

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[ \frac{P_t^1(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^1(\alpha)}{c_t + 100}, \frac{P_t^2(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^2(\alpha)}{c_t + 100} \right]$$

Y al igual que realizamos en [9], podemos hallar el t-ésimo factor de actualización spot como  $\tilde{f}_t \approx (f_t, r_{f_t}, l_{f_t})_L$  si  $\tilde{P}_t \forall t$  puede aproximarse por un NB de las mismas características. Así, dado que el extremo izquierdo del  $\alpha$ -corte lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha) &= \frac{P_t}{100 + c_t} - \frac{l_{P_t}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} f_r + \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} L^{-1}(\alpha) = \\ &= \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} - \frac{l_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

observándose que,

$$f_t = \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} \text{ y } l_{f_t} = \frac{l_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} \quad [10]$$

Igualmente podemos realizar el mismo proceso para el extremo superior de los  $\alpha$ -cortes de  $\tilde{f}_t$ , de forma que:

$$\begin{aligned} f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha) &= \frac{P_t}{100 + c_t} + \frac{r_{P_t}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} f_r - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} L^{-1}(\alpha) = \\ &= \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} + \frac{r_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

y así,

$$r_{f_t} = \frac{r_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} \quad [11]$$

Evidentemente, no tiene porque existir, excepto para  $t=1$ , solución en el sentido clásico para estas ecuaciones. Así, y si en la ecuación [7] los coeficientes son números borrosos L-L de Dubois y Prade, podemos asegurar la existencia de solución en el sentido clásico, tal como demostramos en el apartado 1.3.1. de la tesis si se cumple simultáneamente:

$$c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} \leq l_{P_t} \cdot y \quad \text{y} \quad c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} \leq r_{P_t}$$

Una vez se han resuelto los primeros  $t-1$  factores de actualización, si para el  $t$ -ésimo factor de actualización no existe solución en el sentido clásico proponemos en la determinación de sus  $\alpha$ -cortes utilizar el concepto de solución de Buckley y Qu. En este caso, los  $\alpha$ -cortes del  $t$ -ésimo factor de actualización serían:

$$f_{t\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / x = \frac{y - c_t \sum_{r=1}^{t-1} z_r}{100 + c_t}, y \in P_{t\alpha}, z_r \in f_{r\alpha} \quad r = 1, 2, \dots, t-1 \right\}$$

que dada la relación monótona creciente del factor de actualización para 1 unidad monetaria con vencimiento en  $t$  respecto al precio y decreciente respecto a los  $t-1$  factores de descuento anteriores,  $f_{t\alpha}$  quedaría expresado como:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[ \frac{P_t^1(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^2(\alpha)}{100 + c_t}, \frac{P_t^2(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^1(\alpha)}{100 + c_t} \right]$$

Así, si  $\tilde{P}_t \approx (P_t, l_{P_t}, r_{P_t})_L \forall t$  el  $t$ -ésimo factor de actualización queda expresado como  $\tilde{f}_t \approx (f_t, l_{f_t}, r_{f_t})_L$ , de forma que sus  $\alpha$ -cortes serán:

$$f_{t\alpha} \approx \left[ \frac{P_t - l_{P_t} L^{-1}(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} L^{-1}(\alpha)}{100 + c_t}, \frac{P_t + r_{P_t} L^{-1}(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} L^{-1}(\alpha)}{100 + c_t} \right] =$$

$$= \left[ \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} - \frac{l_{P_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha), \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} + \frac{r_{P_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \right]$$

Podemos observar que los parámetros que caracterizan a  $\tilde{f}_t$  son en este caso:

$$f_t = \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t}, \quad l_{f_t} = \frac{l_{P_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} \quad \text{y} \quad r_{f_t} = \frac{r_{P_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} \quad [12]$$

Aumentándose considerablemente la incertidumbre de  $\tilde{f}_t$  ya que sus radios  $l_{f_t}$  y  $r_{f_t}$  se obtienen como suma de radios y no como diferencia.

### 3.1.3.4. Estimación de los factores de actualización spot a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los modelos planteados

Si partimos de una aproximación triangular al precio del bono par, ya hemos observado que podemos hallar los factores de actualización para una cuantía con vencimiento a  $t$  años también como números borrosos triangulares, tanto si la resolución del  $t$ -ésimo factor de actualización admite la solución clásica, como si debemos recurrir al concepto de solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu. De esta forma, en la aplicación numérica que estamos considerando, la forma de la función de pertenencia para el factor de descuento de una cuantía con vencimiento dentro de  $t$  años,  $\tilde{f}_t$  será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) \approx \begin{cases} \frac{x - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}} & f_t - l_{f_t} < x \leq f_t \\ \frac{(f_t + r_{f_t}) - x}{r_{f_t}} & f_t < x \leq f_t + r_{f_t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo los valores de  $f_t$ ,  $l_{f_t}$  y  $r_{f_t}$  los hallados en [10] y [11] si  $\tilde{f}_t$  admite solución en sentido clásico y [12] si debe ser utilizado el concepto de solución de Buckley y Qu.

Así, los resultados obtenidos según el método de interpolación son, para el 22-1-99:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,97130, 0, 0)	(0,97130, 0, 0)
2	(0,94497, 0, 0)	(0,94497, 0, 0)
3	(0,91311, 0,00064, 0,00064)	(0,91311, 0,00129, 0,00129)
4	(0,88438, 0,00007, 0,00007)	(0,88438, 0,00014, 0,00014)
5	(0,84969, 0,00053, 0,00053)	(0,84969, 0,00105, 0,00105)
6	(0,81340, 0,00099, 0,00099)	(0,81340, 0,00198, 0,00198)
7	(0,77859, 0,00008, 0,00008)	(0,77859, 0,00015, 0,00016)
8	(0,74515, 0,00081, 0,00081)	(0,74515, 0,00162, 0,00162)
9	(0,70885, 0,00072, 0,00072)	(0,70885, 0,00144, 0,00144)
10	(0,68043, 0,00026, 0,00026)	(0,68043, 0,00051, 0,00051)

Para la regresión polinómica se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,97200, 0,00069, 0,00069)	(0,97200, 0,00137, 0,00137)
2	(0,94406, 0,00133, 0,00133)	(0,94406, 0,00266, 0,00267)

3	(0,91471, 0,00193, 0,00194)	(0,91471, 0,00386, 0,00388)
4	(0,88338, 0,00248, 0,00249)	(0,88338, 0,00496, 0,00499)
5	(0,85012, 0,00298, 0,00299)	(0,85012, 0,00595, 0,00600)
6	(0,81544, 0,00343, 0,00344)	(0,81544, 0,00684, 0,00690)
7	(0,78010, 0,00382, 0,00384)	(0,78010, 0,00762, 0,00771)
8	(0,74490, 0,00417, 0,00419)	(0,74490, 0,00830, 0,00841)
9	(0,71057, 0,00447, 0,00450)	(0,71057, 0,00890, 0,00903)
10	(0,67765, 0,00473, 0,00477)	(0,67765, 0,00943, 0,00957)

En el modelo de Cohen, Kramer y Vaugh los resultados son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97232, 0,00094, 0,00094)	(0,97232, 0,00188, 0,00189)
2	(0,94361, 0,00182, 0,00183)	(0,94361, 0,00364, 0,00367)
3	(0,91307, 0,00264, 0,00265)	(0,91307, 0,00528, 0,00532)
4	(0,88124, 0,00340, 0,00341)	(0,88124, 0,00678, 0,00684)
5	(0,84852, 0,00408, 0,00411)	(0,84852, 0,00814, 0,00824)
6	(0,81523, 0,00470, 0,00473)	(0,81523, 0,00937, 0,00950)
7	(0,78162, 0,00525, 0,00529)	(0,78162, 0,01046, 0,01063)
8	(0,74789, 0,00574, 0,00579)	(0,74789, 0,01143, 0,01162)
9	(0,71421, 0,00616, 0,00622)	(0,71421, 0,01226, 0,01250)
10	(0,68072, 0,00652, 0,00659)	(0,68072, 0,01297, 0,01325)

Y en el de Bradley y Crame:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97236, 0,00117, 0,00117)	(0,97236, 0,00234, 0,00235)
2	(0,94235, 0,00227, 0,00228)	(0,94235, 0,00454, 0,00456)
3	(0,91109, 0,00329, 0,00330)	(0,91109, 0,00657, 0,00662)
4	(0,87895, 0,00423, 0,00425)	(0,87895, 0,00844, 0,00852)
5	(0,84612, 0,00509, 0,00512)	(0,84612, 0,01015, 0,01027)
6	(0,81279, 0,00586, 0,00591)	(0,81279, 0,01169, 0,01186)
7	(0,77910, 0,00656, 0,00661)	(0,77910, 0,01306, 0,01328)
8	(0,74517, 0,00717, 0,00724)	(0,74517, 0,01427, 0,01455)
9	(0,71114, 0,00770, 0,00778)	(0,71114, 0,01531, 0,01565)
10	(0,67710, 0,00815, 0,00825)	(0,67710, 0,01620, 0,01659)

### 3.1.3.5. Estimación de la ETTI

La función de pertenencia del tipo spot para un vencimiento t es fácilmente deducible a partir de su factor de actualización asociado, ya que se trata de evaluar la función borrosa:

$$\tilde{i}_t = \tilde{f}_t^{-1/t} - 1$$

Así, la función de pertenencia del tipo al contado para un vencimiento t,  $\tilde{i}_t$ , es:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(y) = \bigvee_{x=y^{-1/t}-1} \mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}[(1+y)^{-t}]$$

Siendo entonces, los  $\alpha$ -cortes del tipo de actualización con vencimiento a  $t$  años:

$$i_{t_\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]^{-1/t} - 1 = \left[ (f_t^2(\alpha))^{-1/t} - 1, (f_t^1(\alpha))^{-1/t} - 1 \right]$$

En el caso en que el precio sea aproximable mediante un número L-L de Dubois y Prade, la función de pertenencia de  $\tilde{i}_t$  sería entonces:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) \approx \begin{cases} L\left(\frac{(1+x)^{-t} - f_t}{r_{f_t}}\right) & (f_t + r_{f_t})^{-1/t} - 1 < x \leq f_t^{-1/t} - 1 \\ L\left(\frac{f_t - (1+x)^{-t}}{l_{f_t}}\right) & f_t^{-1/t} - 1 < x \leq (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad [13]$$

y por tanto, sus  $\alpha$ -cortes serán:

$$i_{t_\alpha} \approx \left[ (f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha))^{-1/t} - 1, (f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha))^{-1/t} - 1 \right] \quad [14]$$

Podemos observar que los tipos spot no mantienen la naturaleza del factor de actualización spot (p.e., si partimos de factores de actualización triangulares, intereses al contado triangulares). Sin embargo, creemos de interés cuantificar el tipo de interés spot como un número L-R de Dubois y Prade ya que según la Teoría de las Expectativas racionales, éste no es más que una media de unas magnitudes futuras e inciertas (los tipos forward), no siendo necesario por tanto extrema precisión en su cuantificación. Adicionalmente, su estructura (para construirlo sólo hace falta un centro y dos radios) se adapta perfectamente a la forma de razonar humana. Así, e igual que ocurre con el precio de los bonos par, cuando partamos de una estimación triangular de la curva de rentabilidades, observaremos que será posible aproximar al interés spot un número de la misma naturaleza que las rentabilidades de partida, sin incurrir en errores excesivamente elevados.

### 3.1.3.6. Estimación de los tipos spot a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diversos modelos planteados

En el caso que los coeficientes  $\tilde{a}_j$ ,  $j=0,1,\dots,m$  que definan la curva de rentabilidades sean estimados mediante NBT simétricos, ya hemos observado que el precio del bono que cotiza a la par para los diversos vencimientos considerados puede aproximarse sin ningún problema mediante números borrosos de la misma naturaleza, obteniéndose a partir de dicha aproximación triangular los factores de actualización spot también como NBTs.

Así, la función de pertenencia y los  $\alpha$ -cortes de  $\tilde{i}_t$  se hallan con [13] y [14] respectivamente, sin mas que considerar que las funciones forma izquierda y derecha son  $L(x)=R(x)=\text{Max}\{0, 1-|x|\}$ .

Así, el tipo al contado con vencimiento a t años,  $\tilde{i}_t$ , tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) = \begin{cases} \frac{(f_t + r_{f_t}) - (1+x)^{-t}}{r_{f_t}} & (f_t + r_{f_t})^{-1/t} - 1 < x \leq f_t^{-1/t} - 1 \\ \frac{(1+x)^{-t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}} & f_t^{-1/t} - 1 < x \leq (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, se observa que el interés spot no mantiene la triangularidad de los factores de actualización de partida. De esta forma, si deseamos expresarlo mediante un NBT, debemos aproximarlo. Como siempre, nosotros proponemos como NB aproximado aquel NBT que presente el mismo soporte y el mismo núcleo que el número borroso originario, de forma que  $\tilde{i}_t \approx (\hat{i}_t, l_{i_t}, r_{i_t})$  con:

$$\hat{i}_t = f_t^{-1/t} - 1, l_{i_t} = f_t^{-1/t} - (f_t + r_{f_t})^{-1/t} \text{ y } r_{i_t} = (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - f_t^{-1/t}$$

siendo en este caso la función de pertenencia de  $\tilde{i}_t$ :

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) \approx \begin{cases} \frac{x - (\hat{i}_t - l_{i_t})}{l_{i_t}} & \hat{i}_t - l_{i_t} < x \leq \hat{i}_t \\ \frac{(\hat{i}_t + r_{i_t}) - x}{r_{i_t}} & \hat{i}_t < x \leq \hat{i}_t + r_{i_t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En nuestro caso, los tipos spot estimados para el día 22-1-1999 ya aproximados mediante NBT, si hemos estimado la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal, son para vencimientos de hasta 10 años:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02955, 0, 0)	(0,02955, 0, 0)
2	(0,02871, 0, 0)	(0,02871, 0, 0)
3	(0,03076, 0,00024, 0,00024)	(0,03076, 0,00048, 0,00048)
4	(0,03119, 0,00002, 0,00002)	(0,03119, 0,00004, 0,00004)
5	(0,03311, 0,00013, 0,00013)	(0,03311, 0,00026, 0,00026)
6	(0,03502, 0,00021, 0,00021)	(0,03502, 0,00042, 0,00042)
7	(0,03640, 0,00001, 0,00001)	(0,03640, 0,00003, 0,00003)
8	(0,03746, 0,00014, 0,00014)	(0,03746, 0,00028, 0,00028)
9	(0,03897, 0,00012, 0,00012)	(0,03897, 0,00023, 0,00023)
10	(0,03925, 0,00004, 0,00004)	(0,03925, 0,00008, 0,00008)

Con las estimaciones polinómicas de la curva de rentabilidades obtenemos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02881, 0,00073, 0,00073)	(0,02881, 0,00145, 0,00145)
2	(0,02920, 0,00073, 0,00073)	(0,02920, 0,00145, 0,00145)
3	(0,03016, 0,00073, 0,00073)	(0,03016, 0,00145, 0,00145)
4	(0,03149, 0,00073, 0,00073)	(0,03149, 0,00145, 0,00145)
5	(0,03301, 0,00073, 0,00073)	(0,03301, 0,00145, 0,00145)
6	(0,03459, 0,00073, 0,00073)	(0,03459, 0,00145, 0,00145)
7	(0,03611, 0,00073, 0,00073)	(0,03611, 0,00145, 0,00145)
8	(0,03750, 0,00073, 0,00073)	(0,03750, 0,00145, 0,00145)
9	(0,03869, 0,00073, 0,00073)	(0,03869, 0,00146, 0,00146)
10	(0,03968, 0,00073, 0,00073)	(0,03968, 0,00146, 0,00146)

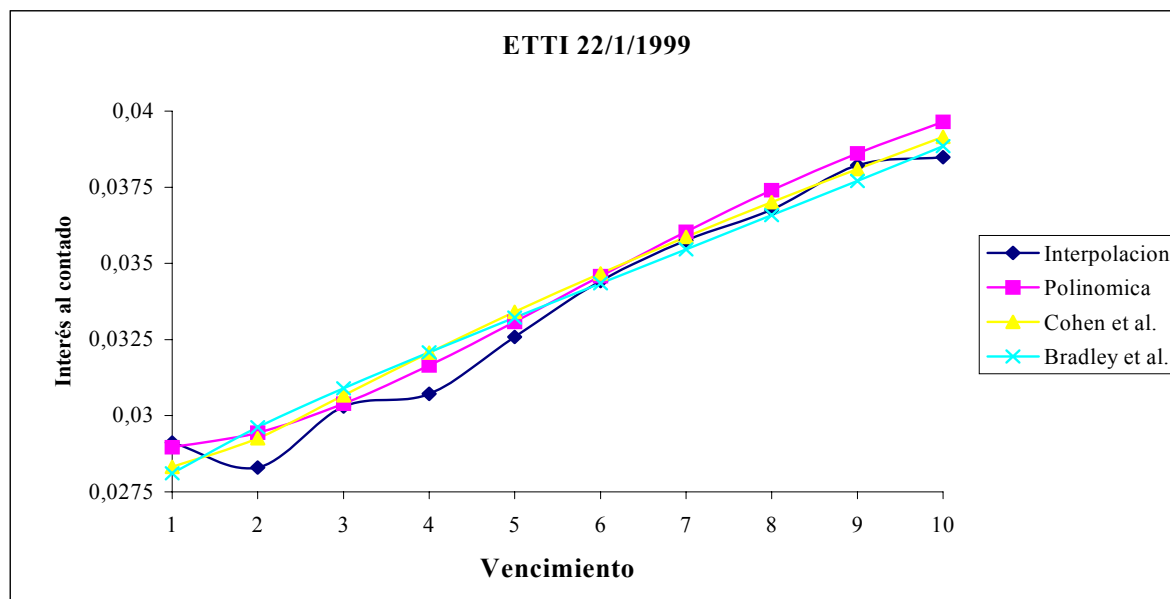
Los resultados que se obtienen si el modelo utilizado es el de Cohen *et al.* son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02847, 0,00100, 0,00100)	(0,02847, 0,00199, 0,00199)
2	(0,02945, 0,00100, 0,00100)	(0,02945, 0,00199, 0,00199)
3	(0,03078, 0,00100, 0,00100)	(0,03078, 0,00199, 0,00199)
4	(0,03211, 0,00100, 0,00100)	(0,03211, 0,00199, 0,00199)
5	(0,03340, 0,00100, 0,00100)	(0,03340, 0,00199, 0,00199)
6	(0,03463, 0,00100, 0,00100)	(0,03463, 0,00200, 0,00200)
7	(0,03582, 0,00100, 0,00100)	(0,03582, 0,00200, 0,00200)
8	(0,03698, 0,00100, 0,00100)	(0,03698, 0,00200, 0,00200)
9	(0,03811, 0,00100, 0,00100)	(0,03811, 0,00200, 0,00200)
10	(0,03921, 0,00100, 0,00100)	(0,03921, 0,00200, 0,00200)

Y para el de Bradley y Crame obtenemos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02842, 0,00124, 0,00124)	(0,02842, 0,00248, 0,00248)
2	(0,03014, 0,00124, 0,00124)	(0,03014, 0,00248, 0,00249)
3	(0,03152, 0,00124, 0,00124)	(0,03152, 0,00249, 0,00249)
4	(0,03278, 0,00125, 0,00125)	(0,03278, 0,00249, 0,00249)
5	(0,03398, 0,00125, 0,00125)	(0,03398, 0,00249, 0,00250)
6	(0,03515, 0,00125, 0,00125)	(0,03515, 0,00250, 0,00250)
7	(0,03630, 0,00125, 0,00125)	(0,03630, 0,00250, 0,00251)
8	(0,03745, 0,00125, 0,00125)	(0,03745, 0,00250, 0,00251)
9	(0,03860, 0,00126, 0,00126)	(0,03860, 0,00251, 0,00252)
10	(0,03976, 0,00126, 0,00126)	(0,03976, 0,00251, 0,00252)

Asimismo, la representación gráfica de la ETTI estimada para un nivel de presunción al  $\alpha=1$  en cada uno de los modelos es:



A continuación analizamos la idoneidad de la aproximación triangular de los tipos al contado obtenidos para cada uno de los modelos, suponiéndose que el factor de descuento del que provienen es triangular. A partir de los errores máximos que en los extremos de los  $\alpha$ -cortes se cometen para unos niveles de  $\alpha_I^*(t)$  en la izquierda y  $\alpha_D^*(t)$  a la derecha que son:

$$\alpha_I^*(t) = \frac{f_t + r_{f_t}}{r_{f_t}} - \left( \frac{l_{f_t} t}{r_{f_t} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \quad \text{y} \quad \alpha_D^*(t) = -\frac{f_t - l_{f_t}}{l_{f_t}} + \left( \frac{r_{f_t} t}{l_{f_t} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \quad [15]$$

hallaremos los errores máximos en el nivel de presunción que se cometen por la aproximación triangular de los tipos spot para cada uno de los modelos que serán:

t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0	0	0,00018	0,00035	0,00024	0,00049	0,00030	0,00060
2	0	0	0,00026	0,00053	0,00036	0,00073	0,00045	0,00090
3	0,00012	0,00024	0,00035	0,00071	0,00048	0,00097	0,00060	0,00121
4	0,00001	0,00002	0,00044	0,00088	0,00060	0,00121	0,00075	0,00151
5	0,00009	0,00019	0,00053	0,00106	0,00072	0,00145	0,00090	0,00181
6	0,00018	0,00035	0,00061	0,00123	0,00084	0,00169	0,00106	0,00211
7	0,00021	0,00043	0,00070	0,00140	0,00096	0,00193	0,00121	0,00242
8	0,00015	0,00031	0,00079	0,00158	0,00108	0,00217	0,00136	0,00272
9	0,00014	0,00028	0,00088	0,00175	0,00120	0,00241	0,00151	0,00302
10	0,00005	0,00010	0,00096	0,00193	0,00132	0,00265	0,00166	0,00333

Así pues, se comprueba que los resultados de la aproximación triangular son mas que satisfactorios.



El nivel de presunción de los tipos spot obtenidos en el apartado 2.1.2.1. en los que se obtienen a partir de la regresión posibilística son:

t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	1	1	0,77	0,89	0,85	0,92	0,75	0,88
2	1	1	0,67	0,83	0,81	0,90	0,59	0,79
3	1	1	0,68	0,84	0,89	0,94	0,50	0,75
4	1	1	0,78	0,89	0,96	0,98	0,44	0,72
5	1	1	0,90	0,95	0,99	0,99	0,39	0,70
6	1	1	0,99	0,99	0,96	0,98	0,36	0,68
7	1	1	0,90	0,95	0,96	0,98	0,33	0,66
8	1	1	0,87	0,93	0,97	0,99	0,30	0,65
9	1	1	0,89	0,94	0,99	1,00	0,29	0,64
10	1	1	0,95	0,97	0,94	0,97	0,27	0,63
<b>Media</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0,84</b>	<b>0,92</b>	<b>0,93</b>	<b>0,97</b>	<b>0,42</b>	<b>0,71</b>

Como en apartados anteriores, en la última fila ha sido expresado el nivel que en promedio presenta la estimación MCO de los tipos spot para cada modelo en su correspondiente posibilístico.

### 3.1.3.7. Comentarios a los resultados obtenidos

Respecto a los resultados obtenidos a lo largo del apartado 3.1.3., podemos realizar los siguientes comentarios generales:

- Respecto a la incertidumbre de los tipos spot obtenidos, el que incorpora menor incertidumbre es el método de interpolación, si medimos la incertidumbre como el radio de los intereses al contado que se obtienen para cada vencimiento. Sin embargo, y en contra de lo que en principio sería deseable, esta incertidumbre no guarda relación con el vencimiento. En cambio, en los modelos basados en la regresión, la incertidumbre de los tipos spot aumenta o se mantiene invariable, como es lógico, con el tiempo, ya que a mayor vencimiento, se incorpora información sobre un número de tipos forward mayor. Asimismo, aquéllos modelos de regresión que ajustan mejor la curva de rentabilidades (consiguen menor incertidumbre en la función objetivo), proporcionan unos tipos spot menos inciertos (el polinómico y el de Cohen *et al.*)
- En aquéllos modelos en los cuales la estimación en certeza sobre los tipos a un determinado plazo era un valor cercano al centro del correspondiente número borroso que se deriva de la regresión de Tanaka, el tipo spot cierto que se obtiene presenta un nivel de pertenencia también muy elevado en la estimación borrosa asociada. Por supuesto, en aquéllos casos en los que existía para la curva de rentabilidades una mayor divergencia entre las estimaciones MCO y las derivadas de la regresión posibilística, dicha divergencia se mantiene en la ETTI

que se obtiene. Asimismo, creemos que podemos interpretar el hecho de que en un método la estimación mediante MCO diverja poco de la posibilística, como un indicador de fiabilidad de la relación funcional propuesta para la curva de rentabilidades. En este sentido, el modelo de Bradley y Crame es el peor, ya que las rentabilidades estimadas para los bonos y los tipos spot que se deducen mediante MCO están más alejados de los que hallamos con la regresión posibilística –los niveles de presunción son los más bajos-.

- c) Podemos observar que los modelos que proporcionan estimaciones de la ETTI menos suaves en certeza, continúan proporcionando las menos suaves cuando utilizamos la regresión posibilística -hemos representado en este caso, únicamente la ETTI que se obtiene con los tipos al contado de mayor presunción-. En este sentido, los modelos que se comportan peor son la interpolación lineal y la estimación polinómica.

### 3.2. ESTIMACIÓN DE LA ETTI MEDIANTE LA ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DESCUENTO

#### 3.2.1. Planteamiento general e hipótesis

A continuación realizamos, al igual que en el apartado 3.1.1. diversas hipótesis que nos permitirán, partiendo del marco conceptual analizado para la estimación de la ETTI en el apartado 2.2., realizar nuestra correspondiente propuesta utilizando la regresión borrosa, lo cual nos permitirá posteriormente realizar la estimación de los intereses que regirán en el mercado en un futuro a través de números borrosos. Asimismo, algunas de estas hipótesis serán análogas a las realizadas en 3.1., pero teniendo en cuenta que en este caso la variable a explicar no es la rentabilidad de los bonos, sino su precio.

*Hipótesis 1:* El precio negociado para el r-ésimo título durante una sesión concreta puede ser expresado a través de un número borroso L-R simétrico de Dubois y Prade. Así, representamos dicho precio por:

$$\tilde{P}^r = (P_C^r, P_R^r)_L \quad P_C^r, P_C^r \geq 0, r = 1, 2, \dots, k.$$

La aceptación de esta hipótesis implica considerar que el precio de una referencia en un día concreto es "aproximadamente  $P_C$ ", en lugar de aceptar que es exactamente  $P_C$ ; lo cual consideramos que tras lo expuesto en el punto 1.5. es más adecuado.