde{a}_{\overline{n}|_\alpha}$ vendrán dados por:

$$ a_{\overline{n}|_\alpha} = \left[a^{1}_{\overline{n}|}(\alpha), a^{2}_{\overline{n}|}(\alpha)\right] = \left[a_{\overline{n}|i^2(\alpha)}, a_{\overline{n}|i^1(\alpha)}\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-r}, \sum_{r=1}^{n} \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-r}\right] = $$

$$ = \left[\frac{1-\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{i^2(\alpha)}, \frac{1-\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{i^1(\alpha)}\right] $$

y si es inmediata y anticipada, entonces los α-cortes de $\tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|_\alpha}$ vendrán dados por:

$$ \ddot{a}_{\overline{n}|_\alpha} = \left[\ddot{a}^{1}_{\overline{n}|}(\alpha), \ddot{a}^{2}_{\overline{n}|}(\alpha)\right] = \left[\ddot{a}_{\overline{n}|i^2(\alpha)}, \ddot{a}_{\overline{n}|i^1(\alpha)}\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)\sum_{r=1}^{n} \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-r}, \left(1+i^1(\alpha)\right)\sum_{r=1}^{n} \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-r}\right] = $$

$$ = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)\frac{1-\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{i^2(\alpha)}, \left(1+i^1(\alpha)\right)\frac{1-\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{i^1(\alpha)}\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)a_{\overline{n}|i^2(\alpha)}, \left(1+i^1(\alpha)\right)a_{\overline{n}|i^1(\alpha)}\right] $$

Por supuesto, para hallar el valor actual de una renta constante, bastará con multiplicar la cuantía constante de la renta por el valor actual de la renta unitaria con la misma duración y diferimiento. De forma general, se obtiene:

$$ {}_{d|}\tilde{V}^{n}_{0} = C\, {}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|} $$

y si es inmediata y vencida o inmediata y anticipada, obtenemos, respectivamente:

$$ {}_{1|}\tilde{V}^{n}_{0} = C\, \tilde{a}_{\overline{n}|} $$

$$ {}_{0|}\tilde{V}^{n}_{0} = C\, \tilde{\ddot{a}}_{\overline{n}|} $$

siendo por tanto la determinación de los α-cortes de ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$, ${}_{1|}\widetilde{V}_0^n$ o ${}_{0|}\widetilde{V}_0^n$ inmediata.

En el caso de rentas variables en progresión geométrica, las cuantías de la renta, al ser ciertas, varía según una progresión geométrica de razón q>0 cierta. Así, el r-ésimo término de la renta, C_r, puede ser escrito a través del primero, C_1, como $C_r=C_1q^{r-1}$. Entonces, el conjunto de capitales financieros que conforman la renta es $\left\{\left(C_1q^{r-1},\left[d+(r-1)\right]P\right)\right\}_{r=1,2,\dots,n}$, siendo por tanto su valor actual:

$$ {}_{d|}\widetilde{V}_0^n = \sum_{r=1}^{n}\widetilde{Z}_r = \sum_{r=1}^{n} C_1 q^{r-1}\widetilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^{n} C_1 q^{r-1}\left(1+\widetilde{i}\right)^{-d-r+1} $$

Entonces los α-cortes de ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$, ${}_{d|}V_{0_\alpha}^n$ son:

$$ {}_{d|}V_{0_\alpha}^n = \left[{}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n}C_1 q^{r-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-r}, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n}C_1 q^{r-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-r}\right] $$

obteniéndose finalmente:

$$ {}_{d|}V_{0_\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\right] & q\neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{n}{1+i^2(\alpha)}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\right] & q=1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{n}{1+i^1(\alpha)}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\right] & q=1+i^1(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{n}{1+i^2(\alpha)}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{n}{1+i^1(\alpha)}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1}\right] = C_1\dfrac{n}{1+i^1(\alpha)}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d+1} & q=1+i^1(\alpha)=1+i^2(\alpha) \end{cases} $$

En el caso particular, en que la renta sea inmediata y vencida, (d=1) el resultado que obtenemos para sus α-cortes es:

$$ {}_{1|}V_{0_\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\right] & q\neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{n}{1+i^2(\alpha)}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\right] & q=1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}, C_1\dfrac{n}{1+i^1(\alpha)}\right] & q=1+i^1(\alpha) \\ \left[C_1\dfrac{n}{1+i^2(\alpha)}, C_1\dfrac{n}{1+i^1(\alpha)}\right] = C_1\dfrac{n}{1+i^2(\alpha)} & q=1+i^1(\alpha)=1+i^2(\alpha) \end{cases} $$

Y si es inmediata y anticipada, entonces los α-cortes son:

$$
{}_{0|}V_{0_\alpha}^{n} = \begin{cases}
\left[C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}\left(1+i^2(\alpha)\right), C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\left(1+i^1(\alpha)\right)\right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\
\left[C_1 n, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q}\left(1+i^1(\alpha)\right)\right] & q = 1+i^2(\alpha) \\
\left[C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q}\left(1+i^2(\alpha)\right), C_1 n\right] & q = 1+i^1(\alpha) \\
\left[C_1 n, C_1 n\right] = C_1 n & q = 1+i^1(\alpha) = 1+i^2(\alpha)
\end{cases}
$$

4.3.3. Valor actual de rentas temporales con intereses de valoración estimados a través de números borrosos triangulares

En este apartado supondremos que los intereses a aplicar durante los d+n-1 periodos de los que consta el horizonte de valoración vienen dados a través de un tanto efectivo de la misma periodicidad de la renta, P, que expresamos como:

$$\tilde{i}_r = \left(i_r^1, i_r^2, i_r^3\right), \ r = 1,2,\ldots, d+n-1$$

Para hallar los α-cortes de las expresiones del valor actual de las rentas con número de términos y cuantías ciertas, bastará con sustituir la expresión correspondiente a los extremos inferior y superior de los α-cortes correspondientes al tanto efectivo de periodicidad P de cada periodo, $\tilde{i}_r$, r=1,2,...,d+n-1 en los extremos superior e inferior de los α-cortes del valor actual, respectivamente. De forma general, la expresión de los α-cortes del valor actual de una renta son, bajo la hipótesis de triangularidad en el interés de valoración:

$$
\begin{aligned}
{}_{d|}V_{0_\alpha}^{n} = \left[{}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)\right] = \Bigg[& \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^3-\left(i_s^3-i_s^2\right)\alpha\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^3-\left(i_s^3-i_s^2\right)\alpha\right)^{-1}, \\
& \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1+\left(i_s^2-i_s^1\right)\alpha\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^1+\left(i_s^2-i_s^1\right)\alpha\right)^{-1} \Bigg]
\end{aligned}
$$

Asimismo, en el caso en que las rentas sean valoradas mediante intereses estimados como números borrosos triangulares constantes, es decir, $\tilde{i}_r = \tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$ ∀r, las expresiones de los α-cortes del valor actual son:

$$
{}_{d|}V^n_{0_\alpha} = \left[{}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)\right] = \left[\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n} C_r\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-r},\right.
$$

$$
\left.\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n} C_r\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-r}\right]
$$

De esta forma, para una renta constante, sus α-cortes toman la siguiente expresión:

$$
{}_{d|}V^n_{0_\alpha} = \left[C_{d|}\ddot{a}^1_{\overline{n|}}(\alpha), C_{d|}\ddot{a}^2_{\overline{n|}}(\alpha)\right] = \left[C\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1} a_{\overline{n|}\, i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}, C\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1} a_{\overline{n|}\, i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\right]
$$

Si esta es inmediata y vencida, entonces sus α-cortes se hallan como:

$$
{}_{1|}V^n_{0_\alpha} = \left[Ca^1_{\overline{n|}}(\alpha), Ca^2_{\overline{n|}}(\alpha)\right] = \left[Ca_{\overline{n|}\, i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}, Ca_{\overline{n|}\, i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\right]
$$

Y si es inmediata y anticipada, entonces el resultado que obtenemos es:

$$
{}_{0|}V^n_{0_\alpha} = \left[C\ddot{a}^1_{\overline{n|}}(\alpha), C\ddot{a}^2_{\overline{n|}}(\alpha)\right] = \left[C\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)a_{\overline{n|}\, i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}, C\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)a_{\overline{n|}\, i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\right]
$$

Para rentas cuyas cuantías son ciertas y varían según una progresión geométrica de razón q, que tamnbién suponemos cierta, la expresión de los α-cortes del valor actual para cualquier diferimiento d es:

$$
{}_{d|}V^n_{0_\alpha} = \begin{cases}
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1}\right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1}\right] & q = 1+i^2(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{n}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1}\right] & q = 1+i^1(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1}, C_1\dfrac{n}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-d+1}\right] = & \\
\qquad = C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-d+1} & q = 1+i^2(\alpha) = 1+i^1(\alpha)
\end{cases}
$$

Si la renta es inmediata y vencida (d=1), entonces los α-cortes de ${}_{d|}\widetilde{V}^n_0$, ${}_{d|}V^n_{0_\alpha}$ son:

$$
{}_{1|}V^n_{0_\alpha} = \begin{cases}
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\right] & q = 1+i^2(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}, C_1\dfrac{n}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\right] & q = 1+i^1(\alpha) \\[2ex]
\left[C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha}, C_1\dfrac{n}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha}\right] = C_1\dfrac{n}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha} & q = 1+i^2(\alpha) = 1+i^1(\alpha)
\end{cases}
$$

Si la renta es inmediata y anticipada (d=0), entonces el resultado que obtenemos para los α-cortes del valor actual es:

$$
{}_{0|}V_{0_\alpha}^{n}=\begin{cases}
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right),C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)\right] & q\neq 1+i^1(\alpha),1+i^2(\alpha)\\
\left[C_1 n, C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha-q}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)\right] & q=1+i^2(\alpha)\\
\left[C_1\dfrac{1-q^n\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-n}}{1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha-q}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right),C_1 n\right] & q=1+i^1(\alpha)\\
\left[C_1 n, C_1 n\right]=C_1 n & q=1+i^2(\alpha)=1+i^1(\alpha)
\end{cases}
$$

4.3.4. Aproximación triangular del valor actual de una renta valorada con intereses estimados por números borrosos triangulares

Ya comprobamos al analizar los valores actuales de los capitales financieros valorados con intereses cuantificados por números borrosos triangulares, que el resultado que obtenemos para su valor actual no es un número borroso triangular. Por tanto, tampoco lo será si valoramos rentas financieras. Sin embargo, si aceptamos que el valor actual del r-ésimo capital financiero que forma parte de la renta puede ser aproximado mediante un número borroso triangular, es decir:

$$\widetilde{Z}_r \approx \left(C_r f^1_{d+r-1}(0), C_r f^1_{d+r-1}(1)=C_r f^2_{d+r-1}(1), C_r f^2_{d+r-1}(0)\right)$$

como de la suma de números borrosos triangulares se obtiene un número borroso triangular de la misma naturaleza, si utilizamos la aproximación triangular de cada uno de los sumandos, obtendremos que el valor actual de la renta es aproximadamente un número borroso triangular, ${}_{d|}\widetilde{V}_0^{n}\,'$, cuyo valor es:

$$
\begin{aligned}
{}_{d|}V_0^n &\approx {}_{d|}V_0^{n}\,'=\left({}_{d|}V_0^{1,n}(0), {}_{d|}V_0^{1,n}(1)={}_{d|}V_0^{2,n}(1), {}_{d|}V_0^{2,n}(0)\right)=\\
&=\left(\sum_{r=1}^{n}C_r f^1_{d+r-1}(0), \sum_{r=1}^{n}C_r f^1_{d+r-1}(1)=\sum_{r=1}^{n}C_r f^2_{d+r-1}(1), \sum_{r=1}^{n}C_r f^2_{d+r-1}(0)\right)
\end{aligned}
$$

De esta forma, las aproximaciones triangulares propuestas son, de forma general:

$${}_{d|}\widetilde{V}_0^n \approx {}_{d|}V_0^{n}\,'=\left(\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_r^3\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^3\right)^{-1}, \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_r^2\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^2\right)^{-1}, \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_r^1\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^1\right)^{-1}\right)$$

Si el interés a aplicar durante todos los periodos es un número borroso triangular constante, entonces proponemos:

$${}_{d|}\widetilde{V}_0^n \approx {}_{d|}V_0^{n}\,'=\left(\left(1+i^3\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n}C_r\left(1+i^3\right)^{-r}, \left(1+i^2\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n}C_r\left(1+i^2\right)^{-r}, \left(1+i^1\right)^{-d+1}\sum_{r=1}^{n}C_r\left(1+i^1\right)^{-r}\right)$$

Por otra parte, si la renta es contante y el interés es también constante y triangular, la aproximación de la misma naturaleza propuesta es:

$$_{d|}\widetilde{V}_0^n \approx {}_{d|}V_0^n{}' = \left(C\left(1+i^3\right)^{-d+1} a_{\overline{n|}i^3}, C\left(1+i^2\right)^{-d+1} a_{\overline{n|}i^2}, C\left(1+i^1\right)^{-d+1} a_{\overline{n|}i^1} \right)$$

y si la renta fuera constante, inmediata y vencida, entonces la aproximación propuesta sería:

$$_{1|}\widetilde{V}_0^n \approx {}_{d|}V_0^n{}' = \left(Ca_{\overline{n|}i^3}, Ca_{\overline{n|}i^2}, Ca_{\overline{n|}i^1} \right)$$

Asimismo si la renta fuera constante, inmediata y anticipada, la aproximación que se propone es:

$$_{0|}\widetilde{V}_0^n \approx \left(C\left(1+i^3\right) a_{\overline{n|}i^3}, C\left(1+i^2\right) a_{\overline{n|}i^2}, C\left(1+i^1\right) a_{\overline{n|}i^1} \right)$$

Por otra parte, para rentas variables en progresión geométrica, la aproximación triangular propuesta para cualquier diferimiento y suponiéndose interés constante y triangular es:

$$_{d|}\widetilde{V}_0^n \approx \begin{cases} \left(C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^3\right)^{-n}}{1+i^3-q}\left(1+i^3\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^2\right)^{-n}}{1+i^2-q}\left(1+i^2\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^1\right)^{-n}}{1+i^1-q}\left(1+i^1\right)^{-d+1} \right) & \text{si } q \neq 1+i^1, 1+i^2, 1+i^3 \\ \left(C_1 \dfrac{n}{1+i^3}\left(1+i^3\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^2\right)^{-n}}{1+i^2-q}\left(1+i^2\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^1\right)^{-n}}{1+i^1-q}\left(1+i^1\right)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^3 \\ \left(C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^3\right)^{-n}}{1+i^3-q}\left(1+i^3\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{n}{1+i^2}\left(1+i^2\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^1\right)^{-n}}{1+i^1-q}\left(1+i^1\right)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^2 \\ \left(C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^3\right)^{-n}}{1+i^3-q}\left(1+i^3\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{1-q^n\left(1+i^2\right)^{-n}}{1+i^2-q}\left(1+i^2\right)^{-d+1}, C_1 \dfrac{n}{1+i^1}\left(1+i^1\right)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^1 \end{cases}$$

Hemos supuesto, en cualquier caso, que el interés aplicado corresponde, como es lo más habitual, a un número borroso triangular para el cual se da la relación estricta $i^1 < i^2 < i^3$.

Por supuesto, para explicitar la aproximación triangular al valor actual de rentas variables en progresión geométrica inmediatas, sean vencidas o anticipadas, bastará con sustituir en la expresión anterior d=0 ó d=1 respectivamente.

Respecto a la calidad del ajuste triangular del valor actual de la renta, debemos remarcar, tal como se ha comentado en anteriores epígrafes, que aunque en su cálculo sean empleados números borrosos aproximados –los que cuantifican el valor actual de cada una de las cuantías que forman parte de la renta-, debido a las características de los operadores máximo y mínimo, el error que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor no será superior al error que se comete en la aproximación triangular del factor de descuento sobre el que producen mayores errores.

Por otra parte, y si seguimos la metodología de evaluación de la aproximación triangular expuesta en el apartado 1.4.2., deberemos conocer las desviaciones máximas que se cometen en los extremos de los α-cortes por tomar la aproximación triangular de ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$, ${}_{d|}\widetilde{V}_0^{n}{}'$ para conocer los errores que podemos cometer en las funciones de pertenencia. Dichas desviaciones máximas las denotaremos como D_I^* para los extremos inferiores –a la izquierda- y como D_D^* si se cometen en los extremos superiores – a la derecha-. Para su determinación será necesario conocer los niveles de presunción α_I^* y α_D^* en los que se producen. Estos serán los valores que minimicen las funciones del argumento α desviación a la izquierda de los α-cortes $D_I(\alpha)$ y desviación a la derecha $D_D(\alpha)$, la cuales pueden hallarse como combinación lineal convexa de las desviaciones a la izquierda y a la derecha de los factores de actualización que intervienen en la determinación del valor actual de las rentas, que fueron hallados en el apartados 4.2.3.1. si el interés triangular era variable a lo largo de toda la duración de la renta y en el apartado 4.2.3.2. si dicho interés era constante. Las desviaciones asociadas al r-ésimo capital –de diferimiento d+r-1 – las notamos como $D_{Ir}(\alpha)$ para la desviación a la izquierda y $D_{Dr}(\alpha)$ para la desviación a la derecha.

De esta forma, las desviaciones a la izquierda y a la derecha de los α-cortes por tomarse una aproximación triangular al valor actual de (C_r , (d+r-1)P) vendrán dadas por $C_rD_{Ir}(\alpha)$ y $C_rD_{Dr}(\alpha)$. Así, las desviaciones que se producen en un determinado α-corte del valor actual de una renta en su extremo inferior y el superior por tomar su aproximación triangular será la suma de las desviaciones correspondientes a cada uno de los valores actuales de los capitales que la componen. Dichos errores son, respectivamente:

$$D_I(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} C_r D_{Ir}(\alpha) \;\text{ y }\; D_D(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} C_r D_{Dr}(\alpha)$$

De esta forma, la expresión general de los errores a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I(\alpha) = \prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^3\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^3\right)^{-1} + \left[\begin{array}{l} \displaystyle\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^2\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^2\right)^{-1} - \\ \displaystyle -\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^3\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^3\right)^{-1} \end{array}\right]\alpha -$$

$$-\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^3-(i_s^3-i_s^2)\text{á}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n} C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^3-(i_s^3-i_s^2)\text{á}\right)^{-1}$$

$$D_D(\alpha)=\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^1\right)^{-1}-\left[\begin{array}{l}\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^1\right)^{-1}-\\-\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^2\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_r^2\right)^{-1}\end{array}\right]\alpha-$$
$$-\prod_{s=1}^{d}\left(1+i_s^1+(i_s^2-i_s^1)\text{á}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{n}C_r\prod_{s=d+1}^{d+r-1}\left(1+i_s^1-(i_s^2-i_s^1)\text{á}\right)^{-1}$$

Tanto si el interés de valoración es el mismo número borroso triangular para todos los periodos, como si es variable a lo largo del horizonte temporal que comprende la valoración, podemos comprobar que no podemos hallar una expresión analítica de α_I^* y α_D^* igualando las primeras derivadas de $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ a cero y por tanto, no podemos hallar D_I^* y D_D^*. Así pues, deberíamos implementar la solución en cada caso mediante algún método numérico al efecto. Sin embargo, y siguiendo un razonamiento análogo al del apartado 4.2.3.1., si que podemos asegurar la existencia de máximos locales y globales α_I^* y α_D^* en]0, 1[. En concreto, podemos comprobar que:

a) $D_I(0) = D_I(1)=D_D(0) = D_D(1)=0$. Dado que tanto $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad exigidos por el teorema de Rolle –son continuas en [0,1] y derivables en]0,1[-, podemos asegurar la existencia de un punto estacionario para ambas en]0,1[.
b) Podemos comprobar que tanto $D_I(\alpha)$ como $D_D(\alpha)$ son funciones estrictamente cóncavas (segunda derivada negativa), ya que $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ se obtienen como combinación lineal no negativa de las funciones de desviación a la izquierda y derecha de los factores de descuento que intervienen en la valoración de la renta, $D_{Ir}(\alpha)$, r=1,2,…,n y $D_{Dr}(\alpha)$, r=1,2,…,n, respectivamente, que son cóncavas. Así, el coeficiente ponderador de $D_{Ir}(\alpha)$ y $D_{Dr}(\alpha)$, r=1,2,...,n es la cuantía con diferimiento en d+r-1, C_r, la cual es siempre positiva. Asimismo, los valores α_I^* y α_D^* serán entonces los valores estacionarios de $D_{Ir}(\alpha)$ y $D_{Dr}(\alpha)$ que asimismo serán máximos locales estrictos y únicos en virtud del teorema local global.

A pesar de que no es posible obtener la expresión analítica de α_I^* y α_D^*, y por tanto, no es posible conocer $D_I^*= D_I(\alpha_I^*)$ y $D_D^*= D_D(\alpha_D^*)$, si que podemos proponer varias alternativas para su aproximación, sin que sea necesario recurrir a la utilización de métodos numéricos en su cálculo.

La primera de ellas, se basa en el análisis de las diferencias de ${}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha)$ y ${}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)$, para valores de α equidistantes, tal como fue propuesto en el apartado 4.2.4.1. Comprobaremos que normalmente la magnitud de las diferencias de un orden más allá de dos no son significativas, por lo que ${}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha)$ y ${}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)$ quedan ajustados de forma “perfecta” por una función cuadrática que tome sus valores en α=0, 0'5 y 1. Si tomamos una aproximación triangular a ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$, ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n{}'$, los extremos inferiores y superiores de sus α-cortes ${}_{d|}V_0^{1,n}{}'(\alpha)$ y ${}_{d|}V_0^{2,n}{}'(\alpha)$ son funciones lineales que, tal como hemos definido dicha aproximación triangular, toman los mismos valores que ${}_{d|}V_0^{1,n}(\alpha)$ y ${}_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)$ en $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. De esta forma, las desviaciones máximas a la derecha y a la izquierda deben producirse, aproximadamente, en los niveles de presunción $\alpha_I^* = \alpha_D^* = 0'5$, y por tanto $D_I^* \approx D_I(0'5)$ y $D_D^* \approx D_D(0'5)$. La relación entre los valores reales de D_I^* y D_D^*, que son los máximos globales $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ con su aproximación son evidentemente:

$D_I^* \geq D_I(0'5)$ y $D_D^* \geq D_D(0'5)$

Es decir, en este caso hemos acotado inferiormente las desviaciones que se producen en los extremos de ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n{}'$ por tomar su aproximación triangular.

En este caso, las aproximaciones a las expresiones de D_I^* y D_D^* vienen dadas, tal como se demuestra en el ya mencionado trabajo de Terceño *et al.* (1995) por:

$$D_I^* \approx \frac{1}{2}\left| {}_{d|}V_0^{1,n}(1) - 2\,{}_{d|}V_0^{1,n}(0'5) + {}_{d|}V_0^{1,n}(0) \right| \text{ y } D_D^* \approx \frac{1}{2}\left| {}_{d|}V_0^{2,n}(1) - 2\,{}_{d|}V_0^{2,n}(0'5) + {}_{d|}V_0^{2,n}(0) \right|$$

Reseñamos que utilizando también una metodología, que aunque no idéntica, se basa en el análisis de la tabla de diferencias de los extremos de los α-cortes del número borroso que queremos aproximar, Terceño *et al.* (1997) proponen un método para la evaluación del ajuste triangular de los valores actuales y finales de rentas unitarias inmediatas y vencidas cuando el interés de valoración es un único número borroso triangular.

La segunda alternativa consiste en obtener una expresión analítica de la cota superior de las desviaciones máximas en los α-cortes del valor actual de la renta a través de las desviaciones máximas correspondientes a los factores de actualización de cada uno de los capitales que forman parte de la renta. Sólo realizaremos la demostración para la desviación a la izquierda, ya que para la desviación a la derecha sería análoga. Para ello, partiremos de que la desviación máxima a la izquierda en el valor actual de la renta, se produce en un nivel de presunción dado α_I^*, de forma que:

$$D_I^* = \sum_{r=1}^{n} C_r D_{Ir}(\alpha_I^*)$$

Entonces, como se cumple que para la desviación que se comete a la izquierda del r-ésimo factor de descuento en α_I^* es inferior o igual la desviación máxima que se produce por tomarse su aproximación triangular, la cual notamos como $D_I^*(r)$, se debe cumplir que:

$$C_r D_I^*(r) \geq C_r D_{Ir}(\alpha_I^*)$$

Y de esta forma:

$$D_I^* \leq \sum_{r=1}^{n} C_r D_I^*(r)$$

Con un razonamiento análogo podremos acotar superiormente la desviación que se comete en los extremos superiores de los α-cortes por tomar para ${}_{d|}\widetilde{V}_0^n$, ${}_{d|}\widetilde{V}_0^{n}{}'$. Dicha acotación vendrá dada por:

$$D_D^* \leq \sum_{r=1}^{n} C_r D_D^*(r)$$

De esta forma, y partiendo de los resultados expuestos en el apartado 1.4.2., el error máximo que se puede cometer en el nivel de presunción de un valor por tomar la aproximación triangular del valor actual de la renta vendrá dado por:

$$\left|\mu_{{}_{d|}\widetilde{V}_0^n}(x) - \mu_{{}_{d|}\widetilde{V}_0^{\prime n}}(x)\right| \leq \text{Max}\left\{\frac{D_I^*}{{}_{d|}V_0^{1,n}(1) - {}_{d|}V_0^{1,n}(0)}, \frac{D_D^*}{{}_{d|}V_0^{2,n}(0) - {}_{d|}V_0^{2,n}(1)}\right\} = \varepsilon$$

Donde asimismo, dicha acotación, ε, está limitada superior e inferiormente por:

$$\text{Max}\left\{\frac{D_I(0'5)}{{}_{d|}V_0^{1,n}(1) - {}_{d|}V_0^{1,n}(0)}, \frac{D_D(0'5)}{{}_{d|}V_0^{2,n}(0) - {}_{d|}V_0^{2,n}(1)}\right\} \leq \varepsilon \leq \text{Max}\left\{\frac{\sum_{r=1}^{n} C_r D_I^*(r)}{{}_{d|}V_0^{1,n}(1) - {}_{d|}V_0^{1,n}(0)}, \frac{\sum_{r=1}^{n} C_r D_D^*(r)}{{}_{d|}V_0^{2,n}(0) - {}_{d|}V_0^{2,n}(1)}\right\}$$

A continuación presentamos los resultados obtenidos aplicando ambas formas de aproximación de la acotación del error en el nivel de pertenencia de un valor, ε por tomarse la aproximación triangular al valor actual de la renta, ${}_{d|}\widetilde{V}_0^{n}{}'$. En la aplicación que presentamos se ha supuesto las rentas anuales con 3, 5, 15 y 50 términos, y que pueden ser constantes o variables en progresión geométrica con una razón q=1’1 y q=0’9. Los diferimientos posibles de éstas son d=0,1,10 y 20 años y los tantos efectivos anuales de valoración son los números borrosos triangulares $\widetilde{i}$ =

(0'025, 0'03, 0'035), $\tilde{i}$ = (0'01, 0'03, 0'05), $\tilde{i}$ = (0'065, 0'07, 0'075) e $\tilde{i}$ = (0'05, 0'07, 0'09). Respecto a las rentas constantes, los resultados que obtenemos son:

	$\tilde{i}$ = (0'025, 0'03, 0'035)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,006	0,018	0,002	0,002	0,006	0,018
5	0,002	0,003	0,007	0,019	0,002	0,003	0,007	0,019
15	0,007	0,008	0,011	0,022	0,007	0,008	0,011	0,022
50	0,013	0,014	0,017	0,027	0,013	0,014	0,017	0,027
	$\tilde{i}$ = (0'01, 0'03, 0'05)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,007	0,010	0,026	0,076	0,007	0,010	0,026	0,076
5	0,008	0,011	0,027	0,077	0,008	0,011	0,027	0,077
15	0,029	0,032	0,046	0,092	0,030	0,032	0,046	0,093
50	0,054	0,056	0,069	0,112	0,054	0,056	0,069	0,113
	$\tilde{i}$ = (0'065, 0'07, 0'075)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,006	0,014	0,002	0,002	0,006	0,014
5	0,002	0,003	0,006	0,014	0,002	0,003	0,006	0,014
15	0,007	0,008	0,010	0,017	0,007	0,008	0,010	0,017
50	0,013	0,013	0,016	0,022	0,013	0,013	0,016	0,022
	$\tilde{i}$ = (0'05, 0'07, 0'09)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,006	0,009	0,023	0,059	0,006	0,009	0,023	0,059
5	0,008	0,011	0,025	0,060	0,008	0,011	0,025	0,060
15	0,028	0,031	0,042	0,072	0,028	0,031	0,043	0,073
50	0,052	0,054	0,065	0,091	0,052	0,054	0,065	0,092

Los resultados que obtenemos si las rentas varían en progresión geométrica según una razón q=1'1 son:

	$\tilde{i}$ = (0'025, 0'03, 0'035)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,007	0,025	0,002	0,002	0,007	0,025
5	0,002	0,003	0,007	0,025	0,002	0,003	0,007	0,025
15	0,007	0,008	0,012	0,031	0,007	0,008	0,012	0,031
50	0,013	0,014	0,018	0,036	0,013	0,014	0,018	0,036
	$\tilde{i}$ = (0'01, 0'03, 0'05)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,007	0,010	0,028	0,100	0,007	0,010	0,028	0,101
5	0,008	0,012	0,030	0,103	0,008	0,012	0,030	0,103
15	0,030	0,033	0,050	0,122	0,030	0,033	0,050	0,123
50	0,054	0,057	0,073	0,144	0,054	0,057	0,073	0,146

	$\tilde{i}$ = (0'065, 0'07, 0'075)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,006	0,022	0,002	0,002	0,006	0,022
5	0,002	0,003	0,007	0,022	0,002	0,003	0,007	0,023
15	0,007	0,008	0,011	0,027	0,007	0,008	0,011	0,027
50	0,013	0,014	0,017	0,032	0,013	0,014	0,017	0,032
	$\tilde{i}$ = (0'05, 0'07, 0'09)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,006	0,010	0,026	0,090	0,006	0,010	0,026	0,090
5	0,008	0,011	0,028	0,091	0,008	0,011	0,028	0,092
15	0,028	0,031	0,046	0,109	0,028	0,031	0,046	0,110
50	0,052	0,054	0,069	0,130	0,052	0,055	0,069	0,131

Por otra parte, los resultados que obtenemos si la renta es variable en progresión geométrica con una razón de variación q=0'9:

	$\tilde{i}$ = (0'025, 0'03, 0'035)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,005	0,010	0,002	0,002	0,005	0,010
5	0,002	0,003	0,006	0,010	0,002	0,003	0,006	0,010
15	0,007	0,008	0,010	0,013	0,007	0,008	0,010	0,013
50	0,013	0,014	0,016	0,018	0,013	0,014	0,016	0,018
	$\tilde{i}$ = (0'01, 0'03, 0'05)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,006	0,009	0,022	0,040	0,006	0,009	0,022	0,040
5	0,008	0,011	0,023	0,040	0,008	0,011	0,023	0,040
15	0,029	0,032	0,041	0,053	0,029	0,032	0,041	0,053
50	0,054	0,056	0,064	0,074	0,054	0,056	0,065	0,075
	$\tilde{i}$ = (0'065, 0'07, 0'075)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,002	0,002	0,005	0,007	0,002	0,002	0,005	0,007
5	0,002	0,003	0,005	0,007	0,002	0,003	0,005	0,007
15	0,007	0,008	0,009	0,011	0,007	0,008	0,009	0,011
50	0,013	0,013	0,015	0,016	0,013	0,013	0,015	0,016
	$\tilde{i}$ = (0'05, 0'07, 0'09)							
	Acotación inferior				Acotación superior			
d\n	**3**	**5**	**15**	**50**	**3**	**5**	**15**	**50**
3	0,006	0,009	0,020	0,031	0,006	0,009	0,020	0,031
5	0,008	0,010	0,021	0,031	0,008	0,010	0,021	0,031
15	0,028	0,030	0,038	0,045	0,028	0,030	0,038	0,045
50	0,052	0,053	0,061	0,066	0,052	0,054	0,061	0,066

Podemos realizar las siguientes apreciaciones sobre los resultados obtenidos:

a) A medida que aumenta la duración, el diferimiento o ambas magnitudes en una renta, la validez de la aproximación triangular empeora, pudiendo darse el caso, si la duración de la renta y/o el diferimiento es muy alejado, que para una escala endecadaria, la aproximación triangular a $_{d|}\widetilde{V}_0^n$ debe ser rechazada. Ello es debido a que a medida que aumentamos la duración de la renta, el diferimiento, o ambas magnitudes se incorporan en la valoración factores de actualización más alejados, para los cuales, la aproximación triangular proporciona mayor error en el nivel de presunción.
b) Si el interés de actualización es más incierto –tiene mayor radio-, el error que se comete por aproximar triangularmente el valor actual de una renta es también superior, ya que los errores que se cometen en los factores de actualización que intervienen en el cálculo del valor actual de la renta aumentan. Asimismo, a medida que aumenta la magnitud del interés de valoración, entendiéndose por magnitud su centro, el error cometido disminuye. Ello es debido a que el error cometido en los factores de descuento de cada uno de los capitales que conforman la renta también disminuye.
c) Si comparamos el error cometido en las rentas inmediatas y vencidas (d=1), que en nuestro caso finalizan, respectivamente dentro de 3, 5, 15 y 50 años y para un tipo de interés de valoración dado, con el error cometido en un capital financiero con dicho vencimiento –los resultados fueron obtenidos en el apartado 4.2.3.2.-, podemos comprobar que el error que se comete en la aproximación triangular del valor actual del capital es superior. Ello es debido a que en una renta el error viene dado como una media ponderada de los errores que se cometen en los factores de actualización que intervienen en el cálculo de su valor actual, y por tanto, el error cometido para aquéllos capitales con vencimientos más alejados –que es más elevado- queda contrarrestado por el bajo error cometido en la aproximación triangular del valor actual de los capitales con vencimiento más cercano.
d) Podemos ver que, a igualdad de intereses de valoración, diferimientos y número de términos, el error que se comete al aproximar triangularmente el valor actual variable en progresión geométrica de razón q>1 –las cuantías son crecientes-, es superior al que se comete al aproximar triangularmente el valor actual de una renta constante, y, asimismo, dicho error en la función de pertenencia es superior al error que se comete al aproximar triangularmente el valor actual de la renta variable en progresión geométrica con cuantías decrecientes. Ello es debido a que en el caso de que las cuantías sean crecientes, los factores de actualización con vencimientos más alejados tienen mayor peso en el cálculo del valor actual de la renta, ya que las cuantías que les multiplican son superiores. Por tanto, si aceptamos que el error que podemos cometer como máximo en el nivel de pertenencia de un valor al aproximar triangularmente el valor actual de una renta viene dado por una media ponderada de dichos errores para los factores de actualización que intervienen en su valoración, en las rentas con

términos crecientes el error que se comete en los factores de actualización con vencimientos más alejados toma mayor importancia frente a los errores cometidos por la aproximación triangular de los factores de actualización con vencimientos menos alejados. Por supuesto, si las cuantías son decrecientes, en la determinación del error máximo que se comete en el nivel de pertenencia de un valor por la aproximación triangular del valor actual de la renta, toman mayor peso los errores cometidos por la aproximación de los factores de descuento más cercanos en el tiempo, que son los errores más pequeños, ya que los coeficientes ponderadores de dichas cuantías –los capitales- asociados a vencimientos cercanos toman mayores valores que las cuantías de los capitales más alejados.