$$\widetilde{L} = \begin{cases} \widetilde{f}_{t+1} - \widetilde{P} & \text{con} \quad {}_{t|}q_x \quad t = 0,1,...,n-1 \\ 0 - \widetilde{P} & \text{con} \quad {}_n p_x \end{cases}$$

Planteando $\widetilde{E}[L] = 0$, obtendremos que $\widetilde{P}_P = {}_n\widetilde{A}_x$. De esta forma obtenemos $P_{P\alpha}$ como:

$$P_{P\alpha} = {}_nA_{x\alpha} = \left[{}_nA_x^1(\alpha), {}_nA_x^2(\alpha)\right]$$

Y por tanto, también se obtiene que $\mu_{{}_n\widetilde{A}_x}(x) = \mu_{\widetilde{P}_P}(x)$. Así, las expresiones y cuestiones apuntadas en el apartado 3.5. para la esperanza de esta estructura actuarial también corresponden a $\widetilde{P}_P$.

Asimismo, P_P se calcula para un β dado como:

$$EV\left[\widetilde{P}_P, \beta\right] = P_P = (1-\beta)\int_0^1 {}_nA_x^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 {}_nA_x^2(\alpha)d\alpha =$$

$$= (1-\beta)\int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^1(\alpha)_{t|}q_x\right]d\alpha + \beta\int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^2(\alpha)_{t|}q_x\right]d\alpha =$$

$$= (1-\beta)\left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \int_0^1 f_{t+1}^1(\alpha)d\alpha\right] + \beta\left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \int_0^1 f_{t+1}^2(\alpha)d\alpha\right]$$

4.5.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

Para un nivel α de la variable borroso aleatoria pérdida, $\widetilde{L}_p$, se obtiene la correspondiente variable aleatoria inferior y superior con sus realizaciones ordenadas de la forma habitual como:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_P & \text{con} \quad {}_n p_x \\ f_{n-t}^i(\alpha) - P_P & \text{con} \quad {}_{n-1-t|}q_x,\ t = 0,1,...,n-1 \end{cases} \qquad i=1,2.$$

Los α-cortes de $\widetilde{F}[X]$ quedan caracterizados por la función de distribución inferior $F^1[X](\alpha)$ y la superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que si i=1,2 se obtiene:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_n p_x & \text{si } -P_P \le X < f_n^i(\alpha) - P_P \\ {}_n p_x + \sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x & \text{si } f_{n-t}^i(\alpha) - P_p \le X < f_{n-(t+1)}^i(\alpha) - P_p,\ t = 0,1,...,n-2 \\ 1 & X \ge f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el 1-ε percentil, de $\tilde{L}_p$, presentará como α-cortes, para cada uno de los niveles ε para los que se analice la solvencia:

- Si $0<1-\varepsilon\leq {}_np_x$, $Q_\alpha^\varepsilon=[-P_P,-P_P]$, es decir, es el número crisp $-P_p$.
- Si ${}_np_x<1-\varepsilon\leq {}_np_x + {}_{n-1|}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon=\left[f_n^1(\alpha),f_n^2(\alpha)\right]-P_P$
- Si ${}_np_x+\sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x<1-\varepsilon\leq {}_np_x+\sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r|}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon=\left[f^1_{n-(t+1)}(\alpha),f^2_{n-(t+1)}(\alpha)\right]-P_P$, donde $t\in\{0,1,\ldots n-2\}$

De esta forma, el valor cierto Q^ε de $\tilde{Q}^\varepsilon$, vendrá dado para un parámetro β' dado como:

Si $0<1-\varepsilon\leq {}_np_x$,

$$Q^\varepsilon=-P_p$$

En el caso en que ${}_np_x<1-\varepsilon\leq {}_np_x + {}_{n-1|}q_x$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon=(1-\beta')\int_0^1 f_n^1(\alpha)d\alpha+\beta'\int_0^1 f_n^2(\alpha)d\alpha\ -P_P$$

Y por último, si consideramos un nivel de estabilidad tal que ${}_np_x+\sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x<1-\varepsilon\leq {}_np_x+\sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r|}q_x$, para $t\in\{0,1,\ldots n-2\}$ se obtiene:

$$Q^\varepsilon=(1-\beta')\int_0^1 f^1_{n-(t+1)}(\alpha)d\alpha+\beta'\int_0^1 f^2_{n-(t+1)}(\alpha)d\alpha\ -P_P$$

4.5.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del seguro

Planteando en este caso $\tilde{E}[L]=0$, obtendremos la prima pura borrosa cuyos α-cortes serán:

$$P_{p_\alpha}={}_nA_{x_\alpha}=\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x,\sum_{t=0}^{n-1}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_x\right]$$

De esta forma, P_p se calcula para un β dado como:

$$P_p = (1-\beta)\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}d\alpha + \beta\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}d\alpha =$$

$$= (1-\beta)\left[\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2}\,{}_{0|}q_x + \sum_{t=1}^{n-1}\frac{(1+i^2)^{-t}-(1+i^3)^{-t}}{t(i^3-i^2)}\,{}_{t|}q_x\right] + \beta\left[\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1}\,{}_{0|}q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{n-1}\frac{(1+i^1)^{-t}-(1+i^2)^{-t}}{t(i^2-i^1)}\,{}_{t|}q_x\right]$$

Dado que, en este caso, las funciones de distribución inferior y superior para un nivel de presunción α determinado, son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_np_x & \text{si } -P_P \le X < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n} - P_p \\ {}_np_x + \sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x & \text{si } (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(n-t)} - P_P \le X \\ & < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p,\ t=0,\ldots,n-2 \\ 1 & \text{si } X \ge (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_P \\ {}_np_x & \text{si } -P_P \le X < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n} - P_p \\ {}_np_x + \sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x & \text{si } (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(n-t)} - P_P \le X \\ & < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p,\ t=0,\ldots,n-2 \\ 1 & \text{si } X \ge (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

El valor de los α-cortes de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, que es el número borroso que acumula a su izquierda una probabilidad al menos igual a 1-ε vendrá dado por:

- Si $0<1-\varepsilon\le {}_np_x$, $Q_\alpha^{\varepsilon} = [-P_P, -P_P]$, es decir, es el número crisp $-P_p$.
- Si ${}_np_x<1-\varepsilon\le {}_np_x + {}_{n-1|}q_x$,, $Q_\alpha^{\varepsilon} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}\right] - P_p$
- Si ${}_np_x+\sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x < 1-\varepsilon \le {}_np_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r|}q_x$,

$$Q_\alpha^{\varepsilon} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))}\right] - P_p \quad \text{con } t\in\{0,1,\ldots,n\text{-}2\}$$

Así, el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^{ε}, de forma que se obtenga a un nivel ε de estabilidad, y para un parámetro β' prefijado se halla como:

- Si $0<1-\varepsilon\le {}_np_x$: $-P_p$.
- Si ${}_np_x<1-\varepsilon\le {}_np_x + {}_{n-1|}q_x$:

$$Q^{\varepsilon}= (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}d\alpha+\beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}d\alpha \text{ -}P_p =$$

$$=(1-\beta')\frac{(1+i^2)^{-n+1}-(1+i^3)^{-n+1}}{(n-1)(i^3-i^2)}+\beta'\frac{(1+i^1)^{-n+1}-(1+i^2)^{-n+1}}{(n-1)(i^2-i^1)}-P_p$$

- Si ${}_np_x+\sum_{r=0}^{t} {}_{n-1-r|}q_x$ <1-ε≤${}_np_x+\sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r|}q_x$, para t∈{0,1,…,n-3}, se obtiene:

$$Q^{\varepsilon}= (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n+t+1}d\alpha+\beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n+t+1}d\alpha \text{ -}P_p=$$

$$=(1-\beta')\frac{(1+i^2)^{-n+t+2}-(1+i^3)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^3-i^2)}+\beta'\frac{(1+i^1)^{-n+t+2}-(1+i^2)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^2-i^1)}-P_p$$

Donde si n-3<0, {0,1,…,n-3} está vacío, y por tanto, no tiene sentido.

Para tal que ${}_np_x+\sum_{r=0}^{n-2} {}_{n-1-r|}q_x$ <1-ε≤ ${}_np_x+\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1-r|}q_x$, el resultado de Q^{ε} es:

$$Q^{\varepsilon}= (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1}d\alpha+\beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1}d\alpha \text{ -}P_p=$$

$$=(1-\beta')\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2}+\beta'\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1}-P_p$$

4.5.4. Aplicación numérica

A continuación realizamos el análisis de un seguro temporal cuya duración son 40 años, con una cuantía asegurada de 1000 unidades monetarias suscrito por un individuo de 35 años. Se utiliza el mismo interés de valoración y las mismas tablas de mortalidad de siempre. Es inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\widetilde{P}_P = {}_{40}\widetilde{A}_{35}$, por lo que los α-cortes $P_{p\alpha}$ se hallan como:

$$P_{P\alpha}=\left[1000\cdot\sum_{t=0}^{39}(1'05-0'02\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_{35},1000\cdot\sum_{t=0}^{39}(1'02+0'01\alpha)^{-(t+1)}\,{}_{t|}q_{35}\right]$$

y, entonces, para un β dado, P_p es:

$P_{P\alpha}$=(1-β)123,07+ β177,60

y tomándose β = 0’75, se obtiene la prima pura P_p = 163,97.

De esta forma, la variable borroso aleatoria $\widetilde{L}_p$ vendrá dada por las variables aleatorias convencionales inferior, $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$, siendo éstas respectivamente, y ya con las realizaciones ordenadas de forma creciente:

$$L_p^1(\alpha)=\begin{cases}-163'97 & \text{con } {}_{40}p_{35}\\ 1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-40+t}\text{ - }163'97 & \text{con } {}_{39\text{-}t|}q_{35},\ t=0,1,...,39\end{cases}$$

y,

$$L_p^2(\alpha)=\begin{cases}-163'97 & \text{con } {}_{40}p_{35}\\ 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-40+t}\text{ - }163'97 & \text{con } {}_{39\text{-}t|}q_{35},\ t=0,1,...,39\end{cases}$$

De esta forma, las funciones de distribución $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$ son:

$$F^1[X](\alpha)=\begin{cases}0 & \text{si } X<-163'97\\ {}_{40}p_{35} & \text{si } -163'97\le X<1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-40}-163'97\\ {}_{40}p_{35}+\sum_{r=0}^{t}{}_{39-r|}q_{35} & \text{si } 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-40+t}-163'97\le X\\ & <1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-40+(t+1)}-163'97,\ t=0,1,...,38\\ 1 & X\ge 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-1}-163'97\end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha)=\begin{cases}0 & \text{si } X<-163'97\\ {}_{40}p_{35} & \text{si } -163'97\le X<1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-40}-163'97\\ {}_{40}p_{35}+\sum_{r=0}^{t}{}_{39-r|}q_{35} & \text{si } 1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-40+t}-163'97\le X\\ & <1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-40+(t+1)}-163'97,\ t=0,1,...,38\\ 1 & X\ge 1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-1}-163'97\end{cases}$$

Podemos analizar el nivel de solvencia del asegurador si cobra únicamente la prima pura con β=0'75, sin mas que analizar $\widetilde{F}[0]$. Su función de pertenencia, $\mu_{\widetilde{F}[0]}(x)$, es la correspondiente a un número borroso discreto que se obtiene como:

x	0,6477	0,6730	0,6967	0,7190
μ(x)	1,00	0,19	0,13	0,06

Respecto a la expresión de los α-cortes de los cuantiles borrosos, podemos observar que Q^{ε}_{α} toman como expresión:

- Si $0<1-\varepsilon\le {}_{40}p_{35}$, $Q_\alpha^{\varepsilon}=[-163'97,-163'97]$, es decir, es el número crisp –163'97.
- Si ${}_{40}p_{35}<1-\varepsilon\le{}_{40}p_{35}+{}_{39|}q_{35}$,

  $Q_\alpha^{\varepsilon}=\left[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-40},1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-40}\right]\text{- }163'97$
- Si ${}_{40}p_{35}+\sum_{r=0}^{t}{}_{39-r|}q_{35}<1-\varepsilon\le{}_{40}p_{35}+\sum_{r=0}^{t+1}{}_{39-r|}q_{35}$,

$$Q_\alpha{}^\varepsilon = \left[1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40+(t+1)}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40+(t+1)}\right] - 163'97 \;\; t \in \{0,1,\ldots 38\}$$

Así, los α-cortes de $\widetilde{Q}^{0'1}$, $\widetilde{Q}^{0'05}$ y $\widetilde{Q}^{0'01}$ que son los valores que teóricamente reducen la probabilidad de insuficiencia de la prima pura al 10%, 5% y 1% respectivamente son:

$Q_\alpha{}^{0'1}$ =[1000·(1'05-0'02α)$^{-25}$, 1000·(1'02+0'01α)$^{-25}$] -163'97

$Q_\alpha{}^{0'05}$ =[1000·(1'05-0'02α)$^{-18}$, 1000·(1'02+0'01α)$^{-18}$] -163'97

$Q_\alpha{}^{0'01}$ =[1000·(1'05-0'02α)$^{-7}$, 1000·(1'02+0'01α)$^{-7}$] -163'97

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con β' = 0'75, el valor de la prima recargada, P_R, y el porcentaje que el recargo supone sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza son:

ε	Q^ε	P_R	P_P	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'1	336,34	500,31	205,13%	0,72%	155,78%
0'05	441,62	605,59	269,34%	0,95%	204,54%
0'01	657,27	821,23	400,86%	1,41%	304,42%

Damos a continuación las expresiones de $\mu_{\tilde{F}[336'34]}(x)$, $\mu_{\tilde{F}[441'62]}(x)$ y $\mu_{\tilde{F}[657'27]}(x)$, lo cual nos indicará la probabilidad de no existencia de pérdidas y el nivel de presunción de dicha probabilidad:

$Q^{0'1}$=336'34		$Q^{0'05}$=441'62		$Q^{0'01}$=657'27	
x	μ(x)	x	μ(x)	x	μ(x)
0,9659	0,14	0,9802	0,17	0,9940	0,49
0,9615	0,29	0,9771	0,37	0,9922	0,83
0,9568	0,42	0,9737	0,53	0,9902	1,00
0,9516	0,54	0,9699	0,68	0,9880	0,49
0,9461	0,64	0,9659	0,80	0,9856	0,21
0,9401	0,74	0,9615	0,91		
0,9336	0,82	0,9568	1,00		
0,9267	0,90	0,9516	0,83		
0,9193	0,97	0,9461	0,67		
0,9114	1,00	0,9401	0,54		
0,9029	0,81	0,9336	0,42		
0,8939	0,70	0,9267	0,31		
0,8843	0,60	0,9193	0,20		
0,8740	0,50	0,9114	0,11		
0,8630	0,42	0,9029	0,03		
0,8512	0,34				
0,8385	0,26				
0,8248	0,19				
0,8102	0,12				
0,7944	0,06				