CAPÍTULO 3:

ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON EL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN ESTIMADO A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

3.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

En este apartado estudiaremos las distribuciones de probabilidad de los valores actuales de las estructuras analizadas en el apartado 2 cuando el tipo (los tipos) de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos, siendo por tanto, el valor actual de las estructuras que analizaremos variables borroso aleatorias, que notaremos como $\tilde{Z}$.

En primer lugar, estimaremos la esperanza matemática, que será un número borroso que notaremos como $\tilde{E}[Z]$, y la varianza y desviación estándar también borrosas, que serán notadas, respectivamente, como $\tilde{V}[Z]$. En la determinación de la media, la varianza y la desviación estándar, ya vimos en el apartado 2 que se puede entender que son funciones del tipo o los tipos de interés que se usan para valorar los flujos aleatorios que componen la estructura actuarial que valoremos. Así pues, si los intereses de valoración vienen dados a través de números borrosos, $\tilde{V}[Z]$, $\tilde{D}[Z]$ y $\tilde{E}[Z]$, por supuesto, serán funciones de números borrosos, y por tanto podrán ser evaluadas utilizando el principio de extensión de Zadeh.

Para ello será de gran utilidad definir el subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, que recogerá todas las posibles trayectorias que pueden tomar, según la estimación del asegurador, los intereses de actualización a lo largo de la duración (aleatoria) del contrato.

Si el contrato está pactado a n años, y el asegurador valora el contrato con unos tipos forward borrosos ${}_{t-1}\tilde{i}_1$, t=1,2,…,n, una trayectoria x es un vector $x \in R^n$ tal que $x=(x_1, x_2,…,x_t,…x_n)$, siendo x_t un posible valor del interés a aplicar durante el periodo t. En este caso:

$$\mu_{\tilde{\Psi}}(x) = \bigwedge_{t=1}^{n} \mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x_t)$$

En el caso en que el asegurador valore el contrato a través de los tipos spot que ha estimado para toda la duración del contrato, $\tilde{i}_t$, t=1,2,…,n, se obtendrá también una trayectoria de los mismos $x=(x_1, x_2,…, x_t,…,x_n)$, de forma que:

$$\mu_{\tilde{\Psi}}(x) = \bigwedge_{t=1}^{n} \mu_{\tilde{i}_t}(x_t)$$

Evidentemente, los α-cortes de $\tilde{\Psi}$, Ψ_α, no serán intervalos de confianza, sino rectángulos de dimensión n o hiperectángulo, de forma que, si realizamos la valoración a través de los tipos forward:

$$\Psi_\alpha = (x_1, x_2,\ldots,x_t,\ldots x_n)|\ x_t \in {}_{t-1}i_{1\alpha}\ \forall t$$

y si utilizamos los tipos spot:

$$\Psi_\alpha = (x_1, x_2,\ldots,x_t,\ldots x_n)|\ x_t \in i_{t\alpha}\ \forall t$$

A partir de Ψ_α, que es convexo ya que es una intersección de conjuntos convexos, podemos definir la trayectoria inferior de los intereses $\Psi^1(\alpha)$, y la superior $\Psi^2(\alpha)$, de forma que, si trabajamos con los tipos forward, éstas son:

$$\Psi^1(\alpha)=\left({}_0 i_1^1(\alpha), {}_1 i_1^1(\alpha), \ldots, {}_{n-1} i_1^1(\alpha)\right) \text{ y } \Psi^2(\alpha)=\left({}_0 i_1^2(\alpha), {}_1 i_1^2(\alpha), \ldots, {}_{n-1} i_1^2(\alpha)\right)$$

Y si trabajamos con los tipos spot, las trayectorias inferior y superior son, respectivamente:

$$\Psi^1(\alpha)=\left(i_1^1(\alpha), i_2^1(\alpha), \ldots, i_n^1(\alpha)\right) \text{ y } \Psi^2(\alpha)=\left(i_1^2(\alpha), i_2^2(\alpha), \ldots, i_n^2(\alpha)\right)$$

Evidentemente, si trabajamos con un tipo de interés borroso "constante" a lo largo de toda la vida del contrato, las trayectorias inferior y superior son vectores n-dimensionales de la forma:

$$\Psi^1(\alpha)=\left(i^1(\alpha), i^1(\alpha), \ldots, i^1(\alpha)\right) \text{ y } \Psi^2(\alpha)=\left(i^2(\alpha), i^2(\alpha), \ldots, i^2(\alpha)\right)$$

De esta forma, podemos hallar las funciones de pertenencia de $\tilde{V}[Z]$, $\tilde{D}[Z]$ y $\tilde{E}[Z]$, a través del principio de extensión de Zadeh. Si denominamos como $\tilde{\Pi}[Z]$ a un parámetro cualquiera de los que pretendemos buscar, y que se halla como función de la trayectoria de los tipos de interés, es decir, para una trayectoria del interés x dada, el parámetro de la variable aleatoria es una función $\Pi[Z](x)$, cuya función de pertenencia se obtiene como:

$$\mu_{\tilde{\Pi}[Z]}(y) = \bigvee_{y=\Pi[Z](x)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Sin embargo, no es operativo trabajar con la función de pertenencia, ya que salvo excepciones, no se puede hallar. Así pues, normalmente trabajaremos con los α-cortes, hallándose éstos como:

$$\Pi[Z]_\alpha = \{y \mid y = \Pi[Z](x), x \in \psi_\alpha\}$$

Respecto a la esperanza matemática, E[Z](x) ésta será función de la trayectoria de los tipos de interés y como es monótona decreciente (creciente) respecto a los tipos de interés (factores de actualización) utilizados, obtenemos:

$$E[Z]_\alpha = \left[E^1[Z](\alpha), E^2[Z](\alpha)\right] = \left[E[Z]\left(\psi^2(\alpha)\right), E^2[Z]\left(\psi^1(\alpha)\right)\right]$$

Sin embargo, dado que no podemos asegurar para todos los tipos de estructuras actuariales que la varianza y la desviación estándar sean monótonas respecto al interés (intereses) de actualización, no podremos hallar para muchas, una expresión analítica de sus α-cortes, siendo estos denotados por $V[Z]_\alpha$ y $D[Z]_\alpha$ respectivamente.

Por otra parte, si utilizamos un número borroso constante a lo largo de toda la operación, lo cual implicaría, o bien, utilizar una ETTI plana, o bien trabajar con la rentabilidad media de la cartera activa para toda la duración del seguro, ya hemos comprobado a lo largo del apartado 2 que la esperanza, la varianza y la desviación estándar del valor actual de la estructura actuarial es función de una sola variable (tipo de interés de actualización). Si notamos como Π[Z](x) al parámetro que queremos hallar, que en este caso es una función de un único interés de actualización, x, a partir de la función de pertenencia del mismo, $\mu_{\tilde{i}}(x)$ hallamos $\mu_{\tilde{E}[Z]}(x)$, $\mu_{\tilde{V}[Z]}(x)$ y $\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{\Pi}[Z]}(y) = \bigvee_{y=\Pi[Z](x)} \mu_{\tilde{i}}(x)$$

y si pretendemos hallar los α-cortes, el resultado que se obtiene entonces es:

$$\Pi[Z]_\alpha = \{y \mid y = \Pi[Z](x), x \in i_\alpha\}$$

Respecto a la esperanza matemática, si notamos como $E[Z]_\alpha$ a sus α-cortes, su expresión, dada que es monótona decreciente respecto al interés de actualización es:

$$E[Z]_\alpha = \left[E^1[Z](\alpha), E^2[Z](\alpha)\right] = \left[E[Z]\left(i^2(\alpha)\right), E^2[Z]\left(i^1(\alpha)\right)\right]$$

Sin embargo, no podemos asegurar que $V[Z]_\alpha$ y $D[Z]_\alpha$ puedan ser halladas con la misma facilidad, ya que las funciones univariantes V[Z](x) y D[Z](x) no son monótonas, en muchas estructuras, respecto al interés de valoración. No obstante, propondremos algunas soluciones ad-hoc que faciliten su determinación, dependiendo dichas soluciones de si se aplica o no un único tipo de interés de valoración en la estructura.

Por otra parte, para el cálculo de la varianza y la desviación estándar también podemos optar por el enfoque cierto, y definir las medidas de dispersión como números nítidos. En este caso tomaremos como metodología la propuesta por Feng, basada en la aplicación de la distancia Euclídea. A la varianza y la desviación estándar que obtengamos utilizando este procedimiento las notaremos como $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ respectivamente.

Para la determinación de la varianza de la variable borroso aleatoria de forma cierta, dado que los valores actuales de los capitales y de las rentas son decrecientes respecto a los tipos de interés de valoración, siempre podremos definir para cada nivel de presunción α una variable aleatoria valor actual inferior, y una variable aleatoria valor actual superior, viniendo dadas por los extremos superior e inferior respectivamente de los α-cortes del interés o intereses de valoración con dicho nivel de presunción α; y por tanto, $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ tendrán un fácil planteamiento.

Asimismo, seguiremos el siguiente orden en el análisis del valor actual de todas las estructuras que estudiemos:

a) Realizaremos un estudio general, asumiéndose variabilidad en los tipos de interés spot o forward que sean utilizados en la valoración actuarial.
b) Analizaremos el caso particular en que la valoración se realiza para todo el horizonte planificador mediante un único tipo borroso $\tilde{i}$, es decir, bajo la asunción de una estructura temporal de los tipos de interés plana, lo cual es una hipótesis muy habitual en la práctica actuarial, a la vez que estaría en la línea del análisis que se realiza en el ya mencionado trabajo de Boyle (1976), aunque en ese caso, se considera que los tipos de actualización correspondientes a cada periodo son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
c) Analizaremos el caso particular de que se aplique durante toda la duración de la estructura actuarial un único tipo de actualización estimado a través de un número triangular, de forma que $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$.

3.2. CAPITAL DE FALLECIMIENTO

3.2.1. Planteamiento general

En este caso, el valor de la prestación a pagar a un individuo de edad x dentro de t+1 años si fallece en el t-ésimo año, viene dado por una variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ que podemos notar como:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1-{}_{t|}q_x \end{cases}$$

la cual, para un nivel de presunción α dado por los α-cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}=[f_t^1(\alpha),f_t^2(\alpha)]$, podemos caracterizarla por una variable aleatoria inferior $Z^1(\alpha)$ y una superior $Z^2(\alpha)$ que son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^1(\alpha) & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1-{}_{t|}q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^2(\alpha) & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1-{}_{t|}q_x \end{cases}$$

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, $\tilde{E}[Z]$ y que notaremos como ${}_t\tilde{B}_x$ será un número borroso cuyos α-cortes vienen dados por:

$$E[Z]_\alpha = {}_tB_{x\alpha} = \left[{}_tB_x^1(\alpha), {}_tB_x^2(\alpha)\right] = \left[E^1[Z(\alpha)], E^2[Z(\alpha)]\right] = \left[E\left[Z^1(\alpha)\right], E\left[Z^2(\alpha)\right]\right] =$$

$$= \left[f_{t+1}^1(\alpha)\,{}_{t|}q_x, f_{t+1}^2(\alpha)\,{}_{t|}q_x\right] = \left[f_{t+1}^1(\alpha), f_{t+1}^2(\alpha)\right]{}_{t|}q_x = f_{t+1_\alpha}\,{}_{t|}q_x$$

Así pues, ${}_t\tilde{B}_x = \tilde{f}_{t+1}\,{}_{t|}q_x$, y su función de pertenencia se hallará a través de la de $\tilde{f}_{t+1}$ como:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{{}_{t|}q_x}\right)$$

Donde ${}_t\tilde{B}_x$ es el factor de descuento de un capital de fallecimiento si utilizamos en la valoración del capital el principio de equivalencia estática cuando el interés o intereses de valoración son borrosos.

Por otra parte, la varianza fuzzy será un número borroso cuyos α-cortes los podemos hallar como:

$$V[Z]_\alpha = \left\{y \in R^+ \mid y = x^2\,{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x), x \in f_{t+1_\alpha}\right\}$$

Dado que la función que evaluamos es creciente respecto el factor de actualización, los α-cortes de la varianza se obtienen como:

$$V[Z]_\alpha = \left[\left(f_{t+1}^1(\alpha)\right)^2{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x), \left(f_{t+1}^2(\alpha)\right)^2{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\right] = \left[\left(f_{t+1}^1(\alpha)\right)^2, \left(f_{t+1}^2(\alpha)\right)^2\right]{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x) =$$

$$= \left(f_{t+1_\alpha}\right)^2{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)$$

Es decir, el extremo inferior de los α-cortes de la varianza se obtiene como la varianza de la variable aleatoria inferior, y el superior, como la varianza de la variable aleatoria superior.

Asimismo, podemos comprobar que, $\widetilde{V}[Z] = \left(\widetilde{f}_{t+1}\right)^2 {}_{t|}q_x\ (1- {}_{t|}q_x)$, siendo por tanto su función de pertenencia deducible a través de la de $\left(\widetilde{f}_{t+1}\right)^2$, es decir:

$$\mu_{\widetilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\left(\widetilde{f}_{t+1}\right)^2}\left(\frac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right) = \mu_{\widetilde{f}_{t+1}}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)$$

La desviación estándar borrosa, se obtiene de forma inmediata, ya que se halla planteando $\widetilde{D}[Z] = \sqrt{\widetilde{V}[Z]}$, siendo por tanto su función característica:

$$\mu_{\widetilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\widetilde{V}[Z]}\left(x^2\right) = \mu_{\widetilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)$$

y sus α-cortes:

$$D[Z]_\alpha = \left[f^1_{t+1}(\alpha)\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)},\ f^2_{t+1}(\alpha)\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right]$$

Respecto a la varianza de Feng, que notamos como $V^*[Z]$, partiendo de:

$$V\left[Z^1(\alpha)\right] = \left(f^1_{t+1}(\alpha)\right)^2 {}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x) \text{ y } V\left[Z^2(\alpha)\right] = \left(f^2_{t+1}(\alpha)\right)^2 {}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)$$

se obtiene,

$$V^*[Z] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{V\left[Z^1(\alpha)\right] + V\left[Z^2(\alpha)\right]\right\}d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\left[f^1_{t+1}(\alpha)\right]^2 + \left[f^2_{t+1}(\alpha)\right]^2\right\} {}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\int_0^1 \left\{\left[f^1_{t+1}(\alpha)\right]^2 + \left[f^2_{t+1}(\alpha)\right]^2\right\}d\alpha$$

Obteniéndose entonces la desviación estándar asociada sin más que realizar $D^*[Z] = \sqrt{V^*[Z]}$.

3.2.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, el factor de actualización de una unidad monetaria con vencimiento a t años es un número borroso $\widetilde{f}_t$ que se obtiene como $\widetilde{f}_t = (1+\widetilde{i})^{-t}$. De esta forma, y dado que el extremo inferior de $f_{t\alpha}$ viene dado por el extremo superior de i_α y viceversa, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ presentan la siguiente distribución de probabilidad:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}(1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1-{}_{t|}q_x\end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha)=\begin{cases}(1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \\ 0 & \text{con} \quad 1-{}_{t|}q_x\end{cases}$$

Siendo entonces los α-cortes de ${}_t\tilde{B}_x$:

$${}_tB_{x_\alpha}=\left[{}_tB_x^1(\alpha),{}_tB_x^2(\alpha)\right]=\left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x,\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x\right]$$

Asimismo, la función de pertenencia del factor de actualización financiero-actuarial para el capital de fallecimiento en t puede ser obtenida explícitamente a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$, $\mu_{\tilde{i}}(x)$, de forma que:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x)=\mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{{}_{t|}q_x}\right)=\mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_{t|}q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}}-1\right]$$

La varianza $\tilde{V}[Z]$ se obtendrá como un número borroso cuyos α-cortes son:

$$V[Z]_\alpha=\left[V^1[Z](\alpha),V^2[Z](\alpha)\right]=\left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x),\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\right]$$

Siendo asimismo su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x)=\mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)=\mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}}-1\right]$$

Por otra parte, $\tilde{D}[Z]$ podrá ser expresada a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$ como:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)=\mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)=\mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)^{-\frac{1}{t+1}}-1\right]$$

Siendo entonces los α-cortes:

$$D[Z]_\alpha=\left[D^1[Z](\alpha),D^2[Z](\alpha)\right]=\left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)},\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right]$$

Asimismo, teniendo en cuenta que $f_{t+1}^1(\alpha)=\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t+1)}$ y $f_{t+1}^2(\alpha)=\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t+1)}$, la obtención de la varianza y la desviación estándar ciertas es inmediata.

3.2.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

En este caso, el tipo de interés efectivo anual que se aplica durante toda la duración del seguro es un tanto $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, de forma, que a partir de sus α-cortes, $i_\alpha=[i^1+(i^2-i^1)\alpha,\ i^3-(i^3-i^2)\alpha]$, las variables aleatorias inferior y superior vendrán caracterizadas por:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)} & {}_{t|}q_x \\ 0 & 1-{}_{t|}q_x\end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha)=\begin{cases}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)} & {}_{t|}q_x \\ 0 & 1-{}_{t|}q_x\end{cases}$$

y así:

$${}_tB_{x_\alpha} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x,\ (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\right]$$

siendo por tanto la función de pertenencia de ${}_t\tilde{B}_x$:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{{}_{t|}q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x \le x < (1+i^2)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x \\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{{}_{t|}q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x \le x < (1+i^1)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x \\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por otra parte, los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$, son:

$$V[Z]_\alpha = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x),\ (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\right]$$

siendo por tanto su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\le x<(1+i^2)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t}q_x)\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\le x<(1+i^1)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Y por tanto, $D[Z]_\alpha$ se obtiene como:

$$D[Z]_\alpha=\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)},(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\right]$$

y la función da pertenencia de $\tilde{D}[Z]$ es:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)^{-\frac{1}{(t+1)}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\le x<(1+i^2)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t}q_x)}\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}}\right)^{-\frac{1}{(t+1)}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\le x<(1+i^1)^{-(t+1)}\sqrt{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por otra parte, para hallar $V^*[Z]$, teniendo en cuenta que:

$$V^1(\alpha)=(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)$$
$$V^2(\alpha)=(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)$$

se obtiene:

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{t|}q_x(1-{}_{t|}q_x)}{2t+1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2t-1}-(1+i^3)^{-2t-1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t-1}-(1+i^2)^{-2t-1}\right]}{i^2-i^1}\right\}$$

Siendo $D^*[Z]$ la raíz cuadrada de esta última expresión.

3.2.4. Aplicación numérica

A continuación ejemplificamos los resultados obtenidos en los apartados anteriores, suponiéndose que el interés técnico a aplicar durante toda la vida del contrato viene dado a través de un único número borroso triangular.

Veamos como obtenemos todos los parámetros asociados a un capital de fallecimiento de 1000 unidades monetarias con vencimiento 10 años para un individuo cuya edad actual es de 45 años. Las bases técnicas a utilizar son:

* Tablas PEM 82, que también se utilizarán en el resto de apartados.
* Un interés a aplicar durante toda la vida del contrato estimado a través del número borroso triangular $\tilde{i} = (0{,}02, 0{,}03, 0{,}05)$

En este caso, la función de pertenencia del interés viene dada por:

$$\mu_{\tilde{i}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 0'02}{0'01} & \text{si } 0'02 \le x < 0'03 \\ \dfrac{0'05 - x}{0'02} & \text{si } 0'03 \le x < 0'05 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α-cortes:

$i_\alpha = [0'02 + 0'01\alpha,\ 0'05 - 0'02\alpha]$

Siendo entonces, para un nivel α dado, las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior, $Z^2(\alpha)$ asociadas a $\tilde{Z}$:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-11} & \text{con } \dfrac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{con } \dfrac{944.492}{951.683} \end{cases}, \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-11} & \text{con } \dfrac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{con } \dfrac{944.492}{951.683} \end{cases}$$

Así, obtenemos la función de pertenencia de ${}_{10}\tilde{B}_{45}$ como:

$$\mu_{{}_{10}\tilde{B}_{45}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1'05 - \left(\dfrac{951.683x}{7.191.000}\right)^{-\frac{1}{11}}}{0'02} & \text{si } 10^3 \cdot 1'05^{-11}\dfrac{7.191}{951.683} \le x < 10^3 \cdot 1'03^{-11}\dfrac{7.191}{951.683} \\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683x}{7.191.000}\right)^{-\frac{1}{11}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^3 \cdot 1'03^{-11}\dfrac{7.191}{951.683} \le x < 10^3 \cdot 1'02^{-11}\dfrac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α-cortes:

$${}_{10}B_{45_\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{7.191}{951.683}(1'05 - 0'02\alpha)^{-11}, 1.000 \cdot \frac{7.191}{951.683}(1'02 + 0'01\alpha)^{-11}\right]$$

La función de pertenencia de la varianza borrosa es, por otra parte:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1'05 - \left(\dfrac{951.683^2\,x}{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{22}}}{0'02} & \text{si } 10^6 \cdot 1'05^{-22}\dfrac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \le x < 10^6 \cdot 1'03^{-22}\dfrac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683^2\,x}{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{22}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^6 \cdot 1'03^{-22}\dfrac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \le x < 10^6 \cdot 1'02^{-22}\dfrac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α-cortes:

$$V[Z]_\alpha = \left[1.000 \cdot \frac{944.492 \cdot 7.191}{951.683^2}(1'05 - 0'02\alpha)^{-22}, 1.000 \cdot \frac{944.492 \cdot 7.191}{951.683^2}(1'02 + 0'01\alpha)^{-22}\right]$$

y por tanto, la función característica de la desviación estándar es:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{1'05-\left(\dfrac{951.683x}{\sqrt{7.191\cdot 944.492}\cdot 10^{3}}\right)^{-\frac{1}{11}}}{0'02} & \text{si } 10^{3}\cdot 1'05^{-11}\dfrac{\sqrt{7.191\cdot 944.492}}{951.683}\leq x<10^{3}\cdot 1'03^{-11}\dfrac{\sqrt{7.191\cdot 944.492}}{951.683}\\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683x}{\sqrt{7.191\cdot 944.492}\cdot 10^{3}}\right)^{-\frac{1}{11}}-1'02}{0'01} & \text{si } 10^{3}\cdot 1'03^{-11}\dfrac{\sqrt{7.191\cdot 944.492}}{951.683}\leq x<10^{3}\cdot 1'02^{-11}\dfrac{\sqrt{7.191\cdot 944.492}}{951.683}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

y sus α-cortes:

$$V[Z]_{\alpha}=\left[1.000\cdot\frac{\sqrt{944.492\cdot 7.191}}{951.683}(1'05-0'02\alpha)^{-11},1.000\cdot\frac{\sqrt{944.492\cdot 7.191}}{951.683}(1'02+0'01\alpha)^{-11}\right]$$

Siendo asimismo $V^{*}[Z]$= 3495,84 y $D^{*}[Z]$ = 59,13.

Puede ser en muchas ocasiones de utilidad, por la mayor facilidad de cálculo que permite, aproximar estos parámetros a través de números borrosos triangulares con el soporte y el núcleo del que provienen, ya que se mantiene la información más importante, a nuestro entender, del número borroso que realmente los representa a la vez que permiten una fácil operatoria. Para analizar la idoneidad de la aproximación triangular, tenemos que calcular el error que como máximo podemos cometer en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomarse dicha aproximación, y por tanto, debemos conocer los niveles $\alpha_I^{*}(t)$ y $\alpha_D^{*}(t)$ para los cuales se produce mayor error absoluto en los extremos izquierdo y derecho de los α-cortes respectivamente. Asimismo, $\alpha_I^{*}(t)$ y $\alpha_D^{*}(t)$ se obtienen fácilmente a través de las expresiones que dimos para dichos niveles de presunción cuando analizamos la aproximación triangular de los factores de descuento que se obtienen con un tipo de interés constante y triangular en el apartado 4.2.3.2 de la primera parte de la tesis. Para ello deberemos tener en cuenta que para un vencimiento t, los parámetros ${}_{t}\tilde{B}_{x}$, $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ se obtienen como:

a) La esperanza matemática y la desviación estándar se hallan a través del producto del factor de descuento a t+1 años por unas constantes, obteniéndose por tanto:

$$\alpha_I^{*}(t)=\frac{1+i^{3}}{i^{3}-i^{2}}-\frac{1}{i^{3}-i^{2}}\left[\frac{(1+i^{2})^{-(t+1)}-(1+i^{3})^{-(t+1)}}{(t+1)\left(i^{3}-i^{2}\right)}\right]^{-\frac{1}{t+2}}$$

$$\alpha_D^{*}(t)=-\frac{1+i^{1}}{i^{2}-i^{1}}+\frac{1}{i^{2}-i^{1}}\left[\frac{(1+i^{1})^{-(t+1)}-(1+i^{2})^{-(t+1)}}{(t+1)\left(i^{2}-i^{1}\right)}\right]^{-\frac{1}{t+2}}$$

b) La varianza para un capital con vencimiento t años se obtiene realizando el producto del factor de descuento a 2(t+1) años por unas constantes, y entonces obtenemos:

$$\alpha_I^*(t) = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \frac{1}{i^3-i^2}\left[\frac{(1+i^2)^{-2(t+1)} - (1+i^3)^{-2(t+1)}}{2(t+1)\left(i^3-i^2\right)}\right]^{-\frac{1}{2(t+1)+1}}$$

$$\alpha_D^*(t) = -\frac{1+i^1}{i^2-i^1} + \frac{1}{i^2-i^1}\left[\frac{(1+i^1)^{-2(t+1)} - (1+i^2)^{-2(t+1)}}{2(t+1)\left(i^2-i^1\right)}\right]^{-\frac{1}{2(t+1)+1}}$$

Así, la determinación del error máximo que se comete en el nivel de presunción se calcularía, conociendo las desviaciones máximas que se producen en los extremos de los α-cortes, de la forma ya comentada en el apartado 4.2.3.2. de la primera parte de la tesis.

A continuación cuantificamos los errores en la aproximación triangular de la esperanza matemática, varianza y desviación estándar borrosas (que coincidirá con el error cometido en la esperanza matemática) para un asegurado de 45 años y unos vencimientos de los capitales de fallecimiento t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, y 50 años con las mismas bases técnicas que las utilizadas anteriormente. También, y para dichos vencimientos, damos el valor de la varianza y la desviación estándar cierta:

Vencimiento	Error en la Esperanza	Error en la Varianza Borrosa	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
0	0,00	0,01	2976,71	54,56
5	0,02	0,03	3308,08	57,52
10	0,03	0,06	3528,07	59,40
15	0,04	0,08	3620,68	60,17
20	0,05	0,10	3807,58	61,71
25	0,06	0,13	4047,32	63,62
30	0,08	0,15	4162,72	64,52
35	0,09	0,17	3912,75	62,55
40	0,10	0,19	3104,83	55,72
45	0,11	0,21	1852,98	43,05
50	0,12	0,24	705,21	26,56

Podemos comprobar que para vencimientos "cercanos", la aproximación triangular de los parámetros que analizamos está más que justificada, ya que los errores que se cometen en el nivel de presunción por tomar esta son bastante pequeños. Sin embargo, para vencimientos lejanos, por ejemplo en ${}_t\widetilde{B}_{45}$ a partir de 40 años – donde el factor financiero de descuento utilizado es el correspondiente a un diferimiento de 41 años-, y por tanto, ya para $\widetilde{V}[Z]$ a partir de 20 años, cuyo cálculo implica utilizar el factor de descuento a 42 años, los errores que se cometen al tomar la aproximación triangular son poco admisibles, si tomamos como referencia la escala endecadaria, ya que existe un salto en la escala de verdad, a la que pertenece el valor o los valores en los que se cometen estos errores máximos. Si el número borroso que utilizamos en la actualización fuera menos incierto, y por tanto más "estrecho", el error cometido sería menor, tal como observamos cuando se analizó la valoración financiera con intereses borrosos y triangulares. Apuntamos como una alternativa de ajuste de números borrosos triangulares, si ello fuera de interés y en los casos en que no aceptamos la aproximación triangular de los parámetros con el método propuesto, la metodología de Voxman *et al.,* ya comentada en el apartado 1.4.3. de la primera parte de la tesis.

3.3. CAPITAL DE SUPERVIVENCIA

3.3.1. Planteamiento general

En este caso, el individuo asegurado, de edad x, percibe (si se trata de una prestación) o paga (si se trata de una prima) una unidad monetaria dentro de t años si sobrevive, y nada en caso contrario. En el análisis que se realiza suponemos que los vencimiento de los capitales presentan un vencimiento t>0, ya que en t=0 pueden existir ciertos problemas en la definición de los parámetros de la variable borroso aleatoria valor actual. En cualquier caso, el análisis a realizar para t=0 es inmediato, ya que en este caso no existe aleatoriedad, ya que el capital unitario devengará con certeza. Por otra parte, tampoco existe borrosidad en el valor actual de dicha unidad monetaria, ya que al devengar en el momento de valoración, no ha lugar al descuento de dicha cuantía.

En el resto de casos, la variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ que cuantifica el valor de este capital contingente es:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_t & \text{con } {}_tp_x \\ 0 & \text{con } {}_tq_x \end{cases}$$

la cual a través de los α-cortes de $\tilde{f}_t$, queda caracterizada por las variables aleatorias inferior, $Z^1(\alpha)$, y superior, $Z^2(\alpha)$:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_t^1(\alpha) & \text{con } {}_tp_x \\ 0 & \text{con } {}_tq_x \end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_t^2(\alpha) & \text{con } {}_tp_x \\ 0 & \text{con } {}_tq_x \end{cases}$$

Así pues, la esperanza matemática del valor actual de este capital que notaremos como ${}_t\tilde{E}_x$, será un número borroso cuyos α-cortes vienen dados por: