CAPÍTULO 6:

FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA UTILIZANDO LA SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

6.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

Como en el epígrafe anterior, analizaremos en éste la fijación de la prima única para negocios compuestos únicamente por una clase de seguro, es decir, de seguros con el mismo tipo de prestaciones, asegurados de la misma edad y el mismo sexo, las mismas cuantías aseguradas y habiéndose suscrito aproximadamente en la misma fecha. Si el grupo de asegurados es suficientemente amplio, en el estudio de la siniestralidad del colectivo podemos aplicar el Teorema Central del Límite, lo cual implica asumir la normalidad de la pérdida para el asegurador en cada una de las clases de seguros. Por tanto, si quisiéramos analizar y fijar recargos considerando la totalidad de todas las clases de seguros, la suma de la variables aleatorias pérdida asociadas a cada clase sería también una variable aleatoria normal, y por tanto, el valor actual de las pérdidas que generarán todos los seguros en cartera también sería una variable aleatoria normal. Sin embargo, aunque las compañías disponen de una gran cantidad de riesgos asegurados, debemos ser muy cautos a la hora de aplicar el Teorema Central del Límite, pues el número de pólizas que se pueden agrupar en una clase de seguro, tal como ha sido definido ésta, suele ser bastante reducido. En este caso, el supuesto de la normalidad en la siniestralidad es bastante irreal, ya que, aunque el número de seguros que componen la cartera pasiva del asegurador puede ser bastante elevado, suelen ser muy heterogéneos entre ellos. Es necesario, por tanto, la búsqueda de otras alternativas, la que proponemos está basada en la simulación estocástica. Como en el apartado anterior, supondremos que cada clase de seguro o grupo de variables borroso aleatorias pérdida idénticamente distribuidas es un negocio absolutamente distinto para el asegurador.

Como siempre, partiremos de que el asegurador ha hallado la prima pura única borrosa, $\widetilde{P}_p$, que para el j-ésimo individuo que compone el colectivo se habrá hallado como $\widetilde{P}_p = \widetilde{E}\left[Z^j\right]$, siendo por tanto $\widetilde{Z}^j$ el valor actual de las prestaciones asociadas al individuo j con j=1,2,…,N. Estas variables borroso aleatorias son independientes y están idénticamente distribuidas. Posteriormente, a partir de $\widetilde{P}_p$ habrá sido calculada la prima pura cierta, P_p.

Asimismo la variable borroso aleatoria pérdida de todo el colectivo después de haberse cargado la prima pura, es la suma de las variables aleatorias pérdida individuales, y puede ser hallada como:

$$\widetilde{L}_p^C = \widetilde{L}_p^1 + \widetilde{L}_p^2 + \ldots + \widetilde{L}_p^N = \widetilde{Z}^1 + \widetilde{Z}^2 + \ldots + \widetilde{Z}^N - N \cdot P_p$$

De esta forma, la variable aleatoria pérdida, tras haberse cargado la prima pura única, y para una trayectoria del interés que el asegurador conseguirá invirtiendo las primas, será:

$$L^C{}_p(x) = L^1{}_p(x) + L^2{}_p(x) + \ldots + L^N{}_p(x) = Z^1(x) + Z^2(x) + \ldots + Z^N(x) - N \cdot P_p$$

Como podemos definir una variable aleatoria inferior y superior para un nivel de presunción dado α, en todas las variables borroso aleatorias individuales, podemos comprobar que las variables aleatorias inferior y superior (nítidas) que define $\widetilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ para dicho nivel vendrán dadas por la suma de las variables aleatorias nítidas individuales asociadas a dicho nivel, de forma que:

$$L_p^{1,C}(\alpha) = L_p^{1,1}(\alpha) + L_p^{1,2}(\alpha) + \ldots + L_p^{1,N}(\alpha) = Z^{1,1}(\alpha) + Z^{1,2}(\alpha) + \ldots + Z^{1,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

$$L_p^{2,C}(\alpha) = L_p^{2,1}(\alpha) + L_p^{2,2}(\alpha) + \ldots + L_p^{2,N}(\alpha) = Z^{2,1}(\alpha) + Z^{2,2}(\alpha) + \ldots + Z^{2,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

donde $L_p^{1,C}(\alpha)$ vendrá dada por la trayectoria superior de los intereses de actualización de ψ_α, $\psi^2(\alpha)$, y $L_p^{2,C}(\alpha)$ por la trayectoria inferior, $\psi^1(\alpha)$.

En cualquier caso, si N no es lo suficientemente elevado –a efectos prácticos suele entenderse que el números de variables aleatorias idénticamente distribuidas que se suman es elevado cuando el número de sumandos es superior a 30 aproximadamente-, $L^C{}_p(x)$, y por tanto, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ quedarán muy burdamente aproximados por una variable aleatoria normal. Así, los resultados que han sido presentados en el epígrafe anterior no pueden ser aplicados en este caso.

Por supuesto, la determinación de la varianza y la desviación estándar de $\widetilde{L}_p^C$, sean borrosas o las de Feng, bajo la hipótesis de la independencia de la mortalidad entre los individuos que componen cada grupo es inmediata. Las varianzas se hallarán como la suma de las varianzas de las variables borroso aleatoria pérdida individuales. Así, podemos aceptar que al menos es posible obtener una medida del riesgo de pérdida que soporta el asegurador al cargar P_p. Sin embargo, no será este el camino que seguiremos, ya que la determinación del porcentaje a cargar de esta forma, no está exento de arbitrariedad. Como siempre, proponemos hallar el recargo a fijar y el estudio de la solvencia del asegurador a través de los cuantiles de $\widetilde{L}_p^C$.

Sin embargo, en este supuesto la obtención de $L_p^C(x)$ y por tanto de $L_p^{i,C}(\alpha)$, i=1,2, es prácticamente imposible. Por tanto, también será imposible la determinación de la función de distribución de $\widetilde{L}_p^C$, ya que las realizaciones de las variables aleatorias inferior y superior de la variable borroso aleatoria se hallarán a través de la combinación de las diferentes trayectorias que puede tomar la mortalidad dentro del colectivo, es decir, de las realizaciones de T_x para cada uno de los componentes del colectivo. Tal como apunta Sarrasí (1995), si el colectivo se compone de N asegurados de edad x_j, j=1,2,…,N, el total de trayectorias que deberemos evaluar para hallar todas las realizaciones que puede tomar $\widetilde{L}_p^C$ es:

$$\prod_{j=1}^{N}(w-x_j)$$

siendo x_j la edad del j-ésimo asegurado. En nuestro caso, dado que el grupo es homogéneo, el número de trayectorias a evaluar es $(w-x)^N$. Por ejemplo, si la clase de seguros que analizamos se compone de 10 asegurados de 35 años y si la ley de mortalidad utilizada estipula que la primera edad no alcanzable son 114 años, el número de trayectorias a evaluar sería 79^{10}, siendo éste a priori, el número de realizaciones de $\widetilde{L}_p^C$ que debieran ser evaluadas . Evidentemente se trata de un número exagerado de trayectorias. Cuando menos, la computación de la pérdida para el asegurador para todas ellas exige una capacidad de cálculo (informático) muy elevada. Asimismo, aunque ello fuera posible, creemos que el decisor podría manejar muy difícilmente tanta información.

Como alternativa, podemos utilizar la simulación estocástica. Es decir, proponemos crear una muestra artificial de la variable borroso aleatoria pérdida para todo el colectivo, trabajándose por tanto con una aproximación a $\widetilde{L}_p^C$, $\hat{\widetilde{L}}_p^C$, que será por supuesto discreta. Esta podrá ser analizada, de forma análoga a las variables pérdida de cada uno de los individuos que componen el colectivo asegurado.

Al trabajarse con una simulación de $\widetilde{L}_p^C$ y no directamente con la pérdida de toda la clase de seguros, que sería lo realmente deseable, un elemento que puede permitir al asegurador determinar la fiabilidad de la simulación empleada puede ser calcular la del estimador de la media y la varianza borrosa de $\widetilde{L}_p^C$, a partir de la muestra artificial $\hat{\widetilde{L}}_p^C$, para lo cual utilizaremos como siempre el principio de extensión de Zadeh. Esta cuestión ya fue analizada en el apartado 3.6.4.1.

de la primera parte de la tesis, a partir del ya mencionado trabajo de Frühwirth-Schnatter. Posteriormente confrontaríamos los resultados de estos estimadores con los valores que realmente toman éstos para el colectivo, ya que el valor de $\widetilde{E}\left[L_p^C\right]$ y $\widetilde{V}\left[L_p^C\right]$ es conocido. En la medida en que el estimador diverja más de su valor real, nos indicará que es preciso simular más trayectorias, ya que en la simulación existe un sesgo evidente, seguramente provocado por la insuficiencia de las trayectorias de la mortalidad simuladas.

6.2. DETERMINACIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA CIERTA DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA TODO EL COLECTIVO ASEGURADO TRAS COBRARSE LA PRIMA PURA

Si bien, existen diversos métodos para simular la trayectoria que toma la mortalidad en un colectivo, como ya fue comentado en 1.5.2., utilizaremos la metodología propuesta en Pitacco (1986), que ha sido utilizada, entre otros, en el ya mencionado trabajo de Sarrasí.

Para ello, deberemos empezar por determinar la función de probabilidad acumulada de T_x. Dado que T_x tiene como función de cuantía:

Realizaciones	0	1	…	t	…	w-x-1
$P[T_x=t]$	${}_{0\|}q_x$	${}_{1\|}q_x$	…	${}_{t\|}q_x$	…	${}_{w-x-1\|}q_x$

su función de distribución, $F_{T_x}[X]$, será entonces:

$$F_{T_x}[X]=\begin{cases} 0 & \text{Si } X<0 \\ \sum_{r=0}^{t} {}_{r|}q_x & t \le X < t+1 \qquad t=0,1,\ldots,w-x-2 \\ 1 & X \ge w-x-1 \end{cases}$$

A continuación debemos simular M trayectorias de eliminación del colectivo, que está compuesto por N individuos. Para ello generaremos N·M números aleatorios uniformemente distribuidos en [0,1]. Si denominamos como ς_i^j al número aleatorio asociado al momento de fallecimiento del individuo j en la trayectoria i, los números aleatorios que deberemos generar tendría la estructura que se observa en la siguiente tabla:

	Asegurado					
	1	2	…	j	…	N
1	ς_1^1	ς_1^2	…	ς_1^j	…	ς_1^N
2	ς_2^1	ς_2^2	…	ς_2^j	…	ς_2^N

Trayectoria	…	…	…	…		…	
	i	ς^1_i	ς^2_i	…	ς^j_i	…	ς^N_i
	…	…	…	…	…	…	…
	M	ς^1_M	ς^2_M	…	ς^j_M	…	ς^N_M

A partir de $F_{T_x}[X]$ y de la tabla de números aleatorios, asignamos para cada asegurado y en cada trayectoria de la mortalidad un número determinado de años de supervivencia. De esta forma, a partir de ς^j_i hallaremos el número de años de supervivencia del j-ésimo asegurado en la trayectoria i-ésima, t^j_i, siendo éste:

$$t^j_i = \underset{t}{\mathrm{Min}} \mid \sum_{r=0}^{t} {}_{r|}q_x \geq \varsigma^j_i$$

De esta forma, para cada una de las M trayectorias que son simuladas obtenemos los años enteros de supervivencia de cada uno de los N componentes del colectivo. Ello vendrá recogido en la siguiente tabla:

		Asegurado					
		1	2	…	j	…	N
Trayectoria	1	t^1_1	t^2_1	…	t^j_1	…	t^N_1
	2	t^1_2	t^2_2	…	t^j_2	…	t^N_2
	…	…	…	…	…	…	…
	i	t^1_i	t^2_i	…	t^j_i	…	t^N_i
	…	…	…	…	…	…	…
	M	t^1_M	t^2_M	…	t^j_M	…	t^N_M

A partir de este cuadro, para cada asegurado y cada trayectoria, deberemos cuantificar la pérdida que produce al asegurador que el asegurado j se mantenga con vida t^j_i años. Para el asegurado j en la trayectoria i, ésta vendrá dada por:

$$\widetilde{L}_{pt^j_i} = \widetilde{Z}^j_i - P_p$$

donde hemos notado a $\widetilde{Z}^j_i$ al valor actual de las prestaciones que cobra el asegurado si vive t^j_i años, el cual vendrá dado por un número borroso, ya que el interés de valoración es borroso. De esta forma, $\widetilde{L}_{pt^j_i}$ es un número borroso cuyos α-cortes y función de pertenencia son:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \left\{ x / \mu_{\widetilde{L}_{pt_i^j}}(x) \right\} = \left\{ L_{pt_{i\,\alpha}^j} = \left[L^1_{pt_i^j}(\alpha), L^2_{pt_i^j}(\alpha) \right] / 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

Hallándose sus α-cortes a través de los de $\widetilde{Z}_i^j$, donde $Z_{i\alpha}^j = \left[Z_i^{1,j}(\alpha), Z_i^{2,j}(\alpha) \right]$, como:

$$L_{pt_{i\,\alpha}^j} = \left[L^1_{pt_i^j}(\alpha), L^2_{pt_i^j}(\alpha) \right] = \left[Z_i^{1,j}(\alpha), Z_i^{2,j}(\alpha) \right] - P_p$$

De esta forma, para los seguros unitarios estudiados, obtendríamos:

a) Para un capital de fallecimiento con vencimiento a la vista y duración 1 año:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \widetilde{f}_1 - P_p & \text{si } t_i^j = 0 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo por tanto los extremos de sus α-cortes:

$$L^r_{pt_i^j}(\alpha) = \begin{cases} f_1^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j = 0 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, \ r=1,2.$$

b) Para un capital diferido con vencimiento a t años:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \widetilde{f}_t - P_p & \text{si } t_i^j \ge t \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo entonces los extremos de sus α-cortes para r=1,2:

$$L^r_{pt_i^j}(\alpha) = \begin{cases} f_t^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \ge t \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Para un seguro de vida entera:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \widetilde{f}_{t_i^j+1} - P_p$$

siendo entonces los extremos de sus α-cortes:

$$L^r_{pt_i^j}(\alpha) = f^r_{t_i^j+1}(\alpha) - P_p, \ r=1,2.$$

d) Para un seguro temporal de duración n años:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \widetilde{f}_{t_i^j+1} - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

obteniéndose entonces:

$$L^r_{pt_i^j}(\alpha) = \begin{cases} f^r_{t_i^j+1}(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, \ r=1,2$$

e) Para un seguro mixto de duración n años:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \widetilde{f}_{t_i^j+1} - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ \widetilde{f}_n - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los extremos de los α-cortes de $\widetilde{L}_{pt_i^j}$ son:

$$L^r_{pt_i^j}(\alpha) = \begin{cases} f^r_{t_i^j+1}(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ f^r_n(\alpha) - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, \ r=1,2$$

f) Para una renta anticipada, vitalicia y que presenta un diferimiento de d años:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} \widetilde{f}_j - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

viniendo dados entonces $L_{pt_i^j \alpha}$ por su extremo inferior y superior, que son:

$$\widetilde{L}^r_{pt_i^j}(\alpha) = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} f^r_j(\alpha) - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g) Para una renta anticipada, temporal, de duración n años, y que presenta un diferimiento de d años:

$$\widetilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} \widetilde{f}_j - P_p & \text{si } d \leq t_i^j < d+n-1 \\ \sum_{j=d}^{d+n-1} \widetilde{f}_j - P_p & \text{si } t_i^j \geq d+n-1 \end{cases}, \ r=1,2.$$

Y sus α-cortes se obtienen como:

$$L^{r}_{pt_i^j}(\alpha)=\begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} f_j^r(\alpha)-P_p & \text{si } d \le t_i^j < d+n-1 \\ \sum_{j=d}^{d+n-1} f_j^r(\alpha)-P_p & \text{si } t_i^j \ge d+n-1 \end{cases} \qquad r=,\ 1{,}2.$$

De esta forma, las pérdidas que sufre cada asegurador para cada trayectoria y asegurado vendrán dadas en la siguiente tabla:

Trayectoria \ Asegurado	1	2	…	j	…	N
1	$\tilde{L}_{pt_1^1}$	$\tilde{L}_{pt_1^2}$	…	$\tilde{L}_{pt_1^j}$	…	$\tilde{L}_{pt_1^N}$
2	$\tilde{L}_{pt_2^1}$	$\tilde{L}_{pt_2^2}$	…	$\tilde{L}_{pt_2^j}$	…	$\tilde{L}_{pt_2^N}$
…	…	…	…	…	…	…
i	$\tilde{L}_{pt_i^1}$	$\tilde{L}_{pt_i^2}$	…	$\tilde{L}_{pt_i^j}$	…	$\tilde{L}_{pt_i^N}$
…	…	…	…	…	…	…
M	$\tilde{L}_{pt_M^1}$	$\tilde{L}_{pt_M^2}$	…	$\tilde{L}_{pt_M^j}$	…	$\tilde{L}_{pt_M^N}$

Así, estamos en disposición de hallar el valor actual de las pérdidas que sufre el asegurador con el colectivo si la siniestralidad siguiera la trayectoria número i. Éste será un número borroso $\tilde{L}^{C}_{pi}$, el cual se obtiene como:

$$\tilde{L}^{C}_{pi} = \sum_{j=1}^{N}\tilde{L}_{pt_i^j} = \sum_{j=1}^{N}\tilde{Z}_i^j - N\cdot P_p$$

siendo sus α-cortes, $L^{C}_{pi\alpha}$:

$$L^{C}_{pi\alpha} = \left[L^{1,C}_{pi}(\alpha), L^{2,C}_{pi}(\alpha)\right] = \left[\sum_{j=1}^{N} L^{1}_{pt_i^j}(\alpha), \sum_{j=1}^{N} L^{2}_{pt_i^j}(\alpha)\right] = \left[\sum_{j=1}^{N} Z_i^{1,j}(\alpha), \sum_{j=1}^{N} Z_i^{2,j}(\alpha)\right] - NP_p$$

De esta forma, la variable borroso aleatoria $\hat{\tilde{L}}_p^C$, la cual no es más que una aproximación de $\tilde{L}_p^C$, vendrá dada por sus realizaciones, $\tilde{L}_{pi}^C$, i=1,2,…,M, que son equiprobables, es decir, tienen como probabilidad asociada $\frac{1}{M}$. Así, las funciones de cuantía inferiores y superiores para un nivel α de $\hat{\tilde{L}}_p^C$, vendrán dadas por:

$$\hat{L}_p^{1,C}(\alpha)=\hat{L}_{pi}^{1,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, i=1,...,M.$$

$$\hat{L}_p^{2,C}(\alpha)=\hat{L}_{pi}^{2,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, i=1,...,M.$$

6.3. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA UNA CARTERA DE PÓLIZAS IDÉNTICAS TRAS HABERSE COBRADO LA PRIMA PURA ÚNICA. FIJACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD

Como en el caso de un único asegurado, utilizaremos en nuestro análisis las variables aleatorias inferior y superior que definen a $\hat{\tilde{L}}_p^C$, $\hat{L}_p^{1,C}(\alpha)$ y $\hat{L}_p^{2,C}(\alpha)$ respectivamente. Para el análisis que pretendemos llevar a cabo, será útil presentar sus funciones de cuantía con las realizaciones ya expresadas en orden creciente. Así reformularemos las variables aleatorias inferior y superior de la pérdida para el asegurador con todo el colectivo como:

$$\hat{L}_p^{i,C}(\alpha)=\hat{L}_{pr}^{i,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, r=1,...,M, \;\; i=1,2.$$

y donde $\hat{L}_{pr}^{1,C}(\alpha)\leq \hat{L}_{pr+1}^{1,C}(\alpha)$. En esta variable borroso aleatoria no podemos asegurar que el extremo inferior (o superior) del α-corte de una determinada realización ocupe la misma posición en la ordenación para todos los niveles de presunción que sean tomados, y por supuesto, el orden que ocupe uno de los extremos (por ejemplo el inferior) no necesariamente coincidirá con el orden que ocupe el otro (por ejemplo, el superior).

Así, la función de distribución borrosa de la pérdida que genera el colectivo asegurado para un valor del recargo colectivo X^C dado y cierto, $\hat{\tilde{F}}^C\left[X^C\right]$, será un número borroso discreto, ya que su referencial es {0, $\frac{1}{M}$, $\frac{2}{M}$,…,$\frac{M}{M}$}. Para un nivel de presunción dado, la probabilidad acumulada por X^C vendrá dada por sus α-cortes, $\hat{F}^C\left[X^C\right]_\alpha$. La función de distribución inferior de dicho α-corte $\hat{F}^{1,C}\left[X^C\right](\alpha)$, vendrá dada por la variable aleatoria superior $\hat{L}_p^{2,C}(\alpha)$, y la superior $\hat{F}^{2,C}\left[X^C\right](\alpha)$, vendrá dada por la variable aleatoria inferior asociada a dicho nivel de presunción $\hat{L}_p^{1,C}(\alpha)$. Así, para i=1,2, obtenemos las funciones de distribución inferior y superior como:

$$F^{3-i}[X](\alpha)=\begin{cases}0 & \text{si } X^C < L_{pr}^i(\alpha)\\ \dfrac{r}{M} & \text{si } L_{pr}^i(\alpha)\le X < L_{p(r+1)}^i(\alpha),\ r=1,2,\ldots,M-1\\ 1 & X^C \ge L_{pM}^i(\alpha),\ r=M\end{cases}$$

Y a partir de ésta, hallamos los α-cortes de los 1-ε cuantiles, $\hat{\tilde{Q}}^{\varepsilon,C}$ notándose estos intervalos de confianza como $\hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C}=\left[\hat{Q}^{1\varepsilon,C}(\alpha),\hat{Q}^{2\varepsilon,C}(\alpha)\right]$. En concreto, $\hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C}$ es, dependiendo de la probabilidad de insolvencia ε que se tome:

Si $\frac{r}{M}<1\text{-}\varepsilon\le\frac{r+1}{M}$:

$$\hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C}=\left[L_{p(r+1)}^{1,C}(\alpha),L_{p(r+1)}^{2,C}(\alpha)(\alpha)\right],\ r=0,\ldots,M\text{-}1.$$

Una vez hemos elegido el nivel ε para el cual pretendemos asegurar la solvencia del asegurador, deberemos hallar la cuantía borrosa a repercutir al asegurado, $\tilde{Q}^\varepsilon=\frac{\hat{\tilde{Q}}^{\varepsilon,C}}{N}$. Para un nivel de aversión al riesgo de interés β' del asegurador, la cuantía a repercutir en concepto de recargo para desviaciones de siniestralidad, vendrá dada por su valor esperado para dicho nivel de aversión β', y será, si hemos tomado un ε tal que $\frac{r}{M}<1\text{-}\varepsilon\le\frac{r+1}{M}$:

$$Q^\varepsilon=\frac{1}{N}\left[(1-\beta')\int_0^1 L_{p(r+1)}^{1,C}(\alpha)d\alpha+\beta'\int_0^1 L_{p(r+1)}^{2,C}(\alpha)d\alpha\right],\ r=0,\ldots,M\text{-}1.$$

6.4. APLICACIONES NUMÉRICAS

Analizamos a continuación el proceso a seguir para la fijación de las primas únicas correspondientes a un seguro de vida entera asociado a unos colectivos de N1=5 y N2=10 individuos de 35 años y con un capital asegurado en caso de fallecimiento de 1000 unidades monetarias. La fijación de la prima única para éste contrato ya fue analizado, bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera, en el apartado 4.4. de esta parte de la tesis, y suponiendo un colectivo elevado en el apartado 5.4. Como siempre, se ha supuesto un interés técnico $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ aplicable durante toda la vida del contrato y se han tomado las tablas de mortalidad PEM-82. Asimismo, el número de trayectorias simuladas para ambos colectivos han sido M=100. Como en el apartado 5.4., analizaremos:

a) La solvencia del asegurador en el caso en que únicamente cobre a cada individuo del colectivo la prima pura con un coeficiente β=0'75.
b) La determinación del recargo para desviaciones de siniestralidad, tomándose también β'=0'75. En este caso consideraremos una probabilidad de insolvencia ε=0'05.
c) La posición de solvencia del asegurador después de haber cargado $Q^{0'05}$ a la prima pura de todos los asegurados.

Respecto a los datos más relevantes de este seguro, ya presentados en anteriores epígrafes, si la cartera se componía de un único individuo, es:

P_p (β=0'75)	$V^*[L_p]$	$D^*[L_p]$	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
320'95	18906'87	137'5	277'29	84'46%	1'47%	201'67%

Asimismo los resultados obtenidos para colectivos de 50 y 100 personas eran:

	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
N1=50	38,97	12%	0,21%	28%
N2=100	29,89	9%	0,16%	22%

Para los dos colectivos que analizaremos, observamos que el encaje de primas puras es, en el primero (N1=5): 320'95·5 = 1604'75; y para el segundo (N2=10): 320'95·10 = 3209'5.

Hallamos a continuación $\hat{\tilde{F}}^C[0]$, para ambos colectivos. Esta función será expresada a través de sus α-cortes, $\hat{F}^C[0]_\alpha$, que vendrán delimitados por el extremo inferior $\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$ y el superior $\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$. Así, la función de distribución, $\hat{\tilde{F}}^C[0]$, nos informará sobre la solvencia del asegurador si no cobra ningún recargo para desviaciones de siniestralidad.

	N1=5		N2=10	
α	$\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$
0	0'01	0'98	0	1
0,1	0'01	0'98	0	1
0,2	0'02	0'98	0	1
0,3	0'06	0'98	0'4	0'99
0,4	0'1	0'98	0'11	0'99

0,5	0’15	0’97	0’17	0’97
0,6	0’23	0’93	0’27	0’96
0,7	0’32	0’88	0’43	0’96
0,8	0’47	0’84	0’49	0’92
0,9	0’55	0’78	0’62	0’81
1	0’63	0’63	0’68	0’68

A continuación analizamos como fijar los recargos para conseguir que la probabilidad de pérdida sea ε=5%. Para ello obtenemos en los dos casos $Q_{\alpha}^{0'05,C}$ y $Q_{\alpha}^{0'05}$.

N1=5

α	$\hat{Q}^{1,0'05,C}(\alpha)$	$\hat{Q}^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-359,65	1055,99	-108,63	180,67
0,1	-315,63	980,48	-97,38	164,94
0,2	-252,57	907,75	-85,35	149,82
0,3	-182,76	837,69	-72,49	135,27
0,4	-109,57	770,19	-58,73	121,28
0,5	-34,96	705,14	-43,98	107,82
0,6	41,44	642,43	-28,18	94,86
0,7	124,95	581,98	-11,21	82,39
0,8	214,40	523,67	7,01	70,38
0,9	310,29	467,44	26,60	58,82
1	413,18	413,18	47,68	47,68

N2=10

α	$\hat{Q}^{1,0'05,C}(\alpha)$	$\hat{Q}^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-1086,31	1806,70	-71,93	211,20
0,1	-973,75	1649,40	-63,13	196,10
0,2	-853,50	1498,16	-50,51	181,55
0,3	-724,90	1352,71	-36,55	167,54
0,4	-587,27	1212,80	-21,91	154,04
0,5	-439,85	1078,18	-6,99	141,03
0,6	-281,78	948,62	8,29	128,49
0,7	-112,14	823,90	24,99	116,40
0,8	70,06	703,82	42,88	104,73
0,9	265,96	588,17	62,06	93,49
1	476,76	476,76	82,64	82,64

Para hallar el valor del recargo a aplicar, aproximamos el intervalo esperado de $\widetilde{Q}^{\varepsilon}$, Q^{ε}, de la forma comentada en el epígrafe 6.4. Como trabajaremos con una escala endecadaria, observamos que los extremos inferior y superior del intervalo esperado vendrán dados aproximadamente por:

$$E^{i}\left[\widetilde{Q}^{\varepsilon}\right] \approx \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{n} Q^{i\varepsilon}\left(\frac{i}{10}\right), \ i=1,2.$$

De esta forma, los resultados que se obtienen, si el recargo individual, $Q^{0'05}$, se fija aplicando un parámetro β'=0'75 sobre EI[$\widetilde{Q}^{0'05}$]:

	EI[$\widetilde{Q}^{\varepsilon}$]	$Q^{0'05}$	P_R	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
N1=5	[-2,74, 143,38]	106,85	427,8	33,29%	0,57%	77,71%
N2=10	[-38,61, 110,36]	73,12	394,07	22,78%	0,39%	53,18%

Podemos observar en este cuadro, y en los que resumíamos el valor de las magnitudes más relevantes respecto al recargo a aplicar para un único asegurado en cartera, y las obtenidas en el apartado 5.4., que a medida que aumenta el colectivo asegurado, el recargo a aplicar siempre tiende a disminuir.

A continuación hallamos los extremos de los α-cortes de $\hat{\widetilde{F}}^{C}[106'85 \cdot 5]$ y $\hat{\widetilde{F}}^{C}[73'12 \cdot 10]$ en los colectivos que estamos analizando. Éstos son:

	N1=5		N2=10	
α	$\hat{F}^{1,C}[534,25](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[534,25](\alpha)$	$\hat{F}^{1,C}[731'2](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[731'2](\alpha)$
0	0'33	1	0'16	1
0,1	0'52	1	0'24	1
0,2	0'65	1	0'44	1
0,3	0'76	1	0'57	1
0,4	0'82	0'99	0'67	1
0,5	0'85	0'99	0'76	1
0,6	0'9	0'99	0'85	1
0,7	0'93	0'99	0'92	1
0,8	0'95	0'98	0'96	0'98
0,9	0'98	0'98	0'96	0'97
1	0'98	0'98	0'96	0'96

Podemos comprobar nuevamente que, al elegirse β'=0'75, aseguramos un nivel de solvencia del 95% para escenarios moderadamente adversos en la rentabilidad obtenida con la inversión de las primas. Si fueran muy adversos (rentabilidades bajas, dentro de las que el asegurador estima como posibles), éste sufre un margen de intermediación negativo, y por tanto, su solvencia disminuye, pudiéndose enjugar únicamente el insuficiente rendimiento de la cartera activa con un comportamiento extremadamente benigno en la mortalidad. Esto es más acusado para el colectivo N2=10, ya que las pérdidas que en términos absolutos se producen por un escenario adverso del tipo de interés es mayor, y por tanto, la posición de solvencia de la compañía acaba siendo peor.