$$E[Z]_\alpha = {}_tE_{x\alpha} = \left[E\left[Z^1(\alpha)\right], E\left[Z^2(\alpha)\right]\right] = \left[{}_tE_x^1(\alpha), {}_tE_x^2(\alpha)\right] = \left[f_t^1(\alpha)\,{}_tp_x, f_t^2(\alpha)\,{}_tp_x\right] =$$
$$= \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right]{}_tp_x = f_{t_\alpha}\,{}_tp_x$$

Así pues, ${}_t\widetilde{E}_x = \widetilde{f}_t\,{}_tp_x$, pudiéndose entonces hallar su función de pertenencia como:

$$\mu_{{}_t\widetilde{E}_x}(x) = \mu_{\widetilde{f}_t}\left(\frac{x}{{}_tp_x}\right)$$

siendo ${}_t\widetilde{E}_x$ el factor de actualización financiero-actuarial en base al principio de equivalencia estática en presencia de un interés o intereses de actualización borrosos.

Asimismo, la varianza borrosa será un número borroso $\widetilde{V}[Z]$ cuyos α-cortes son:

$$V[Z]_\alpha = \left\{y \in R^+ \mid y = x^2\,{}_tp_x\,{}_tq_x,\ x \in f_{t_\alpha}\right\}$$

Dado que y es creciente respecto a x, los α-cortes de la varianza borrosa se obtienen como:

$$V[Z]_\alpha = \left[\left[f_t^1(\alpha)\right]^2{}_tp_x\,{}_tq_x, \left[f_t^2(\alpha)\right]^2{}_tp_x\,{}_tq_x\right] = \left[\left(f_t^1(\alpha)\right)^2, \left(f_t^2(\alpha)\right)^2\right]{}_tp_x\,{}_tq_x$$
$$= \left(f_{t_\alpha}\right)^2{}_tp_x\,{}_tq_x$$

Es decir, el extremo inferior de los α-cortes de la varianza se obtiene como la varianza de la variable aleatoria inferior, y viceversa. Asimismo, podemos comprobar que, $\widetilde{V}[Z] = \left(\widetilde{f}_t\right)^2{}_tp_x\,{}_tq_x$, siendo por tanto su función de pertenencia deducible a través de la de $\widetilde{f}_t$, es decir:

$$\mu_{\widetilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\widetilde{f}_t}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_tp_x\,{}_tq_x}}\right)$$

Por otra parte, la desviación estándar $\widetilde{D}[Z]$ se hallará como $\sqrt{\widetilde{V}[Z]}$, siendo entonces su función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\widetilde{V}[Z]}\left(x^2\right) = \mu_{\widetilde{f}_t}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}}\right)$$

y sus α-cortes,

$$D[Z]_\alpha = \left[f_t^1(\alpha)\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}, f_t^2(\alpha)\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\right] = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right]\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x} =$$

$$= f_{t_\alpha} \sqrt{{}_t p_x \, {}_t q_x}$$

Respecto a la varianza de Feng, que notamos como $V^*[Z]$, partiendo de:

$$V\left[Z^1(\alpha)\right] = \left(f_t^1(\alpha)\right)^2 {}_t p_x \, {}_t q_x \text{ y } V\left[Z^2(\alpha)\right] = \left(f_t^2(\alpha)\right)^2 {}_t p_x \, {}_t q_x$$

se obtiene,

$$V^*[Z] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{V\left[Z^1(\alpha)\right] + V\left[Z^2(\alpha)\right]\right\} d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\left[f_t^1(\alpha)\right]^2 + \left[f_t^2(\alpha)\right]^2\right\} {}_t p_x \, {}_t q_x \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} {}_t p_x \, {}_t q_x \int_0^1 \left\{\left[f_t^1(\alpha)\right]^2 + \left[f_t^2(\alpha)\right]^2\right\} d\alpha$$

3.3.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, durante toda la vida del contrato aplicamos un único interés que es el que se supone que el asegurador conseguirá por término medio invirtiendo las primas que percibe por parte del asegurado, y éste viene dado por un número borroso $\tilde{i}$ constante. Así, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ serán:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^2(\alpha))^{-t} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1(\alpha))^{-t} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α-cortes de ${}_t\tilde{E}_x$:

$${}_t E_{x_\alpha} = \left[{}_t E_x^1(\alpha), {}_t E_x^2(\alpha)\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t} {}_t p_x, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t} {}_t p_x\right]$$

Asimismo, la función de pertenencia de ${}_t\tilde{E}_x$ puede ser obtenida explícitamente a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$, $\mu_{\tilde{i}}(x)$, de forma que:

$$\mu_{{}_t\tilde{E}_x}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{{}_t p_x}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_t p_x}\right)^{-\frac{1}{t}} - 1\right]$$

Por otra parte, la varianza borrosa $\tilde{V}[Z]$, presentará como α-cortes:

$$V[Z]_\alpha = \left[V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-2t} {}_t p_x \, {}_t q_x, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-2t} {}_t p_x \, {}_t q_x\right]$$

Siendo la función de pertenencia de la misma:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_t p_x\, {}_t q_x}}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_t p_x\, {}_t q_x}\right)^{-\frac{1}{2t}} - 1\right]$$

Por otra parte, para $\tilde{D}[Z]$ los α-cortes son:

$$D[Z]_\alpha = \left[D^1[Z](\alpha), D^2[Z](\alpha)\right] = \left[\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t}\sqrt{{}_t p_x\, {}_t q_x}, \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t}\sqrt{{}_t p_x\, {}_t q_x}\right]$$

y por tanto, su función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x\, {}_t q_x}}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x\, {}_t q_x}}\right)^{-\frac{1}{t}} - 1\right]$$

Respecto a la varianza y a la desviación estándar que se obtienen aplicando el enfoque de Feng, se deduce inmediatamente a través de la expresión hallada en 3.3.1., sin más que expresar los extremos de los α-cortes de $\tilde{f}_t$ como una función de $i^1(\alpha)$ y $i^2(\alpha)$.

3.3.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Dado que las variables aleatorias inferior y superior para un nivel α vienen determinadas por el tipo de interés superior e inferior respectivamente, éstas son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t} & {}_t p_x \\ 0 & {}_t q_x \end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t} & {}_t p_x \\ 0 & {}_t q_x \end{cases}$$

De esta forma, los α-cortes de ${}_t\tilde{E}_x$ toman como expresión:

$${}_t E_{x\,\alpha} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t}\, {}_t p_x, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t}\, {}_t p_x\right]$$

y por tanto, $\mu_{{}_t\tilde{E}_x}(x)$ es:

$$\mu_{{}_t\tilde{E}_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{{}_tp_x}\right)^{-\frac{1}{t}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-t}\,{}_tp_x\le x<(1+i^2)^{-t}\,{}_tp_x\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{{}_tp_x}\right)^{-\frac{1}{t}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-t}\,{}_tp_x\le x<(1+i^1)^{-t}\,{}_tp_x\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por otra parte, los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$ se obtienen como:

$$V[Z]_\alpha=\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\,,(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\right]$$

y entonces, la función de pertenencia de la varianza será:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{{}_tp_x\,{}_tq_x}\right)^{-\frac{1}{2t}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\le x<(1+i^2)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{{}_tp_x\,{}_tq_x)}\right)^{-\frac{1}{2t}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\le x<(1+i^1)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

De esta forma, los α-cortes de $\tilde{D}[Z]$ y su función de pertenencia se obtienen como:

$$D[Z]_\alpha=\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\,,(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\right]$$

y,

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+i^3)-\left(\dfrac{x}{\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}}\right)^{-\frac{1}{t}}}{i^3-i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\le x<(1+i^2)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}}\right)^{-\frac{1}{t}}-(1+i^1)}{i^2-i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\le x<(1+i^1)^{-t}\sqrt{{}_tp_x\,{}_tq_x}\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Así, es inmediato hallar $V^*[Z]$, sin más que sustituir en su expresión hallada en el apartado 3.2.1:

$$f_t^1(\alpha)=(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x$$
$$f_t^2(\alpha)=(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t}\,{}_tp_x\,{}_tq_x$$

obteniéndose,

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}\,{}_tp_x\,{}_tq_x\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t}\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_tp_x\,{}_tq_x}{2t-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2t+1}-(1+i^3)^{-2t+1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t+1}-(1+i^2)^{-2t+1}\right]}{i^2-i^1}\right\}$$

Hallándose entonces $D^*[Z]$ como la raíz cuadrada de la expresión anterior.

3.3.4. Aplicación numérica

A continuación ejemplificamos los resultados obtenidos en este apartado, utilizándose las mismas bases técnicas que en la aplicación efectuada para el capital de fallecimiento del apartado 3.2.4. En este caso hallamos los parámetros asociados a la variable borroso aleatoria del valor actual de un capital de supervivencia de 1000 unidades monetarias con vencimiento 10 años para un individuo cuya edad actual es de 45 años.

Para un nivel α dado, las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior, $Z^2(\alpha)$ asociadas a $\tilde{Z}$ son:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}10^3\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-10} & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683}\\ 0 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683}\end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha)=\begin{cases}10^3\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-10} & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683}\\ 0 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683}\end{cases}$$

Así, obtenemos la función de pertenencia de ${}_{10}\widetilde{E}_{45}$ como:

$$\mu_{{}_{10}\widetilde{E}_{45}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1'05-\left(\dfrac{951.683x}{906.484.000}\right)^{-\frac{1}{10}}}{0'02} & \text{si } 10^3\cdot 1'05^{-10}\dfrac{906.484}{951.683}\le x<10^3\cdot 1'03^{-10}\dfrac{906.484}{951.683}\\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683x}{906.484.000}\right)^{-\frac{1}{10}}-1'02}{0'01} & \text{si } 10^3\cdot 1'03^{-10}\dfrac{906.484}{951.683}\le x<10^3\cdot 1'02^{-10}\dfrac{906.484}{951.683}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

siendo sus α-cortes:

$$_{10}E_{45_\alpha}=\left[1.000\cdot\frac{906.484}{951.683}(1'05-0'02\alpha)^{-10},1.000\cdot\frac{906.484}{951.683}(1'02+0'01\alpha)^{-10}\right]$$

Por otra parte, la función de pertenencia de la varianza borrosa es:

$$\mu_{\widetilde{V}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{1'05-\left(\dfrac{951.683^2x}{906.484\cdot 45.199\cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{20}}}{0'02} & \text{si } 10^6\cdot 1'05^{-20}\dfrac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}\le x<10^6\cdot 1'03^{-20}\dfrac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}\\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683^2x}{906.484\cdot 45.199\cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{20}}-1'02}{0'01} & \text{si } 10^6\cdot 1'03^{-20}\dfrac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}\le x<10^6\cdot 1'02^{-20}\dfrac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

y sus α-cortes:

$$V[Z]_\alpha=\left[1.000\cdot\frac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}(1'05-0'02\alpha)^{-20},1.000\cdot\frac{906.484\cdot 45.199}{951.683^2}(1'02+0'01\alpha)^{-20}\right]$$

y por tanto, la función característica de la desviación estándar se hallará como:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)=\begin{cases}\dfrac{1'05-\left(\dfrac{951.683x}{\sqrt{906.484\cdot 45199}\cdot 10^3}\right)^{-\frac{1}{20}}}{0'02} & \text{si } 10^3\cdot 1'05^{-10}\dfrac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683}\le x<10^3\cdot 1'03^{-10}\dfrac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683}\\ \dfrac{\left(\dfrac{951.683x}{\sqrt{906.484\cdot 45199}\cdot 10^3}\right)^{-\frac{1}{20}}-1'02}{0'01} & \text{si } 10^3\cdot 1'03^{-10}\dfrac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683}\le x<10^3\cdot 1'02^{-10}\dfrac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

siendo sus α-cortes:

$$D[Z]_\alpha=\left[1.000\cdot\frac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683^2}(1'05-0'02\alpha)^{-10},1.000\cdot\frac{\sqrt{906.484\cdot 45.199}}{951.683^2}(1'02+0'01\alpha)^{-10}\right]$$

La varianza y la desviación estándar ciertas son: $V^*[Z]$= 242,17 y $D^*[Z]$ = 15,56.

Para analizar la idoneidad de la aproximación triangular, tenemos que calcular el error que cometemos en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomarse dicha aproximación triangular, y por tanto, debemos conocer los niveles $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ para los cuales se produce mayor error en los α-cortes izquierdo y derecho respectivamente. Asimismo, $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ se obtienen fácilmente a través de las expresiones que dimos para los mismos parámetros asociados a la actualización monetaria con tipo de interés constante y triangular del apartado 4.2.3.2. de la primera parte de la tesis, como ya hemos comentado. Para ello debemos tener en cuenta que para los parámetros ${}_t\tilde{E}_x$, $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ observamos:

a) La esperanza matemática y la desviación estándar para un vencimiento t se obtienen como producto del factor de descuento a t años por una constante, y por tanto:

$$\alpha_I^*(t)=\frac{1+i^3}{i^3-i^2}-\frac{1}{i^3-i^2}\left[\frac{(1+i^2)^{-t}-(1+i^3)^{-t}}{t\left(i^3-i^2\right)}\right]^{-\frac{1}{t+1}}$$

$$\alpha_D^*(t)=-\frac{1+i^1}{i^2-i^1}+\frac{1}{i^2-i^1}\left[\frac{(1+i^1)^{-t}-(1+i^2)^{-t}}{t\left(i^2-i^1\right)}\right]^{-\frac{1}{t+1}}$$

b) La varianza para un vencimiento t se obtiene como producto del factor de descuento a 2t años por una constante:

$$\alpha_I^*(t)=\frac{1+i^3}{i^3-i^2}-\frac{1}{i^3-i^2}\left[\frac{(1+i^2)^{-2t}-(1+i^3)^{-2t}}{2t\left(i^3-i^2\right)}\right]^{-\frac{1}{2t+1}}$$

$$\alpha_D^*(t)=-\frac{1+i^1}{i^2-i^1}+\frac{1}{i^2-i^1}\left[\frac{(1+i^1)^{-2t}-(1+i^2)^{-2t}}{2t\left(i^2-i^1\right)}\right]^{-\frac{1}{2t+1}}$$

A continuación exponemos los errores que se cometen en la aproximación triangular de la esperanza matemática, varianza y desviación estándar borrosas (que coincidirá con el error cometido en la esperanza matemática) para un asegurado de 45 años y unos vencimientos t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, y 50 años del capital de supervivencia, con las mismas bases técnicas que hemos venido utilizando. También, y para dichos vencimientos, damos el valor de la varianza y la desviación estándar de Feng:

Vencimiento	Error en la Esperanza	Error en la Varianza Borrosa	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
0	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,01	0,03	136,14	11,67
10	0,03	0,05	242,17	15,56
15	0,04	0,07	317,44	17,82
20	0,05	0,10	363,83	19,07
25	0,06	0,12	384,14	19,60
30	0,07	0,14	371,10	19,26
35	0,09	0,17	312,81	17,69
40	0,10	0,19	210,82	14,52
45	0,11	0,21	100,04	10,00
50	0,12	0,23	28,62	5,35

Podemos comprobar que el comportamiento de la aproximación triangular de la esperanza, varianza y desviación estándar en este tipo de capital es muy similar al comportamiento de dichos parámetros para el capital de fallecimiento. Para vencimientos "cortos" la aproximación es buena, pero no lo es tanto en vencimientos largos. Por otra parte, la aproximación de la varianza es peor que la de la esperanza o de la desviación estándar, ya que implica aproximar triangularmente un factor de descuento de una cuantía con un vencimiento que es el doble del de la esperanza matemática o la desviación estándar borrosa.