CAPÍTULO 2:

MÉTODOS ECONOMÉTRICOS DE ESTIMACIÓN DE LA ETTI EN CERTEZA

2.1. ESTIMACIÓN DE LA ETTI A TRAVÉS DE LA CURVA DE RENTABILIDADES

Definimos como curva de rentabilidades de un mercado de bonos –en nuestro caso, el mercado de deuda pública- a la relación existente entre el rendimiento interno de los títulos negociados en dicho mercado (variable dependiente) y su vencimiento (variable independiente). Así, la curva de rentabilidades no es, en general, lo mismo que la ETTI. La ETTI, como ya hemos comentado, es la relación entre la variable independiente vencimiento y la dependiente tipo al que el mercado descuenta una unidad monetaria en dicho vencimiento. En el MDPA, que es en el cual analizaremos los diversos métodos de estimación de la ETTI, al no ser posible la construcción de la ETTI para plazos superiores al año y medio con títulos cupón cero, ya que no existe prácticamente negociación de este tipo de títulos con vencimientos superiores, la curva de rentabilidades indicará una relación entre rentabilidad del título y vencimiento de éste. Como las estimaciones que se realizan parten de rentabilidades observadas sobre bonos americanos, los rendimientos de partida -las TIRs de los títulos- no serán más que una "media" de los tipos que rigen para cada uno de los vencimientos en los que los títulos ofrecen pagos, y por tanto sólo podrá ser ajustada, a priori, una curva tiempo-rendimiento para bonos americanos, pero no sobre los tipos al contado. Así pues, sólo coincidirán ETTI y curva de rentabilidades si la curva de tipos cupón cero hubiera sido estimada a partir de un conjunto de bonos que no ofrecieran cupones.

2.1.1. Algunos modelos para ajustar la curva de rentabilidades

A continuación exponemos algunos de los modelos más utilizados en el ajuste de la curva de rentabilidades. Casi todos ellos tienen como denominador común su linealidad, y que la estimación de los parámetros que definen el modelo se realiza mediante mínimos cuadrados ordinarios, excepto el primero de los que analizaremos, expuesto en Lamothe *et al.* (1995).

2.1.1.1. Interpolación lineal de las TIRs de los títulos

De los k bonos que se negocian en un mercado, denominamos como I_r a la TIR de la r-ésima referencia de las que componen la muestra, medida como tanto efectivo anual. Supongamos que estas referencias están ordenadas en orden ascendente según el vencimiento y con r=1,2,…,k, de forma que si denominamos como t_r al vencimiento del bono número r, $t_r \leq t_{r+1}$. Si queremos hallar la rentabilidad que debe ofrecer un bono con un vencimiento t, I_t, interpolaremos linealmente la TIR de los bonos con el vencimiento inferior más cercano, t_r, y el superior más cercano, t_{r+1}, de forma que:

$$I_t = \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} I_r + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} I_{r+1}$$

Para ejemplificar los métodos de estimación de la ETTI analizados, estimaremos ésta el 22-1-1999 en el mercado de deuda pública anotada. Las cotizaciones de los bonos y obligaciones negociados en dicha sesión fueron:

Precio Mínimo	Precio Máximo	Precio Medio Ponderado	TIR Mínima	TIR Máxima	TIR Media	Vencimiento	Cupón
110.390	110.390	110.390	2.955	2.955	2.955	23/03/00	12,25%
104.500	104.500	104.500	2.890	2.890	2.890	12/04/00	6,75%
104.050	104.140	104.095	2.848	2.895	2.872	26/01/01	5,00%
114.250	114.280	114.265	2.938	2.943	2.941	22/02/01	10,10%
122.950	123.030	122.990	3.057	3.082	3.070	10/01/02	11,30%
113.940	114.055	113.998	3.055	3.095	3.075	23/02/02	7,90%
122.750	122.750	122.750	3.090	3.090	3.090	12/06/02	10,30%
101.700	101.800	101.750	3.058	3.085	3.072	25/07/02	4,25%
107.880	107.970	107.925	3.103	3.126	3.115	26/01/03	5,25%
132.030	132.080	132.055	3.246	3.256	3.251	27/08/03	10,90%
131.320	131.450	131.385	3.247	3.272	3.260	25/10/03	10,50%
122.240	122.500	122.370	3.319	3.368	3.344	27/05/04	8,00%
103.550	103.670	103.610	3.310	3.331	3.321	25/07/04	4,50%
135.020	135.100	135.060	3.493	3.505	3.499	23/02/05	10,00%
132.410	132.460	132.435	3.622	3.629	3.626	26/04/06	8,80%
125.080	125.329	125.205	3.695	3.725	3.710	28/03/07	7,35%
116.070	116.470	116.270	3.804	3.853	3.829	26/01/08	6,00%
135.700	135.700	135.700	3.858	3.858	3.858	02/03/09	8,20%
108.280	108.490	108.385	3.852	3.875	3.864	25/07/09	5,15%
120.150	120.375	120.263	4.193	4.213	4.203	26/01/13	6,15%
103.350	103.550	103.450	4.223	4.240	4.232	25/07/14	4,75%
119.500	119.800	119.650	4.742	4.758	4.750	27/01/29	6,00%

Y las rentabilidades que deben ofrecer bonos con vencimientos enteros de hasta 10 años son, según los datos expuestos:

t	I_t
1	0,02912
2	0,02831
3	0,03025
4	0,03066
5	0,03241
6	0,03412

7	0,03534
8	0,03627
9	0,03755
10	0,03782

Debemos señalar que se ha tomado como TIR de los bonos, la media de la TIR inferior y la TIR superior que se ha registrado en las operaciones realizadas sobre cada uno de los títulos y que así hemos procedido el resto de apartados. Asimismo, la muestra tomada esta formada por referencias negociadas con vencimientos de hasta 15 años, por lo que la ETTI podría ser estimada para vencimientos, también, de hasta 15 años. Si bien, en la fecha en la que realizaremos la estimación se negociaba la referencia O-6% a 30 años, no ha sido incluida ya que no existen bonos con vencimientos entre 15 y 30 años, lo cual provocaría que la ETTI estimada para dicho espectro de vencimientos fuera poco fiable. Por otra parte, debemos señalar que los únicos títulos que han sido tomados en consideración han sido bonos y obligaciones del estado, y no las letras del tesoro. Las divergencias en la fiscalidad de los rendimientos de estos últimos títulos pueden provocar distorsiones en los resultados que se obtengan.

2.1.1.2. Ajuste polinómico de la TIR de los títulos

En este caso, se supone que la rentabilidad interna de un título r, I_r, con r=1,2,..,k, puede ser ajustada por un polinomio de grado m de su vencimiento, t_r. Un ejemplo de su utilización puede ser encontrado en Mascareñas (1997). Así:

$$I_r = a_0 + a_1 t_r + a_2 (t_r)^2 + ... + a_m (t_r)^m + \varepsilon_r$$

Siendo ε_r el término de error, que se supone que presenta las propiedades convencionales. Asimismo, la determinación del grado del polinomio debería realizarse de forma que se consiguiera un equilibrio entre el mínimo grado del polinomio elegido con el mejor ajuste, medido este a través del coeficiente de determinación.

A continuación exponemos los resultados que se obtienen para la sesión del 22/1/99, considerando un polinomio de 4º grado para el ajuste de la ETTI. Se ha tomando como variable dependiente, la TIR que se obtiene como media aritmética de la TIR máxima y mínima para cada referencia durante la sesión que analizamos. Debajo del coeficiente estimado para las variables independientes aparece el estadístico t de student que indica la relevancia que tiene estadísticamente cada una de las variables independientes. En general, si el valor absoluto de la t de student es mayor o igual a dos, podemos aceptar dicha variable como relevante en el modelo, pero tal como hemos comentado lo importante es el ajuste global de proporciona el modelo, el cual que se mide a través del coeficiente de determinación, y no tanto la relevancia de cada variable tomada individualmente.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
	0,02914091	-0,00055919	0,00042497	-0,00003761	0,00000104
t	(38,870)	(-0,9308)	(2,809)	(-2,5971)	(2,2753)

Adicionalmente se puede comprobar que el coeficiente de determinación ha sido $R^2 = 0,99$, es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Así, las rentabilidades que deben ofrecer los bonos y obligaciones del estado con vencimiento de hasta 10 años son, según el modelo analizado:

t	I_t
1	0,02897
2	0,02944
3	0,03036
4	0,03156
5	0,03292
6	0,03431
7	0,03565
8	0,03687
9	0,03794
10	0,03884

2.1.1.3. El modelo de Cohen, Kramer y Vaugh (1966)

Tras probar varias funciones rentabilidad-vencimiento, estos autores comprueban que la que produce un mejor ajuste puede expresarse para la r-ésima referencia de la forma:

$$I_r = a_0 + a_1 t_r + a_2 (\ln t_r)^2 + \varepsilon_r$$

Para la sesión que estamos analizando, los resultados que obtenemos para cada uno de los parámetros son:

	a_0	a_1	a_2
	0,02825746	0,0000599	0,0018049
t	(109,055)	(0,236)	(3,884)

siendo $R^2 = 0,9855$. Así, las rentabilidades estimadas para referencias con vencimiento de hasta 10 años que se obtienen en este caso son:

t	I_t
1	0,02832
2	0,02924
3	0,03062
4	0,03197
5	0,03323
6	0,03441

7	0,03551
8	0,03654
9	0,03751
10	0,03843

2.1.1.4. El modelo de Bradley y Crame (1973)

También plantean una relación funcional entre la rentabilidad de las referencias y el tiempo hasta el vencimiento de las mismas, pero la primera viene dada a través de la tasa instantánea de interés. En concreto, estos autores proponen:

$$\ln(1+I_r) = a_0 + a_1 t_r + a_2 \ln t_r + \varepsilon_r$$

Mediante MCO obtenemos la siguiente estimación de a_0, a_1 y a_2 en la sesión que está siendo analizada:

	a_0	a_1	a_2
	0,02686409	0,0008610	0,0008476
t	(65,446)	(8,266)	(1,474)

Siendo R^2 = 0,9758. Asimismo, la rentabilidad exigida a los bonos con vencimiento de hasta 10 años expresada como tanto efectivo anual es:

t	I_t
1	0,02811
2	0,02960
3	0,03084
4	0,03198
5	0,03307
6	0,03412
7	0,03514
8	0,03615
9	0,03715
10	0,03813

Obteniéndose el tanto efectivo anual como:

$$I_r = (t_r)^{a_2} \cdot e^{a_0 + a_1 t_r} - 1$$

2.1.2. Estimación de la ETTI través de la estimación de la curva de rentabilidades

Los cuatro métodos expuestos permiten estimar la rentabilidad que en una determinada fecha deben ofrecer bonos con cupones intermedios o bonos americanos para diversos vencimientos de los mismos, ya que son prácticamente los únicos títulos con vencimientos superiores a un año negociados en el mercado de deuda pública anotada. Asimismo el cupón que ofrecen estos títulos presenta periodicidad anual en nuestro mercado. Sin embargo, las estimaciones realizadas no permiten conocer directamente el interés que rige en un mercado a un plazo determinado, es decir, no permiten observar directamente la ETTI. Ello es debido a que la rentabilidad de un bono americano no sólo recoge información sobre el interés que rige para el plazo en el que vence, sino también de los plazos intermedios en los que existe un pago de cupones. A continuación analizaremos el método conocido como del "bono par" que permitirá obtener los tipos al contado a través de la determinación de la curva de rentabilidades.

Para implementar esta metodología es necesario definir el concepto de bono par con un vencimiento t entero. Éste será aquél que paga cupones periódicos -en el mercado español, anuales- y cotiza a la par, es decir, su precio es igual a 100. Para que ello ocurra, el cupón anual que debe ofrecer este título debe ser exactamente igual a su rentabilidad. Si notamos al cupón anual en tanto por cien del bono par como c_t, podremos establecer que $c_t = 100I_t$. De esta forma, para hallar los tipos spot deberemos tener en cuenta que para un vencimiento t cualquiera se deberá cumplir para el bono par con dicho vencimiento:

$$100 = \sum_{r=1}^{t-1} c_t (1+i_r)^{-r} + (c_t + 100)(1+i_t)^{-t} \quad t=1,2,\ldots,n. \qquad [1]$$

En este caso la incógnita será el tipo al contado para un vencimiento t dado, i_t, con t=1,2,…n y n el máximo vencimiento para el que pretendemos estimar la ETTI en el sistema planteado. Por supuesto, I_t y c_t se habrán calculado previamente a través de las expresiones expuestas en 2.1.1.1., 2.1.1.2., 2.1.1.3 ó 2.1.1.4, según el modelo por el que se haya optado.

Puede observarse que el sistema de ecuaciones planteado en [1] es no lineal, pero puede ser transformado en uno lineal sin más que tomar como incógnita el valor de 1 unidad monetaria con vencimiento a t años o factor de actualización a t años, f_t con $f_t= (1+i_t)^{-1}$, en lugar de tomar el tipo spot asociado i_t. De esta forma, plantearemos un sistema de ecuaciones lineal que podemos notar matricialmente como AF=(100), siendo (100) una matriz columna nx1 con todos los elementos 100, donde:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + 100 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ c_2 & c_2 + 100 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & ... & c_{n-1} + 100 & 0 \\ c_n & c_n & c_n & c_n & ... & c_n + 100 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$$

Este sistema, que puede ser resuelto recursivamente, de forma que si han sido obtenidos los primeros t-1 factores de actualización, el t-ésimo se hallará como:

$$f_t = \frac{100 - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t}$$

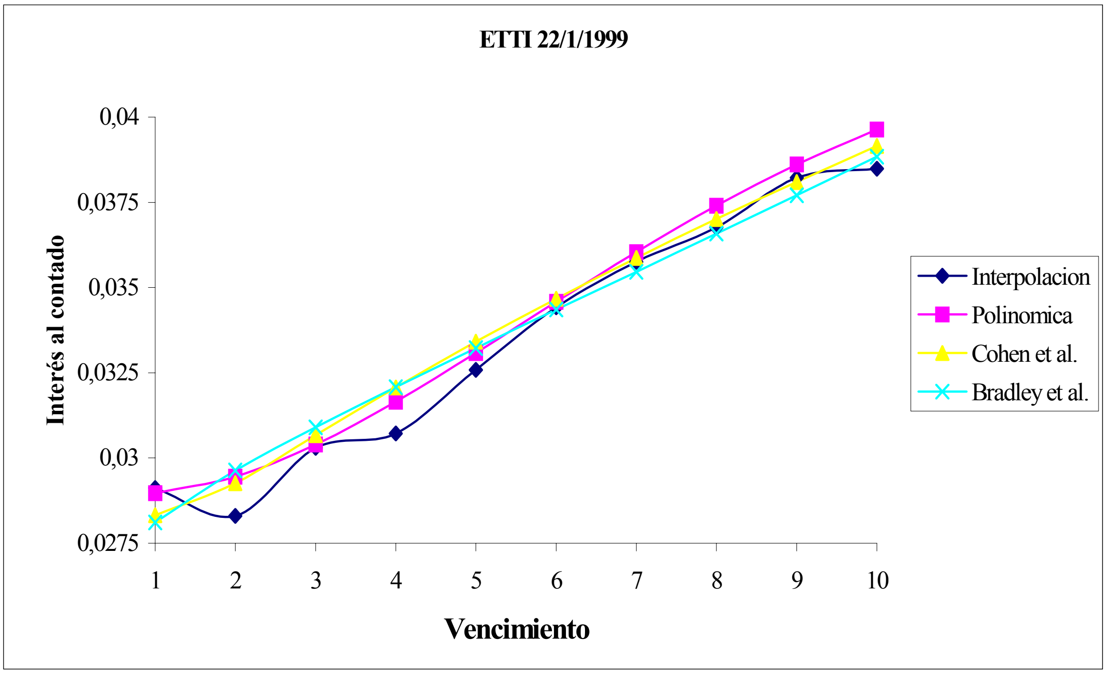
Finalmente, para hallar el tipo spot, i_t, bastará con deshacer el cambio de variable de la forma:

$i_t = (f_t)^{-1/t} - 1.$

En cada uno de los casos analizados, los resultados que obtenemos el 22-1-1999 a través de la técnica comentada para vencimientos de hasta 10 años son:

t	**Interpolación**	**Polinómica**	**Cohen *et al.***	**Bradley *et al.***
1	0,02912	0,02897	0,02832	0,02811
2	0,02830	0,02945	0,02926	0,02963
3	0,03030	0,03039	0,03067	0,03090
4	0,03072	0,03165	0,03207	0,03208
5	0,03258	0,03308	0,03341	0,03322
6	0,03442	0,03458	0,03467	0,03435
7	0,03575	0,03604	0,03587	0,03546
8	0,03676	0,03740	0,03701	0,03658
9	0,03822	0,03861	0,03810	0,03771
10	0,03849	0,03964	0,03915	0,03884

Y gráficamente, la ETTI estimada con las metodologías propuestas resulta ser:



Como comentario general sobre las estimaciones realizadas, podemos comprobar que los modelos que mejor ajuste han producido para la curva de rentabilidades han sido el polinómico y Cohen *et al*, no quedando bajo nuestra consideración la estimación mediante interpolación lineal, ya que no ha sido estimada con métodos econométricos.

Respecto a los modelos que ajustan la ETTI de forma menos suave, podemos comprobar que el ajuste polinómico y sobre todo, la interpolación proporcionan una forma de la ETTI bastante oscilante, mientras que el resto de modelos proporciona una forma más suave para dicha curva. Ello puede ser fácilmente intuido si comparamos las funciones que combinamos en el apartado 2.1.1.2., de carácter potencial, y por tanto mucho más explosivas en su crecimiento o decrecimiento respecto al vencimiento a las propuestas en 2.1.1.3. y 2.1.1.4. Por otra parte, respecto a la interpolación lineal, ni siquiera se ajusta una relación continua TIR-vencimiento, de forma que el perfil de la curva de rentabilidades, y por tanto, de la ETTI dependerá únicamente de los títulos a partir de los cuales se interpola la TIR en los vértices elegidos. Así, determinadas circunstancias que pueden distorsionar la formación del precio de un título como su liquidez, pueden desvirtuar también el rendimiento que se obtiene en el vértice en cuya estimación se utiliza el rendimiento de dicho título.

2.1.3. Estimación de los tipos forward

A partir de las estimaciones realizadas de la ETTI, que como hemos observado que solamente puede obtenerse como una función discreta del tiempo, los tipos forward únicamente se podrán hallar como una función discreta. A pesar de que la TIR de los títulos, excepto en la interpolación lineal, se obtienen como una función continua del tiempo, la ETTI se obtiene únicamente para ciertos vencimientos, ya que finalmente recurrimos a la metodología del bono par para acabar hallándola.

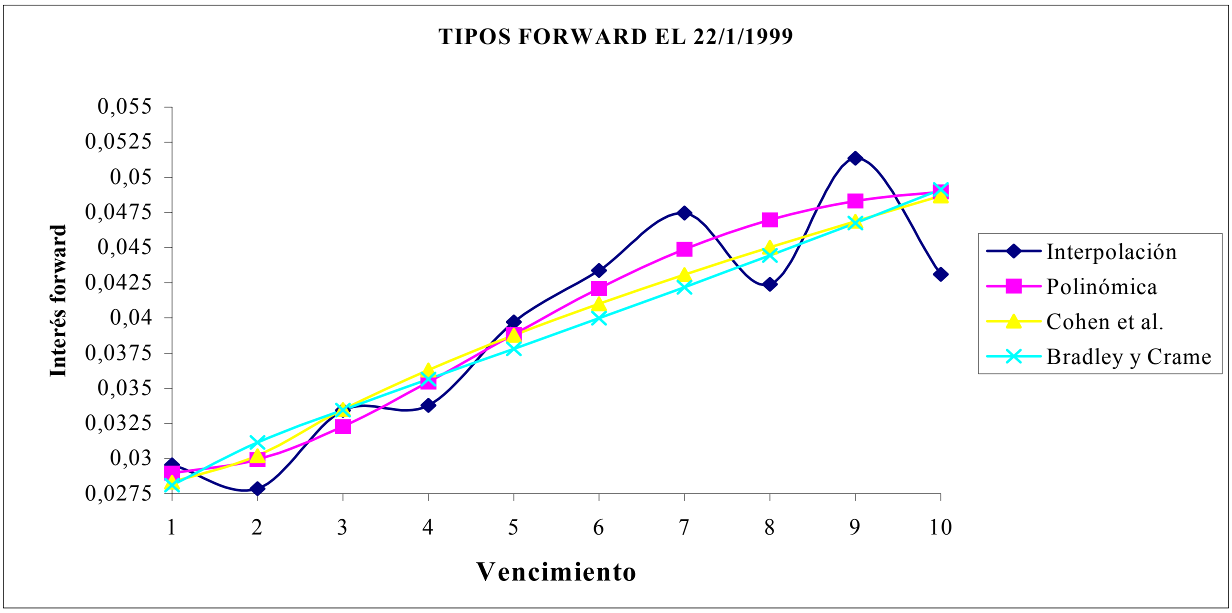
Para hallar los tipos forward a un año que regirán en el mercado durante los n años siguientes, es decir, los tipos que implícitamente anticipa el mercado para los n años de los que consta nuestro horizonte estimatorio planteamos:

$$ {}_{t-1}i_1 = \left[\frac{(1+i_t)^t}{(1+i_{t-1})^{t-1}} \right] - 1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1, \; t = 1,2,...,n. $$

De esta forma, los resultados que obtenemos en nuestro caso son:

t	Interpolación	Polinómica	Cohen *et al.*	Bradley *et al.*
1	0,02955	0,02897	0,02832	0,02811
2	0,02786	0,02992	0,03020	0,03114
3	0,03343	0,03228	0,03349	0,03345
4	0,03379	0,03543	0,03630	0,03564
5	0,03971	0,03884	0,03877	0,03781
6	0,04337	0,04209	0,04101	0,03998
7	0,04746	0,04487	0,04308	0,04218
8	0,04239	0,04698	0,04502	0,04444
9	0,05136	0,04832	0,04688	0,04675
10	0,04310	0,04898	0,04867	0,04914

y gráficamente los podemos representar como:



Podemos observar que con la estimación polinómica, y más especialmente con la realizada a través de la interpolación lineal de la TIR de los títulos, los tipos forward que se obtienen son muy oscilantes, lo cual en principio no parece razonable, ya que, a mayor vencimiento, los agentes del mercado deben discriminar peor entre el interés de un periodo y el del periodo siguiente, debiendo ser entonces la pendiente de la curva que describen los tipos forward cada vez menos pronunciada. En cambio las estimaciones halladas a través de los métodos de Cohen *et al.* y Bradley y Crame presentan una gran similitud en sus resultados para todos los vencimientos, y con tipos forward menos oscilantes que con los otros dos métodos.

2.2. ESTIMACIÓN DE LA ETTI A TRAVÉS DEL AJUSTE DE LA FUNCIÓN DE DESCUENTO

Las metodologías que a continuación expondremos, tienen como nexo común que buscan establecer un ajuste del factor de descuento mediante métodos econométricos, en lugar del ajuste de las rentabilidades de los títulos, lo cual simplificará enormemente la posterior estimación de la ETTI en el caso en que los tipos cupón cero no sean directamente observables. Como metodologías más relevantes, podemos mencionar las propuestas en los trabajos de McCulloch (1971) y (1975), Carleton y Cooper (1976), Chambers, Carleton y Waldman (1984) y Vasicek y Fong (1982). Éstas, adicionalmente pueden ser utilizadas tanto si los títulos negociados son únicamente cupón cero, como si son bonos americanos o, como ocurre normalmente, en el mercado de deuda pública, se negocian títulos de todos los tipos.

Estos métodos parten de que la posesión de un título r, con r=1,2,…,k, y siendo k el número de clases de referencias negociables y que tiene una corriente de cobros compuesta por n_r capitales financieros que representamos como $\left\{\left(C_i^r, t_i^r\right)\right\}_{i=1,2,\ldots,n_r}$, es equivalente tener n_r títulos de tipo cupón cero, con las mismas cuantías y los mismos diferimientos. Con C_i^r representamos el i-ésimo cobro generado por el bono número r y como t_i^r el vencimiento de dicha cuantía. De esta forma, el precio de un título del tipo r será la suma de los precios de cada uno de los títulos cupón cero que lo conforman. Asimismo, en el modelo a estimar se hará intervenir el factor de actualización asociado a cada vencimiento y no el interés asociado al mismo, ya que la relación precio-factor de descuento es lineal mientras que la relación precio-interés no lo es. Así, escribimos el precio de un bono del tipo r como[1]:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r f_{t_i^r} \qquad [2]$$

[1] El precio debe entenderse como precio con el cupón corrido. En la mayor parte de mercados los precios publicados son precios ex-cupón, es decir, que no consideran la parte de cupón correspondiente al tiempo transcurrido desde la percepción del último cupón, así, P^r se hallará sumando al precio ex-cupón el cupón corrido.