CAPÍTULO 5:

FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE ALEATORIA PÉRDIDA A TRAVÉS DE LA TEORÍA CLÁSICA DEL RIESGO

5.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

En este epígrafe analizaremos la fijación de las primas a repercutir a un asegurado, suponiendo que para cada clase de seguro, el número de asegurados es elevado. Entenderemos como clase de seguro a un tipo de contrato determinado, con los asegurados de la misma edad y sexo y los mismos capitales asegurados ante las contingencias que contemple el contrato, y suscritos en, aproximadamente, el mismo instante temporal.

En el apartado anterior, analizamos como calcular, en una cartera compuesta por un único asegurado, y con un enfoque borroso aleatorio de la operación, la prima pura única, P_p. En este caso, los resultados son idénticos a los que se obtienen con la teoría de equivalencia estática. En segundo lugar, analizamos como calcular el recargo a aplicar sobre P_p, Q^{ε}, para obtener una prima recargada, P_R, de forma que se asegure un nivel de solvencia ε. Ya comprobamos que con intereses inciertos el cobro de dicha prima implicaba obtener una probabilidad de insolvencia de "aproximadamente ε" y no exactamente de ε. En el apartado 4 sólo existía un único asegurado en la cartera, lo cual es evidentemente irreal. El asegurador, aún teniendo un conjunto de pólizas idénticas, puede tratar estas como individuales, aplicando los resultados obtenidos en el apartado anterior. Ello sin embargo, implicará no tener en cuenta la ley de los grandes números, según la cual a medida que el número de asegurados se incremente, el riesgo de que se produzcan desviaciones en la mortalidad esperada debe disminuir, de forma que el recargo dirigido a evitar dichas desviaciones desfavorables también debe disminuir. Al tratamiento de este problema le dedicaremos este epígrafe 5 y el siguiente. En cualquier caso, consideraremos que cada clase de seguro es un negocio absolutamente independiente del resto, o dicho de otra forma, que el negocio del asegurador se compone de una única clase de seguro; no considerándose pues, en ningún caso, la heterogeneidad de la cartera asegurada.

La consideración de dicha heterogeneidad, implicaría reducir más el riesgo de mortalidad del asegurador, porque desviaciones desfavorables de la siniestralidad en una clase de seguro pueden ser compensadas por desviaciones favorables en otro. Ello permite la posibilidad de fijar recargos todavía menores que los que deben aplicarse si los calculamos separadamente. Evidentemente, ello llevaría a establecer una prima menor para el asegurado, ya que se le acabaría repercutiendo finalmente un recargo menor. El problema reside en como repartir este "beneficio" –esto es, la disminución del recargo, y por tanto, la prima recargada-. Esta cuestión no tiene en absoluto una resolución trivial, ya que en principio, unas clases de seguros incorporan mayor riesgo para el asegurador que otros, y por tanto, el reparto de esta "bonificación" entre los asegurados no debe realizarse a partes iguales. En Alegre y Claramunt (1989) y Alegre y Claramunt (1995) se proponen diversos criterios, suponiéndose certeza en el tipo de interés de valoración. Todo ello se complica si el recargo es a priori borroso y dicha disminución se manifiesta a través de un subconjunto borroso. Este problema excede de los objetivos de esta tesis, aunque, sin embargo, creemos que será de interés su análisis y que puede ser motivo de trabajos posteriores a éste.

En nuestro análisis, dado que el pasivo se compone de N pólizas idénticas, el valor actual de las pérdidas, tras cobrar la prima pura, para el asegurador por toda la cartera es una variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p^C$ que se halla como la suma de las N variables borroso aleatorias pérdida correspondientes a cada asegurado, que deberán estar idénticamente distribuidas. Si notamos a la correspondiente al j-ésimo asegurador como $\tilde{L}_p^j$, con $\tilde{L}_p^1 = \tilde{L}_p^2 = \ldots = \tilde{L}_p^N = \tilde{L}_p$, $\tilde{L}_p^C$ se obtiene como:

$$\tilde{L}_p^C = \tilde{L}_p^1 + \tilde{L}_p^2 + \ldots + \tilde{L}_p^N = \tilde{Z}^1 + \tilde{Z}^2 + \ldots + \tilde{Z}^N - N \cdot P_p$$

Donde debemos tener en cuenta que $\tilde{Z}^1 = \tilde{Z}^2 = \ldots = \tilde{Z}^N = \tilde{Z}$ y son las variables borroso aleatorias valor actual de las prestaciones correspondientes a cada uno de los asegurados. De esta forma, para un nivel de presunción α de las realizaciones borrosas de dichas variables borroso aleatorias, podemos comprobar que las variables aleatorias inferior y superior (nítidas) que define $\tilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ respectivamente, vendrán dadas por las variables aleatorias nítidas:

$$L_p^{1,C}(\alpha) = L_p^{1,1}(\alpha) + L_p^{1,2}(\alpha) + \ldots + L_p^{1,N}(\alpha) = Z^{1,1}(\alpha) + Z^{1,2}(\alpha) + \ldots + Z^{1,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

$$L_p^{2,C}(\alpha) = L_p^{2,1}(\alpha) + L_p^{2,2}(\alpha) + \ldots + L_p^{2,N}(\alpha) = Z^{2,1}(\alpha) + Z^{2,2}(\alpha) + \ldots + Z^{2,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

Respecto al comportamiento de la mortalidad, en estadística actuarial tradicionalmente se ha considerado que el comportamiento de ésta en un individuo cualquiera es independiente respecto al resto, a fin de simplificar los modelos actuariales, hipótesis que también aceptaremos[1]. De esta

[1] Somos conscientes que esta hipótesis no es necesariamente cierta. Supongamos que la totalidad de los individuos asegurados residen en una misma región. Es evidente que muchos de ellos tienen similares hábitos alimenticios, viven en un entorno con un mismo nivel de contaminación etc. lo cual influye en el comportamiento de la mortalidad para las personas de dicha región. En este caso será difícil considerar que la variable aleatoria T_x correspondiente a cada individuo sea independiente con respecto al resto que componen la cartera de asegurados.

forma, las variables aleatorias nítidas $L_p^{i,j}(\alpha)$, i=1,2, y j=1,2,…,N, quedan definidas por un interés o intereses nítidos, están idénticamente distribuidas y son independientes. Sin embargo, las trayectorias posibles que pueden tomar los tipos de interés al contado futuros, y por tanto, los que pueden tomar para cada vencimiento, serán comunes para toda la cartera. Así, la variable borroso aleatoria "valor actual de las prestaciones", si bien es independiente para dos asegurados cualquiera respecto a la mortalidad será interactivo, ya que el interés de actualización para cada periodo debe ser común para todas las cabezas aseguradas.

La independencia del comportamiento de la mortalidad para cada asegurado, y el hecho de que partamos de la hipótesis de que la cartera se compone de suficientes pólizas homogéneas, nos permitirá aplicar la Teoría Clásica del Riesgo, que se puede consultar con mayor profundidad en Vegas Asensio y Nieto de Alba (1993, p. 253-257), la cual se basa en el Teorema Central del Límite, y por tanto, en la hipótesis de que el colectivo asegurado es elevado.

Para el análisis que llevaremos a cabo en este epígrafe, será de gran utilidad el subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, que recoge todas las posibles trayectorias que pueden tomar, según la estimación del asegurador, los intereses de actualización a lo largo de la duración del contrato (que es aleatorio). Éste subconjunto borroso, fue construido y analizado en el apartado 3.1. de esta parte de la tesis.

Denominamos como x a una trayectoria del tipo de interés (forward o spot) a lo largo de toda la vida del contrato con un nivel de presunción $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$, y α-cortes Ψ_α.

Si se aplica un único tipo de interés $\tilde{i}$ a lo largo de toda la vida del contrato, bastará con tener en consideración su función de pertenencia $\mu_{\tilde{i}}(x)$ y sus α-cortes, que son notados como i_α, y son intervalos de confianza. En este caso, identificaremos $\mu_{\tilde{i}}(x)$ con $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$ e i_α con Ψ_α. Así, $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$ será una función de pertenencia monodimensional y Ψ_α un intervalo de confianza delimitado por el interés de actualización mínimo y máximo, es decir, un rectángulo en R^+.

Para una trayectoria cualquiera del tipo de interés, x, cuyo nivel de presunción es $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$, obtenemos una variable aleatoria pérdida para cada individuo asegurado tras cobrar la prima pura P_p, $L^j_p(x)$. Para toda la cartera, la trayectoria del interés debe ser común, de forma que la pérdida del asegurador en esta cartera y trayectoria, $L_p^C(x)$, será:

$$L^C_p(x)= L^1_p(x) + L^2_p(x) +\ldots+ L^N_p(x) = Z^1(x) + Z^2(x) +\ldots+ Z^N(x)-N\cdot P_p$$

Donde notamos como $Z^j(x)$ al valor actual de las prestaciones del contrato para el j-ésimo asegurado bajo la hipótesis de una trayectoria del interés x dada, siendo por tanto $Z^1(x)$, $Z^2(x),\ldots,Z^N(x)$ variables aleatorias idénticamente distribuidas. De esta forma, la esperanza, la varianza y la desviación estándar de $Z^j(\alpha)$ son funciones de x –multidimensional en general, y de una única variable si se utiliza un único tipo de actualización- que notamos como $E[Z](x)$, $V[Z](x)$ y $D[Z](x)$ respectivamente.

Como las variables aleatorias pérdida individuales están idénticamente distribuidas, $L^1{}_p(x) = L^2{}_p(x) =\ldots= L^N{}_p(x)= L_p(x)$ ya que $Z^1(x) = Z^2(x) =\ldots= Z^N(x)= Z(x)$ y son independientes, bajo la hipótesis de la teoría clásica del riesgo $L^C{}_p(x)$ será aproximadamente una variable aleatoria normal de media m(x), varianza v(x) y desviación estándar d(x), es decir $L^C{}_p(x) \sim \text{Normal}(m(x), d(x))$ siendo respectivamente[2]:

$$m(x) = N\cdot\{E[Z](x)-P_p\},\ v(x) = N\cdot V[Z](x) \text{ y } d(x) = \sqrt{N}\cdot D[Z](x)$$

Si las prestaciones son unitarias, la obtención de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar para un tipo o tipos de interés utilizados en la valoración del contrato ya fue analizado en el apartado 2 de la presente parte de la tesis, por lo que bastará con aplicar los resultados obtenidos.

Sin embargo, las trayectorias del interés no son ciertas, sino que son borrosas y para una concreta, x, podemos asociar a la misma un grado de verdad de la misma $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$. Así, la esperanza matemática de la siniestralidad para toda la clase de seguros que analicemos, es un número borroso que notamos como $\tilde{m}$, cuya función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{m}}(y) = \bigvee_{y=N\cdot\{E[Z](x)-P_p\}} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Asimismo, las funciones de pertenencia de la varianza borrosa, $\tilde{v}$ y la desviación estándar borrosa, $\tilde{d}$ para todo el colectivo vendrán dadas por:

$$\mu_{\tilde{v}}(y) = \bigvee_{y=N\cdot V[Z](x)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x) \text{ y } \mu_{\tilde{d}}(y) = \bigvee_{y=\sqrt{N}\cdot D[Z](x)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Respecto a los α-cortes de estos parámetros borrosos, podemos observar que los α-cortes de la media, m_α vendrán dados por:

$$m_\alpha = \left[\underline{m}(\alpha), \overline{m}(\alpha)\right] = \left\{y \mid y = N\cdot\{E[Z](x) - P_p\}, x \in \psi_\alpha\right\}$$

[2] Si la trayectoria x que realmente van a tomar los intereses de actualización fuera conocida de antemano por el asegurador, puede observarse que $P_p = E[Z](x)$, por lo que $m(x) = 0$.

y como en todas las estructuras actuariales, la media del valor actual de las prestaciones son decrecientes respecto al tipo (o los tipos) de interés de actualización, el extremo inferior $\underline{m}(\alpha)$ vendrá dado por la trayectoria superior de los intereses a éste nivel de presunción ,$\psi^2(\alpha)$, y viceversa. De esta forma:

$$m_\alpha = \left[N \cdot \left\{E[Z]\left(\psi^2(\alpha)\right) - P_p\right\}, N \cdot \left\{E[Z]\left(\psi^1(\alpha)\right) - P_p\right\}\right] = \left[N \cdot \left\{E^1[Z](\alpha) - P_p\right\}, N\left\{E^2[Z](\alpha) - P_p\right\}\right]$$

Respecto a los α-cortes de la varianza borrosa $\tilde{v}$, v_α, éstos se obtienen como:

$$v_\alpha = \left[\underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha)\right] = \{y \mid y = N \cdot V[Z](x), x \in \psi_\alpha\}$$

En este caso, no podemos dar una expresión más precisa de los α-cortes, ya que, como comprobamos a lo largo del apartado 3, no podemos asegurar para algunos tipos de prestaciones, que la varianza del valor actual de los mismos tenga un comportamiento monótono respecto al interés o intereses de actualización. Por otra parte, los α-cortes de $\tilde{d}$, d_α, serán:

$$d_\alpha = \left[\underline{d}(\alpha), \overline{d}(\alpha)\right] = \left[\sqrt{\underline{v}(\alpha)}, \sqrt{\overline{v}(\alpha)}\right]$$

Así la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p^C$ tiene una función de pertenencia que se puede hallar como:

$$\mu_{\tilde{L}_p^C}(y) = \bigvee_{y=\mathrm{Normal}(m(x),d(x))} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Es decir, $\tilde{L}_p^C$ es un subconjunto borroso cuyas realizaciones son variables aleatorias normales, de forma que se trata de una aplicación μ: $\eta \rightarrow [0,1]$, siendo η el conjunto de variables aleatorias normales.

Como venimos comprobando a lo largo de toda la tesis, será útil partir de la caracterización de la variable aleatoria $\tilde{L}_p^C$ a través de sus α-cortes, es decir, mediante una variable borroso aleatoria inferior y una superior. Éstas se hallan, respectivamente, a partir de la suma de N variables aleatorias inferiores, independientes e idénticamente distribuidas correspondientes a la pérdida para el asegurador de cada individuo y de la suma de las N variables aleatorias superiores, asociadas a la pérdida de cada individuo que también son independientes e idénticamente distribuidas. Asimismo, las variables aleatorias inferiores vienen determinadas, en todos los casos que hemos analizado, por la trayectoria superior de los intereses de actualización y viceversa. De esta forma, y para un α cualquiera, siendo i={1,2}, y teniendo en cuenta que:

$$L_p^C\left(\Psi^{3-i}(\alpha)\right)=L_p^{i,C}(\alpha),\; L_p^j\left(\Psi^{3-i}(\alpha)\right)=L_p^{i,j}(\alpha) \text{ y } Z^j\left(\Psi^{3-i}(\alpha)\right)=Z^{i,j}(\alpha)$$

Obtenemos, con i=1,2:

$$L_p^{i,C}(\alpha)=L_p^{i,1}(\alpha)+L_p^{i,2}(\alpha)+...+L_p^{i,N}(\alpha)=Z^{i,1}(\alpha)+Z^{i,2}(\alpha)+...+Z^{i,N}(\alpha)-N\cdot P_p$$

Y $L_p^{i,C}(\alpha)$, i=1,2 tenderán, para un número de pólizas N suficientemente elevado a una variable aleatoria normal de media $m^i(\alpha)$, varianza $v^i(\alpha)$ y desviación estándar $d^i(\alpha)$, las cuales se hallan como:

$$m^i(\alpha)= N\cdot\{E[Z^i(\alpha)]-P_p\}= N\cdot\{E^i[Z(\alpha)]-P_p\},\; v^i(\alpha)= N\cdot V[Z^i(\alpha)] \text{ y } d^i(\alpha)= \sqrt{N}\cdot d\left[Z^i(\alpha)\right]$$

Obsérvese que $m^1(\alpha) = \underline{m}(\alpha)$ y $m^2(\alpha) = \overline{m}(\alpha)$. Sin embargo, no necesariamente se cumple que $v^1(\alpha) = \underline{v}(\alpha)$ y $v^2(\alpha) = \overline{v}(\alpha)$ y por tanto que $d^1(\alpha) = \underline{d}(\alpha)$ y $d^2(\alpha) = \overline{d}(\alpha)$.

5.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA UNA CARTERA DE PÓLIZAS IDÉNTICAS TRAS HABERSE COBRADO LA PRIMA PURA ÚNICA

El valor de la función de distribución de la pérdida del asegurador para todo el colectivo asegurado $\tilde{L}_p^C$, nos indicará, para un valor cierto X^C, que podemos interpretar como el recargo aplicado a todo el colectivo, y por tanto el recargo aplicado a cada individuo es $X=\frac{X^C}{N}$, la probabilidad (borrosa) de que al aplicar dicho recargo sobre la prima pura el asegurador no sufra pérdidas en dicho colectivo. De esta forma, la función de distribución es, como siempre, $P[\tilde{L}_p^C \leq X^C] = \tilde{F}^C\left[X^C\right]$. Si $X^C=0$, no se está recargando la prima pura P_p, por lo que el asegurador únicamente percibirá de los asegurados dicha prima pura única.

Para realizar este análisis estudiaremos los pasos a seguir para determinar la función de distribución asociada a la variable aleatoria pérdida de todo el colectivo que define una trayectoria concreta de los tipos de interés de actualización, x. Notamos a la función de distribución asociada a dicha trayectoria como $F^C[X^C](x) = P[L^C{}_p(x)\leq X^C]$.

Para dicha trayectoria, dado que $L^C_p(x) \sim \text{Normal}(m(x), d(x))$, la variable aleatoria (cierta) $z = \dfrac{L^C_p(x) - m(x)}{d(x)} \sim \text{Normal}(0,1)$.

De esta forma, podemos definir el valor estandarizado de X^C para dicha trayectoria, $u[X^C](x)$, como:

$$u\left[X^C\right](x) = \frac{X^C - m(x)}{d(x)}$$

Así el valor de la probabilidad acumulada por X^C puede hallarse a través del que $u[X^C](x)$ acumula en z, de forma que:

$$P[L^C_p(x) \le X^C] = P[z \le u[X^C](x)] = \Phi[u[X^C](x)]$$

donde denotamos como $\Phi(\cdot)$ a la función de distribución de una normal de media cero y varianza 1. Asimismo, podemos comprobar que tanto $u[X^C](x)$ como $\Phi(u[X^C](x))$ son funciones continuas de la trayectoria de los tipos de interés, y por tanto funciones continuas de variables de n dimensiones –o unidimensionales si se valora el contrato con un único tipo de interés-. Dado que las trayectorias de los tipos de interés vienen dadas a través de un subconjunto borroso, el valor estandarizado de X^C y su probabilidad acumulada también serán números borrosos, los cuales denotamos como $\widetilde{U}[X^C]$ y $\widetilde{\Phi}\left(U[X^C]\right)$ respectivamente. Su función de pertenencia puede ser fácilmente definida utilizando el principio de extensión de Zadeh, obteniéndose:

$$\mu_{\widetilde{U}[X^C]}(u) = \bigvee_{u=\frac{X^C - m(x)}{d(x)}} \mu_{\widetilde{\Psi}}(x)$$

Asimismo, $\widetilde{\Phi}\left(U[X^C]\right) = \widetilde{F}^C\left[X^C\right]$, siendo su función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{\Phi}(U[X^C])}(v) = \bigvee_{v=\Phi(u)} \mu_{\widetilde{U}[X^C]}(u) = \bigvee_{v=\Phi\left(\frac{X^C - m(x)}{d(x)}\right)} \mu_{\widetilde{\Psi}}(x)$$

Evidentemente, esta definición no será operativa para nuestros fines, ya que, al estar definidos los intereses de actualización en el continuo, rara vez podremos conocer la expresión analítica de las funciones de pertenencia de las magnitudes analizadas. Será más cómodo trabajar con las variables aleatorias inferior y superior que define $\widetilde{L}^C_p$ para cada uno de los niveles de presunción α con los que estemos trabajando, esto es, operar con α-cortes. De esta forma, los α-cortes de

$\widetilde{F}^C\left[X^C\right]$, $F^C\left[X^C\right]_\alpha$, serán intervalos de confianza, que teniendo en cuenta que a través de $L_p^{i,C}(\alpha)$, debemos hallar $F^{3-i,C}[X^C](\alpha)$, con i=1,2, tomarán la siguiente expresión:

$$F^C\left[X^C\right]_\alpha = \left[F^{1,C}\left[X^C\right](\alpha), F^{2,C}\left[X^C\right](\alpha)\right] = \left[P\left(L_p^{2,C}(\alpha) \leq X^C\right), P\left(L_p^{1,C}(\alpha) \leq X^C\right)\right]$$

Para hallar los α-cortes de la función de distribución, que es no decreciente respecto a las realizaciones para las que midamos la probabilidad acumulada, deberemos hallar los α-cortes de el valor estandarizado de X^C, $U\left[X^C\right]_\alpha$. Dado que $U[X^C](x)$ es una función continua respecto a x y asimismo debe ser monótona decreciente respecto al tipo (o los tipos) de interés, obtenemos sus α-cortes como:

$$U\left[X^C\right]_\alpha = \left\{u \mid u = \frac{X^C - m(x)}{d(x)}, x \in \Psi_\alpha\right\} = \left[U^1\left[X^C\right](\alpha), U^2\left[X^C\right](\alpha)\right] = \left[\frac{X^C - m^2(\alpha)}{d^2(\alpha)}, \frac{X^C - m^1(\alpha)}{d^1(\alpha)}\right] =$$

$$= \left[\frac{X^C - N \cdot \left\{E^2[Z](\alpha) - P_p\right\}}{\sqrt{N} \cdot D\left[Z^2(\alpha)\right]}, \frac{X^C - N \cdot \left\{E^1[Z](\alpha) - P_p\right\}}{\sqrt{N} \cdot D\left[Z^1(\alpha)\right]}\right]$$

Por otra parte, las variables aleatorias de la pérdida inferiores y superiores asociadas a toda la clase de seguro, y ya estandarizadas son:

$$z^1(\alpha) = \frac{L_P^{1,C}(\alpha) - m^1(\alpha)}{d^1(\alpha)} \text{ y } z^2(\alpha) = \frac{L_P^{2,C}(\alpha) - m^2(\alpha)}{d^2(\alpha)}$$

son variables aleatorias normales de media 0 y varianza 1. Dado que la variable aleatoria pérdida inferior determina la función de distribución superior y viceversa, los α-cortes de $\widetilde{F}^C\left[X^C\right]$ pueden ser hallados a través de $U\left[X^C\right]_\alpha$, como:

$$F^C\left[X^C\right]_\alpha = \Phi\left(U\left[X^C\right]_\alpha\right) = \left[\Phi\left(\frac{X^C - N \cdot \left\{E^2[Z](\alpha) - P_p\right\}}{\sqrt{N} \cdot D\left[Z^2(\alpha)\right]}\right), \Phi\left(\frac{X^C - N \cdot \left\{E^1[Z](\alpha) - P_p\right\}}{\sqrt{N} \cdot D\left[Z^1(\alpha)\right]}\right)\right]$$

Obsérvese que $F^C\left[X^C\right]_\alpha$ también será un intervalo de confianza, por tanto, un conjunto compacto de [0,1], ya que se define a través de una función continua respecto al tipo o los tipos de interés de actualización, los cuales, para dicho nivel α, están definidos en un conjunto convexo ψ_α.

Así, y al contrario de lo que ocurría cuando la cartera que analizamos estaba compuesta por una sola cabeza, podemos comprobar que los α-cortes son intervalos de confianza, ya que las variables aleatorias que reconstruyen la variable borroso aleatoria pérdida original están definidas en el continuo.

5.3. FIJACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD PARA CONSEGUIR UN NIVEL DE SOLVENCIA DADO POR EL ASEGURADOR

Nuestro objetivo final es hallar el recargo a repercutir sobre la prima pura correspondiente a cada asegurado, Q^{ε}, de forma que para la cartera que analicemos, el asegurador obtenga una probabilidad de que las primas finalmente cobradas sean suficiente sea 1-ε. Para ello, deberemos hallar en primer lugar un recargo borroso $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ a satisfacer por parte de todos los elementos del colectivo asegurado, que será el valor que acumula a su izquierda una probabilidad 1-ε. Asimismo, $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ será un número borroso que puede ser definido a través de su función de pertenencia y sus α-cortes como:

$$\tilde{Q}^{\varepsilon,C} = \left\{ q / \mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q) \right\} = \left\{ Q_{\alpha}^{\varepsilon,C} = \left[Q^{1\varepsilon,C}(\alpha), Q^{2\varepsilon,C}(\alpha) \right] / 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

Posteriormente, y dado que el colectivo de los N asegurados que componen la cartera es homogéneo, a cada asegurado se le deberá repercutir la misma parte de $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$. Así, el recargo borroso individual $\tilde{Q}^{\varepsilon}$ deberá ser hallado como $\tilde{Q}^{\varepsilon} = \frac{1}{N}\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$. De esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, será $\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon}}(q) = \mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(Nq)$, y sus α-cortes:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = \left[Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha) \right] = \left[\frac{Q^{1\varepsilon,C}(\alpha)}{N}, \frac{Q^{2\varepsilon,C}(\alpha)}{N} \right]$$

Para finalizar, deberemos hallar el recargo que finalmente debe ser repercutido. Éste quedará cuantificado a través del valor esperado de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, Q^{ε}, el cual será hallado de la forma acostumbrada. La determinación de la prima recargada será inmediata, hallándose $P_R = P_p + Q^{\varepsilon}$.

El 1-ε percentil que buscamos al repercutir a la totalidad de los asegurados asociados a una determinada trayectoria x del interés, será el 1-ε percentil de $L_p^C(x)$. Notamos a dicho valor como $Q^{\varepsilon,C}(x)$ y se obtiene planteando:

$$Q^{\varepsilon,C}(x) = \{X^C / F^C[X^C] = 1-\varepsilon\}$$

y despejando X^C se obtiene:

$$Q^{\varepsilon,C}(x) = F^{C^{-1}}[1-\varepsilon](x)$$

donde hemos notado con el superíndice "–1" a la función inversa de la función de distribución. Si planteamos la ecuación anterior en términos de normal tipificada, se obtiene:

$$\Phi\left(\frac{Q^{\varepsilon,C}(x)-m(x)}{d(x)}\right)=1-\varepsilon$$

y despejando $Q^{\varepsilon,C}(x)$:

$$Q^{\varepsilon,C}(x)=m(x)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d(x)$$

De esta forma, podemos entender el 1-ε cuantil de la variable aleatoria pérdida de toda la cartera como una función de la trayectoria de los tipos de actualización, la cual es continua respecto a las n variables (o la variable) que conforman la trayectoria de los tipos de actualización. Así, a través de la función de pertenencia del subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, podremos hallar la función de pertenencia de $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ aplicando el principio de extensión de Zadeh:

$$\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q)=\bigvee_{q=m(x)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d(x)}\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Evidentemente, rara vez podremos hallar la expresión analítica de $\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q)$, pero si que podremos hallar sus α-cortes. Éstos vendrán dados por:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon,C}=\left[Q^{1\varepsilon,C}(\alpha),Q^{2\varepsilon,C}(\alpha)\right]=\left\{q\mid q=m(x)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d(x),\,x\in\Psi_{\alpha}\right\}$$

Y dado que el cuantil inferior debe hallarse a través de la función de distribución superior de la variable aleatoria nítida que define $\tilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$, la cual se construye a partir de $\psi^2(\alpha)$, y el cuantil superior se debe hallar a través de $L_p^{2,C}(\alpha)$, que se construye, asimismo, a través de $\psi^1(\alpha)$, $Q_{\alpha}{}^{\varepsilon,C}$ debe tomar finalmente la siguiente expresión:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon,C}=\left[m^1(\alpha)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d^1(\alpha),m^2(\alpha)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d^2(\alpha)\right]=$$
$$=\left[N\cdot\left\{E^1[Z](\alpha)-P_p\right\}+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\sqrt{N}\cdot D\left[Z^1(\alpha)\right],N\cdot\left\{E^2[Z](\alpha)-P_p\right\}+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\sqrt{N}\cdot D\left[Z^2(\alpha)\right]\right]$$

De esta forma, los α-cortes del recargo individual, $Q^{\varepsilon}{}_{\alpha}$ se hallarán como:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon}=\frac{Q_{\alpha}^{\varepsilon,C}}{N}=\left[E^1[Z](\alpha)+\frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}}D\left[Z^1(\alpha)\right],E^2[Z](\alpha)+\frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}}D\left[Z^2(\alpha)\right]\right]-P_p$$

De esta forma, el recargo cierto a aplicar a cada asegurado, Q^{ε}, puede hallarse para un parámetro β' prefijado como:

$$Q^{\varepsilon} = (1-\beta')\int_0^1 \left\{ E^1[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} D\left[Z^1(\alpha)\right] \right\} d\alpha + \beta' \int_0^1 \left\{ E^2[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} D\left[Z^2(\alpha)\right] \right\} d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta')\int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{array}{l} (1-\beta')\int_0^1 D\left[Z^1(\alpha)\right] d\alpha + \\ + \beta' \int_0^1 D\left[Z^2(\alpha)\right] d\alpha \end{array} \right\} -$$

$$- \left[(1-\beta)\int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha \right] = (\beta - \beta')\int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + (\beta' - \beta)\int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha +$$

$$+ \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ (1-\beta')\int_0^1 D\left[Z^1(\alpha)\right] d\alpha + \beta' \int_0^1 D\left[Z^2(\alpha)\right] d\alpha \right\}$$

Así, podemos observar, que si $\beta=\beta'$, el recargo a aplicar es:

$$Q^{\varepsilon} = \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ (1-\beta')\int_0^1 D\left[Z^1(\alpha)\right] d\alpha + \beta' \int_0^1 D\left[Z^2(\alpha)\right] d\alpha \right\}$$

Asimismo, para $\beta=\beta'$, podemos comprobar que si $N\to\infty$, $Q^{\varepsilon} \to 0$, ya que a medida que aumentemos el colectivo asegurado, el riesgo de desviaciones desfavorables de la mortalidad debe disminuir.

5.4. APLICACIONES NUMÉRICAS

Para ejemplificar las cuestiones planteadas a lo largo del apartado 5, analizamos a continuación el proceso a seguir para la fijación de las primas únicas correspondientes a un seguro de vida entera asociado a un colectivo de 35 años, y un capital asegurado en caso de fallecimiento de 1000 unidades monetarias. Como siempre, se ha supuesto el interés técnico $\widetilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ y se han tomado las tablas de mortalidad PEM-82. Éste contrato ya fue analizado, bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera, en el apartado 4.4. de esta parte de la tesis. Ahora analizaremos las magnitudes estudiadas para unos colectivos de N1=50 y N2=100 personas. En concreto, estudiaremos:

a) La solvencia del asegurado en el caso en que únicamente cobre a cada individuo del colectivo la prima pura con un coeficiente β=0'75.
b) La determinación del recargo para desviaciones de siniestralidad, tomándose también β'=0'75. En este caso, buscaremos una probabilidad de insolvencia del 5%, es decir, ε=0'05.
c) La posición de solvencia del asegurador, después de haber cargado Q^{ε}.

Respecto a los datos más relevantes de este seguro, si la cartera se componía de un único individuo, ya obtenidos en anteriores epígrafes son:

P_p (β=0'75)	$V^*[L_p]$	$D^*[L_p]$	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p\cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p]\cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p]\cdot 100$
320'95	18906'87	137'5	277'29	84'46%	1'47%	201'67%

Así, para los dos colectivos que analizaremos, observamos que el encaje de primas puras es, para N1=50, 320'95·50 = 16.047'5 y para N2=100, 320'95·100 = 32.095.

Analizamos a continuación $\widetilde{F}^C[0]$, en ambas clases de seguros, expresándose la función de distribución a través de sus α-cortes. Esta función nos indicará la probabilidad de que las primas puras únicas cobradas sean suficientes en cada uno de los colectivos

	N1=50		N2=100	
α	$F^{1,C}[0](\alpha)$	$F^{2,C}[0](\alpha)$	$F^{1,C}[0](\alpha)$	$F^{2,C}[0](\alpha)$
0	0	1	0	1
0,1	0	1	0	1
0,2	0	1	0	1
0,3	0,0001	1	0	1
0,4	0,0014	1	0	1
0,5	0,013	1	0,0008	1
0,6	0,0662	1	0,0167	1
0,7	0,2046	1	0,1215	1
0,8	0,4273	0,9990	0,3977	1
0,9	0,6649	0,9815	0,7265	0,9984
1	0,8426	0,8426	0,9224	0,9224

En la interpretación de $F^C[0]_\alpha$ debemos tener en cuenta que si únicamente se carga la prima pura única, estamos implícitamente considerando que la mortalidad se va a comportar conforme a lo esperado, y al tomarse β=0'75, se consideran escenarios del interés relativamente prudentes, es decir, estamos asegurando un tipo de interés inferior al 3%. Si se hubiera garantizado un interés del 3%, en este caso P_p = 301'48. Asimismo, los escenarios de tipos de interés inferiores al de máxima presunción (del 2% al 3%) determinan los extremos inferiores de los α-cortes de $F^C[0]_\alpha$ y viceversa. Asimismo, el escenario más posible, es decir, que se obtenga con la inversión de las primas un interés del 3%, determinará $F^C[0]_1$.

Un análisis de la solvencia del asegurador en el escenario más posible nos indica que, el exceso de rendimientos financieros obtenidos sobre el interés asegurado permite que ciertas desviaciones desfavorables de la mortalidad sean compensadas. En concreto, para el colectivo de 50 asegurados, la probabilidad de que el encaje de primas puras sea suficiente es del 84'26%, y en el segundo colectivo, del 92'24%. Asimismo, puede observarse que la solvencia del asegurador cobrando únicamente las primas puras en este escenario es superior a medida que aumenta el colectivo asegurado, ya que las probables desviaciones de siniestralidad se reducen, siendo por tanto más fácil la compensación a través del exceso de rendimientos financieros.

En escenarios en los que el rendimiento obtenido invirtiendo la prima pura es mayor al 3%, se comprueba que el exceso de rentabilidad permite compensar cualquier desviación desfavorable de la siniestralidad. En escenarios en los que se obtenga un rendimiento del 3'2%, con $\mu_{\tilde{i}}(0'032) = 0'9$ o del 3'4%, con $\mu_{\tilde{i}}(0'034) = 0'8$, los cuales presentan para el asegurador un nivel de verdad muy elevado, la probabilidad de no sufrir pérdidas es prácticamente del 0%. Si se obtienen rendimientos superiores, la probabilidad de no sufrir pérdidas es del 100%.

Por otra parte, podemos observar que en escenarios desfavorables en el tipo de interés y con niveles de verdad también elevados, por ejemplo, para rendimientos obtenidos del 2'8-2'7%, para los cuales $\mu_{\tilde{i}}(0'028) = 0'8$ y $\mu_{\tilde{i}}(0'027) = 0'7$, la solvencia del asegurador se sitúa por debajo del 50%. Ello implica que, aunque la mortalidad se comporte respecto a lo esperado, con los rendimientos financieros obtenidos de las primas no se podría hacer frente a la rentabilidad ofrecida. Sólo desviaciones favorables en la mortalidad podrían compensar el déficit de los rendimientos de las primas. Asimismo, en escenarios con niveles de verdad relativamente bajos, y desfavorables –a partir del 2'6%, donde $\mu_{\tilde{i}}(0'026) = 0'6$, la insuficiencia de los rendimientos que se obtienen con las primas puras no pueden ser, en ningún caso, compensados por desviaciones de la siniestralidad favorables, es decir, la probabilidad de que el asegurador pierda es 1.

A continuación analizamos como el asegurador fija los recargos para "asegurar" una probabilidad de insolvencia ε=0'05 para lo cual hallamos $Q_{\alpha}^{0'05,C}$ y $Q_{\alpha}^{0'05}$ para cada uno de los colectivos:

N1=50

α	$Q^{1,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-6907,64	7389,11	-138,15	147,78
0,1	-6389,47	6576,93	-127,79	131,54
0,2	-5830,72	5798,55	-116,61	115,97
0,3	-5227,78	5052,45	-104,56	101,05
0,4	-4576,65	4337,16	-91,53	86,74
0,5	-3872,98	3651,30	-77,46	73,03
0,6	-3111,97	2993,54	-62,24	59,87
0,7	-2288,34	2362,61	-45,77	47,25
0,8	-1396,30	1757,33	-27,93	35,15
0,9	-429,47	1176,55	-8,59	23,53
1	619,17	619,17	12,38	12,38

N2=100

α	$Q^{1,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-14702,50	13921,78	-147,03	139,22
0,1	-13675,74	12283,98	-136,76	122,84
0,2	-12.567,25	10715,34	-125,67	107,15
0,3	-11369,62	9212,70	-113,70	92,13
0,4	-10074,72	7773,02	-100,75	77,73
0,5	-8673,62	6393,43	-86,74	63,93
0,6	-7156,5	5071,19	-71,57	50,71
0,7	-5512,54	3803,69	-55,13	38,04
0,8	-3729,84	2588,47	-37,30	25,88
0,9	-1795,32	1423,15	-17,95	14,23
1	305,48	305,48	3,05	3,05

Hemos aproximado el valor del recargo cierto a aplicar, Q^{ε}, partiendo de que en el cálculo del intervalo esperado, se supone que el nivel de presunción, α, sigue una distribución de probabilidad uniforme, lo cual fue comentado en el apartado 1.5.3 de la parte instrumental de la tesis. Así, podemos aproximar el intervalo esperado a través de los extremos de los α-cortes de $\widetilde{Q}^{\varepsilon}$, si consideramos para estos una escala que contiene n+1 niveles de verdad, suponiéndose que el número borroso que pretendemos defuzzyficar es discreto, y suponiéndose que los niveles de verdad considerados (α_0, α_1,..., α_n) son equiprobables. Así:

$$E^{i}\left[\widetilde{Q}^{\varepsilon}\right] \approx \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q^{i\varepsilon}\left(\frac{j}{n}\right), \text{ i=1,2.}$$

En nuestro caso, al ser endecadaria, habremos obtenido:

$$E^{i}\left[\widetilde{Q}^{\varepsilon}\right] \approx \frac{1}{11}\sum_{j=0}^{10} Q^{i\varepsilon}\left(\frac{j}{10}\right), \text{ i=1,2.}$$

Utilizando esta aproximación, los resultados que se obtienen son:

	$EI[\widetilde{Q}^{\varepsilon}]$	$Q^{0,05}$	P_R	$Q^{0,05}/P_p\cdot 100$	$Q^{0,05}/V^{*}[L_p]\cdot 100$	$Q^{0,05}/D^{*}[L_p]\cdot 100$
N1=50	[-71,66, 75,84]	38,97	359,92	12%	0,21%	28%
N2=100	[-80,87, 66,81]	29,89	350,84	9%	0,16%	22%

Podemos observar en este cuadro, y en el que resumíamos el valor de las magnitudes más relevantes respecto al recargo a aplicar para un único asegurado en cartera, que a medida que aumenta el colectivo asegurado, el recargo a aplicar en concepto de desviaciones de siniestralidad debe disminuir.

Será interesante, asimismo, analizar la solvencia realmente conseguida por el asegurador al aplicar los recargos finalmente propuestos. Es decir, realizar el análisis de $\widetilde{F}^C[38'97 \cdot 50]$ y $\widetilde{F}^C[28'89 \cdot 100]$, en los colectivos con N1=50 y N2=100 asegurados respectivamente.

Para ello calculamos los α-cortes de dichas funciones de distribución. Estos son:

	N1=50		N2=100	
α	$F^{1,C}[1948'5](\alpha)$	$F^{2,C}[1948'5](\alpha)$	$F^{1,C}[2889](\alpha)$	$F^{2,C}[2889](\alpha)$
0	0	1	0	1
0,1	0,0002	1	0	1
0,2	0,0052	1	0	1
0,3	0,0439	1	0,0009	1
0,4	0,1817	1	0,0243	1
0,5	0,4365	1	0,1824	1
0,6	0,7073	1	0,5382	1
0,7	0,8872	1	0,8514	1
0,8	0,9674	1	0,9738	1
0,9	0,9928	1	0,9974	1
1	0,9987	0,9987	0,9998	0,9998

Al tomarse para calcular el recargo de seguridad β'=0,75, se ha considerado implícitamente un escenario moderadamente prudente respecto al interés que la compañía conseguirá invirtiendo las primas. Asimismo, al fijarse un nivel de solvencia ε=5%, a priori, las primas recargadas que ha encajado el asegurado permiten hacer frente al 95% de las trayectorias de la mortalidad de los asegurados mas favorables.

Al ofrecer el asegurador, implícitamente, un interés inferior al que la compañía espera conseguir invirtiendo las primas con mayor presunción, el 3%, analizando en cada caso $F[Q^{0,05}]_1$, -N1=50 y N2=100-, se observa que no únicamente reducimos la probabilidad de insolvencia al 5%, sino que el exceso de rendimientos financieros permite reducir la probabilidad de insolvencia hasta prácticamente el 0%. Por supuesto, para escenarios de rentabilidades conseguidas favorables, -a partir del 3,2%, donde $\mu_{\tilde{i}}(0'032) = 0'9$, es decir, escenarios optimistas pero prácticamente ciertos, cualquier fluctuación desfavorable de la siniestralidad es compensada con los rendimientos financieros.

Podemos observar, que, por otra parte, para escenarios pesimistas respecto al tipo de interés, pero con alto nivel de presunción, entorno al 2,8% y 2,7%, con niveles de verdad del 0,8 y 0,7 respectivamente, el grado de solvencia se sitúa en el 95% buscado. Es decir, el asegurador ha contemplado implícitamente al determinar la prima a repercutir finalmente, escenarios razonablemente pesimistas en el tipo de interés que obtendrá con su cartera activa.

Si el asegurado obtiene unos rendimientos con las inversiones realizadas del 2,5% o menor, cuyos niveles de presunción no va más allá del 0'5, aunque en la fijación del precio final del seguro ha sido prudente tanto en el rendimiento garantizado como en las probables desviaciones desfavorables de la mortalidad, los rendimientos financieros no permiten asegurar un nivel de solvencia que pueda hacer frente, ni siquiera a la mortalidad esperada, siendo necesario un comportamiento de la mortalidad más favorable que el esperado para que los rendimientos obtenidos de las primas recargadas permitan hacer frente a los compromisos adquiridos. Asimismo, para escenarios en el tipo de interés muy desfavorables –del 2,4% hasta el 2%, por tanto, con niveles de presunción inferiores a 0'4- el margen de intermediación, que es negativo para la compañía, provoca que la probabilidad de insuficiencia de las primas sea muy elevado –en el mayor de los casos es el 100%-, siendo entonces casi improbable, o improbable, compensar dicho déficit de rendimientos con un comportamiento benigno en la mortalidad del colectivo.