CAPÍTULO 4:

PREDICCIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

4.1. INTRODUCCIÓN

De forma análoga a lo realizado en el apartado 2.3., analizaremos a continuación la obtención de los tipos de interés forward cuando los tipos de interés spot, y por tanto, los factores de actualización spot, vienen dados a través de números borrosos. Asimismo, volvemos a reseñar que adoptaremos el marco de la teoría de las expectativas racionales sobre los tipos de interés, identificándose de esta forma los tipos forward como los tipos a un año que en el mercado se estiman para vencimientos futuros. En nuestro caso, haremos especial hincapié en el hecho de que los factores de actualización $\widetilde{f}_t$ sean números borrosos L-L de Dubois y Prade, es decir $\widetilde{f}_t = \left(f_t, l_{f_t}, r_{f_t}\right)_L$.

Como ya hemos comprobado, $\widetilde{f}_t$ es siempre un número borroso L-L de Dubois y Prade cuando estimamos directamente la función de descuento mediante la adaptación de los modelos de McCulloch y Vasicek a los supuestos de borrosidad en los precios. En este caso, los factores de actualización que se obtienen además son simétricos, de forma que $l_{f_t} = r_{f_t}$. Por otra parte, bien es cierto que si estimábamos la ETTI a través de la curva de rentabilidades, los factores de actualización $\widetilde{f}_t$ no eran números borrosos L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, al menos en el caso en el que partamos de una estimación triangular de la curva de rentabilidades, éstos pueden ser aproximados de una forma excelente a través de un NBT, de forma que $\widetilde{f}_t \approx \left(f_t, l_{f_t}, r_{f_t}\right)_L$.

4.2. OBTENCIÓN DE LOS TIPOS DE ACTUALIZACIÓN FORWARD A UN AÑO A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

Para hallar el tipo implícito a un año para dentro de t-1 años, bastará con conocer el factor de actualización que éste define, para hallarlo planteamos la siguiente ecuación borrosa:

$$\widetilde{f}_t = \widetilde{f}_{t-1} \cdot {}_{t-1}\widetilde{f}_1$$

donde ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$ es la incógnita y se trata del número borroso correspondiente al factor de actualización para dentro de t-1 años.

Así, para hallar ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$ la ecuación a resolver expresada mediante α-cortes es:

$$\left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] = \left[f_{t-1}^1(\alpha), f_{t-1}^2(\alpha)\right] \cdot \left[{}_{t-1}f_1^1(\alpha),\ {}_{t-1}f_1^2(\alpha)\right]$$

Como siempre, si existe, proponemos que la solución aplicada sea la solución tradicional. En caso de existir, los α-cortes de ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$ son:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = \left[{}_{t-1}f_1^1(\alpha),\ {}_{t-1}f_1^2(\alpha)\right] = \left[\frac{f_t^1(\alpha)}{f_{t-1}^1(\alpha)}, \frac{f_t^2(\alpha)}{f_{t-1}^2(\alpha)}\right]$$

Por supuesto, si los factores de actualización al contado son números borrosos L-L, obtenemos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = \left[{}_{t-1}f_1^1(\alpha),\ {}_{t-1}f_1^2(\alpha)\right] = \left[\frac{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}, \frac{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}\right]$$

Planteando las ecuaciones:

$$x = \frac{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}; \qquad x = \frac{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}$$

y despejando el nivel de presunción α como función de los extremos de los α-cortes (x), hallaríamos la función de pertenencia de ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$. Con la primera ecuación hallaríamos el tramo izquierdo, y con la segunda el tramo derecho. Así, dicha función de pertenencia será:

$$\mu_{{}_{t-1}\widetilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{xf_{t-1} - f_t}{xl_{f_{t-1}} - l_{f_t}}\right) & \dfrac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \leq x \leq \dfrac{f_t}{f_{t-1}} \\ L\left(\dfrac{xf_{t-1} - f_t}{r_{f_t} - xr_{f_{t-1}}}\right) & \dfrac{f_t}{f_{t-1}} < x \leq \dfrac{f_t + r_{f_t}}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Asimismo, y tal como obteníamos en el apartado 3.2., si $\widetilde{f}_t$ es simétrico ∀t, entonces $\mu_{{}_{t-1}\widetilde{f}_1}(x)$ quedará expresada como:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\left|xf_{t-1}-f_t\right|}{xl_{f_{t-1}}-l_{f_t}}\right) & \dfrac{f_t-l_{f_t}}{f_{t-1}-l_{f_{t-1}}}\le x\le\dfrac{f_t+l_{f_t}}{f_{t-1}+l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Respecto a la solución en sentido clásico, dado que se trata de una solución a la ecuación $\tilde{A}\cdot\tilde{X}=\tilde{B}$, y los factores de descuento son L-L de Dubois y Prade, ésta siempre existe si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{l_{f_t}}{l_{f_{t-1}}}\ge\frac{f_t}{f_{t-1}} \text{ y } \frac{r_{f_t}}{r_{f_{t-1}}}\ge\frac{f_t}{f_{t-1}}$$

Estas condiciones fueron demostradas en el apartado 1.3.1. de la primera parte de la tesis.

Si existe simetría en los números borrosos que representan el factor de actualización, bastará pues con exigir que $\dfrac{l_{f_t}}{l_{f_{t-1}}}\ge\dfrac{f_t}{f_{t-1}}$.

En cualquier caso, siempre podemos asegurar la existencia de solución en el sentido de Buckley y Qu. De esta forma obtenemos para un nivel α, los α-cortes del factor de actualización forward a través de:

$${}_{t-1}f_{1\alpha}=\left\{x\in R^+ / x=\frac{y}{z}, y\in f_{t\alpha}, z\in f_{(t\text{-}1)\alpha}\right\}$$

y dada la relación monótona creciente de la solución con respecto a f_t, y decreciente con respecto al factor de actualización para una unidad monetaria con vencimiento en t-1, obtendremos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha}=\left[{}_{t-1}f_1^1(\alpha),{}_{t-1}f_1^2(\alpha)\right]=\left[\frac{f_t^1(\alpha)}{f_{t\text{-}1}^2(\alpha)},\frac{f_t^2(\alpha)}{f_{t\text{-}1}^1(\alpha)}\right]$$

En este caso, si los factores de actualización al contado están estimados a través de números borrosos L-L de Dubois y Prade, obtendremos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha}=\left[{}_{t-1}f_1^1(\alpha),{}_{t-1}f_1^2(\alpha)\right]=\left[\frac{f_t-l_{f_t}L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1}+r_{f_{t-1}}L^{-1}(\alpha)},\frac{f_t+r_{f_t}L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1}-l_{f_{t-1}}L^{-1}(\alpha)}\right]$$

Si utilizamos la solución de Buckley y Qu, la expresión de la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ a través de sus α-cortes, se hallará de forma análoga a la planteada cuando recurríamos a la solución clásica de ecuaciones. Así pues, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{f_t - xf_{t-1}}{xr_{f_{t-1}} + l_{f_t}}\right) & \dfrac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}} \le x < \dfrac{f_t}{f_{t-1}} \\ L\left(\dfrac{xf_{t-1} - f_t}{r_{f_t} + xl_{f_{t-1}}}\right) & \dfrac{f_t}{f_{t-1}} \le x < \dfrac{f_t + r_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que en el caso de simetría de los factores de actualización al contado $\tilde{f}_t$ y $\tilde{f}_{t-1}$, quedará reducida a:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\left|xf_{t-1} - f_t\right|}{xl_{f_{t-1}} + l_{f_t}}\right) & \dfrac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \le x \le \dfrac{f_t + l_{f_t}}{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obviamente, sea cual sea la solución que se aplique el número obtenido no es un número borroso de la misma naturaleza del que partimos (es decir, deja de ser L-L de Dubois y Prade). Si fuera necesario y siguiendo la metodología de ajuste planteada, al menos para números borrosos triangulares si que podríamos ajustar uno de la misma naturaleza.

Respecto al valor de los factores de actualización forward que obtenemos aplicando esta última solución consideramos que puede presentar los siguientes problemas:

1. En primer lugar, y como ya ha sido comentado, la solución obtenida incorpora excesiva incertidumbre. Ello podría provocar que los tipos forward que de los factores de actualización se deduzcan aporten poca información al decisor.

2. En segundo lugar, que la solución obtenida no tenga sentido financiero, ya que se obtengan valores posibles de los factores de actualización forward mayores a uno, de forma que no se cumpla que ${}_{t-1}\tilde{f}_1$<1. A continuación ilustramos esta afirmación con un ejemplo. Supongamos que ha sido estimado como factores de actualización al contado a 6 y 7 años y mediante números borrosos triangulares:

   $\tilde{f}_6$ = (0’8134, 0’05, 0’05) ⇒ $\tilde{i}_6$ ≈ (0’035, 0’01024, 0’011)

$$\widetilde{f}_7 = (0'77859, 0'001, 0'001) \Rightarrow \widetilde{i}_7 \approx (0'0364, 0'00019, 0'00019)$$

A partir de estos datos, obtenemos que el valor de una unidad monetaria con vencimiento en 7 años dentro de 6 será el número borroso aproximadamente triangular ${}_6\widetilde{f}_1 \approx (0'9572,\ 0'05659,\ 0'064)$. Podemos comprobar que en este caso estamos aceptando la posibilidad de valores del factor de actualización superiores a 1, ya que 0'9572+0'064 =1,0212.

4.2.1. Análisis de la existencia de solución en sentido clásico cuando realizamos la estimación directa de los factores de actualización spot

Como comprobaremos a continuación, una de las ventajas de la estimación directa de los factores de actualización al contado es que los factores de actualización a un año forward pueden expresarse fácilmente como una función explícita de los parámetros borrosos estimados en la regresión $\widetilde{a}_j$ ó $\widetilde{\beta}_j$ -dependiendo del modelo por el que optemos-. Pues bien, si expresamos los factores de actualización forward como función directa de los parámetros estimados en la regresión, la solución de Buckley y Qu, que siempre existe, coincide con la solución en el sentido clásico si el factor de actualización es una función no decreciente respecto a los parámetros que lo conforman, lo cual se cumple siempre cuando las funciones $g_j(t)$ que cuantifican el factor de actualización son no negativas y no decrecientes. En nuestro caso, y tal como puede observarse en el apartado 2.2., las funciones propuestas cumplen ambos requisitos, por lo que la solución en sentido clásico siempre existe. A continuación demostramos la anterior afirmación sólo para los factores de actualización spot que deducimos a partir de la adaptación realizada del modelo de McCulloch. La demostración cuando el factor de actualización venga cuantificado a través de splines exponenciales se realizaría de forma análoga.

En presencia de certeza en el factor de descuento spot, podríamos escribir a ${}_{t-1}f_1$ como función de los parámetros a_j, de forma que:

$$ {}_{t-1}f_1(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{f_t}{f_{t-1}} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{m} a_j g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^{m} a_j g_j(t-1)} $$

pero como los parámetros a_j han sido estimados mediante números borrosos, también lo deberá ser el factor de actualización forward. En concreto ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$ es una función borrosa de $\widetilde{a}_j$, j=1,2,…,m. De esta forma, podemos notar a ${}_{t-1}\widetilde{f}_1$ como ${}_{t-1}f_1(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n)$. Así, aplicando la solución de Buckley y Qu, los α-cortes para un nivel α dado serán un subconjunto del intervalo (0,1] tal que:

$$ {}_{t-1}f_{1\alpha} = \left\{ y / y = \frac{1+\sum_{j=1}^{m} x_j g_j(t)}{1+\sum_{j=1}^{m} x_j g_j(t-1)}, x_j \in a_{j\alpha}, j=1,2,...,m \right\} = [\inf\{y\}, \sup\{y\}] \qquad [24] $$

con $a_{j\alpha}$, el α-corte del número borroso $\tilde{a}_j$.

Respecto a la anterior expresión, debemos mencionar que para hallar los puntos extremos del conjunto que define el α-corte deberemos resolver dos programas matemáticos, uno de minimización, para el extremo inferior, y uno de maximización para el extremo superior, que siempre tendrán solución, ya que se cumplen las hipótesis del Teorema de Weirstrass (la función es continua y definida en un conjunto compacto). Adicionalmente, dado que la función que evaluamos es continua, y los parámetros a_j son números borrosos, ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ será un número borroso -para la demostración, ver Li Calzi (1990)-. Sin embargo las dos soluciones propuestas para ${}_{t-1}f_{1\alpha}$ coincidirán si las funciones g_j, j=1,2,...,m son no decrecientes. Dado que la solución en el sentido de Buckley y Qu siempre existe, esto nos dará pié a afirmar que la solución en el sentido clásico también existe.

La búsqueda de los extremos del intervalo de confianza ${}_{t-1}f_{1\alpha}$ en [24] implica tener que resolver los programas matemáticos:

Maximizar (Minimizar) ${}_{t-1}f_{1\alpha}(x_1, x_2,...,x_m)$

s.a:

$$ x_j \in a_{j\alpha} = \left[a_j^1(\alpha), a_j^2(\alpha)\right] = \left[a_{jC} - L^{-1}(\alpha)a_{jR}, a_{jC} + L^{-1}(\alpha)a_{jR}\right], j=1,2,...,m. $$

Es fácil comprobar que las derivadas parciales de la función objetivo respecto a x_j, j=1,2,...m son no negativas, es decir

$$ \frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{g_j(t)\left[1+\sum_{j=1}^{m} x_j g_j(t-1)\right] - g_j(t-1)\left[1+\sum_{j=1}^{m} x_j g_j(t)\right]}{\left[1+\sum_{j=1}^{m} x_j g_j(t-1)\right]^2} \geq 0, j=1,2,...,m. $$