

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años quedan estimados en cada caso por:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97162, 0,00100)	(0,97162, 0,00199)
2	(0,94326, 0,00199)	(0,94326, 0,00399)
3	(0,91422, 0,00299)	(0,91422, 0,00598)
4	(0,88378, 0,00399)	(0,88378, 0,00798)
5	(0,85122, 0,00498)	(0,85122, 0,00997)
6	(0,81641, 0,00598)	(0,81641, 0,01196)
7	(0,78013, 0,00698)	(0,78013, 0,01396)
8	(0,74324, 0,00798)	(0,74324, 0,01595)
9	(0,70660, 0,00897)	(0,70660, 0,01794)
10	(0,67107, 0,00997)	(0,67107, 0,01994)

Asimismo, los factores de actualización estimados mediante MCO para vencimientos de hasta 10 años, toman los siguientes niveles de presunción en sus correspondientes estimaciones posibilísticas:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,00	0,42
2	0,78	0,89
3	0,59	0,80
4	0,28	0,64
5	0,28	0,64
6	0,51	0,76
7	0,81	0,91
8	0,91	0,96
9	0,70	0,85
10	0,59	0,80
Media	0,55	0,77

3.2.3. El modelo de Vasicek y Fong introduciendo la incertidumbre en los precios negociados

Partiendo de la expresión [16], consideramos que el factor de descuento \tilde{f}_t es un número borroso que se obtiene como una función borrosa aproximadamente exponencial de la forma:

$$\tilde{f}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 e^{-\gamma t} + \tilde{a}_2 e^{-\gamma^2 t} + \tilde{a}_3 e^{-\gamma^3 t}$$

Asimismo, los parámetros \tilde{a}_j , $j=0,1,2,\dots,3$ supondremos que son números borrosos L-L simétricos de Dubois y Prade, de forma que el factor de actualización también lo será. Así:

$$\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t})_L = (a_{0C}, a_{0R})_L + (a_{1C}, a_{1R})_L e^{-\gamma t} + (a_{2C}, a_{2R})_L e^{-\gamma^2 t} + (a_{3C}, a_{3R})_L e^{-\gamma^3 t}$$

y de esta forma, la función de pertenencia de \tilde{f}_t vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| x - \left[a_{0C} + \sum_{j=1}^3 a_{jC} e^{-\gamma_j t} \right] \right|}{a_{0R} + \sum_{j=1}^3 a_{jR} e^{-\gamma_j t}} \right) & a_{0C} - a_{0R} + \sum_{j=1}^3 (a_{jC} - a_{jR}) e^{-\gamma_j t} \leq x \leq a_{0C} + a_{0R} + \sum_{j=1}^3 (a_{jC} + a_{jR}) e^{-\gamma_j t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para poder realizar la estimación del factor de descuento, realizamos el cambio de variable: $x=1-e^{-\gamma t}$. Así, la función de descuento dejará de ser una función del tiempo, para ser función del argumento x , $\tilde{G}(x)$, siendo su dominio $x \in [0, 1)$, expresándose entonces el factor de actualización como $\tilde{f}_t = \tilde{G}(1 - e^{-\gamma t}) = \tilde{G}(x)$. En concreto, para un valor dado x , $\tilde{G}(x)$ puede escribirse como:

$$\tilde{G}(x) = \sum_{j=0}^m \tilde{\beta}_j g_j(x)$$

siendo las funciones $g_j(x)$ polinomios de tercer grado de x , y que nosotros consideraremos que son splines cúbicos. Para conseguir la forma de número borroso L-L de Dubois y Prade simétrico para $\tilde{G}(x)$, postulamos que $\tilde{\beta}_j = (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L \forall j$. Así, podremos obtener $\tilde{G}(x)$ como:

$$\tilde{G}(x) = (G_C(x), G_R(x))_L = \sum_{j=0}^m (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L g_j(x)$$

Dado que $\tilde{f}_0 = (1, 0)_L$, $\tilde{G}(0) = (1, 0)_L$. Dichas condiciones son obtenidas si:

- a) $g_0(x) = 1 - x$
- b) $g_j(0) = 0, j=1, 2, \dots, m$.
- c) $\tilde{\beta}_0 = (1, 0)_L$

Así, el factor de descuento podrá ser reescrito como una función de x que será:

$$\tilde{G}(x) = (G_C(x), G_R(x))_L = (1 - x) + \sum_{j=1}^m (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L g_j(x)$$

Siendo entonces su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{G}(x)}(y) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| y - \left[(1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)|} \right) & (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) - \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \leq y \leq \\ & (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, para implementar el modelo a estimar, deberemos partir de la expresión del precio del r -ésimo bono expresada en [17], teniendo en cuenta que para el vencimiento de su i -ésimo cobro, C_i^r , las funciones g_j que definen el factor de descuento no son función de su vencimiento, t_i^r , sino de su transformación, x_i^r la cual se obtiene como: $x_i^r = 1 - e^{-rt_i^r}$. Así, tras la estimación de los parámetros $\tilde{\beta}_j, j=1,2,\dots,m$, el precio que a través de [17] se presume para el bono r , \hat{P}^r , es una estimación de su verdadero precio \tilde{P}^r y se obtiene como:

$$\hat{P}^r = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[1 - x_i^r + \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(x_i^r) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(x_i^r)$$

y operando llegaremos a obtener:

$$(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) = \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$$

Y si notamos como $(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r)_L = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r)$, donde:

$$\hat{Y}_C^r = \hat{P}_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } \hat{Y}_R^r = \hat{P}_R^r$$

Se puede observar que el valor de la j -ésima variable independiente correspondiente al bono r es $X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$, que será crisp. Así, el modelo que finalmente deberá ser estimado es:

$$(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r)_L = \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L X_j^r \quad [22]$$

Volvemos a remarcar que la variable dependiente y los parámetros vienen expresados a través de su α^* -corte. Así, partiendo de [22], la expresión para dicho nivel de presunción α^* del α -corte de \hat{Y}^r , que no es mas que la estimación que obtenemos del α^* -corte para el mismo nivel de número borroso \tilde{Y}^r que estima, y será:

$$\langle \hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r \rangle = \sum_{j=1}^m \langle a'_{jC}, a'_{jR} \rangle X_j^r = \sum_{j=1}^m \langle a'_{jC} X_j^r, a'_{jR} | X_j^r \rangle$$

Como siempre, deberemos estimar el centro y el radio del α^* -corte de los parámetros $\tilde{a}_j, j=1,\dots,m$. Una vez resueltos, obtendremos el centro y el radio de los números borrosos del que provienen tal como ha sido ya comentado.

Por otra parte, la variable observada del r-ésimo bono es una $\tilde{Y}^r = (Y_C^r, Y_R^r)_L$ relacionada con el precio del mismo, tal que:

$$Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } Y_R^r = P_R^r$$

siendo entonces el α^* -corte observado, $Y_{\alpha^*}^r = (Y_C^r, Y_R^r)$ con:

$$Y_C^r = Y_C^r \text{ y } Y_R^r = L^{-1}(\alpha^*) Y_R^r$$

Respecto a la obtención de los parámetros \tilde{a}_j , utilizando el modelo de regresión posibilística de Tanaka, el programa lineal que deberemos resolver será, para un parámetro γ predefinido es:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| = \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \quad [23a]$$

sujeto a:

$$\hat{Y}_C^r - \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \leq Y_C^r - Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [23b]$$

$$\hat{Y}_C^r + \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \geq Y_C^r + Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [23c]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma s P})| &\geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P}) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})| \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(1 - e^{-\gamma s P})| - |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})|) &\geq 0 \\ & \quad s=1,\dots,u-1 \quad [23d] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma s P}) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma s P})| &\geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j((s+1)P) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j((s+1)P)| \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(1 - e^{-\gamma s P})| - |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})|) &\geq 0 \\ & \quad s=1,\dots,u-1 \quad [23e] \end{aligned}$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma u P}) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma u P})| \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma u P}) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma u P})| \geq -1 \quad [23f]$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma P}) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma P})| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma P}) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma P})| \leq 0 \quad [23g]$$

$$a'_{jR} \geq 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad [23h]$$

Donde:

$$Y_C^r = Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } Y_R^r = Y_R^r L^{-1}(\alpha^*) = P_R^r L^{-1}(\alpha^*)$$

Por otra parte, el significado de la función objetivo, y de las restricciones planteadas, es análogo al que planteamos para el modelo de McCulloch en el apartado 3.2.2.

Posteriormente, deberemos hallar el valor del parámetro $\hat{\gamma}$, de forma que se haga mínima la función objetivo. Igual que en el caso de certeza, postulamos que $\hat{\gamma}$ es un número crisp, de forma que podrá ser hallado mediante algún método numérico. En concreto el programa planteado es un programa lineal paramétrico de γ . Para hallarse el parámetro γ que minimiza la función objetivo, puede partirse del resultado de z para tres valores de γ arbitrarios. Si suponemos que el mínimo de z es una función cuadrática de γ , el mínimo de dicha función, $\hat{\gamma}$ puede ser una buena aproximación al valor γ -óptimo. Posteriormente, con el valor óptimo $\hat{\gamma}$ obtenido, volvemos a plantear el programa lineal anterior de forma que la estimación que obtengamos, nos permitirá hallar el centro y el radio de los parámetros \tilde{a}_j definitivo.

A continuación explicitamos los resultados obtenidos el 22/1/1999 con la modificación que sobre el modelo de Vasicek y Fong ha sido propuesta. Igual que en el apartado 2.2.2. se han tomado los siguientes tres nodos: $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - e^{-\gamma t_2}$ siendo t_2 la mediana de los vencimientos de los bonos negociados durante la sesión en que se estima la ETTI y $x_3 = 1$. También se ha considerado que $g_j(x)$ son las splines cúbicas propuestas por McCulloch, pero teniéndose en cuenta que el argumento de las funciones no es el vencimiento de los flujos, sino la transformación que sobre los mismos se realiza. Para los bloques de restricciones [23d], [23e], [23f] y [23g] se ha considerado que $u=15$ y $P=1$. Por otra parte, hemos considerado como valor óptimo del parámetro γ , el ya hallado en el apartado 2.2.2., es decir: $\gamma = 0'125$.

Asimismo, en el ejemplo que estamos analizando, dado que partimos de que los precios observados para cada uno de los k bonos que componen la muestra son números borrosos triangulares, postularemos que los parámetros $\tilde{\beta}_j$ que definan el factor de actualización presentan una forma también triangular. Así, el factor de actualización \tilde{f}_t asociado a un vencimiento t que

queda estimado tras implementar la regresión vendrá caracterizado por su función de pertenencia, que será:

$$\mu_{\tilde{f}_i}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| y - \left[(1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)|} & \left((1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) - \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \leq y \leq \right. \\ 0 & \left. (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \right) \\ \text{en otro caso} & \end{cases}$$

con $x = 1 - e^{-\gamma t}$.

En este caso, el valor de los parámetros $\tilde{\beta}_j$ correspondientes al factor de actualización para los niveles de presunción $\alpha^* = 0$ y $\alpha^* = 0.5$ a partir de los cuales implementamos la regresión son:

	$\alpha^* = 0$	$\alpha^* = 0.5$
$\tilde{\beta}_1$	(0,038865, 0)	(0,038865, 0)
$\tilde{\beta}_2$	(-1,129265, 0)	(-1,129265, 0)
$\tilde{\beta}_3$	(-3,346527, 0)	(-3,346527, 0)
$\tilde{\beta}_4$	(0,761458, 0,008315)	(0,761458, 0,01663)

y el valor de la función objetivo, $z = 11.05$.

Así, los factores actualización correspondientes a los próximos 10 años que quedan estimados para cada uno de los niveles de presunción $\alpha^* = 0$ y 0.5 son:

t	$\alpha^* = 0$	$\alpha^* = 0.5$
1	(0,97153, 0,00098)	(0,97153, 0,00195)
2	(0,94343, 0,00184)	(0,94343, 0,00368)
3	(0,91386, 0,00260)	(0,91386, 0,00520)
4	(0,88236, 0,00327)	(0,88236, 0,00654)
5	(0,84920, 0,00386)	(0,84920, 0,00773)
6	(0,81482, 0,00439)	(0,81482, 0,00877)
7	(0,77969, 0,00485)	(0,77969, 0,00970)
8	(0,74440, 0,00526)	(0,74440, 0,01051)
9	(0,70951, 0,00562)	(0,70951, 0,01123)
10	(0,67555, 0,00593)	(0,67555, 0,01187)

A continuación medimos el grado de adecuación de la estimación de los factores de actualización realizados en el apartado 2.2.2. en las regresiones posibilísticas efectuadas. El nivel de presunción que toma el factor de actualización estimado en certeza en el número borroso que cuantifica al factor de actualización para el mismo vencimiento es, para cada uno de los próximos 10 años:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,64	0,82
2	0,87	0,94
3	0,98	0,99
4	0,99	1,00
5	0,94	0,97
6	0,86	0,93
7	0,78	0,89
8	0,71	0,85
9	0,66	0,83
10	0,62	0,81
Media	0,80	0,90

3.2.4. Estimación de la ETTI a través de la estimación posibilística de los factores de actualización

La obtención del número borroso representativo del interés al contado a un plazo t , se realiza de la forma explicitada en el apartado 3.1.3.1., aplicando el principio de extensión de Zadeh, es decir, aplicando la expresión [13] para la función de pertenencia y [14] para los α -cortes. Así, dada la expresión genérica que ha sido postulada para \tilde{f}_t en el apartado 3.2.1, la función de pertenencia del tipo al contado para un plazo de t años, \tilde{f}_t , tanto si se opta por el modelo de estimación de ETTI de McCulloch, como si optamos por el propuesto por Vasicek y Fong, es:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\left| (1+x)^{-t} - \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} \right) \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} & -1 \leq x \\ \leq \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} & -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y en el caso particular en que los parámetros característicos $\tilde{\alpha}_j$ del modelo de McCulloch, o los parámetros $\tilde{\beta}_j$, del modelo de Vasicek y Fong sean triangulares, que es lo que ha sido considerado en nuestras aplicaciones, $\mu_{\tilde{f}_t}(x)$ tendrá la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| (1+x)^{-t} - \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} & \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} & -1 \leq x \\ \leq \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} & -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, el tipo al contado \tilde{i}_t , en el caso en que partamos de estimaciones de su factor de actualización asociado triangulares, no es triangular ni tampoco simétrico. Como comprobaremos posteriormente, \tilde{i}_t , será, sin embargo, un número borroso que se puede aproximar casi exactamente por un número borroso triangular con su mismo centro y sus mismos radios. Así, dado que partiremos de un factor de actualización triangular y simétrico, $\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t})$, con

$$f_t = \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \text{ y } l_{f_t} = \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)|$$

En la aproximación triangular del tipo spot propuesta, $\tilde{i}_t \approx (i_t, l_{i_t}, r_{i_t})$, consideraremos de forma análoga a lo comentado en el apartado 3.1.3.1:

$$i_t = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t} - 1, \quad l_{i_t} = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t} - \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} \text{ y}$$

$$r_{i_t} = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t}$$

Asimismo, los niveles en los que se cometerá mayor desviación al aproximar por un número borroso triangular en la estimación de los α -cortes son $\alpha_l^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ para los extremos izquierdo y derecho de los mismos, respectivamente. A partir de las expresiones consideradas en [15], y teniendo en cuenta la simetría de los factores de actualización, los niveles en los que se producen dichas desviaciones máximas son:

$$\alpha_l^*(t) = \frac{f_t + l_{f_t}}{l_{f_t}} - \left(\frac{l_{i_t} t}{l_{f_t}^{-1/t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \text{ y } \alpha_D^*(t) = -\frac{f_t - l_{f_t}}{l_{f_t}} + \left(\frac{l_{i_t} t}{l_{f_t}^{-1/t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}}$$

Y a partir de ambas expresiones, y tal como fue comentado en el apartado 1.4.2. de la primera parte de esta tesis, podemos calcular las máximas desviaciones que se producen en los α -cortes, y el error máximo que en el nivel de presunción podemos cometer por la aproximación triangular de los tipos spot.

A continuación, y en la sesión que estamos analizando, expresamos ya como NBTs los tipos spot estimados para cada uno de los niveles de presunción α^* considerados en la implementación de las regresiones –tres especificaciones distintas para las funciones g_j en McCulloch, y una sola para el modelo de Vasicek y Fong en un horizonte temporal de diez años. Para la adaptación del

modelo de McCulloch en el caso en el que el factor de actualización venía dado por un simple polinomio del tiempo, los resultados que obtenemos son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02916, 0,00110, 0,00110)	(0,02916, 0,00220, 0,00220)
2	(0,02968, 0,00113, 0,00114)	(0,02968, 0,00226, 0,00228)
3	(0,03050, 0,00117, 0,00117)	(0,03050, 0,00233, 0,00235)
4	(0,03157, 0,00121, 0,00122)	(0,03157, 0,00241, 0,00244)
5	(0,03285, 0,00126, 0,00127)	(0,03285, 0,00250, 0,00254)
6	(0,03431, 0,00131, 0,00132)	(0,03431, 0,00261, 0,00265)
7	(0,03588, 0,00137, 0,00138)	(0,03588, 0,00273, 0,00278)
8	(0,03752, 0,00144, 0,00146)	(0,03752, 0,00286, 0,00293)
9	(0,03915, 0,00151, 0,00154)	(0,03915, 0,00301, 0,00310)
10	(0,04068, 0,00160, 0,00162)	(0,04068, 0,00317, 0,00328)

Para McCulloch, pero con el factor de descuento cuantificado a través de splines cuadráticos, se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02879, 0,00141, 0,00141)	(0,02879, 0,00282, 0,00283)
2	(0,02978, 0,00122, 0,00123)	(0,02978, 0,00245, 0,00246)
3	(0,03083, 0,00103, 0,00103)	(0,03083, 0,00205, 0,00207)
4	(0,03198, 0,00085, 0,00085)	(0,03198, 0,00169, 0,00170)
5	(0,03335, 0,00076, 0,00076)	(0,03335, 0,00151, 0,00152)
6	(0,03488, 0,00072, 0,00072)	(0,03488, 0,00143, 0,00145)
7	(0,03639, 0,00071, 0,00071)	(0,03639, 0,00141, 0,00143)
8	(0,03765, 0,00070, 0,00070)	(0,03765, 0,00139, 0,00141)
9	(0,03875, 0,00069, 0,00070)	(0,03875, 0,00138, 0,00140)
10	(0,03975, 0,00069, 0,00069)	(0,03975, 0,00137, 0,00139)

Para McCulloch, modelizando la función de descuento con splines cúbicos, se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02921, 0,00105, 0,00106)	(0,02921, 0,00211, 0,00212)
2	(0,02964, 0,00109, 0,00109)	(0,02964, 0,00217, 0,00218)
3	(0,03035, 0,00112, 0,00113)	(0,03035, 0,00224, 0,00226)
4	(0,03137, 0,00116, 0,00117)	(0,03137, 0,00231, 0,00234)
5	(0,03274, 0,00121, 0,00121)	(0,03274, 0,00240, 0,00244)
6	(0,03438, 0,00126, 0,00127)	(0,03438, 0,00250, 0,00255)
7	(0,03611, 0,00132, 0,00133)	(0,03611, 0,00262, 0,00268)
8	(0,03779, 0,00138, 0,00140)	(0,03779, 0,00275, 0,00282)
9	(0,03934, 0,00146, 0,00148)	(0,03934, 0,00289, 0,00297)
10	(0,04069, 0,00153, 0,00156)	(0,04069, 0,00304, 0,00314)

Y por último, tomando el modelo de Vasicek y Fong se obtiene,

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02931, 0,00103, 0,00104)	(0,02931, 0,00207, 0,00207)
2	(0,02955, 0,00100, 0,00101)	(0,02955, 0,00200, 0,00201)
3	(0,03048, 0,00098, 0,00098)	(0,03048, 0,00195, 0,00196)
4	(0,03178, 0,00095, 0,00096)	(0,03178, 0,00190, 0,00192)

5	(0,03323, 0,00094, 0,00094)	(0,03323, 0,00187, 0,00189)
6	(0,03472, 0,00093, 0,00093)	(0,03472, 0,00185, 0,00187)
7	(0,03619, 0,00092, 0,00092)	(0,03619, 0,00183, 0,00185)
8	(0,03759, 0,00091, 0,00092)	(0,03759, 0,00182, 0,00185)
9	(0,03887, 0,00091, 0,00092)	(0,03887, 0,00181, 0,00184)
10	(0,04000, 0,00091, 0,00092)	(0,04000, 0,00181, 0,00184)

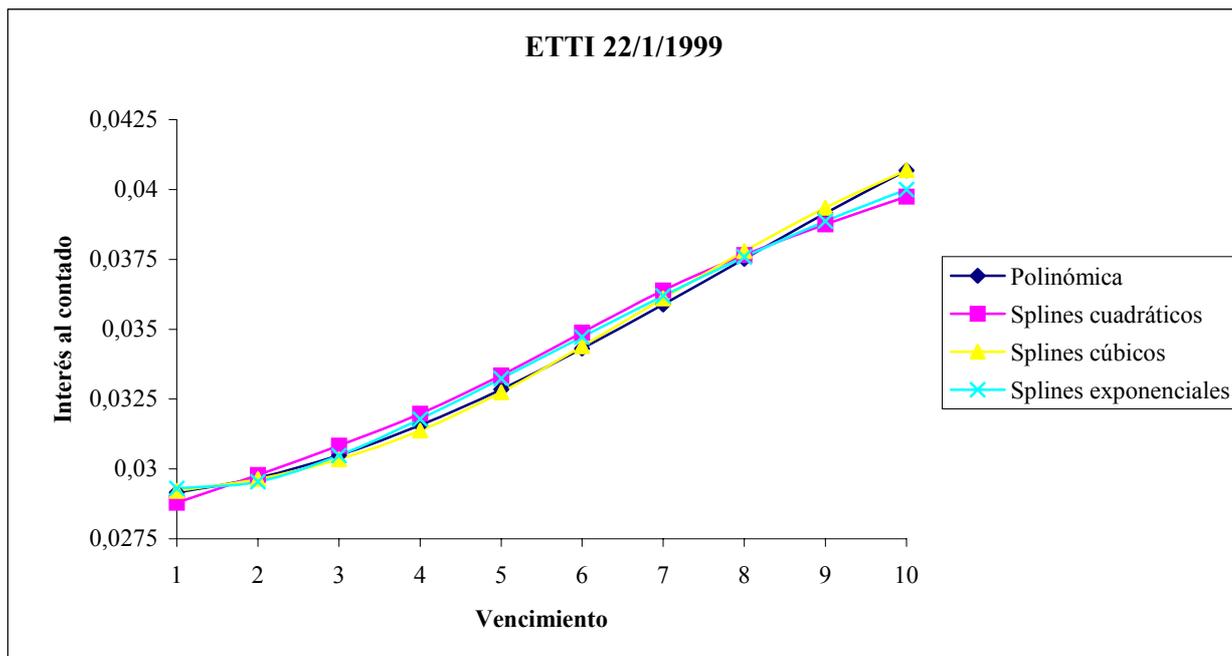
Así, los errores que como máximo se cometen en la aproximación triangular del tipo spot son:

t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0,00053	0,00107	0,00069	0,00137	0,00051	0,00103	0,00050	0,00101
2	0,00087	0,00175	0,00094	0,00189	0,00084	0,00168	0,00077	0,00154
3	0,00123	0,00247	0,00108	0,00217	0,00118	0,00237	0,00103	0,00206
4	0,00162	0,00324	0,00113	0,00227	0,00155	0,00311	0,00128	0,00255
5	0,00204	0,00408	0,00122	0,00245	0,00195	0,00391	0,00152	0,00304
6	0,00249	0,00500	0,00136	0,00273	0,00240	0,00480	0,00176	0,00352
7	0,00300	0,00601	0,00154	0,00308	0,00288	0,00577	0,00200	0,00401
8	0,00355	0,00713	0,00172	0,00344	0,00342	0,00685	0,00225	0,00450
9	0,00417	0,00837	0,00190	0,00380	0,00401	0,00804	0,00250	0,00500
10	0,00485	0,00974	0,00208	0,00416	0,00466	0,00935	0,00275	0,00551

Asimismo, analizamos el nivel de presunción que los tipos al contado obtenidos en certeza toman en sus correspondientes posibilísticos, en cada uno de los modelos propuestos:

t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0	0,43	0,90	0,95	0	0,42	0,64	0,82
2	0,71	0,85	0,91	0,96	0,78	0,89	0,87	0,94
3	0,74	0,87	0,94	0,97	0,59	0,80	0,98	0,99
4	0,46	0,73	0,98	0,99	0,28	0,64	0,99	1,00
5	0,38	0,69	0,92	0,96	0,28	0,64	0,94	0,97
6	0,46	0,73	0,78	0,89	0,51	0,76	0,86	0,93
7	0,66	0,83	0,66	0,83	0,81	0,91	0,78	0,89
8	0,91	0,95	0,60	0,80	0,91	0,95	0,71	0,86
9	0,83	0,91	0,59	0,79	0,70	0,85	0,66	0,83
10	0,61	0,80	0,61	0,81	0,59	0,79	0,63	0,81
Media	0'58	0'78	0'79	0'89	0'55	0'77	0'8	0'9

A continuación representamos para un horizonte temporal de 10 años, la ETTI de mayor presunción que obtenemos para el 22-1-1999, que estará conformada por los tipos de interés al contado que presenten un nivel de presunción igual a uno:



3.2.5. Comentarios a los resultados obtenidos

Creemos que los resultados obtenidos pueden ser objeto de los siguientes comentarios:

- Podemos observar que los métodos que proporcionan un mejor ajuste en incertidumbre, son McCulloch mediante la especificación cuadrática de los splines que cuantifican la función de descuento, y el método basado en la construcción del factor de actualización mediante de los splines exponenciales.
- En aquellos métodos en los que se produce un mejor ajuste, la aproximación triangular de los tipos spot es mejor que en aquéllos que proporcionan un ajuste más incierto. Ello es debido a que partimos de unos factores de actualización menos inciertos en el primer caso. De todas formas, el ajuste triangular propuesto que se obtiene en todos los casos, es más que satisfactorio.
- En la modelización cuadrática y exponencial de los \tilde{f}_t podemos observar que los tipos spot que de ellas deducimos van disminuyendo su incertidumbre a medida que aumenta el vencimiento de estos tipos, lo cual, en principio no es razonable, ya que, tal como fue comentado, a mayor vencimiento, los tipos spot incorporan mayor número de tipos forward a un año en su formación, debiendo ser más inciertos. Esta circunstancia es especialmente relevante en el modelo de McCulloch con splines cuadráticos. En el caso del modelo de Vasicek, este aspecto, aún no pudiéndose apreciar de forma tan clara, también se produce. En este segundo caso es debido a la introducción del parámetro γ como un valor cierto. Una interpretación que Vasicek y Fong hacen de dicho parámetro es que este es el tipo forward instantáneo al que tiende la ETTI para vencimientos elevados. Al modelarse éste como un

- valor cierto, es de suponer que en el caso borroso dicho tipo instantáneo debe tomar un valor cierto, y por tanto, los tipos spot –que también se situarán en vencimientos alejados- del que deriven deben incorporar poca “borrosidad”.
- d) Podemos comprobar, igual que en la estimación de la ETTI basada en la estimación de la curva de rentabilidades, que si partimos de una “mejor” regresión posibilística, la similitud entre los tipos spot obtenidos de forma cierta y los obtenidos de forma borrosa es mayor. Podemos comprobar que el nivel de verdad de los tipos spot obtenidos de forma cierta alcanza mayores niveles de verdad en su correspondiente estimación borrosa si postulamos para la función de descuento una forma mediante splines cuadráticos o mediante splines exponenciales, que si tomamos el resto de alternativas. En el caso de la adaptación realizada sobre el modelo de Vasicek y Fong, esta circunstancia es particularmente clara: dependiendo de si tomamos para la regresión $\alpha^*=0$ ó $\alpha^*=0,5$, los niveles de verdad de los tipos spot obtenidos de forma cierta pueden llegar a ser de casi verdaderos por término medio, en sus correspondientes posibilísticos. Volvemos a reseñar que la congruencia entre los resultados obtenidos con mínimos cuadrados y mediante regresión posibilística creemos que dan indicios del mayor o menor acierto al emplear un determinado modelo. Una menor discrepancia puede ser indicio de un mayor acierto en las funciones $g_j(t)$ tomadas para ajustar la ETTI.
- e) Respecto a la representación gráfica de la ETTI que se obtiene para un nivel de presunción 1 en los cuatro casos ensayados, podemos observar que, por supuesto, todos los métodos nos conducen a resultados similares. Sin embargo si que se puede comprobar que el modelo de McCulloch implementado mediante una simple especificación polinomial del factor de actualización nos lleva a obtener una ETTI ligeramente más oscilante que en otras formas de especificación de las funciones $g_j(t)$.
- f) Asimismo, podemos observar que los tipos spot son prácticamente simétricos, pero no absolutamente simétricos, ya que partimos para estimar dichos tipos del factor de descuento spot, que sí lo es para cualquier vencimiento.