Por otra parte, el intervalo de confianza correspondiente a la varianza borrosa para un determinado nivel α será:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in R^+ \mid y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 \ {}_{t|}q_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} \ {}_{t|}q_x \right)^2, x_{t+1} \in f_{t+1_\alpha} \ t = 0,1,...,n-1 \right\} =$$

$$=[\text{Min } y, \text{Max } y]$$

No podemos dar una expresión analítica para los α-cortes de la varianza borrosa, por las razones ya comentadas en el apartado 2.8. En cualquier caso, pueden ser obtenidos para cada nivel α que se deseen, planteando los programas siguientes:

Minimizar (Maximizar) $y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 \ {}_{t|}q_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} \ {}_{t|}q_x \right)^2$

s.a.:

$$f^1_{t+1}(\alpha) \le x_{t+1} \le f^2_{t+1}(\alpha) \quad t=0,1,..,n-1$$

Siendo el máximo de y, el extremo superior de $V[Z]_\alpha$, y el mínimo de y, su extremo inferior. Sin embargo, y tal como comentamos en el apartado 3.6.1. de la primera parte de la tesis, si aplicamos la aproximación a la varianza propuesta por Frühwirth-Schnatter, el resultado que obtendremos incluirá el α-corte real de la varianza, y facilitará la computación de ésta, si bien, a costa de obtenerse un número borroso más incierto.

Por otra parte, para la varianza de Feng, partiendo de:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} \left[f^1_{t+1}(\alpha) \right]^2 {}_{t|}q_x - \left[{}_nA^1_x(\alpha) \right]^2 \text{ y } V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} \left[f^2_{t+1}(\alpha) \right]^2 {}_{t|}q_x - \left[{}_nA^2_x(\alpha) \right]^2$$

se obtiene:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \left[f^1_{t+1}(\alpha) \right]^2 {}_{t|}q_x + \sum_{t=0}^{n-1} \left[f^2_{t+1}(\alpha) \right]^2 {}_{t|}q_x - \left\{ \left[{}_nA^1_x(\alpha) \right]^2 + \left[{}_nA^2_x(\alpha) \right]^2 \right\} \right\} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \int_0^1 \left\{ \left[f^1_{t+1}(\alpha) \right]^2 + \left[f^2_{t+1}(\alpha) \right]^2 \right\} d\alpha - \left\{ \int_0^1 \left\{ \left[{}_nA^1_x(\alpha) \right]^2 + \left[{}_nA^2_x(\alpha) \right]^2 \right\} d\alpha \right\} \right]$$

Asimismo, las desviaciones estándar ciertas y borrosas se calculan de la forma que ha venido siendo explicitada en el resto de apartados.

3.5.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este supuesto, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}(1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1\\ 0 & \text{con} \quad {}_n p_x\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}(1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1\\ 0 & \text{con} \quad {}_n p_x\end{cases}$$

Siendo entonces los α-cortes de ${}_n\tilde{A}_x$:

$${}_nA_{x_\alpha}=\left[{}_nA_x^1(\alpha),{}_nA_x^2(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=0}^{n-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x,\sum_{t=0}^{n-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x\right]$$

Respecto a los α-cortes de la varianza, ya hemos comprobado que no podemos asegurar su comportamiento monótono (creciente o decreciente) respecto al tipo de interés. Así, a partir de un programa matemático análogo al comentado en el apartado anterior, los extremos de los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$ se obtienen planteando:

$$\text{Min (Max)} \ \ y=\sum_{t=0}^{n-1}(1+x)^{-2(t+1)}{}_{t|}q_x-\left(\sum_{t=0}^{n-1}(1+x)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x\right)^2$$

$$\text{s.a.: } i^1(\alpha)\le x\le i^2(\alpha)$$

Sin embargo, podemos calcular $V[Z]_\alpha$ para una escala de verdad dada sin más que aplicar la metodología expuesta en el apartado 3.3.2. y teniéndose en cuenta las peculiaridades de la nueva expresión a evaluar.

Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que identificar $f_t^1(\alpha)=\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t}$ y $f_t^2(\alpha)=\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t}$ y sustituir en su expresión correspondiente, obtenida en el apartado anterior. Asimismo, la obtención de la desviación estándar de Feng, $D^*[Z]$ y los α-cortes de $\tilde{D}[Z]$, es inmediata una vez han sido calculadas las varianzas.

3.5.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

En este caso, el tipo de interés anual que se aplica durante toda la duración del seguro es un tanto $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$. De esta forma, las variables aleatorias inferior y superior para un nivel α vienen determinadas por el tipo de interés superior e inferior que se obtienen para dicho nivel, siendo:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_x,\ t=0,1,...,n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_x,\ t=0,1,...,n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Así, los α-cortes de ${}_n\tilde{A}_x$ son:

$${}_nA_{x_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x,\ \sum_{t=0}^{n-1}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\right]$$

A partir de la metodología comentada en el apartado 3.3.2., hallamos los α-cortes de la varianza y desviación estándar borrosa de $\tilde{Z}$, teniendo en cuenta que $i^1(\alpha)=i^1+(i^2-i^1)\alpha$ y $i^2(\alpha)=i^3-(i^3-i^2)\alpha$.

Por otra parte, la varianza de Feng es:

$$V^*[Z]= \frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t|}q_x\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\right]d\alpha -\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left\{\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\right]^2+\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^1-(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\right]^2\right\}d\alpha\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t|}q_x\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\right]d\alpha -\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+j+2)}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x+\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1+i^1-(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x\right\}d\alpha\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2t-1}-(1+i^3)^{-2t-1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t-1}-(1+i^2)^{-2t-1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_{t|}q_x}{2t+1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-t-j-1}-(1+i^3)^{-t-j-1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-t-j-1}-(1+i^2)^{-t-j-1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x}{j+t+1}\right\}$$

siendo $D^*[Z]$ la raíz cuadrada de $V^*[Z]$.

3.5.4. Aplicación numérica

A continuación realizamos diversas aplicaciones numéricas para ejemplificar los resultados obtenidos. Utilizamos las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante a lo largo de toda la vida del contrato, $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ y se sigue suponiendo un capital asegurado de 1.000 unidades monetarias. Consideramos un único asegurado de edad x=35, siendo las duraciones del seguro n=10, 20, 40 y 65 años. Por ejemplo, si la duración del seguro son 10 años, las variables aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_{35}, \; t = 0,1,...,9 \\ 0 & \text{con } {}_{10}p_{35} \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_{35}, \; t = 0,1,...,9 \\ 0 & \text{con } {}_{10}p_{35} \end{cases}$$

En primer lugar obtendremos la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x y una duración del seguro de n años, es el número borroso que notamos como ${}_n\tilde{A}_x$. Posteriormente analizamos la bondad de la aproximación triangular a ${}_n\tilde{A}_x$ con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, y como siempre tomamos como referencia una escala endecadaria. Para ello, y con un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior, partiremos de que ${}_n\tilde{A}_x$ se puede hallar como $\sum_{t=0}^{n-1} {}_t\tilde{B}_x$. Como conocemos el error máximo en términos absolutos que se comete en los extremos de los α-cortes de la esperanza matemática del valor actual de los capitales de fallecimiento si la aproximamos mediante números borrosos triangulares, los cuales han sido notados como $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$; el error máximo que podemos cometer en el nivel de presunción por aproximar a través de un número borroso triangular ${}_n\tilde{A}_x$, con su mismo soporte y núcleo, vendrá acotado por:

$$\text{Max}\left\{ \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_I^*(t)}{{}_nA_x^1(1) - {}_nA_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_D^*(t)}{{}_nA_x^2(0) - {}_nA_x^2(1)} \right\}$$

La expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por tomar dicha aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro:

n	${}_{n}\widetilde{A}_{35}$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
10	(14,79, 16,56, 17,56)	0,02	13287,69	115,27
20	(36,16, 45,54, 51,42)	0,04	28438,77	168,64
40	(96,27, 155,69, 201,88)	0,07	46617,58	215,91
65	(152,14, 300,16, 436,92)	0,10	19396,42	139,27

Podemos comprobar que a medida que la duración del seguro aumenta, el ajuste triangular a ${}_{n}\widetilde{A}_{35}$ es peor. Ello es debido a que se incorporan cada vez factores de descuento con vencimientos más lejanos, que son los que peor se ajustan por un número borroso triangular. En nuestra aplicación numérica, podemos observar que si tomamos como referencia la escala endecadaria no podríamos aceptar la aproximación triangular de ${}_{65}\widetilde{A}_{35}$, ya que puede producir en determinados valores un cambio en la escala de verdad a la que pertenecen. Sin embargo, para duraciones inferiores si que podemos aceptar la aproximación triangular de la esperanza matemática de las prestaciones.

A continuación presentamos para las mismas edades que analizamos la expresión de los α-cortes de la $\widetilde{V}[Z]$ y $\widetilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria e indicamos el tanto de interés $i^*\geq 0$ para el cual la varianza alcanza un valor máximo.

	n=10 años $i^*=0$				n=20 años $i^*=0$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	11031,07	15296,54	105,03	123,68	19943,42	37666,81	141,22	194,08
0,1	11261,08	15121,50	106,12	122,97	20722,53	36797,92	143,95	191,83
0,2	11497,76	14949,11	107,23	122,27	21544,33	35954,44	146,78	189,62
0,3	11741,31	14779,32	108,36	121,57	22411,52	35135,53	149,70	187,44
0,4	11991,98	14612,08	109,51	120,88	23327,06	34340,39	152,73	185,31
0,5	12250,02	14447,36	110,68	120,20	24294,05	33568,24	155,87	183,22
0,6	12515,67	14285,10	111,87	119,52	25315,86	32818,33	159,11	181,16
0,7	12789,20	14125,27	113,09	118,85	26396,09	32089,95	162,47	179,14
0,8	13070,89	13967,82	114,33	118,19	27538,57	31382,41	165,95	177,15
0,9	13361,03	13812,71	115,59	117,53	28747,45	30695,02	169,55	175,20
1	13659,90	13659,90	116,88	116,88	30027,15	30027,15	173,28	173,28

	n=40 años $i^*=0$				n=65 años $i^*=0{,}03178$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	25645,83	79712,04	160,14	282,33	17054,19	19402,25	130,59	139,29
0,1	27231,22	76095,65	165,02	275,85	17442,24	19402,25	132,07	139,29
0,2	28973,07	72687,72	170,21	269,61	17815,19	19402,25	133,47	139,29
0,3	30890,52	69474,92	175,76	263,58	18167,35	19402,25	134,79	139,29
0,4	33005,35	66444,81	181,67	257,77	18492,11	19402,25	135,99	139,29
0,5	35342,40	63585,82	188,00	252,16	18781,89	19402,25	137,05	139,29
0,6	37929,93	60887,15	194,76	246,75	18970,19	19402,25	137,73	139,29
0,7	40800,24	58338,70	201,99	241,53	19113,42	19402,25	138,25	139,29
0,8	43990,19	55931,08	209,74	236,50	19225,82	19402,25	138,66	139,29
0,9	47541,97	53655,52	218,04	231,64	19309,11	19402,25	138,96	139,29
1	51503,83	51503,83	226,94	226,94	19365,03	19365,03	139,16	139,16

Tampoco analizaremos en este caso la aproximación triangular a la varianza o a la desviación estándar. Podemos comprobar que, por el método que hemos propuesto, es decir, ajustando un número borroso triangular con el mismo núcleo y soporte, en los casos en que el tanto de interés en que la varianza y la desviación estándar presentan un máximo i^* cumple que $\mu_{\tilde{i}}\left(i^*\right) > 0$, lo cual, por ejemplo ocurre para una duración de 65 años, dicho ajuste no tiene sentido. Si fuera necesario, puede utilizarse el enfoque alternativo analizado en el apartado 1.4.3. de la primera parte de la tesis. Otra cuestión distinta es que i^* no pertenezca al núcleo del número borroso con el que realizamos el cálculo del valor actual, como en los tres primeros vencimientos, entonces el ajuste mediante un número borroso triangular podría resultar aceptable.

3.6. SEGURO MIXTO O ENDOWMENT

3.6.1. Planteamiento general

Para este seguro el valor actual de una unidad monetaria pagadera al final del año de fallecimiento de una cabeza de edad x, es una variable borroso aleatoria que notamos como $\tilde{Z}$ y que se construye a partir de un capital de supervivencia con vencimiento n años más la adición de un seguro temporal pagable al final del año de fallecimiento del asegurado de duración también n años. Así, la variable borroso aleatoria que describe esta estructura actuarial es:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t = 0,1,...,n-1 \\ \tilde{f}_n & \text{con} \quad {}_n p_x \end{cases}$$