## 3.7. RENTA VITALICIA ANTICIPADA

### 3.7.1. Planteamiento general

Como en el apartado 2.6., suponemos que, de forma general existe un diferimiento de d años hasta el devengo de la primera cuantía de la renta. Si el asegurado fallece durante los d primeros años, la renta no devenga, y si sobrevive, devenga una unidad monetaria al principio de cada año mientras el asegurado se mantiene con vida.

El valor actual de las prestaciones (primas) unitarias correspondientes a esta estructura, viene dada por una variable borroso aleatoria que podemos notar como:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ \sum_{j=d}^{t} \tilde{f}_j & \text{con } {}_{t|}q_{x} \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

Así, $\sum_{j=d}^{t} \tilde{f}_j$ es el valor actual de una renta unitaria, diferida d años y anticipada, de t-d+1 términos,

cuyo valor notamos como ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{\overline{t-d+1|}}$, siendo sus α-cortes:

$${}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}_{\alpha}} = \left[{}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{t-d+1|}}(\alpha), {}_{d|}\ddot{a}^{2}_{\overline{t-d+1|}}(\alpha)\right] = \left[\sum_{j=d}^{t} f_j^1(\alpha), \sum_{j=d}^{t} f_j^2(\alpha)\right]$$

De esta forma, la función de cuantía de las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior $Z^2(\alpha)$ que la definen para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ {}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{t-d+1|}}(\alpha) = \sum_{j=d}^{t} f_j^1(\alpha) & \text{con } {}_{t|}q_{x}, \ t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ {}_{d|}\ddot{a}^{2}_{\overline{t-d+1|}}(\alpha) = \sum_{j=d}^{t} f_j^2(\alpha) & \text{con } {}_{t|}q_{x}, \ t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

La esperanza matemática de la variable borroso aleatoria valor actual de la renta, será un número borroso que notamos como ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{x}$ y cuyos α-cortes toman como expresión, a partir de la que finalmente hemos obtenido en el apartado 2.6. de esta parte de la tesis:

$$_{d|}\ddot{a}_{x\,\alpha} = \left[_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha), {_{d|}}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha)_t p_x\,,\ \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha)_t p_x\right] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {_t}E_x^1(\alpha), \sum_{t=0}^{w-x-1} {_t}E_x^2(\alpha)\right]$$

Asimismo, la varianza borrosa tendrá unos $\alpha$-cortes que serán el conjunto nítido para un determinado nivel $\alpha$, que a partir de la expresión que finalmente hemos obtenido en el apartado 2.6. de esta parte de la tesis podemos notar como:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in R^+ \mid y = \sum_{t=d}^{w-x-1} (x_t)^2\, {_t}p_x\, {_t}q_x - 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} x_t x_j\, {_t}p_x\, {_j}p_x\,,\ x_t \in f_{t_\alpha}\ \forall t \right\} = [\text{Min } y, \text{Max } y]$$

Como ya comprobamos en el apartado 2.8, la varianza – y por tanto la desviación estándar – son decrecientes respecto al tipo de interés de actualización; y por tanto, siempre el extremo superior de los $\alpha$-cortes de éstas medidas se hallarán a través del extremo superior del factor de descuento y viceversa. De esta forma, sus $\alpha$-cortes son:

$$V[Z]_\alpha = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j^1(\alpha)\right]^2 {_{t|}}q_x - \left[_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha)\right]^2, \sum_{t=d}^{w-x-1}\left[\sum_{j=d}^{t} f_j^2(\alpha)\right]^2 {_{t|}}q_x - \left[_{d|}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right]^2\right] =$$

$$= \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x\,,\right.$$
$$\left.\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x\right]$$

Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que considerar que:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x$$

y,

$$V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x$$

Se obtiene,

$$V^*[Z] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x + \right.$$
$$\left. + \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha)_t p_x\, {_t}q_x + 2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)_t p_x\, {_j}q_x\right] d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left\{f_t^1(\alpha)+f_t^2(\alpha)\right\}_t p_{x\;t}q_x+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left\{f_t^1(\alpha)f_j^1(\alpha)+f_t^2(\alpha)f_j^2(\alpha)\right\}_t p_{x\;j}q_x\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=d}^{w-x-1}{}_t p_{x\;t}q_x\int_0^1\left\{f_t^1(\alpha)+f_t^2(\alpha)\right\}d\alpha+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}{}_t p_{x\;j}q_x\int_0^1\left\{f_t^1(\alpha)f_j^1(\alpha)+f_t^2(\alpha)f_j^2(\alpha)\right\}d\alpha\right\}$$

### 3.7.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$, es decir, la inferior y superior son:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_d q_x\\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^2(\alpha)} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t=d,d+1,\ldots,w-x-1\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_d q_x\\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1(\alpha)} & \text{con } {}_{t|}q_x \quad t=d,d+1,\ldots,w-x-1\end{cases}$$

Siendo los $\alpha$-cortes de la t-ésima realización de la variable borroso aleatoria ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_{\overline{t-d+1}|}$, con $t\geq d$:

$${}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|\alpha}=\left[{}_{d|}\ddot{a}^1_{\overline{t-d+1}|}(\alpha),{}_{d|}\ddot{a}^2_{\overline{t-d+1}|}(\alpha)\right]=\left[{}_{d|}\ddot{a}^1_{\overline{t-d+1}|i^2(\alpha)},{}_{d|}\ddot{a}^2_{\overline{t-d+1}|i^1(\alpha)}\right]=$$
$$=\left[\frac{1-\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-(t-d+1)}}{i^2(\alpha)}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-d},\frac{1-\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-(t-d+1)}}{i^1(\alpha)}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-d}\right]$$

Asimismo, los $\alpha$-cortes de la esperanza de $\tilde{Z}$, ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_x$ son:

$${}_{d|}\ddot{a}_{x\alpha}=\left[{}_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha),{}_{d|}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t}{}_t p_x,\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t}{}_t p_x\right]$$

En cuanto a la varianza borrosa, los $\alpha$-cortes se obtienen a través de la expresión propuesta en 3.7.1, como función de $i_\alpha$. De esta forma obtenemos:

$$V[Z]_\alpha=\left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-2t}{}_t p_{x\;t}q_x+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t-j}{}_t p_{x\;j}q_x,\right.$$
$$\left.\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-2t}{}_t p_{x\;t}q_x+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t-j}{}_t p_{x\;j}q_x\right]$$

En cuanto a la varianza cierta, a través de su correspondiente expresión, ya hallada en 3.7.1. y expresando los factores de actualización a través de los $\alpha$-cortes del interés, la integral definida que debemos resolver es inmediata. Por otra parte, la posterior obtención de $D[Z]_\alpha$ y $D^*[Z]$, también será directa.

### 3.7.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número borroso triangular igual, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_{d}q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_x,\ t=d,\dots,w-x-1\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_{d}q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_x,\ t=d,\dots,w-x-1\end{cases}$$

de esta forma, los $\alpha$-cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$${}_{d|}\ddot{a}_{x\,\alpha}=\left[{}_{d|}\ddot{a}^1_x(\alpha),{}_{d|}\ddot{a}^2_x(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha\right)^{-t}{}_{t}p_x,\ \sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha\right)^{-t}{}_{t}p_x\right]$$

Asimismo, sustituyendo en $V^1[Z](\alpha)$ y $V^2[Z](\alpha)$, $i^2(\alpha) = i^3 -(i^3 - i^2)\alpha$ y $i^1(\alpha) = i^1 + (i^2 - i^1)\alpha$, obtenemos:

$$V[Z]_\alpha=\left[\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-2t}{}_{t}p_x\,{}_{t}q_x+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-t-j}{}_{t}p_x\,{}_{j}q_x,\right.$$
$$\left.\sum_{t=d}^{w-x-1}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-2t}{}_{t}p_x\,{}_{t}q_x+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-t-j}{}_{t}p_x\,{}_{j}q_x\right]$$

Y por otra parte, la varianza cierta será entonces:

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=d}^{w-x-1}{}_{t}p_x\,{}_{t}q_x\int_0^1\left\{\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-2t}+\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-2t}\right\}d\alpha+\right.$$
$$\left.+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}{}_{t}p_x\,{}_{j}q_x\int_0^1\left\{\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-t-j}+\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-t-j}\right\}d\alpha\right.$$

Deberemos diferenciar los siguientes casos, que dependerán del diferimiento de la renta. El primer caso, es que d=0 o bien d=1, tratándose en este segundo supuesto de una renta vitalicia, inmediata y vencida. En ambos casos:

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2}+\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1}\right]{}_1p_x\,{}_1q_x+\sum_{t=2}^{w-x-1}\left\{\begin{array}{l}\frac{\left[(1+i^2)^{-2t+1}-(1+i^3)^{-2t+1}\right]}{i^3-i^2}+\\+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t+1}-(1+i^2)^{-2t+1}\right]}{i^2-i^1}\end{array}\right\}\frac{{}_tp_x\,{}_tq_x}{2t-1}+\right.$$

$$\left.+2\sum_{t=2}^{w-x-1}\sum_{j=1}^{t-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-t-j+1}-(1+i^3)^{-t-j+1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-t-j+1}-(1+i^2)^{-t-j+1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_tp_x\,{}_jq_x}{t+j-1}\right\}$$

En el caso en que d≥2, se obtiene entonces:

$$V^*[Z]=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=d}^{w-x-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-2t+1}-(1+i^3)^{-2t+1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-2t+1}-(1+i^2)^{-2t+1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_tp_x\,{}_tq_x}{2t-1}\right.$$

$$\left.+2\sum_{t=d+1}^{w-x-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left\{\frac{\left[(1+i^2)^{-t-j+1}-(1+i^3)^{-t-j+1}\right]}{i^3-i^2}+\frac{\left[(1+i^1)^{-t-j+1}-(1+i^2)^{-t-j+1}\right]}{i^2-i^1}\right\}\frac{{}_tp_x\,{}_jq_x}{t+j-1}\right\}$$

### 3.7.4. Aplicación numérica

Como siempre, en primer lugar analizaremos la obtención de la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x es la suma de números borrosos ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_x=\sum_{t=d}^{w-x-1}{}_t\tilde{E}_x$, y la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, asumiéndose una escala endecadaria. Es fácil comprobar que ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_x$ se obtiene como la suma de la esperanza matemática de capitales de supervivencia; y ya conocemos el error absoluto máximo que se comete en los α-cortes de estos últimos al aproximarlos triangularmente como un número borroso con el mismo soporte y núcleo. Si notamos para ${}_t\tilde{E}_x$ como $D_I^*(t)$ al error que se comete a la izquierda y como $D_D^*(t)$ al que se comete a la derecha, el error que como máximo se incurre en la función característica al aproximar triangularmente ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_x$ vendrá dado por:

$$\mathrm{Max}\left\{\frac{\sum_{t=d}^{w-x-1}D_I^*(t)}{{}_{d|}\ddot{a}_x^1(1)-{}_{d|}\ddot{a}_x^1(0)},\frac{\sum_{t=d}^{w-x-1}D_D^*(t)}{{}_{d|}\ddot{a}_x^2(0)-{}_{d|}\ddot{a}_x^2(1)}\right\}$$

Por otra parte, en las rentas, el extremo inferior de los α-cortes de la varianza borrosa viene dado por la trayectoria superior para ese mismo nivel de presunción de los tipos de interés de actualización y viceversa, lo cual también ocurría con la esperanza matemática. Dado que normalmente sólo nos interesan los α-cortes del número borroso que estamos hallando para unos determinados niveles de presunción, que vendrán dados por la escala de verdad elegida (en nuestro caso, la endecadaria), analizaremos, siguiendo de forma un poco más laxa la metodología de siempre, hasta que punto es razonable ajustar un número borroso triangular a la varianza y a la desviación estándar borrosas.

Utilizando las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante y triangular que en el resto de aplicaciones, suponemos una renta de supervivencia de 100 unidades monetarias anuales anticipadas. Los asegurados tendrán unas edades x=45 y 65 años y los diferimientos de las mismas serán d=0 y 20 años. Por ejemplo, si el asegurado tiene 45 años y el diferimiento del seguro es d=20 años, las variables borroso aleatorias inferior y superior para un nivel de presunción α dado son:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100\cdot{}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19}|0'05-0'02\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_{45} \text{ con } t=20,21,...,49\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100\cdot{}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19}|0'02+0'01\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_{45} \text{ con } t=20,21,...,49\end{cases}$$

Para las estructuras de rentas vitalicias anticipadas propuestas, la expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro.

| | $\tilde{E}[Z]$ | Error | $V^*[Z]$ | $D^*[Z]$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{\ddot{a}}_{45}$ | (1619,39, 2092,08, 2423,86) | 0,06 | 284170,95 | 533,08 |
| ${}_{20\|}\tilde{\ddot{a}}_{45}$ | (365,08, 629,42, 835,44) | 0,07 | 146784,36 | 383,12 |
| $\tilde{\ddot{a}}_{65}$ | (1132,33, 1328,89, 1451,19) | 0,04 | 274848,01 | 524,26 |
| ${}_{20\|}\tilde{\ddot{a}}_{65}$ | (76,28, 119,97, 151,20) | 0,06 | 36428,99 | 190,86 |

Podemos comprobar que a medida que el diferimiento de la renta aumenta o la edad del rentista disminuye, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de esta estructura es peor. Ello es debido a que el valor actual se compone en mayor medida por valores actuales de capitales con vencimientos lejanos, y tal como se ha venido comentando, el mal ajuste triangular del valor actual de éstos repercute en el ajuste final mediante un número borroso triangular de ${}_{d}\tilde{\ddot{a}}_{x}$.

A continuación presentamos para las mismas edades que analizamos el valor de los $\alpha$-cortes de la $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria, analizándose la bondad del ajuste triangular tal como hemos visto al inicio del apartado. Ello es debido a que no podremos, tal como ocurría en el apartado 4.3.4. de la primera parte de la tesis, ajustar de forma casi “perfecta” un polinomio de segundo grado de $\alpha$, por que hemos optado por “discretizar” el número borroso tomando una escala endecadaria. A partir de aquí, podremos hallar los niveles $\alpha$ donde se produce mayor error en los extremos de los $\alpha$-cortes, las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha y el error que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor cualquiera por tomar una función de pertenencia lineal de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$.

Los $\alpha$-cortes de las varianzas y de las desviaciones estándar para cada una de las rentas analizadas son:

| | x=45 años d=0 años | | | | x=45 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 114793,08 | 462263,56 | 338,81 | 679,90 | 42184,56 | 264188,66 | 205,39 | 513,99 |
| 0,1 | 124686,72 | 438850,26 | 353,11 | 662,46 | 47407,88 | 247754,06 | 217,73 | 497,75 |
| 0,2 | 135619,83 | 416788,95 | 368,27 | 645,59 | 53317,79 | 232394,24 | 230,91 | 482,07 |
| 0,3 | 147717,91 | 395993,97 | 384,34 | 629,28 | 60009,94 | 218035,53 | 244,97 | 466,94 |
| 0,4 | 161123,31 | 376385,45 | 401,40 | 613,50 | 67594,04 | 204609,52 | 259,99 | 452,34 |
| 0,5 | 175997,69 | 357888,95 | 419,52 | 598,24 | 76196,08 | 192052,71 | 276,04 | 438,24 |
| 0,6 | 192524,88 | 340435,05 | 438,78 | 583,47 | 85960,86 | 180306,12 | 293,19 | 424,62 |
| 0,7 | 210914,14 | 323959,00 | 459,25 | 569,17 | 97054,97 | 169314,92 | 311,54 | 411,48 |
| 0,8 | 231404,03 | 308400,38 | 481,04 | 555,34 | 109670,20 | 159028,20 | 331,16 | 398,78 |
| 0,9 | 254266,80 | 293702,79 | 504,25 | 541,94 | 124027,58 | 149398,60 | 352,18 | 386,52 |
| 1 | 279813,58 | 279813,58 | 528,97 | 528,97 | 140382,11 | 140382,11 | 374,68 | 374,68 |

| | x=65 años d=0 años | | | | x=65 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 161820,58 | 377490,12 | 402,27 | 614,40 | 14050,52 | 59071,08 | 118,53 | 243,05 |
| 0,1 | 170471,11 | 366101,45 | 412,88 | 605,06 | 15427,26 | 56241,23 | 124,21 | 237,15 |
| 0,2 | 179690,93 | 355118,26 | 423,90 | 595,92 | 16944,17 | 53551,65 | 130,17 | 231,41 |
| 0,3 | 189523,51 | 344524,28 | 435,34 | 586,96 | 18616,05 | 50995,17 | 136,44 | 225,82 |
| 0,4 | 200016,06 | 334303,99 | 447,23 | 578,19 | 20459,36 | 48564,97 | 143,04 | 220,37 |
| 0,5 | 211219,85 | 324442,50 | 459,59 | 569,60 | 22492,36 | 46254,60 | 149,97 | 215,07 |
| 0,6 | 223190,66 | 314925,60 | 472,43 | 561,18 | 24735,33 | 44057,94 | 157,27 | 209,90 |
| 0,7 | 235989,13 | 305739,70 | 485,79 | 552,94 | 27210,82 | 41969,21 | 164,96 | 204,86 |
| 0,8 | 249681,27 | 296871,79 | 499,68 | 544,86 | 29943,86 | 39982,93 | 173,04 | 199,96 |
| 0,9 | 264338,99 | 288309,41 | 514,14 | 536,94 | 32962,33 | 38093,90 | 181,56 | 195,18 |
| 1 | 280040,67 | 280040,67 | 529,19 | 529,19 | 36297,19 | 36297,19 | 190,52 | 190,52 |

Asimismo, los α-cortes de las varianzas y las desviaciones estándar si tomamos para éstas un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo que $\widetilde{V}[Z]$ y $\widetilde{D}[Z]$ son:

| | x=45 años d=0 años | | | | x=45 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 114793,08 | 462263,56 | 338,81 | 679,90 | 42184,56 | 264188,66 | 205,39 | 513,99 |
| 0,1 | 131295,13 | 444018,57 | 357,83 | 664,81 | 52004,32 | 251808,00 | 222,32 | 500,06 |
| 0,2 | 147797,18 | 425773,57 | 376,84 | 649,71 | 61824,07 | 239427,35 | 239,25 | 486,13 |
| 0,3 | 164299,23 | 407528,57 | 395,86 | 634,62 | 71643,83 | 227046,69 | 256,17 | 472,20 |
| 0,4 | 180801,28 | 389283,57 | 414,88 | 619,53 | 81463,58 | 214666,04 | 273,10 | 458,27 |
| 0,5 | 197303,33 | 371038,57 | 433,89 | 604,44 | 91283,34 | 202285,38 | 290,03 | 444,33 |
| 0,6 | 213805,38 | 352793,57 | 452,91 | 589,34 | 101103,09 | 189904,73 | 306,96 | 430,40 |
| 0,7 | 230307,43 | 334548,58 | 471,93 | 574,25 | 110922,85 | 177524,07 | 323,89 | 416,47 |
| 0,8 | 246809,48 | 316303,58 | 490,94 | 559,16 | 120742,60 | 165143,42 | 340,82 | 402,54 |
| 0,9 | 263311,53 | 298058,58 | 509,96 | 544,07 | 130562,35 | 152762,76 | 357,75 | 388,61 |
| 1 | 279813,58 | 279813,58 | 528,97 | 528,97 | 140382,11 | 140382,11 | 374,68 | 374,68 |

| | x=65 años d=0 años | | | | x=65 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 161820,58 | 377490,12 | 402,27 | 614,40 | 14050,52 | 59071,08 | 118,53 | 243,05 |
| 0,1 | 173642,59 | 367745,18 | 414,96 | 605,88 | 16275,18 | 56793,69 | 125,73 | 237,79 |
| 0,2 | 185464,60 | 358000,23 | 427,65 | 597,36 | 18499,85 | 54516,30 | 132,93 | 232,54 |
| 0,3 | 197286,61 | 348255,29 | 440,35 | 588,84 | 20724,52 | 52238,91 | 140,13 | 227,29 |
| 0,4 | 209108,62 | 338510,34 | 453,04 | 580,32 | 22949,19 | 49961,52 | 147,33 | 222,03 |
| 0,5 | 220930,63 | 328765,40 | 465,73 | 571,80 | 25173,85 | 47684,13 | 154,53 | 216,78 |
| 0,6 | 232752,64 | 319020,45 | 478,42 | 563,27 | 27398,52 | 45406,75 | 161,72 | 211,53 |
| 0,7 | 244574,65 | 309275,51 | 491,11 | 554,75 | 29623,19 | 43129,36 | 168,92 | 206,28 |
| 0,8 | 256396,66 | 299530,56 | 503,80 | 546,23 | 31847,85 | 40851,97 | 176,12 | 201,02 |
| 0,9 | 268218,67 | 289785,62 | 516,50 | 537,71 | 34072,52 | 38574,58 | 183,32 | 195,77 |
| 1 | 280040,67 | 280040,67 | 529,19 | 529,19 | 36297,19 | 36297,19 | 190,52 | 190,52 |

Por tanto, los niveles α en los que se cometen mayores errores en los extremos de los α-cortes a la izquierda y a la derecha, señalados en negrita vienen en los siguientes cuadros:

| | x=45 años d=0 años | | | | x=45 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Errores absolutos en: | | | | Errores absolutos en: | | | |
| α | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0,1 | 6608,40 | 5168,31 | 4,72 | 2,35 | 4596,44 | 4053,94 | 4,58 | 2,31 |
| 0,2 | 12177,34 | 8984,61 | 8,58 | 4,12 | 8506,28 | 7033,10 | 8,34 | 4,06 |
| 0,3 | 16581,32 | 11534,60 | 11,52 | 5,34 | 11633,89 | 9011,16 | 11,21 | 5,26 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,4 | 19677,97 | 12898,12 | 13,47 | 6,03 | 13869,55 | 10056,52 | 13,12 | 5,93 |
| **0,5** | **21305,63** | **13149,62** | **14,37** | **6,20** | 15087,26 | **10232,67** | **14,00** | **6,10** |
| **0,6** | 21280,50 | 12358,52 | 14,13 | 5,88 | **15142,23** | 9598,61 | 13,77 | 5,78 |
| 0,7 | 19393,29 | 10589,58 | 12,67 | 5,08 | 13867,87 | 8209,15 | 12,35 | 4,99 |
| 0,8 | 15405,45 | 7903,20 | 9,90 | 3,82 | 11072,40 | 6115,22 | 9,65 | 3,76 |
| 0,9 | 9044,73 | 4355,79 | 5,71 | 2,12 | 6534,77 | 3364,17 | 5,57 | 2,09 |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

| | x=65 años d=0 años | | | | x=65 años d=20 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Errores absolutos en: | | | | Errores absolutos en: | | | |
| α | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ | $V^1(\alpha)$ | $V^2(\alpha)$ | $D^1(\alpha)$ | $D^2(\alpha)$ |
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0,1 | 3171,47 | 1643,73 | 2,08 | 0,82 | 847,92 | 552,47 | 1,53 | 0,64 |
| 0,2 | 5773,66 | 2881,98 | 3,75 | 1,44 | 1555,68 | 964,65 | 2,76 | 1,13 |
| 0,3 | 7763,09 | 3731,00 | 5,00 | 1,88 | 2108,47 | 1243,74 | 3,69 | 1,47 |
| 0,4 | 9092,56 | 4206,36 | 5,81 | 2,13 | 2489,83 | 1396,55 | 4,29 | 1,66 |
| **0,5** | **9710,77** | **4322,90** | **6,14** | **2,20** | **2681,49** | **1429,54** | **4,55** | **1,71** |
| 0,6 | 9561,97 | 4094,85 | 5,99 | 2,09 | 2663,19 | 1348,80 | 4,45 | 1,63 |
| 0,7 | 8585,52 | 3535,81 | 5,33 | 1,82 | 2412,37 | 1160,14 | 3,97 | 1,41 |
| 0,8 | 6715,39 | 2658,78 | 4,12 | 1,37 | 1903,99 | 869,04 | 3,08 | 1,07 |
| 0,9 | 3879,67 | 1476,21 | 2,36 | 0,77 | 1110,20 | 480,68 | 1,76 | 0,59 |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

En casi todos los casos el error máximo se comete para un nivel de presunción de aproximadamente el 0'5, por lo que el ajuste cuadrático de los α-cortes puede considerarse aceptable.

Por tanto, los errores que cometemos por la aproximación triangular de la varianza y la desviación estándar en cada uno de los seguros es:

| | Error en la varianza | Error en la Desviación estándar |
|---|---|---|
| x=45 d=0 | 0,13 | 0,08 |
| x=45 d=0 | 0,15 | 0,08 |
| x=65 d=0 | 0,08 | 0,05 |
| x=65 d=20 | 0,12 | 0,06 |

Podemos comprobar que a menor edad del asegurado –y por tanto, mayor duración de la renta-, los ajustes por un número borroso triangular de la varianza y de la desviación estándar son peores y asimismo, también empeoran si aumentamos el diferimiento de la renta; todo ello por las razones ya conocidas. Así, en principio aceptaríamos en una escala endecadaria, y para todos los seguros, la aproximación triangular de la desviación estándar, pero excepto en la renta donde x=65 y d=0, no aceptaríamos la aproximación triangular de la varianza.

También puede ser comprobado que para un mismo tipo del seguro, los errores que se cometen por ajustar triangularmente la esperanza matemática y la desviación estándar son menores que los errores que se cometen ajustando triangularmente la varianza, ya que en la varianza incorporamos, al elevar al cuadrado los factores de actualización que intervienen en el cálculo, factores de actualización con un vencimiento multiplicado por dos respecto a los que quedan incorporados en la esperanza matemática y en la desviación estándar.

## 3.8. RENTA TEMPORAL ANTICIPADA

### 3.8.1. Planteamiento general

En este caso, el valor actual de las prestaciones unitarias vienen dadas por la variable borroso aleatoria $\widetilde{Z}$ que podemos notar como:

$$\widetilde{Z}=\begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ \sum_{j=d}^{t}\widetilde{f}_{j} & \text{con } {}_{t|}q_{x} \qquad t=d,d+1,\dots,d+n-1 \\ \sum_{j=d}^{d+n-1}\widetilde{f}_{j} & \text{con } \sum_{t=d+n-1}^{w-x-1} {}_{t|}q_{x} = {}_{d+n}p_{x} \end{cases}$$

la cual, para un nivel α, y a través de los α-cortes de $\widetilde{f}_j$, vendrá caracterizada por las correspondientes variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$, y superior $Z^2(\alpha)$, que serán:

$$Z^{1}(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_{x} \\ {}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{t-d+1|}}(\alpha)=\sum_{r=d}^{t} f_{r}^{1}(\alpha) & \text{con } {}_{t|}q_{x} \qquad t=d,d+1,\dots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}^{1}_{\overline{n|}}(\alpha)=\sum_{r=d}^{d+n-1} f_{r}^{1}(\alpha) & \text{con } {}_{d+n}p_{x} \end{cases}$$

y,