CAPÍTULO 4:

FIJACIÓN DE LAS PRIMAS Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA DIVERSAS MODALIDADES DE ESTRUCTURAS ACTUARIALES BAJO LA HIPÓTESIS DE UN ÚNICO ASEGURADO EN CARTERA

4.1. PLANTEAMIENTO GENERAL

4.1.1. Consideraciones previas

A continuación analizaremos la fijación de la prima única pura, y posteriormente, recargada, cuando las prestaciones que contemple vengan dadas por las estructuras actuariales unitarias analizadas en el apartado 3. En concreto, analizaremos la fijación de primas para:

a) Capitales de fallecimiento con vencimiento en el año actual. En este caso, esta estructura corresponde a un seguro de fallecimiento renovable cada año. el análisis de esta estructura debe entenderse como la correspondiente a un seguro de vida entera o temporal pactado a primas periódicas (al inicio de cada año se paga una prima), siendo esta prima variable en función de la probabilidad de fallecimiento del asegurado en cada uno de los años.

b) Capital diferido. Se trata de un capital de supervivencia con vencimiento a t años, siendo esta la prestación básica de la mayoría de seguros de ahorro a medio plazo que en muchas ocasiones son comercializados por las entidades financieras como depósitos a plazo. También es la prestación básica de algunos seguros de jubilación, si la contraprestación contemplada para tal contingencia es un capital. Los seguros que toman esta forma en su estado más puro son los seguros dotales. Asimismo, supondremos que el vencimiento del capital es $t>0$, ya que en otro caso no tiene sentido este tipo de cobertura: no existe fenómeno financiero, ya que el capital devenga en el momento de contratación, ni fenómeno aleatorio, pues la probabilidad de cobro del capital es 1.

c) Seguros de fallecimiento temporales y vitalicios.

d) Seguros mixtos: En este caso se trata de una combinación de un seguro capital diferido y un seguro temporal, y suele ser la forma que toman habitualmente los depósitos a plazo que ya han sido mencionados o los planes de jubilación con una prestación de jubilación en forma de capital, ya que en este caso el asegurado no corre el riesgo de perder toda la prima en caso de fallecer antes del vencimiento del contrato. Nosotros contemplaremos únicamente el caso en que el capital de fallecimiento sea igual al capital de supervivencia, es decir, la modalidad comúnmente conocida como 1x1.

e) Rentas de supervivencia anticipadas. Este tipo de estructura, si es vitalicia, suele estar ligada, en muchas ocasiones, a una renta destinada a cubrir la contingencia de jubilación, siendo en este caso diferidas si el asegurado no se ha jubilado, e inmediatas si dicha contingencia ha acontecido, o en operaciones de vivienda-pensión. Asimismo, si se busca obtener una renta periódica invirtiendo una determinada cuantía monetaria, las rentas actuariales, temporales o vitalicias también pueden ser buenos productos como alternativas a otros existentes en el mercado como los depósitos a plazo, bonos y obligaciones del estado, fondos de inversión con rendimientos periódicos, etc.

Como ya comentamos en el apartado 1.5.2. de esta parte de la tesis, nuestro análisis se va a centrar en el cálculo de las primas únicas correspondientes a las estructuras actuariales ya descritas, desglosándose dentro de la misma, la prima pura del recargo de seguridad. En un seguro ya iniciado, el cálculo de la provisión matemática a dotar para dicho contrato en el momento de valoración y el margen de seguridad que debe considerarse sobre las misma, para asegurar cierto nivel de solvencia se realizará de forma análoga. Bastará con identificar la provisión matemática con la prima pura, y el margen de solvencia al recargo de seguridad que se aplique al seguro para hacer frente a desviaciones de siniestralidad.

4.1.2. Determinación de la prima pura única

Como ya fue comentado en el apartado 2.5.2, definimos la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador, que notamos como $\widetilde{L}$, a la variable aleatoria cuyas realizaciones borrosas son la diferencia entre el valor actual de las prestaciones que satisface el asegurador y de las primas que se percibe en cada uno de los años en los que puede fallecer el asegurado. En el supuesto de primas únicas, si suponemos que la prima única puede venir dada a través de un número borroso $\widetilde{P}$, tal que:

$$\widetilde{P}=\left\{x / \mu_{\widetilde{P}}(x)\right\}=\left\{P_\alpha=\left[P^1(\alpha), P^2(\alpha)\right] / 0 \leq \alpha \leq 1\right\}$$

la variable borroso aleatoria pérdida vendrá dada por:

$$\widetilde{L}=\widetilde{Z}-\widetilde{P}$$

donde $\tilde{Z}$ es la variable borroso aleatoria que cuantifica el valor actual de las prestaciones que contemple el contrato.

Asimismo, $\tilde{L}$ puede ser caracterizada, para un nivel α, a través de las variables aleatorias inferior y superior $L^1(\alpha)$ y $L^2(\alpha)$:

$$L^1(\alpha) = Z^1(\alpha) - P^2(\alpha)$$
$$L^2(\alpha) = Z^2(\alpha) - P^1(\alpha)$$

donde $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ son variables aleatorias cuya forma dependerá de la estructura actuarial que analicemos. En este apartado únicamente estudiaremos las estructuras ya descritas en el apartado 4.1.1.

Asimismo, y dado que $\tilde{P}$ se convierte en una constante para cada nivel α para el que trabajemos con $\tilde{L}$ es fácil comprobar que $\tilde{L}$ cumple:

1) $\tilde{E}[L] = \tilde{E}[Z] - \tilde{P}$, siendo "-" la sustracción habitual para números borrosos.
2) $\tilde{V}[L] = \tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[L] = \tilde{D}[Z]$
3) $V^*[L]=V^*[Z]$ y $V^*[L]=V^*[Z]$

A partir de $\tilde{L}$, definimos como prima pura única y borrosa, al número borroso $\tilde{P}_P$ que hace que la esperanza matermática de la variable borroso aleatoria pérdida se anules, es decir, $\tilde{E}[L] = 0$. De esta forma, para hallar $\tilde{P}_p$, deberemos plantear la ecuación borrosa $\tilde{E}[Z] - \tilde{P}_p = 0$, la cual no tiene solución en sentido clásico. Pero si utilizamos el concepto de solución de Buckley y Qu, podemos identificar $\tilde{E}[Z] = \tilde{P}_P$, de esta forma, los α-cortes de $\tilde{P}_P$ se podrán hallar como: $P_{P\alpha} = E[Z]_\alpha$, siendo entonces la función de pertenencia de $\tilde{P}_P$, $\mu_{\tilde{P}_P}(x) = \mu_{\tilde{E}[Z]}(x)$.

Evidentemente, a la hora de fijar un precio del seguro de vida, el asegurador deberá exigir al asegurado una cuantía cierta con vencimiento en el momento actual. De esta forma denominaremos como prima pura única cierta y sin recargos, P_p, a un valor nítido y representativo de $\tilde{P}_P$ que proponemos hallar a través de su valor esperado. Dado que el intervalo esperado de la prima pura a cobrar se calcularía, a partir de los α-cortes, como:

$$EI[\tilde{P}_P] = \left[E^1[\tilde{P}_p], E^2[\tilde{P}_p]\right] = \left[\int_0^1 P_p^1(\alpha)\, d\alpha, \int_0^1 P_p^2(\alpha)\, d\alpha\right]$$

entonces, para $\beta \in [0,1]$, el valor esperado de la prima pura se hallaría:

$$EV\left[\widetilde{P}_p, \beta\right] = P_p = (1-\beta)\, E^1[\widetilde{P}_p] + \beta E^2[\widetilde{P}_p]$$

El parámetro β cuantifica la aversión al riesgo de interés de la compañía de seguros, de tal forma que, a una mayor aversión al riesgo, se asigna una β mayor. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de la compañía debe ser su solvencia, la prudencia le llevaría a considerar valores de β mayores que 0’5.

4.1.3. Determinación de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única, y determinación del recargo a aplicar para carteras de un único asegurado

Tras haber cobrado la prima pura única, P_p, el asegurador puede definir, para el contrato que está analizando, una variable borroso aleatoria pérdida que notamos como $\widetilde{L}_p$, a través de la cual estudiaremos la probabilidad de pérdida (o de insuficiencia de las primas cobradas) si el asegurado cobra únicamente la prima pura única P_p. Así, a través de $\widetilde{L}_p$ determinaremos el recargo a aplicar para asegurar un cierto nivel de solvencia. Evidentemente, podemos utilizar otros criterios usuales en la práctica actuarial para determinar dicho recargo, los cuales se basan en la aplicación de un porcentaje más o menos arbitrario sobre la prima pura, la varianza o la desviación estándar de la variable aleatoria pérdida. Si bien, el camino que seguiremos no será éste, ya que consideramos que el que propondremos es conceptualmente mucho más potente, a la vez que los recargos son fijados de forma mucho más fiable. Las herramientas que necesitamos en el primer caso ya han sido proporcionadas y son:

a) Ya hemos propuesto como calcular P_P, por lo que el cálculo del pertinente recargo es inmediato una vez ha sido fijado el porcentaje que este supone sobre P_p.
b) Como ya hemos comentado en 1.2.1., sea cual sea la prima $\widetilde{P}$ cargada, la varianza o la desviación estándar de Feng de la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador sigue siendo la del valor actual de las prestaciones que el contrato contemple. La forma de cálculo de estos parámetros ha sido analizada en todos los casos que plantearemos en este apartado. De esta forma, conociendo $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$, y determinando el porcentaje que sobre la varianza o la desviación estándar de Feng queremos recargar, el recargo de seguridad que finalmente debe satisfacerse al asegurador se halla de forma inmediata.

Ya hemos comentado que para el análisis que pretendemos llevar a cabo, deberemos partir de la variable borroso aleatoria pérdida suponiéndose que se ha cobrado la prima pura. A dicha variable borroso aleatoria la notaremos como $\widetilde{L}_p$ con $\widetilde{P} = P_p$,. Al ser P_p un número crisp, que no es más que un caso particular de número borroso, su función característica de dicha cuantía es $\mu_{P_p}(x) = \begin{cases} 1 & x = P_p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, podemos hallar la variable borroso aleatoria pérdida $\widetilde{L}_p$ como:

$$\widetilde{L}_P = \widetilde{Z} - P_P$$

Siendo las variables aleatorias ciertas, inferior y superior, $L^1{}_p(\alpha)$ y $L^2{}_p(\alpha)$, para un nivel de presunción α dado:

$$L^1{}_p(\alpha) = Z^1(\alpha) - P_p$$
$$L^2{}_p(\alpha) = Z^2(\alpha) - P_p$$

Para esta variable borroso aleatoria se cumple que:

1) $0 \in \text{sop}\,\widetilde{E}[L_P]$, siendo sop el soporte del número borroso.
2) $\widetilde{V}[L_P] = \widetilde{V}[Z]$ y $\widetilde{D}[L_P] = \widetilde{D}[Z]$
3) $V^*[L_P]=V^*[Z]$ y $D^*[L_P]=D^*[Z]$

Asimismo para estudiar la función de distribución y los cuantiles de $\widetilde{L}_p$, recurriremos a su representación a través de las variables aleatorias inferior y superior que definen los extremos inferiores y superiores de sus realizaciones. De forma general, podemos representar $L^1{}_p(\alpha)$ y $L^2{}_p(\alpha)$ como:

$$L^1_P(\alpha) = L^1_{Pt}(\alpha) \text{ con } {}_{t|}q_x,\ t \in \{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}1\} \text{ y } L^2_P(\alpha) = L^2_{Pt}(\alpha) \text{ con } {}_{t|}q_x,\ t \in \{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}1\}$$

donde $L^1_{Pt}(\alpha)$ y $L^2_{Pt}(\alpha)$ son los extremos inferiores y superiores respectivamente del α-corte del número borroso $\widetilde{L}_{Pt}$ que se calcularía como la diferencia entre la t-ésima realización de la variable borroso aleatoria $\widetilde{Z}$ y P_p. Asimismo, será de gran utilidad presentar las realizaciones de $L^1_P(\alpha)$ y $L^2_P(\alpha)$ en orden creciente. Es fácil comprobar que en las estructuras que hemos analizado se cumple que si $L^1_{Pt}(\alpha) \le L^1_{Pr}(\alpha) \Rightarrow L^2_{Pt}(\alpha) \le L^2_{Pr}(\alpha)$. De esta forma, la ordenación realizada en una de las dos variables aleatorias que definen a $\widetilde{L}_P$ para un nivel α es idéntica en la otra, es decir, el número de orden que ocupe el extremo del α-corte –inferior o superior- de una realización correspondiente a una de las variables aleatorias, será el mismo que ocupe el otro extremo dentro del conjunto de realizaciones de la otra variable aleatoria.

A partir de las variables "pérdida" inferior y superior, podremos hallar, la función de distribución para un valor X, $\widetilde{F}[X]$, la cual indicará la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores inferiores a X, $P[\widetilde{L}_P \leq X]$. Para un nivel α, el α-corte de $\widetilde{F}[X]$, que notaremos como $F[X]_\alpha$, no vendrá dada por un conjunto convexo –un intervalo de confianza-, sino por una serie de probabilidades discretas, ya que $\widetilde{L}_p$ es discreta. Asimismo, la función de distribución inferior vendrá determinada por la variable aleatoria superior, y viceversa. Es evidente que, dadas dos variables aleatorias x e y, que suponiéndolas discretas, cuyo campo de variación ordenado en orden creciente sea, $\{x_i\}_{i=1\ldots n}$ y $\{y_i\}_{i=1\ldots n}$ respectivamente y con $P[x=x_i]=P[y=y_i]=p_i$, si $x_i \geq y_i\ \forall i$, se cumple siempre que $P[x \leq X] \leq P[y \leq X]$.

Por ejemplo, si disponemos de las variables aleatorias "x" e "y", siendo las dos posibles realizaciones de x {2, 3} y las de y {1, 2}, y en ambos casos las realizaciones son equiprobables (es decir, con probabilidad 1/2), si tomamos un valor X =2'5, podemos observar que el valor de la función de distribución de la variable aleatoria con relizaciones menores (y) es P[y≤2'5]=1. En cambio, la probabilidad que acumula el valor X=2'5 a su izquierda en la variable aleatoria x es: P[x≤2'5]=1/2.

Así, la función de distribución superior para un nivel α, $F^2[X](\alpha)=P[L^1_p(\alpha)\leq X]$ y la función de distribución inferior para X, $F^1[X](\alpha)= P[L^2_p(\alpha)\leq X]$, vendrán dadas por:

$$F^2[X](\alpha)=\sum_{\forall t / L^1_{Pt}(\alpha)\leq X} {}_{t|}q_x \quad \text{y} \quad F^1[X](\alpha)=\sum_{\forall t / L^2_{Pt}(\alpha)\leq X} {}_{t|}q_x$$

De forma que los α-cortes de la función de distribución $F[X]_\alpha$ serán un conjunto de valores discretos cuyo envoltorio convexo es el intervalo $[F^1[X](\alpha), F^2[X](\alpha)]$, tal como comentamos en el apartado 3.6.3. de la primera parte de la tesis, siendo no obstante $\widetilde{F}[X]$ un subconjunto borroso que cumple:

a) $F[X]_{\alpha'} \subseteq F[X]_\alpha$ si $\alpha\leq\alpha'$, ya que $L^1_{pt}(\alpha)\leq L^1_{pt}(\alpha')$ y $L^2_{pt}(\alpha)\geq L^2_{pt}(\alpha')$ $\forall t$, por lo que $F^1[X](\alpha)\leq F^1[X](\alpha')$ y $F^2[X](\alpha)\geq F^2[X](\alpha')$
b) $\exists\ F[X]_1$, ya que $\exists\ L^1_p(1)\leq L^2_{pt}(1)$, que vendrán definidas por las trayectorias de los intereses de actualización superior e inferior, respectivamente, con el máximo nivel de verdad. De forma que $\widetilde{F}[X]$ es un sunconjunto borroso normal. Sin embargo, no es un número borroso, ya que su función de pertenencia no está definida en los reales.

Por supuesto, la función de pertenencia de $\widetilde{F}[X]$ podremos hallarla a través de $F[X]_\alpha$ como:

$$\mu_{\widetilde{F}[X]}(x) = \{\text{Max}\ \alpha \mid x \in F[X]_\alpha\}\ ,\ \text{con}\ x \in [0,1]$$

La función de distribución de $\widetilde{L}_p$, $\widetilde{F}[X]$ nos indicará cual es la probabilidad de que el asegurador incurra en pérdidas si fija un recargo de seguridad X sobre la prima pura, P_p. Evidentemente, esta probabilidad no puede ser conocida con certeza, pues la suficiencia o no del recargo de cuantía X dependerá no tan sólo del momento de fallecimiento del asegurado sino también de la trayectoria que tomen los tipos de interés de actualización. Un comportamiento desfavorable de la mortalidad puede ser compensado con un comportamiento favorable en el interés que se obtiene invirtiendo las primas y viceversa. Asimismo, si X=0, $\widetilde{F}[0]$ nos indicará cual es la probabilidad de que la prima pura, sin recargos, sea suficiente para cubrir las prestaciones del seguro.

Al concepto de función de distribución, podemos asociar el concepto de cuantil, que no se trata más que de la función inversa de la función de distribución. Así, el 1-ε cuantil de $\widetilde{L}_P$, que denominaremos como $\widetilde{Q}^\varepsilon$, indicará la cuantía borrosa con que se debe recargar la prima pura, para que el asegurador no sufra ninguna pérdida con una probabilidad $\varepsilon \in [0,1]$.

De esta forma, y a pesar de que los α-cortes de la función de distribución no vienen estrictamente dados mediante un intervalo de confianza, los α-cortes del 1-ε percentil de $\widetilde{L}_p$, Q_α^ε, si lo serán, tal como se muestra en los mencionados trabajos de Kruse y Meyer y de Frühwirth-Schnatter. De esta forma para hallar Q_α^ε deberemos partir de $F[X]_\alpha$, obteniéndose:

$$Q_\alpha^\varepsilon = \left[Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)\right]$$

donde:

$$Q^{1\varepsilon}(\alpha) = \inf X \mid F^2[X](\alpha) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad Q^{2\varepsilon}(\alpha) = \inf X \mid F^1[X](\alpha) \geq 1 - \varepsilon$$

Es decir, a partir de la inversa de la función de distribución inferior, para un nivel α, que es la de $L_p^2(\alpha)$, obtendremos el extremo superior del correspondiente α-corte de $\widetilde{Q}^\varepsilon$ y viceversa.

Ya hemos comentado, en los seguros que analizaremos, que el extremo inferior del α-corte de la variable aleatoria pérdida para el asegurador si el asegurado sobrevive únicamente t años enteros, $L^1_{pt}(\alpha)$ ocupa la misma posición en la ordenación sobre las realizaciones de la variable aleatoria inferior, $L^1_p(\alpha)$, que el extremo superior, $L^2_{pt}(\alpha)$, dentro de las realizaciones de la variable aleatoria superior $L_p^2(\alpha)$. De esta forma, también podemos obtener para un nivel α los α-cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, como los α-cortes de la realización $\tilde{L}_{pt}$, $L_{pt\alpha}$ tal que sus extremos inferior y superior son:

$$\text{Min } L_{pt}^i(\alpha) | \sum_{\forall r | L_{Pr}^i(\alpha) \le L_{Pt}^i(\alpha)} {}_{r|}q_x \ge 1-\varepsilon, i=1,2$$

Es decir, los α-cortes de la t-ésima realización de $\tilde{L}_p$, $\tilde{L}_{pt}$ que cumple la condición anterior, pueden ser identificados como Q^ε_α, de forma que:

$$Q_\alpha^\varepsilon = \left[Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)\right] = \left[L_{pt}^1(\alpha), L_{pt}^2(\alpha)\right]$$

y por tanto, si conociéramos la expresión analítica de $\mu_{\tilde{L}_{pt}}(x)$, como $\tilde{L}_{pt} = \tilde{Q}^\varepsilon$ ya que coinciden sus α-cortes, $\mu_{\tilde{Q}^\varepsilon}(x) = \mu_{\tilde{L}_{pt}}(x)$.

Para acabar de determinar la prima a repercutir al asegurado, deberemos de fijar de forma nítida el recargo a aplicar sobre P_p, que denominaremos como Q^ε y se halla desfuzzyficando $\tilde{Q}^\varepsilon$. Como siempre, proponemos el criterio del valor esperado. Dado que el intervalo esperado de $\tilde{Q}^\varepsilon$ se obtiene como:

$$EI[\tilde{Q}^\varepsilon] = \left[E^1[\tilde{Q}^\varepsilon], E^2[\tilde{Q}^\varepsilon]\right] = \left[\int_0^1 Q^{1\varepsilon}(\alpha)\, d\alpha, \int_0^1 Q^{2\varepsilon}(\alpha)\, d\alpha\right]$$

para un grado de aversión al riesgo al riesgo $\beta' \in [0,1]$, el recargo a aplicar Q^ε se obtiene a través del valor esperado de $\tilde{Q}^\varepsilon$, de forma que:

$$EV\left[\tilde{Q}^\varepsilon, \beta'\right] = Q^\varepsilon = (1-\beta')\, E^1[\tilde{Q}^\varepsilon] + \beta' E^2[\tilde{Q}^\varepsilon]$$

Evidentemente, Q^ε no acumulará exactamente una probabilidad de 1-ε o más a su izquierda, sino aproximadamente una igual o superior a 1-ε. La probabilidad de pérdida para el asegurador tras fijarse el recargo cierto sobre P_p, Q^ε, vendrá dada por el subconjunto borroso $\tilde{F}[Q^\varepsilon]$, para el cual ya ha sido analizada la forma de cálculo de sus α-cortes y su función de pertenencia.

De esta forma, la prima única recargada, P_R, a cobrar al asegurado para la que la probabilidad de insolvencia en esa hipotética cartera compuesta por un único asegurado sea “aproximadamente ε” se obtendrá sumando la prima actuarialmente justa más el recargo, es decir:

$$P_R = P_P + Q^\varepsilon$$