

CAPÍTULO 1:

ESTIMACIÓN DE LOS INTERESES FUTUROS MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

Para realizar la valoración financiera de cualquier activo (acciones, bonos, proyectos de inversión etc.) debemos actualizar los flujos monetarios que la posesión de dicho activos procura a lo largo del tiempo. Para ello es necesario conocer los tipos de actualización que en cada instante deben aplicarse a dicho activo, los cuales surgen como la adición de los tipos de interés libre de riesgo de insolvencia (tipos de la deuda pública) y una prima de riesgo inherente a la naturaleza del activo que valoremos. Evidentemente, si el activo financiero no conlleva ningún tipo de riesgo de insolvencia, los intereses que se utilizarán para valorar los mismos no incluirán una prima de riesgo.

En el capítulo anterior hemos analizado como valorar financieramente un conjunto de capitales cuando éstos y los intereses de valoración vienen dados a través de números borrosos, lo cual, numerosos autores, consideran una forma de estimación que en la mayor parte de situaciones resulta más realista. Sin embargo, aunque este problema ha sido analizado y resuelto con éxito en muchos trabajos, la estimación de los tipos futuros como números borrosos ha sido objeto de poca atención, suponiéndose que vienen dados por estimaciones subjetivas de expertos. Nosotros pretendemos, en la medida de lo posible, dar una solución a este problema, basada en la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés borrosa, ya que ésta recoge implícitamente las expectativas de los agentes que actúan en los mercados de renta fija – asimilables a los “expertos”- sobre la evolución de los tipos de interés futuros.

Así, en este capítulo analizaremos brevemente, y en un ambiente de certeza, los diferentes tipos de interés que rigen en los mercados de renta fija. Dentro de estos tipos, serán de especial importancia para nuestro objetivo los denominados tipos forward, o tipos que implícitamente anticipa el mercado para el futuro en los precios y rentabilidades de los instrumentos que se negocian en dicho mercado. Después analizaremos las distintas teorías explicativas sobre el proceso de formación de los tipos que rigen en los mercados de renta fija, de forma que quedará explicado el marco conceptual que se asume al identificar a los tipos forward con los tipos estimados para el futuro así como las debilidades de dicha hipótesis. Posteriormente realizaremos unos breves comentarios sobre los métodos que son habitualmente utilizados en la estimación de la ETTI. Nuestras propuestas se inspiraran en un grupo de métodos que podemos etiquetar de econométricos. Por último justificaremos y motivaremos la necesidad de la estimación de la ETTI

a través de subconjuntos borrosos. Analizaremos que aspectos, a nuestro entender, puede aportar este instrumento matemático a los métodos de estimación de la ETTI ya existentes y en que puede ser de ayuda una estimación borrosa de la ETTI a la valoración financiera en condiciones de incertidumbre.

1.1. ANÁLISIS DE LAS TASAS DE INTERÉS QUE RIGEN EN LOS MERCADOS DE DEUDA PÚBLICA

Es conocido que el interés es la cuantificación del nivel de preferencia por la liquidez en una economía, y se trata de la compensación que reciben los oferentes de fondos por renunciar al consumo presente para posponer el mismo a momentos futuros. Asimismo, el interés que en un momento concreto rija en la economía será determinado por el necesario equilibrio entre oferta de fondos y la demanda de liquidez, viniendo esta última determinada por las oportunidades de inversión productivas de las empresas y los gastos e inversiones del estado.

La demanda de fondos es realizada por los prestatarios en gran medida mediante la emisión de activos financieros en los mercados financieros, quedando completado el trasvase de liquidez de los oferentes de fondos hacia los demandantes cuando los oferentes adquieren los títulos en dichos mercados. El equilibrio de la oferta y demanda determinará el precio de los instrumentos financieros emitidos por las empresas y el estado y no directamente la rentabilidad de los mismos. Por supuesto, podemos inferir a través de dichos precios la rentabilidad de los instrumentos emitidos, que obviamente, será un reflejo del grado de preferencia por la liquidez que impera en la economía.

A continuación analizamos distintos tipos de tasas de interés que habitualmente se manejan en los mercados de renta fija, esto es, el rendimiento interno (TIR) de un título de renta fija, los tipos al contado y los tipos spot, explicando su forma de cálculo, su significado económico, y su forma de aplicación en la valoración financiera. Para la determinación de todas estas tasas de interés deberemos partir del conocimiento de aquella que es directamente observable: la rentabilidad de los instrumentos financieros que emiten los demandantes de fondos y cuya contraprestación sean capitales ciertos, es decir, deberemos hallar la rentabilidad de los instrumentos de renta fija.

1.1.1. Rendimiento interno de un título de renta fija

Definimos como rendimiento interno de un título de renta fija, rentabilidad interna o TIR al interés que equilibra el precio y el valor de la corriente de cobros que genera dicho título.

Veamos como hallar la TIR de un título de renta fija, diferenciando dos tipos de títulos:

Bonos cupón cero

Son títulos que se emiten al descuento. La posesión de un activo de este tipo por parte del comprador o prestamista implica la obtención de un único pago futuro, el nominal o principal del título que notaremos como C , en un vencimiento t prefijado, es decir, la obtención del capital financiero (C, t) . En el mercado español, sin ánimo de ser exhaustivos, podemos identificar como instrumentos u operaciones más habituales con estructura cupón cero:

Si el prestatario es el estado:

- a) Letras del Tesoro, cuyos vencimientos oscilan, en el momento de la emisión, entre tres meses y un año y medio.
- b) Repos sobre instrumentos de deuda pública.
- c) Strips sobre bonos y obligaciones del estado. Son títulos que se obtienen como segregación en títulos independientes de la corriente de capitales que generan bonos y obligaciones del estado. Los vencimientos negociables abarcan en la actualidad hasta treinta años.

Estos activos suelen negociarse en el mercado de deuda pública anotada (MDPA).

Si el emisor es un ente privado, los activos más comunes son:

- a) Pagarés de empresa. Al igual que para las letras, sus vencimientos oscilan en el momento de la emisión, entre tres meses y un año y medio.
- b) Bonos cupón cero. Su emisión es a más de un año y medio y son poco frecuentes en el mercado español.
- c) Repos sobre instrumentos de renta fija privada, generalmente, sobre pagarés de empresa.

El mercado en que normalmente se negocian estos instrumentos es el mercado de los intermediarios de activos financieros (MAIAF) y, en menor grado, las bolsas de valores.

Cualquiera de estas operaciones financieras tiene una estructura temporal que podemos representar como:



donde P es el precio del activo, C el nominal y t el vencimiento. Así, la tasa interna de rendimiento (TIR), I , de un título con vencimiento en t , vendrá determinada por la ecuación:

$$P = C(1+I)^{-t} \Rightarrow I = \left(\frac{C}{P}\right)^{1/t} - 1$$

Obsérvese que hemos supuesto que la rentabilidad se mide según un tanto efectivo anual de interés compuesto. En el mercado, para los títulos cupón cero con vencimiento a menos de un año, que son los más negociados, la TIR de los mismos suele expresarse como un tanto r de interés simple vencido. En este caso, esta tasa se obtiene como:

$$C = P\left(1 + r \frac{d}{B}\right) \Rightarrow r = \left(\frac{C - P}{P}\right) \frac{B}{d}$$

donde B es la base que utiliza el mercado –por ejemplo, en el MDPA es de 360 días y en el MAIAF de 365-, y d , el número de días que faltan para el vencimiento del activo en el momento de realizarse la transacción. Si queremos expresar esta tasa como un tanto efectivo anual de interés compuesto, I , con una base del año natural, dicho tanto será obtenido a través de la expresión:

$$I = \left(1 + r \frac{d}{B}\right)^{\frac{365}{d}} - 1$$

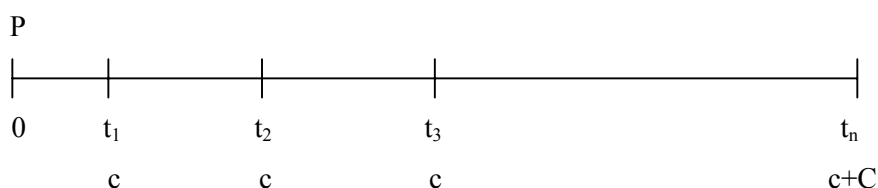
Bonos americanos

Estos activos procuran a su comprador un conjunto de cobros periódicos (cupones) vencidos y el reembolso, en el momento de su vencimiento, del nominal o principal del título. Podemos notar la corriente de flujos que genera un bono americano como un conjunto de capitales financieros $\{(c, t_1), (c, t_1), \dots, (c, t_n); (C, t_n)\}$, donde c es el cupón, y C el valor nominal del título. Este tipo de títulos se suele emitir a plazos superiores a dos años por empresas y el estado para obtener financiación a largo plazo. En el caso de emisiones privadas, es relativamente común que estos títulos incorporen algún derecho adicional como una opción de convertibilidad en acciones, warrants sobre acciones de la empresa, la opción de amortización anticipada por parte del emisor, etc. para hacer la adquisición de dichos títulos más atractiva al prestamista y reducir así el coste de la financiación. En cualquier caso, éstas son cuestiones que no analizaremos, entre otras razones, porque nuestro interés va a estar centrado en la formación de precios en el mercado de deuda pública. Asimismo, lo más frecuente es que los cupones, que corresponden al pago de los intereses del emisor, estén prefijados de antemano. De esta forma, un cambio en el interés que rija en el mercado afectará al precio de los títulos, no a los cupones que éstos proporcionan. Sin

embargo, bien es cierto que existen emisiones privadas donde los cupones de los bonos están indexados, de forma que los cambios que se produzcan en el interés de mercado quedan reflejados en el cupón que ofrezcan los títulos, y no tanto en su precio.

En el contexto del mercado español, los bonos americanos emitidos por el estado se denominan bonos del estado si el vencimiento del título en el momento de la emisión es 3 o 5 años, y obligaciones del estado, si el vencimiento en el momento de la emisión es 10, 15 y 30 años. Estos títulos se negocian en el MDPA, y el cupón que ofrecen en casi la totalidad de las emisiones es anual. Respecto a las emisiones privadas, suelen también denominarse bonos si su maduración es hasta 5 años, y obligaciones para maduraciones superiores. Sin embargo, la periodicidad del devengo de cupones en estos títulos no necesariamente es anual, aunque en cualquier caso, si que es inferior o igual al año. El mercado en que suelen negociarse estos títulos es el MAIAF, y en menor grado, las bolsas de valores, tal como ocurría con los títulos cupón cero.

Así, la adquisición de un bono americano implica una operación financiera con la siguiente estructura temporal:



donde $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = P$, con P la periodicidad del devengo de cupones. Para los títulos de deuda pública, $P=1$ generalmente, tal como ha sido comentado.

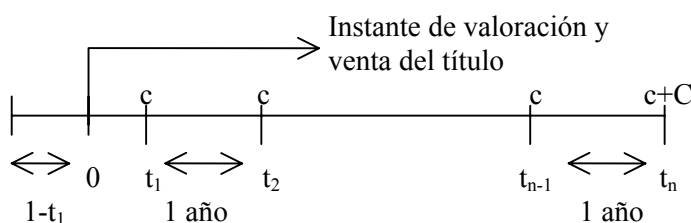
El rendimiento interno del mismo (TIR) de un bono con vencimiento en t_n, I, se hallará planteando:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I)^t} + \frac{C}{(1+I)^{t_n}}$$

Evidentemente, no existe solución analítica para la TIR en esta ecuación, debiendo ser hallada a través de algún método numérico, como por ejemplo, Newton-Raphson. Sin embargo, dicha TIR, por la estructura de la operación financiera que tratamos, siempre existe y es única¹.

¹ Matemáticamente, la TIR es la raíz de la función polinómica $f(x) = -P + cx^{t_1} + cx^{t_2} + \dots + cx^{t_n} + Cx^{t_n}$, donde $x=(1+I)^{-1}$. Dado que sólo existe un cambio de signo en los coeficientes, existe una única raíz tal que $x>0$, y por tanto, existe una única tasa $I>-1$.

Una cuestión a reseñar es que en este caso, hemos tomado como precio del título, el precio con el cupón corrido. Sin embargo, en el mercado español el precio que se publica es el precio ex-cupón o sin el cupón corrido. En este caso, P se halla añadiendo al precio ex-cupón el cupón corrido, que no es más que la parte proporcional del cupón correspondiente al tiempo que ha transcurrido desde el cobro del último hasta el momento de la compraventa del título. La relación existente entre el precio ex-cupón, el precio con el cupón corrido, P y dicho cupón corrido, puede representarse a través de la siguiente gráfica, donde hemos supuesto cupones anuales:



Podemos comprobar que según el gráfico, en el momento de valoración del título, existe una parte del cupón que ya ha devengado o corrido, exactamente la proporción $(1-t_1)$, por lo que el cupón corrido es $c(1-t_1)$. Si se pretendiera vender el título, dicha parte del cupón debería ser exigida por el vendedor, ya que son los intereses correspondientes a la tenencia del título durante dicha proporción de tiempo. Así, el precio de compraventa del título puede desglosarse en dos partes. La primera es el cupón corrido, siendo el resto lo que se denomina como precio ex-cupón, es decir, el precio de compraventa que no incluye la parte del primer cupón a cobrar que ya ha devengado.

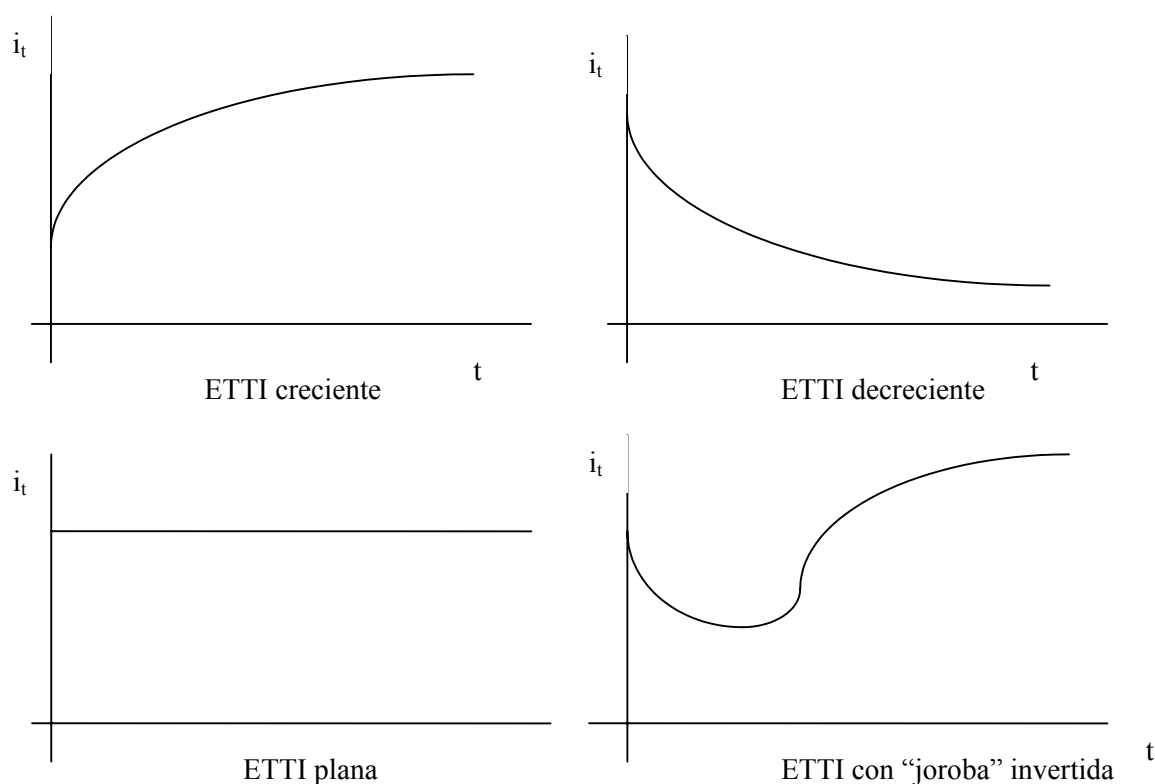
De la siguiente sección en adelante, cuando hagamos referencia a los distintos tipos de interés que se utilizan en los mercados de renta fija, estaremos refiriéndonos a los mercados de deuda pública. En primer lugar, porque son los que tienen mayor negociación y liquidez y porque los tipos que en ellos se negocian son los que inmediatamente se trasladan al resto de mercados. En segundo lugar, porque los títulos del estado se negocian sin ningún tipo de prima de riesgo, siendo la rentabilidad de éstos la que sirve de base para fijar el interés del resto de emisiones. A estas últimas, se les exigirá el interés de la deuda pública más una prima de riesgo², que dependerá de la capacidad del emisor de hacer frente a compromisos futuros. La solvencia de los emisores suele publicitarse en el mercado a través de un rating que de dicho emisor ha realizado una empresa de rating –Standard & Poors, Moody's, etc.-.

² Obsérvese que identificamos prima de riesgo con prima de insolvencia. Evidentemente, el concepto de prima de riesgo es mucho más amplio que el de prima de insolvencia. Por ejemplo, las emisiones de deuda pública de España y Alemania, tienen el mismo riesgo de insolvencia, que es nulo. El hecho de que la deuda alemana rinda menos interés es debido a que a la deuda española se le exige una prima por riesgo, en este caso soberano, que viene dado por el valor de las variables macroeconómicas.

1.1.2. Los tipos spot y la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI)

Es evidente que en una economía no existe, aún para el mismo emisor, un único tipo de interés con independencia del plazo al que dicho emisor se endeuda. Para cada plazo el mercado descuenta una unidad monetaria con un interés distinto. Así, el coste de oportunidad del dinero en una economía no es, en términos relativos, el mismo con independencia del plazo. A dicho interés para un plazo t dado se le denomina interés al contado o interés spot para t , y lo notaremos como i_t . Por otra parte, al valor actual de una unidad monetaria con vencimiento a t años, $f_t = (1+i_t)^{-t}$, la denominaremos como factor de actualización spot.

Así, definiremos como estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) en un mercado concreto –entendemos por mercado a un conjunto de títulos con idéntica calificación crediticia y nominados en una misma moneda- y en una fecha concreta, a la relación funcional entre los tipos al contado en vigor y el vencimiento de dichos tipos. Así, la ETTI vendrá dada por una función $i_t = f(t)$. La ETTI que se construye con los títulos cuyo emisor es el estado es la que sirve de referencia para fijar el interés de las emisiones privadas, de forma que, deberían situarse por encima de la ETTI sin riesgo de insolvencia las ETTIs correspondientes a emisores con niveles de riesgo superiores. Asimismo, las formas más habituales de ETTIs son:



A continuación relacionamos las TIRs que se obtienen en los dos tipos de títulos analizados (cupón cero y bonos americanos) y con un vencimiento dado, con los tipos spot que rigen en el mercado donde se negocian y que tienen asociados el mismo vencimiento.

Para un título cupón cero, dado que la relación entre el precio y TIR de un título es:

$$P = C(1+I)^{-t}$$

y que el precio de un título podría hallarse a través de los tipos spot como:

$$P = C(1+i_t)^{-t}$$

podemos identificar el rendimiento (TIR) de un título cupón cero con vencimiento en t años, con el tipo spot a dicho vencimiento, es decir: $i_t \equiv I$.

En cambio, si el título que analizamos es un bono americano, podemos observar que su precio se obtiene como función de la TIR de la forma:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I)^t} + \frac{C}{(1+I)^{t_n}}$$

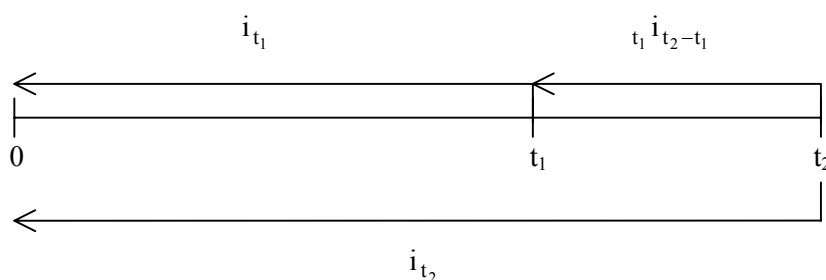
En cambio, si expresamos su precio en función de los tipos spot, éste se obtendrá como:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+i_t)^t} + \frac{C}{(1+i_{t_n})^{t_n}}$$

La conclusión es clara: el rendimiento interno de un título con vencimiento en t_n años no coincidirá, en general, con el tipo al contado para dicho plazo i_{t_n} , únicamente coincidirá si la ETTI es plana. Ello es debido a que estos títulos incorporan pagos intermedios (los cupones), de forma que su precio contiene información, no tan sólo sobre el tipo al contado al vencimiento del título, t_n , sino sobre tipos spot para plazos intermedios –los vencimientos de los cupones-. Así, el rendimiento de estos títulos (la TIR) será una “media” de los tipos spot que intervienen en la formación del precio del título. Así, a medida que se incremente el cupón de un título, el peso que toman los tipos spot en la determinación de su rentabilidad interna aumenta. De esta forma, la TIR bono americano se alejará más del tipo spot correspondiente al vencimiento del mismo si ofrece un mayor cupón. A este fenómeno, analizado con detenimiento en Buse (1970) y Caks (1977) se le denomina como sesgo de cupón. Evidentemente, con una ETTI de mercado creciente, a mayor cupón el diferencial tipo al contado-rentabilidad de un título aumentará, situándose en un nivel más bajo la rentabilidad de un título. Por supuesto, si la ETTI es decreciente, el sesgo de cupón también aumentará si aumentamos el cupón que ofrece un título. En este caso, la TIR del título tomará valores cada vez más elevados respecto al tipo spot con el mismo plazo.

1.1.3. Tipos de interés implícitos a plazo o tipos forward

A partir de la ETTI, podemos inferir los denominados tipos de interés forward o implícitos, que pueden ser interpretados como los tipos spot que, según la estructura actual de los tipos de interés, el mercado anticipa para el futuro, tal como comentaremos en epígrafes posteriores. Se puede observar que el tipo al contado aplicable a una unidad monetaria con vencimiento en t_1 y el tipo spot asociado a un vencimiento t_2 , con $t_2 > t_1$, definen un tipo forward ${}_t i_{t_2-t_1}$, que puede ser interpretado como el tipo spot que regirá para un plazo t_2-t_1 dentro de t_1 años. Gráficamente los podemos representar como:



Dado que el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento dentro de t_2 años debe coincidir si la actualizamos directamente con el tipo al contado para el vencimiento t_2 como si la actualizamos t_2-t_1 años con el tipo implícito correspondiente, y después t_1 años con i_{t_1} , planteando³:

$$\left(\frac{1}{1+i_{t_1}} \right)^{t_1} \left(\frac{1}{1+{}_t i_{t_2-t_1}} \right)^{t_2-t_1} = \left(\frac{1}{1+i_{t_2}} \right)^{t_2}$$

obtenemos que el tipo implícito a t_2-t_1 años dentro de t_1 años es:

$${}_t i_{t_2-t_1} = \left[\frac{(1+i_{t_2})^{t_2}}{(1+i_{t_1})^{t_1}} \right]^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$$

Por comodidad para los desarrollos que realizaremos en apartados posteriores, expresaremos los tipos forward en función de los factores de actualización spot. Así, podremos plantear y obtener:

$$f_{t_1} f_{t_2-t_1} = f_{t_2} \Rightarrow f_{t_2-t_1} = \frac{f_{t_1}}{f_{t_2}}$$

siendo $f_{t_2-t_1}$ el factor de actualización que define el tipo de interés forward que estamos hallando. Así,

$${}_{t_1}i_{t_2-t_1} = \left[\frac{f_{t_1}}{f_{t_2}} \right]^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$$

Normalmente, tal como afirman Babbell y Merrill (1996, p.2), los tipos forward suelen ser calculados en intervalos de igual periodicidad. Así, cuando analizamos la ETTI en el largo plazo, se suelen calcular únicamente los tipos forward a un año o tipos futuros al contado para un año. Así, el tipo forward a un año para dentro de $t-1$ años, ${}_{t-1}i_1$ quedará definido por el tipo spot a $t-1$ años y el tipo spot a t años de la forma:

$${}_{t-1}i_1 = \left[\frac{(1+i_t)^t}{(1+i_{t-1})^{t-1}} \right] - 1 \quad \text{ó} \quad {}_{t-1}i_1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1$$

y el factor de actualización que dicho tipo implícito determina, ${}_{t-1}f_1$:

$${}_{t-1}f_1 = \frac{f_t}{f_{t-1}}$$

Por supuesto, podemos relacionar los tipos implícitos o forward que define la ETTI con los tipos spot y con las TIRs de los títulos. Sobre la base de las relaciones expuestas en el presente apartado, no es difícil descomponer el tipo al contado a t años –supongamos años enteros- en los tipos forward a un año que lo componen. Así, dado que⁴:

$$(1+i_t)^t = \prod_{r=1}^t (1+{}_{r-1}i_1)^{-1}$$

obtenemos:

$$i_t = \sqrt[t]{\prod_{r=1}^t (1+{}_{r-1}i_1)} - 1$$

Así pues, el tipo de interés spot se halla como una "media geométrica" de los tipos de interés forward que el mercado anticipa para cada uno de los t años⁵.

³ Obsérvese que, desde el punto de vista de la matemática de las operaciones financieras, lo que estamos utilizando para la deducción de los tipos forward es la propiedad de escindibilidad del factor financiero.

⁴ Nótese nuevamente, que desde el punto de vista de las matemáticas financieras, el hecho de que realicemos la descomposición del tipo spot en un conjunto de tipos implícitos a un año es consecuencia de la escindibilidad del factor financiero.

⁵ Es fácil comprobar que si utilizáramos la capitalización instantánea, el tipo al contado instantáneo es la media aritmética de los tipos forward instantáneos. Sin embargo, aunque la capitalización instantánea es muy utilizada en estudios académicos, nosotros no la contemplamos porque el régimen financiero utilizado en el mercado para el largo plazo es, generalmente, el interés compuesto de capitalización anual.

Por otra parte, a partir del interés forward podemos también expresar el precio de un instrumento de renta fija con cupones periódicos (suponemos que son anuales y con vencimientos enteros) como:

$$P = \sum_{j=1}^t \frac{c}{\prod_{r=1}^j (1+r_{r-1}i_1)} + \frac{C}{\prod_{r=1}^t (1+r_{r-1}i_1)}$$

Si interpretamos los tipos implícitos como tipos anticipados por el mercado, podemos comprobar que los precios de la renta fija incorporan las expectativas que tienen los agentes que intervienen en el mercado sobre la evolución futura de los tipos de interés, de forma que la TIR de un título que vence en t es una suerte de media de los tipos futuros hasta dicho vencimiento anticipados por en el mercado. Ello era previsible, ya que hemos comprobado que la TIR es una “media” de los tipos al contado de los vencimientos en los que existe pago de cupones o de principal, y estos últimos tipos, una media de los intereses forward a un año.

1.2. TEORÍAS EXPLICATIVAS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

En este epígrafe analizaremos las teorías más relevantes acerca del proceso de formación de precios e intereses en los mercados financieros de renta fija, esto es, las teorías explicativas de la ETTI. Este breve análisis es necesario para justificar en cual de ellas basaremos nuestra propuesta de estimación de tipos futuros a través de números borrosos. Éstas son:

- a) La teoría de las expectativas racionales
- b) La teoría de la preferencia por la liquidez
- c) La teoría de la segmentación de mercados
- d) La teoría del hábitat preferido

Antes de dar unos breves apuntes sobre estas teorías, debemos puntualizar que todas ellas se fundamentan en dos ideas financieras. La primera de ellas es la del arbitraje y el comportamiento racional de los inversores. La asunción de la misma nos llevará a considerar que los tipos forward son los tipos que los inversores anticipan sobre los tipos al contado en momentos venideros del tiempo. La segunda idea está relacionada con el riesgo de interés asociado a cualquier título de renta fija. Dentro de este riesgo, debemos distinguir dos vertientes:

- a) El riesgo de precio o riesgo de que un título de renta fija pierda valor ante subidas de tipos de interés. En este caso hay que tener en cuenta que son más sensibles a variaciones del interés los títulos que presentan mayor vencimiento.

b) Sin embargo, debemos reseñar que el riesgo de un título de renta fija no viene dado por su vencimiento únicamente, sino por el vencimiento de los pasivos del inversor. Para carteras de renta fija, como por ejemplo, fondos de pensiones, que lleven asociadas pasivos de larga maduración, es más arriesgada una inversión en títulos a corto plazo que a largo plazo, porque dicha cartera se expone a que las sucesivas renovaciones de las inversiones deban ser realizadas a tipos de interés cada vez más pequeños, con el consiguiente riesgo de quiebra. En este caso, el riesgo de interés queda minimizado si el vencimiento de la cartera de inversiones se iguala con el de los pasivos, de forma que, es menos arriesgada la inversión en títulos de larga maduración.

Analicemos a continuación los principales postulados y conclusiones de cada una de las teorías.

1.2.1. La teoría pura de las expectativas racionales

Formulada por Lutz (1940), la idea básica de esta teoría es que los tipos al contado a un determinado plazo contienen información sobre las expectativas de los inversores sobre los tipos al contado que regirán en el futuro.

Esta teoría es desarrollada sobre la base de unas hipótesis excesivamente restrictivas, básicamente sobre la idea de que la actividad económica se desarrolla en un ambiente de absoluta certeza, y que los títulos de renta fija con diferentes vencimientos son perfectamente sustitutivos, de forma que, por ejemplo, invertir en un bono cupón cero con vencimiento a dos años es equivalente a invertir en un bono sin cupón con vencimiento a un año y volver a renovar dicha inversión. Bajo estas hipótesis, y aplicando un argumento de inexistencia de oportunidades de arbitraje, se llega a la conclusión de que los tipos spot son la media geométrica –si utilizamos el régimen financiero de interés compuesto- de los tipos que regirán en el futuro, de forma, que los tipos forward son un estimador perfecto de los tipos al contado futuro. Una demostración analítica de esta afirmación puede encontrarse en Meneu *et al.* (1992).

De esta forma, el rendimiento de una inversión para una maduración dada es igual con indiferencia de cómo se halla realizado, esto es, adquiriendo títulos cuyo vencimiento sea dicha maduración o invirtiendo en títulos de un menor vencimiento y renovando la inversión periódicamente.

Asimismo, con esta teoría, una ETTI creciente sería debida a una expectativa en el mercado alcista de los tipos de interés a corto plazo, una ETTI decreciente indicaría una expectativa bajista

sobre los mismos. Una ETTI horizontal, por supuesto, indicaría que no existen expectativas para el futuro de variación de los tipos de interés.

Somos conscientes de que es evidente que los tipos de interés que registrarán para periodos venideros en una economía son por naturaleza desconocidos, no vienen predeterminados. Dado que tradicionalmente se ha venido considerando que las magnitudes inciertas se comportan como variables aleatorias, según la teoría de las expectativas racionales podríamos interpretar al interés forward como un estimador insesgado de la esperanza matemática de los tipos al contado futuros. De esta forma, se asume implícitamente la indiferencia al riesgo de los agentes económicos que intervienen en el mercado. Como críticas o como ampliaciones de esta teoría, han surgido el resto de teorías que se analizan a continuación, las cuales incorporan la aversión al riesgo de los agentes económicos para explicar las diferentes formas que puede tomar la ETTI.

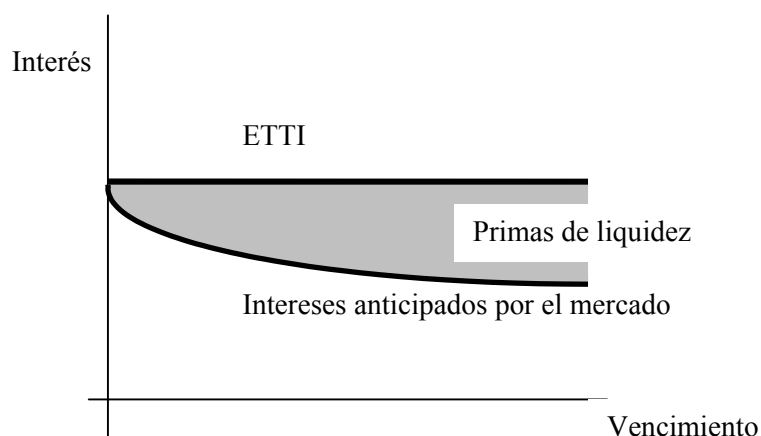
1.2.2. La teoría de la preferencia por la liquidez

Esta teoría, si bien acepta que los tipos de interés al contado a largo plazo contienen información sobre los tipos futuros a corto plazo, no acepta que los títulos de renta fija sean perfectamente sustitutivos entre sí con independencia de su vencimiento. Ello es debido a que ante un aumento dado en el interés imperante en una economía, los precios de los títulos con mayor vencimiento, al ser más sensibles ante cambios del tipo de interés, sufrirán mayores disminuciones en su precio. Si aceptamos que los inversores son, en general, adversos al riesgo, preferirán invertir en títulos a corto plazo y realizar sucesivas renovaciones si fuera preciso antes que invertir en títulos a largo plazo. De esta forma, para invertir en títulos a largo plazo, los inversores exigirán mayor interés al que realmente esperan obtener renovando inversiones de corto vencimiento para compensar el riesgo (de precio) más elevado que incorporan los títulos con mayor vencimiento. Por otra parte, los prestatarios aceptarán pagar un interés superior por endeudarse a largo plazo, con el fin de asegurarse un coste determinado para su deuda y evitar el riesgo de refinanciación, esto es, el riesgo de renovar préstamos cortos a tipos cada vez más elevados. Ello explicaría porque en condiciones normales la rentabilidad de la deuda emitida a largo plazo es más elevada, y por tanto, porque, con mayor frecuencia, se da en el mercado una ETTI creciente.

Por ejemplo, en el mercado español, en las sucesivas subastas de deuda pública realizadas durante 1998, las letras del tesoro a lo largo del año rindieron menos que los bonos y las obligaciones (la ETTI era creciente), cuando, las expectativas sobre los tipos futuros eran claramente bajistas, por la necesaria convergencia de los tipos de interés de los países que iban a entrar en la Unión Monetaria Europea. Sin embargo, dichas expectativas se pusieron de manifiesto en la progresiva disminución de las rentabilidades de todos los instrumentos de deuda pública, de forma que lo

que realmente se observó fue un desplazamiento hacia abajo de una ETTI creciente, más que una ETTI decreciente.

Por tanto, los tipos forward incorporarán información sobre los tipos futuros al contado, pero una información sesgada, ya que contienen una prima por el mayor riesgo de interés que soportan los títulos de mayor vencimiento. Es decir, los tipos forward serán los tipos al contado futuros anticipados por los agentes económicos más una prima debida al riesgo de precio asociado al vencimiento que estemos contemplando. Por supuesto, esta prima deberá ir creciendo a medida que aumente el vencimiento. Por ejemplo, una ETTI plana indicaría la existencia de una perspectiva bajista sobre el comportamiento futuro de los tipos de interés, de forma que gráficamente observaríamos:



De esta forma, el tipo de interés al contado que rige para un determinado momento del tiempo estaría formada como la resultante de la media geométrica de los tipos que el mercado anticipa en el futuro más una prima por la incertidumbre sobre los mismos. Evidentemente, dicha prima debe aumentar con el tiempo, ya que existe mayor incertidumbre sobre los tipos futuros y porque los títulos con mayor vencimiento presentan mayor riesgo de precio.

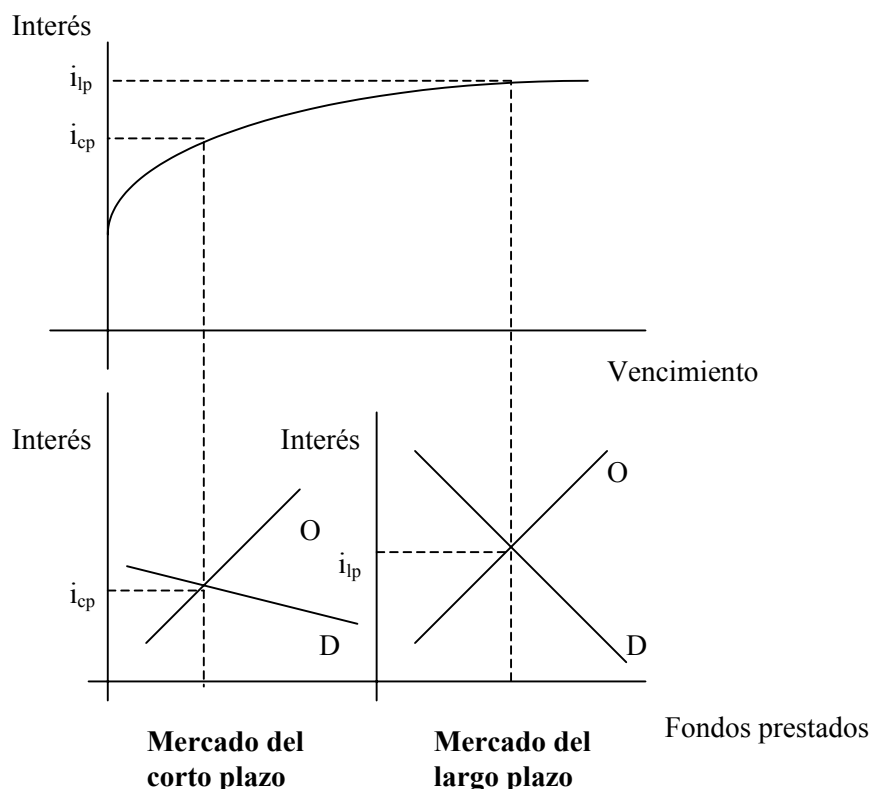
1.2.3. La teoría de la segmentación de mercados

Esta teoría fue formulada por Culbertson (1957) supone que los prestamistas y prestatarios son extremadamente adversos al riesgo, y que, por tanto, para no incurrir en el riesgo de precio y reinversión los primeros y en el de refinanciación los segundos, ajustan perfectamente su inversión o demanda de fondos a su horizonte planificador o hábitat. Asimismo, también considera que no solamente la aversión al riesgo de interés limita la movilidad de los inversores entre segmentos; otras restricciones, de tipo legal (como los coeficientes de inversión obligatorios de las entidades financieras en activos líquidos), el alto coste de la información que hace a los

agentes especializarse en un solo segmento o la rígida estructura de vencimientos de la cartera pasiva de planes de pensiones o aseguradoras son también factores que reafirman la existencia de hábitats independientes dentro del mercado de renta fija. De esta forma, no existe un único mercado de renta fija, sino diferentes mercados en función del vencimiento de los títulos que se negocien. Así, cada uno de los mercados determina los tipos de interés que equilibran oferta y demanda de fondos con independencia del resto de segmentos y de las expectativas sobre los tipos de interés futuros de los inversores.

De esta forma, el análisis que de la ETTI se haga no es relevante, ya que no refleja en ningún caso expectativas de los inversores. Sobre la base de esta teoría, deberemos concluir que los tipos forward no son indicativos de ningún tipo de expectativas, sino un mero artificio aritmético sin ningún sentido económico.

Si suponemos, por comodidad, que sólo existen dos segmentos, el mercado de deuda a corto plazo y el mercado de deuda a largo plazo, podremos observar que la ETTI quedaría determinada de la forma que se muestra en el gráfico:



1.2.4. La teoría del hábitat preferido

Formulada por Modigliani y Such (1966) y (1967), esta teoría combina los postulados e hipótesis del resto de teorías, de forma que, en su formulación tiene en cuenta expectativas por una parte, y por otra, el riesgo de interés de los títulos de renta fija en todas sus facetas.

Estos autores aceptan la hipótesis de que existen diferentes hábitats en los mercados de renta fija, y que los prestamistas y prestatarios son adversos al riesgo, de forma que, tal como postula Culbertson, su horizonte planificador será el determinante básico en sus decisiones de inversión o financiación. Así, en principio se acepta que existe una estructura de tipos diferente para cada uno de los hábitats, que vendrá dada por el necesario equilibrio entre oferta y demanda de fondos para dichos segmentos. Sin embargo, una oferta de fondos insuficiente en un determinado hábitat puede provocar que los emisores de activos deban primar la rentabilidad que ofrecen. De esta forma, los títulos de este submercado deberán ofrecer rendimientos superiores a las expectativas que sobre dicho plazo existen. En este caso, los oferentes de fondos que actúan en otros segmentos pueden encontrar compensaciones suficientes por el riesgo que les supone vender títulos de su hábitat y adquirir títulos de otros hábitats donde el interés ofrecido es más elevado que el de sus expectativas. Asimismo, si la oferta de fondos supera a la demanda de los mismos en un determinado hábitat, el efecto será el contrario: los emisores podrán emitir títulos con una rentabilidad inferior al de las expectativas sobre dicho segmento, existiendo en este caso una prima negativa sobre las expectativas.

De esta forma, algunos autores como Ezquiaga (1992) consideran que la teoría de la preferencia por la liquidez no sería más que un caso particular de la misma, donde únicamente existen primas positivas en los tipos al contado actuales, respecto a los tipos futuros anticipados.

Según la teoría del hábitat, para la interpretación de la ETTI, además de las expectativas, y de la aversión al riesgo de los inversores, contemplándose el mismo tanto en su vertiente de precio como en la vertiente del riesgo de reinversión, también deberemos considerar como se estructura la oferta y la demanda de fondos a lo largo de todos los vencimientos que definen a la curva de tipos cero. De esta forma, pueden existir primas positivas o negativas respecto los tipos al contado futuros que se anticipan el mercado, las cuales vendrán dadas por la interacción de todos los factores mencionados.

Como conclusión al apartado 1.2, debemos señalar que, en nuestra opinión, la teoría que mejor refleja el comportamiento real de la formación de precios e intereses en los mercados de renta fija es la teoría del hábitat preferido, ya que tiene en cuenta en su formulación más aspectos sobre la

toma de decisiones en los mercados de renta fija que el resto de teorías. Los inversores y prestatarios toman decisiones sobre la base de expectativas, ciertamente, pero también se enfrentan al problema del riesgo e incertidumbre sobre el comportamiento del interés futuro y la repercusión que sobre el valor de sus títulos tienen variaciones anticipadas del interés; y generalmente los agentes económicos son adversos al riesgo. Sin embargo, dado que la teoría de las expectativas racionales ofrece un marco operacional sencillo en el proceso de inferencia de los tipos de interés, a la vez que éste es suficientemente razonable, es frecuente considerar para posteriores aplicaciones de la ETTI que los tipos forward que en un momento dado se deducen de una ETTI reflejan las variaciones futuras de los tipos de interés que el mercado anticipa en un momento concreto, según la información disponible en dicho instante. A medida que al mercado llegue nueva información –lo cual nunca se puede prever-, los agentes en base a la misma, anticiparán un nuevo comportamiento de los tipos de interés futuros, cambiando así la forma de la ETTI. Sobre la base de esta premisa realizaremos nuestra propuesta de estimación del interés futuro a través de números borrosos.

1.3. APLICACIONES DE LA ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Es indudable la utilidad que presta a la economía financiera la estimación e interpretación de la ETTI. En concreto, la posibilidad de interpretar los tipos al contado que de ella se deducen en términos de expectativas sobre los intereses futuros – lo cual implica la asunción implícita de la teoría de las expectativas racionales-, ha permitido analizar y dar luz sobre diferentes cuestiones y problemas. Sin ánimo de ser exhaustivos, y recogiendo algunas posibles aplicaciones de la ETTI formuladas por diversos autores como Carleton y Cooper (1976), Mauleón (1990), Meneu *et al.* (1992) y Lamothe *et al.* (1995), podemos mencionar:

- a) La gestión de carteras de renta fija cuando en dicha gestión se aplican técnicas basadas en la duración y la convexidad.
- b) Instrumento para la contrastación de modelos sobre el comportamiento de la ETTI.
- c) Para detectar posibles ineficiencias en el mercado y oportunidades de arbitraje.
- d) Para cuantificar las primas de insolvencia en las rentabilidades de instrumentos de renta fija privada o primas de liquidez en los rendimientos de determinados instrumentos de renta fija pública –por ejemplo, en los Strips-.
- e) Como metodología para cuantificar el efecto de la fiscalidad en determinados activos financieros.

- f) Por las autoridades monetarias, como instrumento de análisis del efecto sobre el interés a largo plazo de su intervención en el tipo a corto plazo.
- g) Como herramienta para la correcta valoración de activos derivados como los Swaps, futuros, opciones, etc.
- h) Herramienta para la valoración financiera de activos reales o financieros.

Por otra parte, nuestro interés se basa en la utilización de la ETTI como herramienta para la predicción de los tipos de interés futuros, asumiéndose de esta forma la veracidad de la Teoría de las Expectativas Racionales. Así, la ETTI será un instrumento que nos permitirá obtener información sobre el consenso de los agentes del mercado en relación a la evolución futura de los tipos de interés. Esta interpretación y utilización es la base de la mayor parte de las aplicaciones de la ETTI ya comentadas. Para nuestros propósitos, esta utilización de la ETTI nos servirá, tal como se ha propuesto en el punto h), para valorar activos reales o financieros, en concreto, como propondremos en el último capítulo de la tesis, para fijar las primas en los seguros de vida. De esta forma, el valor actual, V_A , de un activo real o financiero: un bono, una acción o por extensión incluso una empresa, etc., si podemos reducirlo a un conjunto de capitales financieros $\{(C_1, 1); (C_2, 2); \dots; (C_t, t)\}$ se halla como:

$$V_A = \sum_{j=1}^t \frac{C_j}{\prod_{r=1}^j (1 + r_{r-1})}$$

Debemos hacer varias apreciaciones sobre la fórmula anterior, relativas al valor de los flujos y de los tipos de interés que se utilizan en el cálculo del valor actual del activo:

- a) Si los flujos son absolutamente ciertos, circunstancia que únicamente se dará en la deuda pública, las cuantías de los capitales financieros son los cupones –si es un bono americano- y el principal del instrumento analizado. El tipo de actualización correspondiente a cada periodo es el tipo de interés anticipado o tipo forward del mercado de deuda pública, que evidentemente, no contiene ninguna prima de riesgo. De esta forma $r_{-1}r_1 \equiv r_{-1}i_1$
- b) Pero en la mayor parte de supuestos se pretende valorar activos financieros emitidos por agentes privados. Si se trata de instrumentos de renta fija, el principal y los cupones no son cobros ciertos, ya que existe el riesgo de insolvencia del emisor. Por supuesto, si se realiza la valoración de otro tipo de activos como las acciones, los flujos son los dividendos, inciertos por naturaleza. La misma apreciación cabe hacer si realizamos la valoración de una empresa mediante la fórmula anterior. Dado que tradicionalmente la incertidumbre sobre las

magnitudes financieras se ha plasmado modelizando éstas como variables aleatorias, los flujos correspondientes a un momento j -ésimo serían una cuantía estocástica que notamos como C_j . A partir de dichas estimaciones a través de variables aleatorias, se ha realizado la correspondiente valoración financiera de dos formas:

- b.1) Tomar para C_j el denominado “equivalente cierto”, que se halla a través de la esperanza matemática de los flujos, $E[C_j] \forall j$ corregida con unos coeficientes que reflejan la aversión al riesgo del decisor, α_j . De esta forma $C_j = \alpha_j E[C_j]$, donde $\alpha_{j+1} \leq \alpha_j \leq 1 \forall j$. Dado que la introducción del riesgo se ha realizado en las cuantías de los capitales financieros, no hace falta realizar ninguna corrección en el interés calculatorio, de forma que podemos considerar a ${}_{r-1}r_1$ como el interés a un año libre de riesgo anticipado por el mercado para dentro de $r-1$ años, ${}_{r-1}i_1$.
- b.2) No corregir la esperanza matemática de los capitales que actualizamos, de forma que $C_j = E[C_j] \forall j$. Para introducir la aversión al riesgo del decisor deberemos corregir los intereses que son anticipados para el futuro en el mercado de deuda pública con una prima de riesgo. De esta forma hallaremos los tipos ${}_{r-1}r_1$ añadiendo a los tipos libres de riesgo ${}_{r-1}i_1$, la prima de riesgo correspondiente al riesgo del activo, empresa, etc. que estemos valorando.

1.4. MODELOS ESTIMATIVOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

La estimación de la ETTI en una fecha concreta y para un mercado determinado será bastante sencilla si existe un número de títulos cupón cero negociados elevado, tanto en sus vencimientos como en su volumen, y si su precio es observable sin perturbaciones. Ello es debido a que, como ya hemos comentado, la rentabilidad de estos instrumentos coincide con el tipo al contado para el vencimiento de los mismos. Bastará con inferir una relación funcional entre su rentabilidad y su vencimiento a partir de las observaciones de las que disponemos -que bajo las hipótesis expuestas deberán ser muy elevadas-. Ello se cumple en determinados mercados, como el mercado de depósitos interbancarios, pero no en otros, como el de deuda pública, que es el que nos ocupa lo que hará que la obtención de la misma no sea tan sencilla.

En primer lugar, en la mayoría de países no se emiten títulos cupón cero estatales con vencimientos superiores a dos años. Pero aún en el caso de existir dichos títulos -en el mercado español, como ya hemos comentado, se negocian los STRIPS, existiendo actualmente una disponibilidad de vencimientos negociables de hasta 30 años- el número de vencimientos

negociados en una sesión y su liquidez es absolutamente insuficiente, de forma que a partir de los precios (o rentabilidades) de dichos títulos es prácticamente imposible construir una relación tipos al contado-tiempo. Así, sólo es posible inferir directamente la curva de tipos cupón cero para plazos poco elevados –no más de dos años-. De esta forma, para construir una ETTI que abarque plazos elevados será necesario partir de los precios y rentabilidades de los instrumentos con cupones (bonos y obligaciones), sin duda los instrumentos de renta fija a largo plazo más líquidos y negociados.

En este contexto, diferenciamos tres tipos de modelizaciones distintas en la estimación de la ETTI, que analizaremos brevemente.

1.4.1. Modelos empíricos

Son los más sencillos de implementar y, en cualquier caso, no recogen ningún tipo de incertidumbre sobre la ETTI. A través de estos métodos únicamente podemos obtener la ETTI como una relación discreta del tipo spot-vencimiento, debiéndose realizar una interpolación lineal si se desea obtener valores de los tipos al contado para vencimientos que estén entre los vértices para los cuales se obtiene la ETTI. Dentro de estos métodos podemos reseñar:

- a) *El método del bono a par.* Se trata de un método de difícil implementación en su forma pura, ya que se necesita disponer de observaciones de bonos cuyos precios se negocien a la par y que presenten vencimientos enteros, lo cual en el mercado español es prácticamente imposible. Sin embargo, es muy utilizado como complemento a otros que reseñaremos a continuación. Una exposición de este método puede encontrarse en Ezquiaga (1992).
- b) *El método de los SWAPS.* En este caso la ETTI se infiere a través de los tipos de interés negociados para las ramas fijas de los IRS. De entre los problemas que supone aplicar esta metodología, podemos mencionar la poca liquidez del mercado de SWAPS para determinados plazos, el hecho de que en el interés negociado suelen incorporarse primas de riesgo, liquidez y contrapartida, etc. Un análisis de esta metodología puede encontrarse en Ezquiaga *et al.* (1994).
- c) *Mediante la interpolación lineal de las TIRs de los bonos y obligaciones.* Dado que rara vez se negocian en un mercado bonos con vencimientos enteros este método propone estimar la TIR para los títulos cuyos vencimientos son los que queremos estimar los tipos al contado, interpolando la TIR de dos bonos que tengan vencimientos cercanos. Posteriormente se asimila dicha TIR a la de un bono par y se aplica la metodología a). Este método también genera numerosos problemas, ya que se supone que la TIR de un bono es función únicamente de su plazo y no también del valor de su cupón, lo cual no es cierto, tal como se

comentó en el apartado 1.1.2., de forma que existirá un cierto sesgo de cupón en las estimaciones que así se realicen.

1.4.2. Modelos de equilibrio dinámico

Se trata de modelos derivados de la teoría de la valoración de opciones. Éstos se fundamentan, por una parte, en la modelización estocástica de la dinámica de los intereses futuros, de forma que el comportamiento de ésta se supone que puede ser descrita a través de un conjunto de variables estado, y por otra se supone la inexistencia de arbitraje. Los trabajos ya clásicos como el de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) parten únicamente de la modelización estocástica del interés instantáneo a corto plazo –un tipo spot a largo plazo no es más que una sucesión de tipos al contado futuros a corto plazo–, el cual, de forma genérica, se supone que sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica^{6,7}:

$$dr = \mu(r,t)dt + \gamma(r,t)dZ$$

donde:

r: Valor que toma en t el tipo de interés instantáneo a corto plazo

$\mu(r,t)$: Indica la tendencia de la evolución del interés instantáneo a corto plazo, y depende del nivel tipo de interés, r, y del instante, t.

$\gamma(r,t)$: Indica la desviación estándar de la evolución del interés a corto plazo y también es función de r y t.

dZ: Proceso estándar de Wiener, de media 0 y varianza dt.

Aplicando el lema de Itô se puede obtener de la ecuación diferencial anterior, la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del precio de un título cupón cero, que paga una unidad monetaria a su vencimiento a su vencimiento, T, en un momento cualquiera, t, siendo el precio en un instante t, $P(r,t,T)$:

$$\frac{dP(r, t, T)}{P(r, t, T)} = \rho(r, t, T)dt + \sigma(r, t, T)dZ$$

Donde:

$$\rho(r, t, T)P(r, t, T) = \frac{1}{2} \mu^2(r, t)P_{rr}(r, t, T) + \gamma(r, t)P_r(r, t, T) + P_t(r, t, T)$$

⁶ Para una exposición de estos modelos, en nuestra opinión muy clara, y la vez mucho más detallada, puede encontrarse en Babbell y Merrill (1996, p. 59-72).

⁷ Un survey en el que se recogen los modelos unifactoriales más extendidos es Stapleton (1999), donde asimismo se detalla en cada caso la ecuación diferencial estocástica que modeliza al interés a corto plazo.

$$\sigma(r, t, T)P(r, t, T) = \mu(r, t)P_t(r, t, T)$$

denotándose con un subíndice la derivada parcial.

En la ecuación diferencial estocástica que define el precio de un título, y utilizando un argumento de no existencia de arbitraje, es decir, suponiéndose que el hipotético comprador de del bono cupón cero al descubierto -por tanto, con una inversión inicial real cero- debe obtener un rendimiento nulo, la ecuación diferencial anterior se convertirá en una ecuación diferencial cierta, para la cual, aplicando la condición de contorno $P(r, T, T)=1$ se obtiene la solución. De esta forma, el valor en el momento actual de valoración, $t=0$, del título, $P(r, 0, T)$ tomará un valor cierto.

Una vez hallado, $P(r, 0, T)$, la determinación de la tasa interna de dicho título, y por tanto, el tipo spot para un vencimiento T es inmediata. Obteniendo estos rendimientos para diferentes valores de T , hallaremos la ETTI que rige en el momento actual.

Por supuesto, los modelos unifactoriales son muy restrictivos ya que la ETTI únicamente depende del tipo de interés que rija a corto plazo, r , permitiéndose por tanto, únicamente desplazamientos paralelos de la misma, lo cual implica que los movimientos de los títulos están perfectamente correlacionados. Por ello, diversos autores incluyen un estado más -son modelos, pues, bifactoriales-, como por ejemplo, la diferencia entre el interés al contado a corto plazo y el tipo de interés al contado a largo plazo, el interés a largo plazo, la volatilidad del interés a corto plazo, etc. Un ejemplo son los modelos de Shaefer y Schwarz (1984) o Heath, Jarrow y Morton (1992). Si bien, más realistas, estos modelos no admiten una fórmula cerrada para el precio de los títulos que se pretende valorar, es decir, la ecuación diferencial a resolver para hallar el valor de un título no tiene solución analítica, por lo que deberá ser resuelta por métodos numéricos.

Respecto a los modelos estocásticos sobre el comportamiento del interés, y a pesar de su elegancia analítica, tal como indica Gerber (1995), sólo funcionan razonablemente bien en el corto plazo, pero la explicación sobre el comportamiento del interés a largo plazo, que es el que nos interesa a nosotros, es muy deficiente. Asimismo, muchos de ellos presentan limitaciones no ya tan sólo en el reflejo de la evolución de la ETTI, sino en la valoración de los activos que, como los bonos y las obligaciones, vencen a medio y largo plazo, una vez han sido ajustados los parámetros que definen las ecuaciones diferenciales estocásticas de los factores que determinan la ETTI -ver por ejemplo Fernández Navas (1997a) y (1997b)-. Así pues, y tal como afirma Fernández Navas (1997a) refiriéndose al modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985), el interés de estos modelos puede circunscribirse a la fijación de un marco analítico que permita valorar derivados sobre tipos de interés a corto plazo, ya que para realizar valoraciones sobre activos

financieros no derivados, basta y son más precisos modelos de la ETTI que dicho autor denomina como “estáticos”, que son los mencionados en el apartado 1.4.1. y los que describiremos en el punto 1.4.3.

1.4.3. Modelos econométricos

Se trata de la línea que posiblemente mejores resultados prácticos ha dado, al menos en un contexto de valoración de activos financieros no derivados, e inspirándonos en esta, nosotros realizaremos nuestras propuestas utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos. Estas metodologías, se basan en métodos convencionales de regresión, y al igual que en los modelos de equilibrio dinámico, incorporan la incertidumbre en la formación de expectativas sobre los intereses ya que en los modelos a estimar se incorpora un término de error. La introducción de este término de error queda justificada por la existencia de factores que enturbian la formación de los precios de los títulos de renta fija y la formación de las expectativas. Entre estos factores, según Chambers *et al.* (1984) podemos destacar:

- Los precios de los bonos americanos contienen información sobre factores de descuento referidos a más de un vencimiento, amén de su diferente tributación respecto a los títulos cupón cero.
- El hecho de que las carteras de bonos no se revisan continuamente, lo cual justificaría que, para determinados plazos, pueda existir poca liquidez y los tipos de interés incorporen entonces algún tipo de prima por liquidez.
- La existencia de un diferencial entre el precio de compra y el precio de venta sobre los precios negociados debido a la existencia de intermediarios, y por tanto, la existencia de costes de transacción.

Dentro de este grupo de metodologías debemos diferenciar dos líneas diferentes:

a) *Métodos que estiman una curva teórica a la par*

Estos métodos consisten en realizar una regresión lineal TIR-vencimiento de los títulos. Así, queda estimada la TIR como una función continua del tiempo una vez hayan sido ajustados los parámetros de la regresión. Respecto a las formas funcionales que diversos autores proponen ajustar, no debemos buscar en ellas un sólido fundamento teórico. En la mayor parte de casos únicamente se propone combinar linealmente un conjunto de funciones del vencimiento de los títulos que captan todos los perfiles que puede tomar la curva de rentabilidades, la cual no es más que una aproximación de la ETTI. Algunas de las formas de ésta última han sido representadas en el apartado 1.1.2. De esta forma, la significación de una determinada variable independiente, que

se mide con la *t* de student, pasa a tener una importancia relativa, debiéndose juzgar la bondad del ajuste básicamente por la capacidad global de la forma funcional propuesta para representar fidedignamente la relación rendimiento-vencimiento de los títulos negociados en el mercado en una sesión concreta, siendo el indicador para tal fin por excelencia, el coeficiente de determinación (R^2).

Para calcular los tipos al contado, se aplica posteriormente el método del bono par. En este caso puede observarse la analogía de este método con la interpolación lineal de las TIRs, y por tanto, podemos achacarle los mismos problemas que a los de interpolación lineal. En concreto, si bien se diferencia “títulos con cupón” y “títulos cupón cero”, se supone que la TIR de un título es únicamente función del vencimiento, ignorándose de esta forma que la TIR de un título depende, no tan sólo de si el título ofrece cupón, sino, si existe, del valor de éste. Por otra parte, los tipos spot no quedan determinados como una función continua del tiempo, aunque la TIR sí lo sea.

b) Métodos que estiman directamente la función de descuento

Estos métodos buscan estimar, no directamente los tipos spot, sino la función de descuento que éstos definen, ya que la relación entre precio y función de descuento es lineal, y no así la relación precio-interés. Dentro de este grupo de metodologías podemos diferenciar, en primer lugar, aquéllas basadas en la cuantificación del factor de descuento como funciones a trozos del tiempo o splines. Un resumen de los modelos más utilizados puede ser encontrado en Anderson *et al.* (1996). Otro grupo de métodos es el basado en el ajuste “parsimonioso” de la función de descuento, y se basan en la formulación de los factores de descuento mediante formas monofuncionales no lineales, que provocan que la ETTI deba ser estimada a través de modelos de regresión máximo-verosímiles. Como modelos más representativos de esta línea mencionamos el de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994). En cualquier caso, con todos estos métodos si que queda ajustada una relación funcional tipo al contado-tiempo continua.

En cualquier caso, debemos reseñar que los tipos de interés que obtenemos con las estimaciones econométricas (TIRs, tipos al contado, etc.) no son números ciertos, sino variables aleatorias, ya que en la regresión que se realice se incorpora un término de error. Sin embargo, la incertidumbre que se introduce en estos métodos sobre el interés estimado no suele quedar reflejada finalmente, ya que se trabaja con el valor esperado de las estimaciones que se deducen de la regresión. Ello es debido a la dificultad y, en ocasiones, a la imposibilidad de obtener expresiones analíticas de las magnitudes que se estimen partiendo de la regresión efectuada por la consabida dificultad de operar con variables aleatorias.

1.5. ESTIMACIÓN DE LOS INTERESES FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS MEDIANTE UNA ESTIMACIÓN FUZZY DE LA ETTI

En este apartado realizamos unas reflexiones que creemos que justifican la modelización de la ETTI mediante números borrosos. Éstas se basarán en dos ideas:

- a) Analizaremos que puede aportar la teoría de los subconjuntos borrosos a la literatura ya existente sobre la modelización de la ETTI.
- b) Comentaremos que aportará la estimación de una ETTI borrosa a los ya numerosos trabajos relacionados con la valoración financiera con magnitudes estimadas a través de números borrosos.

Todos los métodos de estimación de la ETTI comentados parten de que el precio que se negocia para una referencia en un momento concreto (por ejemplo, un día) es único. Sin embargo, el precio que se negocia durante una determinada sesión para un título no suele ser único, sino que oscila entre uno máximo y uno mínimo, de forma que la rentabilidad interna de dicho título está también dentro de un intervalo. Por ejemplo, la referencia O-6% con vencimiento a 10 años se negoció el 22/1/1999 en el mercado de deuda pública español a un precio que osciló entre 116,070 y 116,470 (ex-cupón), siendo las TIR asociadas, respectivamente, del 3'853% y el 3'804%. Este fenómeno también se produce en el mercado primario, en la formación de precios en una subasta de deuda pública, intervienen una multiplicidad de precios que ofrecen los participantes en la subasta y que son consecuencia de una estimación subjetiva de dichos participantes sobre el comportamiento futuro de los tipos de interés, de la inflación etc. De esta forma, la adjudicación de dicha deuda no se realiza sobre la base de un único precio, sino sobre precios que oscilan entre un precio denominado medio y el precio marginal⁸.

Tras lo expuesto, consideramos que el precio de una referencia (o su TIR asociada) no puede considerarse una magnitud cierta, sino que se trata de una magnitud que se manifiesta de forma difusa, siendo más adecuado, a nuestro entender, cuantificarla a través de un número borroso. En primer lugar, porque la reducción de los precios negociados a un único valor creemos que implican la pérdida de la información que dichos precios contienen, relacionada con las expectativas de los agentes que intervienen en el mercado sobre el comportamiento de los intereses futuros. Así, podemos reinterpretar la no unicidad de los precios que se negocian desde el punto de vista de la teoría de las expectativas racionales. Se puede entender que los agentes que

⁸ El precio medio se define como la media ponderada de los precios aceptados por el volumen adjudicado. El precio marginal, es el precio más pequeño aceptado para la adjudicación de deuda en la subasta. En una subasta de deuda pública, si el precio ofrecido por una entidad está por encima del precio medio, la adjudicación de la deuda para la misma se realiza por el precio medio. Si fuera inferior al precio medio, se realizará por el precio demandado; siempre que éste esté por encima del marginal.

intervienen en el mercado no tienen las mismas expectativas sobre los tipos de interés que regirán en el futuro, lo cual se ajusta a la realidad, ya que no todos tienen la misma información; pero aún en el caso de que la tuvieran, no sería interpretada de idéntica manera, dado el fuerte componente subjetivo que tiene el proceso de toma de decisiones. De esta forma, es lógico que no exista un único precio para cada referencia negociada en el mercado a no ser que sobre esta se haya cruzado una única operación. A este respecto, Ezquiaga (1992) considera que la amplitud de los precios negociados refleja en cierta forma la incertidumbre que los agentes tienen sobre la evolución de los tipos futuros. A mayor incertidumbre, la horquilla de precios para los activos negociados deberá ser mayor. Este último apunte, creemos que refuerza nuestra opinión de que reducir este intervalo a un único valor implica una pérdida de información importante.

De esta forma, consideraremos que los precios con cupón corrido que para cada título se negocian durante una determinada sesión se pueden expresar a través de un número borroso \tilde{P} , que podemos definir a través de su función de pertenencia o de sus α -cortes como:

$$\tilde{P} = \{x / \mu_{\tilde{P}}(x)\} = \{P_{\alpha} = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)], 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

De esta forma, el rendimiento de un bono cupón cero, si denominamos a t su vencimiento y C su valor nominal, que siempre coincide en los títulos públicos con el precio de amortización, será un número borroso \tilde{I} que se obtendrá como:

$$\tilde{I} = \left(\frac{C}{\tilde{P}}\right)^{1/t} - 1$$

De esta forma, su función de pertenencia se hallará como:

$$\mu_{\tilde{I}}(y) = \bigvee_{y = \left(\frac{C}{x}\right)^{1/t} - 1} \mu_{\tilde{P}}(x) = \mu_{\tilde{P}}\left(\frac{C}{(1+y)^t}\right)$$

y por tanto, sus α -cortes son:

$$I_{\alpha} = [I^1(\alpha), I^2(\alpha)] = \left[C \frac{1}{[P^1(\alpha), P^2(\alpha)]}\right]^{1/t} - 1 = \left[\left(\frac{C}{P^2(\alpha)}\right)^{1/t} - 1, \left(\frac{C}{P^1(\alpha)}\right)^{1/t} - 1\right]$$

Sin embargo, para bonos americanos, la solución de la ecuación que debemos solucionar no es inmediata, ya que el número borroso TIR, \tilde{I} , deberemos despejarlo de la ecuación borrosa:

$$\tilde{P} = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+\tilde{I})^t} + \frac{C}{(1+\tilde{I})^{t_n}}$$

ecuación que queda reexpresada a través de los α -cortes como:

$$[P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1 + [I^1(\alpha), I^2(\alpha)])^t} + \frac{C}{(1 + [I^1(\alpha), I^2(\alpha)])^{t_n}}$$

siendo entonces I_α un intervalo de confianza que podemos notar como:

$$I_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / y = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+x)^t} + \frac{C}{(1+x)^{t_n}}, y \in P_\alpha = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] \right\}$$

Esta ecuación se soluciona planteando para el extremo superior e inferior de I_α las siguientes dos ecuaciones:

$$P^1(\alpha) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I^2(\alpha))^t} + \frac{C}{(1+I^2(\alpha))^{t_n}} \quad y \quad P^2(\alpha) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I^1(\alpha))^t} + \frac{C}{(1+I^1(\alpha))^{t_n}}$$

donde siempre obtendremos $I^1(\alpha) \leq I^2(\alpha)$, dado que la rentabilidad interna de un título es siempre monótona decreciente respecto a su precio, lo cual es fácil de comprobar. Si tomamos la función implícita $F(x,y)=0$ siguiente:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+x)^t} + \frac{C}{(1+x)^{t_n}} - y = 0$$

podemos realizar la derivada de la TIR respecto al precio como:

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} = \frac{-1}{\sum_{t=t_1}^{t_n} t \frac{c}{(1+x)^{t+1}} + t_n \frac{C}{(1+x)^{t_n+1}}} \leq 0$$

es decir, la TIR de un título es una función monótona decreciente de su precio.

Por otra parte, hay numerosos trabajos como Delgado y Moral (1987), Gupta (1993), Zadeh (1978) o Chanas y Nowakowski (1988) que analizan la transformación de variables aleatorias como números borrosos y viceversa. Aunque, conceptualmente, como explican Kaufmann y Gil Aluja (1990, p. 3-5), es un error confundir ambos instrumentos de modelización de la incertidumbre, el objetivo buscado cuando se realiza la transformación de una variable aleatoria en un número borroso equivalente es aprovechar la mayor facilidad y flexibilidad de los números borrosos respecto a la operatividad de las variables sobre las que debemos realizar operaciones aritméticas. Como ya hemos comentado, una vez hemos estimado la ETTI mediante métodos

econométricos, no utilizamos toda la información que nos proporciona la regresión efectuada, sino sólo una pequeña parte: la esperanza matemática de las estimaciones que obtenemos. Ello es debido a la dificultad que entraña efectuar operaciones aritméticas con variables aleatorias. En este sentido, con la aritmética borrosa, muy similar a la aritmética con números ciertos, podemos “arrastrar” toda la información que se obtiene con la regresión borrosa en las posteriores estimaciones, valoraciones financieras, etc. que realicemos, es decir, podemos operar con todo el número borroso y no es necesario reducirlo a una medida de posición representativa del mismo.

Por otra parte, y respecto a los tipos de interés que regirán en periodos venideros, podemos afirmar que son magnitudes inciertas y que difícilmente pueden ser modelizadas como variables aleatorias, tal como ya se ha comentado anteriormente en el apartado 1.4.2., sobre todo en un entorno económico como el actual, cada vez más turbulento y cambiante. Dado que para llegar a inferirlos sólo disponemos de datos vagos, como los precios actuales de renta fija negociados, un camino más adecuado para su predicción, debido a la naturaleza de las variables de partida, creemos que es la utilización de los instrumentos que nos proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos, más adecuada que la econometría en situaciones en que la información vienen dada de forma difusa e imprecisa. Mediante los subconjuntos borrosos podremos procesar esta información de forma más adecuada mediante la utilización de operadores “blandos” como el máximo y el mínimo, incurriéndose de esta forma en una menor pérdida de información durante todo el proceso de inferencia que utilizando operadores “duros” como la suma y el producto, operadores asociados a la inferencia de variables mediante la estadística y la econometría.

Por otra parte, bien es cierto que hay numerosos trabajos que analizan aspectos relacionados con la valoración financiera en condiciones de incertidumbre, y que cuantifican los parámetros que en dicha valoración intervienen a través de los instrumentos que proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos. Éstos parten de que el interés de valoración para los sucesivos periodos viene estimado a partir de números borrosos, tal como ha sido explicado en la primera parte de la tesis, pero el problema inicial radica en como realizar dicha estimación. En este capítulo se aborda dicho problema, proponiéndose a tal fin varias metodologías, inspiradas todas ellas en los métodos comentados en el apartado 1.4.3. y que en todos los casos se basan en la utilización de técnicas de regresión borrosa –ya utilizadas en el campo financiero, por ejemplo, por Castro *et al.* (1994) en el problema de selección de carteras- para ajustar la estructura temporal de los tipos de interés y en el marco conceptual de la teoría de las expectativas racionales.

Así, el procedimiento que propondremos para la estimación de los tipos futuros a través de números borrosos se basará en la estimación borrosa y no econométrica de la ETTI. Para ello, en primer lugar, repasaremos en el siguiente apartado los métodos econométricos más utilizados en

la estimación de la ETTI, basados todos ellos en la técnicas convencionales de regresión. A continuación, en el apartado 3, adaptaremos las metodologías expuestas a la circunstancia de que los datos de partida son borrosos, de forma que los tipos al contado que deduciremos de los métodos expuestos serán también números borrosos. Posteriormente, en el apartado 4, analizaremos como hallar los tipos implícitos que define la ETTI, que también serán números borrosos. Aceptando como marco de referencia válido la teoría de las expectativas racionales, éstos deberán ser los tipos que el mercado anticipa, en un momento dado, para el futuro. Su determinación, si bien partiendo de datos ciertos ya hemos comprobado que es inmediata, no lo será así si partimos de una ETTI borrosa, ya que nos enfrentamos a un problema de resolución de ecuaciones borrosas. Nosotros, en este contexto y siempre que se pueda, propondremos como solución de las mismas aquella que produzca la menor incertidumbre posible en los tipos estimados, es decir, la que se conoce como “solución clásica” para las ecuaciones borrosas. Por otra parte, dado que lo que realmente pretendemos es estimar los intereses a aplicar en un momento concreto cuando se pretende realizar una valoración financiera, dedicaremos una especial atención a la determinación de los tipos del mercado –tipos al contado y tipos implícitos- a través de números borrosos triangulares, ya que se trata de un tipo de números borrosos con una fácil e intuitiva interpretación a la vez que se adecuan en gran medida al proceso de realización de estimaciones subjetivas. Asimismo, en posteriores aplicaciones de dichas estimaciones –en nuestro caso concreto, el cálculo de valores actuales- permiten una fácil operatoria y computación para las mismas.