Hipótesis 2: Ya hemos comentado anteriormente que podemos considerar que el precio de un título negociado durante una determinada sesión puede cuantificarse mediante un intervalo de confianza cuyos extremos inferior y superior son, respectivamente, el precio mínimo y el precio máximo que ha tomado. Partiremos como hipótesis de que el precio observado para cada título es un α-corte para un nivel α^* arbitrario del número borroso que lo cuantifica prefijado por el observador. De esta forma, dicho intervalo puede ser expresado a través de su centro y su radio como $\left\langle P'^r_C, P'^r_R \right\rangle$. Por otra parte su centro y su radio pueden ser expresados en función del centro, el radio y la función forma del número borroso del que provienen:

$$P'^r_C = P^r_C \text{ y } P'^r_R = L^{-1}(\alpha^*)P^r_R, 0 \le \alpha^* \le 1, r = 1,2,...,k$$

Hipótesis 3: El factor de descuento se puede cuantificar a través de un número borroso cuyo valor depende del tiempo, de forma que para un plazo dado t, dicho factor de descuento es un número borroso L-R simétrico de Dubois y Prade.

$$\widetilde{f}_t = \left(f_t, l_{f_t}\right)_L, t > 0, 0 \le f_t - l_{f_t} \le f_t + l_{f_t} \le 1$$

De esta forma, el precio del r-ésimo bono puede ser escrito como la suma de las cuantías a cobrar por la posesión del título, actualizada con el factor de descuento que les corresponde por su vencimiento. Así:

$$\widetilde{P}^r = \sum_{i=1}^{n_r} C^r_i \widetilde{f}_{t^r_i}$$

y entonces,

$$\left(P^r_C, P^r_R\right)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C^r_i \left(f_{t^r_i}, l_{f_{t^r_i}}\right)_L$$

Así, el α-corte observado para el precio del bono r, para un nivel α^* arbitrario prefijado por el decisor, puede escribirse como:

$$\left\langle P^r_C, P^r_R \right\rangle = \sum_{i=1}^{n_r} C^r_i \left\langle f'_{t^r_i}, l'_{f_{t^r_i}} \right\rangle$$

con:

$$f'_{t^r_i} = f_{t^r_i} \text{ y } l'_{f_{t^r_i}} = L^{-1}(\alpha^*) l_{f_{t^r_i}}, 0 \le \alpha^* \le 1, r = 1,2,...,k$$

Asimismo, también podemos interpretar el valor tomado de α^* como un indicador de la incertidumbre que percibe el decisor en el mercado. Si aumentamos α^* aumentaremos el radio de los números borrosos que cuantifican el precio observado para los bonos, por lo que esteremos introduciendo mayor incertidumbre en las observaciones de la variable independiente –en este caso el precio-.

Hipótesis 4: El factor de descuento puede aproximarse a través de una combinación lineal de m+1 funciones $g_j(t)$, j=0,1,…,m con imagen en R, continuas y derivables, cuyos parámetros asociados vendrán dados por números borrosos simétricos de Dubois y Prade. De esta forma, podremos representar a los parámetros como:

$$\tilde{a}_j = \left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L \quad a_{jR} \geq 0,\ j = 0,1,...,m$$

y el factor de actualización podrá escribirse como:

$$\left(f_t, l_{f_t}\right)_L = \sum_{j=0}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L g_j(t) = \sum_{j=0}^{m}\left(a_{jC} g_j(t), a_{jR}\left|g_j(t)\right|\right)_L \ , a_{jR} \geq 0\ \forall j \qquad [16]$$

y así, estimaremos un precio para el r-ésimo bono una vez ajustados los parámetros a_{jC} y a_{jR} $\forall$j:

$$\hat{\tilde{P}}^r = \left(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r\right)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L g_j(t_i^r) \qquad [17]$$

De esta forma, el α^*-corte del precio del r-ésimo bono que será estimado para $\left\langle P'^r_C , P'^r_R \right\rangle$ vendrá dado por:

$$\left\langle \hat{P}'^r_C , \hat{P}'^r_R \right\rangle = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^{m}\left\langle a'_{jC} , a'_{jR} \right\rangle g_j(t_i^r)$$

con:

$$a'_{jC} = a_{jC} \text{ y } a'_{jR} = L^{-1}(\alpha^*) a_{jR} , 0 \leq \alpha^* \leq 1, r = 1,2,...,k$$

A continuación, realizamos la adaptación que proponemos de los modelos analizados en los apartados 2.2.1 y 2.2.2. a la circunstancia de que tomamos toda la horquilla de precios a las que han sido negociadas las referencias durante la sesión que estudiemos, y que se ha supuesto que las mismas son un α-corte de su precio para un nivel α^* dado.

3.2.2. El modelo de McCulloch

Dado que el factor de descuento debe tomar para el vencimiento t=0 el valor cierto 1; es decir, necesariamente debe cumplirse que $\tilde{f}_0 = \left(f_0, l_{f_0}\right)_L$ = (1, 0)$_L$. Esta condición quedará asegurada si en la expresión [16] exigimos:

1) $(a_{0C}, a_{0R})_L = (1, 0)_L$
2) $g_0(t) = 1$.
3) $g_j(0) = 0$, j=1,2,..,m.

Así, podemos escribir el factor de descuento correspondiente a 1 u.m. que vence en t como:

$$\left(f_t, l_{f_t}\right)_L = (1,0)_L + \sum_{j=1}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L g_j(t) = \left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t), \sum_{j=1}^{m} a_{jR}\left|g_j(t)\right|\right)_L \qquad [18]$$

La función de pertenencia y los α-cortes de $\tilde{f}_t$ se hallarán a través de las correspondientes a los parámetros $\tilde{a}_j$. La función de pertenencia de $\tilde{f}_t$ es, por tanto:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\left| x - \left[1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t)\right]\right|}{\sum_{j=1}^{m} a_{jR}\left|g_j(t)\right|}\right) & 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=1}^{m} a_{jR}\left|g_j(t)\right| \le x \le 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{jR}\left|g_j(t)\right| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tomando en consideración las expresiones [16] y [18], el precio que del r-ésimo bono estimaremos una vez se hayan estimado los parámetros $\tilde{a}_j$ -su centro y su radio más concretamente- puede escribirse como:

$$\tilde{\hat{P}}^r = \left(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r\right)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[(1,0)_L + \sum_{j=1}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L g_j(t_i^r)\right] = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1,0)_L + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L g_j(t_i^r)$$

y operando llegaremos a obtener:

$$\left(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r\right)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1,0)_L = \sum_{j=1}^{m}\left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r)$$

De esta forma, identificando $\tilde{\hat{Y}}^r = \left(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r\right)_L = \left(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r\right)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1,0)_L$, observamos que:

$$\hat{Y}_C^r = \hat{P}_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \ ; \text{y} \ \hat{Y}_R^r = \hat{P}_R^r$$

Se puede observar que el valor de la j-ésima variable independiente correspondiente al bono r es la variable crisp $X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r)$. Así, el modelo que finalmente deberá ser estimado es:

$$\left(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r\right)_L = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L X_j^r \qquad [19]$$

El modelo a implementar tiene como característica que la variable dependiente y los parámetros vienen expresados a través de su α^*-corte, y así, partiendo de[19], la expresión del α-corte que queda estimado para dicho nivel de presunción α^* y para un título r es:

$$\left\langle \hat{Y}'^r_C, \hat{Y}'^r_R \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \left\langle a'_{jC}, a'_{jR} \right\rangle X_j^r = \sum_{j=1}^{m} \left\langle a'_{jC} X_j^r, a'_{jR} \left|X_j^r\right| \right\rangle \qquad [20]$$

Debiéndose estimar el centro y el radio del α^*-corte de los parámetros $\tilde{a}_j$, j=1,…,m. Una vez resueltos, obtendremos el centro y el radio de los números borrosos del que provienen sin más que identificar $a_{jC} = a'_{jC}$, y $a_{jR} = \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$.

Asimismo, tras ajustar los parámetros $\tilde{a}_j$, j=1,…,m, estaremos realizando una estimación sobre la variable $\tilde{Y}^r = \left(Y_C^r, Y_R^r\right)_L$ del r-ésimo bono, relacionada con el precio del mismo, tal que:

$$Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \; ; \text{y} \; Y_R^r = P_R^r$$

De esta forma, el α^*-corte de $\hat{\tilde{Y}}^r$ que ha sido expresado en [20] no es más que la estimación del intervalo de confianza correspondiente a $\tilde{Y}^r$ para el mismo nivel de presunción α^*. Así, $\left\langle \hat{Y}'^r_C, \hat{Y}'^r_R \right\rangle$ es la estimación de $Y^r_{\alpha*} = \left\langle Y'^r_C, Y'^r_R \right\rangle$, donde:

$$Y'^r_C = Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \; ; \text{y} \; Y'^r_R = Y_R^r L^{-1}(\alpha^*) = P_R^r L^{-1}(\alpha^*)$$

Así, para obtener los parámetros $\tilde{a}_j$, que vendrán definidos por a_{jC} y a_{jR}, si utilizamos el modelo de regresión posibilística de Tanaka, el programa lineal a resolver será:

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left|g_j(t_i^r)\right| = \sum_{j=1}^{m} a'_{jR} \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left|g_j(t_i^r)\right| \qquad [21a]$$

sujeto a:

$$\hat{Y}'^{r}_{C}-\hat{Y}'^{r}_{R}=\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\sum_{i=1}^{n_r}C^{r}_{i}g_{j}(t^{r}_{i})-\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\sum_{i=1}^{n_r}C^{r}_{i}\left|g_{j}(t^{r}_{i})\right|\leq Y'^{r}_{C}-Y'^{r}_{R}\quad r=1,2,...,k. \qquad [21b]$$

$$\hat{Y}'^{r}_{C}+\hat{Y}'^{r}_{R}=\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\sum_{i=1}^{n_r}C^{r}_{i}g_{j}(t^{r}_{i})+\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\sum_{i=1}^{n_r}C^{r}_{i}\left|g_{j}(t^{r}_{i})\right|\geq Y'^{r}_{C}+Y'^{r}_{R}\quad r=1,2,...,k. \qquad [21c]$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(sP)-\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left|g_j(sP)\right|\geq\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j((s+1)P)-\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left|g_j((s+1)P)\right|\Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\left(g_j(sP)-g_j((s+1)P)\right)-\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left(\left|g_j(sP)\right|-\left|g_j((s+1)P)\right|\right)\geq 0\quad s=1,\ldots,u\text{-}1 \qquad [21d]$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(sP)+\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left|g_j(sP)\right|\geq\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j((s+1)P)+\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left|g_j((s+1)P)\right|\Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\left(g_j(sP)-g_j((s+1)P)\right)+\sum_{j=1}^{m}a'_{jR}\left(\left|g_j(sP)\right|-\left|g_j((s+1)P)\right|\right)\geq 0\quad s=1,\ldots,u\text{-}1 \qquad [21e]$$

$$1+\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(uP)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}\left|g_j(uP)\right|\geq 0\Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(uP)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}\left|g_j(uP)\right|\geq -1 \qquad [21f]$$

$$1+\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(P)+\sum_{j=1}^{m}\frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}\left|g_j(P)\right|\leq 1\Rightarrow \qquad [21g]$$

$$\sum_{j=1}^{m}a'_{jC}\,g_j(P)+\sum_{j=1}^{m}\frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}\left|g_j(P)\right|\leq 0$$

$$a'_{jR}\geq 0\qquad j=1,2,...,m \qquad [21h]$$

Las restricciones [21b] y [21c] vienen dadas por la necesidad de que las estimaciones realizadas por el modelo sobre la variable dependiente deben incluir las realmente observadas. Las restricciones [21d] y [21e] indican que el factor de actualización debe ser decreciente respecto al tiempo, quedando asegurado al menos para una periodicidad P arbitraria, y siendo uP el máximo diferimiento considerado, en principio cercano al vencimiento del título que lo tenga más elevado. Obsérvese[2] que se ha utilizado como criterio de ordenación de números borrosos el propuesto por Ramik y Rimanek (1985). A través de [21f] y [21g] aseguramos que para los periodos contemplados, el factor de actualización toma valores comprendidos entre 0 y 1; y por último, [21h] indica que los radios de los parámetros a estimar deben ser siempre positivos.

[2] Para que exista desigualdad en sentido estricto, deberíamos haber exigido que el extremo inferior del soporte del factor de actualización con un vencimiento más cercano fuera superior o igual que el extremo superior del factor de actualización con vencimiento más lejano. Ello, sin embargo, no suele utilizarse en determinadas aplicaciones como la programación posibilística, porque es un criterio excesivamente restrictivo. En nuestro caso, podría provocar que el programa lineal a resolver fuera más fácilmente no factible.

Respecto a las alternativas que proponemos para las funciones $g_j(t)$, son las mismas que las propuestas en el apartado 2.2.1. Así, en la aplicación numérica que desarrollaremos consideramos las siguientes formas de $g_j(t)$:

1) $g_j(t) = t^j$. La consideramos por su sencillez, si bien somos conscientes de los problemas que puede conllevar su adopción respecto a la explosividad de los tipos forward y al contado que de ella se deriven.
2) Los splines cuadráticos de McCulloch (1971).
3) Los splines cúbicos propuestos por McCulloch (1975).

A continuación presentamos los resultados que obtenemos el 22/1/1999 para cada una de las posibles formas supuestas para $g_j(t)$. Como en el caso de certeza, hemos tomado m=4, de forma que los nodos que se han considerado cuando tomamos splines han sido los mismos que en las aplicaciones realizadas en el apartado 2.2.1. Asimismo, hemos partido de que las observaciones sobre los precios de los bonos son triangulares, de forma que el factor de descuento que se obtiene para un vencimiento t es también es triangular, y presenta la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left| x - \left[1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t) \right] \right|}{\sum_{j=1}^{m} a_{jR} \left| g_j(t) \right|} & 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=1}^{m} a_{jR} \left| g_j(t) \right| \le x \le 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{jR} \left| g_j(t) \right| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, también reseñamos que para los bloques de restricciones [21d], [21e], [21f] y [21g] se ha considerado una periodicidad anual (P=1) y dado que en principio, el horizonte temporal que consideramos en la estimación de la ETTI son 15 años, u=15.

a) Estimación polinómica

El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ correspondientes al factor de actualización son para los niveles de presunción $\alpha^*=0$ y $\alpha^*=0'5$ a partir de los cuales implementamos la regresión:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$\tilde{a}_1$	(-0,02853676, 0,00103866)	(-0,02853676, 0,00207733)
$\tilde{a}_2$	(0,0003709, 0)	(0,0003709, 0)
$\tilde{a}_3$	(-0,00017255, 0)	(-0,00017255, 0)
$\tilde{a}_4$	(9,1989E-06, 0)	(9,1989E-06, 0)

y el valor de la función objetivo es 16’98.

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años que quedan estimados para cada uno de los niveles de presunción son:

t	α^*=0	α^*=0’5
1	(0,97167, 0,00104)	(0,97167, 0,00208)
2	(0,94318, 0,00208)	(0,94318, 0,00415)
3	(0,91381, 0,00312)	(0,91381, 0,00623)
4	(0,88310, 0,00415)	(0,88310, 0,00831)
5	(0,85077, 0,00519)	(0,85077, 0,01039)
6	(0,81678, 0,00623)	(0,81678, 0,01246)
7	(0,78132, 0,00727)	(0,78132, 0,01454)
8	(0,74478, 0,00831)	(0,74478, 0,01662)
9	(0,70778, 0,00935)	(0,70778, 0,01870)
10	(0,67116, 0,01039)	(0,67116, 0,02077)

A continuación medimos, como siempre, el grado de adecuación de las estimaciones realizadas mediante la regresión convencional –en los modelos que analizamos, no estimamos rentabilidades, sino el factor de actualización que define la ETTI- en las regresiones posibilísticas efectuadas. En concreto, hallamos el nivel de presunción que los factores de actualización estimados en certeza –apartado 2.2.1- toman en el número borroso que cuantifica al factor de actualización para los mismos vencimientos, y que se deducen de los resultados recién obtenidos:

t	α^*=0	α^*=0’5
1	0,00	0,43
2	0,71	0,86
3	0,74	0,87
4	0,46	0,73
5	0,38	0,69
6	0,46	0,73
7	0,66	0,83
8	0,91	0,95
9	0,83	0,92
10	0,61	0,81
Media	**0,58**	**0,78**

b) Estimación mediante la utilización de splines cuadráticos

En este caso también hemos tomado m=4, y por tanto es necesario tomar cuatro nodos, que se calculan de la forma reseñada en el apartado 2.2.1. El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ son, para α^*=0 y 0’5:

	α^*=0	α^*=0’5
$\tilde{a}_1$	(-0,02746245, 0,00154556)	(-0,02746245, 0,00309112)
$\tilde{a}_2$	(-0,03099554, 0,00011541)	(-0,03099554, 0,00023083)
$\tilde{a}_3$	(-0,03573161, 0,0003417)	(-0,03573161, 0,00068341)
$\tilde{a}_4$	(-0,02825489, 0)	(-0,02825489, 0)

y el valor de la función objetivo es z=9'41.

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años quedan estimados en cada caso por los siguiente números borrosos triangulares simétricos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,97202, 0,00133)	(0,97202, 0,00267)
2	(0,94299, 0,00225)	(0,94299, 0,00449)
3	(0,91292, 0,00274)	(0,91292, 0,00548)
4	(0,88168, 0,00290)	(0,88168, 0,00580)
5	(0,84874, 0,00311)	(0,84874, 0,00622)
6	(0,81404, 0,00340)	(0,81404, 0,00680)
7	(0,77865, 0,00373)	(0,77865, 0,00746)
8	(0,74403, 0,00402)	(0,74403, 0,00804)
9	(0,71021, 0,00427)	(0,71021, 0,00855)
10	(0,67718, 0,00449)	(0,67718, 0,00898)

Respecto al grado de adecuación de los factores de descuento estimados en el apartado 2.2.1. para los siguientes 10 años, éstos toman los siguientes niveles de presunción en las correspondientes estimaciones borrosas:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0,90	0,95
2	0,91	0,96
3	0,94	0,97
4	0,98	0,99
5	0,92	0,96
6	0,78	0,89
7	0,66	0,83
8	0,60	0,80
9	0,58	0,79
10	0,61	0,81
Media	**0,79**	**0,89**

c) Estimación mediante la utilización de splines cúbicos

En este caso, también hemos tomado m=4, y por tanto el número de nodos es 3, tal como se explicó en el apartado 2.2.1. El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ para los niveles α^* que están siendo considerados al realizar la regresiones:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$\tilde{a}_1$	(0,0007488, 0)	(0,0007488, 0)
$\tilde{a}_2$	(-0,0026089, 0)	(-0,002609, 0)
$\tilde{a}_3$	(0,00671392, 0)	(0,0067139, 0)
$\tilde{a}_4$	(-0,0286392, 0,0009969)	(-0,028639, 0,0019938)

siendo z=16'3.