$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 3'09 \\ \dfrac{948.654}{951.683} & \text{si} - 3'09 \leq X < 969'011 \\ 1 & \text{si } X \geq 969'011 \end{cases}$$

En este escenario, el valor 960’01 ptas. (el recargo que aplicaremos sobre la prima pura) acumula una probabilidad de 0’9968, no del 100%, y por tanto, ello conlleva una probabilidad de insolvencia de 0’0032. Como la presunción de este escenario del tipo de interés es de 0’87, podemos observar que $\mu_{\tilde{F}[969'01]}(0'9968) = 0'87$, que es como mínimo, el nivel de presunción de que este recargo sobre la prima pura sea suficiente con una probabilidad del 99’68% -y por tanto, la probabilidad de insolvencia sea del 0’32%- siendo por tanto la prima finalmente cobrada que es de 969’01 + 3’09 = 972’1 unidades monetarias.

4.3. ANÁLISIS DEL SEGURO DE CAPITAL DIFERIDO

4.3.1. Determinación de la prima pura única

Las prestación asociada a un seguro de capital diferido es un capital de supervivencia con vencimiento a t años. Asimismo, supondremos que t>0, ya que en caso contrario el seguro no tendría sentido, como ya comentamos. En este caso, para una prima única borrosa que notamos como $\tilde{P}$, el valor actual de las pérdidas para el asegurador, es:

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{f}_t - \tilde{P} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

donde “-“ sería la sustracción habitual entre números borrosos.

Planteando $\tilde{E}[L] = \tilde{f}_t\, {}_t p_x - \tilde{P} = 0$, obtendremos que $\tilde{P}_P = {}_t\tilde{E}_x$, de forma que los α-cortes de $\tilde{P}_P$ serán:

$$P_{P\alpha} = {}_tE_{x\alpha} = \left[{}_t E_x^1(\alpha), {}_t E_x^2(\alpha)\right] = \left[f_t^1(\alpha)\, {}_t p_x, f_t^2(\alpha)\, {}_t p_x\right]$$

Por tanto $\mu_{{}_t\tilde{E}_x}(x) = \mu_{\tilde{P}_P}(x)$, por lo que todas las expresiones de los α-cortes y función de pertenencia obtenidas en el apartado 3.3. para ${}_t\tilde{E}_x$ corresponden a las de $\tilde{P}_P$.

De esta forma, la prima pura cierta P_p se calcula, para una aversión al riesgo de interés prefijada β, como:

$$EV\left[\widetilde{P}_P, \beta\right] = P_P = (1-\beta)\int_0^1 f_t^1(\alpha)\,{}_t p_x \, d\alpha + \beta\int_0^1 f_t^2(\alpha)\,{}_t p_x \, d\alpha = \left[(1-\beta)\int_0^1 f_t^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 f_t^2(\alpha)d\alpha\right]{}_t p_x$$

4.3.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\widetilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α, por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales presentan la siguiente forma, una vez han sido ordenadas sus realizaciones en orden creciente:

$$L_P^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con} \quad {}_t q_x \\ f_t^i(\alpha) - P_p & \text{con} \quad {}_t p_x \end{cases}, \text{ i=1,2.}$$

Asimismo, la función de distribución, $\widetilde{F}[X]$ puede ser expresada, a un nivel α, por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_t q_x & \text{si } -P_p \le X < f_t^i(\alpha) - P_p \\ 1 & \text{si } X \ge f_t^i(\alpha) - P_p \end{cases}, \text{ i=1,2.}$$

Asimismo, el 1-ε percentil, de la variable borroso aleatoria $\widetilde{L}_P$, $\widetilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que dependiendo del nivel ε para el que queramos asegurar la solvencia del asegurador, presenta como α-cortes:

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_tq_x$, es decir, $1>\varepsilon\ge 1- {}_tq_x = {}_tp_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, se trata del número cierto $-P_p$.

b) Si ${}_tq_x < 1-\varepsilon\le 1$, es decir, ${}_tp_x > \varepsilon \ge 0$, entonces $Q_\alpha^\varepsilon = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] - P_p$, es decir, $\widetilde{Q}^\varepsilon = \widetilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, el recargo a cobrar, Q^ε, vendrá dado para un determinado nivel β':

a) Si $0<1-\varepsilon\le {}_tq_x$ o $1>\varepsilon\ge {}_tp_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$

b) Si ${}_tq_x < 1-\varepsilon \le 1$ o ${}_tp_x > \varepsilon \ge 0$:

$$EV\left[\widetilde{Q}^\varepsilon, \beta'\right] = Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 f_t^1(\alpha)d\alpha + \beta'\int_0^1 f_t^2(\alpha)d\alpha \; -P_p$$

Donde, si $\beta=\beta$'

$$Q^{\varepsilon} = \left[(1-\beta)\int_0^1 f_t^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 f_t^2(\alpha)d\alpha \right] {}_t q_x$$

4.3.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración viene dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato

Si el interés aplicar durante todos los períodos viene dado por un número borroso triangular $\tilde{i} = \left(i^1, i^2, i^3\right)$, podemos comprobar que:

$$P_{p\alpha} = {}_t E_{x_\alpha} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t}\,{}_t p_x, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t}\,{}_t p_x\right]$$

Por lo que:

$$P_p = \left[(1-\beta)\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t} d\alpha + \beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t} d\alpha \right]{}_t p_x$$

En este contexto, deberemos diferenciar dos supuestos:

a) Si t=1, entonces:

$$P_P = \left[(1-\beta)\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \beta\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} \right]{}_t p_x$$

b) Si t>1, entonces:

$$P_P = \left[(1-\beta)\frac{\left(1+i^2\right)^{-t+1} - \left(1+i^3\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i^3-i^2\right)} + \beta\frac{\left(1+i^1\right)^{-t+1} - \left(1+i^2\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i^2-i^1\right)} \right]{}_t p_x$$

De esta forma, la determinación de la variables aleatoria inferior y superior correspondientes a $\tilde{L}_p$ es inmediata. A partir de estas, su función de probabilidad acumulada, vendrá dada para un nivel de presunción α dado por:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_t q_x & \text{si } -P_p \le X < \left(1+i^1+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-t} - P_p \\ 1 & \text{si } X \ge \left(1+i^2+\left(i^2-i^1\right)\alpha\right)^{-t} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_t q_x & \text{si} - P_p \leq X < \left(1 + i^3 - \left(i^3 - i^2\right)\alpha\right)^{-t} - P_p \\ 1 & \text{si } X \geq \left(1 + i^3 - \left(i^3 - i^2\right)\alpha\right)^{-t} - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el 1-ε percentil de $\widetilde{L}_p$, $\widetilde{Q}^{\varepsilon}$, será un número borroso cuyos α-cortes son, para cada probabilidad de pérdida ε:

a) Si $0<1-\varepsilon\leq {}_t q_x$, $Q_\alpha^{\varepsilon} = [-P_p, -P_p]$

b) Si ${}_t q_x <1-\varepsilon\leq 1$, $Q_\alpha^{\varepsilon} = [(1+i^3-(i^3- i^2)\alpha)^{-t}, (1+i^1+(i^2- i^1)\alpha)^{-t}]- P_p$, es decir, $\widetilde{Q}^{\varepsilon} = \widetilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, Q^{ε}, o el recargo a cobrar, se hallará una vez ha fijado el decisor su nivel de aversión al riesgo de interés, β' como:

a) Si $0<1-\varepsilon\leq {}_t q_x$, $Q^{\varepsilon} = -P_p$

b) Si ${}_t q_x <1-\varepsilon\leq 1$,

$$Q^{\varepsilon} = \left(1 - \beta'\right)\int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t}\, d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t}\, d\alpha - P_p$$

b.1) De esta forma, si t = 1:

$$Q^{\varepsilon} = \left(1 - \beta'\right)\frac{\ln\dfrac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln\dfrac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

b.2) Y si t > 1

$$Q^{\varepsilon} = \left(1 - \beta'\right)\frac{\left(1 + i^2\right)^{-t+1} - \left(1 + i^3\right)^{-t+1}}{\left(t - 1\right)\left(i^3 - i^2\right)} + \beta' \frac{\left(1 + i^1\right)^{-t+1} - \left(1 + i^2\right)^{-t+1}}{\left(t - 1\right)\left(i^2 - i^1\right)} - P_p$$

4.3.4. Aplicación numérica

A continuación desarrollaremos una aplicación suponiendo que un individuo de 45 años suscriba un seguro de capital diferido con una cuantía asegurada de 1.000 u.m. y el diferimiento del capital de supervivencia es 10 años. Asimismo, el tipo de interés borroso a aplicar y las tablas de mortalidad que utilizaremos son las ya utilizadas en el resto de apartados. Recordamos que la estructura actuarial de las prestaciones ha sido analizada en la aplicación numérica del apartado 3.3.4.

En primer lugar, podemos observar que la prima única borrosa se obtiene como $\widetilde{P}_P = {}_{10}\widetilde{E}_{45}$, siendo su función de pertenencia, la calculada en el apartado 3.2.4. Respecto a P_p, podemos observar que para un β dado, y teniendo en cuenta que ${}_{10}E_{45\alpha}$ se obtiene como:

$${}_{10}E_{45\alpha} = [1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-10}\frac{906.484}{951.683}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-10}\frac{906.484}{951.683}]$$

P_p será:

$$P_p = (1-\beta)644{,}57 + \beta 744{,}42$$

de forma que para $\beta = 0'75$, $P_p = 719{,}46$.

Analicemos la función de distribución de las pérdidas para el asegurador, $\widetilde{L}_p$, si cobra la prima pura única. Podemos observar que para un nivel α, las variables aleatorias inferior y superior son:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} - 719'46 & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683} \end{cases} \text{ y,}$$

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} - 719'46 & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

Así, las funciones de distribución inferior y superior son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \dfrac{45199}{951683} & \text{si } -719'46 \le X < 1000(1'02 + 0{,}01\alpha)^{-10} - 719'46 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000(1'02 + 0{,}01\alpha)^{-10} - 719'46 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \dfrac{45199}{951683} & \text{si } -719'46 \le X < 1000(1'05 - 0{,}02\alpha)^{-10} - 719'46 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000(1'05 - 0{,}02\alpha)^{-10} - 719'46 \end{cases}$$

De esta forma, si el asegurador no cobra ningún recargo, y cobra a su único asegurado en cartera la prima pura, la probabilidad de que esta prima sea suficiente vendrá dada por $\widetilde{F}[0]$, la cual presenta como función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{F}[0]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = \dfrac{45199}{951683} \approx 0'0475 \\ 0'83 & x = 1 \end{cases}$$

Respecto a la probabilidad de quiebra ε que presenta un asegurador, cobrando un recargo borroso $\widetilde{Q}^{\varepsilon}$, podemos observar que Q^{ε}_{α} viene dado por:

a) Si 0<1-ε≤ 0'0485, Q^{ε}_{α} = -719'46

b) Si 0'0485<1-ε≤1, $Q^{\varepsilon}_{\alpha} = [1000\cdot(1'05\text{-}0'02\alpha)^{-10}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-10}]$ -719'46

Supongamos que el asegurador busca conseguir una probabilidad de insolvencia del 0%. En este caso, el recargo cierto que fijará para un β dado será:

$$Q^0 = (1-\beta')676'71 + \beta' \cdot 781{,}54 - 719'46$$

y si tomamos β' = 0'75, Q^0 = 35'87. Expresamos el recargo, como es habitual en la práctica actuarial, como un porcentaje sobre la prima pura, la desviación estándar cierta y la varianza cierta de $\widetilde{L}_P$, coincidiendo las dos últimas, como ya comentamos, con las que se deducen de la variable borroso aleatoria correspondiente al capital de supervivencia.

P_P	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
4,99%	0,15%	23,05%

En este caso, la prima única recargada será: P_R = 755'33.

Como ha sido comentado con anterioridad, el cobro de P_R = 755'33 no asegura que el asegurador no esté expuesto a la quiebra. Aunque se ha considerado un β=0'75 y se ha supuesto que el individuo sobrevive los 10 años que dura el seguro y por tanto, cobra al vencimiento del seguro 1000 u.m., un escenario muy adverso respecto al tipo de interés podría hacer que el recargo fuera insuficiente. De hecho, a partir de las funciones de distribución inferior y superior de $\widetilde{L}_p$, del recargo a aplicar se puede hallar la función de pertenencia de la función de distribución. Si X=35'87, $\widetilde{F}[35'87]$ vendrá dada por:

$$\mu_{\widetilde{F}[35'87]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0'84 & x = 0'0475 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

es decir, si bien, cobrando un recargo sobre la prima pura de 35'87 u.m. es cierto que la probabilidad de que la prima recargada sea suficiente es 1, también es prácticamente cierto que la probabilidad de que sea insuficiente es del 95'25%.

Como realizamos con el ejemplo del seguro de vida analizado en el apartado 4.2., analizaremos a continuación el nivel de solvencia conseguido por el asegurador, tras cobrar el recargo 35'87 unidades monetarias, para dos escenarios del tipo de interés que éste ha considerado como posibles al estimar $\tilde{i}$.

Supongamos en primer lugar que el asegurador consiguiera finalmente, el interés más posible invirtiendo las primas, es decir, el 3%, donde $\mu_{\tilde{i}}(0'03)=1$. En este caso, la variable aletoria pérdida después de cobrarse la prima pura es:

$$L_p = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'03^{-10} - 719'46 = 24'63 & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

siendo su nivel de posibilidad el del tipo de interés que define a dicha variable aletoria, es decir, 1. Asimismo, la función de distribución de dicha variable aleatoria es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \dfrac{45.199}{951.683} & \text{si } -719'46 \le X < 24'63 \\ 1 & \text{si } X \ge 24'63 \end{cases}$$

Para esta trayectoria, si el recargo es de 35'87 unidades monetarias, y por tanto, la prima recargada es de 755'33 unidades monetarias, la función de distribución asociada al recargo es de F[35'87]=1, y por tanto, en esta trayectoria, el recargo asegura con una probabilidad del 100% la solvencia del asegurador. Como el nivel de pertenencia de esta trayectoria es 1, obtenemos que $\mu_{\tilde{F}[35'87]}(1)=1$.

Supongamos ahora que el interés que es capaz de conseguir finalmente el asegurador invirtiendo las primas es del 2'84%, y por tanto, en este escenario el tipo de interés tiene un nivel de presunción de $\mu_{\tilde{i}}(0'0284)=0'84$, es decir, es un escenario más pesimista que optimista respecto al tipo de interés, pero con un nivel de verdad asociado muy elevado. La variable aleatoria pérdida después de caobrar la prima pura asociada a este escenario tiene un nivel de presunción del 0'84 y es:

$$L_p = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \dfrac{45.199}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'0284^{-10} - 719'46 = 36'29 & \text{con } \dfrac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

Asimismo, la función de distribución de dicha variable aleatoria es:

$$F[X]=\begin{cases}0 & \text{si } X<-719'46\\ \dfrac{45.199}{951.683} & \text{si } -719'46\leq X<36'29\\ 1 & \text{si } X\geq 36'29\end{cases}$$

De esta forma, F[35’87] = $\frac{45.199}{951.683}$, es decir, 0’0475 para esta trayectoria del tipo de interés (que posee un nivel de presunción del 0’84) y por tanto, el nivel de presunción de que la probabilidad de suficiencia de la prima recargada de 755’33 unidades monetarias sea del 4’75% -o de que la probabilidad de quiebra sea del 95’25% con dicha prima- será al menos de 0’84, y ello ocurre si el asegurardor sólo puede conseguir invirtiendo la prima a un 2’84% anual o un tipo menor.

4.4. ANÁLISIS DEL SEGURO VIDA ENTERA

4.4.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa que notamos como $\widetilde{P}$, la variable borroso aleatoria pérdida es:

$$\widetilde{L}=\widetilde{f}_t-\widetilde{P} \text{ con } {}_{t|}q_x,\ t=0,1,...,w-x-1$$

Planteando $\widetilde{E}[L]=0\Rightarrow\widetilde{A}_x-\widetilde{P}_P=0$, obtendremos que $\widetilde{P}_P=\widetilde{A}_x$, de forma que los α-cortes de $\widetilde{P}_P$, $P_{P\alpha}$ serán:

$$P_{P\alpha}=A_{x\alpha}=\left[A_x^1(\alpha),A_x^2(\alpha)\right]$$

Así, también se cumple que $\mu_{\widetilde{A}_x}(x)=\mu_{\widetilde{P}_P}(x)$, por lo que todas las expresiones y consideraciones realizadas para $\widetilde{A}_X$ en el apartado 3.4. se hacen extensibles a $\widetilde{P}_P$.

Asimismo, la prima única cierta, P_p se calcula para una aversión al riesgo de interés β dada, como:

$$EV\left[\widetilde{P}_P,\beta\right]=P_P=(1-\beta)\int_0^1 A_x^1(\alpha)d\alpha+\beta\int_0^1 A_x^2(\alpha)d\alpha=$$

$$=(1-\beta)\int_0^1\left[\sum_{t=0}^{w-x-1}f_{t+1}^1(\alpha)_{t|}q_x\right]d\alpha+\beta\int_0^1\left[\sum_{t=0}^{w-x-1}f_{t+1}^1(\alpha)_{t|}q_x\right]d\alpha=$$

$$=(1-\beta)\sum_{t=0}^{w-x-1}{}_{t|}q_x\int_0^1 f_{t+1}^1(\alpha)d\alpha+\beta\sum_{t=0}^{w-x-1}{}_{t|}q_x\int_0^1 f_{t+1}^2(\alpha)d\alpha$$