la cual, para un nivel α, vendrá caracterizada por las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior $Z^2(\alpha)$,

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases} f^1_{t+1}(\alpha) & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1 \\ f^1_n(\alpha) & \text{con} \quad {}_n p_x \end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha)=\begin{cases} f^2_{t+1}(\alpha) & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1 \\ f^2_n(\alpha) & \text{con} \quad {}_n p_x \end{cases}$$

En cualquier caso, deberemos tomar n>1 ya que si n=0, la prestación es el capital cierto 1, no existiendo ningún tipo de aleatoriedad en su devengo y por tanto no tiene sentido su actualización, ya que devenga en el momento actual; y si n=1, el capital unitario devenga con certeza dentro de un año, por lo que su valor es el número borroso $\tilde{f}_1$ y no una variable borroso aleatoria.

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, será el número borroso $\tilde{E}[Z] = {}_n\tilde{A}_x + {}_n\tilde{E}_x$, cuyos α-cortes vienen dados por:

$$E[Z]_\alpha = \left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha), {}_nA^2_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t+1}(\alpha)_{t|}q_x + f^1_n(\alpha)_n p_x, \sum_{t=0}^{n-1} f^2_{t+1}(\alpha)_{t|}q_x + f^2_n(\alpha)_n p_x\right]=$$
$$=\left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tB^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha), \sum_{t=0}^{n-1} {}_tB^2_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]$$

La varianza borrosa tendrá unos α-cortes, que para un nivel α serán el conjunto nítido:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y\in R^+ \mid y=\sum_{t=0}^{n-1}(x_{t+1})^2 {}_{t|}q_x + (x_n)^2 {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1\ t|}q_x + x_{n\ n}p_x\right)^2, x_{t+1}\in f_{t+1_\alpha} \forall t, x_n \in f_{n_\alpha} \right\}$$
$$=[\text{Min } y, \text{Max } y]$$

Como en las dos últimas estructuras actuariales analizadas, no podemos dar una expresión analítica para los extremos de los α-cortes. Para un α dado, el extremo inferior de $V[Z]_\alpha$, es el mínimo de y; el superior de $V[Z]_\alpha$ es asimismo el valor máximo de y. Éstos pueden ser obtenidos planteando los programas matemáticos:

Minimizar (Maximizar) $y=\sum_{t=0}^{n-1}(x_{t+1})^2 {}_{t|}q_x + (x_n)^2 {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1\ t|}q_x + x_{n\ n}p_x\right)^2$

s.a.:

$f^1_{t+1}(\alpha) \le x_{t+1} \le f^2_{t+1}(\alpha)$ t=0,1,..,n-1

Respecto a la varianza cierta, ya que las varianzas de las variables aleatorias que describen $f^1_{t+1}(\alpha)$ y $f^2_{t+1}(\alpha)$, t=0,1,…,n-1, son:

$$V[Z^1(\alpha)]= \sum_{t=0}^{n-1}\left[f^1_{t+1}(\alpha)\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[f^1_n(\alpha)\right]^2 {}_n p_x \text{ - } \left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha)\right]^2$$

$$V[Z^2(\alpha)]= \sum_{t=0}^{n-1}\left[f^2_{t+1}(\alpha)\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[f^2_n(\alpha)\right]^2 {}_n p_x \text{ - } \left[{}_nA^2_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]^2$$

obtenemos:

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\left[f^1_{t+1}(\alpha)\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[f^1_n(\alpha)\right]^2 {}_n p_x + \sum_{t=0}^{n-1}\left[f^2_{t+1}(\alpha)\right]^2 {}_{t|}q_x + \left[f^2_n(\alpha)\right]^2 {}_n p_x - \right. =$$

$$\left. -\left\{\left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha)\right]^2 + \left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]^2\right\}\right\}d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1\left\{\left[f^1_{t+1}(\alpha)\right]^2 + \left[f^2_{t+1}(\alpha)\right]^2\right\}_{t|}q_x\, d\alpha + \int_0^1\left\{\left[f^1_n(\alpha)\right]^2 + \left[f^2_n(\alpha)\right]^2\right\}_n p_x\, d\alpha - \right.$$

$$\left. -\left\{\int_0^1\left\{\left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha)\right]^2 + \left[{}_nA^2_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]^2\right\}d\alpha\right\}\right\}$$

Por otra parte, la obtención de $D[Z]_\alpha$ y $D^*[Z]$ es inmediata una vez hallado $V[Z]_\alpha$ y $V^*[Z]$.

3.6.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}(1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1\\ (1+i^2(\alpha))^{-n} & \text{con} \quad {}_n p_x\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}(1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t=0,1,...,n-1\\ (1+i^1(\alpha))^{-n} & \text{con} \quad {}_n p_x\end{cases}$$

Siendo entonces los α-cortes de la esperanza de $\tilde{Z}$, $\tilde{E}[Z]$:

$$E[Z]_\alpha = \left[{}_nA^1_x(\alpha)+{}_nE^1_x(\alpha),{}_nA^2_x(\alpha)+{}_nE^2_x(\alpha)\right]=$$

$$=\left[\sum_{t=0}^{n-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t+1)} {}_{t|}q_x + \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-n} {}_n p_x , \sum_{t=0}^{n-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t+1)} {}_{t|}q_x + \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-n} {}_n p_x\right]$$

Dado que no podemos demostrar que la varianza sea una función monótona creciente o decreciente del interés, un α-corte para un nivel α arbitrario se hallará como:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in R^+ \mid y = \sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+x)^{-2n}\, {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+x)^{-n}\, {}_n p_x \right)^2, y \in i_\alpha \right\}$$

de forma que el programa planteado en el apartado anterior para hallar $V[Z]_\alpha$ se reduce a:

$$\text{Min (Max) } y = \sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-2(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+x)^{-2n}\, {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+x)^{-n}\, {}_n p_x \right)^2$$

$$\text{s.a., } i^1(\alpha) \leq x \leq i^2(\alpha)$$

y adaptándonos a la función que define a $V[Z]_\alpha$, los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$ se pueden hallar aplicando la metodología expuesta en el epígrafe 3.4.2.

En cuanto a la varianza cierta, a través de la expresión hallada en el apartado 3.6.1., expresando los factores de actualización a través de los α-cortes del interés, se obtiene de forma inmediata.

3.6.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número constante y triangular, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_x, t = 0,1,...,n-1 \\ (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n} & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_x, t = 0,1,...,n-1 \\ (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n} & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

de esta forma, los α-cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$$E[Z]_\alpha = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}\, {}_n p_x, \right.$$
$$\left. \sum_{t=0}^{n-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\, {}_{t|}q_x + (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}\, {}_n p_x \right]$$

Los α-cortes de la varianza borrosa, y de forma inmediata, los de $\tilde{D}[Z]$, se obtienen sin más que considerar que $i_\alpha = [i^1+(i^2-i^1)\alpha, i^3-(i^3-i^2)\alpha]$. Asimismo, para hallar la varianza cierta, partiendo de las varianzas de las variables aleatorias inferior y superior que define el tipo de interés para un nivel α planteamos:

$$V\left[Z^1(\alpha)\right]=\sum_{r=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2n}\,{}_n p_x-$$

$$-\left[\sum_{r=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}\,{}_n p_x\right]^2$$

$$V\left[Z^2(\alpha)\right]=\sum_{r=0}^{n-1}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2n}\,{}_n p_x-$$

$$-\left[\sum_{r=0}^{n-1}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}\,{}_n p_x\right]^2$$

obtendríamos la varianza cierta como:

$$V^*[Z]_\alpha=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t|}q_x\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2(t+1)}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2(t+1)}\right]d\alpha+\right.$$

$$+{}_n p_x\int_0^1\left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2n}+(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2n}\right]d\alpha-$$

$$-\int_0^1\left\{\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}\,{}_n p_x\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^1-(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x+(1+i^1-(i^2-i^1)\alpha)^{-n}\,{}_n p_x\right]^2\right\}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2t-1}-(1+i^3)^{-2t-1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t-1}-(1+i^2)^{-2t-1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_{t|}q_x}{2t+1}+\right.$$

$$+\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2n+1}-(1+i^3)^{-2n+1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2n+1}-(1+i^2)^{-2n+1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_n p_x}{2n-1}-$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-t-j-1}-(1+i^3)^{-t-j-1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-t-j-1}-(1+i^2)^{-t-j-1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_{t|}q_x\,{}_{j|}q_x}{t+j+1}-$$

$$\left.-2\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-n-t}-(1+i^3)^{-t-n}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-t-n}-(1+i^2)^{-t-n}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_{t|}q_x\,{}_n p_x}{t+n}\right\}$$

Siendo la posterior obtención de $D^*[Z]$, inmediata.

3.6.4. Aplicación numérica

Realizamos como siempre diversos ejemplos numéricos para la estructura que ha sido analizada. Utilizamos las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante y triangular que en el resto de aplicaciones y se sigue suponiendo un capital asegurado de 1.000 unidades monetarias. El asegurado, como en el apartado anterior, tendrá una edad x=35 y las duraciones del seguro mixto serán n=5, 10, 25 y 60 años. Por ejemplo, si la duración del seguro son 5 años, las variables aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_{35},\ t=0,1,...,4\\ 1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-5} & \text{con } {}_{5}p_{35}\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_{t|}q_{35},\ t=0,1,...,4\\ 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-5} & \text{con } {}_{5}p_{35}\end{cases}$$

En primer lugar analizaremos la obtención de la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x y una duración del seguro n, es la suma de números borrosos ${}_{n}\widetilde{A}_{x}+{}_{n}\widetilde{E}_{x}$. También analizamos la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, asumiéndose como siempre una escala endecadaria. Como ${}_{n}\widetilde{A}_{x}$ se puede hallar como $\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t}\widetilde{B}_{x}$; y como conocemos el error absoluto máximo que se comete en los α-cortes de la esperanza matemática de los capitales de fallecimiento y supervivencia que lo componen, que hemos notado como $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$ para ${}_{t}\widetilde{B}_{x}$, y $D_I^*(n)$ y $D_D^*(n)$ para ${}_{n}\widetilde{E}_{x}$, el error que podemos cometer en el nivel de pertenencia de un valor cualquiera por tomar la aproximación triangular de la esperanza matemática no será superior a:

$$\operatorname{Max}\left\{\frac{\sum_{t=0}^{n-1}D_I^*(t)+D_I^*(n)}{{}_{n}A_x^1(1)+{}_{n}E_x^1(1)-{}_{n}A_x^1(0)-{}_{n}E_x^1(0)},\frac{\sum_{t=0}^{n-1}D_D^*(t)+D_D^*(n)}{{}_{n}A_x^2(0)+{}_{n}E_x^2(0)-{}_{n}A_x^2(1)-{}_{n}E_x^2(1)}\right\}$$

Para las estructuras propuestas, el valor del número borroso con el que queremos ajustar la esperanza matemática, la acotación al error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$. vienen dadas en el siguiente cuadro.

n	${}_{n}\widetilde{A}_{35}+{}_{n}\widetilde{E}_{35}$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
5	(784,12, 862,99, 906,00)	0,01	34,43	5,87
10	(616,53, 745,90, 821,65)	0,03	296,04	17,21
25	(313,01, 492,54, 621,41)	0,06	3872,46	62,23
60	(152,93, 302,34, 440,55)	0,10	18683,71	136,69

Podemos comprobar que a medida que la duración del seguro aumenta, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones del seguro mixto es peor. Ello es debido a que se incorporan cada vez más factores de descuento con vencimientos lejanos, que son los que peor se ajustan por un número borroso triangular. En nuestra aplicación numérica, podemos observar que para una escala endecadaria no podríamos aceptar la aproximación triangular si la duración del seguro es 65 años, aunque sí para el resto de vencimientos.

Para las estructuras propuestas, expresamos los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria y hallamos el interés $i^* \geq 0$ para el cual la varianza alcanza mayor valor en cada caso.

	n=5 años i^*=0'42				n=10 años i^*=0'2059			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	14,31	71,71	3,78	8,47	132,72	556,78	11,52	23,60
0,1	15,66	67,05	3,96	8,19	144,35	526,59	12,01	22,95
0,2	17,06	62,48	4,13	7,90	156,28	496,36	12,50	22,28
0,3	18,51	58,00	4,30	7,62	168,50	466,14	12,98	21,59
0,4	20,00	53,63	4,47	7,32	181,00	435,99	13,45	20,88
0,5	21,54	49,36	4,64	7,03	193,75	405,99	13,92	20,15
0,6	23,13	45,20	4,81	6,72	206,75	376,20	14,38	19,40
0,7	24,76	41,17	4,98	6,42	219,97	346,70	14,83	18,62
0,8	26,43	37,27	5,14	6,10	233,39	317,58	15,28	17,82
0,9	28,14	33,51	5,30	5,79	247,02	288,92	15,72	17,00
1	29,89	29,89	5,47	5,47	260,82	260,82	16,15	16,15

	n=25 años i^*=0'07686				n=60 años i^*=0,03412			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	2179,16	5423,79	46,68	73,65	15484,55	18714,92	124,44	136,80
0,1	2326,07	5298,16	48,23	72,79	15987,16	18714,92	126,44	136,80
0,2	2471,91	5159,82	49,72	71,83	16439,86	18714,92	128,22	136,80
0,3	2616,36	5008,36	51,15	70,77	16844,35	18714,92	129,79	136,80
0,4	2759,10	4843,47	52,53	69,60	17202,54	18714,92	131,16	136,80
0,5	2899,86	4664,90	53,85	68,30	17516,49	18714,92	132,35	136,80
0,6	3038,41	4472,51	55,12	66,88	17788,36	18714,92	133,37	136,80
0,7	3174,52	4266,26	56,34	65,32	18020,38	18714,92	134,24	136,80
0,8	3308,02	4046,28	57,52	63,61	18214,78	18714,74	134,96	136,80
0,9	3438,74	3812,87	58,64	61,75	18373,83	18660,82	135,55	136,60
1	3566,53	3566,53	59,72	59,72	18499,74	18499,74	136,01	136,01

Valiendo, en este caso, los mismos comentarios efectuados en los dos apartados precedentes.