En este caso, deberemos proceder igual que en certeza, pero teniendo en cuenta que trabajamos con estimaciones borrosas. Para ellos proponemos seguir el siguiente procedimiento:

1) Estimar los precios de los bonos que cotizan a la par y cuyos vencimiento son $t \in \{1,2,\ldots,n\}$ siendo n el máximo vencimiento considerado en la estimación de la ETTI. En este caso, dado que los rendimientos para los diversos vencimientos considerados que se derivan de la curva de rentabilidades no son ciertos, el precio del bono par que obtendremos será un número borroso que tomará un valor de "aproximadamente 100", pero no el número cierto 100.
2) Deducir a través del precio de los bonos par los factores de actualización que definen los tipos al contado.
3) Deducir los tipos spot correspondientes a cada vencimiento, quedando establecida así la ETTI.

3.1.3.1. Estimación del precio del bono par

Para hallar el precio del bono par, en primer lugar debemos hallar el cupón correspondiente a un bono que cotice "aproximadamente a la par", y por tanto, 100 pertenezca al soporte del número borroso que cuantifica su precio, para después hallar el precio de éste. Los vencimientos a considerar serán $\{1,2,\ldots,t,\ldots,n\}$, con t entero y n el máximo diferimiento para el que pretendemos estimar la curva de tipos cupón cero. Dado que el cupón que ofrece un bono del estado es cierto, y sin embargo, su rentabilidad se manifiesta como un número borroso que depende del vencimiento, para hallar el cupón del bono par deberemos considerar que éste es un número cierto que representa razonablemente bien a la TIR de dicho bono -debemos desfuzzyficar la TIR del bono-. Adicionalmente, exigiremos que 100 sea el valor con mayor nivel de presunción del precio. Para ello, el cupón –cierto- que ofrece dicho bono debe coincidir con la rentabilidad que tiene mayor nivel de presunción para éste. Así, el cupón del bono con un vencimiento de t años medido en tanto por uno de su valor nominal, c'_t, debe cumplir que $\mu_{\tilde{I}_t}(c'_t) = 1$. Al cupón expresado en porcentaje le denominaremos como c_t, siendo por tanto $c'_t = 100\ c'_t$.

Así, el precio del bono par es un número borroso que se hallará como:

$$\tilde{P}_t = \sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1+\tilde{I}_t)^r} + \frac{c_t + 100}{(1+\tilde{I}_t)^t}$$

y de esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{P}_t$ será:

$$\mu_{\tilde{P}_t}(y) = \bigvee_{y=\sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1+x)^r} + \frac{c_t+100}{(1+x)^r}} \mu_{\tilde{I}_t}(x)$$

la cual, generalmente, no tendrá solución analítica. Sin embargo, siempre podrán ser hallados los α-cortes de $\widetilde{P}_t$, que serían:

$$P_{t\alpha} = \left[P_t^1(\alpha), P_t^2(\alpha)\right] = \left[\sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{\left(1+I_t^2(\alpha)\right)^r} + \frac{c_t+100}{\left(1+I_t^2(\alpha)\right)^t}, \sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{\left(1+I_t^1(\alpha)\right)^r} + \frac{c_t+100}{\left(1+I_t^1(\alpha)\right)^t}\right] =$$

$$= \left[c_t \frac{1-(1+I_t^2(\alpha))^{-t}}{I_t^2(\alpha)} + 100(1+I_t^2(\alpha))^{-t}, c_t \frac{1-(1+I_t^1(\alpha))^{-t}}{I_t^1(\alpha)} + 100(1+I_t^1(\alpha))^{-t}\right] =$$

$$= \left[c_t a_{t\rceil I_t^2(\alpha)} + 100(1+I_t^2(\alpha))^{-t}, c_t a_{t\rceil I_t^1(\alpha)} + 100(1+I_t^1(\alpha))^{-t}\right] \quad [5]$$

Obsérvese que hemos notado a los α-cortes de la rentabilidad interna del bono expresada como tanto efectivo anual de la forma $I_{t\alpha} = \left[I_t^1(\alpha), I_t^2(\alpha)\right]$, siendo para los modelos presentados en 3.1.2.1, 3.1.2.2. y 3.1.2.3.: $I_{t\alpha} = \left[I_{tC} - I_{tR} L^{-1}(\alpha), I_{tC} + I_{tR} L^{-1}(\alpha)\right]$. En el modelo de Bradley y Crame, en cambio, puede comprobarse que la expresión que obtendremos será: $I_{t\alpha} = \left[e^{\ln(1+I_t)_C - \ln(1+I_t)_R L^{-1}(\alpha)} - 1, e^{\ln(1+I_t)_C + \ln(1+I_t)_R L^{-1}(\alpha)} - 1\right]$. En cualquier caso, podemos asegurar que siempre se cumple que $\mu_{\widetilde{P}_t}(100) = 1$.

Debemos comentar que $\widetilde{P}_t$ no es ya un número L-L de Dubois y Prade, el precio del bono deja de ser simétrico (asimetría a la derecha). Dicha circunstancia es debida al 4º principio de Malkiel (1962), que indica que los incrementos del precio ante decrementos del tipo de interés son superiores a las disminuciones en este debidas a un incremento de la misma magnitud en los tipos: es decir, la segunda derivada del precio del bono con respecto al tipo de interés es positiva, ya que la función es convexa. Sin embargo, si partimos de la rentabilidad estimada mediante un número borroso triangular, podremos comprobar que se obtiene una aproximación lo suficientemente satisfactoria de $\widetilde{P}_t$ mediante un número borroso que tenga la misma naturaleza, lo cual facilitará enormemente posteriores desarrollos. Así, el análisis que realizaremos a continuación hará especial hincapié en el caso en que se considere como aceptable:

$$\widetilde{P}_t \approx \left(P_t, l_{P_t} = P_t - P_t^1(0), r_{P_t} = P_t^2(0) - P_t\right)_L \quad [6]$$

3.1.3.2. Estimación de los precios de los bonos par a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diferentes modelos planteados

A continuación presentamos los resultados que obtenemos con los modelos de estimación de la curva de rentabilidades presentados, en la estimación de los precios de los bonos que cotizan a la par ahondándose en el análisis de la triangularidad de los precios hallados.

a) Estimación del precio del bono par a partir de la estimación de la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal

La estimación de los α-cortes del precio del bono par para cada una de las referencias se realiza a través de la expresión [5] sin mas que sustituir $L^{-1}(\alpha)$ por 1- α. Así, por ejemplo, los α-cortes del precio del bono con vencimiento a 10 años, $\widetilde{P}_{10}$, para las estimaciones de la curva de rentabilidades realizadas a un nivel α^*=0 y 0’5 son:

		α^*=0		α^*=0’5	
i	α_i	$P^1_{10}(\alpha)$	$P^2_{10}(\alpha)$	$P^1_{10}(\alpha)$	$P^2_{10}(\alpha)$
0	0	99,9592	100,0409	99,9183	100,0817
1	0,1	99,9632	100,0368	99,9265	100,0736
2	0,2	99,9673	100,0327	99,9347	100,0654
3	0,3	99,9714	100,0286	99,9428	100,0572
4	0,4	99,9755	100,0245	99,9510	100,0490
5	0,5	99,9796	100,0204	99,9592	100,0409
6	0,6	99,9837	100,0163	99,9673	100,0327
7	0,7	99,9877	100,0123	99,9755	100,0245
8	0,8	99,9918	100,0082	99,9837	100,0163
9	0,9	99,9959	100,0041	99,9918	100,0082
10	1	100	100	100	100

Si bien, los extremos de los α-cortes no son una función polinómica de α, calculamos la tabla de diferencias para dichos extremos, izquierdo y derecho, considerándose una escala endecadaria, con el fin de analizar si podemos ajustarlos a través de una expresión polinómica del nivel de presunción. En concreto, calculamos hasta las segundas diferencias de los extremos de los α-cortes para $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ =0’1:

	α^*=0				α^*=0’5			
i	$\Delta P^1_{10}(\alpha)$	$\Delta P^2_{10}(\alpha)$	$\Delta^2 P^1_{10}(\alpha)$	$\Delta^2 P^2_{10}(\alpha)$	$\Delta P^1_{10}(\alpha)$	$\Delta P^2_{10}(\alpha)$	$\Delta^2 P^1_{10}(\alpha)$	$\Delta^2 P^2_{10}(\alpha)$
0	0,0040830	-0,0040868	0,0000002	0,0000002	0,0081620	-0,0081776	0,0000008	0,0000008
1	0,0040832	-0,0040866	0,0000002	0,0000002	0,0081629	-0,0081767	0,0000008	0,0000008
2	0,0040834	-0,0040864	0,0000002	0,0000002	0,0081637	-0,0081759	0,0000008	0,0000008
3	0,0040836	-0,0040862	0,0000002	0,0000002	0,0081645	-0,0081751	0,0000008	0,0000008
4	0,0040838	-0,0040860	0,0000002	0,0000002	0,0081653	-0,0081743	0,0000008	0,0000008
5	0,0040840	-0,0040858	0,0000002	0,0000002	0,0081661	-0,0081735	0,0000008	0,0000008
6	0,0040842	-0,0040856	0,0000002	0,0000002	0,0081669	-0,0081727	0,0000008	0,0000008
7	0,0040844	-0,0040854	0,0000002	0,0000002	0,0081678	-0,0081718	0,0000008	0,0000008
8	0,0040846	-0,0040852	0,0000002	0,0000002	0,0081686	-0,0081710	0,0000008	0,0000008
9	0,0040848	-0,0040850			0,0081694	-0,0081702		

Podemos observar que en todos los casos las primera diferencias son prácticamente constantes, por lo que los α-cortes son casi constantes. Asimismo, las segundas diferencias, son en este caso, constantes. Así, los extremos de los α-cortes pueden aproximarse exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado. Para ello, sólo hacen falta tres puntos, así que tomamos $h = \Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i =0'5$. En consecuencia, y dado que el polinomio de 2º grado interpolante de una función f(x), es P(x), cuya forma es:

$$f(x) \approx P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

para cada nivel α^* contemplado, obtenemos:

$\alpha^*=0$

i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,9592	100,0409	0,0204	-0,2585	0,0000051	0,0000051
1	0,5	99,9796	100,0204	0,0204	-0,2577		
2	1	100	100				

$\alpha^*=0'5$

i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,9183	100,0817	0,0408	-0,0409	0,0000204	0,0000204
1	0,5	99,9592	100,0409	0,0408	-0,0409		
2	1	100	100				

Para cada α^*, los α-cortes son ajustados de forma perfecta por:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$P_{10}^1(\alpha)\approx 99{,}9592+0{,}0408\alpha+0{,}0000102\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha)\approx 99{,}9183+0{,}0816\alpha+0{,}0000408\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha)\approx 100{,}0409-0{,}0409\alpha+0{,}0000102\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha)\approx 100{,}0817-0{,}0818\alpha+0{,}0000408\alpha(\alpha-1/2)$

En el resto de vencimientos considerados podría comprobarse, igualmente, que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α-cortes es prácticamente perfecto, ya que las segundas diferencias de los extremos de los α-cortes también son prácticamente constantes.

A continuación seguiremos la metodología propuesta por Jiménez y Rivas ya expuesta en el apartado 1.4.2. de la primera parte de la tesis, para medir la calidad de aproximación $\widetilde{P}_t$ mediante un número borroso triangular. Supondremos que la aproximación de los α-cortes mediante una función cuadrática es "perfecta". En este caso, la mayor divergencia que en términos absolutos se produce tanto para el extremo izquierdo como para el derecho en la aproximación de $\widetilde{P}_t$ es en el nivel $\alpha^*_I(t)= \alpha^*_D(t)=1/2$, siendo $\alpha^*_I(t)$ el nivel de presunción en el que se produce dicha desviación en el extremo izquierdo de los α-cortes y $\alpha^*_D(t)$ para los derechos. Así, las desviaciones absolutas máximas que se producen a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^*(t) = \frac{1}{2}\left|P_t^1(1) - 2P_t^1(0{,}5) + P_t^1(0)\right| \text{ y } D_D^*(t) = \frac{1}{2}\left|P_t^2(1) - 2P_t^2(0{,}5) + P_t^2(0)\right|$$

La demostración de los resultados se realiza, como ya comentamos, en el apartado 4.2.3.1. de la primera parte de la tesis, en Terceño *et al.* (1995).

Así, obtenemos como desviaciones máximas de los α-cortes por la aproximación triangular del precio de bonos de vencimiento 1, 3, 5 y 10 años:

	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0{,}5$	
t	$D_I^*(t)$	$D_D^*(t)$	$D_I^*(t)$	$D_D^*(t)$
1	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
3	0,0000078	0,0000078	0,0000299	0,0000300
5	0,0000055	0,0000055	0,0000201	0,0000202
10	0,0000026	0,0000026	0,0000102	0,0000102

Los errores que en el nivel de presunción podemos cometer como máximo han sido calculados tal como se comenta en la primera parte de esta tesis, y son:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0	0,0001153	0,0000924	0,0000625
$\alpha^*=0'5$	0	0,0002258	0,0001776	0,0001249

Podemos comprobar que el error que proporciona un ajuste triangular aumenta a medida que aumenta el vencimiento de los bonos y la incertidumbre del interés de valoración, que se incrementa asimismo, a medida que crece la incertidumbre de los datos de partida para ajustar la curva de rentabilidades (aumenta α^*). Sin embargo, en todos los casos los errores que cometemos son asumibles. Así, por ejemplo, el máximo error que cometemos para un precio que efectivamente tome un nivel de presunción de 0’7 en el bonos a 10 años y con $\alpha^*=0'5$ es 0’0001. Así, en la aproximación a $\widetilde{P}_{10}$ dicho precio tendría un nivel de presunción en el peor de los casos, de 0’7±0,0001249; es decir, dicho valor desde un punto de vista de interpretación semántica sigue siendo bastante verdadero[1].

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

[1] Adaptado de Jiménez *et al.* (1996).

t	c_t	P_t (α^*=0)	P_t (α^*=0'5)
1	0,02955	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
2	0,02872	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
3	0,03071	(100, 0,06635, 0,06641)	(100, 0,13264, 0,13288)
4	0,03113	(100, 0,00927, 0,00927)	(100, 0,01853, 0,01854)
5	0,03294	(100, 0,05675, 0,05679)	(100, 0,11346, 0,11362)
6	0,03471	(100, 0,10660, 0,10674)	(100, 0,21307, 0,21363)
7	0,03597	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
8	0,03693	(100, 0,09200, 0,09211)	(100, 0,18390, 0,18432)
9	0,03826	(100, 0,08614, 0,08623)	(100, 0,17219, 0,17256)
10	0,03855	(100, 0,04084, 0,04086)	(100, 0,08166, 0,08174)

b) Estimación del precio del bono par a partir de la estimación polinómica de la curva de rentabilidades

A continuación presentamos los resultados que se obtienen para el modelo presentado en el apartado 3.1.1.2. Únicamente analizamos el ajuste polinómico de los α-cortes para el bono 10, demostrándose que la aproximación cuadrática es prácticamente perfecta. Se puede comprobar que para otros vencimientos dicha aproximación continúa siendo igualmente buena. Posteriormente presentamos los resultados de los errores que se obtienen para diversos vencimientos si asumimos que el precio es un NBT, comparando dicha aproximación, como ya se realizó en el caso anterior, con los α-cortes obtenidos mediante la aproximación cuadrática. Así, para α^*=0 y 0'5, los α-cortes del bono par con vencimiento a 10 años son:

		α^*=0		α^*=0'5	
i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,4101	100,5942	98,8244	101,1928
1	0,1	99,4689	100,5346	98,9412	101,0727
2	0,2	99,5277	100,4750	99,0581	100,9529
3	0,3	99,5866	100,4155	99,1753	100,8331
4	0,4	99,6455	100,3560	99,2926	100,7136
5	0,5	99,7045	100,2966	99,4101	100,5942
6	0,6	99,7635	100,2372	99,5277	100,4750
7	0,7	99,8226	100,1778	99,6455	100,3560
8	0,8	99,8817	100,1185	99,7635	100,2372
9	0,9	99,9408	100,0592	99,8817	100,1185
10	1	100	100	100	100

Y la tabla de diferencias para los extremos de los α-cortes que obtenemos es:

	α^*=0				α^*=0'5			
i	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,05880	-0,05962	0,00004	0,00004	0,11680	-0,12006	0,00017	0,00017
1	0,05885	-0,05957	0,00004	0,00004	0,11697	-0,11989	0,00017	0,00017
2	0,05889	-0,05953	0,00004	0,00004	0,11714	-0,11971	0,00017	0,00017
3	0,05893	-0,05949	0,00004	0,00004	0,11731	-0,11954	0,00017	0,00017

4	0,05897	-0,05945	0,00004	0,00004	0,11748	-0,11937	0,00017	0,00017
5	0,05902	-0,05940	0,00004	0,00004	0,11765	-0,11919	0,00017	0,00017
6	0,05906	-0,05936	0,00004	0,00004	0,11782	-0,11902	0,00017	0,00017
7	0,05910	-0,05932	0,00004	0,00004	0,11799	-0,11885	0,00017	0,00017
8	0,05914	-0,05927	0,00004	0,00004	0,11816	-0,11868	0,00017	0,00017
9	0,05919	-0,05923			0,11833	-0,11850		

Podemos observar que en todos los casos las segundas diferencias son prácticamente constantes, de forma que los extremos de los α-cortes pueden aproximarse casi exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado. Éstos son:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$P^1_{10}(\alpha)\approx 99,4101+0,5889\alpha+0,0021\alpha(\alpha\text{-}1/2)$	$P^1_{10}(\alpha)\approx 98,8244+1,1714\alpha+0,0085\alpha(\alpha\text{-}1/2)$
$P^2_{10}(\alpha)\approx 100,5942\text{-}0,5953\alpha+0,0022\alpha(\alpha\text{-}1/2)$	$P^2_{10}(\alpha)\approx 101,1928\text{-}1,1971\alpha+0,0086\alpha(\alpha\text{-}1/2)$

Para el resto de vencimientos considerados, podría comprobarse igualmente que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α-cortes es prácticamente perfecto, ya que las segundas diferencias también son prácticamente constantes.

Los errores que en el nivel de presunción se producen por la aproximación triangular de $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_3$, $\widetilde{P}_5$ y $\widetilde{P}_{10}$ son despreciables, siendo estos:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00018	0,00035	0,00052	0,00091
$\alpha^*=0'5$	0,00035	0,00070	0,00103	0,00181

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	P_t ($\alpha^*=0$)	P_t ($\alpha^*=0'5$)
1	0,02881	(100, 0,07051, 0,07061)	(100, 0,14091, 0,14131)
2	0,02920	(100, 0,13891, 0,13921)	(100, 0,27753, 0,27871)
3	0,03013	(100, 0,20499, 0,20556)	(100, 0,40941, 0,41170)
4	0,03140	(100, 0,26846, 0,26939)	(100, 0,53598, 0,53971)
5	0,03284	(100, 0,32908, 0,33044)	(100, 0,65681, 0,66225)
6	0,03431	(100, 0,38676, 0,38861)	(100, 0,77167, 0,77907)
7	0,03570	(100, 0,44150, 0,44389)	(100, 0,88062, 0,89020)
8	0,03695	(100, 0,49346, 0,49644)	(100, 0,98395, 0,99589)
9	0,03801	(100, 0,54286, 0,54648)	(100, 1,08212, 1,09660)
10	0,03887	(100, 0,5899,5, 0,59424)	(100, 1,17564, 1,19280)

c) Estimación del precio del bono par a partir del modelo de Cohen, Kramer y Vaugh

Igual que en el caso anterior, presentamos los α-cortes del precio del bono par con vencimiento a 10 años el 22/1/1999:

		$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0'5$	
i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,18934	100,81878	98,3867	101,6458
1	0,1	99,27004	100,73653	98,5466	101,4797
2	0,2	99,35083	100,65437	98,7068	101,3140
3	0,3	99,43169	100,57229	98,8673	101,1486
4	0,4	99,51263	100,49029	99,0282	100,9835
5	0,5	99,59366	100,40837	99,1893	100,8188
6	0,6	99,67477	100,32653	99,3508	100,6544
7	0,7	99,75595	100,24478	99,5126	100,4903
8	0,8	99,83722	100,16310	99,6748	100,3265
9	0,9	99,91857	100,08151	99,8372	100,1631
10	1	100	100	100	100

Y se obtiene que las primeras y segundas diferencias de los extremos de los α-cortes son:

	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0'5$			
i	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,08070	-0,08225	0,00008	0,00008	0,15989	-0,16606	0,00032	0,00033
1	0,08078	-0,08216	0,00008	0,00008	0,16021	-0,16573	0,00032	0,00033
2	0,08086	-0,08208	0,00008	0,00008	0,16053	-0,16540	0,00032	0,00033
3	0,08094	-0,08200	0,00008	0,00008	0,16085	-0,16507	0,00032	0,00033
4	0,08103	-0,08192	0,00008	0,00008	0,16117	-0,16474	0,00032	0,00033
5	0,08111	-0,08184	0,00008	0,00008	0,16149	-0,16441	0,00032	0,00033
6	0,08119	-0,08176	0,00008	0,00008	0,16181	-0,16408	0,00032	0,00033
7	0,08127	-0,08167	0,00008	0,00008	0,16213	-0,16375	0,00032	0,00033
8	0,08135	-0,08159	0,00008	0,00008	0,16245	-0,16343	0,00032	0,00033
9	0,08143	-0,08151			0,16278	-0,16310		

De igual forma que en el casos anteriores, podemos obtener los extremos de los α-cortes como polinomios de segundo grado de α. Para cada α^* estos resultan ser:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$P_{10}^1(\alpha)\approx 99{,}1893+0{,}8086\alpha+0{,}0040\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha)\approx 98{,}3867+1{,}6053\alpha+0{,}0165\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha)\approx 100{,}8188-0{,}8208\alpha+0{,}0041\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha)\approx 101{,}6458-1{,}654\alpha+0{,}0164\alpha(\alpha-1/2)$

En el resto de vencimientos considerados, podría comprobarse igualmente que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α-cortes es prácticamente perfecto.

Asimismo, los errores máximos que en el nivel de presunción se cometen con la aproximación triangular de $\widetilde{P}_t$ siendo t=1,3,5 y 10 son:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00024	0,00048	0,00071	0,00125
$\alpha^*=0'5$	0,00049	0,00096	0,00142	0,00249

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	P_t ($\alpha^*=0$)	P_t ($\alpha^*=0'5$)
1	0,05822	(100, 0,09683, 0,09702)	(100, 0,19348, 0,19423)
2	0,05702	(100, 0,19062, 0,19118)	(100, 0,38070, 0,38291)
3	0,05736	(100, 0,28104, 0,28211)	(100, 0,56100, 0,56531)
4	0,05817	(100, 0,36789, 0,36964)	(100, 0,73404, 0,74105)
5	0,05955	(100, 0,45107, 0,45363)	(100, 0,89960, 0,90985)
6	0,06388	(100, 0,53052, 0,53401)	(100, 1,05757, 1,07153)
7	0,06631	(100, 0,60619, 0,61071)	(100, 1,20790, 1,22599)
8	0,06679	(100, 0,67809, 0,68374)	(100, 1,35059, 1,37318)
9	0,06823	(100, 0,74623, 0,75308)	(100, 1,48569, 1,51309)
10	0,06943	(100, 0,81066, 0,81878)	(100, 1,61330, 1,64576)

d) Estimación del precio del bono par a partir del modelo de curva de rentabilidades de Bradley y Crame

Los α-cortes del precio del bono par con vencimiento a 10 años son, con las estimaciones de la curva de rentabilidades halladas en el apartado 3.1.2.4 son:

		$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0'5$	
i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	98,9843	101,0272	97,9800	102,0661
1	0,1	99,0854	100,9240	98,1800	101,8574
2	0,2	99,1865	100,8208	98,3804	101,6492
3	0,3	99,2878	100,7178	98,5812	101,4414
4	0,4	99,3892	100,6149	98,7826	101,2341
5	0,5	99,4907	100,5122	98,9843	101,0272
6	0,6	99,5924	100,4095	99,1865	100,8208
7	0,7	99,6941	100,3069	99,3892	100,6149
8	0,8	99,7959	100,2045	99,5924	100,4095
9	0,9	99,8979	100,1022	99,7959	100,2045
10	1	100	100	100	100

siendo la tabla de diferencias que obtenemos para los extremos de los α-cortes:

	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0'5$			
i	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,10105	-0,10325	0,00011	0,00012	0,19995	-0,20872	0,00045	0,00047
1	0,10117	-0,10313	0,00011	0,00012	0,20040	-0,20825	0,00045	0,00047
2	0,10128	-0,10301	0,00011	0,00012	0,20085	-0,20778	0,00045	0,00047
3	0,10140	-0,10290	0,00011	0,00012	0,20131	-0,20731	0,00046	0,00047
4	0,10151	-0,10278	0,00011	0,00012	0,20176	-0,20684	0,00046	0,00047
5	0,10162	-0,10266	0,00011	0,00012	0,20222	-0,20637	0,00046	0,00047
6	0,10174	-0,10255	0,00012	0,00012	0,20268	-0,20591	0,00046	0,00046

7	0,10185	-0,10243	0,00012	0,00012	0,20313	-0,20544	0,00046	0,00046
8	0,10197	-0,10232	0,00012	0,00012	0,20359	-0,20498	0,00046	0,00046
9	0,10209	-0,10220			0,20406	-0,20452		

Podemos observar que las segundas diferencias son prácticamente constantes, de forma que los extremos de los α-cortes pueden aproximarse casi exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado, como en los casos anteriores. Así, para este bono obtenemos, según el nivel α^* para el cual se halla realizado la estimación de la curva de rentabilidades los siguientes α-cortes:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$P_{10}^1(\alpha)\approx 98{,}9843+1{,}0128\alpha+0{,}0057\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha)\approx 97{,}9801+2{,}0085\alpha+0{,}0228\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha)\approx 101{,}0272-1{,}0301\alpha+0{,}0058\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha)\approx 102{,}0661-2{,}0778\alpha+0{,}0234\alpha(\alpha-1/2)$

Los errores máximos que en el nivel de presunción se producen con la aproximación triangular del precio del bono par son, entonces:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00015	0,00045	0,00073	0,00141
$\alpha^*=0'5$	0,00030	0,00089	0,00147	0,00283

Errores, por supuesto, inapreciables, aunque superiores a los que cometíamos con los tres modelos anteriores.

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	P_t ($\alpha^*=0$)	P_t ($\alpha^*=0'5$)
1	0,02842	(100, 0,12054, 0,12068)	(100, 0,24093, 0,24151)
2	0,03011	(100, 0,23741, 0,23798)	(100, 0,47426, 0,47653)
3	0,03146	(100, 0,35028, 0,35153)	(100, 0,69932, 0,70433)
4	0,03268	(100, 0,45894, 0,46111)	(100, 0,91571, 0,92441)
5	0,03381	(100, 0,56322, 0,56654)	(100, 1,12314, 1,13641)
6	0,03490	(100, 0,66300, 0,66766)	(100, 1,32138, 1,34000)
7	0,03596	(100, 0,75819, 0,76436)	(100, 1,51027, 1,53494)
8	0,03700	(100, 0,84872, 0,85656)	(100, 1,68969, 1,72103)
9	0,03801	(100, 0,93456, 0,94419)	(100, 1,85958, 1,89812)
10	0,03902	(100, 1,01568, 1,02722)	(100, 2,01995, 2,06613)

3.1.3.3. Estimación de los factores de descuento al contado

Para la estimación de los tipos spot, de forma análoga al apartado 2.1.3., plantearemos un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son los factores de actualización spot. Una vez resueltos éstos, la obtención de los tipos spot será inmediata. Dicho sistema lo representamos matricialmente como AF=P, siendo cada una de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + 100 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_2 + 100 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-1} + 100 & 0 \\ c_n & c_n & c_n & c_n & \dots & c_n + 100 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \dots \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \dots \\ \tilde{P}_n \end{pmatrix}$$

Dado que resolveremos este sistema recursivamente, para iniciar el proceso de resolución partiremos del sistema anterior planteado como:

$$\tilde{P}_t = \sum_{r=1}^{t-1} c_t \tilde{f}_r + (c_t + 100)\tilde{f}_t, \; t = 1,2,\dots,n.$$

quedando la t-ésima ecuación representada por sus α-cortes como:

$$\left[P_t^1(\alpha), P_t^2(\alpha)\right] = c_t \sum_{r=1}^{t-1} \left[f_r^1(\alpha), f_r^2(\alpha)\right] + (c_t + 100)\left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right]$$

$$\left[\frac{P_t^1(\alpha)}{c_t + 100}, \frac{P_t^2(\alpha)}{c_t + 100}\right] = \frac{c_t}{c_t + 100} \sum_{r=1}^{t-1} \left[f_r^1(\alpha), f_r^2(\alpha)\right] + \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] \quad [7]$$

Empezamos por hallar el factor de actualización para un bono con vencimiento a un año (t=1). De esta forma obtenemos directamente:

$$\left[\frac{P_1^1(\alpha)}{c_1 + 100}, \frac{P_1^2(\alpha)}{c_1 + 100}\right] = \left[f_1^1(\alpha), f_1^2(\alpha)\right]$$

Si aceptamos que el precio del bono puede ser aproximado como un NB L-L de Dubois y Prade de la misma naturaleza que su rentabilidad, el factor de actualización para una unidad monetaria con vencimiento a 1 años también será un número borroso de la misma forma. Así, $\tilde{f}_1 \approx \left(f_1, l_{f_1}, r_{f_1}\right)_L$, con:

$$f_1 = \frac{P_1}{c_1 + 100}, l_{f_1} = \frac{l_{P_1}}{c_1 + 100}, \; r_{f_1} = \frac{r_{P_1}}{c_1 + 100} \quad [8]$$

Igualmente, para t=2 podremos observar que:

$$\left[\frac{P_2^1(\alpha)}{c_2+100},\frac{P_2^2(\alpha)}{c_2+100}\right]=\frac{c_2}{c_2+100}\left[f_1^1(\alpha),f_1^2(\alpha)\right]+\left[f_2^1(\alpha),f_2^2(\alpha)\right]$$

Así, si existe la solución tradicional a la ecuación anterior, lo cual no se puede asegurar, los α-cortes del valor actual de 1 unidad monetaria con vencimiento a dos años son:

$$f_{2\alpha}=\left[f_2^1(\alpha),f_2^2(\alpha)\right]=\left[\frac{P_2^1(\alpha)-c_2f_1^1(\alpha)}{c_2+100},\frac{P_2^2(\alpha)-c_2f_1^2(\alpha)}{c_2+100}\right]$$

los cuales podemos expresar de forma parametrizada si $\widetilde{P}_2$ puede ser aproximado por un número L-L de Dubois y Prade, sin más que expresar los α-cortes correspondientes al precio y a $\widetilde{f}_1$ a partir de [6] y [7]:

$$f_{2\alpha}\approx\left[\frac{P_2}{100+c_2}-\frac{l_{P_2}}{100+c_2}L^{-1}(\alpha)-\frac{c_2}{100+c_2}f_1+\frac{c_2}{100+c_2}l_{f_1}L^{-1}(\alpha),\right.$$
$$\left.\frac{P_2}{100+c_2}+\frac{r_{P_2}}{100+c_2}L^{-1}(\alpha)-\frac{c_2}{100+c_2}f_1-\frac{c_2}{100+c_2}r_{f_1}L^{-1}(\alpha)\right]=$$
$$=\left[\frac{P_2-c_2f_1}{100+c_2}-\frac{l_{P_2}-c_2l_{f_1}}{100+c_2}L^{-1}(\alpha),\frac{P_2-c_2f_1}{100+c_2}+\frac{r_{P_2}-c_2r_{f_1}}{100+c_2}L^{-1}(\alpha)\right]$$

Es decir, $\widetilde{f}_2\approx\left(f_2,l_{f_2},r_{f_2}\right)_L$, donde:

$$f_2=\frac{P_2-c_2f_1}{c_2+100},l_{f_2}=\frac{l_{P_2}-c_2l_{f_1}}{c_2+100},r_{f_2}=\frac{r_{P_2}-c_2r_{f_1}}{c_2+100}\qquad[9]$$

De idéntica manera, y partiendo de la ecuación [7], el t-ésimo factor de actualización se hallará tras haber hallado el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento dentro de t-1 años. Así plantearíamos:

$$\left[\frac{P_t^1(\alpha)}{c_t+100},\frac{P_t^2(\alpha)}{c_t+100}\right]=\frac{c_t}{c_t+100}\sum_{r=1}^{t-1}\left[f_r^1(\alpha),f_r^2(\alpha)\right]+\left[f_t^1(\alpha),f_t^2(\alpha)\right]$$

Los α-cortes que se deducen de la solución clásica, la cual no necesariamente existirá, quedan caracterizados por su extremo inferior y superior de la forma: