$$Z^2(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{con } {}_{d}q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}^2_{\overline{t-d+1|}}(\alpha)=\sum_{r=d}^{t} f_r^2(\alpha) & \text{con } {}_{t|}q_x \qquad t=d,d+1,\ldots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}^2_{\overline{n|}}(\alpha)=\sum_{r=d}^{t} f_r^2(\alpha) & \text{con } {}_{d+n}p_x \end{cases}$$

En cualquier caso, el número de términos de la renta debe ser tal que n≥2, ya que si n=1, nos encontraríamos en el caso de un capital diferido, cuyo análisis ya ha sido realizado en 3.3.

Así pues, la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria valor actual de la renta, $\tilde{E}[Z]$, será un número borroso que podemos notar como ${}_{d|n}\tilde{\ddot{a}}_x$ y cuyos α-cortes los obtenemos, a partir de la expresión obtenida en el apartado 2.7. con certeza en el tipo de interés como:

$${}_{d|n}\ddot{a}_{x\,\alpha}=\left[{}_{d|n}\ddot{a}_x^1(\alpha),{}_{d|n}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^1(\alpha)\,{}_tp_x,\ \sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^2(\alpha)\,{}_tp_x\right]=\left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tE_x^1(\alpha),\ \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tE_x^2(\alpha)\right]$$

Asimismo, la varianza borrosa para un determinado nivel α tendrá unos α-cortes que, a partir del resultado obtenido con certeza en los tipos de interés en el apartado 2.7., serán el conjunto nítido:

$$V[Z]_\alpha=\left\{y\in R^+ \mid y=\sum_{t=d}^{d+n-1}(x_t)^2\,{}_tp_x\,{}_tq_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} x_t x_j\,{}_tp_x\,{}_jp_x,\ x_t\in f_{t_\alpha}\ \forall t\right\}=$$

=[Min y, Max y]

Como ya hemos comentado en el apartado 2.8. de esta tesis, la varianza es monótona decreciente (creciente) respecto al tipo de interés de cualquier periodo, (factores de actualización) por lo que los α-cortes de ésta se hallarán como:

$$V[Z]_\alpha=\left[\sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t^1(\alpha)\right]^2{}_tp_x\,{}_tq_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha)f_j^1(\alpha)\,{}_tp_x\,{}_jq_x,\right.$$

$$\left.\sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t^2(\alpha)\right]^2{}_tp_x\,{}_tq_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha)f_j^2(\alpha)\,{}_tp_x\,{}_jq_x\right]$$

Es decir, el extremo inferior de los α-cortes se obtiene a través de la varianza de $Z^1(\alpha)$, y el superior a través de $Z^2(\alpha)$. Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que considerar que:

$$V[Z^1(\alpha)]=\sum_{t=d}^{d+n-1}\left[f_t^1(\alpha)\right]^2{}_tp_x\,{}_tq_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha)f_j^1(\alpha)\,{}_tp_x\,{}_jq_x$$

y,

$$V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[f_t^2(\alpha)\right]^2 {}_t p_x \, {}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)_t p_x \, {}_j q_x$$

De forma que,

$$V^*[Z] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^1(\alpha)_t p_x \, {}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha)_t p_x \, {}_j q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^2(\alpha)_t p_x \, {}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)_t p_x \, {}_j q_x \right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} \left\{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\right\}_t p_x \, {}_t q_x + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} \left\{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\right\}_t p_x \, {}_j q_x \right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t p_x \, {}_t q_x \int_0^1 \left\{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\right\} d\alpha + 2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} {}_t p_x \, {}_j q_x \int_0^1 \left\{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\right\} d\alpha \right\}$$

3.8.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$, se pueden expresar como:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}\, i^2(\alpha)} & \text{con } {}_{t|} q_x \qquad t = d,\dots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}\, i^2(\alpha)} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}\, i^1(\alpha)} & \text{con } {}_{t|} q_x \qquad t = d,\dots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}\, i^1(\alpha)} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α-cortes de la esperanza de ${}_{d|}\tilde{\ddot{a}}_x$:

$${}_{d|}\ddot{a}_{x\,\alpha} = \left[{}_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right] = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} \left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t} {}_t p_x , \sum_{t=d}^{d+n-1} \left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t} {}_t p_x\right]$$

En cuanto a la varianza borrosa, sus α-cortes se obtienen como función de i_α, de forma que:

$$V[Z]_\alpha = \left[V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)\right] = \left[V\left[Z^1(\alpha)\right], V\left[Z^2(\alpha)\right]\right]$$

y entonces:

$$V^1[Z](\alpha)=\sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-2t}{}_t p_x\,{}_t q_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^2(\alpha)\right)^{-t-j}{}_t p_x\,{}_j q_x$$

$$V^2[Z](\alpha)=\sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-2t}{}_t p_x\,{}_t q_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^1(\alpha)\right)^{-t-j}{}_t p_x\,{}_j q_x$$

En cuanto a la varianza cierta, a través de su expresión más general, propuesta en 3.8.1., y expresando los factores de actualización a través de los α-cortes del interés, la integral definida a resolver es inmediata.

3.8.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número borroso igual para todos ellos y triangular, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}\,i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_x \qquad t=d,\ldots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_{d+n}p_x\end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1|}\,i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_x \qquad t=d,\ldots,d+n-1 \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_{d+n}p_x\end{cases}$$

de esta forma, los α-cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$${}_{d|}\ddot{a}_{x\,\alpha}=\left[{}_{d|n}\ddot{a}_x^1(\alpha),{}_{d|n}\ddot{a}_x^2(\alpha)\right]=\left[\sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha\right)^{-t}{}_t p_x,\ \sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha\right)^{-t}{}_t p_x\right]$$

Por otra parte, sustituyendo en $V^1[Z](\alpha)$ y $V^2[Z](\alpha)$, $i^2(\alpha)$ y $i^1(\alpha)$ respectivamente, obtenemos los extremos de la varianza borrosa como:

$$V^1[Z](\alpha)=\sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-2t}{}_t p_x\,{}_t q_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^3-\left(i^3-i^2\right)\alpha\right)^{-t-j}{}_t p_x\,{}_j q_x$$

y,

$$V^2[Z](\alpha)=\sum_{t=d}^{d+n-1}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-2t}{}_t p_x\,{}_t q_x+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-t-j}{}_t p_x\,{}_j q_x$$

De esta forma, la varianza cierta se obtendrá como:

$$V^{*}[Z]=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{x}\int_{0}^{1}\left\{\left(1+i^{3}-\left(i^{3}-i^{2}\right)\alpha\right)^{-2t}+\left(1+i^{1}+\left(i^{2}-i^{1}\right)\alpha\right)^{-2t}\right\}d\alpha+\right.$$

$$\left.+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1} {}_{t}p_{x}\,{}_{j}q_{x}\int_{0}^{1}\left\{\left(1+i^{3}-\left(i^{3}-i^{2}\right)\alpha\right)^{-t-j}+\left(1+i^{3}-\left(i^{3}-i^{2}\right)\alpha\right)^{-t-j}\right\}d\alpha\right\}$$

En este caso, deberemos diferenciar, como con las rentas vitalicias, diferentes casos. Si d=0 estamos ante una renta temporal, inmediata y anticipada o d=1, tratándose de una renta temporal, inmediata y vencida:

$$V^{*}[Z]=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\ln\dfrac{1+i^{3}}{1+i^{2}}}{i^{3}-i^{2}}+\frac{\ln\dfrac{1+i^{2}}{1+i^{1}}}{i^{2}-i^{1}}\right]{}_{1}p_{x}\,{}_{1}q_{x}+\sum_{t=2}^{n-1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left[(1+i^{2})^{-2t+1}-(1+i^{3})^{-2t+1}\right]}{i^{3}-i^{2}}+\\+\dfrac{\left[(1+i^{1})^{-2t+1}-(1+i^{2})^{-2t+1}\right]}{i^{2}-i^{1}}\end{array}\right\}\frac{{}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{x}}{2t-1}+\right.$$

$$\left.+2\sum_{t=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{t-1}\left\{\frac{\left[(1+i^{2})^{-t-j+1}-(1+i^{3})^{-t-j+1}\right]}{i^{3}-i^{2}}+\frac{\left[(1+i^{1})^{-t-j+1}-(1+i^{2})^{-t-j+1}\right]}{i^{2}-i^{1}}\right\}\frac{{}_{t}p_{x}\,{}_{j}q_{x}}{t+j-1}\right\}$$

En el caso en que d≥2, se obtiene entonces:

$$V^{*}[Z]=\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=d}^{d+n-1}\left\{\frac{\left[(1+i^{2})^{-2t+1}-(1+i^{3})^{-2t+1}\right]}{i^{3}-i^{2}}+\frac{\left[(1+i^{1})^{-2t+1}-(1+i^{2})^{-2t+1}\right]}{i^{2}-i^{1}}\right\}\frac{{}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{x}}{2t-1}\right.$$

$$\left.+2\sum_{t=d+1}^{d+n-1}\sum_{j=d}^{t-1}\left\{\frac{\left[(1+i^{2})^{-t-j+1}-(1+i^{3})^{-t-j+1}\right]}{i^{3}-i^{2}}+\frac{\left[(1+i^{1})^{-t-j+1}-(1+i^{2})^{-t-j+1}\right]}{i^{2}-i^{1}}\right\}\frac{{}_{t}p_{x}\,{}_{j}q_{x}}{t+j-1}\right\}$$

3.8.4. Aplicación numérica

Como siempre, en primer lugar obtendremos la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura, que para una edad x, un diferimiento d y una duración de la renta n, es la suma de números borrosos ${}_{d|n}\tilde{\ddot{a}}_{x}=\sum_{t=d}^{d+n-1}{}_{t}\tilde{E}_{x}$. Después estudiaremos la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis. Como ${}_{d|n}\tilde{\ddot{a}}_{x}$ se obtiene como la suma de la esperanza matemática de capitales de supervivencia; y dado que conocemos el error máximo en términos absolutos que se comete en los α-cortes de la esperanza matemática de los capitales de supervivencia que lo componen si los aproximamos triangularmente, el error máximo que puede cometerse al tomar como función de pertenencia de ${}_{d|n}\tilde{\ddot{a}}_{x}$ una triangular con su mismo soporte y núcleo, vendrá acotado superiormente por:

$$\operatorname{Max}\left\{\frac{\sum_{t=d}^{d+n-1} D_I^*(t)}{{}_{d|n}\ddot{a}_x^1(1) - {}_{d|n}\ddot{a}_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=d}^{d+n-1} D_D^*(t)}{{}_{d|n}\ddot{a}_x^2(0) - {}_{d|n}\ddot{a}_x^2(1)}\right\}$$

donde $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$ son la desviación máxima que se produce en los extremos izquierdo y derecho de los α-cortes de ${}_t\tilde{E}_x$ al tomarse su aproximación triangular.

También analizaremos, por otra parte, la triangularidad de la varianza y de la desviación estándar borrosa de forma análoga al estudio realizado en el apartado 3.7.4.

Consideraremos una renta de supervivencia de 100 unidades monetarias anuales anticipadas asociadas a un único asegurado de 45 años. Las duraciones posibles de esta renta son 10 y 30 años y para ambas duraciones, la renta podrá ser inmediata anticipada o diferida 20 años, aunque también anticipada. Por ejemplo, si el diferimiento de la renta es 20 años, y su duración es 30 años, las variables borroso aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19}|0'05-0'02\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_{45} \quad t = 20,\ldots,49 \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha} & \text{con } {}_{50}p_{45} \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19}|0'02+0'01\alpha} & \text{con } {}_{t|}q_{45} \quad t = 20,\ldots,49 \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha} & \text{con } {}_{50}p_{45} \end{cases}$$

En las rentas temporales propuestas, la expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro.

	$\tilde{E}[Z]$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
${}_{10}\tilde{\ddot{a}}_{45}$	(797,44, 863,53, 900,17)	0,02	7177,28	84,72
${}_{20\|10}\tilde{\ddot{a}}_{45}$	(240,26, 381,06, 482,07)	0,06	31913,14	178,64
${}_{30}\tilde{\ddot{a}}_{45}$	(1494,57, 1843,72, 2070,49)	0,04	132984,55	364,67
${}_{20\|30}\tilde{\ddot{a}}_{45}$	(363,59, 625,38, 828,73)	0,07	134524,97	366,78

Podemos comprobar que a medida que la duración de la renta, su diferimiento, o ambos aumentan, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de la renta temporal empeora, lo cual era de esperar, ya que en esos casos se incorporan en la valoración factores de descuento con vencimientos asociados cada vez más lejanos, pero en cualquiera de los supuestos estudiados, el ajuste es suficientemente bueno.

A continuación presentamos para estas rentas la expresión de los α-cortes de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$, analizándose posteriormente la bondad de su ajuste mediante un número borroso triangular.

Los α-cortes de las varianzas y de las desviaciones estándar para cada una de las rentas analizadas son:

	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	5863,86	8241,07	76,58	90,78	12881,88	53210,94	113,50	230,67
0,1	5994,64	8145,40	77,43	90,25	14135,11	50707,44	118,89	225,18
0,2	6128,88	8051,04	78,29	89,73	15514,01	48324,82	124,56	219,83
0,3	6266,68	7957,95	79,16	89,21	17031,55	46057,10	130,50	214,61
0,4	6408,16	7866,13	80,05	88,69	18702,09	43898,59	136,76	209,52
0,5	6553,41	7775,54	80,95	88,18	20541,50	41843,91	143,32	204,56
0,6	6702,57	7686,17	81,87	87,67	22567,37	39887,93	150,22	199,72
0,7	6855,73	7598,01	82,80	87,17	24799,16	38025,79	157,48	195,00
0,8	7013,03	7511,02	83,74	86,67	27258,42	36252,87	165,10	190,40
0,9	7174,59	7425,21	84,70	86,17	29969,02	34564,80	173,12	185,92
1	7340,54	7340,54	85,68	85,68	32957,40	32957,40	181,54	181,54

	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	71955,05	195149,78	268,24	441,76	41400,93	253514,95	203,47	503,50
0,1	76568,58	188336,93	276,71	433,98	46479,52	237994,14	215,59	487,85
0,2	81528,31	181790,56	285,53	426,37	52217,27	223468,34	228,51	472,72
0,3	86863,16	175499,37	294,73	418,93	58704,47	209870,97	242,29	458,12
0,4	92604,67	169452,58	304,31	411,65	66044,45	197140,09	256,99	444,00
0,5	98787,24	163639,91	314,30	404,52	74355,50	185218,07	272,68	430,37
0,6	105448,45	158051,52	324,73	397,56	83773,22	174051,24	289,44	417,19
0,7	112629,30	152678,02	335,60	390,74	94453,08	163589,65	307,33	404,46
0,8	120374,60	147510,44	346,95	384,07	106573,55	153786,81	326,46	392,16
0,9	128733,34	142540,19	358,79	377,54	120339,64	144599,38	346,90	380,26
1	137759,09	137759,09	371,16	371,16	135987,01	135987,01	368,76	368,76

Asimismo, los α-cortes de las varianzas y las desviaciones estándar si tomamos para éstas un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo que $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$, se hallarán como:

	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	5863,86	8241,07	76,58	90,78	12881,88	53210,94	113,50	230,67
0,1	6011,53	8151,01	77,49	90,27	14889,43	51185,58	120,30	225,76
0,2	6159,19	8060,96	78,40	89,76	16896,99	49160,23	127,11	220,85
0,3	6306,86	7970,91	79,31	89,25	18904,54	47134,88	133,91	215,93
0,4	6454,53	7880,86	80,22	88,74	20912,09	45109,52	140,72	211,02
0,5	6602,20	7790,81	81,13	88,23	22919,64	43084,17	147,52	206,11
0,6	6749,87	7700,75	82,04	87,72	24927,19	41058,81	154,32	201,20
0,7	6897,54	7610,70	82,95	87,21	26934,74	39033,46	161,13	196,28
0,8	7045,21	7520,65	83,86	86,70	28942,30	37008,11	167,93	191,37
0,9	7192,88	7430,60	84,77	86,19	30949,85	34982,75	174,74	186,46
1	7340,54	7340,54	85,68	85,68	32957,40	32957,40	181,54	181,54

	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	71955,05	195149,78	268,24	441,76	41400,93	253514,95	203,47	503,50
0,1	78535,46	189410,71	278,54	434,70	50859,54	241762,15	220,00	490,03
0,2	85115,86	183671,64	288,83	427,64	60318,15	230009,36	236,53	476,55
0,3	91696,26	177932,57	299,12	420,58	69776,75	218256,57	253,06	463,08
0,4	98276,67	172193,50	309,41	413,52	79235,36	206503,77	269,59	449,61
0,5	104857,07	166454,43	319,70	406,46	88693,97	194750,98	286,12	436,13
0,6	111437,47	160715,37	329,99	399,40	98152,58	182998,19	302,65	422,66
0,7	118017,88	154976,30	340,28	392,34	107611,19	171245,39	319,18	409,19
0,8	124598,28	149237,23	350,58	385,28	117069,80	159492,60	335,71	395,71
0,9	131178,69	143498,16	360,87	378,22	126528,40	147739,81	352,23	382,24
1	137759,09	137759,09	371,16	371,16	135987,01	135987,01	368,76	368,76

Por tanto, los niveles α en los que se cometen mayores errores en los extremos de los α-cortes y la aproximación triangular, vienen señalados en negrita en los siguientes cuadros:

	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	16,89	5,61	0,06	0,02	754,32	478,15	1,41	0,58
0,2	30,32	9,92	0,11	0,03	1382,97	835,41	2,55	1,02
0,3	40,18	12,96	0,14	0,04	1872,99	1077,78	3,41	1,33
0,4	46,37	14,73	0,17	0,05	2210,00	1210,93	3,96	1,50

0,5	**48,79**	**15,27**	**0,17**	**0,05**	**2378,14**	**1240,26**	**4,20**	**1,55**
0,6	47,30	14,58	0,17	0,05	2359,82	1170,88	4,10	1,48
0,7	41,81	12,70	0,15	0,04	2135,58	1007,67	3,65	1,28
0,8	32,18	9,62	0,11	0,03	1683,87	755,23	2,83	0,97
0,9	18,28	5,39	0,06	0,02	980,83	417,96	1,62	0,54
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	1966,87	1073,78	1,83	0,72	4380,01	3768,01	4,41	2,18
0,2	3587,55	1881,08	3,30	1,27	8100,87	6541,02	8,02	3,83
0,3	4833,10	2433,20	4,39	1,65	11072,28	8385,59	10,77	4,96
0,4	5672,00	2740,92	5,10	1,87	13190,92	9363,68	12,60	5,60
0,5	**6069,83**	**2814,52**	**5,40**	**1,93**	**14338,47**	**9532,91**	**13,44**	**5,76**
0,6	5989,03	2663,84	5,26	1,84	14379,36	8946,95	13,21	5,47
0,7	5388,58	2298,27	4,68	1,60	13158,11	7655,74	11,84	4,72
0,8	4223,68	1726,79	3,63	1,21	10496,24	5705,79	9,25	3,56
0,9	2445,34	957,97	2,07	0,67	6188,76	3140,43	5,33	1,98
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

En todos los casos el error máximo se comete para un nivel de presunción de aproximadamente el 0'5.

Los errores que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor por la aproximación triangular propuesta para la varianza y la desviación estándar, vienen dados en el siguiente cuadro:

	Error en la varianza	Error en la Desviación estándar
n=10 d=0	0,03	0,02
n=10 d=20	0,12	0,06
n=30 d=0	0,09	0,05
n=30 d=20	0,15	0,08

Podemos comprobar que los ajustes mediante un número borroso triangular de la varianza y de la desviación estándar son peores a medida que aumenta la duración de la renta, y también empeoran si aumentamos el diferimiento de la renta, todo ello por las razones ya conocidas. Así, para una escala endecadaria aceptaríamos en todos los casos la aproximación triangular de la desviación estándar, pero en las rentas diferidas no aceptaríamos la aproximación triangular de la varianza.

Asimismo, podemos ver que, para una misma de renta, los errores que se cometen por ajustar triangularmente la esperanza matemática y la desviación estándar son menores, como siempre, que los errores que se cometen ajustando triangularmente la varianza, lo cual era de esperar.