Y en segundo lugar, el de prestaciones, que representamos formalmente como:

$K(\xi_x^r, t)$ ; $t\in[0,T]$ siendo $K(\xi_x^r, t)$ una cuantía aleatoria asociada a la prestación a pagar por parte del asegurador en un momento t.

A partir de dichos subprocesos, el principio de equivalencia estática, si suponemos que el interés o intereses de valoración son conocidos de antemano queda expresado como:

$$\sum_{\forall t\in[0,T]} E\left[P(\xi_x^t, t)\right]\cdot f_t = \sum_{\forall t\in[0,T]} E\left[K(\xi_x^t, t)\right]\cdot f_t$$

donde $f_t$ representa el factor de actualización para una cuantía cuyo vencimiento es t años y E[·] es el operador esperanza matemática. Dicho principio indica, si la valoración del contrato se realiza para determinar las primas a satisfacer por el asegurado, que el valor actual de la esperanza de las prestaciones debe coincidir con el valor actual de la esperanza de las contraprestaciones.

En el mencionado trabajo de Terceño *et al.* (1996) se realiza una formulación análoga, pero suponiéndose que el tipo de interés de actualización que se aplica a los capitales financieros contemplados en la operación financiera viene dado a través de un número borroso. Así, partiendo de las expresiones que hemos deducido para los factores de descuento en los apartados 1.3.3.1 y 1.3.3.2, podemos reformular el principio de equivalencia estática como:

$$\sum_{\forall t\in[0,T]} E\left[P(\xi_x^t, t)\right]\cdot \tilde{f}_t = \sum_{\forall t\in[0,T]} E\left[K(\xi_x^t, t)\right]\cdot \tilde{f}_t$$

En Terceño *et al.* (1996) se analizaba la fijación de las primas puras únicas para algunas estructuras actuariales, incorporándose las siguientes hipótesis de trabajo, las cuales también serán tenidas en consideración en el análisis que realizaremos:

a) La operación se divide en periodos anuales, es decir, $\Delta t=1$ y por tanto el tipo de interés borroso se expresará mediante un tanto efectivo anual. Ya hemos comentado en apartados anteriores que la no asunción de esta hipótesis no aportará nada relevante al análisis que pretendemos llevar a cabo, si acaso, cargar la notación.
b) La prima es única y devenga en el momento de valoración. Por lo tanto el principio de equivalencia utilizado será un caso particular del anterior, quedando expresado como:

$$\tilde{P} = \sum_{\forall t\in[0,T]} E\left[K(\xi_x^t, t)\right]\cdot \tilde{f}_t$$

c) Los capitales pagaderos ante cada suceso considerado son unitarios (K = 1) en cuyo caso la expresión anterior puede reformularse como:

$$\widetilde{P} = \sum_{\forall t \in [0,T]} E(\xi_x^t, t) \cdot \widetilde{f}_t$$

Este supuesto habitual en la matemática actuarial, no es tan restrictivo como pueda parecer, ya que, de forma inmediata, se pueden trasponer los resultados obtenidos al supuesto de que las cuantías pactadas ante cualquier contingencia son constantes, lo cual es un hecho muy habitual en la práctica aseguradora, sin más que multiplicar la prima por dicha cuantía constante.

Por otra parte, también quedan contemplados implícitamente, aquéllos contratos en los que las cuantías varían en progresión geométrica según una razón de variación q, que no necesariamente tiene que ser cierta. Dicha razón, en muchas ocasiones, puede estar ligada a una revisión de las cuantías contempladas en el contrato sobre la base de algún índice que refleje la inflación, de forma que, si aceptamos como plausible su cuantificación a través de un número borroso de la forma:

$$\widetilde{q} = \{x / \mu_{\widetilde{q}}(x)\} = \{q_\alpha = [q^1(\alpha), q^2(\alpha)] / 0 \le \alpha \le 1\}, \text{ con } q^1(0)>0$$

La cuantía aleatoria que devengará en el momento t será borrosa y aleatoria, la cual notamos como $\widetilde{C}_t(\xi_x^t, t)$. Si $C_0 = 1$, hipótesis que al igual que fur comentado anteriormente, no es restrictiva ya que si la cuantía no fuese unitaria, bastaría por multiplicar la prima unitaria por las cuantías establecidas, podemos escribir entonces $\widetilde{C}_t = \widetilde{q}^{\,t}$, y obtenemos:

$$\widetilde{P} = E[\widetilde{C}_t(\xi_x^t, t)] = E[\widetilde{q}^{\,t}(\xi_x^t, t)] = \widetilde{q}^{\,t} E(\xi_x^t, t)$$

Y así:

$$\widetilde{P} = \sum_{\forall t \in [0,T]} \widetilde{q}^{\,t} \cdot E(\xi_x^t, t) \cdot \widetilde{f}_t = \sum_{\forall t \in [0,T]} E(\xi_x^t, t) \cdot \widetilde{f}_t^{'}$$

Donde $\widetilde{f}_t^{'}$ es un nuevo factor de actualización que se construye como el producto de $\widetilde{q} \cdot \widetilde{f}_t$. Si, como ocurre usualmente en la práctica, $\widetilde{q}$ refleja la estimación del decisor de algún índice que cuantifica la inflación, $\widetilde{f}_t^{'}$ es el factor de actualización que se podría construir utilizando el interés/intereses reales estimados por el asegurador para todo el horizonte temporal que abarca el seguro.

Así, obtendríamos:

$$\mu_{\widetilde{f}'}(y) = \bigvee_{y = x_1 x_2} \left(\mu_{\widetilde{q}^t}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{f}_t}(x_2)\right)$$

con $\mu_{\tilde{q}^t}(x) = \mu_{\tilde{q}}(x^{1/t})$

si operamos con los α-cortes, obtenemos los de $\tilde{f}_t^{'}$, $f'_{t\alpha}$, que serán:

$$f'_{t_\alpha} = \left[f_t^{'1}(\alpha), f_t^{'2}(\alpha)\right] = \left[q^1(\alpha) f_t^1(\alpha), q^2(\alpha) f_t^2(\alpha)\right]$$

Asimismo, a partir de la formulación particular del principio de equivalencia estática realizado en el punto c) anterior, podemos definir el factor de actualización financiero actuarial, el cual se trata de un elemento clave en el enfoque estático en la valoración de los seguros de vida, como:

$$E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t$$

Dicho factor financiero actualiza una cuantía con vencimiento en t en el caso en que devengue ante las contingencias asociadas a la variable aleatoria $\xi_x^t$, la reduce a su esperanza matemática y posteriormente actualiza dicha esperanza matemática. Es inmediato observar que $E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t$ es un número borroso cuya función de pertenencia se obtiene a través de $\mu_{\tilde{f}_t}(x)$ como:

$$\mu_{E(\xi_x^t, t)\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{E(\xi_x^t, t)}\right)$$

En el caso más típico de seguros de vida que únicamente contemplan el fenómeno de la mortalidad, existen dos factores de actualización financiero-actuarial.

a) Uno asociado a que el capital contingente en t devengue en caso de que la cabeza sobre la que se pacte el seguro sobreviva t años.
b) Uno asociado a que el capital contingente en t devengue en caso de que la cabeza sobre la que se pacte el seguro fallezca durante el t-ésimo año.

Este principio, ha venido siendo utilizado ampliamente (en su versión cierta al menos) porque instrumentos derivados de este enfoque, como los símbolos de conmutación, facilitaban sobremanera la farragosa tarea de computar valores actuariales. Pero en la actualidad se dispone de potentes herramientas informáticas que van dejando en desuso dichos instrumentos. El inconveniente de este método, es que al reducir los capitales contingentes a un único valor cierto, se elimina el componente aleatorio de la operación, y por tanto, parte de la información sobre el riesgo que le supone la misma al asegurador, con lo cual, la posible fijación de recargos de seguridad, márgenes de seguridad para asegurar la solvencia del asegurador, etc. debe ser realizado "a ojo". No va a ser éste el enfoque que utilizaremos, sino que utilizaremos el denominado enfoque estocástico (en nuestro caso sería más propio decir borroso-estocástico). Un análisis de la fijación de primas en los seguros de vida –que será el objeto de esta tesis- y en general, de valoración actuarial a través de este principio puede ser encontrado, de un modo formal y sistemático en Wolthuis y Van Hoek (1986), suponiéndose que los tipos de actualización son ciertos. Asimismo, bajo este principio enfocan el estudio de los seguros de vida los manuales de matemática de los seguros de vida más utilizados actualmente, entre los que podemos citar: Gerber (1995), Bowers *et al.* (1986) o Villalón (1998).

## 1.5. ENFOQUE BORROSO ESTOCÁSTICO EN LA VALORACIÓN DE LOS SEGUROS DE VIDA

### 1.5.1. Breve análisis del enfoque estocástico en la valoración actuarial con certeza en el tipo de valoración

En el enfoque estático, aunque manejamos probabilidades de fallecimiento y supervivencia, estas nociones tienen el significado de frecuencias que se realizarán con certeza, lo cual puede ser cierto en una cartera de pólizas del mismo tipo muy elevada, es decir, compuestos por gran número de individuos de la misma edad y sexo asegurados, suscritas en un mismo momento temporal y con las mismas prestaciones aseguradas, lo cual, rara vez se da en la práctica.

Suponiendo un contexto de certeza en el interés de valoración a utilizar, tiempo discreto y anual, esta conceptualización en el análisis de los seguros de vida parte de la variable aleatoria $T_x$, o número de años enteros de vida para una cabeza de edad x, ya descrita en el apartado 1.2. Ya hemos comprobado que no habría ningún problema en discretizarla en periodos de tiempo más pequeños. A partir de esta variable aleatoria se define la variable aleatoria "pérdida para el asegurador" que es una función de $T_x$ y que notamos $L_{T_x}$ o simplemente L. Esta se construye a través del espacio de sucesos elementales $\Omega$ de $T_x$, de forma que L: $t\in\Omega\rightarrow L_t$, siendo $L_t$ la pérdida del asegurador si el asegurado sobrevive t años enteros. $L_t$ se calcula como el valor actual de las prestaciones satisfechas por el asegurador una vez deducidas las primas percibidas por éste, en el caso en que el asegurado sobreviva t años enteros desde el origen de la operación. Por supuesto, $\text{Prob}[L=L_t]={}_{t|}q_x$. Las ventajas de este enfoque frente al tradicional son:

a) El valor de las primas que se determinan utilizando el principio de equivalencia estático, que se suele denominar como prima pura, se obtiene con este enfoque sin más que plantear E[L]=0. Así, los resultados que se obtienen con el principio de equivalencia estático se pueden obtener también con éste, siendo pues, el primero, un caso particular del segundo.

b) Permite al asegurador obtener más información sobre el riesgo de desviaciones de siniestralidad ya que se manejan o se pueden inferir funciones de cuantía, de distribución, varianzas y desviaciones estándar, etc. del valor actual de las pérdidas que puede sufrir con la cartera vigente.

c) Lo comentado anteriormente nos permitirá fijar recargos para desviaciones de siniestralidad en las primas de los asegurados de forma más precisa, aplicando otros principios a parte del de la esperanza matemática. Entre estos, podemos mencionar el principio de la desviación estándar, el de la varianza y, el cual será especialmente considerado por nosotros, el principio del percentil, basado en fijar un recargo que reduzca a un nivel ε prefijado la probabilidad de pérdida de la compañía. Por supuesto, al partirse de una descripción completa de la variable borroso-aleatoria pérdida para la cabeza asegurada, mediante simulación estocástica o aplicando el Teorema Central del Límite, se pueden obtener dichos recargos, teniéndose en cuenta el tamaño del colectivo asegurado. Evidentemente, a mayor tamaño del colectivo asegurado, el recargo para desviaciones en la mortalidad deberá ser menor y deberá tender a cero cuando el colectivo tiende a infinito.

### 1.5.2. Enfoque borroso estocástico en la valoración de los seguros de vida y la utilización de variables borroso aleatorias

Dado que partimos de unos tipos de interés de valoración definidos por números borrosos, los valores actuales de las pérdidas del asegurador para cada uno de los periodos en que puede fallecer la cabeza asegurada vendrán dados por un número borroso. Así pues, en este caso, la variable aleatoria pérdida es una variable borroso aleatoria, esto es, una variable aleatoria cuyas realizaciones son difusas. Ésta será notada como $\tilde{L}$, y es el resultado de efectuar la aplicación $\tilde{L}: t \in \Omega \rightarrow \tilde{L}_t$, siendo $\tilde{L}_t$ el número borroso correspondiente a la diferencia entre las prestaciones percibidas por el asegurado y las primas que ha satisfecho si fallece durante el t-ésimo año del contrato. Por supuesto, $\tilde{L}_t$ será un número borroso que podemos representar como:

$$\tilde{L}_t = \left\{x / \mu_{\tilde{L}_t}(x)\right\} = \left\{L_{t\alpha} = \left[L_t^1(\alpha), L_t^1(\alpha)\right] / 0 \leq \alpha \leq 1\right\}$$

y cuya probabilidad de ocurrencia asociada es $_{t|}q_x$

En esta parte de la tesis analizaremos como fijar la prima única, sin tener en cuenta los recargos por gastos de gestión, de forma que el asegurador limite su probabilidad de pérdida para diversas estructuras de prestaciones típicas en la práctica aseguradora, siendo asimismo éstas unitarias. Sin embargo, los resultados que obtengamos pueden ser generalizados al supuesto de cuantías constantes, y sin mucho problema, al supuesto de prestaciones variables en progresión geométrica; en este último caso, con pequeñas modificaciones. En cualquier caso, no contemplaremos que las cuantías aseguradas puedan ser borrosas, aunque ello podría ocurrir por ejemplo en un seguro capital diferido con reembolso de primas en el caso en que el asegurado falleciera antes del devengo de dicho capital de supervivencia, o si las cuantías aseguradas puedan revalorizarse en función de la inflación o de algún índice económico, aunque este supuesto está implícitamente contemplado en la fijación del interés de valoración.

Asimismo sólo analizaremos la fijación de primas únicas pagaderas en el inicio del contrato y no periódicas. No obstante, con la metodología que proponemos, creemos que la relajación de esta hipótesis debe ser motivo de posteriores investigaciones, que en cualquier caso, quedan fuera de los objetivos y extensión de esta tesis.

Por otra parte, los métodos que propondremos son también aplicables sin excesivas modificaciones a la determinación de las provisiones matemáticas asociadas a un seguro ya iniciado y donde únicamente quedan prestaciones pendientes a efectuar por el asegurador. Bastará asimilar la provisión matemática a la prima pura sin recargos por desviaciones de la mortalidad y el margen de solvencia con que se deban complementar las provisiones matemáticas con el recargo aplicado al asegurado sobre la prima pura para limitar la probabilidad de quiebra del asegurador.

Para realizar el análisis propuesto deberemos tener en cuenta la existencia de dos riesgos para el asegurador una vez se ha formalizado el contrato, y los cuales se han analizado anteriormente, y que tienen diversa naturaleza: el riesgo de supervivencia o mortalidad (es evidente que una supervivencia distinta a la prevista por el asegurador puede poner en peligro su solvencia), y el riesgo de interés, que, tras lo comentado, posiblemente sea mejor denominarla como incertidumbre en el tipo de interés.

Respecto al riesgo de mortalidad, éste disminuye aumentando el número de asegurados, ya que, según la ley de los grandes números, la frecuencia relativa de los años de supervivencia en un colectivo de individuos de edad x, debe tender a su probabilidad a medida que aumentamos dicho colectivo.

En lo referente al tratamiento de éste, seguiremos el esquema propuesto en Alegre y Claramunt (1988) en el que se analizaba la fijación de las primas únicas para un plan de pensiones de prestación definida, distinguiéndose entre la prima pura y un recargo de seguridad. Por otra parte, en este trabajo, los autores suponían que el riesgo de quiebra para el asegurador únicamente venía dado por las desviaciones que en la siniestralidad se pudieran dar, siendo el tipo de interés cierto. En dicho trabajo se diferenciaba, entre tres casos posibles:

a) La existencia de un único partícipe.
b) Existe un colectivo elevado de partícipes con la misma edad y cuantías aseguradas para la renta de supervivencia.
c) Para cada cuantía y edad existe un número muy limitado de partícipes.

Dada la importancia del tamaño del colectivo para decrementar el riesgo de mortalidad, y siguiendo el mencionado trabajo de Alegre y Claramunt, nosotros también distinguiremos entre:

a) El colectivo asegurado esté compuesto sólo por un individuo de edad x. Si bien este supuesto no tiene gran trascendencia práctica, será de interés ya que nos permitirá exponer de forma clara la metodología que seguiremos en el resto del trabajo.
b) La cartera está compuesta por un colectivo elevado de N asegurados de edad x, con idénticas prestaciones pactadas a lo largo de la vida del contrato y con pólizas suscritas en el mismo instante temporal. Este supuesto permite utilizar la hipótesis clásica de la teoría del riesgo, basada en el Teorema Central del Límite, la cual deberá ser adaptada a la circunstancia de que el valor actual de las prestaciones presenta un componente difícilmente asumible como cierto o incluso, como aleatorio, y provocado por la incorporación de la incertidumbre sobre los rendimientos futuros.
c) Nos hallemos ante un colectivo reducido de individuos para cada edad y prestaciones aseguradas. En este caso no será factible aplicar el Teorema Central del Límite, siendo entonces necesario utilizar métodos de simulación estocástica. La metodología que nosotros utilizaremos es la propuesta por Pitacco (1986), utilizada por ejemplo, en Sarrasí (1995) en el estudio de la cobertura de los márgenes de solvencia en los seguros colectivos.

El segundo tipo de riesgo, que hemos modelizado a través de números borrosos, viene provocado por el carácter incierto del rendimiento que el asegurador obtendrá con la cartera activa destinada a cubrir sus obligaciones. Cuando el asegurador pacta un seguro de vida asume también el riesgo de interés, es decir, el riesgo de incurrir en pérdidas debido a las variaciones en los rendimientos obtenidos con la inversión de las primas y provisiones de la compañía, bien porque se reduzcan los rendimientos financieros futuros previstos o bien porque dicha fluctuación afecte al valor de la cartera de inversiones. A este respecto, cuando debamos desfuzzyficar los resultados de las valoraciones realizadas, deberemos utilizar un método que permita reflejar la prudencia del asegurador respecto al interés a ofrecer. Nosotros, como ya fue comentado, proponemos como criterio el valor esperado de un número borroso, criterio que ya fue analizado en la primera parte de la tesis y en el subepígrafe 1.3.3.4. de esta parte.

Un incremento de la cartera de los asegurados implica incrementar en términos absolutos las posibles pérdidas que el asegurador puede sufrir en el caso en que haya sobrestimado al realizar el cálculo de la prima los rendimientos futuros que se pueden obtener con la cartera de activos financieros adquiridos con las primas ingresadas o que se ingresarán en el futuro. Por supuesto, ello no se soluciona ofreciendo un interés excesivamente prudente, ya que el producto ofrecido sería poco atractivo para el asegurado. En este caso, el peligro de la compañía de seguros será su desaparición por no ser capaz de ofrecer seguros competitivos respecto al resto de productos financieros existentes en el mercado. Evidentemente, el asegurador debe buscar un equilibrio entre la necesaria prudencia valorativa y el ofrecimiento de rentabilidades atractivas. Así, las repercusiones de ambos riesgos en la solvencia del asegurador al producirse un incremento de la cartera de los asegurados tienen distintos efectos, lo cual deberá reflejarse en los recargos que el asegurador debe aplicar para asegurar su solvencia.

El desarrollo de los sucesivos epígrafes que componen el resto de esta parte de la tesis se ha estructurado de la siguiente manera:

1) En primer lugar, analizaremos, suponiendo certeza en el tipo de interés, el valor actual de las estructuras actuariales más importantes como variables aleatorias. Los resultados obtenidos facilitarán sobremanera posteriores desarrollos.
2) Posteriormente analizaremos el valor actual de dichas estructuras actuariales, tomándose un tipo o unos tipos de interés borrosos. Así los valores actuales asociados a estas estructuras son variables borroso aleatorias. Algunos de los resultados obtenidos en certeza nos permitirán una mayor facilidad en el estudio en incertidumbre.
3) Acabaremos analizando la fijación de primas únicas en el caso en que las prestaciones aseguradas tengan alguna de las formas descritas en los anteriores apartados, y si el interés que se aplica para valorar el contrato es borroso. Asimismo, también ofreceremos instrumentos que en el nuevo ambiente, borroso y aleatorio, nos permitan analizar la solvencia del asegurador tras repercutir la prima. Como hemos comentado en párrafos precedentes, este análisis comprenderá tras supuestos: carteras con un único asegurado, carteras de pólizas homogéneas con un número de asegurados suficientes que permita aplicar el Teorema Central del Límite, y carteras homogéneas con un número de asegurados poco elevado, de forma que el Teorema Central del Límite no podrá ser aplicado.