4.2. ANÁLISIS DEL CAPITAL DE FALLECIMIENTO CON VENCIMIENTO EN EL AÑO ACTUAL

4.2.1. Determinación de la prima pura única

En este caso el asegurado percibe una unidad monetaria al final del año actual si fallece en éste y nada en otro caso. Para una prima única borrosa pagable en el momento actual, que notamos como $\widetilde{P}$, el valor actual de las pérdidas para el asegurador es:

$$\widetilde{L}=\begin{cases}\widetilde{f}_1-\widetilde{P} & \text{con } {}_{0|}q_x\\ 0-\widetilde{P} & \text{con } 1\text{-}{}_{0|}q_x={}_1p_x\end{cases}$$

donde "-" es la sustracción habitual entre números borrosos.

Planteando $\widetilde{E}[L]=0$, es decir, $\widetilde{E}[Z]=P_p$, obtendremos que $\widetilde{E}[L]=\widetilde{f}_1\,{}_{0|}q_x-\widetilde{P}=0$, es decir, $\widetilde{P}_P$ = ${}_0\widetilde{B}_x$, de forma que los α-cortes de $\widetilde{P}_P$ serán:

$$P_{P\alpha}={}_0B_{x\alpha}=\left[{}_0B_x^1(\alpha),{}_0B_x^2(\alpha)\right]=\left[f_1^1(\alpha)_{0|}q_x,f_1^2(\alpha)_{0|}q_x\right]$$

Y por tanto $\mu_{{}_0\widetilde{B}_x}(x)=\mu_{\widetilde{P}_P}(x)$, por lo que todas las expresiones de los α-cortes y función de pertenencia obtenidas en el apartado 3.2. para ${}_t\widetilde{B}_x$ también son aplicables a $\widetilde{P}_P$.

De esta forma, la prima pura cierta P_p se obtiene, una vez se ha fijado β como:

$$EV\left[\widetilde{P}_P,\beta\right]=P_P=(1-\beta)\int_0^1 f_1^1(\alpha)_{0|}q_x d\alpha+\beta\int_0^1 f_1^2(\alpha)_{0|}q_x d\alpha=\left[(1-\beta)\int_0^1 f_1^1(\alpha)d\alpha+\beta\int_0^1 f_1^2(\alpha)d\alpha\right]_{0|}q_x$$

4.2.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única.

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\widetilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales, tras ordenar sus realizaciones de forma creciente, observamos que presentan la siguiente forma:

$$L_p^i(\alpha)=\begin{cases}0-P_p & \text{con } {}_1p_x\\ f_1^i(\alpha)-P_p & \text{con } {}_{0|}q_x\end{cases},\ i=1,2.$$

Asimismo, la función de distribución, $\widetilde{F}[X]$ puede ser expresada, a un nivel α por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_1p_x & \text{si} - P_p \le X < f_1^i(\alpha) - P_p \\ 1 & \text{si } X \ge f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}, \ i=1,2.$$

Así, el 1-ε percentil, de la variable borroso aleatoria $\widetilde{L}_p$, $\widetilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que dependiendo del nivel ε para el que queramos fijar la solvencia del asegurador, presenta como α-cortes:

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_1p_x$, lo cual implica que $1>\varepsilon\ge 1-{}_1p_x={}_1q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, se trata del número cierto $-P_p$.

b) Si ${}_1p_x <1-\varepsilon\le 1$, es decir, $1-{}_1p_x={}_1q_x>\varepsilon\ge 0$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_1^{\,1}(\alpha),f_1^{\,2}(\alpha)]- P_p$, es decir, $\widetilde{Q}^\varepsilon = \widetilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, Q^ε, o el recargo a cobrar, vendrá dado para un determinado nivel de aversión al riesgo β':

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_1p_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$

b) Si ${}_1p_x <1-\varepsilon\le 1$,

$$EV\left[\widetilde{Q}^\varepsilon,\beta'\right]= Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 f_1^1(\alpha)d\alpha + \beta'\int_0^1 f_1^2(\alpha)d\alpha \ -P_p$$

Donde, si β=β'

$$Q^\varepsilon = \left[(1-\beta)\int_0^1 f_1^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 f_1^2(\alpha)d\alpha\right] {}_1p_x$$

4.2.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración viene dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato

Si el interés aplicar durante todos los períodos viene dado por un número borroso triangular $\widetilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, podemos comprobar que:

$$P_{p\alpha} = {}_0B_{x\,\alpha} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1}\,{}_{0|}q_x, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1}\,{}_{0|}q_x\right]$$

Por lo que:

$$P_p = \left[(1-\beta)\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1}d\alpha + \beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1}d\alpha\right]_{0|}q_x =$$

$$P_P = \left[(1-\beta)\frac{\ln\dfrac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \beta\frac{\ln\dfrac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} \right] {}_{0|}q_x$$

De esta forma, la determinación de la variables aleatoria inferior y superior correspondientes a $\widetilde{L}_p$ es inmediata. A partir de estas, la función de distribución vendrá dada para un nivel de presunción α por las correspondientes funciones de distribución inferior y superior:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_1p_x & \text{si} - P_p \le X < \left(1 + i^1 + \left(i^2 - i^1\right)\alpha\right)^{-1} - P_p \\ 1 & \text{si } X \ge \left(1 + i^2 + \left(i^2 - i^1\right)\alpha\right)^{-1} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_1p_x & \text{si} - P_p \le X < \left(1 + i^3 - \left(i^3 - i^2\right)\alpha\right)^{-1} - P_p \\ 1 & \text{si } X \ge \left(1 + i^3 - \left(i^3 - i^2\right)\alpha\right)^{-1} - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el 1-ε percentil de $\widetilde{L}_p$, $\widetilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso cuyos α-cortes son, en este caso:

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_1p_x$, lo cual implica que $1>\varepsilon\ge 1-{}_1p_x={}_1q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p] = -P_p$

b) Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon\le 1$, es decir, $1-{}_1p_x={}_1q_x>\varepsilon\ge 0$, $Q_\alpha^\varepsilon = [(1+i^3-(i^3- i^2)\alpha)^{-1}, (1+i^1+(i^2- i^1)\alpha)^{-1}]- P_p$, es decir, $\widetilde{Q}^\varepsilon = \widetilde{f}_1 - P_p$.

De esta forma, Q^ε, o el recargo a cobrar, se hallará, una vez ha fijado β' como:

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_1p_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$

b) Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon\le 1$,

$$Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta'\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta')\frac{\ln\dfrac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \beta'\frac{\ln\dfrac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

4.2.4. Aplicación numérica

A continuación analizamos el caso en que un individuo de 45 años suscriba un seguro de fallecimiento para el presente año, siendo la cuantía asegurada de 1.000 u.m.. Asimismo, el tipo de interés borroso a aplicar y las tablas de mortalidad que utilizaremos son las ya utilizadas en anteriores ejemplos, es decir, $\tilde{i}$ =(0'02, 0'03, 0'05) y las tablas de mortalidad son las PEM-82 para población masculina.

En primer lugar, podemos observar que la prima única borrosa se obtiene como $\tilde{P}_p = {}_0\tilde{B}_{45}$, siendo su función de pertenencia, la calculada en el apartado 3.2.4. Respecto a P_p, podemos observar que para un β dado, y teniendo en cuenta que ${}_0B_{45\alpha}$ se obtiene como:

$$ {}_{10}B_{45\alpha} = [1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-1}\frac{3.029}{951.683},\ 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-1}\frac{3.029}{951.683}] $$

P_p se obtendrá como:

$$ P_p = (1-\beta)3'06 + \beta 3'12 $$

de forma que para β = 0'75, P_p = 3'09.

Analicemos la función de distribución de las pérdidas para el asegurador, $\tilde{L}_p$, si cobra la prima pura única. Podemos observar que para un nivel α, las variables aleatorias inferior y superior son, con sus realizaciones ya ordenadas en orden creciente:

$$ L_p^1(\alpha) = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \dfrac{948.654}{951.683} \\ 10^3\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-1} - 3'09 & \text{con } \dfrac{3.029}{951.683} \end{cases} \quad \text{y,} $$

$$ L_p^2(\alpha) = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \dfrac{948.654}{951.683} \\ 10^3\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-1} - 3'09 & \text{con } \dfrac{3.029}{951.683} \end{cases} $$

Así, las funciones de distribución inferior y superior son:

$$ F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -3'09 \\ \dfrac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \le X < 1000(1'02+0{,}01\alpha)^{-1} - 3'09 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000(1'02+0{,}01\alpha)^{-1} - 3'09 \end{cases} $$

$$ F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -3'09 \\ \dfrac{948.654}{951683} & \text{si } -3'09 \le X < 1000(1'05-0{,}02\alpha)^{-1} - 3'09 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000(1'05-0{,}02\alpha)^{-1} - 3'09 \end{cases} $$

De esta forma, si el asegurador no cobra ningún recargo, y cobra a su único asegurado en cartera la prima pura, la probabilidad de que esta prima sea suficiente vendrá dada por $\tilde{F}[0]$, la cual presenta como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{F}[0]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = \dfrac{948.654}{951.683} \approx 0'9968 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Respecto a la probabilidad de quiebra ε que presenta un asegurador, cobrando un recargo borroso $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, podemos observar que Q^{ε}_{α} viene dado por:

a) Si $0<1-\varepsilon\leq 0'9968$, $Q^{\varepsilon}_{\alpha} = -3'09$

b) Si $0'9968<1-\varepsilon\leq 1$, $Q^{\varepsilon}_{\alpha} = [1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-1}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-1}] -3'09$

Si buscamos asegurar una probabilidad de insolvencia del 0%, el recargo cierto que fijará para un β' dado es $Q^0 = (1-\beta')961'57 + \beta'\cdot 975'62 - 3'09$. Si tomamos β = 0'75, Q^0 = 969'01. Expresamos el recargo, como es habitual en la práctica actuarial, como un porcentaje sobre la prima pura, sobre la desviación estándar cierta y sobre la varianza cierta de $\tilde{L}_P$.

P_P	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
313,79%	0,33%	17,76%

En este caso, la prima única recargada será: P_R = 972'11.

Es importante comentar que, estrictamente, el cobro de esta prima no asegura que el asegurador no esté expuesto a la quiebra. Aunque se ha considerado un β'>0'75 y se ha supuesto que el individuo fallece al año que cubre el seguro y sus sucesores cobran al final del año 1000 u.m., un escenario muy adverso respecto al tipo de interés podría hacer que el recargo fuera insuficiente. De hecho, si X=969'01, $\tilde{F}[969'01]$ vendrá dada a través de su función de pertenencia como:

$$\mu_{\tilde{F}[969'01]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0'87 & x = 0'9968 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Es decir, el nivel de presunción 1 nos indica que lo más posible es que el recargo de 969'01 ptas. sea suficiente para no tener pérdidas, pero al mismo tiempo, al trabajar con la variable borroso aleatoria pérdida, y mantener conjuntamente la borrosidad y la aleatoriedad, disponemos de más información. En concreto conocemos de que existe un nivel de posibilidad de 0'87 de que exista una probabilidad de pérdida después de cobrar el recargo de 0'0032.

De esta forma, no podemos afirmar categóricamente que un recargo sobre la prima pura de 969'01 ptas. asegure una probabilidad de insolvencia del 0%, ya que dependerá de la rentabilidad que finalmente sea capaz de conseguir el asegurador invirtiendo las primas. Supongamos que el interés que finalmente sea capaz de conseguir el asegurador fuera del 3% anual, donde $\mu_{\tilde{i}}(0'03)=1$, es decir, es la trayectoria del interés más posible. La variable aleatoria pérdida tras cobrar la prima pura (3'09 unidades monetarias) en este caso sería:

$$L_p = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \dfrac{948.654}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'03^{-1} - 3'09 = 967'78 & \text{con } \dfrac{3.029}{951.683} \end{cases}$$

Así, la función de distribución asociada a la variale aleatoria pérdida despues de ser cobrada la prima pura es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 3'09 \\ \dfrac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \leq X < 967'78 \\ 1 & \text{si } X \geq 967'78 \end{cases}$$

Así pues, F[969'01]=1, es decir, bajo la hipótesis de que el asegurador sea capaz de invertir las primas a un 3%, la probabilidad de que el recargo sobre la prima pura de 969'01 unidades monetarias sea suficiente es del 100%. Como el nivel de presunción de esta trayectoria de los tipos de interés es máximo, es decir, 1, el nivel de pertenencia de que la probabilidad acumulada por el recargo establecido sea del 100% seguirá siendo 1, es decir:

$$\mu_{\tilde{F}[969'01]}(1)=1$$

Sin embargo, tomemos ahora una trayectoria del interés del 2'87%, que si bien es algo pesimista, presenta un nivel de verdad muy elevado, en concreto $\mu_{\tilde{i}}(0'0287)=0'87$. En este caso, el nivel de la variable pérdida si el asegurador consigue este tipo de interés, también tiene asociada un nivel de presunción de 0'87, y es:

$$L_p = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \dfrac{948.654}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'0287^{-1} - 3'09 = 969'011 & \text{con } \dfrac{3.029}{951.683} \end{cases}$$

Por tanto, el valor de la función de distribución de esta variable aleatoria tamién tendrá un nivel de presunción del 0'87. En este caso, ésta es: