

y si se supone que el factor de descuento puede ser expresado a través de la combinación lineal de  $m+1$  funciones del vencimiento, de forma que:

$$f_t = \sum_{j=0}^m a_j g_j(t)$$

El modelo básico a estimar se expresa como:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^m a_j g_j(t_i^r) + \varepsilon_r \quad [3]$$

En todos los casos se busca estimar los parámetros  $a_j$ . La diferencia entre uno u otro modelo vendrá dado por la naturaleza de las funciones  $g_j$  propuestas y las hipótesis que se realizan sobre el término de error (por ejemplo, presencia o no de heterocedasticidad), de forma que hará necesario utilizar un tipo u otro de estimación econométrica, dependiendo de los supuestos de partida.

Por su mayor utilización respecto al resto, y por que en ellas nos basaremos a la hora de realizar nuestra correspondiente propuesta en incertidumbre, analizamos de forma más particularizada las metodologías propuestas por McCulloch y por Vasicek y Fong, basadas ambas en el ajuste de la función de descuento que definen los tipos al contado mediante funciones del vencimiento definidas a trozos, también denominadas splines.

### 2.2.1. El modelo de McCulloch

Este método ha sido aplicado en el mercado español, entre otros, por Ezquiaga *et al.* (1994) o Núñez (1995). McCulloch considera que el factor de descuento puede escribirse como:

$f_t = \sum_{j=0}^m a_j g_j(t)$ , siendo  $g_j(t)$  funciones polinómicas del tiempo. Dado que  $f_0 = 1$ , para el

cumplimiento de esta condición consideraremos:

- 1)  $a_0 = 1$
- 2)  $g_0(0) = 1$
- 3)  $g_j(0) = 0, j=1, 2, \dots, m$ .

Así, el factor de descuento que define la ETTI queda reescrito entonces como:

$$f_t = 1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t)$$

siendo por tanto, el interés al contado para un vencimiento  $t, i_t$ :

$$i_t = \left[ 1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t) \right]^{-1/t} - 1$$

Y así, la expresión del precio del r-ésimo bono con el cupón vencido queda reescrita a partir de [3] de la forma:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[ 1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t_i^r) \right] + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m a_j g_j(t_i^r) + \varepsilon_r$$

obteniéndose a partir de la expresión anterior:

$$P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) + \varepsilon_r$$

y si  $P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r = Y^r$  y  $\sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) = \sum_{j=1}^m X_j^r$ , la anterior expresión puede ser reescrita como:

$$Y^r = \sum_{j=1}^m a_j X_j^r + \varepsilon_r$$

Podemos observar que el modelo a estimar no tiene termino independiente -se exige que el hiperplano a ajustar pase por el origen de coordenadas-. Asimismo, postulamos para el término de error todas las condiciones necesarias para poder ser llevada a cabo la estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios.

Asimismo, las dos cuestiones a abordar, son el número de funciones  $m$  a considerar, y determinar la forma que éstas tienen que tomar.

Si bien, en principio el número  $m$  de funciones a elegir es discrecional, a la hora de fijarse su número debemos tener en cuenta que éste debe permitir, por una parte, un ajuste satisfactorio en la regresión analizada, y por otra la forma de la ETTI que se obtenga debe ser suave. Utilizar un número de funciones elevado nos llevará a obtener un ajuste prácticamente perfecto, pero dicho ajuste “perfecto” implicará que la función de descuento se ajustará también muy bien a observaciones anormales (provocadas, por ejemplo, por la insuficiente liquidez de algunas referencias), por lo que los tipos spot e implícitos que se desprendan de la estimación efectuada pueda tener un comportamiento poco suave. Por otra parte, tomando pocas funciones conseguiremos una evolución muy suave, pero el ajuste (medido por ejemplo, a través del coeficiente de determinación) no será muy elevado, sobre todo, en aquellos casos en los que la ETTI tome formas relativamente complejas -por ejemplo, de barriga invertida-. En los trabajos de

McCulloch, de forma heurística se propone tomar como  $m$  al entero más próximo a  $k^{1/2}$  y demuestra que proporciona en la práctica buenos resultados ya que dicho criterio da a la estimación el necesario equilibrio entre un buen ajuste y la suavidad de la ETTI que se deriva.

Una cuestión que debemos abordar a continuación, es la forma de las funciones  $g_j(t)$ , que en nuestro caso será finalmente polinómica. Respecto a ésta propuesta, la alternativa más sencilla es tomar  $g_j(t)=t^j$ , sin embargo tal como se explica en los trabajos de McCulloch, esta especificación no está exenta de problemas. En primer lugar, no tiene en cuenta la distribución temporal de los vencimientos de los bonos que componen la muestra. Dado que la mayor parte de éstos se concentran en el corto y medio plazo, el ajuste obtenido será bueno para aquellos vencimientos donde existan una gran cantidad de referencias, ignorándose el resto de plazos. Bien es cierto que el primer problema puede ser solucionado eligiendo un gran número de funciones –por ejemplo  $m=10$ , por lo que el factor de descuento que define la ETTI sería ajustado por un polinomio de grado 10-, pero en este caso el problema de la poca suavidad de la ETTI resultante se agravaría. Asimismo, dada su naturaleza, estas funciones suelen proporcionar un ajuste demasiado suave al principio de la curva, y demasiado explosivo al final. Sin embargo, aunque en la aplicación que realizamos a continuación también tomaremos esta alternativa, las dos formas que propone para  $g_j(t)$  McCulloch son los splines cuadráticos –McCulloch (1971)- y por los splines cúbicos –McCulloch (1975)-. Analizamos la forma de  $g_j(t)$ ,  $j=1,2,\dots,m$  en cada uno de los casos.

#### 2.2.1.1. Splines cuadráticos en la modelización de la función de descuento

Tras haberse hallado el número de funciones,  $m$ , que intervendrán en la construcción del factor de descuento, si las funciones  $g_j(t)$  utilizadas para llevar a cabo la estimación de la ETTI son splines cuadráticos, es decir, polinomios de segundo grado definidos a tramos, continuos y derivables hasta primer orden, deberemos determinar los intervalos en que debemos dividir el espectro de vencimientos considerado. Normalmente, este espectro vendrá dado, si suponemos que los bonos han sido ordenados en orden creciente, por el intervalo  $[0, t_{n_k}^k]$ , donde  $t_{n_k}^k$  será el vencimiento del bono  $k$ -ésimo, que al ser el último, será el mayor. Al utilizarse  $m$  splines cuadráticos será necesario dividir el espectro de vencimientos en  $m-1$  intervalos o tramos, los cuales vendrán delimitados por un nodo inferior y uno superior. En total deberemos determinar  $m$  nodos, notándose el  $j$  ésimo como  $d_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$ . La determinación del primero y del último es inmediata:  $d_1 = 0$  y  $d_m = t_{n_k}^k$ .

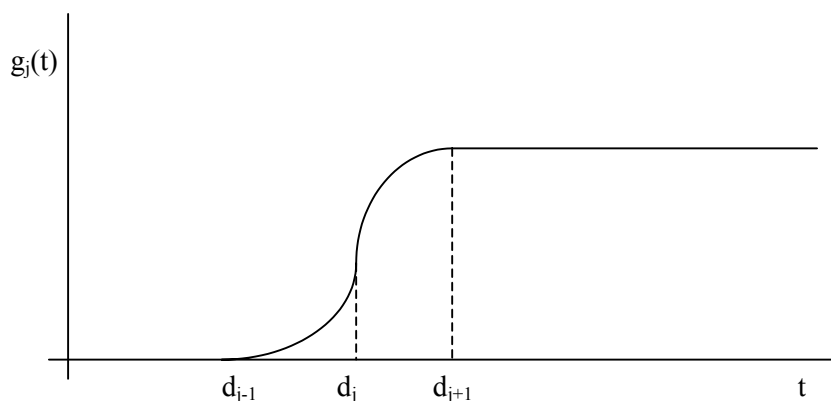
La cuestión que abordamos a continuación es la determinación de los nodos intermedios,  $d_j$ ,  $j=2,3,\dots,m-1$ . Su elección se deberá realizar teniendo en cuenta que en cada uno de los intervalos

en que dividimos el espectro de vencimientos,  $[d_{j-1}, d_j]$ ,  $j=2, \dots, m$ , se deben contener el mismo número de observaciones, es decir, aproximadamente  $\frac{k}{m-1}$  observaciones. Así, la forma de las funciones  $g_j(t)$  dependerá de la distribución de vencimientos de las referencias, y como es lógico y deseable, obtendremos una mayor matización de la ETTI en los vencimientos en los que exista mayor número de observaciones. Así,

$$d_j = t_{n_q}^q + \theta(t_{n_{q+1}}^{q+1} - t_{n_q}^q), \quad j = 2, \dots, m-1$$

siendo  $q$  la parte entera de  $\frac{(j-1)k}{m-1}$ , y  $\theta = \frac{(j-1)k}{m-1} - q$ . Con  $q$  notamos el número de orden del bono. Volvemos a reseñar que partimos de que los bonos están ordenados en orden creciente de vencimiento, debiéndose cumplir por tanto:  $t_{n_r}^r < t_{n_{r+1}}^{r+1}$ ,  $r = 1, 2, \dots, k-1$ .

Tras haberse hallado los nodos, definimos para cada uno de ellos,  $d_j$   $j=1, \dots, m$ , una función asociada  $g_j(t)$ , las cuales estarán definidas de forma distinta para cada uno de los tramos en que dividimos el espectro de vencimientos. La  $j$ -ésima función valdrá cero para  $t \leq d_{j-1}$ , quedará definida a través de un polinomio de segundo grado para  $d_{j-1} \leq t \leq d_j$  y otro distinto para  $d_j \leq t \leq d_{j+1}$ . A partir de  $d_{j+1}$ ,  $g_j(t)$  será constante. Es decir, gráficamente podemos observar que dichas funciones son:



Obsérvese que para el tramo  $(d_j, d_{j+1})$ ,  $g_j(t)$  tiene la segunda derivada negativa, ya que en dicho tramo es creciente y la pendiente en  $d_{j+1}$  debe ser nula, ya que a partir de dicho nodo  $g_j(t)$  se define como una constante (su primera derivada es cero) y las derivadas de  $g_j(t)$  deben ser continuas.

Asimismo, puede observarse que, de esta forma, esta familia de funciones proporcionará un ajuste mucho más suave que tomar  $t^j$ ,  $\forall j$ , ya que por naturaleza, estas últimas funciones tienen un comportamiento mucho más explosivo.

Asimismo, las funciones  $g_j(t)$  deben ser continuas y derivables hasta primer orden. Añadiendo la condición arbitraria  $\frac{df_t}{dt}(d_j) = a_j$ , la cual se reduce a exigir que  $\frac{dg_j(t)}{dt}(d_j) = 1$ , los  $m$  splines que debemos utilizar vienen dados por:

$$g_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2d_2}t^2 + t & 0 \leq t < d_2 \\ \frac{1}{2}d_2 & d_2 \leq t < t_{nk}^k \end{cases}$$

$$g_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_{j-1} \\ \frac{1}{2(d_j - d_{j-1})}(t - d_{j-1})^2 & d_{j-1} \leq t \leq d_j \\ -\frac{1}{2(d_{j+1} - d_j)}(t - d_j)^2 + (t - d_j) + \frac{1}{2}(d_j - d_{j-1}) & d_j \leq t \leq d_{j+1} \\ \frac{1}{2}(d_{j+1} - d_{j-1}) & d_{j+1} \leq t \leq d_m \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \dots, m-1$$

$$g_m(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq d_{m-1} \\ \frac{1}{2(d_m - d_{m-1})}(t - d_{m-1})^2 & d_{m-1} \leq t \leq d_m \end{cases}$$

### 2.2.1.2. Splines cúbicos en la modelización de la función de descuento

Cuando hemos determinado el número de funciones,  $m$ , que determinan el factor de actualización, lo cual podemos realizar de la forma ya comentada, McCulloch (1975) se propone utilizar en la determinación de  $g_j(t)$ ,  $j=1,2,\dots,m$ , splines cúbicos, es decir polinomios de tercer grado definidos a tramos, por lo que la función de descuento ajustada finalmente será también un polinomio de tercer grado. Ello es debido a que, aunque los splines cuadráticos proporcionan un ajuste satisfactorio y una ETTI normalmente más suave que la que se obtendría utilizando simples polinomios, la suavidad de los tipos forward que se obtienen utilizando splines cúbicos es todavía mayor.

En este caso, bastará con definir  $m-1$  nodos, que notamos como  $d_j$ ,  $j=1,2,\dots,m-1$ , de forma que se habrá particionado el espectro de vencimientos en  $m-2$  intervalos. Como siempre, la obtención del

primer y último nodo es inmediata, ya que  $d_1 = 0$  y el último nodo es el vencimiento del bono que lo tiene más alejado, es decir,  $d_{m-1} = t_{n_k}^k$ .

Como hemos comentado en el supuesto de los splines cuadráticos, los nodos intermedios,  $d_j$ ,  $j=2, \dots, m-2$  se deben definir de forma que los  $m-2$  intervalos en que dividamos  $[0, t_{n_k}^k]$  contengan el mismo número de observaciones, en este caso, aproximadamente  $\frac{k}{m-2}$ . Así, el  $j$ -ésimo nodo se halla como:

$$d_j = t_{n_q}^q + \theta(t_{n_{q+1}}^{q+1} - t_{n_q}^q)$$

siendo  $q$  el entero de:

$$\frac{(j-1)k}{m-2}$$

y asimismo,

$$\theta = \frac{(j-1)k}{m-2} - q$$

Igual que cuando analizamos la determinación de los splines cuadráticos,  $q$  indica un número de orden del bono, considerándose igualmente que los bonos están ordenados en orden creciente de vencimiento, es decir:  $t_{n_r}^r < t_{n_{r+1}}^{r+1}$   $r = 1, 2, \dots, k-1$ .

Una vez hemos dividido el espectro de vencimientos en  $m-2$  intervalos de confianza, McCulloch define las  $m-1$  primeras funciones  $g_j(t)$  como los splines cúbicos resultantes de calcular la función primitiva de los splines cuadráticos que obtendríamos en el apartado 2.2.1.1. para cada uno de los nodos de que disponemos,  $d_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m-1$ , e imponiéndose la condición de continuidad. Así, las funciones  $g_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots, m-1$ , son funciones cúbicas definidas de forma distinta para cada uno de los  $m-2$  tramos en los que ha sido dividido el horizonte estimatorio. Éstas serán continuas, ya que para su construcción se ha impuesto dicha condición, y derivables hasta segundo orden, ya que los splines cuadráticos de los cuales provienen son derivables hasta primer orden. En concreto,  $g_j(t)$ ;  $j=1, 2, \dots, m-1$  es:

$$g_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_{j-1} \\ \frac{(t - d_{j-1})^3}{6(d_j - d_{j-1})} & d_{j-1} \leq t \leq d_j \\ \frac{(d_j - d_{j-1})^2}{6} + \frac{(d_j - d_{j-1})(t - d_j)}{2} + \frac{(t - d_j)^2}{2} - \frac{(t - d_j)^3}{6(d_{j+1} - d_j)} & d_j \leq t \leq d_{j+1} \\ (d_{j+1} - d_{j-1}) \left[ \frac{2d_{j+1} - d_j - d_{j-1}}{6} + \frac{t - d_{j+1}}{2} \right] & d_{j+1} \leq t \leq t_{n_k}^k \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, m-1$$

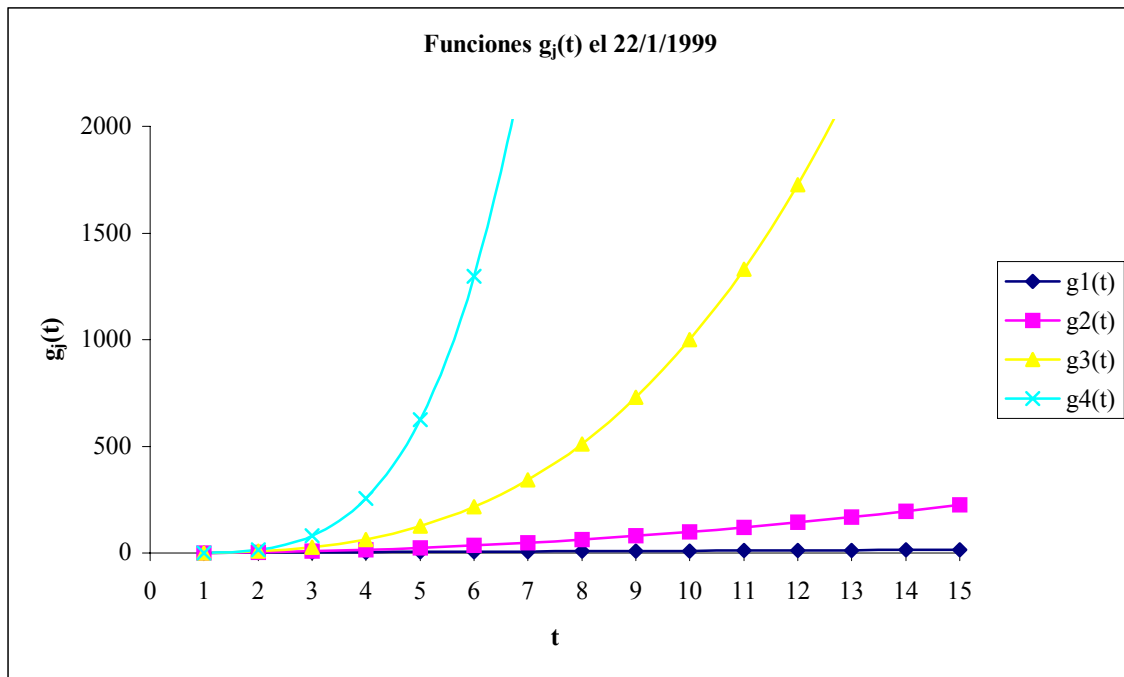
La última función,  $g_m(t)$ , queda definida de forma distinta. En concreto, McCulloch propone tomar simplemente:

$$g_m(t) = t \quad \forall t$$

Exponemos a continuación los resultados correspondientes a cada una de las especificaciones propuestas (polinómica, splines cuadráticos y splines cúbicos) correspondientes al 22-1-1999. En todos los casos hemos tomado cuatro funciones ( $m=4$ )  $g_j(t)$  con  $j>0$ , y como precio, el punto medio del intervalo que definan los precios superior e inferior al que han sido negociadas cada una de las referencias a lo largo de la sesión. Como en el apartado 2.1., en la muestra únicamente han sido tomados bonos y obligaciones con vencimientos de hasta 15 años, por las razones ya comentadas. Así, la ETTI únicamente queda definida con fiabilidad en dicho espectro de vencimientos.

#### a) Estimación polinómica

La forma de las funciones  $g_j(t)$ ,  $t=1,2,3,4$  propuestas para cuantificar el factor de descuento es:



Los resultados que arrojan nuestra estimación es:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
	-0,0260850	-0,0010953	0,0000402	0,0000005
t	(-21,172)	(-2,220)	(0,693)	(0,261)

Adicionalmente, se puede comprobar que el coeficiente de determinación ha sido  $R^2 = 0,99$ , es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Por otra parte, el tipo spot para un vencimiento  $t$  se obtiene como:

$$i_t = [1 - 0,0260850t - 0,0010953t^2 + 0,0000402t^3 + 0,0000005t^4]^{-1/t} - 1$$

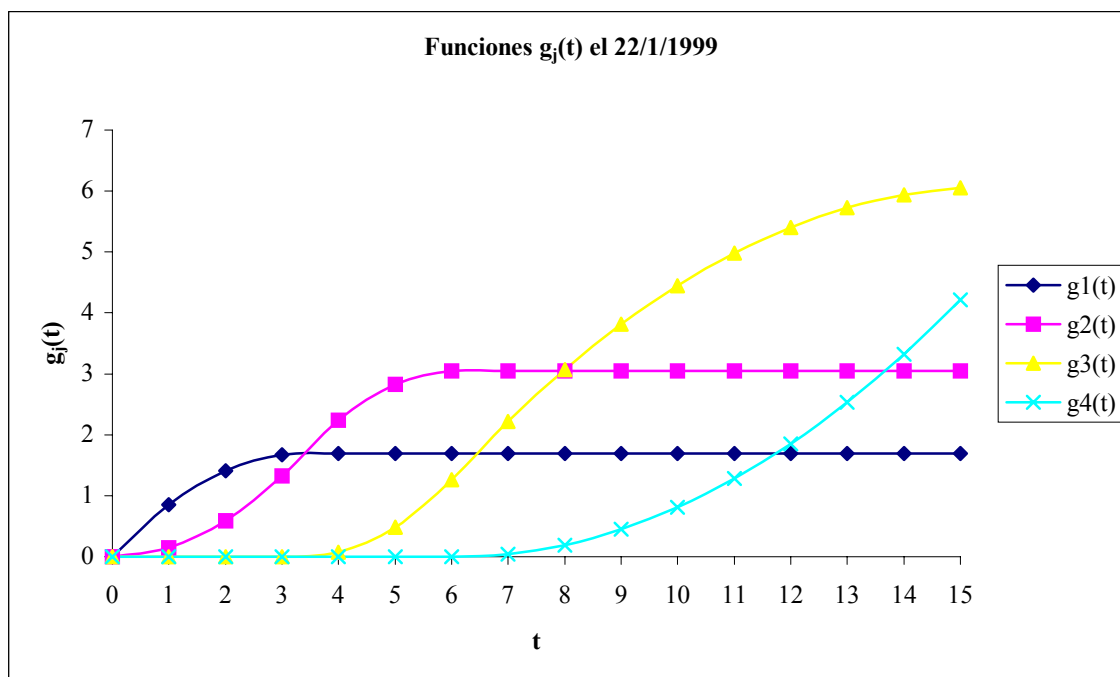
y así, la ETTI hasta 10 años que se deduce es:

t	$i_t$
1	0,02790
2	0,02935
3	0,03080
4	0,03223
5	0,03363
6	0,03501
7	0,03636
8	0,03765
9	0,03889
10	0,04006

b) Estimación mediante splines cuadráticos



También han sido tomadas cuatro funciones  $g_j(t)$ ,  $j=1,2,3,4$ , siendo por tanto, el número de nodos a tomar, 4. Su forma es:



Así, los parámetros que estimamos son:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
	-0,0272905	-0,0310820	-0,0363390	-0,0271128
t	(-21,814)	(-27,818)	(-52,430)	(-27,495)

Con un coeficiente de determinación  $R^2 = 0,99$ , es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Los tipos al contado se hallarán a partir de la expresión:

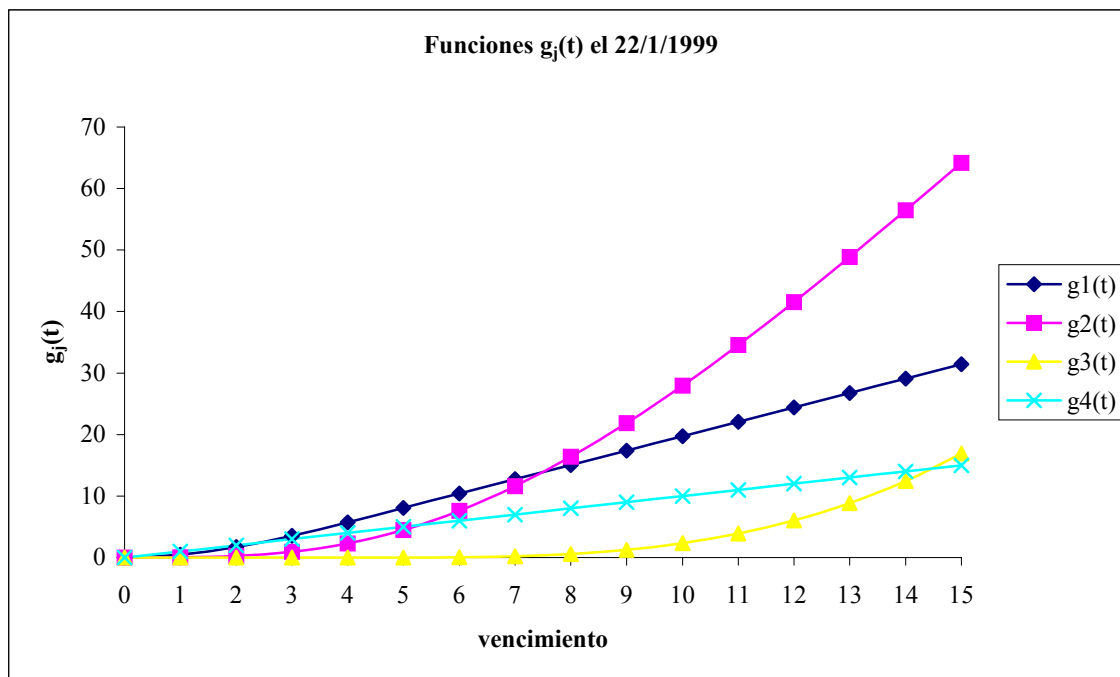
$$i_t = [1 - 0,0272905 g_1(t) - 0,0310820 g_2(t) - 0,0363390 g_3(t) - 0,0271128 g_4(t)]^{-1/t} - 1$$

Para los próximos 10 años la ETTI será:

t	$i_t$
1	0,02865
2	0,02968
3	0,03077
4	0,03197
5	0,03340
6	0,03504
7	0,03663
8	0,03793
9	0,03904
10	0,04002

c) Estimación mediante splines cúbicos

También han sido tomadas cuatro funciones  $g_j(t)$ ,  $j=1,2,3,4$ , y por tanto, sólo hemos seleccionado tres nodos. La forma de éstas es:



Los resultados que se obtienen para los parámetros de la regresión son:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
	-0,002079188	-0,001011142	0,00288336	-0,026224548
t	(-1,856)	(-2,175)	(3,980)	(-17,705)

Igualmente, el coeficiente de determinación ha sido  $R^2 = 0,99$ , es decir, el ajuste vuelve a ser prácticamente perfecto. Los tipos spot que se obtienen para los próximos 10 años en este caso son:

t	$i_t$
1	0,02799
2	0,02940
3	0,03081
4	0,03221
5	0,03361
6	0,03500
7	0,03636
8	0,03766
9	0,03891
10	0,04007

Habiendo sido calculados, evidentemente, a través de:

$$i_t = [1 - 0,00207919g_1(t) - 0,00101114g_2(t) + 0,0028834g_3(t) - 0,02622455g_4(t)]^{-1/t} - 1$$

### 2.2.2. El modelo de Vasicek y Fong

Siguiendo la línea iniciada por McCulloch (1971), Vasicek y Fong (1982) proponen la utilización de splines exponenciales del tiempo, para la cuantificación de la función de descuento que definen los tipos cupón cero. Este modelo ha sido aplicado en el mercado español, entre otros, por Contreras *et al.* (1996) y Urrutia *et al.* (1998).

Para ello Vasicek y Fong empiezan postulando para  $f_t$  una forma aproximadamente exponencial:

$$f_t = a_0 + a_1 e^{-\gamma t} + a_2 e^{-\gamma/2 t} + a_3 e^{-\gamma/3 t}$$

Así, el factor de descuento que obtendremos tendrá una forma más parecida a la que teóricamente le corresponde (exponencial del tiempo). De esta forma queda solventado parcialmente uno de los problemas, al menos teórico, que plantea el modelo de McCulloch; el hecho de que el factor de descuento acaba siendo una función polinómica del tiempo.

Otro de los problemas que plantea el modelo de McCulloch era que al trabajar directamente con el tiempo como variable dependiente, el dominio de la función de descuento, a priori debe ser  $[0, \infty)$ , es decir, no está acotado superiormente. Para que éste quedara acotado superiormente, se limitaba el espectro de vencimientos en los que finalmente se definía la función de descuento a  $[0, t_{n_k}^k]$ , siendo  $t_{n_k}^k$  el vencimiento del bono que lo tiene más alejado, y no pudiendo ser la función de descuento a vencimientos más alejados de  $t_{n_k}^k$ . Para solventar este problema, Vasicek y Fong proponen, como variable independiente, no el tiempo, sino una variable que surge como transformación de éste  $x$ , la cual se construye realizando el cambio de variable  $x = 1 - e^{-\gamma t}$ . De esta forma, para  $t=0$ ,  $x=0$ , y si  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 1$ . Por tanto la nueva variable independiente  $x$  que definirá al factor de descuento contempla todos los diferimientos posibles,  $t \in [0, \infty)$  a la vez que está acotada:  $0 \leq x < 1$ . De esta forma, el factor de descuento que se propone es una función polinómica de  $x$ , cuya forma es:

$$f_t = G(x) = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + a_3(1-x)^3$$

A partir de estas consideraciones, postulamos, de forma análoga a lo realizado en el modelo de McCulloch, que el factor de descuento sea definido a través de  $m+1$  funciones polinómicas –que finalmente serán polinómicas- de  $x$ :

$$G(x) = \sum_{j=0}^m \beta_j g_j(x).$$

Una cuestión crucial es la elección de las funciones  $g_j(x)$  que cuantifican la función de descuento. Si bien, Vasicek y Fong no proponen ninguna forma para las mismas, grado que  $f_0=G(0)=1$ , para el cumplimiento de esta condición consideraremos:

- 1)  $\beta_0=1$
- 2)  $g_0(0)=1-x$
- 3)  $g_j(0)=0, j=1,2,\dots,m$ .

y por tanto:

$$G(x) = (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x)$$

Por otra parte, éstos consideran que las funciones  $g_j(x)$  son splines cúbicos de  $x$ .

Así, el tipo spot que se deduce para un plazo  $t$  de la función de descuento anterior se hallará como:

$$i_t = \left[ e^{-\gamma t} + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(1 - e^{-\gamma t}) \right]^{-1/t} - 1$$

Sustituyendo en la expresión del precio de un bono [3], la expresión de  $G(x)$ , obtendremos:

$$\begin{aligned} P^r &= \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r G(x_i^r) + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[ (1 - x_i^r) + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x_i^r) \right] + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x_i^r) + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \varepsilon_r \end{aligned}$$

donde la variable  $x_i^r = 1 - e^{-\gamma t_i^r}$ . De esta forma podremos escribir:

$$P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \varepsilon_r$$

Si denominamos  $Y^r = P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r)$  y  $X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$ , el modelo que finalmente

deberemos estimar será:

$$Y^r = \sum_{j=1}^m \beta_j X_j^r + \varepsilon_r$$

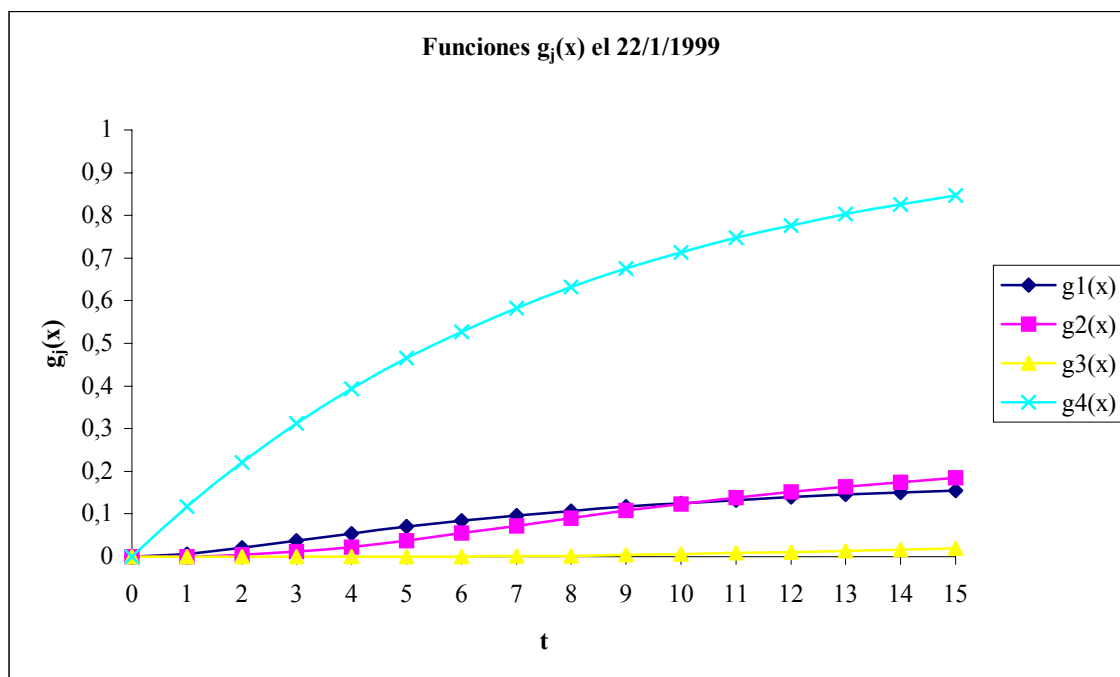
Respecto al modelo básico [3], si bien se supone que el término de perturbación aleatorio  $\varepsilon_r$  cumple que  $E[\varepsilon_r]=0$  y  $E[\varepsilon_r \cdot \varepsilon_l]=0, \forall r \neq l$ . Vasicek y Fong postulan que los errores son heterocedásticos, y más concretamente que para el  $r$ -ésimo bono  $\text{Var}[\varepsilon_r]= \left[ \frac{dP^r(I)}{dI} (I^r) \right]^2 \sigma^2$ , donde  $P^r(I)$  es el precio del bono  $r$ -ésimo como función de la variable rendimiento interno,  $I$ , e  $I_r$  la TIR de dicho bono en la sesión que estemos analizando. Ello supondrá que la estimación de los parámetros  $\beta_j, j=1, \dots, m$  deberá ser realizada mediante mínimos cuadrados generalizados para un  $\gamma$  determinado, dada la naturaleza heterocedástica del error.

Aunque en principio, y como en el modelo de McCulloch, no hubiera habido problema en suponer que los residuos son homocedásticos, la introducción de la heterocedasticidad está justificada porque un mismo error en términos absolutos en los precios de varios bonos no tiene la misma repercusión en la rentabilidad final que se estima para éstos, lo que incide en la calidad de la ETTI que se derive del modelo una vez implementado. Ello es debido a que, para un error dado en el precio de un bono, a medida que el precio de éste es menos sensible ante variaciones del interés, el error que finalmente se comete en su rendimiento interno sobre el precio debe aumentar. Ello viene motivado porque la derivada del interés respecto al precio del bono es la función inversa de la derivada del precio de un bono respecto al interés. Así, la estimación mediante mínimos cuadrados generalizados nos permitirá, al minimizar la suma de errores al cuadrado, ponderar dichos errores. Daremos mayor importancia a aquellos errores del precio asociados a bonos menos sensibles ante variaciones del tipo de interés (los cuales, asimismo, serán normalmente los que tengan un vencimiento más cercano) y menor a los correspondientes a los precios que sean más sensibles ante variaciones en el tipo de interés, ya que un error dado en su precio no tiene tanta repercusión sobre el error que se cometería en su rentabilidad.

Para hallar la estimación del parámetro  $\gamma, \hat{\gamma}$ , deberemos utilizar algún método numérico, como por ejemplo, la optimización cuadrática de Newton. El objetivo sería minimizar la suma de los errores al cuadrado de la regresión.

A continuación exponemos los resultados obtenidos en la estimación del factor de descuento el 22/1/1999. Hemos tomado tres nodos que son:  $x_1 = 0, x_2 = 1 - e^{-\gamma t_2}$  siendo  $t_2$  la mediana de los vencimientos de los bonos negociados durante la sesión en que se estima la ETTI y  $x_3 = 1$ . Como splines se ha tomado las cúbicas propuestas por McCulloch, pero teniéndose en cuenta que el argumento de las funciones no es el vencimiento de los cupones y el principal, sino la

transformación que sobre los mismos se realiza. La forma de estas funciones, una vez obtenido el valor de  $\hat{\gamma} = 0,125$  que es el que minimiza la suma de los errores al cuadrado de la regresión, es:



El coeficiente de determinación es en este caso también del 99%. Los resultados que obtenemos en la sesión que analizamos son:

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\gamma$
	0,10945	-1,18703	-3,23174	0,75497	0,125
t	(1,169)	(-14,485)	(-6,765)	(99,844)	

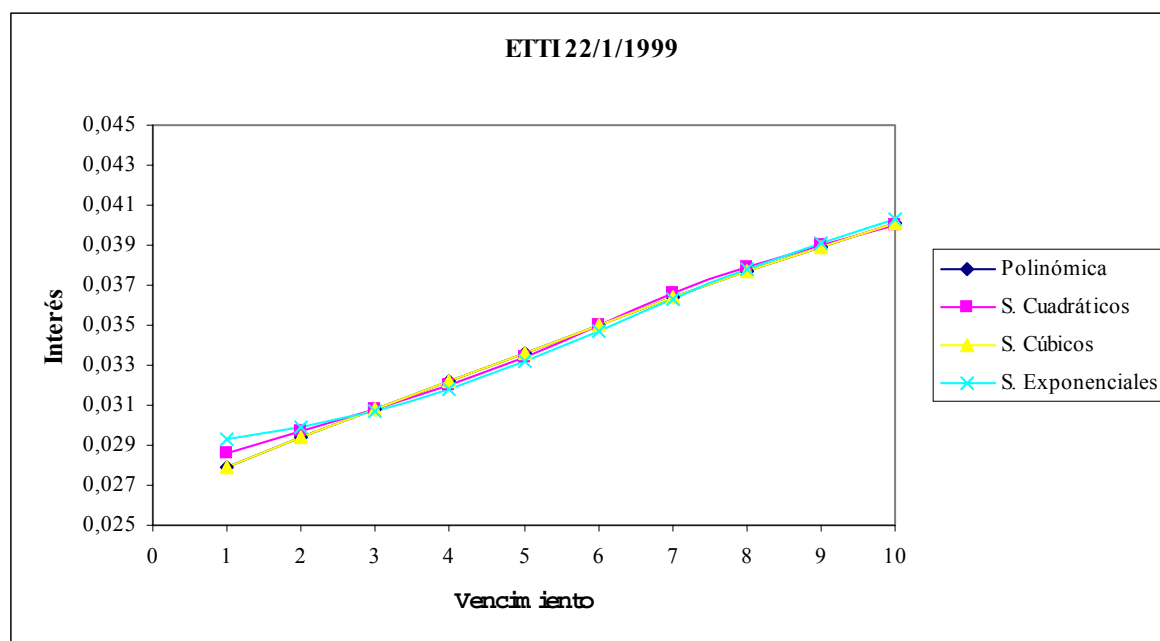
Siendo entonces  $i_t$ :

$$i_t = [e^{-0,125t} + 0,10945g_1(1 - e^{-0,125t}) - 1,18703g_2(1 - e^{-0,125t}) - 3,23174g_3(1 - e^{-0,125t}) + 0,75497g_4(1 - e^{-0,125t})]^{-1/t} - 1$$

obteniéndose, por tanto, los siguientes tipos al contado:

t	$i_t$
1	0,02968
2	0,02967
3	0,03050
4	0,03179
5	0,03329
6	0,03485
7	0,03640
8	0,03785
9	0,03918
10	0,04035

La representación gráfica de la ETTI para vencimientos de hasta 10 años con las metodologías expuestas durante este apartado es:



### 2.2.3. Comentarios a los resultados obtenidos en las estimaciones

Podemos comprobar que las especificaciones de las funciones  $g_j(t)$  en el caso de McCulloch no arrojan diferencias sustanciales en la estimación de la ETTI, tanto por los valores de los tipos spot obtenidos como por la bondad del ajuste, ya que en todos los casos los coeficientes de determinación son iguales al 99%. Podemos observar, por otra parte, que el modelo de Vasicek procura resultados similares a los obtenidos con los modelos de McCulloch.

Es cierto que existen divergencias en los tipos spot correspondientes al tramo de 1-2 años, pero pueden ser achacadas a las pocas observaciones que se disponen sobre bonos y obligaciones para dichos vencimientos. En la muestra considerada, el bono con menor maduración era el B-12'25% a 10 años, con un vencimiento residual de 426 días.

En el modelo de McCulloch, y con la estimación  $g_j(x) = t^j$ , no hemos observado, en la fecha analizada, que provoque una ETTI más oscilante que otras definidas a través de splines cúbicos o cuadráticos. Sin embargo, somos conscientes de que un estudio más riguroso debería partir de estimaciones de la ETTI en diferentes sesiones y periodos de tiempo, de forma que puedan ser captadas una variada gama de perfiles de la ETTI. Así sería posible observar el comportamiento que mantienen las diferentes especificaciones propuestas en diferentes escenarios. Sin embargo,

trabajos como del de McCulloch (1971) y Núñez (1995) soportan la hipótesis de que la especificación de  $g_j(t)$  como  $t^j$  provoca una mayor suavidad en los tipos spot obtenidos.

Asimismo, podemos observar que utilizando esta línea metodológica, a partir de plazos relativamente poco elevados –2 o 3 años- la ETTI que obtenemos queda por encima de la que se deduce de la utilización de la metodología de los bonos par tras el ajuste de las TIR –mediante una regresión o mediante la interpolación-, lo cual es debido a que en este segundo caso no eliminamos totalmente, como ya ha sido comentado, el sesgo de cupón y la ETTI que impera el 22-1-1999 es creciente.

#### 2.2.4. Estimación de los tipos forward a través de la estimación directa de la ETTI

Ya hemos comprobado que en este caso, la función de descuento que describen los tipos al contado y estos mismos tipos, pueden obtenerse como una función continua del tiempo, una vez hayamos ajustado los parámetros de la regresión. Pues bien, también podemos hallar los tipos anticipados por el mercado a través de una función continua. Es decir, podemos hallar una expresión analítica para los tipos forward y los factores de actualización que estos describen.

Así, el factor de actualización forward dentro de  $t-1$  años o el valor de 1 unidad monetaria que vence en  $t$  años dentro de  $t-1$  años es:

$${}_{t-1}f_1 = \frac{f_t}{f_{t-1}} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t)}{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t-1)}$$

siendo entonces el tipos forward a un año dentro de  $t-1$  años:

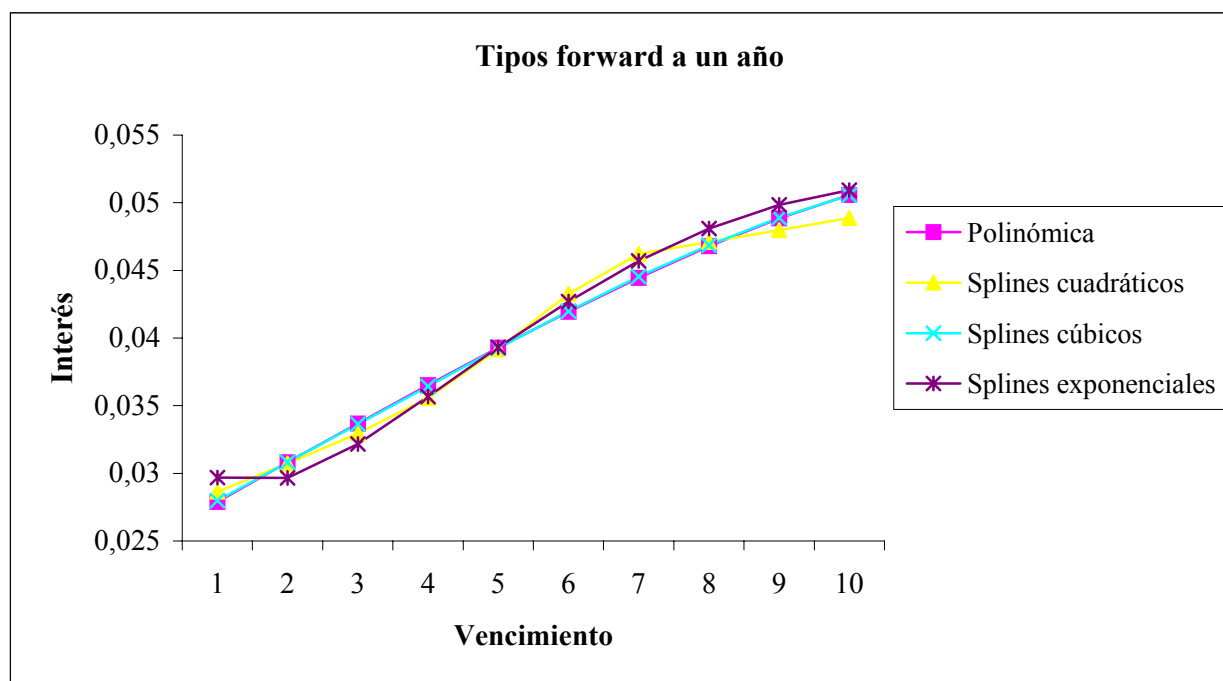
$${}_{t-1}i_1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 = \frac{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t-1)}{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t)} - 1$$

De esta forma, los resultados que obtenemos, con los cuatro modelos de obtención del factor de descuento estudiados son:



t	Polinómica	Splines cuadráticos	Splines cúbicos	Splines exponenciales
1	0,02790	0,02865	0,02799	0,02968
2	0,03081	0,03071	0,03081	0,02966
3	0,03369	0,03295	0,03363	0,03216
4	0,03652	0,03557	0,03643	0,03567
5	0,03928	0,03918	0,03924	0,03931
6	0,04194	0,04326	0,04198	0,04271
7	0,04446	0,04622	0,04453	0,04570
8	0,04679	0,04709	0,04686	0,04810
9	0,04886	0,04797	0,04889	0,04985
10	0,05059	0,04886	0,05056	0,05092

Siendo la evolución temporal de dichos tipos forward:



Como conclusión a los métodos expuestos en este apartado, creemos, que en principio, son superiores a los expuestos en el epígrafe 2.1. ya que:

- La obtención de la ETTI es más sencilla. A partir del ajuste de la TIR de los títulos creemos que el camino para llegar a obtener la ETTI es mucho más tortuosa, ya que debemos combinar dos instrumentos: el ajuste de las TIRs de los títulos con vencimientos enteros y después obtener la ETTI mediante el método del bono par.
- La obtención de la ETTI con las metodologías propuestas en este apartado permite obtener los tipos del mercado (al contado y forward) como funciones continuas del tiempo. Sin embargo, con las metodologías explicadas en el apartado 2.1. sólo podemos obtener la ETTI para determinados vencimientos o vértices, esto es, como una nube de puntos.

- c) En los métodos expuestos en el apartado 2.1. reconocemos, al aplicar la metodología del bono par la diferencia entre los tipos spot y la rentabilidad de un bono americano que presente el mismo vencimiento, con lo cual queda parcialmente eliminado el sesgo de cupón que introducen las rentabilidades de dichos títulos. Sin embargo, el sesgo cupón no queda totalmente eliminado, ya que al ajustar una función del tiempo a la TIR de los títulos, incorporamos como variable independiente únicamente el tiempo, aceptándose de esta forma, que dos bonos que ofrezcan diferentes cupones (por ejemplo, el 8% y el 10%), y que presenten el mismo vencimiento, la TIR de los mismos debe ser idéntica, lo cual, como ya comentamos en el apartado 1.2. no es cierto.
- d) Aunque en general podemos afirmar que en certeza parece ser superior metodológicamente la estimación econométrica de la función de descuento que estimar la ETTI a partir del ajuste TIR-plazo de los bonos, nuestra propuesta en incertidumbre abarcará ambas posibilidades. En primer lugar, porque la segunda línea, aún siendo peor, está ampliamente extendida en la práctica, y en segundo lugar, porque no podemos asegurar, a priori, que utilizando los instrumentos de regresión borrosa la estimación de la ETTI a partir de las TIR de los títulos sea un método netamente inferior a la estimación de la ETTI a través de la función de descuento.