CAPÍTULO 2:

ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON CERTEZA EN EL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN

A continuación describimos, desde un punto de vista estocástico, el valor actual de las principales estructuras actuariales asociadas al riesgo de fallecimiento o supervivencia de una sola cabeza, siendo estas unitarias. En concreto, las estructuras que analizaremos son:

a) Capital de fallecimiento
b) Capital de supervivencia
c) Seguro inmediato de vida entera
d) Seguro inmediato temporal
e) Seguro mixto o endowment
f) Renta vitalicia anticipada
g) Renta temporal anticipada

En todos los casos damos una expresión para las mismas de su esperanza matemática, la cual se puede obtener aplicando el principio de equivalencia estática, la varianza y la desviación estándar. Posteriormente analizamos el comportamiento de estas medidas de las variables aleatorias respecto al tipo de interés, ya que estos parámetros son funciones del tipo o los tipos de interés de valoración, puesto que las realizaciones de dichas variables aleatorias lo son. El análisis del comportamiento de estos parámetros respecto al tipo de interés de valoración será de gran utilidad cuando debamos definirlos para tipos de descuento borrosos, ya que una forma natural de inferirlos será operar con α-cortes, siendo necesario para ello obtener los extremos de los mismos, es decir, el máximo y el mínimo de dichos parámetros para un conjunto de intereses (variables independientes) que viene dado a través de un intervalo de confianza nítido. Para todas las estructuras trataremos dos supuestos:

a) Uno más general, en el cual se supone que la ETTI de referencia en la valoración no es plana, y por tanto, los tipos de interés que se aplican a cada vencimiento no tienen porque ser iguales.
b) El caso en que se tome como interés de valoración un único interés, es decir, la ETTI es plana, lo cual correspondería a aplicar el tipo de interés que por término medio el asegurador espera obtener con la inversión de las primas a lo largo de toda la vida del contrato.

2.1. CAPITAL DE FALLECIMIENTO

En este caso, el asegurador paga al asegurado una unidad monetaria si este último fallece durante el t-ésimo año contado desde el momento de realizarse la valoración. Suponiendo que la unidad monetaria es pagadera al final de dicho año, la función de cuantía que describe su valor actual es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1 - {}_{t|}q_x \end{cases}$$

Hallamos la esperanza matemática, simbolizada habitualmente como ${}_tB_x$, y que es el factor de descuento financiero-actuarial de un capital de fallecimiento utilizado en el enfoque estático de valoración de los seguros de vida. También damos la expresión de la varianza de dicha variable aleatoria, V[Z] y la desviación estándar D[Z]:

$$E[Z] = {}_tB_x = f_{t+1}\,{}_{t|}q_x\ ;\ V[Z] = (f_{t+1})^2\,{}_{t|}q_x\,(1 - {}_{t|}q_x)\ ;\ D[Z] = f_{t+1}\sqrt{{}_{t|}q_x\,(1 - {}_{t|}q_x)}$$

Si el tipo de interés es constante a lo largo de la vida del contrato, la expresión de Z en este caso es:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1 - {}_{t|}q_x \end{cases}$$

En este supuesto, las expresiones de la esperanza matemática, de la varianza y de la desviación estándar que obtenemos son:

$${}_tB_x = (1+i)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\ ; V[Z] = (1+i)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x\,(1 - {}_{t|}q_x)\ ;\ D[Z] = (1+i)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x\,(1 - {}_{t|}q_x)}$$

2.2. CAPITAL DE SUPERVIVENCIA

En este caso devenga una cuantía unitaria si un asegurado de x años de edad sobrevive t años después, y nada en caso contrario. La función de cuantía del valor actual de este capital es:

$$Z = \begin{cases} f_t & \text{con} \quad {}_tp_x \\ 0 & \text{con} \quad {}_tq_x \end{cases}$$

Su esperanza matemática, es simbolizada en la literatura actuarial como ${}_tE_x$, y es el factor de actualización de una cuantía de supervivencia pagadera dentro de t años, cuando se utiliza el enfoque estático en la valoración de los seguros de vida. Asimismo, también damos el valor de su varianza, y de su desviación estándar, de forma que:

$$E[Z]={}_tE_x= f_t\,{}_tp_x\,;\; V[Z] = (f_t)^2\cdot{}_tp_x\cdot{}_tq_x \text{ y } D[Z]= f_t\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}$$

Si el interés a aplicar en cada periodo es constante, la función de cuantía de Z es:

$$Z=\begin{cases}(1+i)^{-t} & \text{con } {}_tp_x\\ 0 & \text{con } {}_tq_x\end{cases}$$

siendo entonces la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar:

$$E[Z]={}_tE_x= (1+i)^{-t}\,{}_tp_x\,;\; V[Z]=(1+i)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x \text{ y } D[Z]=(1+i)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}$$

2.3. SEGURO INMEDIATO DE VIDA ENTERA

Una estructura tipo seguro de vida entera inmediato, que únicamente puede venir asociada a las prestaciones de un seguro que cubra la contingencia de fallecimiento, consiste en que en el momento de su fallecimiento el asegurado tiene derecho a percibir un capital (unitario en nuestro análisis) al final de dicho año. En este caso, el valor actual de esta estructura es una variable aleatoria con la siguiente estructura:

$$Z = f_{t+1} \quad \text{con } {}_{t|}q_x \quad t=0,1,\ldots,w-x-1$$

La esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria son:

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1}\,{}_{t|}q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tB_x = A_x \text{ y } V[Z]= \sum_{t=0}^{w-x-1}(f_{t+1})^2\,{}_{t|}q_x-(A_x)^2$$

Obteniéndose, por supuesto, D[Z] como la raiz cuadrada de V[Z].

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del asegurado sea constante, obtenemos que la variable aleatoria Z, la esperanza y la varianza asociadas son:

$$Z = (1+i)^{-(t+1)} \quad \text{con } {}_{t|}q_x \; t=0,1,\ldots,w-x-1$$

donde,

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1}(1+i)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x = A_x\,;\; V[Z]= \sum_{t=0}^{w-x-1}(1+i)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x-(A_x)^2\,;\; D[Z]=\sqrt{V[Z]}$$

2.4. SEGURO INMEDIATO TEMPORAL

También es una estructura que únicamente está asociada al subproceso de prestaciones de un seguro. Desde el momento en que se valora la estructura hasta el fallecimiento de la cabeza asegurada de edad x, si este se produce dentro de los n años para los cuales la contingencia de fallecimiento está cubierta, el asegurado tiene derecho a percibir un capital unitario al final del año de su fallecimiento. En el caso en que el asegurado sobreviva n años, éste no percibe nada. La variable aleatoria Z que describe el valor de las prestaciones es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t = 0,1,...,n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Siendo entonces la esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria:

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1\ t|}q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t B_x = {}_n A_x \text{ y } V[Z]= \sum_{t=0}^{n-1} (f_{t+1})^2\ {}_{t|}q_x - ({}_n A_x)^2$$

Asimismo, la desviación estándar de Z se obtendrá como raiz cuadrada de V[Z].

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del asegurado sea constante, obtenemos que la variable aleatoria Z, su esperanza y su varianza son:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t = 0,1,..,n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-(t+1)}\ {}_{t|}q_x = {}_n A_x \text{ y } V[Z]= \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-2(t+1)}\ {}_{t|}q_x - ({}_n A_x)^2$$

2.5. SEGURO MIXTO O ENDOWMENT

Esta estructura combina un seguro temporal inmediato de duración n años con un capital de supervivencia con el mismo vencimiento. De esta forma, la variable aleatoria correspondiente al valor de las prestaciones viene dada por la convolución de las variables aleatorias que cuantifican el valor actual de las prestaciones de cada tipo de seguro. Así, Z para este caso es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t = 0,1,...,n-1 \\ f_n & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Siendo entonces la esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria:

$$E[Z] = {}_nA_x + {}_nE_x \text{ y } V[Z]= \sum_{t=0}^{n-1} (f_{t+1})^2 \, {}_{t|}q_x + (f_n)^2 \, {}_np_x - ({}_nA_x + {}_nE_x)^2$$

Obteniéndose, por supuesto, $D[Z]=\sqrt{V[Z]}$.

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del contrato sea constante, obtenemos la función de cuantía, la esperanza y la varianza del valor actual de prestaciones a través de la variable aleatoria Z como:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-t+1} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t = 0,2,\ldots,n-1 \\ (1+i)^{-n} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

Hallándose la media y la varianza de dicha variable aleatoria sin más que sustituir f_t por $(1+i)^{-t}$.

2.6. RENTAS VITALICIAS ANTICIPADAS

Esta estructura puede estar asociada, tanto a un subproceso de prestaciones como a uno de primas. Según esta estructura, se devenga, en caso de suponerse cuantías unitarias, una unidad monetaria a principio de cada año si el asegurado –de edad x en el momento de realizarse la valoración- sobrevive en dicha fecha. La variable aleatoria Z que describe el valor actual de los capitales asociados a esta estructura es:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_dq_x \\ \sum_{j=d}^{t} f_j = {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t = d, d+1,\ldots, w-x-1 \end{cases}$$

Siendo d el diferimiento de la renta. Evidentemente, si el asegurado fallece durande los primeros d años del contrato, dicha renta no devenga y el valor actual de la misma es nulo.

Respecto a los momentos de la variable aleatoria Z, observamos que le esperanza matemática de su valor actual es:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^{t} f_j \right] {}_{t|}q_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t \sum_{j=t}^{w-x-1} {}_{j|}q_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t \, {}_tp_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tE_x = {}_{d|}\ddot{a}_x$$

En el caso, muy habitual, en que no exista diferimiento (d=0), es decir, que la renta de supervivencia sea inmediata, la esperanza matemática es notada como $\ddot{a}_x$.

La varianza de dicha variable aleatoria, se obtiene como:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j\right]^2 {}_{t|}q_x - ({}_{d|}\ddot{a}_x)^2$$

Desarrollamos a continuación la expresión de la varianza, de forma que el resultado que obtengamos nos será de utilidad en posteriores análisis:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j\right]^2 {}_{t|}q_x - \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t\,{}_t p_x\right]^2 = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_{t|}q_x \sum_{j=d}^{t}\sum_{r=d}^{t} f_j f_r - \sum_{t=d}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{w-x-1} f_t f_j\,{}_t p_x\,{}_j p_x =$$

$$= \sum_{t=d}^{w-x-1}[f_t]^2\,{}_t p_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1} {}_{t|}q_x \sum_{j=d+1}^{t} f_j \sum_{r=d}^{j-1} f_r - \sum_{r=d}^{w-x-1}[f_t]^2[{}_t p_x]^2 - 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j\,{}_t p_x\,{}_j p_x =$$

$$= \sum_{t=d}^{w-x-1}[f_t]^2\,{}_t p_x(1-{}_t p_x) + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j \sum_{r=t}^{w-x-1} {}_{r|}q_x - 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t\,{}_t p_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j\,{}_j p_x =$$

$$= \sum_{t=d}^{w-x-1}[f_t]^2\,{}_t p_x\,{}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t\,{}_t p_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j(1-{}_j p_x) = \sum_{t=d}^{w-x-1}[f_t]^2\,{}_t p_x\,{}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j\,{}_t p_x(1-{}_j p_x)$$

La interpretación de esta segunda expresión de la varianza de Z, es la consecuéncia de que Z puede conceptualizarse también como la suma de w-x-d capitales de supervivencia como los estudiados en el apartado 2.2. Así, si denominamos como Z al valor actual de la renta de supervivencia vitalicia y como Z_t a la variable aleatoria valor actual del capital de supervivencia con vencimiento en el t-ésimo año con t=d,d+1,…,w-x-1, es immediato comprobar que:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} V[Z_t] + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$$

Por una parte, ya conocemos que $V[Z_t] = [f_t]^2\,{}_t p_x\,{}_t q_x$.

y por otra parte, si t>j:

$$C[Z_t, Z_j] = E[Z_t, Z_j] - E[Z_t]\,E[Z_j] = f_t \cdot f_j \cdot {}_t p_x - f_t \cdot f_j \cdot {}_t p_x \cdot {}_j p_x = f_t \cdot f_j \cdot {}_t p_x \cdot (1-{}_j p_x)$$

el sentido de la expresión obtenida queda explicado.

Asimismo, D[Z] se obtendrá como $\sqrt{V[Z]}$.

Si el interés que rige en la operación es constante a lo largo de toda la vida del contrato, entonces podemos observar que:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i} & \text{con } {}_{t|}q_{x} \quad t = d, d+1, \ldots, w-x-1 \end{cases}$$

En este caso ${}_{d|}\ddot{a}_{x}$ es:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t}(1+i)^{-j}\right]{}_{t|}q_{x} = \sum_{t=d}^{w-x-1}{}_{t}E_{x} = {}_{d|}\ddot{a}_{x}$$

Siendo asimismo la varianza de Z:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t}(1+i)^{-j}\right]^{2}{}_{t|}q_{x} - ({}_{d|}\ddot{a}_{x})^{2}$$

O alternativamente:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1}(1+i)^{-2t}\,{}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{x} + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}(1+i)^{-t-j}\,{}_{t}p_{x}(1-{}_{j}p_{x})$$

2.7. RENTAS TEMPORALES ANTICIPADAS

La estructura de esta renta, puede estar asociada tanto a un subproceso de primas como de prestaciones, al igual que ocurría para el supuesto de rentas vitalicias. En este caso, si el asegurado sobrevive al diferimiento de la renta, se devenga una cuantía de 1 unidad monetaria durante n años al principio de cada año, mientras la cabeza asegurada se mantenga con vida. En este caso, la variable aleatoria discreta que describe el valor de la renta es:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ \sum_{r=d}^{t} f_{t} = {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|} & \text{con } {}_{t|}q_{x} \quad t = d, d+1, \ldots, d+n-1 \\ \sum_{r=d}^{d+n-1} f_{t} = {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{con } {}_{d+n}p_{x} \end{cases}$$

Así, la esperanza matemática de Z, ${}_{d|n}\ddot{a}_{x}$ se obtiene como:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[\sum_{r=d}^{t} f_{t}\right]{}_{t|}q_{x} + \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_{t}\right]{}_{d+n}p_{x} = \sum_{t=d}^{d+n-1} f_{t}\,{}_{t}p_{x} = \sum_{t=d}^{d+n-1}{}_{t}E_{x} = {}_{d|n}\ddot{a}_{x}$$

la cual, en el caso particular de que la renta sea inmediata, d=0, se nota simplemente como ${}_{n}\ddot{a}_{x}$.

Por otra parte, la varianza se calcula como:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t\right]^2 {}_{d+n}p_x - \left({}_{d|n}\ddot{a}_x\right)^2$$

Como en el caso de las rentas vitalicias, nos va a ser de utilidad en posteriores desarrollos reexpresar V[Z] como la varianza que se obtiene por la suma de los capitales de supervivencia que forman Z, de forma que:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[\sum_{j=d}^{t} f_j\right]^2 {}_{d+n}p_x - \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t\, {}_t p_x\right]^2 = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_{t|}q_x \sum_{j=d}^{t}\sum_{r=d}^{t} f_j f_r +$$

$$+ \sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{d+n-1} f_t f_j\, {}_{d+n}p_x - \sum_{t=d}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{d+n-1} f_t f_j\, {}_t p_x\, {}_j p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_{t|}q_x \sum_{j=d}^{t}\left(f_j\right)^2 + \sum_{t=d}^{d+n-1}\left(f_t\right)^2 {}_{d+n}p_x +$$

$$+ 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1} {}_{t|}q_x \sum_{j=d+1}^{t} f_j \sum_{r=d}^{j-1} f_r + 2\, {}_{d+n}p_x \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_j \sum_{j=d}^{t-1} f_j - \sum_{r=d}^{d+n-1}\left[f_t\right]^2\left[{}_t p_x\right]^2 - 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j\, {}_t p_x\, {}_j p_x =$$

$$= \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t\right]^2 \sum_{j=t}^{d+n-1} {}_{j|}q_x + {}_{d+n}p_x \sum_{r=d}^{d+n-1}\left[f_t\right]^2 + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j \sum_{r=t}^{w-x-1} {}_{r|}q_x + 2\, {}_{d+n}p_x \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j -$$

$$- \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t\right]^2\left({}_t p_x\right)^2 - 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t\, {}_t p_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j\, {}_j p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t\right]^2 {}_t p_x\, {}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j\, {}_t p_x (1 - {}_j p_x)$$

Como siempre, la desviación estándar se obtendrá como raiz cuadrada de la varianza.

Asimismo, si se utiliza un tipo de interés constante en la valoración de esta estructura actuarial, observamos que:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i} & \text{con } {}_{t|}q_x \qquad t = d, d+1, \ldots, d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} & \text{con } {}_{d+n}p_x \end{cases}$$

Obteniéndose entonces E[Z] y V[Z] sin más que sustituir f_t por $(1+i)^{-t}$ en las expresiones halladas anteriormente. En concreto:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[\sum_{j=d}^{t}(1+i)^{-j}\right]{}_{t|}q_x = \sum_{j=d}^{d+n-1} {}_j E_x = {}_{d|n}\ddot{a}_x$$

Siendo asimismo la varianza de Z:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1}\left[\sum_{j=d}^{t}(1+i)^{-j}\right]^2 {}_{t|}q_x + \sum_{t=d}^{d+n-1}(1+i)^{-t}\, {}_{d+n}p_x - \left({}_{d|n}\ddot{a}_x\right)^2$$

O alternativamente:

$$V[Z]=\sum_{t=d}^{d+n-1}(1+i)^{-2t}\,{}_t p_x\,{}_t q_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}(1+i)^{-t-j}\,{}_t p_x(1-{}_j p_x)$$

2.8. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MOMENTOS REPRESENTATIVOS DEL VALOR ACTUAL DE LAS DIFERENTES ESTRUCTURAS ACTUARIALES RESPECTO AL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN

A continuación analizamos el crecimiento o decrecimiento de los momentos más importantes de las estructuras actuariales estudiadas respecto el tipo de interés, lo cual nos será de utilidad cuando calculemos dichos momentos en el caso en que el interés de valoración sea borroso a través de sus α-cortes, y nos encontremos entonces ante variables borroso aleatorias y no simplemente ante variables aleatorias. Únicamente realizaremos el estudio para la esperanza matemática y la varianza, ya que la desviación estándar es una transformación monótona creciente de la segunda, y por tanto, lo comentado para la varianza puede hacerse extensivo a la desviación estándar.

Respecto a la esperanza matemática de las estructuras básicas –capital de fallecimiento y capital de supervivencia-, es evidente que éstas son una función decreciente respecto a los tipos (al tipo) de interés de valoración, y por tanto, la esperanza matemática del resto de estructuras, que se hallan como suma de las esperanzas matemáticas de las dos primeras estructuras comentadas, serán también funciones monótonas decrecientes respecto al tipo o los tipos de interés de valoración.

También se puede comprobar que la varianza, y por tanto, la desviación estándar, son monótonas decrecientes respecto al interés o intereses de valoración para los capitales de fallecimiento y de supervivencia. Si denominamos como V[Z]’ a la derivada parcial de la varianza respecto al tipo de interés que se aplica para un determinado vencimiento (tipo spot) o durante un periodo determinado (tipo forward), y como f'_t a dicha derivada parcial para el factor de actualización podemos observar que:

a) Para el capital de fallecimiento:

$$V[Z]' = 2f_{t+1}\cdot f'_{t+1}\cdot{}_{t|}q_x\cdot(1-{}_{t|}q_x)$$

Es inmediato comprobar que todos los factores que componen la derivada de la varianza respecto al interés son positivos excepto f'_{t+1}, que es negativo, por lo que V[Z]'≤0 y por tanto decreciente respecto al tipo de interés.

b) Para el capital de supervivencia:

$$V[Z]' = 2f_t \cdot f'_t \cdot {}_tp_x \cdot {}_tq_x$$

Igualmente, es inmediato comprobar que todos los factores que componen la derivada de la varianza respecto al interés son positivos excepto f'_t, que es negativo, por lo que en este caso V[Z]'≤0 de nuevo y decreciente.

Respecto a la varianza de las rentas, sean temporales o vitalicias, podemos asimismo comprobar que también son decrecientes respecto al tipo de interés de valoración. Si denominamos como Z al valor actual de la renta de supervivencia, sea temporal o vitalicia, ya hemos comentado que ésta se halla como la suma de m capitales de supervivencia, con m=w-x-d si la renta es vitalicia y m= n si es temporal, siendo la expresión de la varianza que se obtiene a partir de esta conceptualización, la que fue puesta de manifiesto en los apartados 2.6 y 2.7. De esta forma, la varianza de una renta, si notamos como Z_t el valor actual del t-ésimo capital de supervivencia que la compone es:

$$V[Z] = \sum_{t=1}^{m} V[Z_t] + 2\sum_{t=2}^{m}\sum_{j=1}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$$

Si identificamos como $A = \sum_{t=1}^{m} V[Z_t]$ y $B = 2\sum_{t=2}^{m}\sum_{j=1}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$, observamos que:

$$V[Z] = A + B, \text{ y por tanto, } V[Y]' = A' + B'$$

Es inmediato comprobar que A'≤0, ya que sus sumandos son decrecientes respecto al tipo de interés de valoración, tal como hemos demostrado. Respecto a B', bastará con demostrar que un sumando cualquiera $C[Z_t, Z_j]$ donde t>j es decreciente respecto al tipo o los tipos de interés de valoración. Estudiemos el signo de su derivada.

Como:

$$C[Z_t, Z_j] = f_t \cdot f_j \cdot {}_tp_x \cdot (1 - {}_jp_x)$$

y siendo $C[Z_t, Z_j]'$ la derivada de la covarianza respecto a uno de los tipos de actualización con que descontamos los flujos de la estructura se obtiene:

$C[Z_t, Z_j]' = (f'_t f_j + f_t f'_j)\, {}_tp_x (1 - {}_jp_x)$

Y como ${}_tp_x (1 - {}_jp_x) \geq 0$ ya que $1 - {}_jp_x \geq 0$ y $[f'_t f_j + f_t f'_j] \leq 0$, ya que f'_t y $f'_j \leq 0$, es inmediato comprobar que $C'[Z_t, Z_j] \leq 0$, y por tanto $B' \leq 0$ y $V[Z]' \leq 0$.

Como a continuación observaremos, para los seguros de vida y el seguro mixto, el comportamiento de la varianza, y por tanto, de la desviación estándar respecto a los tipos de interés de valoración no es monótono, lo cual tendrá implicaciones importantes cuando analicemos la varianza o la desviación estándar de las variables aleatorias asociadas a dichas estructuras cuando los intereses de valoración vengan dados a través de números borrosos.

Para los seguros de vida entera, podemos comprobar que si los intereses (interés) a aplicar a lo largo de toda la vida del contrato tienden a infinito, la varianza tiende a cero. Ello es debido a que todas las realizaciones de la variable aleatoria valor actual tienden a cero, y por tanto, el valor actual de las prestaciones es el número cierto 0, no existiendo pues dispersión. Por otra parte, si el tipo o los tipos a aplicar durante toda la vida del contrato tienden a cero, la varianza vuelve a tender nuevamente a cero, ya que todas las realizaciones de Z tienden a 1, convirtiéndose pues el valor actual en una variable aleatoria degenerada, con varianza cero. Asimismo, si se aplica un único interés durante toda la vida del contrato debe existir, al menos, un único máximo relativo de la varianza respecto al interés de actualización para $i \in (0, \infty)$.

Analizamos a continuación la existencia de valores del interés (único) de actualización que cumplan la condición de primer orden de optimalidad local. Para ello partimos de la expresión de la varianza:

$$V[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x - (A_x)^2 = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-(t+1)}\, {}_{t|}q_x \right)^2 =$$

$$= \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{w-x-1} (1+i)^{-t-j-2}\, {}_{t|}q_x\, {}_{j|}q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x -$$

$$- \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} \left({}_{t|}q_x\right)^2 - 2 \sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (1+i)^{-t-j-2}\, {}_{t|}q_x\, {}_{j|}q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2t-2}\, {}_{t|}q_x \left(1 - {}_{t|}q_x\right) -$$

$$- 2 \sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (1+i)^{-t-j-2}\, {}_{t|}q_x\, {}_{j|}q_x$$

Así, y dado que la condición necesaria de optimalidad local de i es $\dfrac{dV[Z]}{di} = 0$:

$$\frac{dV[Z]}{di} = -2\sum_{t=0}^{w-x-1}(t+1)(1+i)^{-2t-3}\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right) + 2\sum_{t=1}^{w-x-1}\sum_{j=0}^{t-1}(t+j+2)(1+i)^{-t-j-3}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x$$

e igualando a cero la derivada, se observa, que los óptimos locales deben cumplir:

$$\sum_{t=1}^{w-x-1}\sum_{j=0}^{t-1}(t+j+2)(1+i)^{-t-j-3}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1}(t+1)(1+i)^{-2t-3}\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right) = 0$$

Si realizamos el cambio de variable $\frac{1}{1+i} = x$, deberemos evaluar el número de raices del polinomio:

$$\sum_{t=1}^{w-x-1}\sum_{j=0}^{t-1}(t+j+2)x^{t+j+3}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1}(t+1)x^{2t+3}\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right) = 0$$

Y tras sacar factor común en la expresión anterior, esta queda reescrita como:

$$x^3\left[\sum_{t=1}^{w-x-1}\sum_{j=0}^{t-1}(t+j+2)x^{t+j}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1}(t+1)x^{2t}\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right)\right] = 0$$

Siendo una primera solución x=0 (multiplicidad 3) que supone que i tiende a ∞. El resto de raices, que son las que nos interesan, serán las resultantes de:

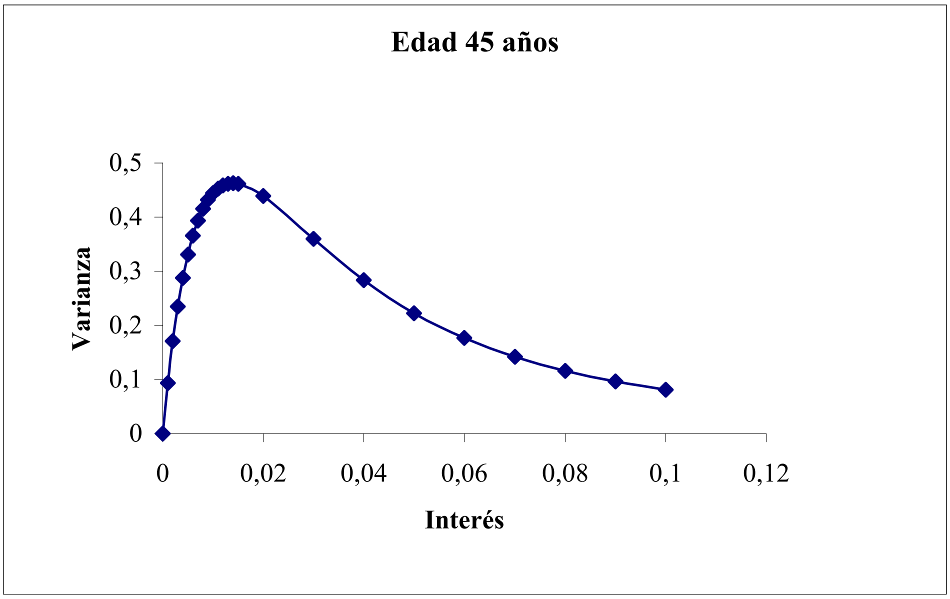
$$\sum_{t=1}^{w-x-1}\sum_{j=0}^{t-1}(t+j+2)x^{t+j}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1}(t+1)x^{2t}\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right) = 0$$

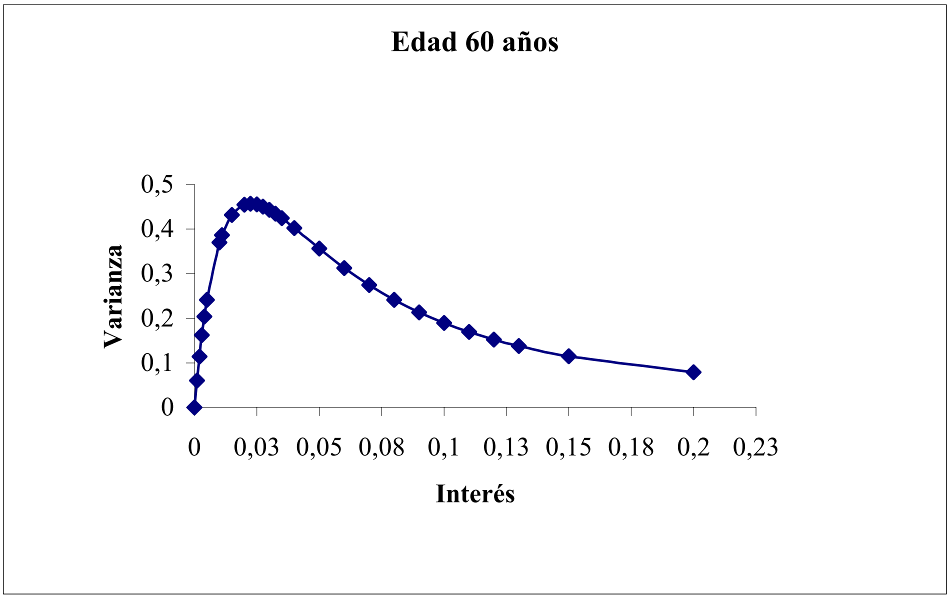
Para el sustraendo, (coeficientes con signo negativo), el conjunto de exponentes de x viene dado por: {0,2,...,2(w-x)-2}. Para el minuendo (coeficientes con signo positivo) el conjunto de exponentes es: {1,2,3,...,2(w-x)-3}. De esta forma, los coeficientes que multiplican a la variable independiente cuando su exponente es impar, tienen siempre un valor mayor que cero. Sin embargo, los coeficientes que multiplican a la variable independiente x con exponente par pueden tener un valor positivo o negativo. Discutimos a continuación es signo de dichos coeficientes, es decir, el de aquéllos que corresponden a x^{2t}, t=0,1,...,w-x-1. Para ello, debemos partir de la expresión de dichos coeficientes, que para un t dado es:

$$\sum_{\substack{k+j=2t \\ k,j\in\{0,1,\ldots,w-x-1\} \\ k\neq j}}(k+j+2)\,{}_{k|}q_x\,{}_{j|}q_x - (t+1)\,{}_{t|}q_x\left(1-{}_{t|}q_x\right)$$

Puede comprobarse que, en el supuesto extremo en que todos los coeficientes de las variables dependientes con exponente par fuesen negativos, pueden existir en este polinomio hasta 2(w-x-

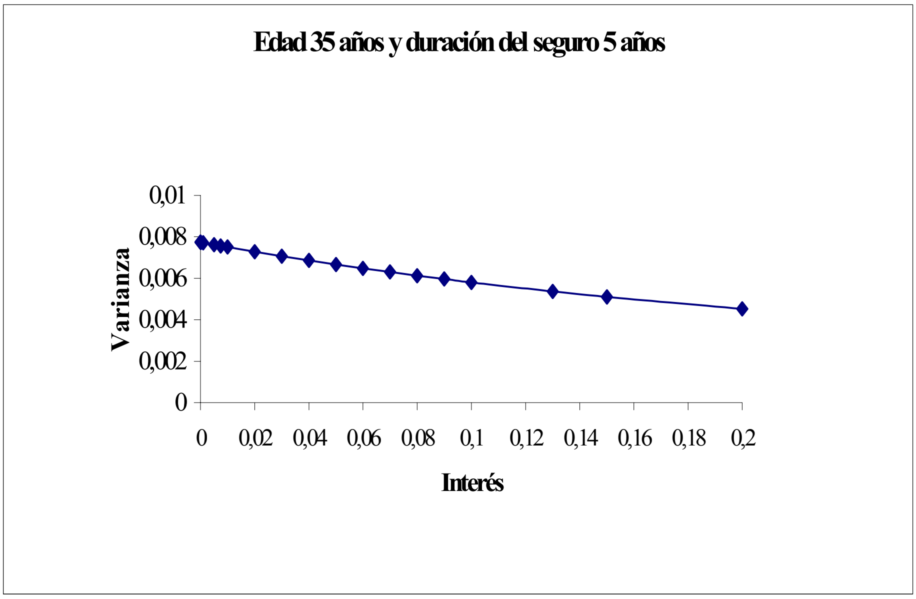
1) cambios de signo, por lo que pueden existir hasta 2(w-x-1) raices positivas de x. Sin embargo, las diversas simulaciones efectuadas nos indican que existe, para los valores de x que nos interesan a nosotros, $x\in(0,1]$, ya que $i\in[0,\infty)$, un único máximo local, y por tanto global, que notaremos como i^*. Por ejemplo, el comportamiento de la varianza del valor actual de un seguro de vida entera para un individuo de 45 años y para un asegurado de 60 años viene dado gráficamente por:

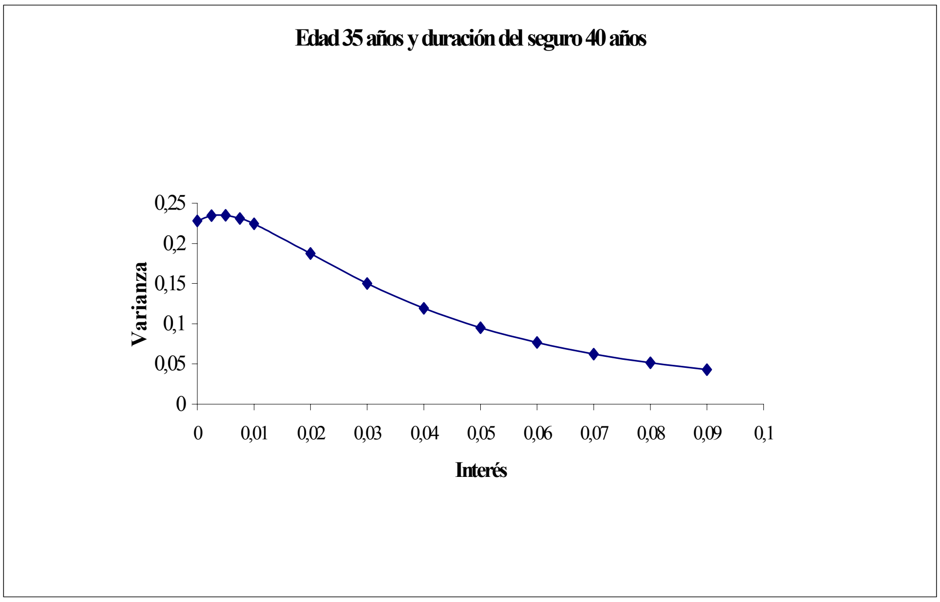




Así pues, en el primer caso, el máximo de la varianza se alcanza en un entorno de $i^*\approx 1'5\%$ en el interés técnico, mientras que para el asegurado de 60 años, el máximo se alcanza para un entorno del interés técnico de $i^*\approx 2'5\%$.

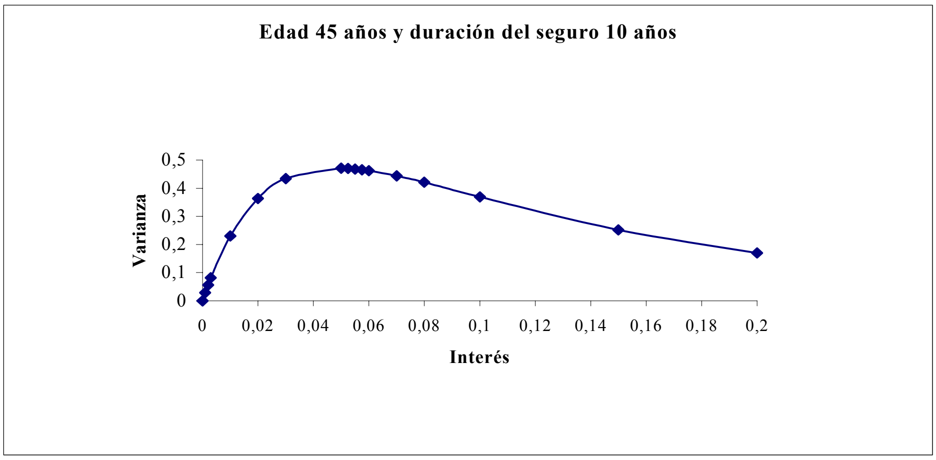
Asimismo, y dependiendo de la edad del individuo, en los seguros temporales tampoco podemos asegurar la monotonía de la varianza respecto a los tipos de interés de valoración. Lo que si que es comprobable es que cuando los tipos de interés de valoración tienden a infinito, la varianza del valor actual de las prestaciones tiende a cero, ya que todas las realizaciones tienden a cero. Si suponemos un único tipo de valoración para toda la duración del contrato, una duración "corta" del seguro, y para un único tipo de interés de valoración, si que parece observarse que el valor actual es una función monótona decreciente respecto al tipo de interés. Para duraciones "largas" si que existe un tramo creciente, un tipo de interés i^* para el cual la varianza alcanza el máximo valor y un tramo decreciente en la que tiende asintóticamente hacia cero. Sin embargo, y procediendo de forma análoga a lo realizado para la varianza del seguro de vida entera, podríamos observar que no se puede asegurar analíticamente la no existencia de valores del interés que cumplan la condición necesaria de optimalidad local, la existencia de uno, o la existencia de varios. Ello queda ilustrado en el comportamiento de la varianza que reflejan los siguientes gráficos para dos seguros temporales de duración 5 y 40 años respectivamente, siendo la edad de la cabeza asegurada 35 años.

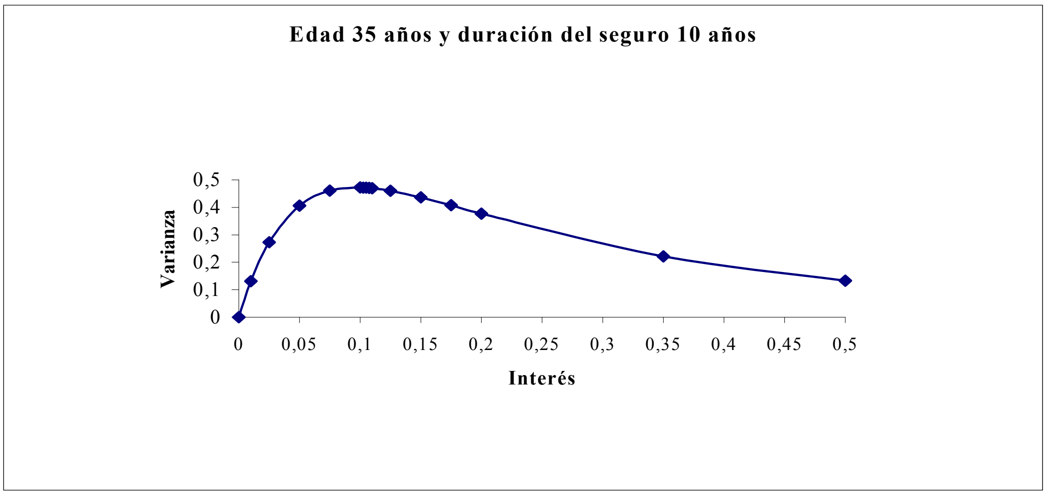




En el primer seguro, de corta duración, podemos observar que la varianza es decreciente respecto al tipo de interés. En el segundo caso, en el entorno de un tipo de interés de actualización i^* del 0'5% la varianza toma el máximo valor, siendo decreciente a partir del 0'5%.

Por otra parte, y en los seguros mixtos unitarios, el comportamiento de la varianza es similar a los seguros de vida entera. Es fácil demostrar que cuando los intereses de valoración tienden a cero (infinito) todas las realizaciones del valor actual de las prestaciones tienden a uno (cero), tratándose pues, de variables aleatorias degeneradas, es decir, con las mismas realizaciones con independencia del suceso que se produzca. Como la varianza debe ser siempre positiva, si el tipo de interés de valoración que se aplica a lo largo de toda la vida del contrato es único, debe existir al menos un máximo, i^*, en el intervalo $[0, \infty)$. Como en los casos anteriores, no podemos asegurar la existencia de un único óptimo local en V[Z], ya que para $\frac{dV[Z]}{di}$ pueden existir varios valores que verifiquen la condición necesaria. Sin embargo, en los seguros unitarios que hemos analizado existe sólo un máximo local en $i \in [0, \infty)$. Representamos gráficamente el comportamiento de la varianza para unos seguros mixtos asociados a unas cabezas de 35 y 45 años y una duración de 10 años.





En el primer caso, el máximo se alcanza en un entorno del interés de valoración $i^*\approx 5\%$ y en el segundo caso, para $i^*\approx 10\%$.